

Notes sur le cours "Géomorphogénèse"

B. Andreotti

M3b 2009/2010

Chapitre 1 Ecoulements gravitaires

1 De l'origine du paysage

1.1 Typologie des écoulements gravitaires

Les paysages de surface sont modélés par l'érosion et le transport mais aussi par le simple effet de la gravité en présence de pentes. Dans la mesure où les écoulements gravitaires transportent la masse le long des pentes, ils érodent les reliefs pour combler les zones dépressionnaires. Si il n'en résulte pas aux temps géologiques une surface relativement plate, c'est que trois mécanismes conduisent à restaurer du relief. Le plus important est le processus de soulèvement associé à la tectonique des plaques. Le soulèvement dit orogénique est le résultat de la collision des plaques tectoniques et aboutit à des chaînes de montagne ou à une élévation plus modeste d'une large région. Le soulèvement dit isostatique traduit une élévation progressive qui compense l'érosion d'une chaîne de montagne: suite à son allègement par transfert de matière vers les plaines, le sol remonte grâce à la poussée d'Archimède. Bien que, globalement, l'érosion et le transport fluviaux conduisent à un transfert de masse le long des pentes, ces effets créent également du relief. Lors de l'incision d'une rivière dans un sol cohésif, des berges se créent, dont la pente transverse conduit à du transport gravitaire. Enfin, les volcans sont des reliefs formés par l'éjection et l'empilement de matériaux issus de remontées magmatiques en provenance du manteau. Leur forme conique traduit une régulation de la pente à sa valeur seuil.

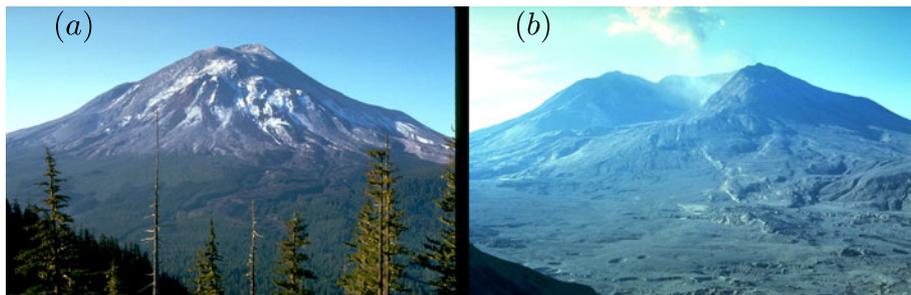


Figure 1: Photographies du mont Saint Helens juste avant (a) et juste après (b) son éruption catastrophique du 18 mai 1980. Un énorme glissement de terrain fit passer l'altitude du volcan de 2 950 à 2 549 mètres, déplaçant un volume de $2,3\text{km}^3$ de débris. On peut remarquer que le sommet a été remplacé par un cratère en forme de fer à cheval d'une largeur de 1,5 kilomètres. L'énorme coulée pyroclastique qui s'ensuivit a recouvert la végétation et les habitations sur 600km^2 .

Les différents modes de transport induits par la gravité se distinguent par leurs échelles de temps ou de vitesse:

- La reptation du sol correspondant à un écoulement moyen a une vitesse de l'ordre du millimètre par an. Elle provient des cycles de dilatation et de contraction de la couche de sol

superficielle sous l'effet de l'alternance entre saisons sèche et humide. Ce mouvement est accentué par le brassage du sol par la végétation et la faune. Lorsque la reptation provient des cycles alternant gel et dégel, sur un substrat gelé et donc imperméable, on parle de solifluction. Les mouvements peuvent atteindre la dizaine de centimètres par jour.

- Les écoulements de débris se distinguent par la nature du fluide interstitiel. Les avalanches rocheuses coulent typiquement autour du mètre par seconde. Dans certains cas, le fluide ralentit le mouvement. Par exemple, les glaciers de roches, constitués de roche et de glace, coulent à quelques centimètres par an. Dans d'autres cas, le fluide lubrifie l'écoulement rocheux, comme dans les cas des laves torrentielles (mélange d'eau et de sédiments), des Lahars (laves torrentielles provenant de débris volcaniques), des coulées de boues ou des avalanches sous-marines. Les vitesses sont alors de l'ordre de dix mètres par seconde.
- On parle de glissements de terrain lorsque de grandes masses de rochers ou de sédiments descendent le long de la plus grande pente de manière cohérente. On a dans ce cas une localisation du cisaillement en une ou plusieurs bandes. Contrairement aux écoulements de débris, la masse déplacée reste reconnaissable après le glissement de terrain. Sauf franchissement brusque du seuil, les vitesses des glissements de terrain sont de l'ordre de dix mètres par an.

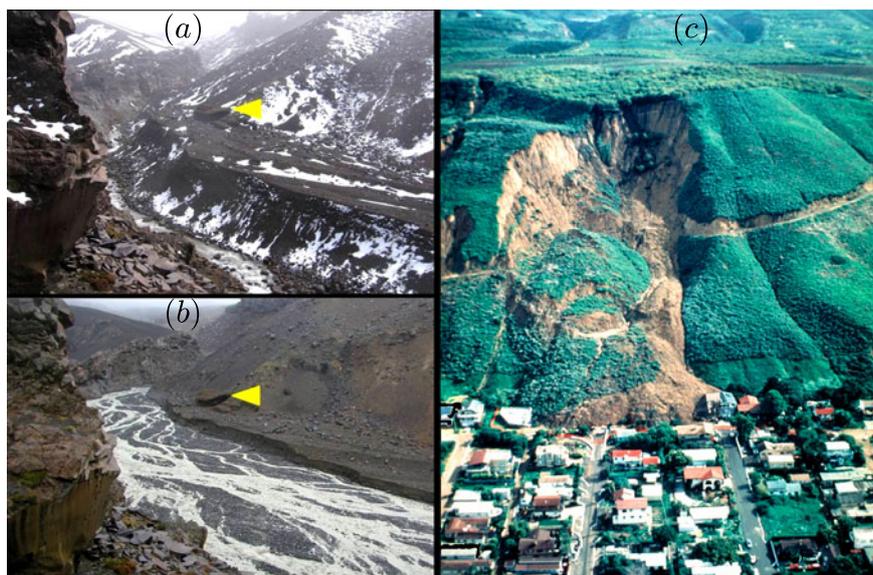


Figure 2: (a) Lahar sur les flancs d'un volcan – la photographie du haut montre le chenal avant la coulée. (b) Glissement de terrain de La Conchita. La cohérence du bloc argileux, marquée par la route et la verdure, reste remarquable.

Plusieurs facteurs favorisent la nucléation d'écoulements gravitaires de grande taille. Dans un grand nombre de cas, c'est la présence d'eau interstitielle qui explique le déclenchement. En particulier, l'accumulation d'eau au niveau des couches imperméables peut produire une liquéfaction des couches argileuses, conduisant à la formation d'une surface de rupture permettant la rotation d'une "lentille" de sol ou la translation d'un bloc. L'absence de végétation, liée en particulier à la déforestation, favorise les catastrophes gravitaires par un effet remarquablement simple: la baisse du seuil de mise en mouvement des matériaux. Enfin, les séismes peuvent jouer le rôle de perturbation d'amplitude finie conduisant à la nucléation d'avalanches.



Figure 3: Glissement de terrain de Franck (Rocheuses, Canada) datant du 29 Avril 1903. 74 millions de tonnes (30 millions de mètres cubes, soit 650 mètres de haut par 900 m de large par 150 m d'épaisseur) de calcaire se sont détachés de la montagne, recouvrant trois kilomètres carrés de vallée.

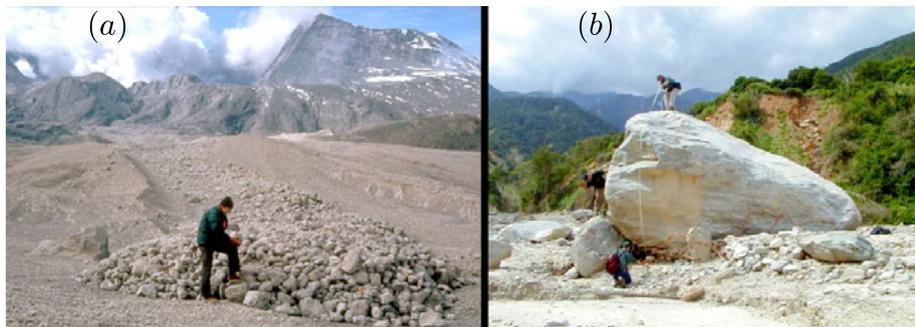


Figure 4: Illustration de la variabilité granulométrique des écoulements de débris. La photographie de gauche, prise au mont Saint Helens, montre une épaisseur d'arrêt relativement faible, de quelques tailles de grains.

1.2 Avalanches de neige

S'il est vrai que la neige est formée de grains, c'est un matériau granulaire bien plus complexe qu'une assemblée de particules solides et non cohésives telle que nous l'étudions dans cet ouvrage (ref these pierre rognon). Tout d'abord, la neige peut exister sous de nombreuses formes. Selon les conditions météorologiques et l'instant où on l'étudie, le grain de neige peut être un flocon s'imbriquant avec ses voisins pour former un manteau neigeux aéré (neige fraîche), une petite particule de glace reliée aux autres par des ponts solides ou capillaires (grain fin, neige humide) ou encore un amas peu cohésif (gobelet, neige roulée). De même, il existe des modes variés de déclenchement et d'écoulement d'avalanches. L'avalanche peut partir en plaque, quand une couche de neige stabilisée par le vent repose sur un manteau moins cohésif, ou démarrer de façon ponctuelle dans le cas de neige fraîche ou humide. On distingue principalement deux modes d'écoulement. Les avalanches denses (figure 5a), composées de grains fins ou humide, se caractérisent par une forte

masse volumique (de 50 à 400 kg/m³), une épaisseur de l'ordre du mètre et une vitesse allant de 10 à 80 km/h. La dynamique des avalanches denses est dominée par les contacts entre grains. L'autre grand type d'écoulement sont les avalanches aérosols (figure 5b). Elles sont constituées d'une suspension peu dense de grains (environ 1 kg/m³) dans l'air ambiant. Leur hauteur peut atteindre plusieurs dizaines de mètres pour des vitesses pouvant aller jusqu'à 300 km/h. La dynamique de ces écoulements est essentiellement dominée par les interactions avec le fluide ambiant turbulent. Il est à noter que les avalanches aérosols sont en général accompagnées par un écoulement dense en dessous.

D'un point de vue rhéologique, les avalanches de neige dense ont des points communs avec les écoulements granulaires dans le régime liquide. En particulier, leur résistance à l'écoulement semble assez bien décrite par une loi frictionnelle, pour laquelle la contrainte tangentielle est proportionnelle à la contrainte normale. Cependant, la dépendance du coefficient de friction effectif de ce milieu (avec la vitesse, la pression, etc) fait encore l'objet de recherche. Une difficulté provient du fait que la taille des grains évolue au cours de l'écoulement par formation d'agrégats. Cette dynamique se combine à la ségrégation pour former une stratification dans l'épaisseur de la couche en écoulement, dans laquelle les petits grains se retrouvent à la base de l'écoulement et les gros à la surface libre. Il en résulte un profil de vitesse fortement cisailé près du fond et quasiment uniforme en surface (figure 5c).

Pour les applications pratiques en géotechnique (prévention des risques), on utilise en général des expressions *ad hoc* pour le coefficient de friction, qui sont introduites dans des modèles hydrodynamiques de type Saint-Venant (chapitre 6). Moyennant une calibration du modèle, il est possible de reproduire certaines trajectoires d'avalanche sur des topographies complexes. Ce domaine reste cependant encore largement empirique.

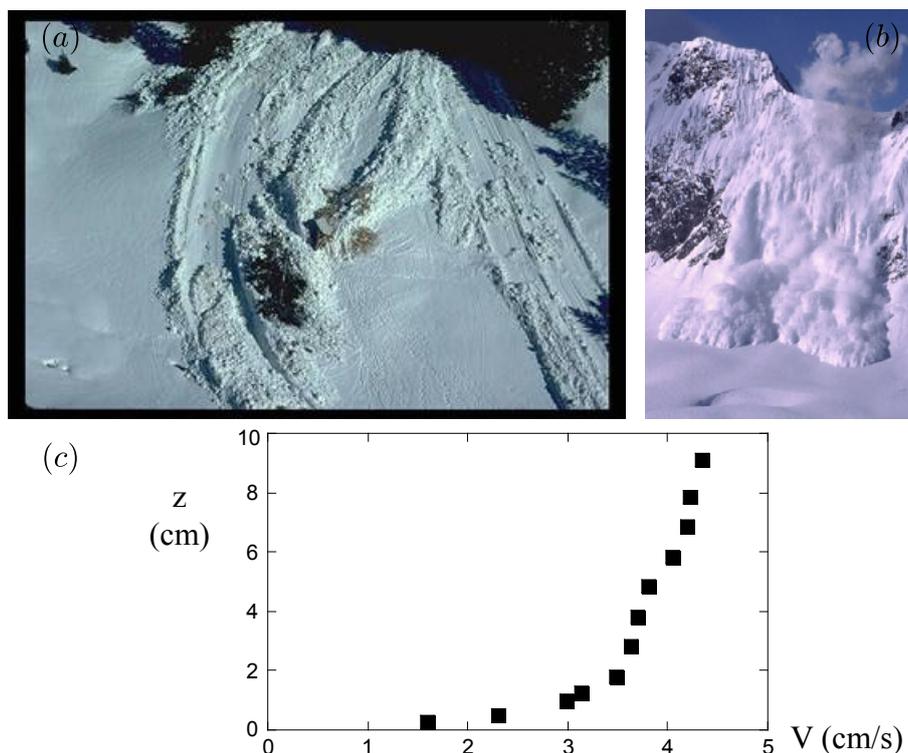


Figure 5: a) Avalanche dense. <http://www.avalanches.fr/epaclpa/autresressources/photo/22038.jpg> F. Valla cemagref b) Avalanche en aérosol (<http://membres.lycos.fr/risquesavalanches/avalanche3.jpg>). c) Profil de vitesse d'un écoulement stationnaire de neige fraîche mesuré en paroi dans un canal (inclinaison $\theta = 37^\circ$, épaisseur $h = 9.5$ cm) (thèse pierre rognon).

1.3 Volcanisme

La lave est une roche en fusion, plus ou moins fluide, émise par un volcan lors d'une éruption. La lave est issue d'un magma, réserve de roche en fusion située dans l'épaisseur des couches rocheuses solides de la planète. Les laves, au moment où elles sont émises, atteignent des températures qui selon leur composition chimique varient de 700 à 1 200 °C. Elles se solidifient rapidement par refroidissement au contact du sol, de l'atmosphère ou de l'eau et forment alors des roches volcaniques, comme par exemple les basaltes ou les rhyolites. Les roches volcaniques, formées par le refroidissement en surface d'une lave, appartiennent à l'ensemble des roches magmatiques, conjointement avec les roches plutoniques qui sont formées par le refroidissement et la cristallisation d'un magma en profondeur (comme les granites ou les gabbros). L'accumulation des laves et des matériaux éruptifs éjectés (bombes, cendres et lapilli) construit le cône caractéristique des volcans dont la forme dépend de la viscosité de la lave et de sa teneur en gaz. Lorsque qu'une coulée de lave, fluide ou visqueuse, se crée lors d'une éruption, l'aspect de la lave et sa composition ne sont pas toujours les mêmes. En effet, la viscosité de la lave dépend de sa teneur en silice (SiO₂), si la lave est très chargée en silice, elle sera visqueuse et inversement. Cela nous permet d'expliquer le principe des volcans de type effusifs et explosifs.

Dans les volcans de type explosif, la lave émise lors d'une coulée est visqueuse et très riche en silice. Lors d'une éruption, une nuée ardente peut se créer. Des bulles de gaz se forment et remontent de la chambre magmatique. Cette poussée des gaz vers la surface s'appelle la pression des gaz. Pendant la remontée dans la cheminée, la pression est très élevée (poids de la colonne de magma) et la viscosité de la lave importante. Lorsque la pression des gaz devient supérieure à la pression de la colonne de magma, les gaz sortent brutalement et provoquent l'éjection explosive de particules et de fragments de roche en fusion (bombes, lapillis et cendres). La roche obtenue lors de telles éruptions est une roche rhyolithique. Lorsqu'un volcan explosif entre en éruption, il émet des coulées pyroclastiques, composées de cendres, de lapillis, de monceaux de lave brûlante et de lave visqueuse. Très riche en silicate, très peu fluide, dure, cette lave s'accumule le plus souvent au sommet du volcan, créant ainsi un dôme de lave. Cette lave explosive peut aller à des températures de 1 000 °C à l'extérieur, voir plus dans une chambre magmatique. Lorsque une éruption assez importante se déclenche, des pans entiers du flanc du volcan ou du dôme de lave se détachent et dévalent les pentes à des dizaines de kilomètres par heure. Ces coulées peuvent être très dangereuses pour les populations humaines, notamment par la rapidité de ses coulées, par la taille, mais surtout par la puissance de l'éruption, qui peut ensevelir et détruire une ville entière en quelques heures. De plus, ces coulées peuvent aller très loin par rapport à l'épicentre de l'éruption, ce qui augmente les chances de destruction d'une zone habitée près du volcan, même à des kilomètres de celui-ci.

Dans les volcans de type effusif, dont la lave est pauvre en silice, la lave émise lors d'une coulée est fluide. Lors de la remontée du magma dans la cheminée, les gaz n'ont aucun mal à s'échapper vers le cratère dans la lave fluide. Il n'y a donc aucune augmentation de pression pendant la remontée du magma, qui peut jaillir en fontaine de lave. Ce type de volcan peut également présenter dans leur cratère un lac permanent de lave (ex. : Kilauea-Mauna). La roche obtenue lors d'une coulée de lave effusive est une roche basaltique. Lorsque un volcan effusif entre en éruption, il émet des coulées de lave fluide caractéristiques, pauvres en silicates. La température de la lave au sortir du cratère est environ 1 200 °C. Cette lave basaltique coule à environ 20 km/h en sortant du cratère et se refroidit lentement au contact de l'air, du sol ou de l'eau, diminuant encore leur vitesse. Les coulées sont canalisées et relativement lentes. Lors d'une éruption près d'une zone habitée, des dégâts matériels peuvent être constatés, mais la lenteur de ces coulées permettent aux gens de fuir lors d'une éruption.

On distingue :

- les laves lisses (ou pahoehoe "que l'on peut parcourir pieds nus" selon le mot hawaïen) : coulée de lave très fluide avec une surface régulière, rugueuse et souvent striée
- les laves cordées : coulée de lave très fluide dont la surface montre des bourrelets superposés et entrecroisés (la mince croûte superficielle de la coulée est déformée par l'avancée de la

lave au centre de la coulée)

- les laves prismées: Certaines laves, surtout les basaltes, ont un débit en colonnes hexagonales. Ces prismes apparaîtraient lors du refroidissement de la lave (fissures de rétractation). Quand ils sont de grande taille, on parle d'orgues ou de colonnades. Les prismes sont verticaux, parfois en gerbe radiale
- les aa (selon le mot hawaïen) : laves en coulées à surface chaotique, hérissée de blocs basculés. Elle est formée par une lave très rugueuse. Une lave de ce type est moins fluide qu'un pahoehoe, mais également d'origine effusive. Le mot "aa" est un onomatopée du cri d'une personne lorsque qu'elle marche sur ce type de basalte rugueux. Cheire est un mot auvergnat, synonyme de aa.
- la lave en coussins (ou (en)pillow lava) : laves mises en place lors d'une éruption sous-marine
- les dômes, ou aiguilles : construits par des laves très visqueuses.



Figure 6: Dome



Figure 7: Coulée pyroclastique

2 De Navier-Stokes à Stokes

Pour un fluide visqueux newtonien et lorsque l'écoulement est incompressible, l'équation de l'énergie est découplée des équations de continuité et de quantité de mouvement, c'est-à-dire qu'on peut déterminer la vitesse et la pression indépendamment de l'équation de l'énergie. L'expression des

équations de continuité et de quantité de mouvement sont considérablement simplifiées.

Le principe fondamental de la dynamique s'écrit:

$$\frac{d}{dt} \int_{V_m} \rho \vec{v} dV = \vec{\mathcal{R}}$$

où $\vec{\mathcal{R}}$ est la résultante des forces s'appliquant sur le volume matériel considéré. De par le théorème de transport, on a

$$\frac{d}{dt} \int_{V_m} \rho v_i dV = \int_{V_m} \frac{\partial \rho v_i}{\partial t} dV + \oint_{\delta V_m} \rho v_i \vec{v} \cdot d\vec{S} = \int_{V_m} \left(\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + \text{div}(\rho v_i \vec{v}) \right) dV = \mathcal{R}_i$$

En passant à l'échelle particulaire, on obtient :

$$\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + \text{div}(\rho v_i \vec{v}) = v_i \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) \right) + \rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla v_i \right) = \mathcal{R}_i$$

On obtient finalement l'équation de bilan de la quantité de mouvement:

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right) = \vec{\mathcal{R}}$$

Considérons un volume V_m de matière limité par une surface fermée S . Notons $\vec{\mathcal{R}}$ la résultante des forces de surface. On a, par définition du tenseur des contraintes : $\vec{\mathcal{R}} = \iint_S \sigma \vec{n} dS$ soit, pour les composantes suivant les vecteurs \vec{e}_i , $i = 1...3$, d'une base orthonormée :

$$R_i = \sum_j \iint_S \sigma_{ij} n_j dS$$

On reconnaît dans l'intégrande le flux d'un vecteur $\vec{\sigma}_i$ de composantes $(\sigma_{i1}, \sigma_{i2}, \sigma_{i3})$. On peut donc appliquer le théorème de Stokes-Ostrogradski :

$$R_i = \iiint_V \nabla \cdot \vec{\sigma}_i dV = \sum_j \iiint_V \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} dV = \iiint_V \partial_j \sigma_{ij} dV$$

Dans le cas visqueux, nous verrons dans le deuxième cours que le tenseur des déformations s'écrit:

$$\bar{s}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$$

où x_i et v_i désignent respectivement les composantes du vecteur position et du vecteur vitesse selon la direction i . Tenseur des contraintes:

$$\bar{\sigma}_{ij} = -P \delta_{ij} + 2\eta \bar{s}_{ij}$$

η est la viscosité dynamique et s'exprime en Pa.s On obtient alors:

$$R_i = \iiint_V (2\eta \partial_j s_{ij} - \partial_i P) dV = \iiint_V (\eta (\partial_{jj}^2 v_i + \partial_i \partial_j v_j) - \partial_i P) dV$$

Considérons maintenant que le fluide à une masse volumique constante. On rappelle que l'équation de continuité appelée alors équation d'incompressibilité s'écrit:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$$

L'équation de bilan de la quantité de mouvement s'écrit finalement:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p + \nu \nabla^2 \vec{v} + \vec{f}$$

où $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ désigne la viscosité cinématique du fluide (unité SI : $m^2.s^{-1}$)
Equation de Stokes

$$\eta \nabla^2 \vec{v} = \vec{\nabla} p$$

En prenant le rotationnel de l'équation, on obtient:

$$\vec{\omega} = 0$$

En prenant la divergence de l'équation, on obtient:

$$\nabla^2 p = 0$$

Contrairement à l'équation de Navier-Stokes, l'équation de Stokes est linéaire (le terme inertiel, non-linéaire, est en effet négligeable). Les écoulements solutions de cette équation possèdent par conséquent des propriétés bien particulières :

- unicité : pour des conditions aux limites données (valeur de la vitesse au niveau des parois et/ou à l'infini), il existe un et un seul écoulement vérifiant l'équation de Stokes ;
- additivité : les solutions de l'équation de Stokes vérifient le principe de superposition : si \vec{v}_1 et \vec{v}_2 sont solutions, alors toute combinaison linéaire $\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2$ le sera aussi (ceci n'est pas incompatible avec la propriété d'unicité : seul l'écoulement vérifiant les bonnes conditions aux limites sera observé) ;
- réversibilité : si un champ de vitesse $\vec{v}(\vec{r})$ est solution de l'équation, alors $-\vec{v}(\vec{r})$ l'est aussi, à condition de changer le signe des gradients de pression, ainsi que des vitesses aux parois et à l'infini (ceci est une conséquence directe du principe de superposition) ; cette propriété est contraire à notre intuition, fondée sur notre expérience des écoulements macroscopiques : la réversibilité des écoulements à bas nombre de Reynolds a ainsi poussé les êtres vivants de très petite taille à développer des moyens de propulsion originaux.
- paradoxe de Stokes : Il faut prendre garde au fait que les solutions mathématiques de l'équation de Stokes, dans un cas donné ou dans certaines régions du domaine de solution, peuvent être physiquement fausses. Ceci est dû au "paradoxe de Stokes" à savoir que les conditions physiques permettant de ramener l'équation de N-S à l'équation de Stokes ne sont pas nécessairement réalisées dans tout le domaine de solution, a priori. On aboutit alors à des solutions présentant des comportements potentiellement aberrants dans certaines limites. C'est le cas par exemple "à l'infini" où souvent le terme inertiel finit par l'emporter sur le terme visqueux, sans qu'on puisse le préjuger a priori.

3 Approximation de lubrification

Lorsqu'un liquide est fortement confiné entre deux surfaces, c'est-à-dire que l'épaisseur de liquide est très faible devant les dimensions transversales des parois confinantes, il est possible de simplifier fortement l'équation de Navier-Stokes qui gouverne son écoulement : c'est l'approximation de lubrification, qui permet en particulier de décrire l'écoulement du liquide dans les contacts lubrifiés.

En effet, si $H \ll L$ (où H est l'épaisseur moyenne entre les parois, et L est la dimension transversale caractéristique des parois), alors :

- la composante de la vitesse parallèle aux parois est très grande devant la composante perpendiculaire, que l'on peut négliger ;
- la vitesse varie essentiellement dans la direction perpendiculaire aux parois : on peut donc négliger les dérivées de la vitesse par rapport aux coordonnées parallèles aux parois devant les dérivées par rapport à la coordonnée perpendiculaire ;
- on peut considérer que la pression est constante dans la direction perpendiculaire aux parois.

Un aspect essentiel de cette approximation est que l'on peut négliger le terme inertiel - retrouvant ainsi l'équation de Stokes- lorsque $Re \ll (L/H)$ (où Re est le nombre de Reynolds associé à l'écoulement), condition beaucoup moins restrictive que la condition habituelle $Re \ll 1$ dès lors que L est très grand devant e .

On part de l'équation de Navier-Stokes:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \overrightarrow{\text{grad}} p + \nu \Delta \vec{v},$$

où : $\vec{v}(\vec{r}, t)$ est la vitesse du fluide ; $p(\vec{r}, t)$ est la pression dans le fluide ; ρ est la masse volumique du fluide ; ν est la viscosité cinématique du fluide ; t représente le temps ; $\overrightarrow{\text{grad}}$ et Δ sont respectivement les opérateurs différentiels gradient et laplacien.

Dans le cas d'un écoulement laminaire parfaitement parallèle (par exemple dans une conduite cylindrique), le terme inertiel présent dans l'équation de Navier-Stokes est rigoureusement nul :

$$(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v} = \vec{0}.$$

Dans le cas d'un écoulement permanent, c'est-à-dire invariant dans le temps, la dérivée temporelle de la vitesse s'annule et on retrouve alors l'équation de Stokes, et ce quelle que soit la valeur du nombre de Reynolds. Lorsque les parois et donc l'écoulement ne sont pas tout à fait parallèles, dans quelle mesure est-il possible de négliger tout de même le terme inertiel ?

Considérons un liquide quasi-parallèle, par exemple confiné entre deux parois. Afin de simplifier cette étude, on se restreint à un écoulement à deux dimensions (le résultat reste valable pour un écoulement à trois dimensions). On peut projeter l'équation de Navier-Stokes sur les axes Ox et Oy :

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial t} + \left(v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} + \left(v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) \end{aligned}$$

On note e l'épaisseur moyenne entre les parois, et L l'échelle de variation typique de l'épaisseur (par exemple : taille du contact lubrifié ou période caractéristique de la rugosité des surfaces). On suppose que e est très petit devant L : $e \ll L$. L'angle formé par les deux surfaces confinant le liquide est de l'ordre de $\mathcal{O}(\Delta e/L) \sim \mathcal{O}(e/L)$.

On peut alors estimer l'ordre de grandeur des termes présents dans l'équation de Navier Stokes. En notant U la vitesse typique (vitesse moyenne) du liquide parallèlement aux parois et en utilisant l'incompressibilité, on peut estimer l'ordre de grandeur des composantes de la vitesse : $v_x = \mathcal{O}(U)$ et $v_z = \mathcal{O}(Ue/L)$. Si l'épaisseur e est très petite devant la longueur L , on pourra donc négliger v_z devant v_x . Ainsi, dans l'équation de Navier-Stokes, les termes faisant intervenir v_z seront négligeables devant ceux faisant intervenir v_x . La projection sur Oy de l'équation de Navier-Stokes se simplifie alors en:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = 0,$$

indiquant que la variation de pression dans la direction perpendiculaire aux parois peut être négligée.

D'autre part l'échelle de variation de la vitesse perpendiculairement aux parois sera imposée par l'épaisseur H entre celles-ci. La dérivée de la vitesse par rapport à y sera donc de l'ordre de la valeur typique de la vitesse sur la longueur de variation typique, soit :

$$\frac{\partial v_x}{\partial z} = \mathcal{O} \left(\frac{U}{H} \right).$$

De même, l'échelle de variation de la vitesse parallèlement aux parois sera L et :

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = \mathcal{O} \left(\frac{U}{L} \right).$$

En suivant la même démarche, on peut estimer les dérivées secondes de la vitesse selon y :

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} = \mathcal{O}\left(\frac{U}{H^2}\right);$$

et selon x :

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} = \mathcal{O}\left(\frac{U}{L^2}\right).$$

A partir de ces estimations, il est possible de comparer les amplitudes des différents termes intervenants dans l'équation de Navier-Stokes. On remarque tout d'abord que dans le terme visqueux, la dérivée seconde de la vitesse par rapport à x , de l'ordre de U/L^2 , sera négligeable devant la dérivée seconde par rapport à y , de l'ordre de U/H^2 , lorsque H est très petit devant L . Le terme visqueux se réduit alors à :

$$\nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} = \mathcal{O}\left(\nu \frac{U}{H^2}\right).$$

Les deux composantes du terme inertiel seront par contre du même ordre de grandeur :

$$\begin{aligned} v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} &= \mathcal{O}\left(U \frac{U}{L}\right) = \mathcal{O}\left(\frac{U^2}{L}\right); \\ v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} &= \mathcal{O}\left(U (H/L) \frac{U}{H}\right) = \mathcal{O}\left(\frac{U^2}{L}\right). \end{aligned}$$

Le terme inertiel sera donc négligeable devant le terme visqueux lorsque :

$$\frac{U^2}{L} \ll \nu \frac{U}{H^2}, \text{ soit : } \frac{U H}{\nu} \ll \frac{L}{H}.$$

On reconnaît dans le premier membre le nombre de Reynolds associé à l'écoulement. La condition de validité de l'approximation de lubrification s'écrit donc : $Re \ll \frac{L}{H}$, avec $H \ll L$.

En régime permanent, l'écoulement du liquide est finalement gouverné par le jeu d'équations suivant :

$$\begin{aligned} \eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} &= \frac{\partial p}{\partial x}; \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= 0; \end{aligned}$$

Cette démonstration peut se faire de manière un peu différente, en adimensionnant les équations par ρ , U , L et H .

$$t = (L/U)t', \quad x = Lx', \quad z = Hz', \quad u_x = Uu'_x, \quad u_z = U \frac{H}{L} u'_z, \quad p = \rho U^2 p', \quad (1)$$

L'équation de conservation de la matière s'écrit :

$$\frac{\partial u'_x}{\partial x'} + \frac{\partial u'_z}{\partial z'} = 0 \quad (2)$$

L'équation de la dynamique en x se réécrit :

$$\frac{U^2}{L} \frac{\partial u'_x}{\partial t'} + \frac{U^2}{L} \left(u'_x \frac{\partial u'_x}{\partial x'} + u'_z \frac{\partial u'_x}{\partial z'} \right) = -\frac{U^2}{L} \frac{\partial p'}{\partial x'} + \frac{\nu U}{H^2} \left(\frac{H^2}{L^2} \frac{\partial^2 u'_x}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 u'_x}{\partial z'^2} \right) \quad (3)$$

et celle en z :

$$\frac{H}{L} \left[\frac{U^2}{L} \frac{\partial u'_z}{\partial t'} + \frac{U^2}{L} \left(u'_x \frac{\partial u'_z}{\partial x'} + u'_z \frac{\partial u'_z}{\partial z'} \right) \right] = -\frac{U^2}{H} \frac{\partial p'}{\partial z'} + \frac{H \nu U}{L H^2} \left(\frac{\partial^2 u'_z}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 u'_z}{\partial z'^2} \right) \quad (4)$$

Les ordres de grandeur apparaissent alors dans l'équation directement et conduisent aux mêmes équations simplifiées.

4 Coulées: solutions propagatives

Considérons une coulée de boue ou de lave sur une pente d'angle θ . Il faut alors prendre en compte la gravité dans les équations. En omettant les termes d'ordre H/L et plus petit, on obtient à l'ordre dominant:

$$0 = g \sin \theta - \frac{U^2}{L} \frac{\partial p'}{\partial x'} + \frac{\nu U}{H^2} \frac{\partial^2 u'_x}{\partial z'^2} \quad (5)$$

ou, sous sa forme dimensionnée,

$$0 = g \sin \theta - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \quad (6)$$

Selon la direction transverse, on obtient:

$$0 = -g \cos \theta - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \quad (7)$$

On obtient donc que la distribution de pression est hydrostatique (donc $P = \mathcal{O}(\rho g H \cos \theta)$), et que l'échelle de vitesse est donnée par:

$$U = \frac{H}{L} \frac{g H \cos \theta}{\nu} \quad (8)$$

L'air applique une contrainte négligeable sur la surface libre:

$$(-p\delta_{ij} + \sigma_{ij}) n_j = 0, \quad i = x, z. \quad (9)$$

ou

$$-pn_x + X_{xx}n_x + \sigma_{xz}n_z = 0 \quad (10)$$

$$-pn_z + X_{zx}n_x + \sigma_{zz}n_z = 0. \quad (11)$$

en $y = h$. Le vecteur normal a deux composantes:

$$n_x = -\frac{\frac{\partial h}{\partial x}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2}} \simeq -\frac{\partial h}{\partial x}, \quad n_z = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2}} \simeq 1 \quad (12)$$

A l'ordre dominant, la condition aux limites à la surface $z = h(x, t)$ de la coulée s'écrit donc: $\sigma_{xz} = 0$ et $-p + \sigma_{zz} = 0$, ce qui donne:

$$\frac{\partial u_x}{\partial z} = 0 \quad (13)$$

pour les contraintes tangentielles et

$$p = 0 \quad (14)$$

pour la contrainte normale. Il s'ensuit par intégration que:

$$p(x, z, t) = \rho g \cos \theta [h(x, t) - z] \quad (15)$$

L'équation de conservation de la quantité de mouvement longitudinale s'écrit alors, en utilisant que u_x et u_z sont nul sur le sol:

$$u_x = -\frac{\rho g}{\eta} \left(\sin \theta - \cos \theta \frac{\partial h}{\partial x} \right) \left(\frac{z^2}{2} - hz \right) \quad (16)$$

La surface libre est matérielle. Cela signifie que la vitesse de l'interface (selon la normale) est égale à la vitesse normale du fluide au même endroit:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + u_x \frac{\partial h}{\partial x} = u_z, \quad y = h(x, t) \quad (17)$$

De manière équivalente, on peut écrire la conservation de la matière sur une tranche de fluide:

$$\int_0^h \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h u_x dz - u_x(x, h, t) \frac{\partial h}{\partial x} + u_z(x, h(x, t), t) = 0$$

qui se réécrit:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^h u_x dz \right) = \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{u}h)}{\partial x} = 0 \quad (18)$$

où q représente le débit à travers une tranche et \bar{u} la vitesse horizontale moyenne:

$$\bar{u} = \frac{q}{h} = \frac{1}{h} \int_0^h u_x dz \quad (19)$$

Le débit total s'obtient par intégration:

$$q = \bar{u}h = \int_0^h u dy = \frac{\rho g h^3}{3\eta} \left(\sin \theta - \cos \theta \frac{\partial h}{\partial x} \right) \quad (20)$$

Combiné avec la conservation de la matière, cela donne l'équation finale:

$$\boxed{\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\rho g}{3\eta} \frac{\partial}{\partial x} \left[h^3 \left(\sin \theta - \cos \theta \frac{\partial h}{\partial x} \right) \right]} = 0 \quad (21)$$

Il s'agit d'une équation de diffusion non-linéaire de la hauteur de fluide.

Dans le cas particulier d'un écoulement stationnaire et homogène ($\partial/\partial x \equiv 0$), le profil de vitesse prend la forme:

$$u_x = \frac{\rho g h^2}{\eta} \sin \theta \left(\frac{y}{h} - \frac{y^2}{2h^2} \right) \quad (22)$$

où h est constant. Le débit correspondant vaut:

$$q = \frac{\rho g h^3}{3\eta} \sin \theta \quad (23)$$

On cherche une solution sous la forme d'une coulée se propageant sans changer de forme. Long du front, la hauteur tend vers une constante h_∞ et la vitesse vers:

$$u_\infty = \frac{\rho g h^2}{3\eta} \sin \theta \quad (24)$$

Par conservation de la matière, u_∞ est la vitesse du front.

$$h(x, t) = h_\infty f(X), \quad X = \tan \theta \frac{x - u_\infty t}{h_\infty} \quad (25)$$

On obtient:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{dh}{dX} \frac{\partial X}{\partial t} = -u_\infty \tan \theta f', \quad \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{dh}{dX} \frac{\partial X}{\partial x} = \tan \theta f'$$

ce qui donne une équation différentielle ordinaire:

$$-\frac{df}{dX} + \frac{d}{dX} \left[f^3 \left(1 - \frac{df}{dX} \right) \right] = 0 \quad (26)$$

Par intégration, on obtient:

$$f^3 \left(1 - \frac{df}{dX} \right) = f$$

qui se réécrit:

$$dX = -\frac{f^2 df}{1-f^2} = df \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-f} + \frac{1}{1+f} \right) \right] \quad (27)$$

qui s'intègre en:

$$\boxed{f + \frac{1}{2} \log \left(\frac{1-f}{1+f} \right) = X} \quad (28)$$



Figure 8: Cascade de lave. Lave de type Pahoehoe



Figure 9: Lave de type aa vs Pahoehoe



Figure 10: Lave de type Pahoehoe

5 Avalanches: méthode des caractéristiques

Considérons un problème aux dérivées partielles de la forme:

$$\sum_{i=1}^n a_i(x_1, \dots, x_n, u) \frac{\partial u}{\partial x_i} = c(x_1, \dots, x_n, u).$$

où les a_i dépendent de la fonction mais pas de ses dérivées. Les caractéristiques sont des fonctions paramétrées par s :

$$(x_1, \dots, x_n, u) = (x_1(s), \dots, x_n(s), u(s))$$

de sorte que l'équation soit vérifiée:

$$\begin{aligned} \frac{dx_i}{ds} &= a_i(x_1, \dots, x_n, u) \\ \frac{du}{ds} &= c(x_1, \dots, x_n, u) \end{aligned}$$

On applique cette méthode à l'équation obtenue en négligeant le terme d'étalement par la pression:

$$\boxed{\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\rho g \sin \theta}{3\eta} \frac{\partial h^3}{\partial x} = 0} \quad (29)$$

Ici nous avons $x_1 = t$ et $a_1 = 1$, puis $x_2 = x$ avec $a_2 = \frac{\rho g h^2 \sin \theta}{\eta}$. Dans la mesure où il n'y a pas de terme source, on obtient $c = 0$ et donc h est indépendant de s . La hauteur est conservée le long des caractéristiques:

$$x = x_0 + \frac{\rho g h^2 \sin \theta}{\eta} t$$

6 Solutions de similitude par homothétie: dômes de lave

Sur un plan horizontal, l'équation d'évolution de la forme se réduit à une diffusion non-linéaire:

$$\boxed{\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\rho g}{3\eta} \frac{\partial}{\partial x} \left[h^3 \frac{\partial h}{\partial x} \right]} \quad (30)$$

Considérons une masse de lave de volume \mathcal{V} confiné dans une petite région. Par conservation de la matière, on a:

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(x, t) dx = \int_{-\infty}^{\infty} h(x, 0) dx = \mathcal{V} \quad (31)$$

Faisons l'analyse dimensionnelle du problème. Les deux équations s'écrivent:

$$\frac{H}{t} = \frac{\rho g}{3\eta} \frac{H^4}{L^2} \quad \text{et} \quad H L = \mathcal{V} \quad (32)$$

d'où l'on tire:

$$H = \left(\frac{3\eta \mathcal{V}^2}{\rho g t} \right)^{1/5} \quad \text{et} \quad L = \frac{\mathcal{V}}{H} = \left(\frac{\rho g \mathcal{V}^3 t}{3\eta} \right)^{1/5} \quad (33)$$

Considérons la transformation:

$$h = \left(\frac{3\eta \mathcal{V}^2}{\rho g t} \right)^{1/5} f(\xi) \quad \text{avec} \quad \xi = \left(\frac{3\eta}{\rho g \mathcal{V}^3 t} \right)^{1/5} x \quad (34)$$

ξ est une variable de similitude qui traduit la décroissance de la hauteur comme $t^{-1/5}$ et l'étalement en $t^{1/5}$. L'équation de conservation de la matière devient:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) d\xi = 1 \quad (35)$$

La dérivée temporelle s'écrit:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{1}{5t} \left(\frac{3\eta\mathcal{V}^2}{\rho g t} \right)^{1/5} [f(\xi) + \xi f'(\xi)] \quad (36)$$

et la dérivée spatiale:

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \left(\frac{3\eta}{\rho g t} \right)^{2/5} \mathcal{V}^{-1/5} f'(\xi) \quad (37)$$

Cela donne:

$$-\frac{1}{5} \left(f + \xi \frac{df}{d\xi} \right) = \frac{d}{d\xi} \left(f^3 \frac{df}{d\xi} \right) \quad (38)$$

soit encore,

$$5 \frac{d}{d\xi} \left(f^3 \frac{df}{d\xi} \right) + \frac{d}{d\xi} (\xi f) = 0 \quad (39)$$

qui s'intègre en:

$$5f^3 \frac{df}{d\xi} + \xi f = 0$$

La constante d'intégration est nulle par symétrie autour de $x = 0$, qui donne $f'(0) = 0$. Maintenant,

$$5f^2 \frac{df}{d\xi} + \xi = 0, \quad \text{qui implique} \quad \frac{5}{3} df^3 + \xi d\xi = 0$$

Par intégration, on obtient:

$$f = \left[\frac{3}{10} (\xi_0^2 - \xi^2) \right]^{1/3}, \quad -\xi_0 < \xi < \xi_0; \quad = 0, \quad \text{sinon.} \quad (40)$$

où $f(\xi_0) = 0$. ξ_0 est déterminé par l'équation

$$\int_{-\xi_0}^{\xi_0} f(\xi) d\xi = 1.$$

qui donne:

$$\xi_0 = \left(\frac{10}{3} \right)^{1/5} \left(\frac{5}{2\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(\frac{5}{6})}{\Gamma(\frac{1}{3})} \right)^{3/5} \quad (41)$$

où $\Gamma(z)$ est la fonction Gamma.

On généralise maintenant à un débit variant comme At^λ , de sorte que le volume \mathcal{V} de lave est toujours confiné dans une petite région mais dépend du temps:

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(x, t) dx = B t^{\lambda+1} \quad \text{avec} \quad B = \frac{A}{\lambda+1} \quad (42)$$

Faisons l'analyse dimensionnelle du problème. Les deux équations s'écrivent:

$$\frac{H}{t} = \frac{\rho g}{3\eta} \frac{H^4}{L^2} \quad \text{et} \quad H L = B t^{\lambda+1} \quad (43)$$

d'où l'on tire:

$$H = \left(\frac{3\eta B^2 t^{2\lambda+1}}{\rho g} \right)^{1/5} \quad \text{et} \quad L = \frac{B t^{\lambda+1}}{H} = \left(\frac{\rho g B^3 t^{3\lambda+4}}{3\eta} \right)^{1/5} \quad (44)$$

Considérons la transformation:

$$h = \left(\frac{3\eta B^2 t^{2\lambda+1}}{\rho g} \right)^{1/5} f(\xi) \quad \text{avec} \quad \xi = \left(\frac{3\eta}{\rho g B^3 t^{3\lambda+4}} \right)^{1/5} x \quad (45)$$

ξ est une variable de similitude qui traduit la décroissance de la hauteur comme $t^{(2\lambda+1)/5}$ et l'étalement en $t^{(3\lambda+4)/5}$. L'équation de conservation de la matière devient:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) d\xi = 1 \quad (46)$$

La dérivée temporelle s'écrit:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{1}{5t} \left(\frac{3\eta B^2 t^{2\lambda+1}}{\rho g} \right)^{1/5} [(2\lambda + 1)f(\xi) - (4 + 3\lambda)\xi f'(\xi)] \quad (47)$$

et la dérivée spatiale:

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \left(\frac{3\eta}{\rho g t} \right)^{2/5} (B t^{\lambda+1})^{-1/5} f'(\xi) \quad (48)$$

Cela donne:

$$\frac{1}{5} \left((2\lambda + 1)f(\xi) - (4 + 3\lambda)\xi \frac{df}{d\xi} \right) = \frac{d}{d\xi} \left(f^3 \frac{df}{d\xi} \right) \quad (49)$$

Notes sur le cours "Géomorphogénèse"

B. Andreotti

M3b 2009/2010

Chapitre 2 Lois de comportement des matériaux géologiques

1 Etats solides et fluides

1.1 Description des états de la matière du point de vue thermodynamique

Solide et liquide sont les états condensés de la matière i.e. relativement denses et de masses volumiques comparables (celles des liquides en général plus faibles que celles des solides, mais du même ordre de grandeur : 10% d'écart pour un corps donné):

- distance inter-atomique : $d \sim a \sim \text{Å}$.
- libre parcours moyen dans un liquide : $\bar{l} \sim a$.
- taille d'un grain d'orientation donnée dans un solide polycristallin : $D \sim \mu\text{m}$.

Le Gaz est un état dilué: le libre parcours moyen grand devant la taille moléculaire:

- taille atomique : $a \sim \text{Å}$
- distance interatomique moyenne : $d = (k_B T / P)^{1/3} \simeq 3\text{nm}$ @ 300 K et 1 atm ($V_{\text{mol}} = 22.4 \text{ L}$).
 $d \gg a$.
- libre parcours moyen (mean free path) — distance parcourue par un atome entre deux chocs successifs : $\bar{l} \simeq \frac{d^3}{(4\pi a^2)} \gg d$ ($\sim 100d$ @ 300 K et 1 atm).

Du point de vue **thermodynamique**, les états fluides s'opposent à l'état solide par leur absence d'ordre translationnel à grande distance. Dans un Solide, les molécules sont astreintes à vibrer autour de positions moyennes fixes. Il existe un ordre translationnel à grande distance. Dans un liquide ou un gaz, les molécules sont libres de se déplacer au hasard par activation thermique. Dans l'état liquide, le désordre prédomine à longue distance; dans l'état gazeux, il n'y a pratiquement pas d'interaction entre molécules. La transition entre les différents états s'accompagne de la discontinuité de certaines grandeurs thermodynamiques qui permettent de construire un diagramme des phases sans ambiguïté et sans avoir recours à une mesure des propriétés mécaniques.

Il existe des états thermodynamiques intermédiaires comme les cristaux liquides, qui gardent un ordre translationnel selon certaines directions de l'espace. Ces **mésophases** ont des propriétés mécaniques mixtes violemment anisotropes. Les cristaux liquides sont des systèmes possédant un nombre de symétries intermédiaire entre ceux des phases solides et liquides. Leur molécules ont généralement une forme allongée ou de disque, forme encourageant un comportement directionnel collectif. Ce comportement est aussi influencé par un certain nombre de paramètres extérieurs comme les forces mécaniques, électriques ou magnétiques. Ils sont également sensible à la température, solides à basse température, et liquides à haute température. Ce phénomène

peut, par exemple, être observé sur des écrans portables quand il fait très chaud ou très froid. Il y a deux grandes classes de cristaux liquides : les cristaux liquides thermotropes et les cristaux liquides lyotropes. Les thermotropes changent de phase en fonction de la température tandis que les lyotropes sont des substances dans lesquelles les mésophases sont induites par la présence d'un solvant et dépendent de la concentration comme de la température.

Le comportement des cristaux liquides est lié à leur structure interne. Par exemple, un cristal liquide peut couler comme un liquide, mais les molécules ont un certain niveau d'ordre et sont orientées comme dans un cristal. Les différentes phases des cristaux liquides peuvent être distinguées par leurs propriétés optiques différentes (comme la biréfringence). Vu dans un microscope sous lumière polarisée, un matériau à cristaux liquides semblera être composé de zones de texture distincte. Chaque "zone" correspond à un domaine où les molécules sont orientées dans une direction différente.

1.2 Description des états de la matière du point de vue mécanique

Du point de vue **mécanique**, un fluide peut être déformé de façon très importante de sorte que les molécules changent constamment de voisin. A l'inverse, un solide élastique ne se déformera que très faiblement. Ceci permet une classification au premier ordre. Il existe cependant moult comportements intermédiaires. Les solides n'ont un comportement élastique qu'à faible sollicitation : ils peuvent avoir un comportement **plastique** pour lesquels il y a réarrangement moléculaire. Lorsque la vitesse de déformation est lente et la température élevée, on parle de fluage. La ductilité désigne la capacité d'un matériau à se déformer plastiquement sans se rompre. La rupture se fait lorsqu'un défaut (fissure ou cavité), induit par la déformation plastique, devient critique et se propage. La ductilité est donc l'aptitude qu'a un matériau à résister à cette propagation. S'il y résiste bien, il est dit ductile, sinon il est dit fragile. On parle de rupture ou d'endommagement pour les matériaux fragiles. La contrainte délimitant le domaine élastique des autres domaines est appelée limite d'élasticité (yield strength en anglais). Les fluides se comportent comme des solides élastiques lorsqu'on les sollicite sur des échelles de temps très courtes (à haute fréquence) ($t < t_{ve}$). Dans la plupart des cas usuels, ce comportement **visco-élastique** n'est pas perceptible car le temps caractéristique t_{ve} est ridiculement court : on a affaire à un fluide simple. D'autres fluides – faites l'expérience en touillant très lentement puis vite un bol de maizena dilué dans l'eau – ont des temps caractéristiques macroscopiques, ce qui entraîne des comportements amusants.

2 Contraintes, déformations, taux de déformations

2.1 Vorticité et tenseur des déformations

En élasticité, on définit le tenseur des déformations à partir du champ de déplacement u_i par

$$\bar{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

En hydrodynamique, on définit, à partir du champ de vitesse v_i , la vorticité comme le champ $\vec{\omega} = \text{rot} \vec{v}$ et le tenseur des déformations par

$$\bar{s}_{ij} = \frac{d\bar{\varepsilon}_{ij}}{dt} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$$

où x_i et v_i désignent respectivement les composantes du vecteur position et du vecteur vitesse selon la direction i .

On retiendra qu'un déplacement/écoulement peut se décomposer (en chaque point) en une composante rotation solide dont le vecteur rotation est donné par la moitié du rotationnel et une composante purement élongationnelle (comme un cisaillement pur), i.e. ne faisant qu'étirer et comprimer les particules fluides suivant deux directions orthogonales.

2.2 Définition et propriétés des contraintes

On définit le vecteur contrainte \vec{c} comme la force par unité d'aire exercée au voisinage d'une surface élémentaire par les particules extérieures sur les particules intérieures. Cette définition, pour être non-ambigüe, suppose qu'on oriente la surface par sa normale \vec{n} pointant par convention vers l'extérieur. La contrainte est alors non seulement fonction de la position \vec{r} mais également de la normale \vec{n} de la surface élémentaire:

$$\vec{c} = \vec{c}(\vec{r}, \vec{n})$$

En particulier, si on permute le rôle de l'intérieur et de l'extérieur, i.e. si on transforme \vec{n} en $-\vec{n}$, on doit avoir, en vertu du principe d'action-réaction:

$$\vec{c}(\vec{r}, -\vec{n}) = -\vec{c}(\vec{r}, \vec{n})$$

Considérons maintenant l'équilibre d'un petit tétraèdre de matière, de volume V convenablement orienté par rapport aux vecteurs de base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. Les trois faces "basales" ont pour normales $-\vec{e}_1, -\vec{e}_2$ et $-\vec{e}_3$ tandis que la face inclinée a pour normale $\vec{n} = n_1\vec{e}_1 + n_2\vec{e}_2 + n_3\vec{e}_3$. En faisant intervenir les aires des facettes, l'équilibre du système s'écrit :

$$\vec{c}(\vec{n})S + \vec{c}(-\vec{e}_1)S_1 + \vec{c}(-\vec{e}_2)S_2 + \vec{c}(-\vec{e}_3)S_3 + \vec{f}_v V = \vec{0}$$

où \vec{f}_v est une éventuelle force volumique.

Deux remarques vont nous permettre de mettre en évidence une caractéristique essentielle du champ de contrainte. La taille du tétraèdre est choisie suffisamment petite devant l'échelle de variation des champs pour qu'on puisse considérer les contraintes comme uniformes sur chaque face (on ne mentionne plus \vec{r} en conséquence). Si maintenant on opère une homothétie de rapport $\lambda < 1$ sur le tétraèdre, les forces surfaciques seront multipliées par λ^2 tandis que le terme volumique le sera par λ^3 . Lorsque λ tend vers 0, par conséquent, le terme volumique devient négligeable. On supposera que cela est vrai bien avant que les dimensions du tétraèdre deviennent d'ordre atomique, si bien qu'on reste dans le domaine continu. Les coefficients directeurs de \vec{n} s'identifient à $n_i = S_i/S$ pour $i = 1, 2, 3$. En tenant compte de ces remarques et de la symétrie de $\vec{c}(\vec{n})$ on obtient alors :

$$\vec{c}(n_1\vec{e}_1 + n_2\vec{e}_2 + n_3\vec{e}_3) = n_1\vec{c}(\vec{e}_1) + n_2\vec{c}(\vec{e}_2) + n_3\vec{c}(\vec{e}_3)$$

quelquesoient (n_1, n_2, n_3) . On a donc montré que la relation qui lie \vec{n} et \vec{c} est linéaire. On note σ cette application $\vec{n} \rightarrow \vec{c}$ est appelée tenseur des contraintes. Une fois choisie une base, on représentera ce tenseur par une matrice 3 par 3 dont chacun des 9 coefficients est un champ scalaire $\sigma_{ij}(\vec{r})$ ayant la dimension d'une force par unité d'aire. On peut alors écrire la relation fondamentale :

$$c_i = \sum_j \sigma_{ij} n_j$$

L'expression entre parenthèses est une notation conventionnelle dite d'Einstein, supposant la sommation implicite sur les indices répétés (ici "j"). Considérons cette fois un petit cube d'arêtes de longueur a parallèles aux vecteurs d'une base orthonormée. En appliquant la relation ci-dessus aux 6 faces de normales $\pm\vec{e}_1, \pm\vec{e}_2$ et $\pm\vec{e}_3$, on peut exprimer les composantes des vecteurs contrainte sur ces faces en fonction des composantes du tenseur des contraintes. On vérifie bien que la résultante des forces de surface est bien automatiquement nulle.

L'équilibre mécanique suppose également que leur moment résultant, exprimé par exemple au centre du cube, est nul. Ce moment est :

$$\vec{M} = (\sigma_{32} - \sigma_{23})a^3\vec{e}_1 + (\sigma_{13} - \sigma_{31})a^3\vec{e}_2 + (\sigma_{21} - \sigma_{12})a^3\vec{e}_3$$

si bien qu'on déduit la propriété importante :

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$$

i.e. le tenseur des contraintes est symétrique, donc diagonalisable dans une base orthonormée. Par conséquent, il n'y a que 6 composantes indépendantes du tenseur des contraintes, 3 diagonales et 3 non-diagonales. Notons enfin que les termes diagonaux correspondent à des contraintes de traction/compression tandis que les termes non-diagonaux correspondent à des contraintes de cisaillement. Un cube orienté suivant les vecteurs propres du tenseur des contraintes ne subit donc que des tractions/compressions sur ses faces.

3 Equations de la dynamique

3.1 Théorème de transport

On considère le champ $f(\vec{r}, t)$ dépendant des coordonnées d'espace \vec{r} et du temps t . La dérivée totale par rapport au temps s'entend comme la dérivée de $f(\vec{r}(\vec{r}_0, t_0, t), t)$ par rapport au temps. La dérivée de $\vec{r}(\vec{r}_0, t_0, t)$ est la vitesse, par définition. D'où

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} f$$

La variation de l'intégrale de f sur un volume de contrôle V_a susceptible de se déplacer et de se déformer au cours du temps résulte des variations temporelles de cette quantité et du flux à travers les parois. Le volume élémentaire qui traverse la paroi est $\vec{v}_a \cdot d\vec{S} dt$ où \vec{v}_a désigne la vitesse de l'interface. D'où le théorème du transport de REYNOLDS:

$$\frac{d}{dt} \iiint_{V_a} f dV = \iiint_{V_a} \frac{\partial f}{\partial t} dV + \oint_{\delta V_a} f \vec{v}_a \cdot d\vec{S} = \iiint_{V_a} \frac{\partial f}{\partial t} + \text{div}(f \vec{v}_a) dV$$

La relation est la même lorsque f est une quantité vectorielle (=plusieurs scalaires=composantes). La version unidimensionnelle s'appelle le théorème de LEIBNITZ:

$$\frac{d}{dt} \int_0^{h(t)} f(x, t) dx = \int_0^{h(t)} \frac{\partial f}{\partial t} dx + f[h(t), t] \frac{dh(t)}{dt}$$

En analyse vectorielle, le théorème de flux-divergence, aussi appelé le théorème de Green-Ostrogradski ou Gauss-Ostrogradski est un théorème reliant la divergence d'un champ vectoriel à la valeur de l'intégrale de surface du flux défini par ce champ. Il stipule que le flux d'un vecteur à travers une surface fermée est égal à l'intégrale de la divergence de ce vecteur sur le volume délimité par cette surface. L'expression du théorème est le suivant :

$$\iiint_V \text{div} \vec{F} dV = \oint_{\Sigma} \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

Dans le cas d'un volume matériel, $\vec{v}_a = \vec{v}$ et dans le cas d'un volume de contrôle immobile $\vec{v}_a = \vec{0}$.

3.2 Conservation de la matière

En l'absence de sources de création ou d'annihilation de matière (cas générique), la masse contenue dans un volume matériel se conserve au cours du temps, indépendamment des déformations de ce volume $V_m(t)$. On a alors

$$\frac{d}{dt} \int_{V_m} \rho dV = 0$$

où f désigne la masse volumique $\rho(\vec{r}, t)$ d'un fluide (éventuellement compressible). Le taux de variation de la masse contenue dans le volume matériel $V_m(t)$ est donnée par le théorème de transport,

$$\frac{d}{dt} \int_{V_m} \rho dV = \int_{V_m} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \oint_{\delta V_m} \rho \vec{v} \cdot d\vec{S} = \int_{V_m} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) \right) dV = 0$$

où $\vec{v}(\vec{r}, t)$ est le champ de vitesse Eulérien. En passant à l'échelle particulaire, on obtient :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = \frac{d\rho}{dt} + \rho \text{div} \vec{v} = 0$$

Fluide homogène et incompressible $\rho = \rho_0$ donc $\text{div} \vec{v} = 0$

3.3 Résultante des forces de surface sur une particule

Considérons un volume V_m de matière limité par une surface fermée S . Notons $\vec{\mathcal{R}}$ la résultante des forces de surface. On a, par définition du tenseur des contraintes : $\vec{\mathcal{R}} = \iint_S \sigma \vec{n} dS$ soit, pour les composantes suivant les vecteurs \vec{e}_i , $i = 1 \dots 3$, d'une base orthonormée :

$$R_i = \sum_j \iint_S \sigma_{ij} n_j dS$$

On reconnaît dans l'intégrande le flux d'un vecteur $\vec{\sigma}_i$ de composantes $(\sigma_{i1}, \sigma_{i2}, \sigma_{i3})$. On peut donc appliquer le théorème de Stokes-Ostrogradski :

$$R_i = \iiint_V \nabla \cdot \vec{\sigma}_i dV = \sum_j \iiint_V \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} dV = \iiint_V \partial_j \sigma_{ij} dV$$

Dans le cas visqueux incompressible, on obtient alors:

$$R_i = \iiint_V (2\eta \partial_j \sigma_{ij} - \partial_i P) dV = \iiint_V (\eta (\partial_{jj}^2 v_i + \partial_i \partial_j v_j) - \partial_i P) dV$$

3.4 Equations de la dynamique

Prenons temporairement le point de vue d'un fluide. Le principe fondamental de la dynamique s'écrit:

$$\frac{d}{dt} \int_{V_m} \rho \vec{v} dV = \vec{\mathcal{R}}$$

où $\vec{\mathcal{R}}$ est la résultante des forces s'appliquant sur le volume matériel considéré. De par le théorème de transport, on a

$$\frac{d}{dt} \int_{V_m} \rho v_i dV = \int_{V_m} \frac{\partial \rho v_i}{\partial t} dV + \oint_{\delta V_m} \rho v_i \vec{v} \cdot d\vec{S} = \int_{V_m} \left(\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + \text{div}(\rho v_i \vec{v}) \right) dV = \mathcal{R}_i$$

En passant à l'échelle particulaire, on obtient :

$$\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + \text{div}(\rho v_i \vec{v}) = v_i \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) \right) + \rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla v_i \right) = \mathcal{R}_i$$

On obtient finalement l'équation de bilan de la quantité de mouvement:

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right) = \vec{\mathcal{R}}$$

Dans le cas d'un solide élastique, on utilise plutôt le champ de déplacement \vec{u} , qui vérifie $\vec{v} = \frac{d\vec{u}}{dt}$. Par conséquent, le principe fondamental de la dynamique s'écrit:

$$\rho \frac{d^2 \vec{u}}{dt^2} = \vec{\mathcal{R}} = \vec{\nabla} \cdot \vec{\sigma}$$

En particulier, les équations d'équilibre s'écrivent simplement:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\sigma} = 0$$

Considérons finalement que le fluide à une masse volumique constante. On rappelle que l'équation de continuité appelée alors équation d'incompressibilité s'écrit:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$$

L'équation de bilan de la quantité de mouvement s'écrit finalement:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p + \nu \nabla^2 \vec{v} + \vec{f}$$

où $\nu = \frac{\eta}{\rho}$ désigne la viscosité cinématique du fluide (unité SI : $m^2.s^{-1}$)

4 Elasticité

4.1 Compression isotrope

Un cas particulier est celui d'un champ de pression hydrostatique P pour lequel $\sigma_{ij} = -P\delta_{ij}$, le signe moins provenant de la convention $P > 0$ en compression. Le tenseur est donc ici diagonal dans toute base orthonormée.

Considérons une quantité donnée de matière prise à la pression P_0 , occupant un volume V_0 , et soumise (de façon isotherme) à un incrément de pression ΔP ; son volume devient $V_0 + \Delta V$. Tous les états de la matière répondent de la même façon dans la limite où la compression n'induit pas de changement d'état. La réponse est élastique, i.e. réversible et décrite par la donnée de la "compressibilité isotherme" $\chi_T(P)$:

$$\chi_T = -\frac{1}{V} \left. \frac{\partial V}{\partial P} \right|_T$$

Dans la limite des petites surpressions, on a donc :

$$\Delta V = -V_0 \chi_T(P_0) \Delta P$$

Un système n'est stable vis-à-vis de fluctuations de volume que pour $\chi_T > 0$. Quelques ordres de grandeurs: - gaz (parfaits) : $\chi_T = 1/P = 10^{-5} Pa^{-1}$ sous 1 atm.

- matière condensée : $\chi_T = 10^{-9} - 10^{-11} Pa^{-1}$.

Pour les solides on utilise plutôt le "module de compression" (bulk modulus) $K = 1/\chi_T$.

- acier $K = 160$ GPa

- eau $K = 2,2$ GPa

- air $K = 10^{-4}$ GPa

4.2 Contraintes élastiques

Le tenseur des contraintes se déduit de la densité volumique d'énergie libre élastique:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \epsilon_{ij}}$$

Dans le cadre de l'élasticité linéaire homogène isotrope, \mathcal{F} est une forme quadratique définie positive en ϵ_{ij} . Il n'existe que deux invariants quadratiques d'un tenseur, de sorte que \mathcal{F} s'écrit:

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \lambda \epsilon_{ii} \epsilon_{jj} + G \epsilon_{ij} \epsilon_{ij}$$

où G et λ sont des caractéristiques du matériau, appelés coefficients de Lamé. On en déduit immédiatement la loi de Hooke, par dérivation:

$$\bar{\sigma}_{ij} = 2G \bar{\epsilon}_{ij} + \lambda \bar{\epsilon}_{ll} \delta_{ij}$$

ou, en écriture tensorielle:

$$\bar{\sigma} = 2G \bar{\epsilon} + \lambda \text{tr}(\bar{\epsilon}) I$$

où I le tenseur unité et $\text{tr}(\cdot)$ la trace.

Cisaillement simple – Si l'on applique des forces opposées (un couple) de part et d'autre d'une plaque mince constituée d'un solide élastique, il s'ensuit un déplacement relatif des deux faces du solide proportionnel à cette force. Ce type de réponse élastique à un cisaillement (simple) est propre aux solides. Un fluide ne peut soutenir une contrainte de cisaillement et s'écoule indéfiniment. Si l'on considère un parallélépipède rectangle, le cisaillement est une variation de l'angle, qui n'est plus droit. Cela correspond à des forces s'exerçant parallèlement à la face. On définit de même la contrainte comme étant la force divisée par la surface sur laquelle elle s'exerce ; cette contrainte est appelée scission (toujours exprimée en MPa) et est notée τ . La déformation est l'écart à l'angle droit $\gamma = \epsilon_{xz}$, appelé cisaillement, exprimé en radian. On a une loi linéaire de la forme:

$$\sigma_{xz} = G \gamma$$

où G est le module de cisaillement ou module de Coulomb ou second coefficient de Lamé, généralement exprimé en GPa. L'énergie libre emmagasinée dans la plaque cisailée est:

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} G \gamma^2 V$$

Compression isotrope – λ est appelé premier coefficient de Lamé. On considère une compression isotrope. Le tenseur des déformations s'écrit:

$$\bar{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{3} \frac{\delta V}{V} \delta_{ij}$$

Le module de compression isotrope s'exprime donc en fonction des coefficients de Lamé par :

$$K = \lambda + \frac{2}{3} G$$

On peut donc réécrire la loi de Hooke en faisant apparaître le déviateur et la composante isotrope des déformations:

$$\bar{\sigma}_{ij} = 2G \left(\bar{\epsilon}_{ij} - \frac{1}{3} \bar{\epsilon}_{ll} \delta_{ij} \right) + K \bar{\epsilon}_{ll} \delta_{ij}$$

Traction-compression uniaxiale – Considérons la traction ou la compression d'un fil cylindrique selon son axe. La traction-compression correspond à des forces s'exerçant perpendiculairement aux sections de ces pièces ; elle est dite uniaxiale car les côtés de la pièce ne sont pas contraints, toutes les forces sont sur un même axe. Si l'on veut caractériser le matériau en faisant abstraction de la forme de la pièce et de ses dimensions, on définit donc :

- l'allongement relatif ou déformation (strain en anglais):

$$\epsilon_{xx} = \frac{\Delta \ell}{\ell_0} = \frac{\ell - \ell_0}{\ell_0}$$

- la contrainte axiale (axial stress en anglais), notée σ_{xx} :

$$\sigma_{xx} = \frac{F}{S}$$

La loi élastique, dite loi de Hooke, s'écrit alors :

$$\sigma_{xx} = E\epsilon_{xx}$$

E est le module de Young (Young's modulus en anglais), qui est une caractéristique du matériau. E est également homogène à une pression, du fait des valeurs très élevées qu'il prend, il est généralement exprimé en gigapascal (GPa). Quelques ordres de grandeur: • verre, acier : $E \simeq 100$ GPa, $\nu \simeq 0.3$

- plexiglas : $E \simeq 1$ GPa, $\nu \simeq 0.4$
- caoutchouc : $E \simeq 1-10$ MPa, $\nu \simeq 0.5$
- hydrogel de gélatine : $E \simeq 1-10$ kPa, $\nu \simeq 0.5$

Lorsque l'on exerce une traction ou une compression, on constate que la largeur de la pièce varie également, à l'inverse de l'allongement. La variation relative de dimension est proportionnelle à l'allongement relatif ϵ_{xx} , le coefficient de proportionnalité s'appelle le coefficient de Poisson ou rapport de Poisson (Poisson's ratio en anglais) en hommage au mathématicien français Siméon Denis Poisson. Il est noté ν , est sans unité et s'exprime, pour un cylindre, comme:

$$\frac{\Delta r}{r_0} = -\nu \cdot \frac{\Delta l}{l_0} = -\nu \cdot \epsilon_{xx}$$

Considérons le volume de la pièce. Pour une pièce cylindrique, on a :

$$V = \ell\pi r^2$$

Pour des petites variations, on a donc :

$$\frac{\Delta V}{V_0} = \delta\ell/\ell_0 + 2\Delta r/r_0$$

(développement limité au premier ordre), soit :

$$\frac{\Delta V}{V_0} = (1 - 2\nu)\epsilon_{xx}$$

On voit donc que si $\nu > 0,5$ le volume diminue en traction et augmente en compression (cas exceptionnel) ; si $\nu < 0,5$ le volume augmente en traction et diminue en compression (comportement le plus général). Pour un acier, ν vaut environ 0,3, on est donc dans le second cas.

Les contraintes selon la direction transverse à l'essai sont nulles. Les déformations transverses sont reliées à la déformation longitudinale par le coefficient de Poisson: $\bar{\epsilon}_{yy} = \bar{\epsilon}_{zz} = -\nu\bar{\epsilon}_{xx}$. Les contraintes qui en résultent s'écrivent: $\bar{\sigma}_{xx} = E\bar{\epsilon}_{xx} = (2G + (1 - 2\nu)\lambda)\bar{\epsilon}_{xx}$ et $\bar{\sigma}_{yy} = \bar{\sigma}_{zz} = 0 = (-2G\nu + (1 - 2\nu)\lambda)\bar{\epsilon}_{xx}$. D'où l'on obtient:

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + G)}$$

$$E = \frac{G(3\lambda + 2G)}{\lambda + G}$$

Inversement, les coefficients de Lamé s'expriment en fonction du module de Young E et du coefficient de Poisson ν :

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}$$

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

L'énergie libre élastique du fil s'identifie au travail qu'il faut fournir de façon réversible au système pour l'allonger à partir de son état à vide. A chaque étape infinitésimale $dW = F \cdot dl = E\pi r^2(\ell - \ell_0)d\ell$. Par intégration, on trouve la densité d'énergie de déformation \mathcal{F}/V , c'est-à-dire l'énergie élastique divisée par le volume de la pièce, vaut :

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} \sigma \epsilon V = \frac{1}{2} E \epsilon^2 V$$

D'autres relations – On peut également relier le module de compression isotrope au module d'Young et au coefficient de Poisson:

$$K = \lambda + \frac{2}{3}G = \frac{1}{3} \frac{E}{1 - 2\nu}$$

A noter que pour $\nu = 0.33$ on a $K = E$ et pour $\nu \rightarrow 0.5$, on a $K \rightarrow \infty$ (incompressibilité). Les matériaux métalliques sont proches du premier cas ($K \simeq E$ dans leur domaine élastique) alors que les élastomères s'approchent d'un comportement incompressible ($K \gg E$). On peut aussi exprimer K en fonction des modules d'élasticité en traction E et en cisaillement G :

$$\frac{1}{K} = \frac{9}{E} - \frac{3}{G}$$

Il est souvent utile d'utiliser la relation inversée entre contraintes et déformations:

$$\bar{\epsilon}_{ij} = \frac{1 + \nu}{E} \bar{\sigma}_{ij} - \frac{\nu}{E} \bar{\sigma}_{kk} \delta_{ij}$$

5 Rhéologie des fluides ordinaires

5.1 Viscosité

Sur le même principe, on construit dans le cas d'un fluide visqueux la relation constitutive à partir du tenseur des taux de déformation:

$$\bar{s}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$$

où x_i et v_i désignent respectivement les composantes du vecteur position et du vecteur vitesse selon la direction i . Le tenseur des contraintes: s'écrit:

$$\bar{\sigma}_{ij} = -P\delta_{ij} + 2\eta \left(\bar{s}_{ij} - \frac{1}{3} \bar{s}_{ll} \delta_{ij} \right) + \zeta \bar{s}_{ll} \delta_{ij}$$

où η est la viscosité dynamique (de cisaillement) et ζ la seconde viscosité ou viscosité de volume. Dans le cas d'un fluide incompressible, la seconde viscosité n'intervient pas de sorte que le tenseur des contraintes se réduit à:

$$\bar{\sigma}_{ij} = -P\delta_{ij} + 2\eta \bar{s}_{ij}$$

Considérons un fluide qui s'écoule entre deux parois parallèles horizontales. L'une est fixe, l'autre est animée d'une vitesse V . Il s'établit en régime permanent un gradient de vitesse perpendiculaire aux parois, et les différentes couches de fluide "frottent" les unes sur les autres : une couche plus rapide que sa voisine exerce sur elle une force d'entraînement, et réciproquement la plus lente tend à ralentir sa voisine plus rapide. La "force par unité de surface de contact" entre deux couches voisines est proportionnelle au gradient de vitesse dans la direction perpendiculaire au mouvement (elle est nulle si toutes les couches vont à la même vitesse), et on appelle "coefficient de viscosité" le coefficient de proportionnalité. En définissant le taux de cisaillement $\dot{\gamma} = \bar{s}_{xz}$, la relation s'écrit:

$$\tau = \frac{F}{S} = \eta \dot{\gamma}$$

La force par unité de surface $\tau = \bar{\sigma}_{xz}$ est désignée sous le terme de "contrainte de cisaillement".

5.2 Origine microscopique de la viscosité d'un liquide ordinaire

L'origine microscopique de la viscosité tient au mouvement thermique (brownien) des molécules du fluide. La vitesse d'une particule de fluide possède deux composantes : une composante thermique, désordonnée, et une composante macroscopique liée au mouvement d'ensemble du fluide. Lorsqu'une particule passe d'une couche à sa voisine plus lente l'effet de son mouvement désordonné, elle emporte avec elle sa vitesse d'ensemble, propre à la couche d'où elle vient. Lors des collisions avec les particules de la couche d'arrivée, elle partage l'excédent de quantité de mouvement qu'elle possède, et ce transfert, compte tenu de la dynamique chaotique des particules, est irréversible. En moyennant ce transfert de quantité de mouvement entre couches voisines, on obtient un effet macroscopique.

Le coefficient de viscosité caractérise donc la réponse du fluide à l'excitation que constitue une mise en mouvement locale. De même que l'introduction d'un gradient de concentration produit un transport de masse (loi de Fick), l'introduction d'un gradient de température produit un transfert thermique (loi de Fourier), et l'introduction d'un gradient de vitesse produit un transfert de quantité de mouvement (viscosité). Chaque situation est caractérisée par l'introduction d'un déséquilibre dans le système, mais suffisamment faible pour que l'équilibre local soit préservé : dans le cas du transfert thermique par exemple, la température varie de place en place, mais elle est définie en chaque point du système.

Comprendre comment varie la viscosité avec les variables d'état du système suppose d'avoir un modèle du mouvement des constituants élémentaires. Dans le cas du gaz parfait, par exemple, le mouvement est simple à modéliser : la température fixe la vitesse u des molécules, leur nombre par unité de volume n (ce que, dans ce contexte, on appelle la densité) et leur taille fixent le libre parcours moyen ℓ , et il n'en faut pas plus pour obtenir une expression du coefficient de viscosité : on trouve $\eta = n m \ell u/3 = \rho \ell u/3$, où m désigne la masse des molécules (qui intervient car il s'agit d'un transfert de quantité de mouvement). On peut estimer ℓ en considérant que les molécules d'air se comportent comme des sphères dures. On introduit le diamètre effectif d des molécules. On a $\pi d^2 \ell n = 1$ d'où

$$\eta \simeq \frac{\sqrt{mkT}}{\pi d^2 \sqrt{3}} \simeq 10^{-5} \text{Pa.s}$$

ce qui est le bon ordre de grandeur pour l'air dans les conditions normales. La formule montre que la viscosité augmente comme la racine carrée de la température absolue (via u), résultat non intuitif, et qu'elle est indépendante de la pression. Maxwell fut si surpris du résultat qu'il effectua des expériences pour vérifier qu'il en était bien ainsi, en observant l'amortissement d'un pendule dans différents gaz.

Dans le cas d'un liquide, la modélisation est plus compliquée, car les molécules étant au contact, les interactions jouent un rôle essentiel. Quels sont les phénomènes et grandeurs physiques dont dépend le déplacement des molécules ? D'une part, l'agitation thermique est toujours présente. D'autre part, chaque molécule est entourée de voisines, avec une distance moyenne d entre molécules, caractéristique de la densité. Le déplacement d'une molécule d'une distance moyenne nécessite de déplacer les molécules voisines, et l'on traduit cet effet par l'existence d'une barrière d'énergie de hauteur b et de largeur spatiale r_0 (r_0 est plus petit que d mais du même ordre de grandeur). Le modèle physique est alors le suivant. Lorsqu'on applique une contrainte de cisaillement sur le liquide, on favorise le déplacement des molécules dans le sens de la force appliquée, car le travail de cette force diminue la hauteur de la barrière dans le sens de la force (travail moteur) ; la barrière est augmentée d'autant dans le sens opposé (travail résistant). La physique statistique indique que la probabilité, pour une molécule, d'acquérir une énergie cinétique e , dans un environnement caractérisé par une température T , est donnée par la distribution de Boltzmann $\frac{1}{kT} \exp\left(-\frac{e}{kT}\right)$ (k désigne la constante de Boltzmann). Le facteur $1/kT$ assure la normalisation de la probabilité. La probabilité de passer la barrière thermiquement est donc donnée

par :

$$\int_b^\infty \frac{1}{kT} \exp\left(-\frac{e}{kT}\right) de = \exp\left(-\frac{b}{kT}\right)$$

Chaque molécule est piégée par les autres, et l'agitation thermique se traduit par une oscillation dans une "cage". La barrière est donc "attaquée" avec une fréquence ν correspondant à cette oscillation.

Pour estimer cette fréquence, on peut dans un premier temps reprendre l'argument du modèle original de Eyring (1936). Ce dernier se sert du théorème d'équipartition de l'énergie, qui indique que chaque degré de liberté d'un système à la température T emporte une énergie de l'ordre de kT . En considérant que le mouvement à l'intérieur d'une cage est celui d'un oscillateur quantique de fréquence ν , l'énergie est d'ordre $h\nu$ (où h désigne la constante de Planck) et on a donc :

$$kT \sim h\nu$$

autrement dit la fréquence d'oscillation est d'ordre kT/h . On obtient en ordre de grandeur:

$$\nu \simeq \frac{1.38 \cdot 10^{-23} * 300}{6.6 \cdot 10^{-34}} = \mathcal{O}(0.2 \text{ ps})$$

L'apparition de la constante de Planck est quelque peu troublante dans ce problème. On peut considérer que la fréquence d'attaque est plus simplement la fréquence d'oscillation, calculée classiquement, dans la cage des molécules voisines. En reprenant le cristal décrit ci-dessus, on obtient:

$$\nu^2 \propto \frac{\Psi_0}{m r_0^2} \varphi''(1) \propto \frac{E r_0}{m}$$

On obtient en ordre de grandeur:

$$\nu \simeq \left(\frac{2.2 \cdot 10^9 * 2 \cdot 10^{-10}}{18 * 1.66E - 27} \right)^{1/2} = \mathcal{O}(0.2 \text{ ps})$$

Le nombre de saut par seconde dN/dt est donc donné par le produit de la probabilité de franchissement de la barrière, multiplié par la fréquence d'essai, soit :

$$\frac{dN}{dt} = \nu \exp\left(-\frac{b}{kT}\right)$$

En l'absence de contrainte, ces sauts s'effectuent dans toutes les directions et le fluide est macroscopiquement immobile. Plaçons-nous maintenant dans le cas où une contrainte de cisaillement τ s'exerce dans le milieu. En moyenne, une molécule occupe une surface d^2 , elle subit donc une force τd^2 . Lorsqu'elle effectue un saut dans le sens de la force, elle voit une barrière diminuée du travail de la force pendant la montée, soit $\tau d^2 r_0/2$. Dans le sens opposé, la barrière est augmentée de cette même quantité. Le bilan net, pour le nombre de saut par seconde, est donc :

$$\frac{dN}{dt} = \nu \exp\left(-\frac{b}{kT}\right) \left[\exp\left(\frac{\tau d^2 r_0}{2kT}\right) - \exp\left(-\frac{\tau d^2 r_0}{2kT}\right) \right]$$

Dans le cas d'un cisaillement faible : $\tau d^3 \ll kT$, on peut développer au premier ordre les deux exponentielles dans le crochet :

$$\frac{dN}{dt} = \tau d^2 r_0 \frac{\nu}{kT} \exp\left(-\frac{b}{kT}\right)$$

Or chaque saut fait parcourir la distance moyenne d , et les différentes couches moléculaires sont également distantes de d (on pourrait prendre ici une distance différente dans le sens du mouvement et dans le sens perpendiculaire à celui-ci, notamment pour des molécules ayant une géométrie loin

de la sphéricité, comme le benzène, par exemple ; mais, pour des raisons de simplicité, nous ne le ferons pas ici). Par conséquent le gradient de vitesse intervenant dans la définition de la viscosité est donné par :

$$\frac{\partial V}{\partial z} \frac{dN}{dt}$$

A un facteur numérique près d'ordre 1, le coefficient de viscosité s'écrit donc :

$$\eta \sim \frac{kT}{d^2 r_0 \nu} \exp\left(\frac{b}{kT}\right)$$

Cette expression montre que la viscosité diminue rapidement lorsque la température augmente. Est-il possible d'avoir une information sur la hauteur de la barrière b ? L'idée ici est de considérer que lorsqu'une molécule effectue un saut, elle laisse derrière elle un trou. Autrement dit, on peut interpréter la barrière comme l'énergie nécessaire pour créer un trou, une lacune, dans le liquide. L'énergie b doit donc être de l'ordre de grandeur de la chaleur molaire latente de vaporisation L . La comparaison avec l'expérience indique plutôt : $b \simeq 0.4L$. Le facteur de réduction est relié au fait que, dans un liquide, des lacunes existent à l'état naturel.

Nous avons vu que la viscosité d'un gaz parfait ne dépend pas de la pression. Dans le cas d'un liquide, si l'on exerce une pression extérieure P , le travail supplémentaire pour former un trou de volume V_t est augmenté du produit PV_t . On a donc :

$$\eta \sim \frac{kT}{\nu d^2 r_0} \exp\left(\frac{(b + PV_t)}{kT}\right) = \eta_0 \exp\left(\frac{PV_t}{kT}\right)$$

On trouve expérimentalement que, pour un liquide simple, V_t est environ 15% du volume moléculaire $d^3 r_0$.

Lorsque le cisaillement devient important, on n'a plus le droit d'effectuer le développement ci-dessus et il faut tout garder. La viscosité est alors plus petite que ce qu'indique le comportement newtonien. Le régime de cisaillement où l'on commence à observer cette réduction est, pour de nombreux lubrifiants, de l'ordre de 10^6 Nm^{-2} .

5.3 Rhéologie des fluides complexes

Si le modèle de fluide newtonien décrit bien la très grande majorité des fluides composés de molécules simples, il existe un bon nombre de fluides, dont certains sont d'usage très courant, qui ont un comportement sous écoulement plus complexe. La définition d'un fluide newtonien est assez restrictive. Les contraintes de cisaillement sont proportionnelles au gradient de vitesse, ce qui implique que :

- Dans un écoulement de cisaillement simple, les seules contraintes créées par l'écoulement sont des contraintes de cisaillement.
- La viscosité est indépendante de la vitesse de cisaillement.
- La viscosité est indépendante du temps et les contraintes s'annulent immédiatement lorsque l'écoulement est arrêté.

Toute déviation de ces règles est le signe d'un comportement non-newtonien. La description de ces comportements et leur interprétation en relation avec la structure microscopique du fluide constitue la discipline appelée rhéologie. Cette discipline est assez récente ; elle a connu un développement considérable avec l'apparition des polymères synthétiques.

Commençons par examiner le caractère non-newtonien le plus répandu, la variation de viscosité avec la vitesse de cisaillement. Très souvent, pour les solutions de polymère, la viscosité diminue au fur et à mesure que l'on augmente le taux de cisaillement (gradient de vitesse) auquel est soumis le fluide. C'est le comportement rhéofluidifiant (shear thinning en anglais). Ce comportement est également observé dans les suspensions de particules solides, dans les suspensions de

vésicules déformables comme le sang. Un certain nombre de modèles empiriques permettent cette description : dans une certaine gamme de taux de cisaillement, on peut représenter la viscosité η comme une loi de puissance de $\dot{\gamma}$, en particulier pour les polymères fondus (modèle d'Ostwald).

Un cas particulier du comportement rhéofluidifiant est l'existence d'une contrainte seuil d'écoulement : si la contrainte appliquée au fluide est inférieure à cette contrainte seuil, aucune déformation ne se produit, le fluide ne coule pas. Un exemple courant de fluide à seuil est la pâte dentifrice : elle ne peut sortir du tube sous l'effet de son propre poids, il faut lui appliquer une contrainte nettement supérieure pour qu'elle s'écoule. La représentation la plus simple d'un fluide à seuil est le modèle de Bingham qui donne la relation suivante entre la contrainte σ et le taux de cisaillement $\dot{\gamma}$:

$$\sigma = \sigma_s + \eta\dot{\gamma}$$

où σ_s est la contrainte seuil et η est appelé la viscosité plastique. En pratique le modèle de Bingham ne s'applique que dans une gamme limitée de taux de cisaillements et la contrainte seuil, obtenue par extrapolation du rhéogramme à $\dot{\gamma} = 0$, est souvent difficile à déterminer correctement.

On rencontre également le comportement rhéoépaississant (en anglais shear thickening) : la viscosité augmente lorsqu'on augmente le taux de cisaillement. Dans la plupart des cas connus, le comportement rhéoépaississant n'est observé que sur une gamme limitée de taux de cisaillement, le liquide possédant également un comportement rhéofluidifiant à des taux de cisaillement plus faibles. Par exemple, les suspensions très concentrées (au-dessus de 30% en fraction volumique) de particules solides présentent une brusque augmentation de viscosité qui est liée à un changement important de la structure de la suspension. Un exemple remarquable de comportement rhéoépaississant est observé avec les polymères amphiphiles associatifs. La viscosité des ces solutions est pratiquement constante jusqu'à un taux de cisaillement critique où la viscosité augmente rapidement de plus d'un ordre de grandeur. Ce brutal "épaississement" de la solution est dû à un changement de type d'association entre les macromolécules : à faible taux de cisaillement, il y a essentiellement des interactions intramoléculaires et, dans une gamme de concentration adéquate, un taux de cisaillement élevé conduit à des interactions intermoléculaires et à la "gélification" de la solution.

Un autre comportement non-newtonien très important est le caractère viscoélastique, très fréquent dans les solutions de polymères et dans les polymères fondus. La réponse du fluide à une déformation présente à la fois un aspect visqueux (contrainte proportionnelle à la vitesse de déformation) et un aspect élastique (contrainte proportionnelle à la déformation). Un exemple particulièrement spectaculaire de fluide visco-élastique est la pâte de silicone connue sous le nom commercial de "silly-putty" : une boule de silly-putty rebondit sur le sol comme une balle de caoutchouc ; pourtant, si on pose cette boule sur une surface horizontale et si on attend quelques minutes, on voit le silly-putty s'étaler comme un fluide visqueux. Le même matériau réagit de manière très différente lorsqu'il est soumis à une sollicitation très rapide (en le faisant rebondir sur le sol) ou lorsque la contrainte est appliquée pendant un temps très long. Dans le premier cas, le temps de sollicitation est inférieur à un temps caractéristique du matériau, les composants élémentaires n'ont pas le temps de se déformer de manière importante et on observe une réponse élastique. En revanche, lorsque le temps de sollicitation est plus grand que le temps caractéristique, on observe une réponse de type visqueux. Le modèle le plus simple de fluide viscoélastique consiste à additionner les contraintes d'origine élastique et les contraintes d'origine visqueuse :

$$\sigma = E\gamma + \eta\dot{\gamma}$$

Dans un fluide newtonien soumis à un écoulement de cisaillement simple ($u_x = \dot{\gamma}y$), seule la contrainte tangentielle σ_{xy} est modifiée par l'écoulement, les contraintes normales restent isotropes et égales à P . Dans certains liquides, essentiellement des solutions de polymères de très grande masse moléculaire, l'écoulement de cisaillement induit également une différence entre contraintes normales:

$$\sigma_{xx} - \sigma_{yy} = N_1(\dot{\gamma}) \quad \text{et} \quad \sigma_{yy} - \sigma_{zz} = N_2(\dot{\gamma})$$

L'anisotropie des contraintes normales est un effet non-linéaire : à faible taux de cisaillement, N_1 et N_2 sont des fonctions quadratiques de $\dot{\gamma}$. En général N_1 est négatif et beaucoup plus grand

en valeur absolue que N_2 qui est généralement positif. L'apparition d'anisotropie des contraintes normales est lié au fait que l'écoulement de cisaillement modifie la microstructure du fluide et la rend anisotrope. Prenons l'exemple d'une solution de polymères : la macromolécule en solution a l'aspect d'une "pelote" de fil contenue dans une enveloppe sphérique. Lorsqu'elle est soumise à un cisaillement suffisamment fort, cette pelote se déforme en un ellipsoïde dont le grand axe à tendance à tourner vers la direction d'écoulement. L'élasticité du polymère, d'origine essentiellement entropique, à tendance à ramener cet ellipsoïde vers une forme sphérique. La force de rappel est maximale dans la direction de l'écoulement ; elle est responsable de l'apparition d'une compression le long de l'écoulement. Ceci implique donc que $\sigma_{xx} < \sigma_{yy}$, soit $N_1 < 0$. En revanche, il n'y a pas d'interprétation simple du signe de N_2 . L'anisotropie des contraintes normales a deux manifestations spectaculaires : l'ascension du fluide le long d'un barreau tournant (effet Weissenberg) et l'expansion du jet sortant d'un orifice. Dans l'écoulement engendré par le cylindre tournant, la vitesse est essentiellement azimuthale, avec un gradient radial. L'anisotropie des contraintes normales conduit ici à : $\sigma_{\theta\theta} < \sigma_{rr}$. Il y a une "tension" le long des lignes de courant circulaires qui tend à pousser le fluide vers le centre de rotation et donc à le faire monter le long du cylindre tournant. Dans le cas du jet, l'expansion à la sortie de l'orifice est due à la relaxation des contraintes normales le long de l'axe du tube, accumulées pendant l'écoulement à l'intérieur du tube. Cet effet d'expansion intervient fréquemment dans les procédés d'extrusion des polymères fondus.

5.4 Rhéologie des suspensions

La limite très diluée par Einstein (1906).

$$\eta_{\text{eff}}(\phi) = \eta \left(1 + \frac{5}{2}\phi \right)$$

Transition de blocage et divergence de la viscosité. Fraction volumique:

$$\phi = \frac{\pi d^3}{6 \ell^3}$$

Bilan de puissance dissipée:

$$\eta_{\text{eff}} \ell^3 = \eta \left[\ell^3 + \frac{\pi d^2 \ell}{4} \left(\frac{1}{\left(1 - \frac{d}{\ell}\right)^2} - 1 \right) \right]$$

D'où:

$$\eta_{\text{eff}} = \eta \left(1 + \frac{\pi d^3}{2\ell^3} \right) \eta (1 + 3\phi)$$

6 Rhéologie des écoulements granulaires denses

6.1 Cisaillement simple : analyse dimensionnelle

Considérons l'écoulement de cisaillement plan présenté sur la figure 1. Une couche de grains sphériques de diamètre d et de densité ρ_p est confinée entre deux parois rugueuses par une pression P imposée sur la plaque du dessus. Les plaques se déplacent l'une par rapport à l'autre avec une vitesse relative V_w , de façon à imposer un gradient de vitesse $\dot{\gamma} \equiv V_w/L$ constant, où L est la distance entre les plaques. En l'absence de gravité, et pour un écoulement stationnaire et uniforme, l'équilibre des forces entraîne $\partial\sigma_{xz}/\partial z = 0$ et $\partial\sigma_{zz}/\partial z = 0$. La contrainte tangentielle $\tau \equiv |\sigma_{xz}|$ et la contrainte normale $P \equiv |\sigma_{zz}|$ sont donc homogènes dans le matériau, ce qui fait de ce système une configuration modèle pour étudier la rhéologie.

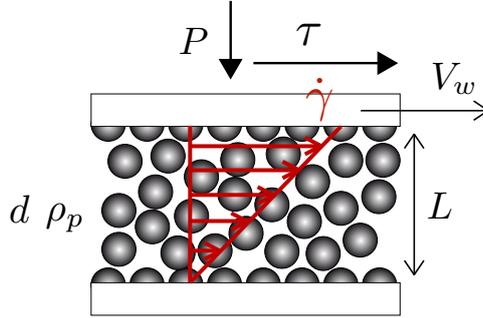


Figure 1: Cisaillement plan.

6.2 Loi de friction et de dilatance

Nous allons montrer que l'analyse dimensionnelle impose une relation forte entre les contraintes τ et P et le taux de cisaillement $\dot{\gamma}$. En effet dans le cas de grains très rigides (c'est-à-dire de module d'Young grand devant la pression de confinement) et pour des grands systèmes ($L/d \gg 1$), il n'existe que quatre paramètres de contrôle dans le problème : la taille des grains d , leur densité ρ_p , le taux de cisaillement $\dot{\gamma}$ et la pression de confinement P ¹. Ces paramètres faisant intervenir trois unités (longueur, masse, temps), le théorème Pi (Barenblatt 1996) nous indique que le système est contrôlé par un unique nombre sans dimension

$$I = \frac{\dot{\gamma}d}{\sqrt{P/\rho_p}}. \quad (1)$$

Ce nombre I a été appelé *nombre inertiel* par Iordanoff & Khonsari (2004) et da Cruz *et al.* (2005), qui l'ont introduit sous cette forme pour la première fois. Un autre nombre parfois utilisé est le nombre de Savage ou le nombre de Coulomb, $\rho_p d^2 \dot{\gamma}^2 / P$, qui est simplement le carré du nombre I (Savage 1984 ; Ancey *et al.* 1999).

Une fois identifié l'unique nombre sans dimension du problème, l'analyse dimensionnelle nous impose que la fraction volumique φ , qui n'est pas imposée dans cette configuration à pression imposée, doit dépendre uniquement de I . De même, la contrainte tangentielle τ doit être proportionnelle à la contrainte normale P (la pression étant l'échelle de contrainte naturelle du problème). On a donc

$$\tau = \mu(I)P \quad \text{et} \quad \varphi = \varphi(I), \quad (2)$$

où μ peut être interprété comme un coefficient de friction effectif qui dépend du nombre I .

L'analyse dimensionnelle ne permet pas de donner une expression de la loi de friction $\mu(I)$ et de la loi de dilatance $\varphi(I)$. Pour cela, il est nécessaire de faire appel à des expériences ou des simulations numériques discrètes. Les figures 2a et b montrent le résultat de simulations discrètes effectuées avec des disques à deux dimensions (da Cruz *et al.* 2005). On constate que le "coefficient de friction" μ n'est pas constant mais augmente avec le nombre I , c'est-à-dire quand on augmente le cisaillement ou que l'on diminue la pression de confinement. Pour $I = 0$, le coefficient de friction part d'une valeur non nulle μ_1 . De son côté, la fraction volumique décroît à peu près linéairement avec le nombre I en partant d'une valeur φ_c pour $I = 0$. Il est intéressant de remarquer que, dans la gamme de nombre I explorée, le coefficient de friction macroscopique $\mu(I)$ dépend très peu du coefficient de restitution inélastique e et seulement faiblement du coefficient de frottement interparticule μ_p (tant que $\mu_p \neq 0$, Fig. 2a). Cette observation est caractéristique du régime d'écoulement dense et contraste avec le régime rapide et dilué vue au chapitre précédent (voir par exemple la figure ??).

¹Il existe également des paramètres microscopiques sans dimensions liés aux interactions de contact comme le coefficient d'inélasticité ou le coefficient de frottement entre les billes

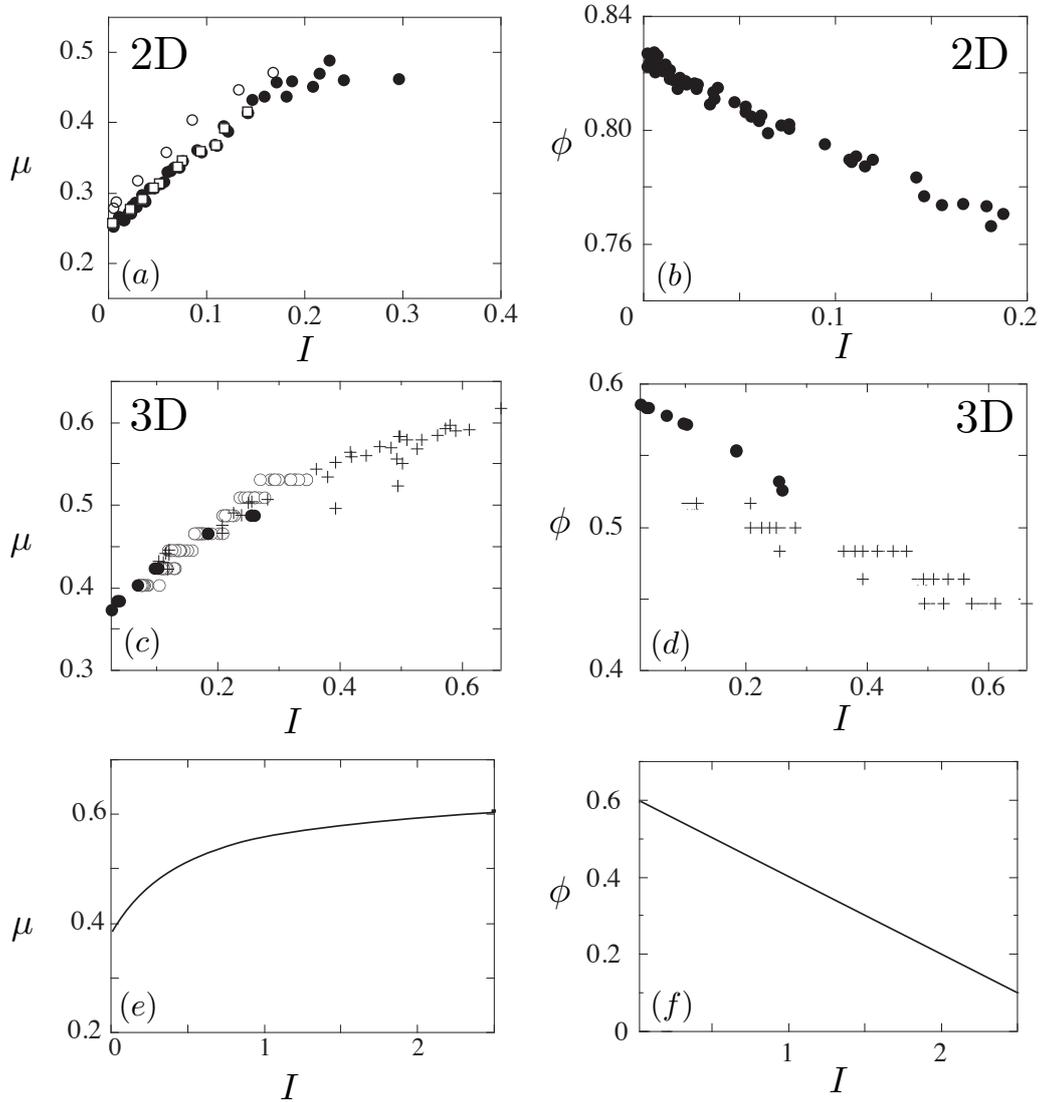


Figure 2: a, b, Lois de friction $\tau = \mu(I)P$ et de dilatance $\varphi = \varphi(I)$ obtenues pour des disques (2D) dans des simulations discrètes de cisaillement plan, pour différents paramètres micromécaniques : $e = 0,1$ (\bullet , $\mu_p = 0,4$), $e = 0,9$ (\square , $\mu_p = 0,4$) et $\mu_p = 0,8$ (\circ , différents e) (da Cruz *et al* 2005). c, d, $\mu(I)$ et $\varphi(I)$ pour des sphères (3D) déduites d'expériences de Couette cylindrique (Savage & Sayed 1984) et d'expériences et de simulations d'écoulements sur plans inclinés (d'après Pouliquen 1999, GDR MiDi 2004 ; Baran *et al* 2006). e, f, Expressions analytiques proposées pour $\mu(I)$ et $\varphi(I)$.

6.3 Une interprétation physique du nombre I

Le nombre inertiel I peut s'interpréter physiquement comme le rapport entre deux temps

$$I = \frac{t_{micro}}{t_{macro}}, \quad (3)$$

où $t_{micro} = d/\sqrt{P/\rho_p}$ est un temps microscopique de réarrangement lié à la pression de confinement et $t_{macro} = 1/\dot{\gamma}$ est un temps lié au cisaillement moyen. Pour s'en convaincre, considérons deux couches de grains adjacentes au sein de l'écoulement (Fig. 3.a). La vitesse relative de la

couche supérieure par rapport à la couche du dessous est $\Delta u = \dot{\gamma}d$. Par conséquent, le temps moyen mis par un grain pour se déplacer de son diamètre et franchir le grain en dessous est $d/\dot{\gamma}d = t_{macro}$. Le second temps t_{micro} peut s'interpréter comme le temps mis par une particule pour tomber dans un trou de taille d sous l'effet de la pression de confinement P (figure 3.b). La loi de Newton projetée sur la verticale s'écrit dans ce cas, $m d^2z/dt^2 = F_z$, avec $m \sim \rho_p d^3$, $d^2z/dt^2 \sim d/t_{micro}^2$ et $F_z \sim Pd^2$. On obtient bien $t_{micro} \sim d/\sqrt{P/\rho_p}$.

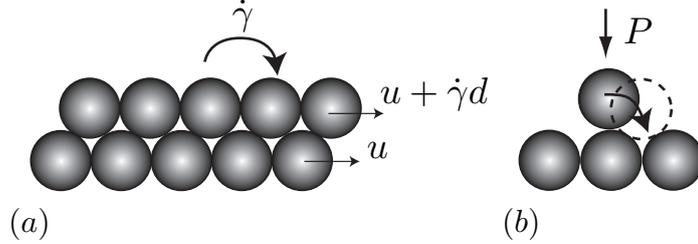


Figure 3: Interprétation physique du nombre inertiel I en terme de temps macroscopique de déformation (a) et de temps microscopique de réarrangement sous la pression de confinement P (b).

Cette écriture du nombre I en terme d'échelle de temps offre un moyen pour classer les différents régimes d'écoulement granulaire (figure 4). Les nombres I très faibles (typiquement inférieure à $10^{-4}/10^{-3}$) correspondent au régime quasi-statique, dans le sens où les déformations macroscopiques sont lentes par rapport au temps de réarrangement des grains. En revanche, les grandes valeurs de I ($\gtrsim 1$) correspondent au régime rapide et dilué vu au chapitre précédent. Le régime dense se trouve entre les deux. L'analyse dimensionnelle nous indique que pour passer du régime quasi-statique au régime liquide puis gazeux, il est équivalent d'augmenter le taux de cisaillement ou de diminuer la pression de confinement. Cette transition entre les différents régimes d'écoulement avec le nombre I est particulièrement bien visualisée sur la figure 4b, qui montre l'évolution du réseau de force en fonction du nombre I . Pour des faibles valeurs de I , le réseau de force est connecté et s'étend sur l'ensemble de l'échantillon comme pour un empilement statique ; quand I augmente, la longueur des chaînes de force diminue.

6.4 Cisaillement à pression imposée ou fraction volumique imposée ?

Jusqu'à présent, nous avons raisonné dans le cas d'une couche de grain cisailé à pression P imposée. Dans ce cas, la plaque supérieure est libre de bouger verticalement et la fraction volumique s'ajuste quand on varie le taux de cisaillement. Cette situation à pression imposée est caractéristique des écoulements granulaires à surface libre, pour lesquelles c'est la gravité qui fixe la valeur de la pression de confinement. Il existe cependant une autre possibilité pour cisailier le milieu et qui consiste à travailler à fraction volumique constante en fixant la distance L entre les deux plaques. Dans ce cas, la pression n'est plus imposée et augmente avec le taux de cisaillement pour un φ donné.

L'analyse dimensionnelle permet là encore de trouver une relation entre les contraintes et le taux de cisaillement. Les paramètres de contrôle sont la fraction volumique φ , la taille des grains d , la densité des grains ρ_p et le taux de cisaillement $\dot{\gamma}$. La seule échelle de contrainte est donc $\rho_p d^2 \dot{\gamma}^2$ et l'on obtient

$$\tau = \rho_p d^2 f_1(\varphi) \dot{\gamma}^2 \quad \text{et} \quad P = \rho_p d^2 f_2(\varphi) \dot{\gamma}^2. \quad (4)$$

où f_1 et f_2 sont deux fonctions qui dépendent uniquement de la fraction volumique. On remarque que ces expressions sont analogues à celles obtenues avec la théorie cinétique dans le cas d'un cisaillement plan à fraction volumique imposée (loi de Bagnold). Cela n'est pas surprenant car ces relations proviennent simplement de l'analyse dimensionnelle. Elles sont vérifiées quelque soit

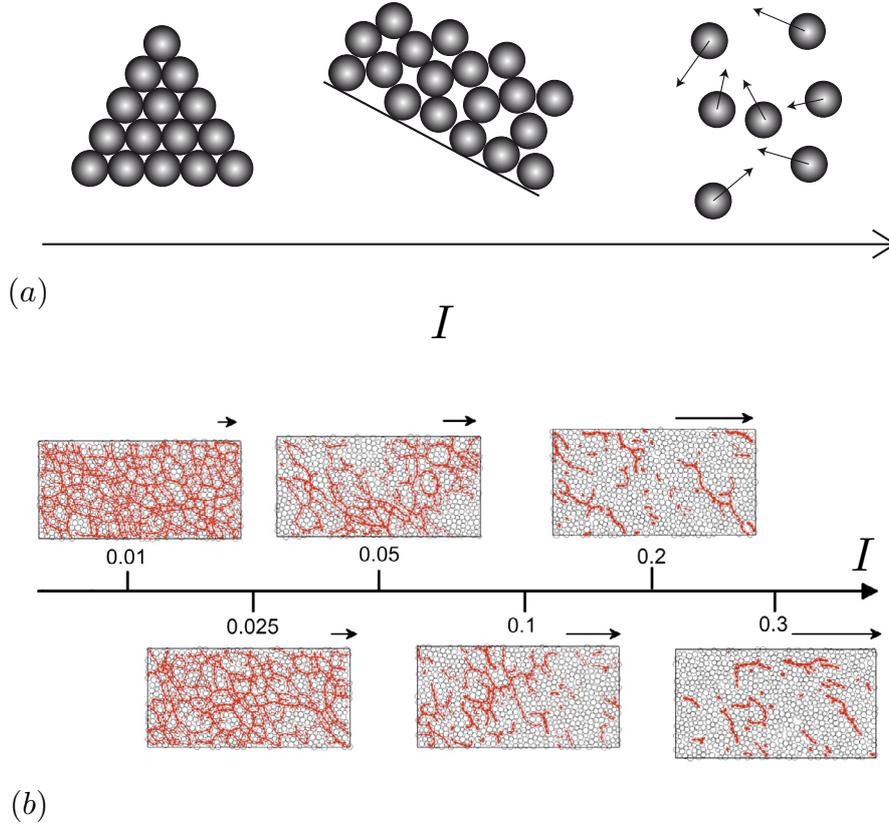


Figure 4: *a*) Classification des régimes d'écoulement solide/liquide/gaz en fonction du nombre inertiel I . *b*) Evolution du réseau de contact avec I pour un cisaillement plan obtenu par simulation numérique 2D ; les traits représentent les forces normales entre particules (Rognon 2006).

le régime d'écoulement dès que les grains sont supposés rigides. En revanche, les fonctions f_1 et f_2 calculées par la théorie cinétique n'ont pas de raison d'être encore valable dans le régime d'écoulement dense.

Les relations précédentes impliquent un résultat *a priori* surprenant : dans une expérience à volume contrôlé, il n'existe pas de seuil d'écoulement et la contrainte de cisaillement τ tend vers zéro quand le taux de cisaillement tend vers zéro. Il n'y a cependant aucune contradiction avec la rhéologie $\mu(I)$ et l'existence d'un seuil frictionnel pour le milieu, le rapport τ/P restant bien fini quand $\dot{\gamma} \rightarrow 0$. Les deux approches, à pression ou volume contrôlés, sont d'ailleurs rigoureusement équivalentes. Il existe une relation univoque entre les deux donnée par $f_1(\varphi) = \mu[I(\varphi)]/I^2(\varphi)$ et $f_2(\varphi) = 1/I^2(\varphi)$. On constate que les deux fonctions f_1 et f_2 divergent quand $I \rightarrow 0$, c'est-à-dire quand la fraction volumique $\varphi \rightarrow \varphi_c$.

Par la suite, nous adopterons plutôt la description rhéologique en terme de coefficient de friction $\mu(I)$. Elle permet en effet de faire l'hypothèse raisonnable d'incompressibilité pour les écoulements denses ($\varphi \simeq \text{cste}$), tout en conservant l'existence d'un seuil d'écoulement et les variations du coefficient de friction avec le taux de cisaillement, qui sont indispensables pour décrire la "viscosité" du matériau.

6.5 Loi constitutive

Les résultats précédents, obtenus pour un écoulement en cisaillement plan, montrent que le rapport entre la contrainte tangentielle et la contrainte normale ne dépend que du paramètre sans dimension I (tant que la taille du système peut être négligée). Le profil de vitesse étant dans ce cas linéaire, il est tentant de supposer que cette relation définit la rhéologie intrinsèque du matériau. Pour que cela soit vrai, il faut que les contraintes développées dans un écoulement inhomogène soient les mêmes qu'en cisaillement plan. C'est le cas si la rhéologie est locale, c'est-à-dire si la contrainte de cisaillement ne dépend que du taux de cisaillement et de la pression locale.

Plusieurs résultats expérimentaux et numériques semblent conforter cette hypothèse de localité, du moins dans une certaine mesure. La figure 2b présente ainsi le coefficient de friction et la loi de dilatance obtenus dans deux configurations différentes : une cellule de Couette annulaire (croix) et des écoulements stationnaires uniformes sur plan incliné (ronds). On constate que les données se superposent, ce qui suggère l'existence d'une rhéologie locale unique.

On généralise donc la relation trouvée en cisaillement plan à un cisaillement inhomogène caractérisé par un taux de cisaillement local $\dot{\gamma}(z)$ et une pression locale $P(z)$. La contrainte tangentielle locale $\tau(z)$ et la fraction volumique locale $\varphi(z)$ sont données par

$$\tau = \mu(I)P \quad \text{et} \quad \varphi = \varphi(I), \quad \text{avec} \quad I = \frac{|\dot{\gamma}(z)|d}{\sqrt{P(z)}/\rho_p}. \quad (5)$$

En ajustant les résultats expérimentaux et numériques, il est également possible de donner une expression empirique du coefficient de friction $\mu(I)$ et de la loi de dilatance $\varphi(I)$, par exemple (Jop *et al.* 2005 ; Pouliquen *et al.* 2006)

$$\mu(I) = \mu_1 + \frac{\mu_2 - \mu_1}{I_0/I + 1} \quad \text{et} \quad \varphi = \varphi_c - (\varphi_c - \varphi_m)I. \quad (6)$$

Typiquement, pour un matériau granulaire composé de billes de verre monodisperses, on a $\mu_1 = \tan 21^\circ$, $\mu_2 = \tan 33^\circ$, $I_0 = 0,3$, $\varphi_c = 0,6$ et $\varphi_m = 0,4$. Les fonctions ainsi choisies sont tracées sur la figure 2c. On remarque que la loi de friction sature vers une valeur maximale μ_2 pour des grandes valeurs de I .

La loi de friction et de dilatance (6) proviennent d'expériences et de simulations et sont donc entièrement phénoménologiques. Peut-on interpréter physiquement ces expressions ? Une manière d'interpréter la décroissance de la fraction volumique avec le nombre inertiel I consiste à reprendre l'image de la figure 3 montrant une bille se déplaçant au-dessus des deux billes de la couche du dessous. Quand la particule est dans un trou, on peut supposer que la fraction volumique de l'empilement est maximale et vaut φ_c . Cependant, quand un réarrangement a lieu, la particule doit sortir de son piège et on peut supposer que la fraction volumique passe alors par un minimum noté φ_m . Sachant que le temps de réarrangement est t_{micro} et que le temps pendant lequel la particule reste piégée est $t_{macro} - t_{micro}$, on a $\varphi = [\varphi_m t_{micro} + \varphi_c (t_{macro} - t_{micro})] / t_{macro} = \varphi_c - (\varphi_c - \varphi_m)I$. On retrouve bien la décroissance linéaire de la fraction volumique avec I .

Il est plus délicat d'interpréter la forme particulière du coefficient de friction $\mu(I)$, et en particulier la *croissance* de ce frottement effectif avec I . Pour expliquer l'augmentation de la friction avec le nombre I , certains auteurs ont étudié l'évolution de la distribution du réseau de contacts et de forces dans les écoulements denses. Il semble que l'augmentation de l'anisotropie de la distribution soit corrélée avec l'augmentation de la friction (da Cruz *et al.* 2005). Une autre façon d'interpréter microscopiquement la loi de friction consiste à étudier le problème plus simple du mouvement d'un grain unique sur un fond rugueux rigide. Nous renvoyons le lecteur à l'encadré TAC-TAC pour les détails. Retenons ici que l'on retrouve à l'échelle d'un grain les différents régimes solide, liquide et gazeux d'une assemblée granulaire. De plus, on retrouve le fait que dans le régime liquide, le frottement effectif augmente avec la vitesse du grain, avant de saturer et de décroître dans le régime gazeux. L'augmentation de la friction avec la vitesse provient du fait que, dans le régime liquide, le grain reste toujours en contact avec le fond à force normale imposée. Quand la vitesse augmente, le taux de collision et l'impulsion augmente, ce qui augmente la contrainte de cisaillement (Andreotti 2007).

Remarquons enfin que la loi $\mu(I)$ a été mis en évidence dans le cas d'un milieu granulaire composé de particules sphériques et quasi-monodisperses. La pertinence du nombre inertiel I et de la rhéologie locale $\mu(I)$ pour des milieux plus complexes formés de particules irrégulières ou de tailles différentes n'est pas encore bien connue.

6.6 Généralisation tensorielle

La rhéologie précédente (5) est scalaire ; elle n'est donc valable que dans le cas d'un écoulement unidirectionnel et cisailé dans une seule direction. Pour décrire des écoulements plus complexes, il est nécessaire de généraliser à trois dimensions la loi de friction sous forme tensorielle. Le moyen le plus simple consiste à ré-écrire cette loi en faisant apparaître formellement une viscosité effective. En supposant de plus l'écoulement incompressible et la pression isotrope¹, le tenseur des contraintes s'écrit alors (Jop *et al.* 2006)

$$\sigma_{ij} = -P\delta_{ij} + \tau_{ij}, \quad (7)$$

et

$$\tau_{ij} = \eta_{eff} \dot{\gamma}_{ij}, \quad \text{avec} \quad \eta_{eff} = \frac{\mu(I)P}{|\dot{\gamma}|} \quad \text{et} \quad I = \frac{|\dot{\gamma}|d}{\sqrt{P/\rho_p}}, \quad (8)$$

où $\dot{\gamma}_{ij} = (\partial u_i/\partial x_j + \partial u_j/\partial x_i)$ est le tenseur taux de déformation, u_i le champs de vitesse et $|\dot{\gamma}|$ le second invariant du tenseur taux de déformation donné par :

$$|\dot{\gamma}| = \sqrt{\frac{1}{2}\dot{\gamma}_{ij}\dot{\gamma}_{ij}}. \quad (9)$$

Dans le cadre de cette formulation, le liquide granulaire est décrit comme un fluide incompressible non-Newtonien, avec une viscosité effective $\eta_{eff} \equiv \mu(I)P/|\dot{\gamma}|$. Cette viscosité diverge lorsque le cisaillement $|\dot{\gamma}|$ tend vers zéro, ce qui assure l'existence d'un seuil d'écoulement donné par

$$|\tau| > \mu_1 P \quad \text{avec} \quad \sqrt{\frac{1}{2}\tau_{ij}\tau_{ij}}. \quad (10)$$

Cette description est très proche de celle d'autres fluides complexes dit viscoplastiques ou "à seuil", comme la boue, les pâtes, etc. Il existe cependant des spécificités liées à l'aspect frictionnel des matériaux granulaires. Tout d'abord, la viscosité effective dépend de la pression P , et pas seulement du taux de cisaillement comme dans un fluide complexe classique. Ensuite, le seuil d'écoulement est proportionnel à la pression. Plus précisément, le critère (10) correspond à un critère de friction du type Drucker-Prager. Ce dernier n'est pas exactement équivalent au critère de Mohr-Coulomb (voir TD).

7 Appendice: Notions élémentaires sur les tenseurs

Les équations de la mécanique des milieux continus amènent à manipuler des tenseurs, en particulier le tenseur des contraintes, le tenseur des déformations et le tenseur des taux de déformation. Notons ici quelques unes de leur propriétés essentielles.

Le caractère tensoriel d'une quantité se définit par rapport à ses transformations dans un changement de repère. Considérons deux systèmes de coordonnées cartésiennes (x_1, x_2, x_3) et (y_1, y_2, y_3) ayant une origine commune. Les coordonnées dans les deux systèmes d'axes sont reliées par :

$$y_i = A_{ij}x_j \quad \text{et} \quad x_i = y_j A_{ji}$$

¹Les simulations discrètes réalisées en cisaillement plan, cellule de Couette ou plan incliné montrent que, pour un écoulement granulaire dense, la différence entre les contraintes normales σ_{xx} et σ_{zz} dans le plan de cisaillement, dite première différence de contrainte normale, est très faible (inférieures à 5 %, Silbert *et al.* 2001 ; da Cruz *et al.* 2005 ; Depken *et al.* 2007). En revanche, la seconde différence de contrainte normale, $\sigma_{zz} - \sigma_{yy}$ pourrait être plus forte (de l'ordre de 20 %, Depken *et al.* 2007).

où \mathbf{A} est une matrice de rotation telle que son inverse soit égale à sa transposée : $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^{-1}$.

Considérons maintenant une matrice 3x3 \mathbf{T} dont les éléments sont des paramètres physiques dépendant des coordonnées d'espace et de temps. Lorsque les valeurs des éléments de \mathbf{T} dans le système de coordonnées \mathbf{y} , notées $\mathbf{T}(\mathbf{y})$, sont reliées aux valeurs de ces mêmes éléments dans le système de coordonnées \mathbf{x} , notées $\mathbf{T}(\mathbf{x})$, par les relations :

$$T_{ij}(\mathbf{y}) = A_{ik}A_{jl}T_{kl}(\mathbf{x}) \quad \text{et} \quad T_{ij}(\mathbf{x}) = T_{kl}(\mathbf{y})A_{ki}A_{lj}$$

la matrice \mathbf{T} est un tenseur de rang deux. Une des caractéristiques importantes des tenseurs de rang deux est l'invariance de leur polynôme caractéristique $Det(\mathbf{T} - \lambda\mathbf{I})$ dans un changement de repère. De ce fait les racines du polynôme caractéristique, qui sont les valeurs propres du tenseur sont également invariantes par changement de repère.

Le polynôme caractéristique peut s'exprimer en fonction des trois invariants du tenseur :

$$Det(\mathbf{T} - \lambda\mathbf{I}) = -\lambda^3 + I_3\lambda^2 - I_2\lambda + I_1$$

ces trois invariants ayant les expressions suivantes :

$$I_1 = Det(\mathbf{T}) = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$$

$$I_2 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 = \frac{1}{2}([\text{Tr}(\mathbf{T})]^2 - \text{Tr}(\mathbf{T}^2))$$

$$I_3 = \text{Tr}(\mathbf{T}) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$$

Le gradient de vitesse \mathbf{G} obéit aux règles de transformation énoncées ci-dessus, c'est donc un tenseur cartésien de rang deux. En effet, les composantes de vitesse se transforment comme les coordonnées d'espace, puisqu'elles sont des dérivées par rapport au temps de ces coordonnées. soit :

$$u_i(\mathbf{y}) = A_{ij}u_j(\mathbf{x}), \quad u_i(\mathbf{x}) = u_j(\mathbf{y})A_{ij}$$

En utilisant la règle de dérivations successives, on a pour la composante G_{ij} du gradient :

$$G_{ij} = \frac{\partial u_j(\mathbf{x})}{\partial x_i} = \frac{\partial y_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_j(\mathbf{x})}{\partial y_k} = A_{ki} \frac{\partial u_j(\mathbf{x})}{\partial y_k} = A_{ki}A_{lj} \frac{\partial u_l(\mathbf{y})}{\partial y_k}$$

Le gradient se transforme donc comme :

$$G_{ij}(\mathbf{x}) = A_{ki}A_{lj}G_{kl}(\mathbf{y}).$$

Le troisième invariant, la trace du tenseur, est ici égal à la divergence de la vitesse. Il caractérise le changement de volume, par unité de temps, d'un élément de fluide. Lorsque le fluide peut être considéré comme incompressible, la trace de \mathbf{G} est nulle. Les parties symétrique et antisymétrique de \mathbf{G} sont également des tenseurs de rang deux.

Un autre exemple de tenseur de rang deux est le flux de quantité de mouvement $\rho u_i u_j$. Un raisonnement analogue à celui fait pour le gradient de vitesse montre qu'il se transforme dans un changement de repère comme :

$$\rho u_i u_j(\mathbf{x}) = A_{ki}A_{lj}\rho u_k u_l(\mathbf{y})$$

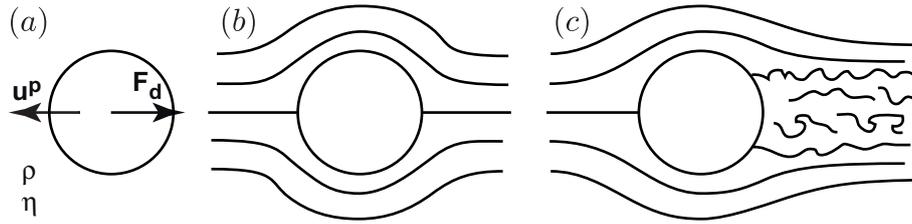


FIG. 1 – (a) Schéma d’un grain se déplaçant à la vitesse \mathbf{u}^P dans un fluide au repos. (b) Lignes de courant dans le référentiel du grain lorsque la traînée est dominée par les contraintes visqueuses de cisaillement. (c) Lignes de courant dans le référentiel du grain lorsque la traînée est dominée par la pression.

Notes sur le cours ”Géomorphogénèse”

B. Andreotti

M3b 2009/2010

Chapitre 3 Transport sédimentaire

1 Force hydrodynamique sur un grain

Nous avons jusqu’à présent considéré les interactions entre des grains secs ou humides (ponts capillaires). Dans un grand nombre de problèmes, le fluide interstitiel, que ce soit de l’air, de l’eau, de l’huile ou de tout autre fluide joue un rôle important. On distingue deux types d’influence du fluide. D’une part, le fluide peut être en écoulement par rapport aux grains. C’est le cas par exemple dans le transport sédimentaire ou dans l’écoulement d’un fluide au travers d’un matériau granulaire. D’autre part, le fluide peut être entraîné en mouvement avec les grains comme dans le cas des avalanches sous-marines ou des suspensions iso-denses. Il influence alors – et contrôle dans nombre de cas – les processus dissipatifs au sein de ces écoulements. Nous partons ci-dessous du cas le plus simple – un seul grain dans un écoulement stationnaire et uniforme – pour ensuite discuter des forces dans les écoulements plus complexes. Enfin, nous abordons la lubrification des contacts par le fluide interstitiel.

1.1 Force sur un grain dans un écoulement stationnaire et uniforme

Considérons un grain de taille d en mouvement à une vitesse \mathbf{u}^P par rapport à un fluide immobile de densité ρ_f (Fig. 1a). En choisissant, d comme taille caractéristique, d/u^P comme temps caractéristique et $\rho_f d^3$ comme masse caractéristique, il ne reste qu’un paramètre dans le problème: la viscosité dynamique du fluide, η ou, de manière équivalente, la viscosité cinématique $\nu = \eta/\rho_f$. On construit ainsi le nombre de Reynolds particulaire qui, comparant les effets inertiels aux effets visqueux, caractérise le régime d’écoulement:

$$\mathcal{R} = \frac{\rho_f u^P d}{\eta} = \frac{u^P d}{\nu}. \quad (1)$$

A faible nombre de Reynolds \mathcal{R} , les échanges de quantité de mouvement entre le grain et le fluide sont dominés par la diffusion visqueuse. La force résulte principalement, à bas Reynolds, de la distribution de contraintes visqueuses sur le pourtour du grain. Le gradient de vitesse étant proportionnel à u^p/d , la contrainte visqueuse va comme $\eta u^p/d$. La surface sur laquelle s'applique cette contrainte est proportionnelle à d^2 . La force exercée par le fluide sur la particule s'écrit dimensionnellement comme la contrainte fois la surface:

$$\mathbf{F}_d = -\alpha \rho_f \nu d \mathbf{u}^P = -\alpha \eta d \mathbf{u}^P \quad (2)$$

Le préfacteur α peut se calculer exactement pour une sphère de diamètre d (Guyon *et al.* 2001). En coordonnées sphériques (r, ϕ, θ) , le champ de vitesses (Fig. 1b) s'écrit:

$$u_r = u^p \cos \phi \left(\frac{3d}{4r} - \frac{d^3}{16r^3} \right) \quad \text{et} \quad u_\phi = u^p \sin \phi \left(\frac{3d}{8r} + \frac{d^3}{32r^3} \right) \quad (3)$$

La décroissance de ce champ comme $1/r$ traduit une influence des grains à longue portée. La contrainte visqueuse à la surface de la sphère est uniforme et égale à

$$\sigma = \frac{3\eta}{d} \mathbf{u}^P \quad (4)$$

Chaque élément de surface contribue donc également à la résultante des forces hydrodynamiques. L'aire de la sphère étant égale à πd^2 , le coefficient α vaut 3π de sorte que la force de traînée, appelée force de Stokes dans cette limite, s'écrit:

$$\mathbf{F}_d = -3\pi \eta d \mathbf{u}^P \quad (5)$$

Appliquons cette formule à un milieu granulaire ou à une poudre en suspension. Pour ce faire, considérons un grain unique tombant au sein d'un fluide et soumis à la force de gravité déjaugée de la poussée d'Archimède (force de flottaison), c'est à dire de la contribution hydrostatique à la résultante des forces de pression. L'équilibre des forces s'écrit:

$$\mathbf{F}_d = \frac{\pi}{6} (\rho_p - \rho_f) d^3 \mathbf{g} \quad (6)$$

et définit la vitesse limite de chute:

$$u_{\text{chute}} = \frac{\rho_p - \rho_f}{\rho_f} \frac{g d^2}{18\nu} \quad (7)$$

Faisons l'application numérique pour une bille de verre ($\rho_p = 2650 \text{ kg/m}^3$) de diamètre $d = 100 \mu\text{m}$ en chute dans l'eau ($\rho_f = 1000 \text{ kg/m}^3$ et $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$). On obtient une vitesse de chute de 9 mm/s ce qui est raisonnable et correspond à un nombre de Reynolds légèrement plus petit que 1. Si le fluide porteur est une huile 1000 fois plus visqueuse que l'eau, la vitesse de chute devient $9 \mu\text{m/s}$ de sorte que le grain met un peu plus de 10 s à parcourir sa propre taille. Considérons maintenant des particules d'argile de $10 \mu\text{m}$ dans l'eau. Leur densité étant pratiquement égale à celle du verre, elles chutent 100 fois plus lentement que la bille de verre. Il leur faut 18 minutes pour sédimenter sur 10 cm et 3 heures pour sédimenter sur 1 m.

Faisons la même application numérique pour un parachutiste de 'diamètre' $d = 1.80 \text{ m}$ d'une densité – équipement compris – proche de celle de l'eau, en chute dans l'air ($\rho_f = 1.2 \text{ kg/m}^3$ et $\nu = 1.5 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$). La formule ci-dessus prédit une vitesse terminale de chute de 10^8 m/s , légèrement plus faible que la vitesse de la lumière dans le vide! Il faut évidemment en conclure que la viscosité n'est pas le mécanisme dominant de transfert de quantité de mouvement dans ce cas ci. Il s'agit en effet d'un écoulement turbulent, extrêmement fluctuant et désordonné.

A haut nombre de Reynolds, la diffusion visqueuse est négligeable devant le transport convectif par les fluctuations de vitesse. Par symétrie, la force F_d s'exerçant sur un grain sphérique reste colinéaire avec la vitesse \mathbf{u}^P mais elle ne dépend plus de la viscosité. La force principale provient

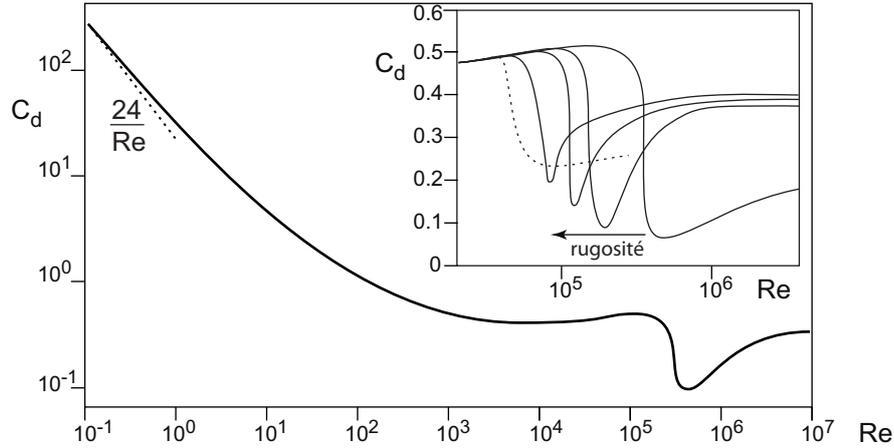


FIG. 2 – Coefficient de traînée C_d en fonction du nombre de Reynolds \mathcal{R} pour une sphère lisse. *Insert: courbes $C_d(Re)$ obtenues pour des sphères usinées avec différentes rugosités de surface (Achenbach 1972 et 1974) et pour une balle de golf (pointillés).*

de l'asymétrie de pression entre les deux faces du grain (Fig. 1c). Comme les lignes de courant convergent le long de la face au vent du grain, cette zone est peu fluctuante de sorte que l'énergie est peu dissipée. On peut donc raisonnablement utiliser la relation de Bernoulli sur la face amont du grain pour y estimer la surpression, qui varie comme $\frac{1}{2}\rho_f u^2$. Sur les flancs du grain, il y a séparation de la couche limite de cisaillement et il se forme une bulle de recirculation fortement dissipative derrière le grain. La pression sur la face aval du grain est donc de l'ordre de la pression loin du grain. Au final, la force totale est de l'ordre du produit de la pression par la surface:

$$\mathbf{F}_d = -\frac{\pi}{8} C_\infty \rho_f d^2 u^p \mathbf{u}^P \quad (8)$$

Le préfacteur C_∞ s'appelle le coefficient de traînée, et dépend de la forme de l'objet. Pour des sphères lisses, à très haut nombre de Reynolds, la valeurs expérimentale de C_∞ est autour de 0.47. Pour des grains naturels, les mesures donnent plutôt $C_\infty \simeq 1$.

Dans le régime turbulent, la vitesse limite de chute devient:

$$u_{\text{chute}} = \sqrt{\frac{\rho_p - \rho_f}{\rho_f} \frac{4gd}{3C_\infty}} \quad (9)$$

Cette fois, l'expression ne prédit plus qu'une chute du parachutiste à 140 m/s, ce qui correspond à la réalité – de 80 m/s sur le ventre, bras écartés, à 300 m/s à la verticale. Prenons l'exemple de grains de quartz de 300 μm en chute dans l'air. Leur vitesse terminale est de l'ordre de 3 m/s, ce qui coïncide avec la vitesse typique de grains transportés en saltation par le vent, lorsqu'ils entrent en collision avec le sol. Dans ce dernier exemple, le nombre de Reynolds particulière n'est que de 60. Il s'agit, en réalité, d'un régime de transition entre celui, à bas Reynolds, dominé par les contraintes de cisaillement visqueuses et celui, à haut Reynolds, dominé par l'asymétrie amont/aval du champ de pression.

Il peut être intéressant, pour des raisons pratiques, de raccorder les deux régimes asymptotiques en une unique loi. Par analyse dimensionnelle, la résultante des contraintes hydrodynamiques sur le grain s'écrit:

$$\mathbf{F}_d = -\frac{\pi}{8} C_d(\mathcal{R}) \rho_f d^2 u^p \mathbf{u}^P \quad (10)$$

Le coefficient de traînée C_d est maintenant une fonction du nombre de Reynolds qui peut être déterminée expérimentalement (Fig. 2). A bas nombre de Reynolds, dans le régime visqueux, la force est proportionnelle à la viscosité ce qui signifie que C_d doit être proportionnel à \mathcal{R}^{-1} . A

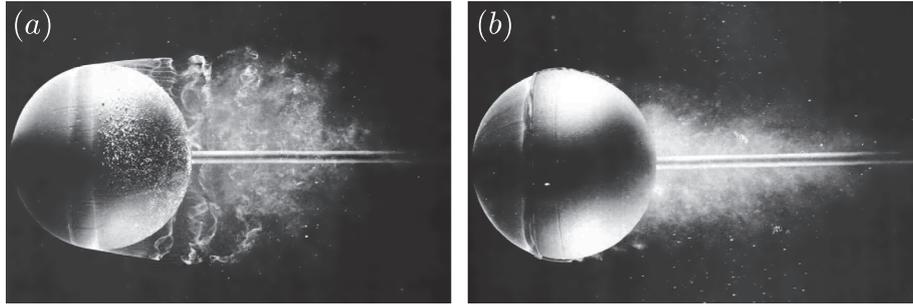


FIG. 3 – Visualisations de l'écoulement autour d'une sphère de part et d'autre de la crise de traînée (Onéra, H. Werlé 1980). (a) Séparation de la couche limite visqueuse. (b) Séparation de la couche limite turbulente.

haut nombre de Reynolds, le coefficient de traînée C_d doit tendre vers la constante C_∞ définie précédemment. Pour raccorder, les deux lois d'échelle de la force de traînée, la formule suivante donne toute satisfaction pour les applications usuelles:

$$C_d = \left(C_\infty^{1/2} + s\mathcal{R}^{-1/2} \right)^2 \quad (11)$$

Pour des grains naturels, on pourra prendre comme valeur numérique $C_\infty \simeq 1$ et $s \simeq \sqrt{24} \simeq 5$.

La relation expérimentale entre C_d et \mathcal{R} dans le cas d'une sphère lisse, présentée sur la figure 2, présente une chute brutale entre $\mathcal{R} = 10^5$ et $\mathcal{R} = 10^6$. Cette crise de traînée provient d'un changement de forme et de taille de la bulle de recirculation derrière la sphère (Fig. 5). Elle arrive à un nombre de Reynolds d'autant plus petit que la sphère est rugueuse. Pour le comprendre, analysons plus avant l'origine de la traînée de pression. Les contraintes de cisaillement tendent à entraîner le fluide dans le sens de l'écoulement loin du grain (Fig. 4b). Ceci est vrai, que les contraintes de cisaillement qui contrôlent les transferts de quantités de mouvement dans la direction transverse à l'écoulement soient diffusifs (contrainte visqueuse) ou proviennent des fluctuations turbulentes (contrainte turbulente dite de Reynolds). A l'inverse, le gradient de pression change de direction entre l'amont et l'aval du grain (Fig. 4c). C'est cette force qui est à l'origine de la séparation de la couche limite et de la formation d'une bulle de recirculation. Les contraintes de cisaillement et le gradient de pression ont des effets antagonistes dans la partie aval de l'écoulement. Dès lors, la transition d'une couche limite visqueuse vers une couche limite turbulente a un effet paradoxal: elle augmente soudainement la contrainte de cisaillement et, ce faisant, entraîne un recollement partiel de la couche limite (Fig. 3). L'écoulement redevenant plus symétrique entre l'amont et l'aval du grain, la traînée de pression se trouve réduite.

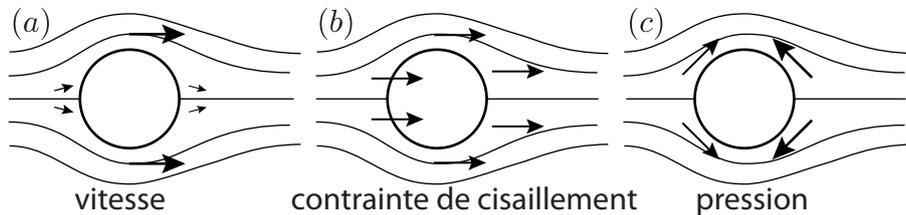


FIG. 4 – Schéma d'un grain soumis à un écoulement fluide . (a) Les vitesses sont nulles sur les points d'arrêt et maximales sur les flancs. (b) Les contraintes de cisaillement tendent à entraîner le fluide dans le sens du courant. (c) La pression est forte sur les points d'arrêt et minimale sur les flancs. Le gradient de pression tend à entraîner le fluide dans le sens du courant sur la face amont du grain, mais a un effet inverse sur la face aval du grain. Lorsque l'effet de la pression domine les contraintes de cisaillement, il y a séparation de la couche limite et formation d'une bulle de recirculation.

1.2 Force dans les écoulements plus complexes

Dans le paragraphe précédent, nous avons raisonné sur un grain en mouvement par rapport à un fluide immobile. Dans la plupart des cas, les grains sont en mouvement dans un écoulement fluide inhomogène et instationnaire. Deux voies ont été suivies pour tenter de déterminer les contraintes sur le grain dans ce cas. D'une part, il est possible d'effectuer des développements analytiques à partir du régime visqueux, en prenant en compte différents effets à l'ordre perturbatif: instationnarité, effets inertiels, influence d'un gradient de vitesse, etc. Ce sont ces développements qui fournissent le cadre d'interprétation des différents effets apparaissant dans le terme de force. D'autre part, il est possible de mesurer expérimentalement le mouvement de particules dans un fluide au repos ou en mouvement. Ces mesures montrent que les développements systématiques ont une limite de validité très étroite: au delà d'un nombre de Reynolds de quelques dizaines, il faut en revenir à l'analyse dimensionnelle tend les écarts aux calculs perturbatifs sont grands. Dans la limite des écoulements à haut nombre de Reynolds, le problème se complique encore d'un cran. Il est d'usage dans ce cas, de conserver, en vertu de l'invariance galiléenne, les expressions du paragraphe précédent en remplaçant la vitesse du grain \mathbf{u}^P par la vitesse relative entre le grain et le fluide $\mathbf{u}^P - \mathbf{u}^f$. Ceci n'est vrai qu'à une condition: que l'écoulement fluide ne présente aucune fluctuation intrinsèque. Or, les forces hydrodynamiques résultent non seulement des fluctuations induites par la présence du grain, mais aussi de celles dues à la turbulence de l'écoulement. Très peu de choses sont connues sur les forces ressenties par un grain dont la taille soit dans la zone inertielle d'un écoulement turbulent. Insistons en préambule que le plus robuste reste l'analyse dimensionnelle développée ci-dessus, les corrections ne permettant en général que peu de se rapprocher de la réalité des mesures dans une situation turbulente. Nous suivons ci-dessous la première de ces voies et nous identifions les différents effets qui interviennent à l'ordre perturbatif.

Nous avons postulé que la force de gravité doit être déjaugée de la poussée d'Archimède. Il est utile d'en retracer l'origine et les conséquences. Considérons d'abord les équations du mouvement fluide:

$$\rho_f \frac{d\mathbf{u}^f}{dt} = -\nabla P + \rho_f \mathbf{g} + \eta \Delta \mathbf{u}^f \quad (12)$$

A la force de frottement due aux modifications de l'écoulement induite par la particule, on peut ajouter les contraintes qui se seraient exercées sur la particule, si celle-ci avait été fluide. L'intégrale surfacique de la pression et des contraintes visqueuses se ramène à une intégrale volumique du gradient du tenseur des contraintes. Il en résulte une force supplémentaire $\mathbf{F}_{\text{Archimède}}$ égale à:

$$\mathbf{F}_{\text{Archimède}} \approx \frac{\pi}{6} \rho_f d^3 \left(\frac{d\mathbf{u}^f}{dt} - \mathbf{g} \right) \quad (13)$$

où, en première approximation, les quantités sont évaluées pour l'écoulement non perturbé, au centre du grain. Dans le cas d'un grain tombant dans un fluide au repos, l'effet de l'écoulement non perturbé se réduit à la force de flottaison. Lorsque particules et fluide ne sont pas iso-denses (c'est-à-dire de même densité), cette force conduit à ce que les particules ne suivent pas l'écoulement. Prenons un exemple important: celui d'un tourbillon intense au sein d'un écoulement turbulent. Le fluide en rotation est à l'équilibre entre la pseudo-force centrifuge (effet inertielle) et le gradient de pression (un tourbillon correspond à une dépression). Un grain plus dense que le fluide, de passage dans le cœur de ce tourbillon, ressent une pseudo-force centrifuge plus grande que le fluide déplacé mais le même gradient de pression. Il est donc éjecté. Cette effet est à l'origine du manchon de poussière qui enserre le cœur des mini-tornades d'origine convective (Dust Devil) dont chacun garde mémoire. Contrairement à ce qu'on pourrait penser de prime abord, un écoulement turbulent ne permet pas de mélanger des particules denses de manière efficace. Il existe des concentrations préférentielles de particules dans les zones sans rotation. La probabilité de rencontre accrue qui en résulte expliquerait la croissance anormalement rapide des gouttes d'eau dans les zones de condensation où se forment la pluie.

Le second effet provient du fait que la particule en mouvement a cédé au fluide, une fois sa vitesse stationnaire atteinte, une énergie cinétique, qui s'écrit dimensionnellement $\Pi = \frac{1}{2} \rho_f \mathcal{V} \frac{\pi}{6} d^3 (\mathbf{u}^P - \mathbf{u}^f)^2$. Dans cette expression, \mathbf{u}^f représente la vitesse du fluide non perturbé, à l'endroit où se situe

le grain et le nombre sans dimension \mathcal{I} représente le volume de fluide mis en mouvement du fait de la présence de la particule rapporté à celui de la particule. Dans le cas de l'écoulement potentiel autour d'une sphère, on montre que \mathcal{I} vaut 1/2 (Brennen 1982). Lorsque la vitesse relative de la particule par rapport au liquide varie, le fluide exerce sur la particule une force égale à:

$$\mathbf{F}_{\text{masse ajoutée}} \approx \frac{\pi}{12} \rho_f d^3 \left(\frac{d\mathbf{u}^P}{dt} - \frac{d\mathbf{u}^f}{dt} \right) \quad (14)$$

Dès lors, tout ce passe comme si la masse effective de la particule valait:

$$m_{\text{effective}} \approx \frac{\pi}{6} \left(\rho_p + \frac{1}{2} \rho_f \right) d^3 \quad (15)$$

et celle du fluide déplacé, $\frac{\pi}{4} \rho_f d^3$. Cela justifie l'appellation de cette pseudo-force inertielle: "masse ajoutée".

Le troisième effet procède du retard entre le moment où la particule change de vitesse relative avec le fluide et le moment où la force qui en résulte change. La contribution dépendant de l'histoire à la force hydrodynamique s'appelle la force de Basset. A l'ordre linéaire, on peut la décrire par une fonction de transfert temporelle:

$$\mathbf{F}_{\text{Basset}} = \int \mathcal{K}(\tau) \frac{d\mathbf{F}_d}{dt}(t - \tau) d\tau \quad (16)$$

Le noyau de convolution $\mathcal{K}(\tau)$ est une fonction sans dimension. A nombre de Reynolds faible, la couche limite est visqueuse de sorte que le retard provient de la diffusion de quantité de mouvement entre la surface de la sphère et l'écoulement. Dimensionnellement, le noyau doit donc être une fonction de $\frac{d}{\sqrt{\nu\tau}}$. Le calcul rigoureux à bas nombre de Reynolds donne un noyau traduisant des corrélations à long temps:

$$\mathcal{K}(\tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{d}{\sqrt{\nu\tau}} \quad (17)$$

A haut nombre de Reynolds, la couche limite est turbulente de sorte que le retard provient du temps d'échange convectif de la quantité de mouvement. Le noyau est alors une fonction de $\frac{d}{|\mathbf{u}^P - \mathbf{u}^f|\tau}$. Enfin, dans la gamme de nombres de Reynolds intermédiaires où se font les instabilités primaires, un grain émet un sillage instationnaire composé de tourbillons. Dans ce cas, la correction de Basset ne peut se mettre sous la forme d'une fonction de transfert ne dépendant pas du temps.

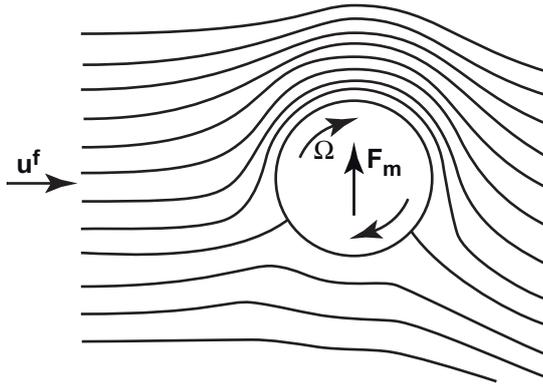


FIG. 5 – Lignes de courant autour d'une sphère en rotation à la vitesse angulaire Ω et résultante \mathbf{F}_m des forces de pression.

Lorsque dans un écoulement homogène, en plus de se translater à la vitesse \mathbf{u}^P , un grain tourne à une vitesse angulaire Ω , une force perpendiculaire à \mathbf{u}^P et à Ω apparaît, qui s'exprime comme:

$$\mathbf{F}_m = \frac{\pi}{8} C_m \rho_f d^3 \Omega \wedge \mathbf{u}^P \quad (18)$$

Cette force, dite de Magnus, s'interprète très simplement par un bilan des forces de pression sur le grain. Résonnons dans le référentiel accompagnant le grain à la vitesse \mathbf{u}^f . L'écoulement autour du grain conduit, du fait de la présence de celui-ci, à des vitesses plus grandes que U sur ses flancs. Comme l'indique la relation de Bernoulli, une sur-vitesse s'accompagne d'une dépression. Lorsque le grain tourne à vitesse $\boldsymbol{\Omega}$, la symétrie de l'écoulement est brisée, faisant apparaître des vitesses et donc des pressions différentes sur les faces du grain. La force de Magnus est la résultante de cette asymétrie de pression. Pour une sphère, à bas nombre de Reynolds, C_m peut être approximativement calculé par des techniques de raccordements asymptotiques, qui donnent $C_m \simeq 1$ (Rubinow and Keller 1961). En régime visqueux, cette force associée à la relation de Bernoulli devient négligeable devant les forces visqueuses dont nous reparlons ci-dessous.

Au final, la structure de l'équation du mouvement d'une particule sphérique à bas nombre de Reynolds, dans un écoulement ne présentant pas de variation spatiale importante à l'échelle d , s'écrit (Mordant and Pinton 2000):

$$\begin{aligned} (\rho_p + \frac{1}{2}\rho_f) \frac{d\mathbf{u}^p}{dt} &= (\rho_p - \rho_f)\mathbf{g} + \frac{3}{2}\rho_f \frac{d\mathbf{u}^f}{dt} + \frac{3}{4}C_d(\mathcal{R})\rho_f \frac{|\mathbf{u}^f - \mathbf{u}^p|(\mathbf{u}^f - \mathbf{u}^p)}{d} \\ &+ \frac{6\mathbf{F}_{\text{Basset}}}{\pi d^3} + \frac{3}{4}C_m\rho_f \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{u}^p \end{aligned} \quad (19)$$

Considérons maintenant le cas d'un écoulement à bas nombre de Reynolds dans lequel le champ de vitesse varie à l'échelle du diamètre d du grain (Matas *et al.* 2004). Au premier ordre, la force est modifiée par la présence d'un gradient de vitesse. Dans le cas d'un écoulement de cisaillement simple de taux de déformation $\dot{\gamma}$, la force de portance a été calculée par Saffman:

$$F_s = \alpha_s \rho_f d^2 \sqrt{\nu \dot{\gamma}} u^p \quad (20)$$

avec $\alpha_s \simeq 1.61$ pour une sphère. Cette force résulte, comme la force de Magnus, de l'asymétrie du champ de pression induite par les effets inertiels. Ici, la rotation du grain est engendrée par le gradient de vitesse.

La correction d'ordre supérieur provient de la courbure du champ de vitesse. La force de Stokes s'écrit comme l'intégrale sur la surface de la sphère de la contrainte $\sigma = \frac{3\eta}{d} (\mathbf{u}^p - \mathbf{u}^f)$. \mathbf{u}^f désigne le champ de vitesse du fluide non perturbé par la particule. En développant ce champ par rapport à la vitesse au centre de la sphère, il apparaît une correction à la force de Stokes, appelée force de Faxén, qui met en jeu le Laplacien de la vitesse:

$$\mathbf{F}_f = \frac{1}{8}\pi d^3 \Delta \mathbf{u}^f \quad (21)$$

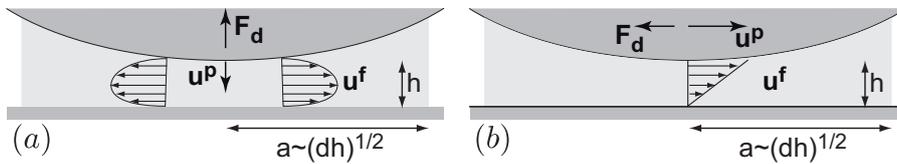


FIG. 6 – Schéma de l'écoulement lubrifié entre une sphère en mouvement et une paroi plane. (a) Vitesse normale. (b) Vitesse tangentielle.

1.3 Effet de paroi et collision entre grains

Lorsque deux grains entrent en collision, le fluide interstitiel est chassé. L'écoulement qui s'ensuit présente un gradient de l'ordre de la différence de vitesses entre les deux grains, \dot{h} divisée par la distance h qui sépare les surfaces. Lorsque les grains viennent au contact, en conséquence, les gradients de vitesse et donc les efforts visqueux tendent à diverger. L'effet est strictement le même lorsqu'un grain approche d'une paroi (Fig. 6a). Comme précédemment, procédons à un

raisonnement qualitatif pour déterminer la loi d'échelle suivie par la force d'interaction entre le grain et la paroi, dans ce cas. La force dépend d'un nouveau nombre sans dimension, le rapport h/d :

$$F_d = -3\pi\eta d \dot{h} \alpha \left(\frac{h}{d} \right) \quad (22)$$

où \mathcal{F} est une fonction qui tend vers 1 à grande distance h/d . Quand le grain est proche de la paroi ($h \ll d$), le fluide forme un film de lubrification d'épaisseur $\approx h$ sur un rayon $a \approx \sqrt{d\dot{h}}$. Par conservation de la matière, il existe une vitesse radiale u_f dans ce film est de l'ordre de $-\frac{a}{h}\dot{h}$. L'équilibre entre le gradient radial de pression et le gradient transverse de la contrainte de cisaillement visqueuse conduit à une pression variant selon la loi d'échelle

$$\frac{\delta P}{a} \approx \eta \frac{u_f}{h^2} \approx \eta \frac{a \dot{h}}{h^3} \quad (23)$$

La force qui en résulte va comme la pression multipliée par la surface:

$$F_d \approx \eta \frac{a^4 \dot{h}}{h^3} \approx \eta \frac{d^2 \dot{h}}{h} \quad (24)$$

Un calcul plus rigoureux (Brenner 1961) permet d'obtenir le préfacteur et donne une loi de la forme:

$$F_d = -\frac{3\pi\eta d^2 \dot{h}}{2h} \quad (25)$$

La fonction sans dimension α varie donc comme d/h .

Considérons le cas d'un grain rigide lancé vers la paroi avec une vitesse initiale. Le principe fondamental de la dynamique s'écrit:

$$\frac{\pi}{6} \rho_p d^3 \ddot{h} = -\frac{3\pi\eta d^2 \dot{h}}{2h} \quad (26)$$

Cette équation s'intègre en

$$\dot{h} = -\frac{9\eta}{\rho_p d} \ln \left(\frac{h}{h_0} \right), \quad (27)$$

où la constante d'intégration h_0 peut être reliée à la vitesse et à la distance initiales. On constate que le grain n'atteint jamais la paroi et s'arrête à une distance h_0 de la paroi.

Considérons maintenant le cas de la sédimentation induite par la gravité. L'inertie des grains peut être négligée lorsque la viscosité a suffisamment freiné le grain (régime de Stokes). L'équilibre des forces s'écrit alors:

$$\frac{\pi}{6} (\rho_p - \rho_f) d^3 g + \frac{3\pi\eta d^2 \dot{h}}{2h} = 0 \quad (28)$$

On reconnaît une équation différentielle linéaire du premier ordre. La position de la particule décroît donc exponentiellement avec un temps caractéristique:

$$T_{\text{chute}} = \frac{9\eta}{(\rho_p - \rho_f) g d} \quad (29)$$

Même entraînée par une force permanente, la particule ne touche donc pas la paroi en temps fini. En réalité, il existe un glissement du fluide par rapport aux parois, que l'on peut caractériser par une longueur de glissement h_{glis} . Dans le cas où le grain et la paroi sont lisses, cette longueur de glissement est de l'ordre de quelques tailles moléculaires lorsque l'angle de contact est plus petit que $\pi/2$ (régime hydrophile); elle peut atteindre plusieurs centaines de nanomètres lorsque l'angle de contact est plus grand que $\pi/2$ (régime hydrophobe). Dans le cas où le grain ou la paroi sont rugueux, la longueur de glissement effective est contrôlée par cette rugosité (Lecoq *et al.* 2004).

Pour prendre en compte le glissement en paroi, on peut écrire la force visqueuse régularisée à l'échelle microscopique:

$$F = -\frac{3\pi\eta d^2 \dot{h}}{2(h + h_{\text{glis}})} \quad (30)$$

On prédit alors que le grain touche la paroi en temps fini. Appliquons ce calcul au cas d'un grain sédimentant dans l'eau. On considère que la bille part d'une distance $h = d/2$ avec la vitesse limite de chute. Si l'on ne prend pas en compte l'influence de la paroi, la bille touche le fond après un temps égal à T_{chute} (eq. 29). En prenant en compte la correction proche de la paroi, le temps devient $\ln(1 + d/(2h_{\text{glis}})) T_{\text{chute}}$. Pour une bille de diamètre $d = 100 \mu\text{m}$ avec une longueur de glissement nanométrique, le temps de chute final se trouve multiplié par un facteur ≈ 10 . Il s'agit donc d'une correction importante à prendre en compte lorsqu'on s'intéresse à des effets fins.

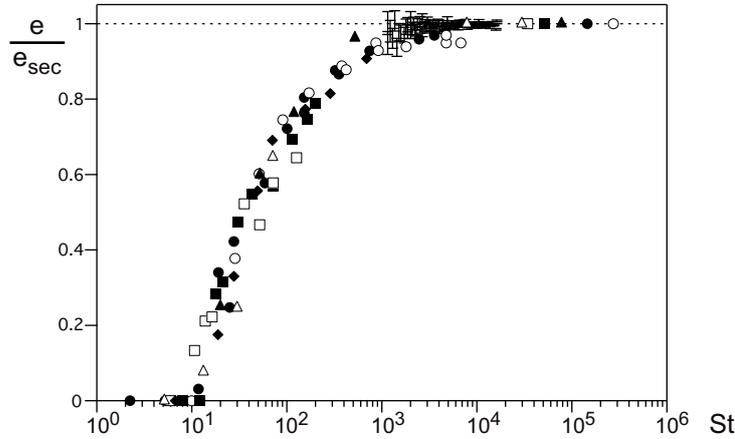


FIG. 7 – Coefficient de restitution e normalisé par sa valeur sans influence du fluide interstitiel, en fonction du nombre de Stokes. Les mesures ont été effectuées lors de la collision de billes de différents matériaux dans différents fluides (eau, huiles silicones de différentes viscosités et air) (figure d'après Gondret *et al.* 1999).

Une sphère indéformable ne peut rebondir puisqu'aucune énergie élastique n'a été stockée lors de la chute. Pour aller au delà du calcul précédent, et comprendre le rebond d'un grain dans un fluide, il faut donc considérer en sus l'élasticité du grain. Le paramètre contrôlant le coefficient de restitution est le rapport entre l'inertie du grain et la force visqueuse. On construit ainsi le nombre de Stokes:

$$\text{St} = \frac{\frac{1}{6}\pi d^3 \rho_p \frac{\dot{h}^2}{d}}{3\pi\eta d \dot{h}} = \frac{\rho_p d \dot{h}}{9\eta} \quad (31)$$

où \dot{h} est évalué à une distance de la paroi de l'ordre de d . Le nombre de Stokes est donc égal au nombre de Reynolds fois le rapport de densité entre le grain et le fluide environnant. En dessous d'un nombre de Stokes critique, égal à quelques unités, le coefficient de restitution est nul. Au dessus, il croît et tend vers une constante à grand St (Gondret *et al.* 1999).

Dans le cas d'un grain se déplaçant parallèlement à une paroi (Fig. 6b), le taux de cisaillement dans la couche lubrifiée est de l'ordre u^p/h . La contrainte de cisaillement qui en résulte est de l'ordre de $\eta u^p/h$ et s'applique sur une surface $\pi a^2 \simeq \pi h d$. La force hydrodynamique qui en résulte dans la zone lubrifiée est donc de l'ordre $-\pi\eta d u^p$. Contrairement à la force lors d'un déplacement normal, la force tangentielle garde la même loi d'échelle que la force de Stokes. Le calcul exact dans le cas d'une sphère donne la relation suivante:

$$\mathbf{F}_d = -3\pi\eta d \mathbf{u}^p \left[1 + \frac{9d}{16(d + 2h)} \right] \quad (32)$$

Références

- [1] Brennen C.E., A review of added mass and fluid inertial forces, technical report, CR 82.010, Naval civil engineering laboratory, 1982
- [2] Brenner H. The slow motion of a sphere through a viscous fluid towards a plane surface. Chem. Engng Sci. 16 (1961) 242-251
- [3] Gondret P., Hallouin E., Lance M. & Petit L. Experiments on the motion of a solid sphere toward a wall: From viscous dissipation to elasto-hydrodynamic bouncing. Phys. Fluids 11 (1999) 2803-2805.
- [4] Guyon E., Hulin J. P. & Petit L. 2001 Hydrodynamique physique, 2e éd., EDP Sciences & CNRS Editions, coll. Savoirs Actuels.
- [5] N. Lecoq, R. Anthore, B. Cichocki, P. Szymczak, and F. Feuillebois. Drag force on a sphere moving towards a corrugated wall. J. Fluid Mech., 513:247–264, 2004
- [6] J.P. Matas, J.F. Morris & Guazzelli E., Lateral Forces on a Sphere Oil & Gas Science and Technology – Rev. IFP, 59 (2004) 59-70.
- [7] Mordant, N. and Pinton, J.F. Velocity measurement of a settling sphere, Eur. Phys. J. B 18, 343-352 (2000).
- [8] Rubinows I. & Keller J. B. The transverse force on a spinning sphere moving in a viscous fluid. J. Fluid Mech. 11 (1961) 447-459.
- [9] Saffman P.G. The lift on a small sphere in a slow shear flow. J. Fluid Mech. 22 (1965) 385-400.

2 Seuil de transport

2.1 Nombre de Shields

De la même manière qu'un milieu granulaire ne se met en mouvement sous l'effet de contraintes externes qu'au dessus d'un certain seuil, un écoulement fluide ne commence à éroder un lit granulaire que s'il est suffisamment puissant. Les grains sont piégés par la gravité dans les pièges potentiels que crée, à la surface du lit, l'arrangement des grains qui le compose. Pour obtenir une loi d'échelle, on peut raisonner sur un grain sphérique piégé entre deux de ses voisins, fixes (Fig. 8). On considère pour l'instant que les forces de contact ne sont pas cohésives et que le frottement (solide ou lubrifié) est suffisant pour empêcher le glissement (voir le chapitre sur la plasticité). Le grain perd l'équilibre lorsque la force d'entraînement T est égale au poids du grain déjaugé de la force de flottaison: $P \sim \pi/6 (\rho_p - \rho_f)gd^3$ multiplié par le coefficient de friction effectif, $\mu = \tan(\delta_p + \psi)$ (Fig. 8). On obtient donc un critère quantitatif de mise en mouvement fondé la sur force hydrodynamique T exercée sur le grain adimensionnée par $(\rho_p - \rho_f)gd^3$.

Le problème consiste à relier cette force à l'écoulement fluide et donc à des paramètres de contrôle hydrodynamiques. L'écoulement dans la couche interne du fluide (voir chapitre suivant) peut être caractérisée par la contrainte de cisaillement basale $\tau^f = \rho_f u_*^2$. La vitesse de cisaillement u_* a la dimension d'une vitesse mais traduit en réalité la contrainte τ^f . La force hydrodynamique exercée par le fluide sur une surface plate de la taille d'un grain est proportionnelle à $\tau^f d^2$. En

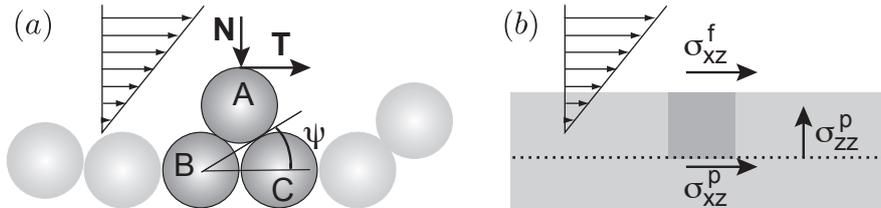


FIG. 8 – Schémas montrant l'origine du seuil de transport. (a) Description à l'échelle du grain. (b) Description diphasique continue.

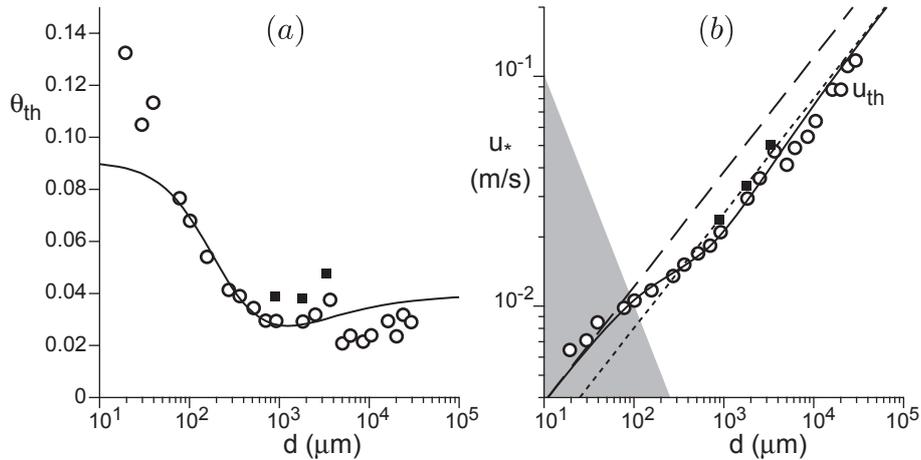


FIG. 9 – (a) Nombre de Shields Θ_{th} au dessus duquel un écoulement d'eau peut arracher des grains d'un lit de sable naturel de taille d . Les symboles correspondent aux mesures effectuées par Yalin & Karahan (1979) (○) et par Fernandez Luque & van Beek (1976) (■). La courbe en trait plein montre la prédiction du modèle proposé en exercice. (b) Vitesse de cisaillement seuil u_{th} en fonction de la taille des grains d , pour les mêmes données. La ligne en pointillés montre le comportement asymptotique dans le régime turbulent et la ligne en tirets le comportement asymptotique dans le régime visqueux. La zone grisée montre la gamme de paramètres pour lesquels la couche limite visqueuse est plus grande que la rugosité géométrique z_0 : Pour des grains plus petits que $d = 100 \mu\text{m}$, le lit est hydrauliquement lisse dès qu'il y a du transport.

adoptant le point de vue hydrodynamique, on peut donc construire un nombre sans dimension, le nombre de Shields, qui caractérise le rapport de la force tangentielle associée à la contrainte τ^f et de la force normale qui piège les grains:

$$\Theta = \frac{\tau^f}{(\rho_p - \rho_f)gd}. \quad (33)$$

Cette analyse suggère que le seuil de mise en mouvement est contrôlé par un seuil en nombre de Shields, noté Θ_{th} . Il est tentant de penser que la force hydrodynamique T exercée sur le grain est directement proportionnelle $\tau^f d^2$. On s'attendrait dès lors à ce que le nombre de Shields soit indépendant de la taille du grain, de sa masse volumique et de la nature du fluide environnant. La figure 9 montre qu'il n'en est rien: dans l'eau, le nombre de Shields seuil décroît continûment avec le diamètre des grains d . Cela signifie que la relation entre la force T et la contrainte basale τ^f est plus subtile qu'il n'y paraît. Nous partons ci-dessous de l'approche continue pour identifier la difficulté, et la résoudre ensuite en raisonnant à l'échelle du grain.

2.2 Détermination du seuil dans une description diphasique continue

L'idée la plus simple pour estimer le seuil de transport consiste à imaginer que la contrainte de cisaillement $\tau^f = \sigma_{xz}^f$ au sein du fluide est intégralement transmise à la première couche de grains par les forces hydrodynamiques. Dès lors, sous la première couche de grains, la contrainte hydrodynamique est nulle et la contrainte de cisaillement transmise par le squelette granulaire, notée σ_{xz}^p , est encore égale à τ^f (Fig. 8b). La première couche de grains est entraînée lorsque cette contrainte $\sigma_{xz}^p = \tau^f$ devient plus grande que la contrainte normale $(\rho_p - \rho_f)\varphi gd$ multipliée par le coefficient de friction effectif μ . Cette entraînement homogène conduit à un nombre de Shields seuil Θ_{th} indépendant du régime d'écoulement:

$$\Theta_{th} = \varphi\mu. \quad (34)$$

Cette expression prédit un nombre de Shields seuil de 0.3 pour des billes de verre lisses et de 0.4 pour du sable naturel. Elle surestime le seuil mesuré d'un facteur 3 pour les petits grains (régime laminaire) et d'un facteur 20 pour les gros grains (régime turbulent). En conclusion, cette description ne constitue qu'une première approche grossière. Dans la réalité, le seuil de transport est déterminé par les grains les moins piégés et non par l'entraînement de toute la couche de surface.

Dans cette première mise en équations, nous avons introduit la taille du grain manuellement. De manière alternative, on peut déterminer le seuil de transport en utilisant les équations diphasiques développées au chapitre précédent (Ouriemi *et al.* 2009). Nous nous limitons ici au cas visqueux. Appliquons les équations d'équilibre aux phases fluide et granulaire, dans une situation stationnaire et homogène selon x :

$$\rho_p \varphi \mathbf{g} + \nabla \cdot \sigma^p + \varphi \nabla \cdot \sigma^f + \beta \frac{\eta}{d^2} (\mathbf{u}^f - \mathbf{u}^p) = \vec{0} \quad (35)$$

$$\rho_f (1 - \varphi) \mathbf{g} + (1 - \varphi) \nabla \cdot \sigma^f - \beta \frac{\eta}{d^2} (\mathbf{u}^f - \mathbf{u}^p) = \vec{0} \quad (36)$$

Selon la direction verticale, on retrouve les équations de la statique:

$$P^f = -\rho_f g z \quad \text{et} \quad P^p = -\sigma_{zz}^p = -(\rho_p - \rho_f) \varphi g z$$

Selon la direction horizontale, les équations se mettent sous la forme:

$$\frac{d\sigma_{xz}^p}{dz} + \varphi \frac{d\sigma_{xz}^f}{dz} + \beta \frac{\eta}{d^2} u^f = 0 \quad (37)$$

$$(1 - \varphi) \frac{d\sigma_{xz}^f}{dz} - \beta \frac{\eta}{d^2} u^f = 0 \quad (38)$$

avec $\sigma_{xz}^p = \mu \sigma_{zz}^p$. En intégrant la seconde équation, on obtient le champ de vitesse fluide, qui s'écrit:

$$u^f = \frac{\tau^f d}{\eta} \sqrt{\frac{1 - \varphi}{\beta}} \exp\left(\sqrt{\frac{\beta}{1 - \varphi}} \frac{z}{d}\right) \quad (39)$$

La vitesse du fluide relaxe exponentiellement vers 0 à l'intérieur du poreux que constitue le lit granulaire. La première équation s'intègre pour donner la contrainte granulaire:

$$\sigma_{xz}^p = \tau^f \left[1 - \exp\left(\sqrt{\frac{\beta}{1 - \varphi}} \frac{z}{d}\right) \right] \quad (40)$$

Comme attendu, celle-ci tend en profondeur vers la contrainte totale τ^f (Fig. ??). Il est intéressant d'estimer la longueur caractéristique sur laquelle la contrainte purement fluide – le flux vertical de quantité de mouvement horizontale – est transférée en totalité en une contrainte purement granulaire. En considérant, l'expression de β fondée sur la force de Stokes et donc valide dans la limite diluée, on obtient

$$\sqrt{\frac{1 - \varphi}{\beta}} d \simeq \sqrt{\frac{1 - \varphi}{18\varphi}} \simeq \frac{d}{6}, \quad (41)$$

. En prenant, l'expression de β obtenue dans la limite dense, on obtient:

$$\sqrt{\frac{1 - \varphi}{\beta}} d \simeq \frac{\varphi}{\sqrt{150}(1 - \varphi)} \simeq \frac{d}{23}, \quad (42)$$

Dans un cas comme dans l'autre, la longueur sur laquelle la contrainte est transmise du fluide au squelette élastique du solide est beaucoup plus petite que la taille du grain d . Il s'agit d'un artefact de l'approche continue, qui ne prend en compte le caractère discret du matériau que dans le paramètre hydrodynamique associé à la porosité. Cela signifie que, dans la réalité, la contrainte est effectivement transmise intégralement après la première couche de grains.

De manière suprenante, le modèle diphasique rend compte d'un seuil. En effet, le critère de Coulomb $\sigma_{xz}^p/\sigma_{zz}^p = \mu$ est atteint pour la première fois dans le voisinage de $z = 0$. Cela provient du fait que les contraintes normale et tangentielle au sein de la phase granulaire vont linéairement à 0 à la surface libre. Le nombre de Shields seuil est donc déterminé par le rapport des variations de ces contraintes:

$$\Theta_{\text{th}} = \mu \varphi \sqrt{\frac{1 - \varphi}{\beta}} \quad (43)$$

Selon l'expression adoptée, le seuil est cette fois sous-estimé d'un facteur 2 à 8 selon l'expression choisie pour β . En conclusion, le modèle diphasique ne rend pas compte correctement de l'interface entre les phases liquide et granulaire: la longueur sur laquelle se font les transferts de contraintes varie bien comme la taille du grain, mais avec un préfacteur d'origine hydrodynamique en lieu et place du facteur géométrique. Cependant, il est possible, en étant conscient de cette faiblesse de l'approche continue, de forcer un seuil déterminé expérimentalement en jouant sur une zone de raccord interfaciale d'épaisseur d où φ et β varie continuellement.

En conclusion, on ne peut raisonner correctement en supposant que la première couche de grains est emportée, au seuil, de manière homogène. Expérimentalement, il a été mis en évidence par Charru *et al.* (2004) que le nombre de Shields seuil pour un lit granulaire préparé par sédimentation croît au fil des réarrangements de la surface du lit avant d'atteindre une valeur asymptotique. Cela signifie que ce sont les grains les moins piégés qui sont emportés et qui se redéposent dans des pièges plus profonds. A temps long, il apparaît une distribution d'équilibre des configurations des grains à la surface, qui détermine "le" seuil de transport. Pour capturer correctement la physique de ce seuil, il faut en revenir à l'analyse des forces hydrodynamiques sur les grains les moins piégés. Pour ce faire, on ne peut faire l'économie du calcul hydrodynamique du champ de vitesse au dessus du lit granulaire. En particulier, il existe un second nombre sans dimension dans le problème, le nombre de Reynolds basé sur la taille du grain $u_* d/\nu$, qui compare les effets inertiels aux effets dus à la viscosité ν du fluide. Ce nombre détermine deux régimes asymptotiques: le régime visqueux à faible nombre de Reynolds et le régime turbulent à haut nombre de Reynolds. Nous allons voir que le nombre de Shields seuil tend vers une constante différente dans chacun de ces régimes.

2.3 Seuil en régime visqueux

Dans le cas d'un fluide Newtonien à bas nombre de Reynolds, la contrainte de cisaillement visqueuse s'écrit: $\tau^f = \eta \partial_z u_x$. Le profil de vitesse dans la couche limite près du lit de sable est alors linéaire:

$$u_x = \frac{\tau^f}{\eta} z = \frac{u_*^2}{\nu} z \quad (44)$$

La vitesse effective de l'écoulement u^f autour des grains peut être approximée par la vitesse du fluide à la hauteur $z = d/2$:

$$u^f \sim \frac{\tau^f d}{2\eta} = \frac{d u_*^2}{2\nu} \quad (45)$$

On peut estimer grossièrement que seule la contrainte visqueuse s'exerce uniquement sur la moitié supérieure du grain. Au seuil, la force d'entraînement hydrodynamique qui en résulte compense exactement la réaction du grain, elle même reliée à la force de gravité déjaugée de la force de flottaison:

$$\frac{\pi}{6} \mu (\rho_p - \rho_f) g d^3 \sim \frac{3}{2} \pi \eta d u_{\text{th}} \sim \frac{3\pi}{4} \tau_{\text{th}} d^2, \quad (46)$$

où μ est le coefficient de friction effectif. Cette relation prédit un nombre de Shields seuil constant et égal à:

$$\Theta_{\text{th}} \sim \frac{2\mu}{9} \quad (47)$$

Cette estimation conduit à un nombre de Shields seuil de l'ordre de 0.1 pour des billes de verre lisses et à 0.14 pour des grains anguleux, ce qui correspond aux valeurs mesurées en régime visqueux. En conclusion, le seuil de transport correspond à des grains sur lesquels la force tangentielle est

de l'ordre de deux fois la force $\tau^f d^2$ qui s'exerce sur une paroi plate de surface d^2 . Les grains qui dépassent le plus du lit captent donc deux fois plus du flux de quantité de mouvement que la moyenne.

ENCADRÉ 1

Couche limite turbulente

Profil de vitesse logarithmique

La compréhension des phénomènes d'érosion et de transport granulaire suppose une familiarité avec les écoulements fluides (d'air, d'eau, de dioxyde de carbone sur d'autres planètes) de couche limite. Nous en donnons ici une vision succincte qui n'a pas prétention à remplacer la lecture et l'étude d'un ouvrage d'hydrodynamique physique (Guyon *et al.* 2001). Considérons l'écoulement homogène et stationnaire au dessus d'un lit granulaire plat. Les particules fluides n'accélèrent pas et sont donc à l'équilibre des forces (il n'y a aucun effet inertiel):

$$\partial_z \tau = \partial_x P \quad \text{et} \quad \partial_z P = 0 \quad (48)$$

Rappelons que la pression est une quantité qui a des variations spatiales lentes et qui compense la partie des pseudo-forces (des effets inertiels) qui dérive d'un potentiel. Il s'ensuit que la pression ne varie pas à la traversée d'une couche limite, c'est à dire une couche dont les dimensions horizontales sont très grandes par rapport aux dimensions verticales. Revenant à l'équation ci-dessus, on obtient, par intégration:

$$\tau^f = \tau_0^f + \partial_x P z = \rho_f u_*^2 + \partial_x P z \quad (49)$$

Cette équation traduit les deux possibilités de créer un écoulement de couche limite: par un gradient de pression et par entraînement par les couches supérieures. Près du sol, la contrainte tend vers la contrainte basale $\tau_0^f = \rho_f u_*^2$ de sorte que l'on peut considérer génériquement le cas d'une contrainte constante. Dans le cas d'un écoulement à bas nombre de Reynolds, les échanges verticaux de quantité de mouvement sont contrôlés par la viscosité: $\tau^f = \eta \partial_z u_x$. Le profil de vitesse dans la couche limite près du lit de sable est alors linéaire:

$$u_x = \frac{\tau^f}{\eta} z = \frac{u_*^2}{\nu} z \quad (50)$$

Dans le cas turbulent, ce sont les fluctuations de vitesse et non la viscosité qui mélangent la quantité de mouvement. Décomposons le champ de vitesse en une partie moyenne $\langle \vec{u} \rangle$ et une partie fluctuante \vec{u}' . Cette décomposition s'entend théoriquement comme une moyenne d'ensemble sur des réalisations indépendantes sous les mêmes conditions de forçage. On remplace en générale cette moyenne d'ensemble par une moyenne spatiale (sous l'hypothèse d'homogénéité macroscopique) ou par une moyenne temporelle (sous l'hypothèse de stationnarité des conditions de forçage). C'est une procédure très délicate puisqu'on introduit alors un temps ou une longueur sur lesquelles la moyenne est prise et qui conditionne grandement le résultat. Réécrivant les équations de Navier-Stokes pour la partie moyenne du champ de vitesse, il apparaît une pseudo-force (un effet inertiel) qui se traduit par un terme de contraintes turbulentes: $\tau^f = \rho_f \langle u'_x u'_z \rangle$. Plus généralement, on introduit le tenseur de Reynolds: $\tau_{ij}^f = \rho_f \langle u'_i u'_j \rangle$. L'interprétation physique de ce terme est simple: s'il existe une corrélation entre grande vitesse verticale vers le haut et grande vitesse horizontale vers la droite, cela crée en moyenne un flux vertical de quantité de mouvement horizontale. Dans une couche limite turbulente pleinement développée, la viscosité est complètement inefficace à grande échelle. La seule échelle caractéristique de longueur est donc la distance au sol z . Le seul temps est l'inverse du gradient de vitesse $\partial_z u_x$. On en déduit l'expression de la contrainte turbulente due à Prandtl:

$$\tau^f = \kappa^2 z^2 |\partial_z u_x| \partial_z u_x \quad (51)$$

où $\kappa \simeq 0.4$ est la constante phénoménologique de Von Kàrmàn. Le profil de couche limite est logarithmique:

$$u_x = \frac{u_*}{\kappa} \ln \left(\frac{z}{z_0} \right) \quad (52)$$

où z_0 est une constante d'intégration homogène à une longueur et appelée rugosité hydrodynamique.

Rugosité hydrodynamique et couche de surface

La rugosité hydrodynamique est par définition, la hauteur à laquelle la vitesse semble s'annuler, si l'on prolonge le profil logarithmique très près du sol. Dans le cas où le lit sédimentaire serait très lisse, la zone très près du sol, appelée couche de surface, est laminaire tandis que celle loin du sol est turbulente. La transition se fait à un nombre de Reynolds transitionnel: $z u_x / \nu = \mathcal{R}_t \simeq 125$ et conduit à la relation suivante entre rugosité hydrodynamique et vitesse:

$$z_0 = \sqrt{\mathcal{R}_t} \exp \left(-\kappa \sqrt{\mathcal{R}_t} \right) \frac{\nu}{u_*} \quad (53)$$

Si la rugosité effective due à la sous-couche limite visqueuse est plus petite que la rugosité physique du sol (la taille des grains d pour ce qui nous concerne), alors z_0 est déterminé par cette dernière. Pour un lit de grains statique parfaitement plat, on trouve expérimentalement, $z_0 \simeq d/10$. Cela donne typiquement des rugosités hydrodynamiques de l'ordre de la dizaine de μm . Cela signifie qu'entre la vitesse u_x du vent mesurée à 10 m du sol et u_* , il y a un facteur 35 environ: une valeur de u_* de 1 m/s correspond donc à un vent de 125 km/h! Il convient de s'habituer à cette double idée que la vitesse du vent varie quand on change d'échelle (on pourrait argumenter que pour le physicien, le logarithme est essentiellement une constante) et que la vitesse de cisaillement est beaucoup plus petite que la vitesse du vent usuelle. En présence de rides de sable, z_0 peut être beaucoup plus grand, de l'ordre du mm. A l'échelle kilométrique de la couche limite planétaire, il est probable que les dunes elles-mêmes déterminent la rugosité du sol.

Il existe une grande variété de processus pouvant, au sein de la couche de surface, déterminer la rugosité du sol. Nous avons déjà évoqué la viscosité dans le cas d'un sol lisse. Dans le cas d'un sol rugueux immobile, au delà du cas des grains, la rugosité hydrodynamique z_0 croit comme le carré de l'amplitude de la corrugation, car il s'agit d'un effet non-linéaire. On peut penser à d'autres systèmes comme un champ de blé ou les vagues sur la mer pour lesquelles le "sol" bouge sous l'effet du vent, ce qui modifie la couche de surface et par conséquent, la totalité de l'écoulement. Dans le cas d'un transport de sédiments suffisamment intense pour que, l'écoulement accélérant les grains, ceux-ci décélèrent en retour celui-là, la rugosité hydrodynamique devient une fonction de la quantité de grains transportée. Ainsi, en présence de transport par charriage, le lit d'une rivière sableuse présente une rugosité millimétrique et non de l'ordre de la dizaine de microns.

Écoulement au dessus d'un relief

La structure de l'écoulement turbulent se trouve modifiée par la présence d'obstacles – en particulier les dunes, que nous évoquerons dans le dernier chapitre. La figure ?? montre la structure de l'écoulement moyen au dessus d'un relief sinusoïdal, telle qu'elle peut être calculée à partir d'une équation de clôture turbulente (Jackson & Hunt 1975, Hunt *et al.* 1988, Andreotti *et al.* 2002, Kroy *et al.* 2002, Fourrière *et al.* 2009). Il peut se décomposer en trois couches superposées qui diffèrent par les mécanismes hydrodynamiques mis en jeu:

- La couche externe a une extension verticale de l'ordre de la taille horizontale de l'obstacle. Le mélange de quantité de mouvement lié aux fluctuations turbulentes y est négligeable comparé au transport induit par le gradient de pression. Dès lors, cette couche externe peut être décrite comme un écoulement potentiel non-visqueux. Pour un relief sinusoïdal de longueur d'onde λ , la vitesse décroît exponentiellement sur une hauteur égale à λ . Elle est maximale en haut des bosses et minimale dans les creux. En effet, l'écoulement dans cette zone présente la même symétrie que l'obstacle.
- Dans la couche interne, les échanges de quantités de mouvement mettent à nouveau en jeu le gradient de pression, mais cette fois celui-ci s'équilibre avec la contrainte de cisaillement turbulente et non plus avec l'inertie. L'extension verticale ℓ de cette couche peut être déterminée

dimensionnellement:

$$\mathcal{O}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) \approx \rho_f \frac{[u^f(\ell)]^2}{\lambda} = \mathcal{O}\left(\frac{\partial \tau}{\partial z}\right) \approx \rho_f \frac{u_*^2}{\ell} \quad (54)$$

ℓ suit donc la loi d'échelle (Taylor *et al.* 1987):

$$\frac{\ell}{\lambda} \ln^2 \frac{\ell}{z_0} \sim \kappa^2. \quad (55)$$

Au sein de la couche interne, on retrouve localement un profil logarithmique de la même forme que celui discuté précédemment. A l'interface entre couches interne et externe, les trois effets (inertie, pression et contrainte turbulente) coexistent. La vitesse du fluide ne s'ajuste pas instantanément à un changement de contrainte de cisaillement. L'inertie induit donc un retard de phase de la vitesse sur la contrainte. Autrement dit, le maximum de contrainte est toujours atteint avant le maximum de vitesse, comme le montre la figure ?? . Nous verrons que cet effet est à l'origine de la formation des dunes.

- La couche de surface, discutée plus haut, détermine la rugosité hydrodynamique z_0 . Elle peut être cependant significativement plus grande que celle-ci.

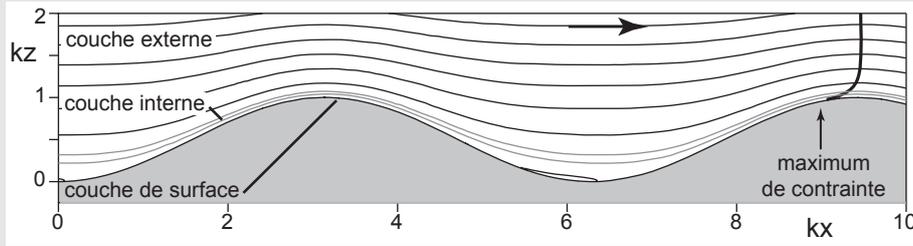


FIG. E1.1 - Lignes de courant moyennes autour d'un relief ondulé.

2.4 Régime turbulent

Dans la limite turbulente, la contrainte de cisaillement provient des fluctuations turbulentes. Le profil de vitesse près du lit de sable est logarithmique (voir chapitre suivant):

$$u_x = \frac{u_*}{\kappa} \ln\left(\frac{z}{z_0}\right) \quad (56)$$

Comme précédemment, on approxime la vitesse de l'écoulement autour des grains par celle du fluide en $z = d/2$. On suppose que la force hydrodynamique sur les grains provient de la traînée de pression. Le seuil est déterminé par le même équilibre que précédemment, qui s'écrit maintenant:

$$\frac{\pi}{6} \mu (\rho_p - \rho_f) g d^3 \sim \frac{\pi}{8} C_\infty \rho_f u_{th}^2 d^2 \sim \frac{\pi C_\infty}{8 \kappa^2} \ln^2\left(1 + \frac{d}{2z_0}\right) \tau^f d^2, \quad (57)$$

où μ est le coefficient de friction effectif. Le nombre de Shields seuil est donc constant dans le régime turbulent:

$$\Theta_{th} = \frac{4\mu\kappa^2}{3C_\infty \ln^2\left(1 + \frac{d}{2z_0}\right)} \quad (58)$$

En considérant la valeur typique de la rugosité $z_0 \simeq d/10$, on obtient une valeur de 0.04 qui coïncide très bien avec les valeurs mesurées. Cela signifie que les grains les plus fragiles captent environ 10 fois plus de flux de quantité de mouvement que la moyenne.

2.5 Raccordement entre les seuils de transport en régimes visqueux et turbulent

Dans la mesure où la plupart des cas pratiques se situent dans le régime intermédiaire entre les limites asymptotiques analysées ci-dessus, il est intéressant d'établir une expression du nombre de Shields seuil valable dans les régimes visqueux et turbulent. On introduit comme précédemment la vitesse u^f de l'écoulement autour du grain ainsi que sa version normalisée,

$$\mathcal{S} = \frac{\rho_f (u^f)^2}{(\rho_p - \rho_f)gd} \quad (59)$$

L'expression suivante,

$$u_*^2 = \frac{2\nu}{d} u^f + \frac{\kappa^2}{\ln^2\left(1 + \frac{d}{2z_0}\right)} (u^f)^2. \quad (60)$$

fournit une très bonne interpolation entre les deux régimes d'écoulement. A ce stade, il est utile d'introduire le diamètre visqueux,

$$d_\nu = \left(\frac{\rho_p}{\rho_f} - 1\right)^{-1/3} \nu^{2/3} g^{-1/3} \quad (61)$$

qui correspond à la taille de grain pour laquelle les effets inertiels, gravitaires et visqueux sont de même ordre. On utilise l'expression du coefficient de traînée permettant de raccorder les régimes visqueux et turbulent:

$$C_d = \left(C_\infty^{1/2} + s \left(\frac{\nu}{u^f d}\right)^{1/2}\right)^2 \quad (62)$$

Des expressions précédentes, on tire une équation sur le seuil, exprimé en vitesse d'écoulement à l'échelle du grain, \mathcal{S}_{th} :

$$(C_\infty \mathcal{S}_{\text{th}})^{1/2} + s \left(\frac{d_\nu}{d}\right)^{3/4} \mathcal{S}_{\text{th}}^{1/4} = \left(\frac{4\mu}{3}\right)^{1/2}, \quad (63)$$

qui se résout immédiatement en:

$$\mathcal{S}_{\text{th}} = \frac{1}{16C_\infty^2} \left[\left(s^2 \left(\frac{d_\nu}{d}\right)^{3/2} + 8 \left(\frac{\mu C_\infty}{3}\right)^{1/2} \right)^{1/2} - s \left(\frac{d_\nu}{d}\right)^{3/4} \right]^4. \quad (64)$$

Cette expression permet d'obtenir le nombre de Shields seuil:

$$\Theta_{\text{th}} = 2 \left(\frac{d_\nu}{d}\right)^{3/2} \mathcal{S}_{\text{th}}^{1/2} + \frac{\kappa^2}{\ln^2\left(1 + \frac{d}{2z_0}\right)} \mathcal{S}_{\text{th}}. \quad (65)$$

La figure 9 montre la comparaison du modèle complet avec les mesures expérimentales, les paramètres étant fixés comme précédemment. Rapporté à la simplicité du calcul mis en œuvre, l'accord est très bon. Cela montre que cette analyse permet de rendre compte de la différence de seuil entre les régimes visqueux et turbulent, d'un facteur 5 environ. Cette différence provient d'une part du fait que la traînée de pression est plus efficace que la traînée visqueuse de Stokes, et d'autre part du fait que la vitesse à l'échelle du grain est beaucoup plus grande, à contrainte de cisaillement donnée, dans le régime turbulent que dans le régime visqueux. De plus, la transition d'un régime à l'autre a lieu pour un diamètre de grain proche de la prédiction, à savoir $d \sim s^{4/3} (\mu C_\infty)^{-1/3} d_\nu \simeq 200 \mu\text{m}$ dans l'eau. Cette dernière valeur signifie que les diamètres de grain usuels se situent précisément dans la zone de transition entre régimes visqueux et turbulent.

2.6 Influence de la pente

Considérons le cas d'un lit sableux incliné d'un angle α selon la direction d'écoulement (Fig. 10). Si la pente est adverse, la vitesse de l'écoulement doit être plus forte pour entraîner des grains. Si la pente est favorable, le seuil est abaissé (Fernandez Luque & van Beek 1976, Iversen & Rasmussen 1994, Rasmussen *et al.* 1996). En réécrivant l'équilibre des forces sur un grain, on obtient une force tangentielle modifiée en $T + P \sin \alpha$ et une force normale en $P \cos \alpha$. Par conséquent, le critère de Coulomb s'exprime simplement en remplaçant $\mu = \tan(\delta_p + \psi)$ par $\mu \cos \alpha + \sin \alpha$. Dans les régimes visqueux et turbulent, cela se traduit, en terme de nombre de Shields seuil, par la relation:

$$\Theta_{\text{th}}(\alpha) = \Theta_{\text{th}}(0) \left(\cos \alpha + \frac{\sin \alpha}{\mu} \right) \quad (66)$$

La relation peut être légèrement différente à la transition entre les régimes visqueux et turbulent, dans la mesure où le déplacement de l'équilibre s'accompagne d'une variation du nombre de Reynolds.

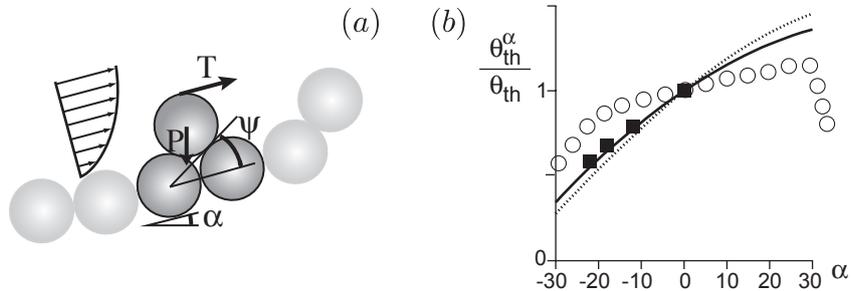


FIG. 10 – (a) Schéma présentant la dépendance du nombre de Shields seuil $\Theta_{\text{th}}^\alpha$ avec l'angle α d'inclinaison du lit sableux. (b) Les symboles montrent les mesures de Fernandez Luque & van Beek (1976) pour des grains de sable naturel (■) et celles de Loiseleux *et al.* (2005) pour des billes de verre (○) dans un canal étroit. La courbe en trait plein montre la prédiction du modèle pour des grains de sable naturel. La courbe en pointillés montre l'approximation par $\cos \alpha + \sin \alpha / \mu$, avec $\mu = \tan 32^\circ$.

2.7 Influence de la cohésion

Considérons maintenant le cas d'un milieu granulaire cohésif constitué de grains suffisamment petits pour que les forces d'interactions de van der Waals ne soient pas négligeables devant la force de gravité. Pour des grains lisses, la force d'adhésion est proportionnelle au diamètre du grain et à la tension de surface ($\approx \pi \gamma d$). Elle détermine directement le seuil d'entraînement. Pour des grains rugueux, nous avons vu que la force d'adhésion dépend de la force normale appliquée au grain. Dans la situation où les grains cohésifs ont été déposés en surface par sédimentation, cette force se limite au poids d'un grain. Au contraire, dans un milieu ayant séjourné sous très forte pression ou dans un sol constitué de grains dans une gangue d'argile, on retrouve la force d'adhésion maximale. En introduisant un coefficient de tension superficielle effective γ_{eff} , la force d'adhésion maximale est de l'ordre de $\pi \gamma_{\text{eff}} d$ de sorte que le nombre de Shields seuil se modifie en:

$$\Theta_{\text{th}}^{\text{max}}(\gamma) = \Theta_{\text{th}}(0) \left(1 + \frac{6\gamma_{\text{eff}}}{\mu (\rho_p - \rho_f) g d^2} \right) \quad (67)$$

Dans cette expression, on peut faire apparaître la taille de grain $d_\gamma = (6\gamma_{\text{eff}}) / (\mu (\rho_p - \rho_f) g)$ à laquelle les effets cohésifs sont du même ordre que les effets de gravité. Si la cohésion provient de pont capillaires aqueux, cette taille est de l'ordre de quelques millimètres; si elle provient d'argile, elle peut atteindre la dizaine de centimètres.

3 Description du transport

Trois types de force s'exercent sur les particules: les forces hydrodynamiques, la gravité et les forces de contact entre particules. L'usage a conduit à distinguer différents modes de transport sédimentaire selon la nature des forces dominant la dynamique. Lorsque les forces hydrodynamiques dominent, que le régime d'écoulement soit visqueux ou turbulent, on parle de transport en suspension. A l'inverse, lorsque la force de gravité est suffisamment grande pour confiner le transport dans une couche à la surface du lit de grains, on parle de charge de fond. Lorsque les grains font des successions de sauts, on parle de saltation. Lorsqu'au contraire l'écoulement entraîne les grains en roulement à la surface du lit, sans perte du contact entre grains, on parle de charriage ou de tractation. Enfin, lorsque le choc des grains en saltation sur le lit granulaire est suffisamment énergétique, il s'ensuit un déplacement des particules du lit que l'on nomme reptation (Bagnold 1941).

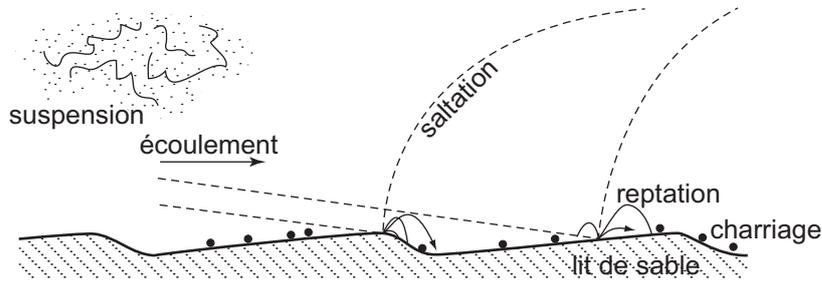


FIG. 11 – Schéma présentant les différents modes de transport.

3.1 Interface entre le lit sédimentaire et le fluide

L'évolution d'un lit sédimentaire est gouverné par l'interaction entre ce lit et l'écoulement. D'une part, c'est l'écoulement qui transporte les grains ce qui, via les processus d'érosion/déposition, change la forme du lit. En retour, la forme du lit change l'écoulement. Il importe donc de définir l'interface entre le lit sédimentaire et le fluide. On peut en choisir différentes définitions d'intérêt spécifique. Il est d'usage, pour décrire l'interface entre une phase diluée et une phase dense, d'utiliser la masse volumique (ou la fraction volumique φ dans le cas présent). On peut alors définir l'interface par une surface d'égale densité (par exemple celle correspondant à la moyenne des masses volumiques des deux phases) ou par une surface de Gibbs. Appliquée à un lit sédimentaire, un critère de ce type permet de définir la limite entre une phase dense et une phase diluée, indépendamment du fait que les grains soient en mouvement ou pas. Une définition basée sur le nombre de contacts Z par grains permet de différencier une phase dans laquelle les contraintes sont transmises par le squelette granulaire d'une phase suspendue dans le fluide. Enfin, il est possible d'utiliser une surface "isotherme" (au sens de la température granulaire), pour séparer la phase statique de la phase mobile (Fig. 12(a)). Toutes ses définitions présentent un seuil et une échelle de lissage du champ considéré.

Dans le contexte du transport sédimentaire, la définition de l'interface intervient sous deux aspects. D'une part, l'écoulement est déterminé par la condition aux limites sur l'interface. En première approximation, on peut considérer que la vitesse du fluide s'annule sur une interface h_s . En adoptant ce point de vue, on peut définir l'interface à partir de champs dynamiques (partition des contraintes en contraintes granulaires et contraintes fluides) ou cinématiques (interface entre grains statiques et grains mobiles) (Fig. 12a). Par ailleurs, l'interface intervient pour exprimer la conservation de la matière. De ce point de vue, on peut construire une hauteur effective h à partir de la masse de grains à l'aplomb d'une surface unité (Fig. 12b). Dans cette masse, sont comptabilisés tous les grains, qu'ils bougent ou pas et quelle que soit leur altitude. La masse volumique du lit s'obtient en faisant le produit de la fraction volumique du lit φ_l par la masse

volumique ρ_p des grains. En divisant la masse de grains par unité de surface par cette masse volumique effective, on obtient une hauteur effective h qui permet d'exprimer rigoureusement la conservation de la matière. Dans le cas d'une description continue par un champ de concentration φ , la position effective de l'interface s'écrit:

$$h = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi}{\varphi_\ell} dz \quad (68)$$

Dans le cas d'un écoulement épais de grains entraîné par un fluide porteur, h_s est la position de l'interface entre les phases statique et roulante, et h l'interface entre la phase roulante et le fluide.

Dans la plupart des situations intéressantes, l'écart entre l'interface h_s qui intervient dans l'hydrodynamique et l'interface h qui intervient dans la conservation de la matière est faible; par ailleurs, les variations de forme du lit se font généralement sur des échelles de longueur beaucoup plus grandes que le grain. Considérons le cas des dunes éoliennes. Les grains transportés en saltation contribuent à la hauteur effective par moins d'une taille de grain. La forme de la dune, qui conditionne le vent autour d'elle, est lisse à l'échelle de la dizaine de mètres, soit 10^5 tailles de grains. Par la suite, on supposera par défaut que les deux interfaces définies sur la figure 12 coïncident et l'on ne spécifiera de laquelle il est question que lorsque cela importe. On considérera également que le lit de sédiments a une fraction volumique de grains bien définie, φ_ℓ .

3.2 Flux et conservation de la matière

Pour quantifier le transport, on utilise usuellement deux types de flux intégrés qu'il convient de distinguer. Alternativement, on introduit le flux massique q^m associé au transport. Par définition, il s'agit de la masse traversant par unité de temps une ligne unité transverse à la direction du transport. Autrement dit, il s'agit d'un flux au travers d'une surface de largeur unité et qui s'étend verticalement du sol à l'infini (Fig. 13a). Par souci de simplicité, on définit d'ordinaire un flux volumique qui traduisent l'équivalent en volume, à la compacité du lit, des masses transportées:

$$q = \frac{q^m}{\rho_p \varphi_\ell} \quad (69)$$

Le flux est en réalité un vecteur \mathbf{q} orienté selon la direction locale du transport. Dans le cas d'une description continue par un champ de concentration φ et un champ de vitesse \mathbf{u}^p , les flux massique et volumique s'écrivent:

$$\mathbf{q}^m = \int_{-\infty}^{\infty} \rho_p \varphi \mathbf{u}^p dz \quad \text{et} \quad \mathbf{q} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi}{\varphi_\ell} \mathbf{u}^p dz \quad (70)$$

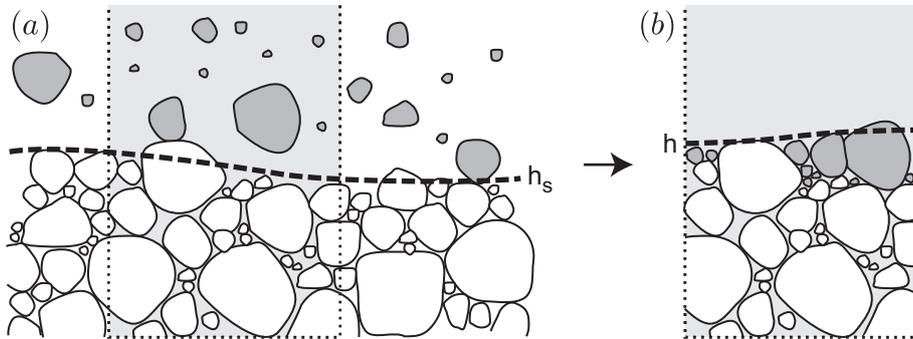


FIG. 12 – (a) Schéma définissant l'interface entre le lit statique et la phase composée du fluide et des grains en mouvement. (b) En ramenant virtuellement les grains transportés en surface, de manière à reconstituer un lit effectif de fraction volumique homogène, on définit l'interface effective h .

Le flux q est un volume par unité de largeur et par unité de temps. Il est donc homogène à un coefficient de diffusion (L^2T^{-1}). En utilisant la position effective h du lit de sable, la conservation de la matière, connue en géomorphologie sous le nom d'équation d'Exner, s'écrit :

$$\rho_p \varphi \ell \frac{\partial h}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot \mathbf{q}^m \quad \text{et} \quad \frac{\partial h}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot \mathbf{q} \quad (71)$$

On définit également les flux ascendant $\phi_{\uparrow}^m(z)$ et descendant $\phi_{\downarrow}^m(z)$ comme les masses qui traversent par unité de temps une surface unité, horizontale, à l'altitude z , respectivement du bas vers le haut, et du haut vers le bas (Fig. 13b). Dans le cas d'une description continue, on peut exprimer la conservation de la matière au travers de cette interface de contrôle. On utilise pour ce faire la masse par unité de surface située au dessous de l'altitude z :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^z \rho_p \varphi dz = \phi_{\downarrow}^m(z) - \phi_{\uparrow}^m(z) = -\rho_p \varphi \mathbf{u}^P \cdot \mathbf{e}_z \quad (72)$$

On peut appliquer ces définitions à l'interface $z = h_s$ entre le lit statique et la phase constituée de fluide et de grains mobiles. ϕ_{\uparrow}^m devient la masse érodée par unité de surface et par unité de temps et s'appelle le taux massique d'érosion. Le taux massique de déposition ϕ_{\downarrow}^m est au contraire la masse déposée par unité de surface et par unité de temps. Comme précédemment, on préfère utiliser des flux volumiques, homogènes à des vitesses (LT^{-1}) :

$$\phi_{\downarrow} = \frac{\phi_{\downarrow}^m}{\rho_p \varphi \ell} \quad \text{et} \quad \phi_{\uparrow} = \frac{\phi_{\uparrow}^m}{\rho_p \varphi \ell} \quad (73)$$

Le bilan entre érosion et déposition, qui gouverne l'évolution de la hauteur du lit, s'écrit alors :

$$\frac{\partial h_s}{\partial t} = \phi_{\downarrow} - \phi_{\uparrow} \quad (74)$$

On observe que la différence $\phi_{\downarrow} - \phi_{\uparrow}$ entre le taux d'accrétion et le taux d'érosion est simplement la vitesse de la surface du sable. Elle se mesure simplement à l'aide d'une jauge graduée. Cette vitesse n'est pas matérielle puisque, par définition, la vitesse des grains à la surface du lit statique est nulle.

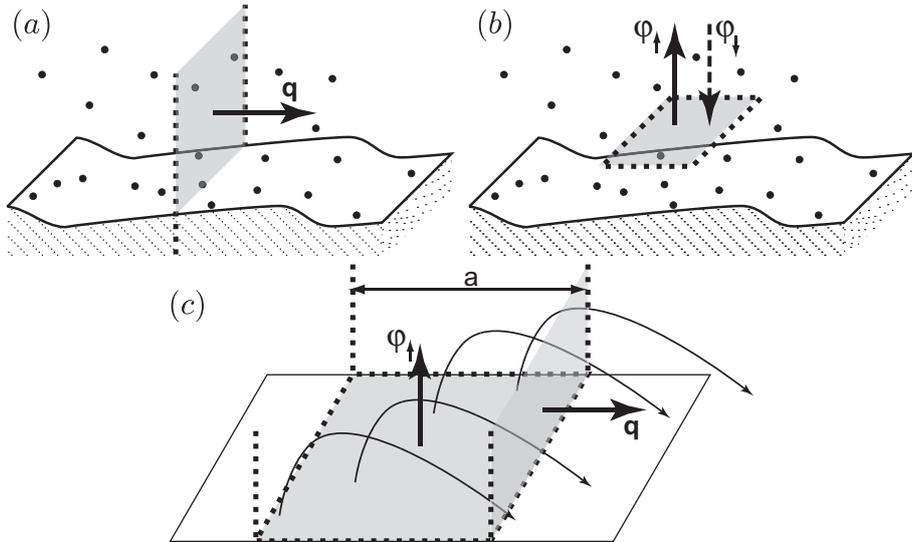


FIG. 13 – Schémas définissant (a) le flux horizontal \mathbf{q} et (b) les flux ascendant ϕ_{\uparrow} et descendant ϕ_{\downarrow} . (c) En régime stationnaire, les flux horizontaux et verticaux sont liés par la longueur moyenne des trajectoires, a .

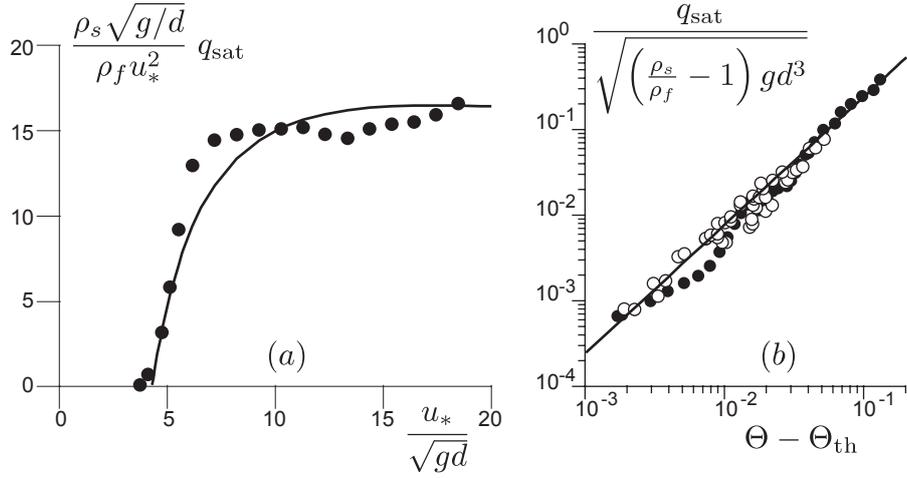


FIG. 14 – (a) Mesures de flux saturé dans le cas du transport éolien (Iversen & Rasmussen 1999) pour $d = 242 \mu\text{m}$. Le flux est normalisé par u_*^2 pour mettre en évidence le comportement asymptotique. (b) Mesures du flux saturé dans le cas du transport par charriage dans l'eau.

3.3 Flux saturé

Considérons le cas le plus simple, celui d'un lit sédimentaire infini et plat soumis à un écoulement permanent. Il s'établit un équilibre entre le transport de particules et l'écoulement, caractérisé par un flux $q = q_{\text{sat}}$, que l'on appelle flux saturé. Ce flux étant homogène spatialement, il n'y a globalement ni érosion ni accrétion de particules. On peut dire de manière équivalente qu'il y a autant de particules qui se déposent que de particules arrachées au lit: les flux d'érosion et de déposition se compensent: $\phi = \phi_{\downarrow} = \phi_{\uparrow}$. Considérons que la distance a parcourue par les grains entre le moment où ils quittent le sol et le moment où ils y retournent est distribuée selon une loi $\mathcal{P}(a)$. Les grains qui traversent une surface verticale s'étendant jusqu'à l'infini ont tous démarré leur saut à une distance de celle-ci plus petite que a (Fig. 12c). On obtient par conséquent l'égalité:

$$q = \int \mathcal{P}(a)\phi da = \bar{a}\phi \quad (75)$$

Les flux horizontaux et verticaux sont donc reliés par la longueur moyenne de saut \bar{a} .

L'existence d'un flux saturé nous amène à une première affirmation contre-intuitive: ce n'est pas parce qu'un écoulement est très rapide qu'il y a érosion; un écoulement induit avant tout un transport de particules. Pour qu'il y ait érosion, il faut que le flux de particules transporté croisse selon la direction du courant. Pour qu'il y ait déposition, il faut au contraire que le flux de particules décroisse spatialement. On voit ainsi que le seuil de transport ne correspond pas à un seuil d'érosion¹. Il est vrai que, si la vitesse d'écoulement est en dessous du seuil, alors le flux saturé est nul et il y a déposition de particules. Mais à l'inverse, au dessus du seuil de transport, il peut y avoir érosion ou déposition pour n'importe quelle valeur de la vitesse de l'écoulement. En effet, on a érosion ou déposition selon que la vitesse du fluide augmente ou diminue le long d'une ligne de courant.

Plus l'écoulement est fort, plus, à l'équilibre, il transporte de grains: le flux saturé est donc une fonction croissante de la vitesse de cisaillement u_* et s'annule en dessous d'une vitesse de cisaillement seuil. Ce seuil dynamique se mesure en extrapolant la courbe $q_{\text{sat}}(u_*)$ à zéro. Il peut être, selon le mode de transport, égal ou non au seuil statique déterminé plus haut, qui est la vitesse minimale à laquelle un grain peut être arraché de la surface du lit. La calibration expérimentale

1. On trouve dans nombre d'ouvrages un diagramme, dit de Hjulström, qui décompose le plan liant la vitesse d'écoulement à la taille des grains en trois zones: érosion, transport, déposition. Ce diagramme correspond à un paramétrage incorrect de la réalité physique.

de la relation entre flux saturé q_{sat} et vitesse u_* est essentielle pour pouvoir comprendre et prédire la morphodynamique sédimentaire. Les mesures les plus propres s'effectuent en soufflerie (Iversen & Rasmussen 1994, Rasmussen *et al.* 1996) ou en canal hydraulique, soit en intégrant la mesure du flux local, soit en faisant des bilans de masse intégraux.

Bien que les ingrédients soient essentiellement les mêmes, chaque mode de transport nécessite une description propre. Le fait que la quantité de grains qu'un écoulement peut transporter ne soit pas infinie mais sature peut provenir de deux mécanismes dynamiques distincts. D'une part, le transport peut être contrôlé par l'érosion. En effet, l'écoulement ne met pas en mouvement l'intégralité du lit sableux mais érode progressivement celui-ci. Ce processus d'érosion prend du temps et est lui-même limité par le piégeage des grains à l'intérieur du lit sédimentaire. Dans le cas de lits cohésifs (roche gréseuse, lit sableux consolidé par de l'argile), d'autres processus chimiques (dissolution) et physique (mise en suspension de l'argile interstitielle) peuvent intervenir, qui limitent l'érosion. Du fait de la gravité, les grains érodés se re-déposent après avoir effectué une trajectoire plus ou moins compliquée, selon que les fluctuations de traînée dues à la turbulence sont importantes ou non, comparées à la gravité. Or cette déposition est d'autant plus importante que la quantité de grains transportée l'est. L'équilibre s'établit lorsque le flux est tel que le taux de déposition compense le taux d'érosion.

Avant d'atteindre cette limite, un second processus peut prendre le dessus et limiter le transport: la réaction du transport sur l'écoulement. En effet, à chaque fois que l'écoulement accélère un grain, celui-ci exerce en retour une force sur l'écoulement. La contrainte totale s'exerçant sur le fluide, constante dans la couche interne, se décompose en un flux de quantité de mouvement dû à la viscosité et aux fluctuations turbulentes auquel s'ajoute un flux de quantité associé au mouvement des particules (Owen 1964). La vitesse du fluide est donc réduite dans la couche de transport par rapport à ce qu'elle serait en l'absence de particules. Dès lors l'érosion diminue en même temps que la fraction fluide de la contrainte de cisaillement. A nouveau, l'équilibre s'établit lorsque le taux d'érosion a suffisamment diminué pour compenser tout juste le taux de déposition. Dans le premier cas limite, le transport est limité par l'érosion et dans le second, par la quantité de mouvement disponible.

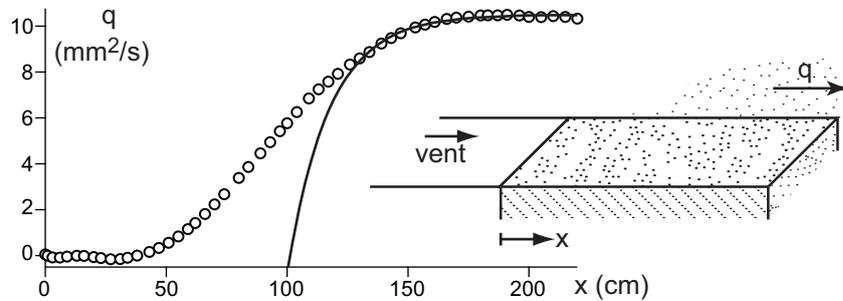


FIG. 15 – Mesure du flux de sable en fonction de la position, dans le cas du transport éolien. x correspond à l'axe de l'écoulement.

3.4 Longueur de saturation

Considérons le transport sur le fond d'une rivière ou sur le dos d'une dune. L'existence du relief modifie l'écoulement de sorte que la contrainte devient inhomogène spatialement. Lorsqu'elle augmente, le flux de grains transporté se réadapte en augmentant également. Cependant, le processus de saturation du transport décrit plus haut ne se fait pas instantanément. Le flux de grains q se réadapte pour rejoindre le flux saturé q_{sat} correspondant à la valeur locale de la contrainte, mais avec du retard en temps et en espace (Bagnold 1941, Anderson & Haff 1988 & 1991, Sauer-mann *et al.* 2001, Andreotti 2002 & 2004, Valance & Langlois 2005, Charru 2006). En linéarisant le problème autour de l'état d'équilibre, on peut rendre compte de ces retards par une simple

équation de relaxation. A une dimension, on obtient une équation différentielle linéaire du premier ordre, de la forme:

$$T_{\text{sat}}\partial_t q + L_{\text{sat}}\partial_x q = q_{\text{sat}} - q, \quad (76)$$

où T_{sat} est le temps et L_{sat} la longueur de saturation du flux.

Pour mesurer ces caractéristiques, il faut considérer séparément deux situations pures. Considérons le cas d'un lit de sable homogène soumis à écoulement homogène également mais dont on fait croître l'intensité par paliers. Le flux est alors homogène spatialement mais relaxe exponentiellement en temps vers le flux saturé $q_{\text{sat}}(u_*)$. La seconde configuration fondamentale consiste à avoir un écoulement homogène sur un lit sableux qui ne s'étend que dans le demi-espace $x > 0$. En amont de ce lit ($x < 0$) on considère que le sol ne peut pas être érodé et qu'il possède la même rugosité hydrodynamique que le sable. Le flux des sable q à l'entrée ($x = 0$) du lit sableux est nul; il croît puis relaxe exponentiellement vers sa valeur à saturation, q_{sat} (Fig. 15).

Le taux de relaxation T_{sat} est en général court devant les temps d'évolution du relief de sorte qu'il peut être négligé. Dès lors, l'hydrodynamique et le transport peuvent être considérés comme stationnaires. Le relief contrôle l'écoulement autour de lui, et en particulier la distribution spatiale de la vitesse de cisaillement u_* . Cette dernière détermine le champ de flux saturé. Le flux q se réadapte, au fil du courant, à la valeur de ce flux saturé q_{sat} avec un retard L_{sat} . Lorsque le flux est localement supérieur au flux saturé, il diminue de sorte qu'il y a déposition. Si le flux est localement inférieur au flux saturé, il croît, entraînant une érosion du lit sableux. On peut donc avoir érosion ou déposition pour de très grandes valeurs de la vitesse d'écoulement.

Ce formalisme permet de rendre compte du fait que ni le flux q , ni le taux d'érosion ne sont des fonctions de la contrainte de cisaillement. Dans la limite où la longueur de saturation est nulle, le flux est partout saturé et l'on trouve que le flux $q = q_{\text{sat}}$ est une fonction de u_* . Dans la limite où la longueur de saturation tend vers l'infini, le taux d'érosion:

$$-\frac{\partial h}{\partial t} = \phi_{\uparrow} - \phi_{\downarrow} = \partial_x q = \frac{q_{\text{sat}}}{L_{\text{sat}}}$$

est une fonction de u_* . Cette limite décrit l'érosion de matériaux très cohésifs, les roches en particulier, pour lesquelles il n'y a pas de redéposition des sédiments érodés.

4 Modes de transport

Nous avons établi un formalisme permettant de rendre compte du transport sédimentaire au travers de quatre quantités: le flux saturé, le seuil de transport, la longueur et le temps de saturation. Nous allons maintenant établir, pour chaque mode de transport, un modèle rendant compte des mécanismes responsables de la saturation et des lois d'échelles qui en résultent. Nous allons systématiquement caractériser l'état d'équilibre, et donc le flux saturé, puis le transitoire de relaxation vers cet équilibre, et donc la longueur de saturation.

4.1 Suspension turbulente

4.1.1 Description qualitative

Le transport en suspension se caractérise par le fait que les fluctuations du champ de vitesse hydrodynamique conduisent à des fluctuations de forces beaucoup plus grandes que la gravité. Dans le cas d'une suspension turbulente, ce sont les fluctuations intrinsèques du champ de vitesse qui dominent. Dans une suspension visqueuse, ce sont les particules elles-mêmes qui induisent des fluctuations. Ainsi, en un sens statistique, une partie des particules peuvent-elles rester "suspendues" dans l'écoulement. La description d'une suspension turbulente comprend deux parties. D'une part, les sédiments suspendus sont mélangés par les fluctuations turbulentes et retombent sous l'effet de la gravité. D'autre part, l'érosion du lit statique conduit à un flux ascendant de sédiments. L'efficacité du mélange va croissant avec l'altitude. Dès lors, les grains entraînés par charriage le long du lit sont en partie protégés des fluctuations turbulentes. En particulier, la fraction de grains

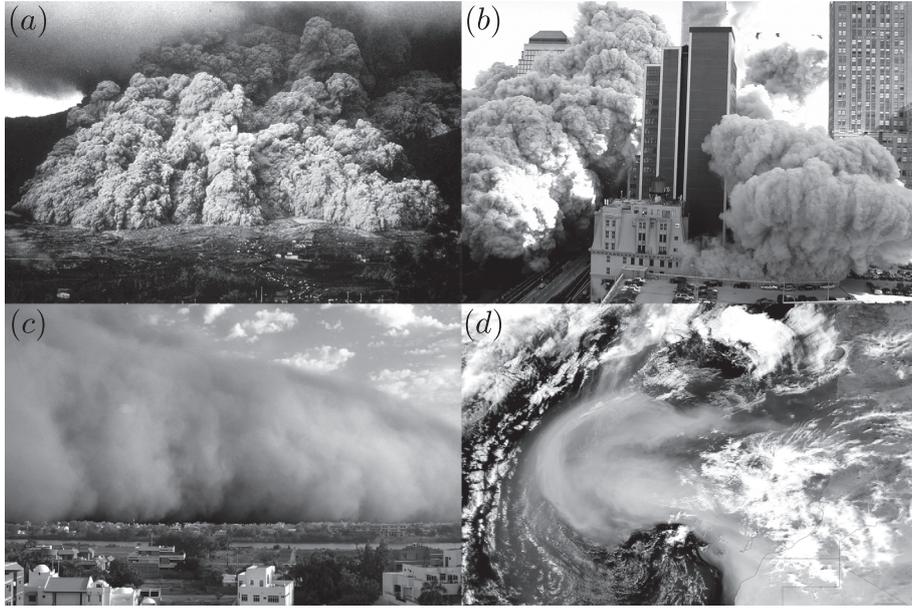


FIG. 16 – (a) Transport en suspension lors de l'écoulement pyroclastique associé à l'éruption de 1991 du Mont Unzen (Japon). (b) Nuage de poussière en suspension à la suite des attentats du 11 Septembre (Manhattan). (c) Suspension lors d'un vent de sable (Soudan). (d) Transport de poussières saharienne au dessus de l'Atlantique lors d'une remontée vers l'Europe de l'anticyclone des Açores.

entraînée est très faible lorsque la sous-couche limite visqueuse est plus beaucoup plus grande que la taille des grains. Le flux d'érosion s'entend donc comme le flux lié aux fluctuations turbulentes au travers d'une surface située juste au dessus de la couche de charriage. De manière alternative, on peut considérer que la couche de charriage détermine la fraction volumique de grains en mouvement au dessus du lit statique. Cette physique des particules nécessitait que l'on désignât de noms différents les grains contribuant aux différents modes de transport. En conséquence, il fut proposé que les grains en saltation fussent baptisés des saltons, les grains en reptation, des reptons et les grains en charriage, des tractons.

4.1.2 Flux saturé

On considère que la suspension est suffisamment diluée pour pouvoir négliger les interactions hydrodynamiques. En introduisant la fraction volumique de grains φ , le flux de sédimentation s'écrit:

$$\phi_{\downarrow} = u_{\text{chute}} \varphi \quad (77)$$

où u_{chute} est la vitesse de sédimentation définie au chapitre?. Rappelons qu'à faible nombre de Reynolds particulaire, cette vitesse s'écrit:

$$u_{\text{chute}} = \frac{\rho_p - \rho_f}{\rho_f} \frac{gd^2}{18\nu} \quad (78)$$

Cet effet de la gravité est compensé par le flux de matière induit par les fluctuations turbulentes, que l'on modélise par une loi de diffusion:

$$\phi_{\uparrow} = -D\partial_z\varphi \quad \text{avec} \quad D = K^2 z^2 |\partial_z u_x| = \frac{K^2}{\kappa} z u_* \quad (79)$$

La constante K est un nombre sans dimension phénoménologique, qui joue le rôle pour le mélange d'un scalaire passif de la constante de von Karman pour la quantité de mouvement. u_* donne

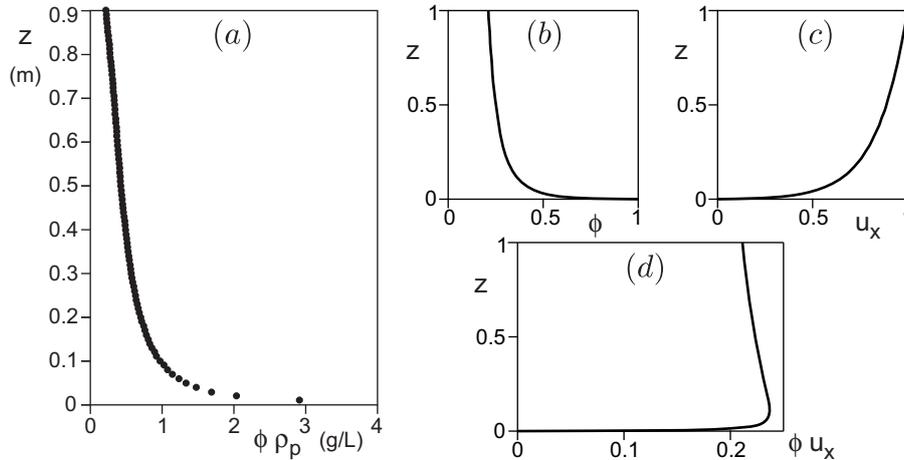


FIG. 17 – (a) Profil vertical de concentration $\rho_p \varphi(z)$ mesuré dans l'estuaire de la rivière Tau par rétro-diffusion d'ultrasons (Rose et Thorne 2001). (b) Profil théorique (Eq. 80) de fraction volumique $\varphi(z)$, pour $\alpha = 0.25$. (c) Profil de vitesse logarithmique $u_x(z)$. (d) Profil du flux horizontal, $\varphi u_x(z)$. Les trois profils sont en unités arbitraires.

l'échelle des fluctuations turbulentes de vitesse. La distance au sol donne l'échelle spatiale de ces fluctuations. Le produit $z u_*$ donne, dimensionnellement, le coefficient de diffusion des grains (Van Rijn 1984). A l'équilibre, ces flux sont égaux entre eux et égaux au flux d'érosion, qui est déterminé par les mécanismes physiques décrits ci-dessus. Il s'ensuit que le profil de concentration décroît comme une loi de puissance de la distance au sol z :

$$\varphi \propto \varphi_\ell \left(\frac{z}{d} \right)^{-\alpha} \quad \text{with} \quad \alpha = \frac{\kappa u_{\text{chute}}}{K^2 u_*} \quad (80)$$

Le préfacteur numérique de cette loi doit être fixé, soit par un raccordement avec la fraction volumique dans la couche de charriage, soit avec un raccordement au flux d'érosion.

Dans une rivière, c'est le confinement de l'écoulement par la surface libre qui conduit à une saturation du flux de sédiments suspendus. Considérons pour simplifier que le profil de vitesse u_x est homogène en z ($u_x \approx \lambda u_*$) et que le coefficient de diffusion D peut être approximé par $D \approx (K^2/\kappa) u_* H$. Cette fois, le profil de concentration à l'équilibre s'écrit:

$$\varphi = \varphi_\ell \frac{\phi_\uparrow(0)}{u_{\text{chute}}} \exp\left(-\alpha \frac{z}{H}\right) \quad (81)$$

En supposant que les particules transportées suivent l'écoulement, le flux total s'écrit:

$$q_{\text{sat}} = \int_0^H \frac{\varphi}{\varphi_\ell} u_x dz = \frac{\lambda K^2 u_*^2}{\kappa u_{\text{chute}}^2} e^{-\alpha} H \phi_\uparrow \quad (82)$$

4.1.3 Longueur de saturation

Comme nous l'avons vu, la saturation du transport en suspension est liée à l'existence d'une épaisseur fluide H finie. Le transitoire de saturation du transport est déterminé par le mode le plus lent, qui est associé au mélange des particules sur une échelle H . La loi d'échelle suivie par le temps de relaxation s'obtient en considérant la sédimentation d'un grain sur une hauteur H :

$$T_{\text{sat}} \propto \frac{H}{u_{\text{chute}}} \quad (83)$$

La longueur de saturation correspond à la longueur parcourue pendant le temps T_{sat} :

$$L_{\text{sat}} \propto \frac{u_* H}{u_{\text{chute}}} \quad (84)$$

En conclusion, la longueur de saturation pour le transport en suspension est commensurable avec la hauteur d'eau.

4.2 Saltation

4.2.1 Description qualitative

Le transport en saltation se caractérise par le fait que les grains effectuent des sauts suffisamment haut pour, contrairement au charriage, ne plus sentir l'effet du sol. Les grains sont suffisamment lourds et le vent suffisamment faible pour pouvoir négliger les fluctuations turbulentes de l'écoulement. Dans le cas transport aqueux, les collisions sont très amorties par le fluide interstitiel et il n'y a que peu ou pas de rebond. Au contraire, dans le cas du transport éolien, le rebond des grains sur le lit sableux conserve une partie de leur énergie cinétique. Les grains volent donc de plus en plus haut, au fil des rebonds. Nous ne décrivons la saltation que dans cette dernière situation. On considère que les grains ne forment pas une coulée dense à la surface du lit sableux mais volent de manière séparée.

4.2.2 Flux saturé

Les grains quittent le sol avec une vitesse horizontale typique u_{\uparrow}^p et, après avoir fait un saut et avoir été accéléré par l'écoulement, entrent en collision avec le sol avec une vitesse horizontale u_{\downarrow}^p . La contrainte de cisaillement associée au transport est proportionnelle au flux de sable et à la différence de vitesse ($u_{\downarrow}^p - u_{\uparrow}^p$). A l'équilibre hydrodynamique, la contrainte totale $\tau_0^f = \rho_f u_*^2$ est égale à la somme de la contrainte fluide τ^f et de celle associée au transport. Le flux massique de particules traversant une surface horizontale du bas vers le haut est notée ϕ^m . Il entraîne un flux de quantité de mouvement $\phi^m u_{\uparrow}^p$ du bas vers le haut. Le flux massique de particules traversant cette même surface du haut vers le bas est égale à ϕ^m et entraîne un flux de quantité de mouvement $\phi^m u_{\downarrow}^p$. Globalement, l'équilibre s'écrit:

$$\tau_0^f = \rho_f u_*^2 = \tau^f + \phi^m (u_{\downarrow}^p - u_{\uparrow}^p) = \tau^f + \rho_p \varphi \frac{(u_{\downarrow}^p - u_{\uparrow}^p)}{\bar{a}} q_{\text{sat}}. \quad (85)$$

où \bar{a} est la longueur moyenne de saut des grains. La contrainte de cisaillement transmise par le fluide dans la couche de transport n'est plus la contrainte de cisaillement externe τ_0^f mais une contrainte de cisaillement réduite notée τ^f .

On peut retrouver l'expression ci-dessus en adoptant et adaptant la formulation diphasique. L'équation de la dynamique du fluide s'écrit:

$$\rho_f \frac{d\mathbf{u}^f}{dt} = \rho_f (1 - \varphi) \mathbf{g} + (1 - \varphi) \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^f - \sum_n \mathbf{K}(\mathbf{F}_n, \mathbf{r} - \mathbf{r}_n) \quad (86)$$

où l'on somme sur n les contributions de tous les grains entraînés. \mathbf{r}_n est la position du grain n et \mathbf{F}_n la force exercée par le fluide sur ce grain. La fonction \mathbf{K} reflète la densité volumique des forces exercées sur le fluide, liées à la présence de la particule. Elle doit vérifier la condition de normalisation:

$$\int \mathbf{K}(\mathbf{F}, \mathbf{r}) d^3 \mathbf{r} = \mathbf{F} \quad (87)$$

La présence d'un grain induit une modification de l'écoulement sur une taille de l'ordre de d . A une échelle grande devant d , cette contribution des grains aux forces exercées sur le fluide se ramène à une distribution de forces ponctuelles. Le noyau \mathbf{K} est alors une fonction delta: $\mathbf{K}(\mathbf{F}, \mathbf{r}) = \mathbf{F} \delta(\mathbf{r})$. On considère que les forces exercées par les grains sur le fluide ne conduisent pas à une instationarité de l'écoulement mais à une contribution aux fluctuations de vitesses et donc au tenseur de Reynolds. Dès lors, on doit considérer la moyenne temporelle de l'équation de la dynamique:

$$\rho_f (1 - \varphi) \mathbf{g} + (1 - \varphi) \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^f - \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T dt \sum_n \mathbf{F}_n \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n) = \mathbf{0} \quad (88)$$

On projette cette équation sur la direction horizontale, puis on l'intègre de z à l'infini. En introduisant une surface horizontale de contrôle S , on obtient:

$$(1 - \varphi)\tau_0^f = (1 - \varphi)\tau^f - \lim_{T \rightarrow \infty} \lim_{S \rightarrow \infty} \frac{1}{S} \int_0^T dt \sum_{z_n > z} \mathbf{F}_n \cdot \mathbf{e}_x \quad (89)$$

où τ_0^f est la constante d'intégration, fixée loin au dessus de la couche de saltation. La somme est prise sur les grains n à l'aplomb de la surface S . En remplaçant la force par la masse m multipliée par l'accélération horizontale du grain n , on obtient:

$$(1 - \varphi)(\tau_0^f - \tau^f) = - \lim_{T \rightarrow \infty} \lim_{S \rightarrow \infty} \frac{1}{S} \int_0^T dt \sum_{z_n > z} m \frac{d\mathbf{u}_n^p}{dt} \cdot \mathbf{e}_x = \phi^m (u_\downarrow^p - u_\uparrow^p) \quad (90)$$

Dans la limite diluée, on retrouve donc bien l'équation 85

Le nombre de particules éjectées lors d'une collision dépend de la vitesse des grains lors de l'impact. Or, les grains volent dans une couche à vitesse réduite: la vitesse de collision dépend donc de τ^f et non de τ_0^f . Ecrivons maintenant l'équilibre entre érosion et déposition. On définit la capacité de remplacement N comme le nombre moyen de grains éjectés lorsqu'un grain en saltation entre en collision avec le lit de sédiments. Plus τ^f est grande, plus la vitesse d'impact des grains l'est et plus la capacité de remplacement N est élevée. L'équilibre érosif est atteint lorsque τ^f a décréu à la valeur τ_{th} pour laquelle $N = 1$. Chaque grain, alors, éjecte en moyenne un grain lors d'un impact. Le flux saturé se met donc sous la forme:

$$q_{sat} = \frac{(\tau^f - \tau_{th}) \bar{a}}{\rho_p \varphi (u_\downarrow^p - u_\uparrow^p)} = \frac{\rho_f (u_*^2 - u_{th}^2) \bar{a}}{\rho_p \varphi (u_\downarrow^p - u_\uparrow^p)}. \quad (91)$$

Le flux saturé s'annule lorsque la contrainte de cisaillement basale atteint τ_{th} , qui est donc, par définition, le seuil de transport dynamique. La vitesse du vent dans la couche de transport est donc réduite à la valeur qu'elle a au seuil de transport, quelle que soit la force du vent au dessus de cette couche. En conséquence, les trajectoires des grains en saltation sont indépendantes de la vitesse du vent. En particulier, dans la formule ci-dessus, la longueur de saut moyenne \bar{a} et les deux vitesses u_\downarrow^p et u_\uparrow^p sont indépendantes de u_* . Le flux saturé est donc proportionnel à l'écart au seuil de la contrainte basale (Ungar & Haff 1987, Andreotti 2004).

La différence $u_\downarrow^p - u_\uparrow^p$ de vitesse entre le décollage et l'atterrissage est, en première approximation, proportionnelle à la vitesse moyenne du grain. On en déduit donc la loi d'échelle suivante:

$$q_{sat} \propto \frac{(\tau^f - \tau_{th})}{\rho_p} T = \frac{\rho_f}{\rho_p} (u_*^2 - u_{th}^2) T. \quad (92)$$

où T est le temps de vol des grains dans le vent réduit, caractérisé par la contrainte de cisaillement $\tau_f = \tau_{th}$. T est donc proportionnel à $\sqrt{d/g}$.

4.2.3 Longueur de saturation

Pour comprendre l'origine de la longueur de saturation, on peut remarquer que le flux s'écrit comme le produit d'une densité de grains par une vitesse. Dès lors, deux mécanismes peuvent limiter ce processus. D'une part, il faut que les grains soient accélérés à la vitesse de l'écoulement. D'autre part, il faut que l'érosion du lit conduise à ce que le nombre de grains transportés tende vers sa valeur saturée. Considérons pour simplifier le mouvement horizontal d'un grain entraîné par le vent:

$$\frac{\pi}{6} \rho_p d^3 \frac{du^p}{dt} = \frac{\pi}{8} C_d \rho_f (u^f - u^p)^2 d^2, \quad (93)$$

où u^p est la vitesse du grain et u^f la vitesse du vent. En faisant l'analyse dimensionnelle du problème, on voit qu'il n'existe qu'une seule vitesse caractéristique et qu'une seule longueur caractéristique. La longueur de relaxation effective vérifie donc proportionnelle à cette longueur:

$$L_{sat} \propto \frac{\rho_p}{\rho_f} d, \quad (94)$$

avec un pré-facteur de l'ordre de $2/C_d$ (Andreotti 2002, 2004).

Considérons maintenant l'évolution du flux q en supposant que les grains volent sans retard à la vitesse du vent. A chaque saut, de longueur \bar{a} , il y a production ou absorption de nouveaux grains.

$$\bar{a} \frac{dq}{dx} = N(\tau_f)q \simeq q_{\text{sat}} \left. \frac{dN}{d\tau_f} \right|_{\tau_{\text{th}}} (\tau_f - \tau_{\text{th}}) \quad (95)$$

En exprimant τ_f en fonction q et en achevant la linéarisation, on obtient une longueur de relaxation:

$$L_{\text{sat}} \propto \frac{\bar{a}}{\left. \frac{dN}{d\tau_f} \right|_{\tau_{\text{th}}} (\tau_0^f - \tau_{\text{th}})}, \quad (96)$$

qui diverge au seuil de transport et tend rapidement vers 0 à grand vent (Sauermaun *et al.* 2001).

La longueur de saturation est donnée, en première approximation, par la plus grande des ces deux longueurs de relaxation. La relaxation est donc limitée par l'érosion immédiatement au dessus du seuil, puis par l'inertie des grains. Pour des vents légèrement plus forts, la longueur de saturation devient proportionnelle au rapport de densité entre les grains et le fluide environnant fois le diamètre des grains.

4.3 Reptation

4.3.1 Description qualitative

Le transport en reptation provient du mouvement de grains induit par les collisions de grains en saltation avec le lit sableux. On introduit la distribution de probabilité $\mathcal{P}(a)$ de la longueur de saut a des grains éjectés par impact et qui s'arrêtent après ce saut unique. De manière plus générale, de nombreux auteurs ont mesuré expérimentalement ou numériquement la probabilité d'observer des grains éjectés avec un certain vecteur vitesse, en fonction de la vitesse d'impact (Werner 1988, McEwan *et al.* 1992, Anderson & Haff 1988 & 1991, Rioual *et al.* 2000). Cette densité de probabilité s'appelle la fonction "splash". Il est à noter cependant que cette calibration des réarrangements opérés statistiquement par la collision d'un grain ne correspond pas parfaitement à la situation réelle. En effet, il y a en réalité une vitesse de vent non-nulle et donc une contrainte fluide légèrement inférieure au seuil statique, sur la couche de grain superficielle. En conséquence, les grains de surface sont beaucoup plus facile à déloger que dans le cas de grain impactant un lit statique. D'autre part, l'éjection de grains n'est indépendant du flux de grains en saltation qu'à faible flux. Lorsque le nombre d'impacts par unité de temps dans une zone donnée augmente, on peut penser qu'il y a, en proportion, de moins en moins de grains éjectés par grain incident, mais qu'il est possible d'éjecter des grains plus profondément piégés.

4.3.2 Flux saturé

La description la plus simple ne fait intervenir que la distribution $\mathcal{P}(a)$. Les flux d'érosion ϕ_{\uparrow}^r et de déposition ϕ_{\downarrow}^r associés à la reptation sont reliés par:

$$\phi_{\downarrow}^r(x) = \int_0^{\infty} da \mathcal{P}(a) \phi_{\uparrow}^r(x - a) \quad (97)$$

Par ailleurs, le flux d'érosion ϕ_{\uparrow}^r est proportionnel au flux de grains transportés en saltation et au nombre moyen de grains mis en mouvement par grain entrant en collision avec le lit de sable. On observe expérimentalement et numériquement que ce nombre d'éjecta est nul en dessous d'un seuil en vitesse d'impact puis croît linéairement avec celle-ci, en première approximation.

La conservation de la matière se réécrit:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{\partial q_s}{\partial x} + \int_0^{\infty} da \mathcal{P}(a) (\phi_{\uparrow}^r(x - a) - \phi_{\downarrow}^r(x)) \quad (98)$$

où q_s est le flux de saltation. Dans une situation homogène, $\phi_1^r = \phi_1^f = \phi^r$ de sorte que le flux de reptation q_r s'écrit:

$$q_r = \bar{a} \phi^r \quad \text{avec} \quad \bar{a} = \int_0^\infty \mathcal{P}(a) a da \quad (99)$$

La vitesse d'impact des grains en saltation étant indépendante de τ_0^f , on peut penser que c'est le cas également de la longueur moyenne de saut \bar{a} des grains en reptation ainsi que leur nombre. Dès lors, on prédit que le flux de grains en reptation est proportionnel au flux de grains en saltation. Expérimentalement, on estime que la part de la reptation se situe entre 1/6 et 1/3 du transport éolien total.

4.3.3 Longueur de saturation

Considérons un lit de sable qui, comme celui schématisé sur la figure 15, n'occupe que le demi-espace $x > 0$. Supposons qu'une pluie homogène de grains en saltation vienne impacter cette zone. Le flux s'écrit alors:

$$q_r(x) = \bar{a} \phi^r - \int_0^\infty \mathcal{P}(x+a) a da \quad (100)$$

Pour une distribution exponentielle de longueur de saut $\mathcal{P}(a) \propto \exp(-a/\bar{a})$, la relaxation du flux est également exponentielle:

$$q_r(x) = \bar{a} \phi^r \left(1 - \exp\left(-\frac{x}{\bar{a}}\right) \right) \quad (101)$$

Dans ce cas, la description par une équation de relaxation est parfaite et conduit à une longueur de saturation:

$$L_{\text{sat}} = \bar{a} \quad (102)$$

Cette longueur étant petite devant la longueur de saturation associée au transport en saltation, c'est cette dernière qui contrôle, en dernier ressort, la relaxation du transport éolien. En pratique, on peut donc considérer que la longueur de saturation vaut, dans ce cas:

$$L_{\text{sat}} \approx 2 \frac{\rho_p}{\rho_f} d, \quad (103)$$

4.4 Charriage

4.4.1 Description qualitative

Près du seuil de transport, tant que la densité de grains reste faible, la rétroaction du transport sur l'écoulement est négligeable. Dès lors, c'est le taux d'érosion qui contrôle le transport. L'érosion est elle-même limitée par le fait que seules la couche superficielle de grains est soumise à l'écoulement. Dès lors, le taux d'érosion est égal au volume de grains susceptibles d'être arrachés du lit par unité de surface, divisé par le temps nécessaire à ce que les grains érodés soit entraînés suffisamment loin pour permettre l'érosion de la couche suivante. On comprend aisément que ce temps, dans le cas d'un lit cohésif, peut-être extrêmement long car l'érosion d'un grain nécessite la dissolution du ciment reliant les grains dans le cas d'un grès, ou de l'érosion mécanique des grains interstitiels dans le cas d'un lit composé d'un mélange de sable et d'argile.

4.4.2 Charriage limité par l'érosion: flux saturé

La situation la plus simple est celle d'un lit sableux non-cohésif. La vitesse relative entre l'écoulement et le lit sableux induit une force hydrodynamique sur les grains de surface qui tend à les entraîner. On définit la fraction de grains $\mathcal{N}(\Theta)$ susceptible d'être entraînée pour un nombre de Shields Θ . Par construction, \mathcal{N} est nul en dessous du seuil d'érosion Θ_{th} puis croît très rapidement jusqu'à saturer à un au dessus d'un second seuil Θ_M . Physiquement, $\mathcal{N}(\Theta)$ reflète la distribution des pièges potentiels au sein desquelles se trouvent les grains de surface. Ainsi, un lit sableux préparé par sédimentation est initialement très désordonné et présente nombre de pièges peu

profonds (Charru *et al.* 2004). La valeur de Θ_{th} est donc assez basse et celle de Θ_M assez haute. Au cours du transport, la surface se réarrange et les grains initialement dans des pièges peu profonds sont déplacés vers des pièges plus profonds, ce qui conduit à une évolution lente de la distribution $\mathcal{N}(\Theta)$ et en particulier à une augmentation de Θ_{th} , jusqu'à atteindre un état statistiquement stationnaire.

La longueur \mathcal{L} d'une trajectoire, définie comme la distance parcourue entre deux états d'immobilité, est indépendante du piège dans lequel le grain était initialement au repos. En moyenne, la surface explorée par le grain est autour de $\mathcal{L}d$ et contient, par définition, un unique piège potentiel suffisamment profond pour que le grain s'arrête complètement. Par conséquent, \mathcal{L} présente une moyenne bien définie, égale à:

$$\mathcal{L} = \frac{d}{1 - \mathcal{N}(\Theta)} \quad (104)$$

Au seuil d'entraînement, les grains entraînés sont immédiatement capturés par le piège suivant de sorte que la longueur de la trajectoire est simplement une taille de grain ($\mathcal{L} = d$). Lorsque tous les grains en surface peuvent être entraînés ($\Theta \rightarrow \Theta_M$), cette longueur diverge (Charru *et al.* 2008).

Lorsqu'un grain est entraîné, on émet l'hypothèse qu'il ne peut plus y avoir d'érosion dans une zone alentour de surface d^2 avant que le grain ait bougé d'une distance comparable à son diamètre d . Le temps d'érosion \mathcal{T} est donc le temps nécessaire pour que le grain parcoure une distance d . Nous avons effectué précédemment la description du mouvement élémentaire d'un grain soumis à une force d'entraînement constante. Nous invitons le lecteur à reprendre ce calcul avec une force qui dépend de la différence de vitesse entre l'écoulement et le grain. Cependant, nous pouvons utiliser les résultats précédents pour établir sans calcul que la vitesse moyenne varie comme $1/\ln[\Theta - \Theta_{\text{th}}]$ près du seuil. Comme nous l'avons déjà remarqué, une transition de ce type est beaucoup plus abrupte que l'habituelle transition nœud col. Expérimentalement, il peut sembler que la vitesse du grain soit non nulle dès le seuil de transport. Loin au dessus du seuil, il va de soi que l'effet du sol devient négligeable et que la vitesse du grain devient proportionnelle à la vitesse de l'écoulement (Anderson & Haff 1991, Nalpanis *et al.* 1993, Fernandez Luque & van Beek 1976, Charru *et al.* 2004).

Si l'on considère que la distribution $\mathcal{N}(\Theta)$ croît linéairement avec $\Theta - \Theta_{\text{th}}$, on obtient une dépendance du flux saturé en:

$$q_{\text{sat}} \propto \frac{\Theta - \Theta_{\text{th}}}{\ln[\Theta - \Theta_{\text{th}}]} \sqrt{\left(\frac{\rho_p}{\rho_f} - 1\right) g d^3}$$

près du seuil, puis une divergence du flux lorsque Θ atteint Θ_M .

4.4.3 Charriage limité par la quantité de mouvement: flux saturé

Bien évidemment, la divergence du flux lorsque tous les grains de surface peuvent être entraînés ne survient en réalité pas, puisqu'intervient avant un changement de régime: la densité de grains transporté devient telle que la rétroaction du transport sur l'écoulement ne peut plus être négligée. Dans le régime turbulent, le transport transite vers un régime limité par la quantité de mouvement, très proche de ce que nous avons décrit pour la saltation, et caractérisé par un flux saturé proportionnel à:

$$q_{\text{sat}} \propto \frac{\rho_f}{\rho_p} \sqrt{\frac{(\rho_p - \rho_f) g d^3}{\rho_f}} (\Theta - \Theta_{\text{th}}) \quad (105)$$

Lorsque l'écoulement devient suffisamment puissant, ce ne sont plus une mais plusieurs couches de grains qui sont entraînées (Fig. 18). Le transport s'apparente alors à un écoulement dense de grains induit par la contrainte de surface. De manière à faire le lien avec les chapitres précédents, nous développons ici un modèle simplifié (Ouriemi *et al.* 2009), qui suppose que dans la couche de grains mobiles, le fluide se meut comme dans une avalanche sous-marine (chapitre?). Nous avons vu lors du calcul du seuil de transport, que le frottement de l'écoulement au sein du milieu poreux constitué par les grains conduit à un ajustement des vitesses du fluide et des particules sur

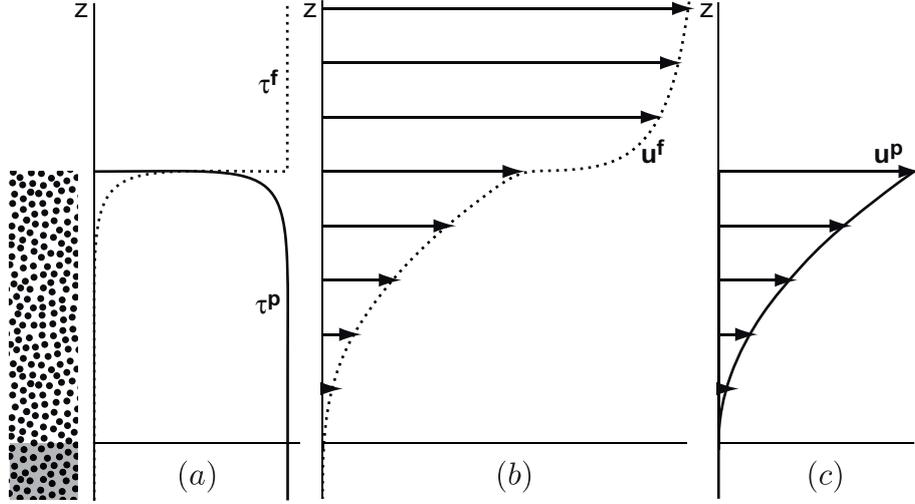


FIG. 18 – *Charriage en couche épaisse. (a) Profil des contraintes fluide τ^f et solide τ^p . Le transfert entre un flux de quantité de mouvement porté par le fluide et un transfert au travers des contacts entre grains se fait sur la première couche de grains en surface. (b) Profil de vitesse dans le fluide. La vitesse chute brutalement dans la zone de transfert des contraintes, pour rejoindre la vitesse des grains dans la couche mobile. (c) Profil de vitesse des grains. Il n’y a plus de mouvement en dessous*

moins d’un grain. En conséquence, au dessous d’une couche superficielle de grains, on a égalité des vitesses: $\mathbf{u}^p = \mathbf{u}^f$. Par simplicité, on suppose le régime visqueux, de sorte que la rhéologie du mélange grains/liquide s’écrit:

$$\tau^p = \mu(I_{visc})P^p \quad \text{avec} \quad I_{visc} = \eta\dot{\gamma}/P^p \quad \text{et} \quad \mu(I) = \mu_{th} + \mu'_0 I \quad (106)$$

En orientant z vers le bas et en définissant $z = 0$ comme la position de la première couche de grain, le champ de pression s’écrit:

$$P^p = (\rho_p - \rho_f)\varphi g(z + d) \quad (107)$$

A l’équilibre, la contrainte au travers de la couche est constante:

$$\tau_0^f = \tau^p = \mu_{th}P^p + \mu'_0\eta\dot{\gamma} \quad (108)$$

Le taux de cisaillement se met sous la forme:

$$\dot{\gamma} = \frac{(\rho_p - \rho_f)\varphi g}{\mu'_0\eta} [(\Theta - \Theta_{th})d + \Theta_{th}z] \quad (109)$$

Le seuil d’érosion est franchi à la profondeur $z = h$ définie par:

$$h = d \left(\frac{\Theta}{\Theta_{th}} - 1 \right) \quad (110)$$

Pour que le calcul soit auto-cohérent, il faut donc que le nombre de Shields soit au moins à deux fois la valeur seuil. En intégrant le taux de cisaillement, on obtient le profil de vitesse:

$$u = \frac{(\rho_p - \rho_f)\varphi g}{2\mu'_0\eta} \Theta_{th} (h - z)^2 \quad (111)$$

Le flux de sédiments transportés s’obtient en intégrant une seconde fois:

$$q_{sat} = \frac{(\rho_p - \rho_f)\varphi^2 g d^3}{6\mu'_0\eta} \Theta_{th} \left(\frac{\Theta}{\Theta_{th}} - 1 \right)^3 \quad (112)$$

4.4.4 Longueur de saturation

La longueur de saturation dans un liquide porteur a été beaucoup moins étudiée que celle du transport éolien, notamment du fait qu'elle est beaucoup plus petite, de l'ordre de quelques tailles de grains. Dans la limite visqueuse ainsi que dans le régime limité par l'érosion, la longueur de saturation est simplement donnée par la longueur des trajectoires. Dans le modèle développé ci-dessus, la longueur de saturation est donc égale à \mathcal{L} . Une autre loi d'échelle a été proposée par Charru *et al.* 2008 en considérant que les grains transportés sédimentent à la vitesse u_{chute} sur une hauteur proportionnelle à la taille des grains d . La longueur des trajectoires, et donc la longueur de saturation, va alors comme $(u^f/u_{\text{chute}})d$. Dans le régime limité par la quantité de mouvement, on s'attend à ce que la longueur de saturation devienne, comme pour la saltation, limitée par la longueur nécessaire pour accélérer les grains.

Solution du TD

Influence de la pente du lit sur le transport

Le charriage, la saltation et la reptation, sont sensibles à la présence d'une pente du lit, la gravité entraînant les grains dans la direction de celle-ci. Pour rendre compte simplement de cet effet, considérons un modèle analogique simpliste. On représente le transport par un ensemble de patins solides glissants avec frottement sur une surface $Z(x,y)$ inclinée d'une pente longitudinale $\partial_x Z$ et d'une pente transverse $\partial_y Z$. On introduit, comme dans le calcul du seuil, la vitesse effective U autour du patin. Par soucis de simplicité, on se place dans le régime turbulent. En régime stationnaire, le patin va à la vitesse $u^p \mathbf{t}$ telle que:

$$|u^f \mathbf{e}_x - u^p \mathbf{t}|(u^f \mathbf{e}_x - u^p \mathbf{t}) = \frac{4(\rho_p - \rho_f)gd (\mu \mathbf{t} + \partial_x Z \mathbf{e}_x + \partial_y Z \mathbf{e}_y)}{3C_\infty \rho_f \sqrt{1 + (\partial_x Z)^2 + (\partial_y Z)^2}}$$

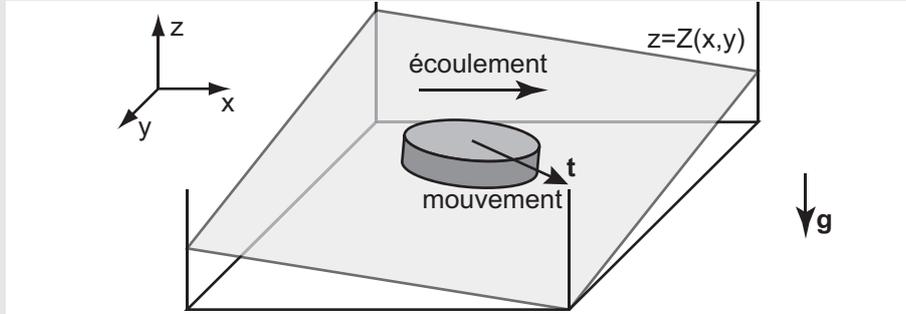


FIG. E1.2 - Schéma montrant le mouvement d'un patin entraîné par un écoulement sur un plan incliné.

On définit la vitesse seuil pour un lit plat, u_{th}^0 , pour laquelle u^p s'annule. La dépendance en pente du seuil s'écrit:

$$\frac{u_{\text{th}}^2}{u_{\text{th}}^0{}^2} = \frac{\Theta_{\text{th}}}{\Theta_{\text{th}}^0} = \frac{\sqrt{1 - (\partial_y Z / \mu)^2} + \partial_x Z / \mu}{\sqrt{1 + (\partial_x Z)^2 + (\partial_y Z)^2}} \quad (113)$$

On constate que le seuil s'annule comme attendu lorsque la pente transverse ou la pente longitudinale atteint μ . Cependant, pour les faibles pentes, le seuil dépend linéairement de la pente longitudinale mais quadratiquement de la pente transverse. En introduisant le seuil, l'équilibre des forces se réécrit:

$$\frac{|u^f \mathbf{e}_x - u^p \mathbf{t}|(u^f \mathbf{e}_x - u^p \mathbf{t})}{u_{\text{th}}^2} = \frac{\mathbf{t} + (\partial_x Z / \mu) \mathbf{e}_x + (\partial_y Z / \mu) \mathbf{e}_y}{\sqrt{1 - (\partial_y Z / \mu)^2} + \partial_x Z / \mu} \quad (114)$$

Au premier ordre en pente, la vitesse du patin solide s'écrit:

$$u^p \mathbf{t} = (u^f - u_{th}) \left(\mathbf{e}_x - \frac{u_{th}}{u^f} \frac{\partial_y Z}{\mu} \mathbf{e}_y \right) \quad (115)$$

La dépendance vis-à-vis de la pente longitudinale est entièrement encodée dans la variation de la contrainte seuil. La composante transverse du flux est proportionnelle à la composante longitudinale, à la pente transverse et au rapport u_{th}/u^f des effets gravitaires sur les effets d'entraînement par l'écoulement. A noter que dans le cas de la saltation, la vitesse u^f dans la couche de transport est constante et de l'ordre de u_{th} . Par extrapolation, on peut passer du patin frottant à la dépendance du flux saturé avec la pente. Deux modifications sont à prendre en compte. D'une part, le vecteur directeur \vec{t} selon lequel s'aligne le flux saturé présente une composante proportionnelle à la pente transverse. D'autre part, la norme du flux doit prendre en compte une contrainte seuil modifiée par la pente comme décrit ci-dessus.

Références

- [1] Abbott J.E. & Francis J.R.D. Saltation and suspension trajectories of solid grains in a water stream. *Phil. Trans. R. Soc. London* 284 (1977) 225-254.
- [2] Allen J.R.L. *Principles of Physical Sedimentology* (1985) The Blackburn Press, Caldwell USA.
- [3] Anderson R.S. & Haff P.K., Simulation of aeolian saltation, *Science* 241 (1988) 820-823.
- [4] Anderson R.S. & Haff P.K., Wind modification and bed response during saltation of sand in air, *Acta Mechanica [Suppl]* 1 (1991) 21-51.
- [5] Andreotti B. A two species model of aeolian sand transport. *J. Fluid Mech.* 510 (2004) 47-50.
- [6] Andreotti, B., Claudin, P. & Douady, S. Selection of dune shapes and velocities – Part 1: Dynamics of sand, wind and barchans. *Eur. Phys. J. B* 28 (2002) 321.
- [7] Andreotti, B., Claudin, P. & Douady, S. Selection of dune shapes and velocities. Part 2: A two-dimensional modelling. *Eur. Phys. J. B* 28 (2002) 341-352.
- [8] Bagnold R.A. (1941) *The physics of blown sand and desert dunes*, Chapman and Hall, London
- [9] Charru F., Mouilleron-Arnould H. & Eiff O. Erosion and deposition of particles on a bed sheared by a viscous flow. *J. Fluid Mech.* 519 (2004) 55-80.
- [10] Charru F. Selection of the ripple length on a granular bed. *Phys. Fluids* 18 (2006) 121508.
- [11] Charru F., Larrieu E., Dupont J.-B. & Zenith R. Motion of a particle near a rough wall in a viscous shear flow. *J. Fluid Mech.* 570 (2008) 431-453.
- [12] Fernandez Luque, R. & van Beek, R. Erosion and transport of bed-load sediment. *J. Hydraul. Res.* 14 (1976) 127-144.
- [13] Greeley R. , Blumberg D.G. & Williams S.H., Field measurement of the flux and speed of wind blown sand. *Sedimentology* 43 , 41-52 (1996).
- [14] Guyon E., Hulin J. P. & Petit L. 2001 *Hydrodynamique physique*, 2e éd., EDP Sciences & CNRS Editions, coll. *Savoirs Actuels*.
- [15] Howard A.D., Effect of slope on the threshold of motion and its application to orientation of wind ripples, *Bulletin Geological Society of America* 88 (1977) 853-856.
- [16] Hunt, J.C.R., Leibovich, S. & Richards, K.J. Turbulent shear flows over low hills. *Q. J. R. Meteorol. Soc.* 114 (1988) 1435-1470.
- [17] Iversen J.D. & Rasmussen K.R. The effect of surface slope on saltation threshold, *Sedimentology* 41 (1994) 721-728 .
- [18] Iversen J.D. & Rasmussen K.R. The effect of wind speed and bed slope on sand transport, *Sedimentology* 46 (1999) 723-731 .
- [19] Jackson, P.S. & Hunt, J.C.R. Turbulent wind flow over a low hill. *Q. J. R. Meteorol. Soc.* 101 (1975) 929-955.

- [20] Loiseleux, T., Gondret, P., Rabaud, M. & Doppler, D. Onset of erosion and avalanche for an inclined granular bed sheared by a continuous laminar flow. *Phys. Fluids* 17 (2005) 103304.
- [21] McEwan J.K. , Willetts B.B. & Rice M.A., The grain/bed collision in sand transport by wind, *Sedimentology* 39 , 971-981 (1992).
- [22] Meyer-Peter E. & Müller R. Formulas for bed load transport. Report on the 2nd meeting international association (1948) 39-64.
- [23] Nalpanis P. , Hunt J.C.R. & Barrett C.F. , Saltating particles over flat beds, *J. Fluid Mech.* 251 (1993) 661-685.
- [24] Ouriemi M., Aussillous P. and Guazzelli E. Sediment dynamics. Part 1. Bed-load transport by laminar shearing flows, *J. Fluid Mech* (2009).
- [25] Owen P.R. Saltation of uniform grains in air, *J. Fluid. Mech.* 20 (1964) 225-242 .
- [26] Rasmussen K.R. , Iversen J.D. & Rautahaimo P., Saltation and wind flow interaction in a variable slope wind tunnel, *Geomorphology* 17 (1996) 19-28.
- [27] Rioual F., Valance A. & Bideau D., Experimental study of the collision process of a grain on a two-dimensional granular bed, *Phys. Rev. E* 62 (2000) 2450-2459.
- [28] Rose, C.P. & Thorne, P.D., Measurements of suspended sediment transport parameters in a tidal estuary, *Continental Shelf Research*, 21, 15 (2001) 1551-1575.
- [29] Sauermann G., Kroy K. & Herrmann H.J. Continuum saltation model for sand dunes. *Phys. Rev. E* 64 (2001) 031305.
- [30] Sorensen M., An analytic model of wind-blown sand transport, *Acta Mechanica [Suppl]* 1 (1991) 67-81.
- [31] Taylor, P.A., Mason, P.J. & Bradley, E.F. 1987 Boundary-layer flow over low hills. *Boundary-Layer Met.* **39**, 107-132.
- [32] Ungar J.E. & Haff P.K., Steady state saltation in air, *Sedimentology* 34 (1987) 289-299.
- [33] Valance A. & Langlois V. Ripple formation over a sand bed submitted to a laminar shear flow. *Eur. Phys. J. B* 43 (2005) 283-294.
- [34] Van Rijn, L.C. (1984) Sediment transport, Part II: suspended sediment load transport. *J. Hydraulic Eng. ASCE*, 110, 1613-1641
- [35] Werner B.T., The impact process in eolian saltation: two dimensional simulations. *Sedimentology* 35 (1988).
- [36] White B.R., Soil transport by winds on Mars, *J. Geophys. Res.* 84 (1979) 4643-4651.
- [37] Willetts B.B., McEwan J.K. & Rice M.A., Initiation of motion of quartz sand grains, *Acta Mechanica [Suppl]* 1 (1991) 123-134.
- [38] Williams G., Some aspects of aeolian saltation load, *Sedimentology* 3 (1964) 257-287.
- [39] Yalin M.S. & Karahan E.J. Inception of sediment transport. *J. Hydraul. Div.* 105 (1979) 1433-1443.

Notes sur le cours "Géomorphogénèse"

B. Andreotti

M3b 2009/2010

Chapitre 4 Rides et dunes

1 Classifications naturaliste et physique

L'approche naturaliste des objets naturels conduit à effectuer un travail de classification par ressemblance (voir l'annexe sur les grains). C'est ainsi que les formes naissant de la déstabilisation d'un lit sédimentaire (rides, dunes, bancs de sables et dunes géantes) ont été classées selon deux critères: leur taille caractéristique (leur longueur d'onde) et leur forme. La classification physique de ces formes se fait, elle, selon les mécanismes physiques à l'œuvre. Bien évidemment, et ce n'est pas la moindre des difficultés du sujet, ces deux classifications sont incompatibles entre elles. Commençons par le cas des écoulements unidirectionnels permanents. En rivière, on distingue les rides aquatiques qui sont de l'ordre du centimètre (de la centaine de diamètres de grain) et les dunes aquatiques qui sont de l'ordre du mètre (de la hauteur d'eau). Les formations éoliennes, c'est à-dire formée par le vent, présentent trois tailles distinctes: les rides éoliennes, de l'ordre de la dizaine de centimètres, les dunes élémentaires, de l'ordre de quelques dizaines de mètres, et finalement les dunes géantes de l'ordre du kilomètre. Il existe aussi des dunes géantes kilométriques sur Titan (Lorenz *et al.* 2006) et sur Mars (Savijärvi *et al.* 2004). Malheureusement, sont de la même nature physique, les rides aquatiques, les dunes éoliennes et les dunes géantes martiennes. Elles se forment par une seule et même instabilité linéaire et leur taille ne se distingue que par la densité du fluide qui les entoure. Cette instabilité met en jeu l'interaction entre la forme et le transport de sédiments: l'écoulement est modifié par la présence d'un relief; en retour, l'écoulement module le transport de grain et modifie donc le relief, à travers les processus d'érosion et de déposition. Les rides éoliennes sont d'une autre nature et n'ont pas d'homologue dans l'eau: elles se forment par une instabilité d'écrantage liée au bombardement du sol par des grains volant; leurs homologues sur Mars sont de l'ordre du mètre. Finalement, les dunes en rivières résultent de l'interaction avec la surface libre de la rivière: il existe donc un mécanisme supplémentaire, totalement négligeable dans le cas des rides aquatiques. Bien que l'analogie ne soit pas stricte, les dunes géantes éoliennes résultent également d'un effet de taille finie. Il s'agit cette fois d'une modulation hydrodynamique sur la hauteur de la couche limite atmosphérique. Les structures kilométriques sur Titan sont bien des dunes géantes et il existe vraisemblablement des dunes métriques sur ce satellite de Saturne.

Le second critère de classification est la directionnalité de l'écoulement (Fryberger & Dean 1979, Pye & Tsoar 1990, Werner 1995). Raisonons dans le cas éolien, où l'on parle plutôt de régime de vent ou de rose des vents. Lorsqu'il existe une seule direction de vent dominante tout au long de l'année (vents Alizés principalement), les dunes forment des rangs perpendiculaires au vent: on parle de dunes transverses. On retrouve la même symétrie dans le cas d'un écoulement alterné dans une direction et l'autre. C'est le cas, dans l'eau, des rides formées par la présence des vagues et des dunes formées par la marée. Elles se distinguent morphologiquement par la taille des faces d'avalanche (fig. 1). Lorsqu'il existe deux directions de vent principales relativement proches l'une de l'autre, il apparaît des dunes longitudinales, c'est à-dire dont la ligne de crête est alignée avec la direction 'moyenne' du vent (Tsoar 1983, Bristow *et al.* 2000). A nouveau, les faces d'avalanches sont petites comparées à la hauteur totale des dunes. Lorsqu'enfin le vent est multi-directionnel, se forment des dunes étoiles reconnaissables par leur multiples bras (Lancaster

1989). La caractéristique morphologique des dunes étoiles est la présence de points de jonction entre trois lignes de crête.

Passons rapidement sur le cas spécial des dunes végétées, statiques, dont la physique est dominée par l'interaction entre dune et plantes: ces dernières écrantent le vent et accumulent des grains; le transport tend à détruire mécaniquement la végétation; enfin, les plantes, en compétition pour les nutriments, doivent croître assez vite pour ne pas être ensevelies. Il existe un dernier type de dune, qui a joué un rôle très important sans la compréhension de la physique des dunes: la barkhane. Il s'agit de dunes ayant une forme caractéristique de croissant et se propageant, les cornes en avant, sur un la roche mère. Tout comme les dunes transverses, les barkhanes se forment sous l'effet d'un vent de direction donnée. La différence provient du mode d'alimentation en sable. Les dunes transverses se forment à partir de dépôt sableux lacustres ou fluviaux remodelés par le vent. Il y a donc une couverture sableuse complète de la surface rocheuse. Dans le cas des barkhanes, une source de sable localisée (par exemple une plage sur lequel le sable se dépose) engendre les dunes sur un sol non-érodable qui n'est pas recouvert de sable.

2 Introduction aux couches limites turbulentes

2.1 Profil de vitesse logarithmique

La compréhension des phénomènes d'érosion et de transport granulaire suppose une familiarité avec les écoulements fluides (d'air, d'eau, de dioxyde de carbone sur d'autres planètes) de couche limite. Nous en donnons ici une vision succincte qui n'a pas prétention à remplacer la lecture et l'étude d'un ouvrage d'hydrodynamique physique (Guyon *et al.* 2001). Considérons l'écoulement homogène et stationnaire au dessus d'un lit granulaire plat. Les particules fluides n'accélèrent pas et sont donc à l'équilibre des forces (il n'y a aucun effet inertiel):

$$\partial_z \tau = \partial_x P \quad \text{et} \quad \partial_z P = 0 \quad (1)$$

Rappelons que la pression est une quantité qui a des variations spatiales lentes et qui compense la partie des pseudo-forces (des effets inertiels) qui dérive d'un potentiel. Il s'ensuit que la pression ne varie pas à la traversée d'une couche limite, c'est à dire une couche dont les dimensions horizontales sont très grandes par rapport aux dimensions verticales. Revenant à l'équation ci-dessus, on obtient, par intégration:

$$\tau^f = \tau_0^f + \partial_x P z = \rho_f u_*^2 + \partial_x P z \quad (2)$$

Cette équation traduit les deux possibilités de créer un écoulement de couche limite: par un gradient de pression et par entraînement par les couches supérieures. Près du sol, la contrainte tend vers la contrainte basale $\tau_0^f = \rho_f u_*^2$ de sorte que l'on peut considérer génériquement le cas d'une contrainte constante. Dans le cas d'un écoulement à bas nombre de Reynolds, les échanges verticaux de quantité de mouvement sont contrôlés par la viscosité: $\tau^f = \eta \partial_z u_x$. Le profil de vitesse dans la couche limite près du lit de sable est alors linéaire:

$$u_x = \frac{\tau^f}{\eta} z = \frac{u_*^2}{\nu} z \quad (3)$$

Dans le cas turbulent, ce sont les fluctuations de vitesse et non la viscosité qui mélangent la quantité de mouvement. Décomposons le champ de vitesse en une partie moyenne $\langle \vec{u} \rangle$ et une partie fluctuante \vec{u}' . Cette décomposition s'entend théoriquement comme une moyenne d'ensemble sur des réalisations indépendantes sous les mêmes conditions de forçage. On remplace en générale cette moyenne d'ensemble par une moyenne spatiale (sous l'hypothèse d'homogénéité macroscopique) ou par une moyenne temporelle (sous l'hypothèse de stationnarité des conditions de forçage). C'est une procédure très délicate puisqu'on introduit alors un temps ou une longueur sur lesquelles la moyenne est prise et qui conditionne grandement le résultat. Réécrivant les équations de Navier-Stokes pour la partie moyenne du champ de vitesse, il apparaît une pseudo-force (un effet inertiel) qui se traduit par un terme de contraintes turbulentes: $\tau^f = \rho_f \langle u'_x u'_z \rangle$. Plus généralement, on

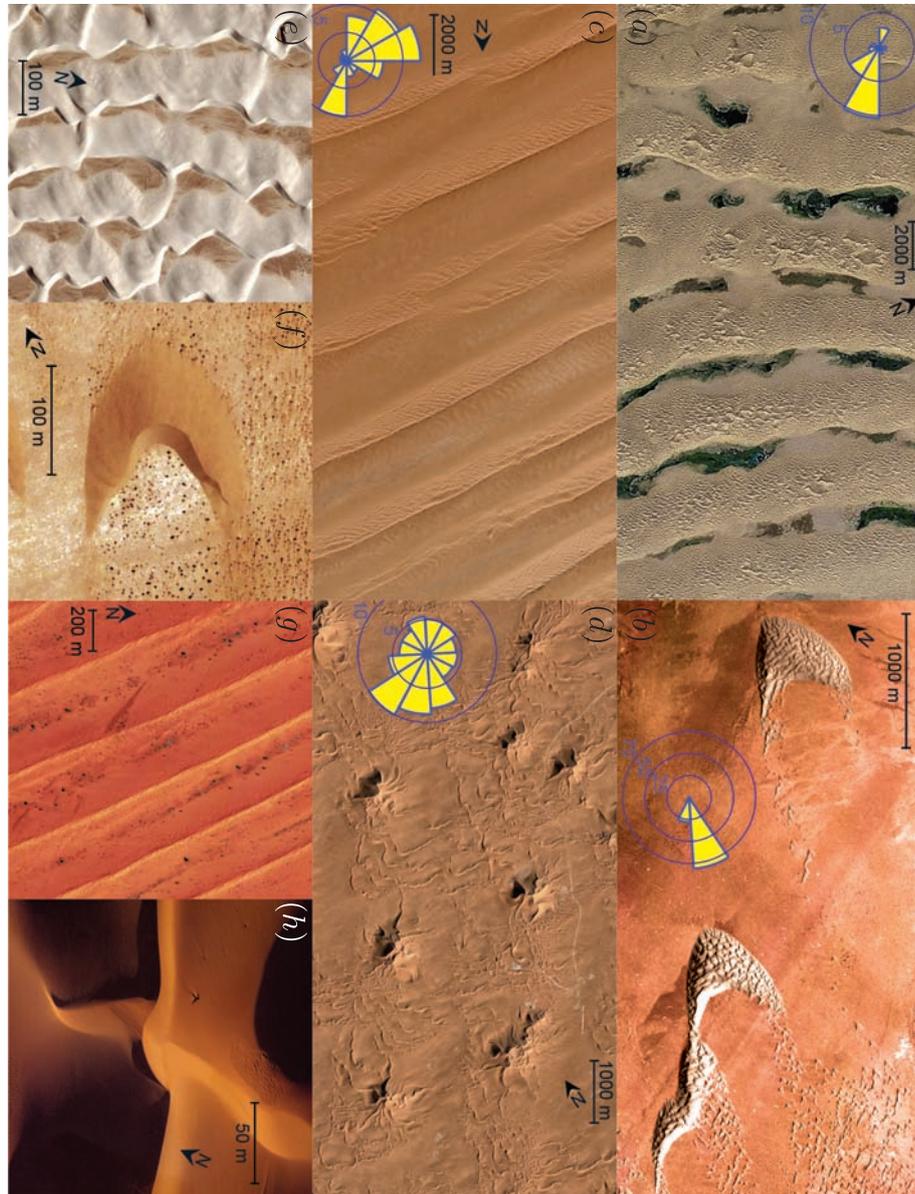


FIG. 1 – Relation entre le régime de vent et la forme des dunes géantes (a-d) et des dunes élémentaires (e-h). a) Dunes transverse, Badain Jaran (China, $38^{\circ}38'N/104^{\circ}59'E$); b) Barkhane, Sahara Atlantique (Maroc, $28^{\circ}02'N/12^{\circ}11'W$); c) Dunes longitudinales, RubAlKhali, (Arabie Saoudite $18^{\circ}11'N/47^{\circ}21'E$); d) Dunes étoiles, Grand Erg Oriental (Algerie, $31^{\circ}27'N/07^{\circ}45'E$); e) White sands (USA, $32^{\circ}49'N/106^{\circ}16'W$); f) Sahara Atlantique (Maroc, $27^{\circ}11'N/13^{\circ}13'W$); g) Australie ($23^{\circ}51'S/136^{\circ}33'E$); h) Mauritanie ($18^{\circ}09'N/15^{\circ}29'W$). Les régimes de vent sont indiqués par les roses de flux sableux (1999-2007).

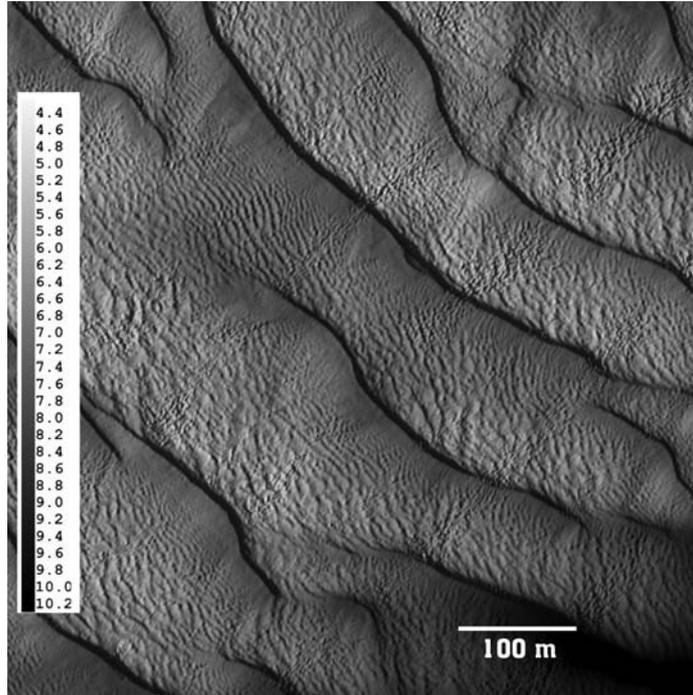


FIG. 2 – Représentation en niveaux de gris de la profondeur d'eau dans un tronçon du rio Paraná ($H \sim 8$ m, $d \sim 300 \mu\text{m}$, $\mathcal{F} = 0.16$) mesurée par sonar (Parsons et al. 2005). On observe des dunes géantes, de longueur d'onde $\lambda \sim 125$ m $\sim 15H$, comportant sur leur dos des dunes de longueur d'onde $\lambda \sim 6$ m et probablement des rides, qui ne sont pas résolues par l'instrument.

introduit le tenseur de Reynolds: $\tau_{ij}^f = \rho_f \langle u_i' u_j' \rangle$. L'interprétation physique de ce terme est simple: s'il existe une corrélation entre grande vitesse verticale vers le haut et grande vitesse horizontale vers la droite, cela crée en moyenne un flux vertical de quantité de mouvement horizontale. Dans une couche limite turbulente pleinement développée, la viscosité est complètement inefficace à grande échelle. La seule échelle caractéristique de longueur est donc la distance au sol z . Le seul temps est l'inverse du gradient de vitesse $\partial_z u_x$. On en déduit l'expression de la contrainte turbulente due à Prandtl:

$$\tau^f = \kappa^2 z^2 |\partial_z u_x| \partial_z u_x \quad (4)$$

où $\kappa \simeq 0.4$ est la constante phénoménologique de Von Kàrmàn. Le profil de couche limite est logarithmique:

$$u_x = \frac{u_*}{\kappa} \ln \left(\frac{z}{z_0} \right) \quad (5)$$

où z_0 est une constante d'intégration homogène à une longueur et appelée rugosité hydrodynamique.

2.2 Rugosité hydrodynamique et couche de surface

La rugosité hydrodynamique est par définition, la hauteur à laquelle la vitesse semble s'annuler, si l'on prolonge le profil logarithmique très près du sol. Dans le cas où le lit sédimentaire serait très lisse, la zone très près du sol, appelée couche de surface, est laminaire tandis que celle loin du sol est turbulente. La transition se fait à un nombre de Reynolds transitionnel: $z u_x / \nu = \mathcal{R}_t \simeq 125$ et conduit à la relation suivante entre rugosité hydrodynamique et vitesse:

$$z_0 = \sqrt{\mathcal{R}_t} \exp \left(-\kappa \sqrt{\mathcal{R}_t} \right) \frac{\nu}{u_*} \quad (6)$$

Si la rugosité effective due à la sous-couche limite visqueuse est plus petite que la rugosité physique du sol (la taille des grains d pour ce qui nous concerne), alors z_0 est déterminé par cette dernière. Pour un lit de grains statique parfaitement plat, on trouve expérimentalement, $z_0 \simeq d/10$. Cela donne typiquement des rugosités hydrodynamiques de l'ordre de la dizaine de μm . Cela signifie qu'entre la vitesse u_x du vent mesurée à 10 m du sol et u_* , il y a un facteur 35 environ: une valeur de u_* de 1 m/s correspond donc à un vent de 125 km/h! Il convient de s'habituer à cette double idée que la vitesse du vent varie quand on change d'échelle (on pourrait argumenter que pour le physicien, le logarithme est essentiellement une constante) et que la vitesse de cisaillement est beaucoup plus petite que la vitesse du vent usuelle. En présence de rides de sable, z_0 peut être beaucoup plus grand, de l'ordre du mm. A l'échelle kilométrique de la couche limite planétaire, il est probable que les dunes elles-mêmes déterminent la rugosité du sol.

Il existe une grande variété de processus pouvant, au sein de la couche de surface, déterminer la rugosité du sol. Nous avons déjà évoqué la viscosité dans le cas d'un sol lisse. Dans le cas d'un sol rugueux immobile, au delà du cas des grains, la rugosité hydrodynamique z_0 croît comme le carré de l'amplitude de la corrugation, car il s'agit d'un effet non-linéaire. On peut penser à d'autres systèmes comme un champ de blé ou les vagues sur la mer pour lesquelles le "sol" bouge sous l'effet du vent, ce qui modifie la couche de surface et par conséquent, la totalité de l'écoulement. Dans le cas d'un transport de sédiments suffisamment intense pour que, l'écoulement accélérant les grains, ceux-ci décélèrent en retour celui-là, la rugosité hydrodynamique devient une fonction de la quantité de grains transportée. Ainsi, en présence de transport par charriage, le lit d'une rivière sableuse présente une rugosité millimétrique et non de l'ordre de la dizaine de microns.

2.3 Ecoulement au dessus d'un relief

La structure de l'écoulement turbulent se trouve modifiée par la présence d'obstacles – en particulier les dunes, que nous évoquerons dans le dernier chapitre. La figure ?? montre la structure de l'écoulement moyen au dessus d'un relief sinusoidal, telle qu'elle peut être calculée à partir d'une équation de clôture turbulente (Jackson & Hunt 1975, Hunt *et al.* 1988, Andreotti *et al.* 2002, Kroy *et al.* 2002, Fourrière *et al.* 2009). Il peut se décomposer en trois couches superposées qui diffèrent par les mécanismes hydrodynamiques mis en jeu:

- La couche externe a une extension verticale de l'ordre de la taille horizontale de l'obstacle. Le mélange de quantité de mouvement lié aux fluctuations turbulentes y est négligeable comparé au transport induit par le gradient de pression. Dès lors, cette couche externe peut être décrite comme un écoulement potentiel non-visqueux. Pour un relief sinusoidal de longueur d'onde λ , la vitesse décroît exponentiellement sur une hauteur égale à λ . Elle est maximale en haut des bosses et minimale dans les creux. En effet, l'écoulement dans cette zone présente la même symétrie que l'obstacle.
- Dans la couche interne, les échanges de quantités de mouvement mettent à nouveau en jeu le gradient de pression, mais cette fois celui-ci s'équilibre avec la contrainte de cisaillement turbulente et non plus avec l'inertie. L'extension verticale ℓ de cette couche peut être déterminée dimensionnellement:

$$\mathcal{O}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) \approx \rho_f \frac{[u^f(\ell)]^2}{\lambda} = \mathcal{O}\left(\frac{\partial \tau}{\partial z}\right) \approx \rho_f \frac{u_*^2}{\ell} \quad (7)$$

ℓ suit donc la loi d'échelle (Taylor *et al.* 1987):

$$\frac{\ell}{\lambda} \ln^2 \frac{\ell}{z_0} \sim \kappa^2. \quad (8)$$

Au sein de la couche interne, on retrouve localement un profil logarithmique de la même forme que celui discuté précédemment. A l'interface entre couches interne et externe, les trois effets (inertie, pression et contrainte turbulente) coexistent. La vitesse du fluide ne s'ajuste pas instantanément à un changement de contrainte de cisaillement. L'inertie induit

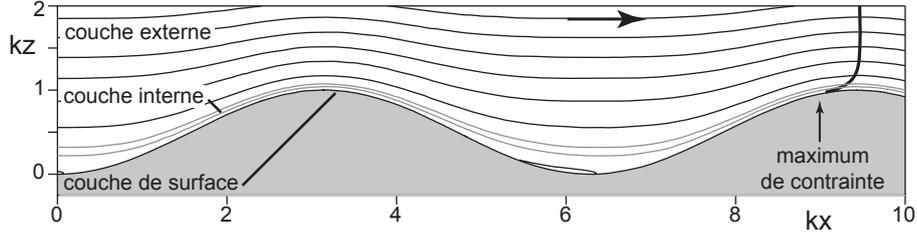


FIG. 3 – Lignes de courant moyennes autour d'un relief ondulé.

donc un retard de phase de la vitesse sur la contrainte. Autrement dit, le maximum de contrainte est toujours atteint avant le maximum de vitesse, comme le montre la figure ???. Nous verrons que cet effet est à l'origine de la formation des dunes.

- La couche de surface, discutée plus haut, détermine la rugosité hydrodynamique z_0 . Elle peut être cependant significativement plus grande que celle-ci.

3 Rides éoliennes

Les rides éoliennes constituent l'un des exemples caractéristiques de l'émergence spontanée de motifs (pattern). Considérons le cas d'un lit de sable horizontal idéalement plat. L'expérience montre que les rides apparaissent spontanément par instabilité linéaire du lit. Tous les modes instables se propagent dans la direction du vent, de sorte qu'il s'agit d'une instabilité convective. La longueur d'onde moyenne λ croît avec la vitesse du vent u_* , avec la taille des grains d et avec le rapport de densité entre les grains et l'atmosphère environnante. Ainsi, la longueur d'onde d'apparition des rides peut varier de quelques centimètres juste au dessus du seuil de transport à plusieurs dizaines de centimètres par fort vent. On constate également que les rides éoliennes sur Mars présentent des longueurs d'onde de l'ordre du mètre alors même que les vents sont rarement suffisamment intenses pour y arracher des grains.

Bien qu'il existe un certain nombre de descriptions phénoménologiques de l'évolution des rides éoliennes, la compréhension des mécanismes d'instabilité reste parcellaire. Nous développons ici un modèle incomplet (Anderson 1987, 1990), dont le mérite est d'identifier le mécanisme vraisemblablement responsable de l'instabilité. On considère que les grains en saltation forment une pluie homogène couchée d'un angle α sur l'horizontale. Lorsque le lit présente un relief $h(x)$, les parties au vent reçoivent plus d'impacts que les parties sous le vent. Par un simple bilan géométrique, le flux de saltation s'exprime comme:

$$\phi_{\text{sal}} = \frac{\phi_0}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2}} \left(1 + \frac{1}{\tan \alpha} \frac{\partial h}{\partial x}\right) \quad (9)$$

Considérons que chaque grain en saltation éjecte N grains en reptation, dont les longueurs de saut sont distribuées selon une loi $\mathcal{P}(a)$. Le flux de reptation s'écrit, à l'ordre linéaire en pente:

$$\phi_{\dagger}^r = N \phi_{\text{sal}} = N \phi_0 \left(1 + \frac{1}{\tan \alpha} \frac{\partial h}{\partial x}\right) \quad (10)$$

La solution de base étant homogène en espace et en temps ($h = 0$ et ϕ_{\dagger}^r constant), les solutions du problème linéarisé sont des superpositions de modes de Fourier. On peut, en toute généralité, considérer une solution de la forme:

$$h = h_0 \exp(\sigma t + ik(x - ct)) \quad (11)$$

où σ est le taux de croissance du mode de nombre d'onde k et c sa vitesse de phase. Après simplification par h , l'équation de conservation de la matière donne directement la relation de

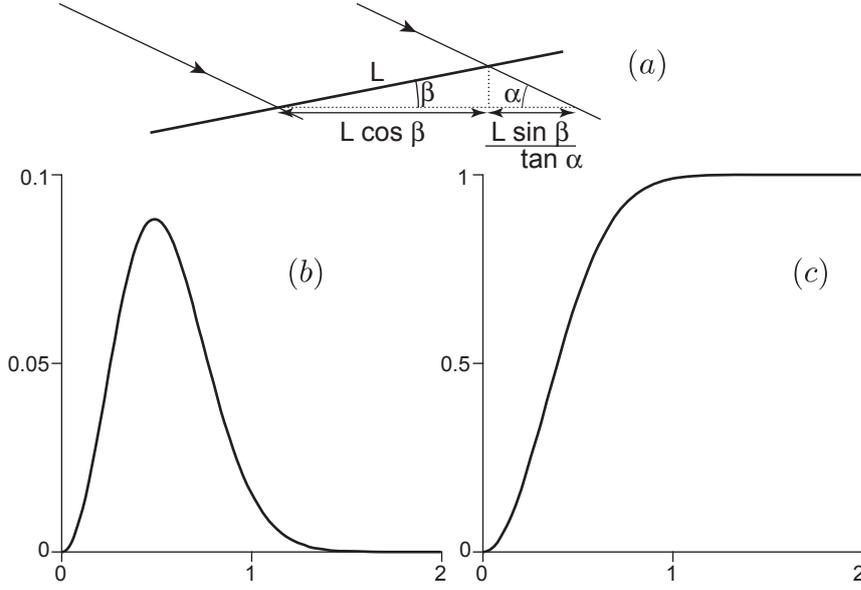


FIG. 4 – Modèle d’Anderson pour les rides éoliennes. (a) Relation entre le flux de grains en saltation impactant le sol avec un angle α et la pente de ce dernier, $\tan \beta = \frac{\partial h}{\partial x}$. (b) Taux de croissance adimensionné $\frac{\bar{a} \tan \alpha}{N \phi_0} \sigma$ en fonction du nombre d’onde k normalisé par la longueur de reptation moyenne \bar{a} . (c) Vitesse de propagation adimensionnée $\frac{\tan \alpha}{N \phi_0} c$ en fonction du nombre d’onde $k\bar{a}$.

dispersion:

$$\sigma - ikc = -ik \frac{N\phi_0}{\tan \alpha} \left(1 - \int da \mathcal{P}(a) \exp(-ika) \right) \quad (12)$$

Considérons par exemple une distribution gaussienne de moyenne \bar{a} et d’écart type σ : $\mathcal{P}(a) \simeq e^{-(a-\bar{a})/2\sigma^2}$. On obtient alors:

$$\sigma = \frac{N\phi_0}{\bar{a} \tan \alpha} k\bar{a} \sin(k\bar{a}) \exp\left(-\frac{\sigma^2 k^2}{2}\right) \quad (13)$$

$$c = \frac{N\phi_0}{\tan \alpha} \left[1 - \cos(k\bar{a}) \exp\left(-\frac{\sigma^2 k^2}{2}\right) \right] \quad (14)$$

$$(15)$$

Ce modèle prédit donc l’existence d’une instabilité convective, quelle que soit la vitesse du vent. Dans la réalité, les rides ne forment pas un motif régulier lors de leur apparition. Il n’y a donc pas à proprement parler de longueur d’onde mais une plage de longueurs d’onde instables. Les fluctuations initiales du lit présentant *a priori* toutes les fréquences spatiales, la longueur d’onde moyenne (la distance moyenne inter-crêtes) correspond au maximum de taux de croissance de l’instabilité. Dans le modèle d’Anderson, ce critère prédit une longueur d’onde λ proportionnelle à la longueur de reptation moyenne \bar{a} . La figure 4 montre une série de mesures expérimentales de la longueur d’onde initiale λ (Andreotti *et al.* 2006). Celle-ci croît linéairement avec la vitesse du vent, atteint quelques tailles de grains d près du seuil de transport et quelques 1000 d par fort vent. Par comparaison, la longueur de reptation, vaut, au plus, quelques tailles de grain d .

Très rapidement, l’amplitude des rides devient suffisamment grande pour qu’il y ait un phénomène d’écrantage: les rides fusionnent progressivement en formant un motif de plus en plus régulier dont la longueur d’onde devient de plus en plus grande. Enfin, la longueur d’onde sature et le système atteint dans son ensemble un état stationnaire – au moins pris dans sa globalité. La longueur d’onde finale croît également avec la vitesse du vent (Fig. 5). Le rapport d’aspect des rides ‘matures’ est une constante ($A/\lambda \sim ?$) qui ne dépend ni de la taille des grains, ni de la force du vent.

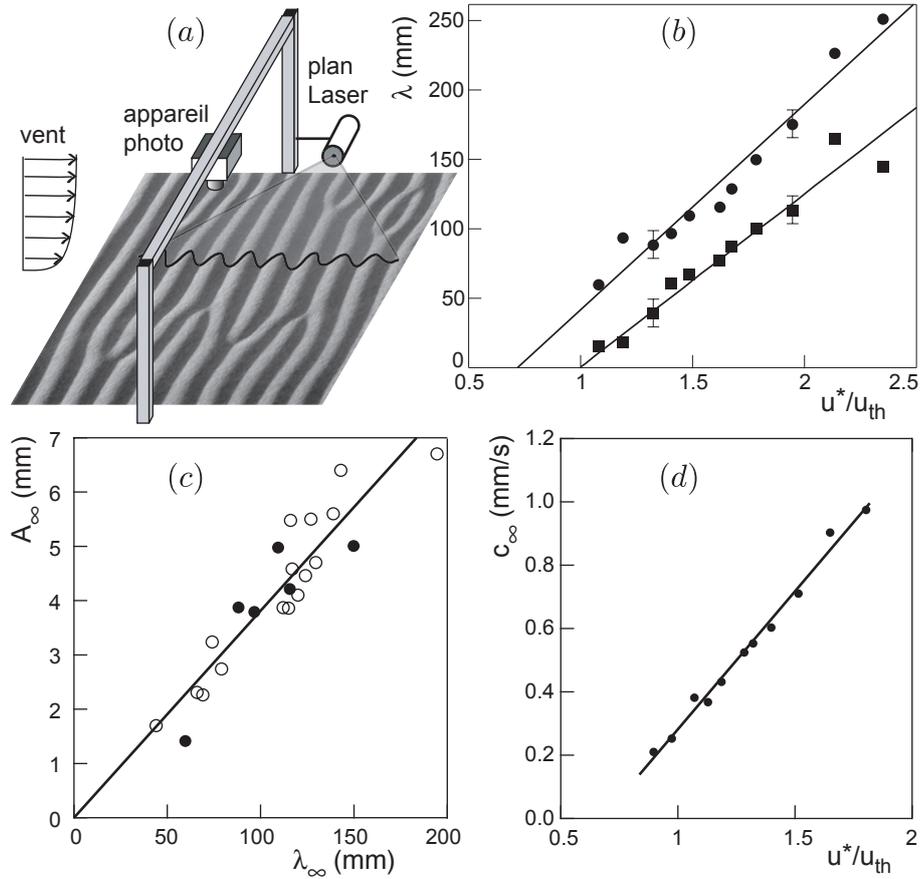


FIG. 5 – Dépendances des caractéristiques des rides éoliennes vis-à-vis de la taille du vent. a) Schéma de principe de l'expérience. b) Longueur d'onde initiale et finale en fonction de u^*/u_{th} . c) Relation de proportionnalité entre amplitude et longueur d'onde. d) Vitesse de propagation des rides mures en fonction de u^*/u_{th} .

Dernière propriété, la vitesse de propagation des rides 'matures' croît avec la vitesse du vent. Dans tous les cas, le transport induit par le déplacement des rides est négligeable par rapport au transport global. Cela signifie que les faces sous le vent des rides ne constituent pas des pièges pour les grains: les rides ne font que moduler le transport.

En réalité, la longueur d'onde observée à grand temps lorsque l'on part d'un lit plat (6a) n'est pas la seule configuration stable du système. Autour de celle-ci, il existe une plage de longueurs d'onde pour lesquelles une solution stable existe (6b). Toutefois, si la longueur d'onde est trop petite (6c), le processus de mûrissement par fusion se manifeste; si la longueur d'onde est trop grande, les rides se comportent localement comme un lit plat de sorte qu'elles se re-déstabilisent linéairement à la longueur d'onde initiale (6d). Autrement dit, le motif des rides présente une robustesse vis-à-vis des changements de vent. Si le vent change modérément, le motif peut rester le même. Si il baisse trop, des petites ridules apparaissent sur le dos des grandes. Si il augmente trop, le processus de fusion reprend, conduisant à une augmentation de longueur d'onde. Puisqu'au final, il existe une plage de solutions de différentes longueur d'onde, de quoi dépend la longueur d'onde finale que l'on observe? Pour que le motif se réarrange, il faut qu'il présente des défauts par rapport à la périodicité. Plus le motif initial est désordonné, plus il atteint une grande longueur d'onde.

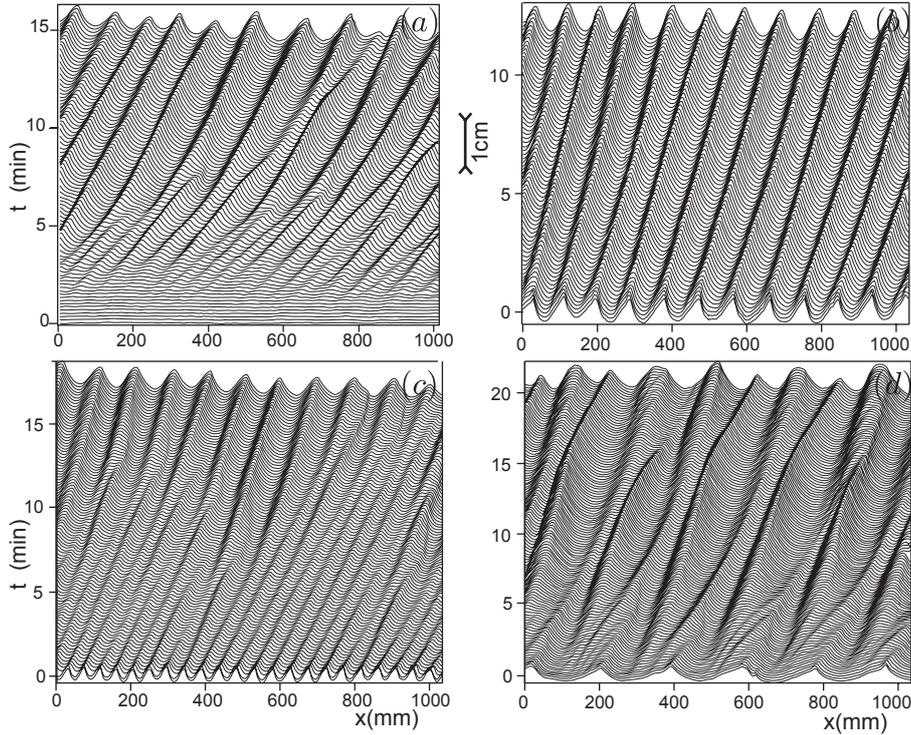


FIG. 6 – Diagramme spatio-temporel montrant l'évolution de rides éoliennes, pour une même vitesse de vent, mais différentes conditions initiales (Andreotti *et al.* 2006). (a) Démarrage avec un lit de sable plat. (b) Démarrage avec un motif périodique gravé à une longueur d'onde dans la bande stable. (c) Démarrage avec un motif périodique de petite longueur d'onde. (d) Démarrage avec un motif périodique de grande longueur d'onde.

4 Vitesse de propagation des dunes

4.1 Relation de Bagnold

Comme nous l'avons déjà évoqué, un écoulement turbulent ne possède pas d'échelle propre – en particulier, la viscosité est totalement inefficace à grande échelle pour dissiper l'énergie de l'écoulement. L'écoulement autour d'un relief de forme donnée est donc invariant d'échelle. Cela signifie que la vitesse du vent au sommet d'une dune est indépendante de la taille λ de la dune: elle ne dépend que de sa forme. Chacun a pu constater que le vent est plus fort au sommet d'une montagne; il n'est cependant pas dix fois plus fort qu'au sommet d'une colline dix fois plus petite. A proprement parler, l'invariance d'échelle n'est pas stricte puisque la rugosité du sol z_0 introduit une échelle de longueur. Cependant celle-ci ne joue qu'au travers de corrections logarithmique en $\ln(\lambda/z_0)$.

Comme le montre la fig ??, la présence de la dune induit un pincement des lignes de courant, ce qui correspond à une augmentation de la vitesse de l'écoulement le long du dos (Jackson & Hunt 1975, Wiggs *et al.* 1996, Lancaster *et al.* 1996, Wiggs 2001). Par conséquent, le flux de grains transportés croît également ce qui se traduit par une érosion du dos de la dune. Les grains arrachés se déposent au sommet de la face d'avalanche où ils forment une congère. Lorsque la pente devient localement plus grande que la pente de démarrage spontanée, une avalanche nucléée spontanément qui se propage le long de la pente, maintenant cette dernière en permanence autour du coefficient de friction dynamique. Ce déplacement de grains se traduit par une propagation globale de la dune. Il convient de réaliser qu'il ne s'agit pas d'un déplacement en bloc: le transport a seulement lieu à la surface de la dune. De ce fait, la 'vie' d'un grain est extrêmement intermittente. Lorsqu'il

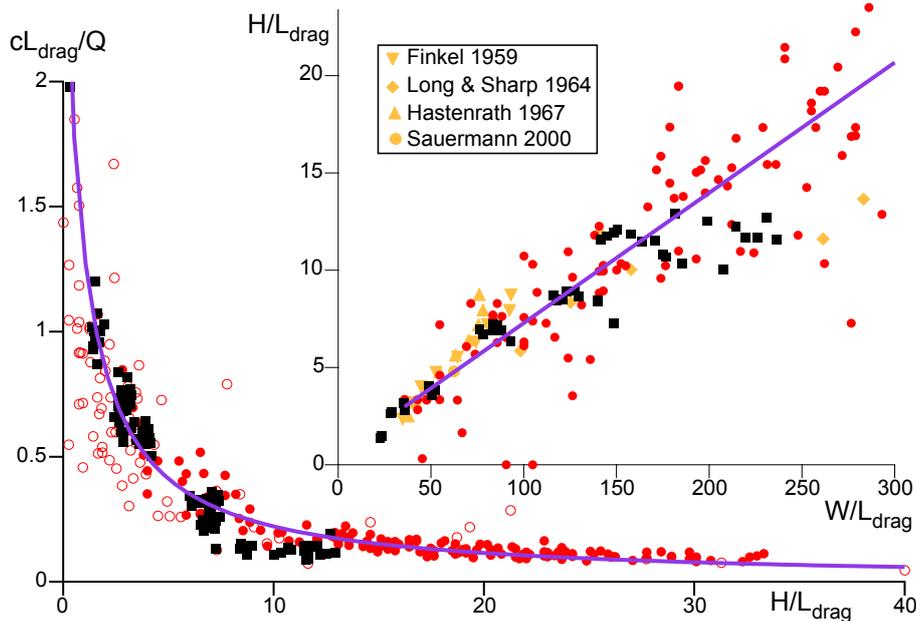


FIG. 7 – (a) Relation entre la vitesse c des dunes et leur hauteur H . (b) Relation entre hauteur H et largeur W des dunes barkhanes.

apparaît à la surface de la dune, il se met en mouvement et après quelques sauts et une avalanche, se retrouve quelque-part au milieu de la face d’avalanche. Là, il reste immobile le temps que la dune aie avancé au point où il est à nouveau libéré en surface. Et ainsi de suite.

Considérons le flux q de grains qui traverse la crête. Par définition, q est le volume de grains (à la compacité de la dune) qui traverse par unité de temps entre deux lignes verticales séparées d’une distance unité. Par conservation de la matière, ce flux est relié à la vitesse de propagation c et à la hauteur H de la dune par:

$$c = \frac{q}{H} \quad (16)$$

On peut maintenant utiliser l’invariance d’échelle, qui stipule que, à forme donnée, la vitesse du vent à la crête de la dune ne dépend pas de la hauteur H . Dans la réalité, les dunes suffisamment grandes pour présenter une face d’avalanche ont des morphologies assez similaires. En particulier, la largeur des dunes est de l’ordre de $15 H$ et leur longueur de l’ordre de $12 H$. En conséquence, la vitesse c est inversement proportionnelle à la taille de la dune. Considérons le cas des barkhanes du Sahara Atlantique pour lesquelles, en moyenne, le flux à la crête vaut $300 \text{ m}^2/\text{an}$. Cela signifie qu’une petite dune de hauteur $H = 1 \text{ m}$ parcourt $300 \text{ m}/\text{an}$, une grande dune de hauteur $H = 10 \text{ m}$ parcourt $30 \text{ m}/\text{an}$ et une méga-barkhane de hauteur $H = 50 \text{ m}$ parcourt $6 \text{ m}/\text{an}$. Le temps de résidence moyen des grains dans ces trois dunes vaut respectivement 1 mois, 8 ans et 2 siècles. La figure 7

4.2 Origine de la forme des dunes barkhanes

La figure 8 montre des photographies de barkhanes à l’équilibre, dans l’air et dans l’eau. La relation entre vitesse et hauteur de dune permet d’expliquer simplement la forme de croissant et le fonctionnement de ces dunes. Il est bon, pour commencer, de rappeler que le vent souffle depuis la partie en pente douce de la dune, appelée le dos, vers la partie à l’angle d’avalanche. Les barkhanes se propagent donc les cornes en avant, sur un sol dur. Considérons d’abord l’idée simpliste selon laquelle chaque tranche longitudinale de dune se comporte comme une dune transverse. Cela revient à considérer que la vitesse du vent au dessus de la dune reste toujours selon un même axe et qu’il n’y a donc pas de flux transverse à l’axe longitudinal de la barkhane. Considérons une

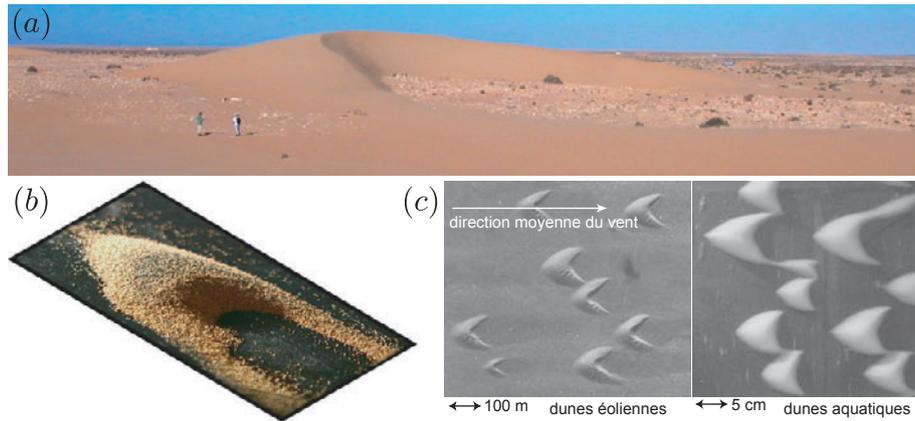


FIG. 8 – Comparaison de la morphologie des dunes barchanes dans l'air et dans l'eau. (a) Barchane éolienne du Sahara Atlantique. (b) Barchane sous-marine. (c) Comparaison de champs de barchanes éoliennes et sous-marines.

condition initiale constituée d'un tas axisymétrique. Les parties latérales du tas étant plus basses que sa partie centrale, elles se propagent plus vite. Rapidement, donc, le tas va prendre une forme de croissant qui se déforme de plus en plus. En réalité, il existe deux sources de couplage entre les différentes tranches de dunes: le vent est légèrement défléchi latéralement pour contourner l'obstacle; de plus, il existe une composante du flux de reptation orienté selon la plus grande pente. Ces mécanismes induisent un transfert de flux sableux entre les parties centrales et les parties latérales, qui ramènent celles-ci à la vitesse de celles-là. La barchane se propage alors sans se déformer. Les barchanes constituent des systèmes ouverts du point de vue du flux sableux. En effet, la face d'avalanche ne couvre pas toute la largeur de la dune de sorte que les cornes perdent en permanence du sable. Ce flux de sortie est compensé par un flux de sable réparti sur toute la largeur de la dune, en provenance des cornes des dunes en amont de celle considérée.

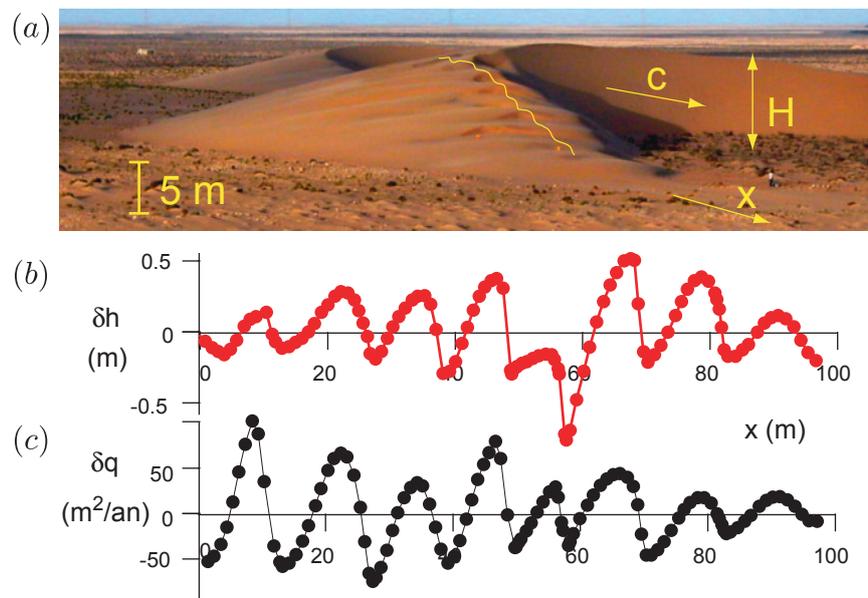


FIG. 9 – (a) Instabilité linéaire sur les flancs d'une barchane de grande taille. (b) Coupe montrant la perturbation du relief et du flux.

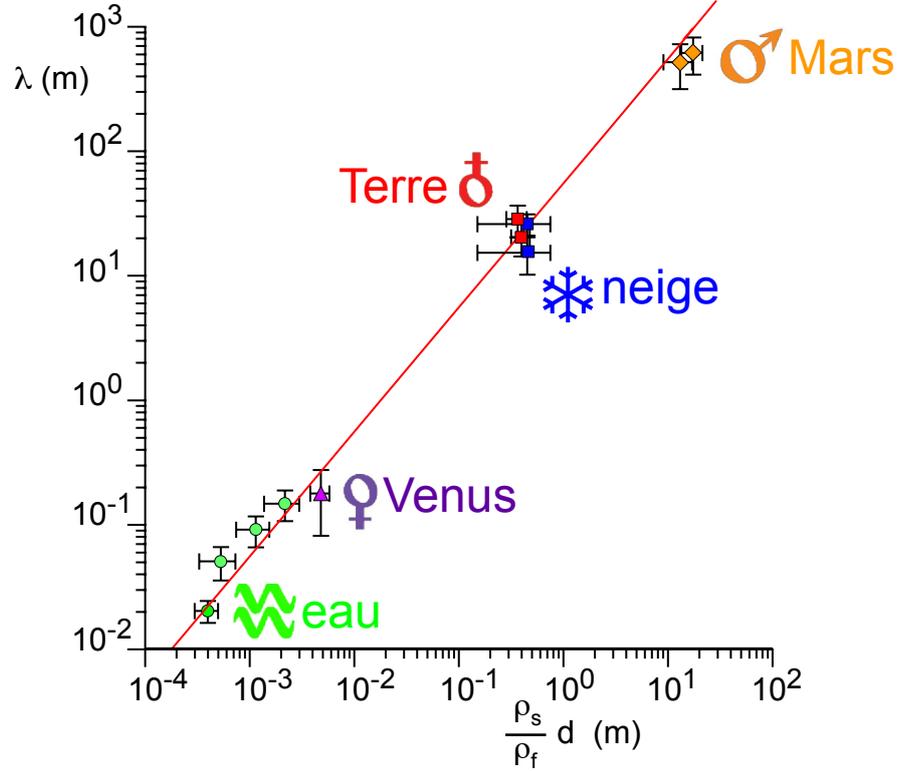


FIG. 10 – Mesures de la longueur d’onde des dunes élémentaires, formées par instabilité linéaire, en fonction du rapport de densité entre les grains et le fluide environnant, multiplié par la taille des grains.

5 Instabilité linéaire de formation des rides aquatiques et des dunes éoliennes

Lorsqu’un lit de sable plat est soumis à un écoulement, au dessus du seuil de transport, il se déstabilise pour formée des rangées périodiques de dunes transverses (Fig. 9). L’existence d’une longueur d’onde de déstabilisation λ_m suppose qu’il existe une échelle de longueur caractéristique. De la même manière, l’existence d’une taille minimale au dessous de laquelle il n’existe pas de barkhane ($\simeq 10$ m de long au Sahara Atlantique) implique une brisure de l’invariance d’échelle et donc la présence d’une échelle de longueur. Vu que la turbulence est invariante d’échelle, aux effets logarithmiques près, cette longueur ne peut provenir que du transport de particules. Nous avons vu dans le chapitre précédent que les processus d’érosion et de déposition peuvent être décrits avec un même formalisme, quel que soit le mode de transport. Une seule longueur caractéristique intervient dans cette description: la longueur de saturation L_{sat} du flux de sédiments (Hersen *et al.* 2002). Il est donc naturel que cette longueur intervienne dans la loi d’échelle gouvernant la longueur d’onde la plus instable.

Comme nous l’avons aperçu dans le chapitre précédent, l’instabilité de formation des dunes provient de l’existence d’un déphasage entre la contrainte basale et le relief, dû aux effets inertiels (Kennedy 1963, Richards 1980). La contrainte sur un relief arbitraire de faible amplitude s’obtient par superposition des modes de Fourier. On note d’un \wedge , la transformée de Fourier et, lorsque la notation complexe est utilisée, il convient d’en prendre la partie réelle. Dans la mesure où l’écoulement turbulent ne possède pas d’échelle propre, hormis la rugosité du sol, l’analyse

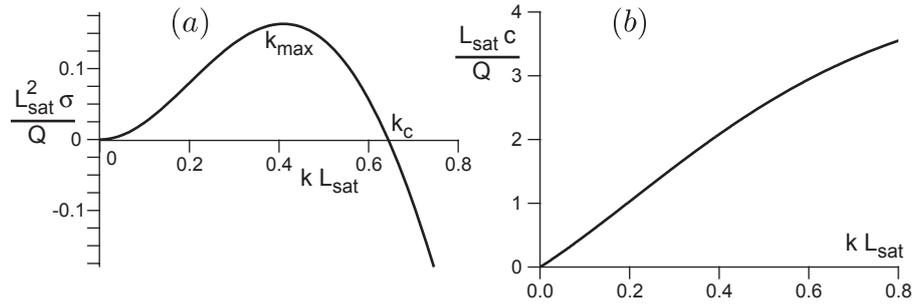


FIG. 11 – Dispersion de relation de l’instabilité linéaire formant les dunes éoliennes et les rides aquatiques.

dimensionnelle nous permet d’écrire la perturbation de contrainte sous la forme:

$$\hat{\tau} = \rho_f u_*^2 (A + iB) k \hat{h}$$

où h est le profil de hauteur du lit et k est le nombre d’onde considéré. A désigne la composante de la contrainte en phase avec le relief et B la composante en quadrature. Etant donnés les taux de croissance typiques de l’instabilité, l’écoulement autour de la dune peut être considéré comme stationnaire pour déterminer A et B . De manière générique, dans le régime turbulent, A et B sont positifs; ils dépendent très faiblement (logarithmiquement) de kz_0 et peuvent être considérés comme constants en pratique. Cela signifie que la vitesse d’écoulement au dessus d’une bosse est plus grande qu’en son absence ($A > 0$), ce qui provient directement du pincement des lignes de courant. Par ailleurs, le maximum de contrainte est situé en amont du sommet de la bosse ($B > 0$).

On considère une forme générique de loi entre flux de sédiments saturé et contrainte:

$$q_{\text{sat}} = \chi \tau^\gamma (\tau - \tau_{\text{th}}). \quad (17)$$

ainsi qu’un flux de référence $Q = (\gamma + 1) \chi (\rho u_*^2)^{(\gamma+1)}$ permettant d’adimensionner les résultats. Nous avons vu au chapitre précédent que le seuil de transport en contrainte dépend de la pente du lit. A l’ordre linéaire, on peut écrire:

$$\hat{q}_{\text{sat}} = \frac{\partial q_{\text{sat}}}{\partial \tau} \rho u_*^2 (A + iB) k \hat{h} + \frac{\partial q_{\text{sat}}}{\partial \tau_{\text{th}}} \frac{\tau_{\text{th}}}{\mu} i k \hat{h} = Q(a + ib) k \hat{h} \quad (18)$$

où les coefficients a et b valent:

$$a = A - \frac{\gamma A}{1 + \gamma} \frac{u_{\text{th}}^2}{u_*^2} \quad \text{et} \quad b = B - \frac{\gamma B + \mu^{-1}}{1 + \gamma} \frac{u_{\text{th}}^2}{u_*^2}$$

Lorsque la vitesse d’écoulement est asymptotiquement grande ($u_* \gg u_{\text{th}}$), les effets de pente sont négligeables de sorte que a tend vers A et b vers B , indépendamment de γ et μ . Les composantes a et b du flux saturé en phase et en quadrature avec le relief traduisent donc l’effet de l’écoulement sur le transport, corrigé des effets gravitaires liés à la pente. Le flux transporté relaxe vers sa valeur saturée avec un retard spatial L_{sat} :

$$i k L_{\text{sat}} \hat{q} = \hat{q}_{\text{sat}} - \hat{q} \quad (19)$$

En injectant la forme générale de solution,

$$h = h_0 \exp(\sigma t + i k (x - ct)) \quad (20)$$

dans la conservation de la matière $\partial_t Z + \partial_x q = 0$, on obtient finalement la relation de dispersion:

$$\sigma - i k c = -i k \frac{\hat{q}}{\hat{h}} = -\frac{i k}{1 + i k L_{\text{sat}}} \frac{\hat{q}_{\text{sat}}}{\hat{h}} = -\frac{i Q (a + ib) k^2}{1 + i k L_{\text{sat}}}$$

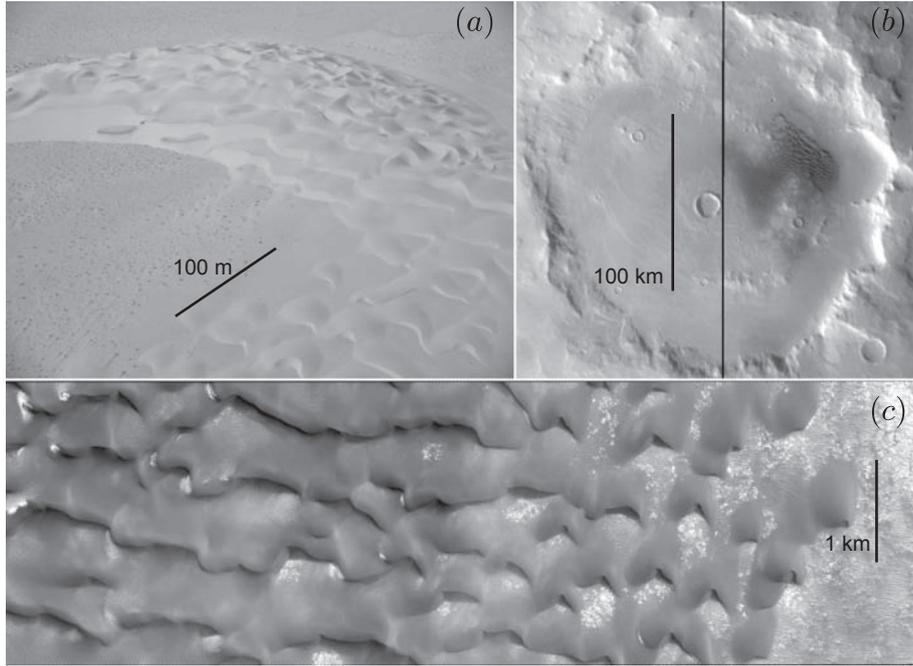


FIG. 12 – Comparaison des morphologies dunaires observées sur Mars et sur Terre.

En faisant apparaître la longueur de saturation L_{sat} comme longueur caractéristique et le rapport L_{sat}^2/Q comme temps caractéristique, on obtient le taux de croissance σ et la vitesse de propagation c des dunes:

$$\frac{L_{\text{sat}}^2 \sigma}{Q} = \frac{(kL_{\text{sat}})^2 (b - akL_{\text{sat}})}{1 + (kL_{\text{sat}})^2} \quad (21)$$

$$\frac{L_{\text{sat}} c}{Q} = \frac{(kL_{\text{sat}})(a + bkL_{\text{sat}})}{1 + (kL_{\text{sat}})^2} \quad (22)$$

On a affaire à une instabilité convective à grande longueur d'onde (Fig. 11). Le nombre d'onde de coupure k_c de cette instabilité est donné par:

$$k_c L_{\text{sat}} = \frac{b}{a}. \quad (23)$$

Il s'interprète simplement en termes de déphasages. Le maximum de contrainte hydrodynamique est situé à une distance $\lambda B/(2\pi A)$ en amont du sommet de la sinusoïde considérée. En incluant les effets de pente, on obtient la position du maximum de flux saturé, situé également en amont du sommet, à une distance $\lambda b/(2\pi a)$. Le flux réel répond avec du retard aux variations de contraintes. Le maximum de flux est donc lui situé à une distance $\lambda b/(2\pi a) - L_{\text{sat}}$ du sommet. Or ce maximum sépare la zone d'érosion, en amont, de la zone de déposition, en aval. Une perturbation croît si son sommet se situe dans la zone de déposition. Il y a alors non seulement propagation de la perturbation (le dos est érodé et le sable prélevé se dépose en aval) mais aussi accumulation de sable au sommet donc amplification.

Près du seuil, (pour $u_* \simeq u_{\text{th}}$), a tend vers $A/(1 + \gamma)$ et b vers $(B - \mu^{-1})/(1 + \gamma)$. Si μB est plus petit que 1, alors b est négatif au seuil et il n'y a donc plus d'instabilité. En d'autres termes, il existe alors un seuil d'instabilité distinct du seuil de transport. En considérant que a et b ne dépendent que très faiblement de kz_0 , on peut calculer explicitement le mode le plus instable, k_{max} :

$$k_{\text{max}} L_{\text{sat}} \simeq X^{-1/3} - X^{1/3} \quad \text{with} \quad X = -\frac{b}{a} + \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2}. \quad (24)$$

Dans la mesure où l’instabilité est convective, il faut en principe calculer le taux de croissance spatial. Dans ce cas particulier, les résultats sont pratiquement identiques, que l’on considère l’instabilité spatiale ou temporelle.

Nous avons vu précédemment que la vitesse de propagation d’une dune est donnée par la différence de flux entre creux et crête rapportée à la différence de hauteur. A grande longueur d’onde, cette relation nous donne une loi d’échelle en $c \propto Q/\lambda$, pour les dunes de hauteur infinitésimale (Fig. 11). La relation entre vitesse c et hauteur H de dune décroît donc comme $1/H$ à grande hauteur mais tend vers une constante à $H = 0$ (Fig. 7). A u_*/u_{th} donné, cette analyse prédit une longueur d’onde la plus instable proportionnelle à la longueur de saturation. Nous avons vu dans le chapitre précédent que pour la saltation, la longueur de saturation provient de l’inertie des grains. En conséquence la longueur d’onde sélectionnée vérifie, en première approximation, la loi d’échelle suivante:

$$\lambda_{\max} \propto \frac{a}{b} \frac{\rho_s}{\rho_f} d, \quad (25)$$

Cette loi traduit l’essence de l’instabilité: le mécanisme déstabilisant (associé terme b/a) est d’origine hydrodynamique et le terme stabilisant (associé au terme $\frac{\rho_s}{\rho_f} d$) provient du transport de grains. La figure 10 présente des mesures effectuées dans des environnements très différents, avec des grains de différentes tailles (Claudin & Andreotti 2006). Les longueur d’ondes en situations naturelles ont été faites sur des zones de dunes transverses naissantes, reconnaissables à leur morphologies (Fig. 12). La longueur d’onde s’entend comme la distance moyenne de crête à crête, ce qui n’exclut pas une distribution relativement large. Les dunes du Sahara Atlantique se forment avec une taille de l’ordre de 20 m, pour une taille de grain d de l’ordre de 180 μm (Elbelrhiti *et al.* 2005). Les dunes de neige se forment lorsque une tempête de poudreuse dépose des flocons de l’ordre du *cm* (Fahnestock *et al.* 2000, Frezzotti *et al.* 2002), mais très peu denses, sur le sol gelé (Antarctique et mer Baltique). La longueur d’onde est alors de l’ordre de la dizaine de mètres, ce qui s’explique par le fait que le produit $\rho_s d$ est sensiblement le même que pour le sable. Les dunes Martiennes (Fig. 12) se forment dans une atmosphère de CO_2 très diluée, avec des grains légèrement plus petits que sur Terre. Il s’ensuit que les dunes élémentaires sont beaucoup plus grandes, de l’ordre de 600 m. Des expériences dans le CO_2 près du point critique ont été menées pour reproduire les conditions à la surface de Venus. Dans cette atmosphère 100 fois plus denses que l’air, les dunes élémentaires se forment avec une longueur d’onde de l’ordre de la dizaine de centimètres. Enfin, dans l’eau, en régime turbulent, nombre d’expériences ont été conduites qui montrent des longueur d’ondes centimétriques. Soulignons en conclusion que cette loi d’échelle ne prétend rendre compte que du facteur dominant et non du détail. En particulier, les effets de pente se traduisent par des dépendances des coefficients a et b vis-à-vis de la vitesse d’écoulement. Cet effet étant stabilisant, la longueur d’onde sélectionnée croît lorsqu’on se rapproche du seuil de transport. Notons enfin que les coefficients hydrodynamiques A et B dépendent du nombre de Reynolds basé sur la taille des grains. Dans la mesure où l’instabilité provient des effets inertiels, les effets visqueux sont stabilisants et induisent, à nouveau, des longueurs d’onde de déstabilisation plus grandes.

6 Evolution non-linéaire des dunes et effets de taille finie

L’évolution non-linéaire d’un champ de dunes procède de multiples mécanismes superposés. Considérons pour commencer une rangée de dunes périodique venant de se former par instabilité linéaire. Lorsque le rapport d’aspect H/λ est asymptotiquement petit, nous avons vu que le maximum de contrainte se situe en amont du sommet. Lorsque la dune croît en amplitude, le rapport d’aspect H/λ augmente et le maximum de contrainte se déplace vers l’aval. Deux autres effets ont alors lieu. La dune devient asymétrique et, lorsque la pente devient localement plus grande que le coefficient de friction statique, une avalanche nucléée qui répartit le sable le long de la face d’avalanche. Par ailleurs, la couche limite se sépare de la dune et il se forme une bulle de recirculation. L’amplitude de la dune sature lorsque le maximum de flux, à une distance L_{sat} en aval du maximum de contrainte, atteint le sommet de la dune.

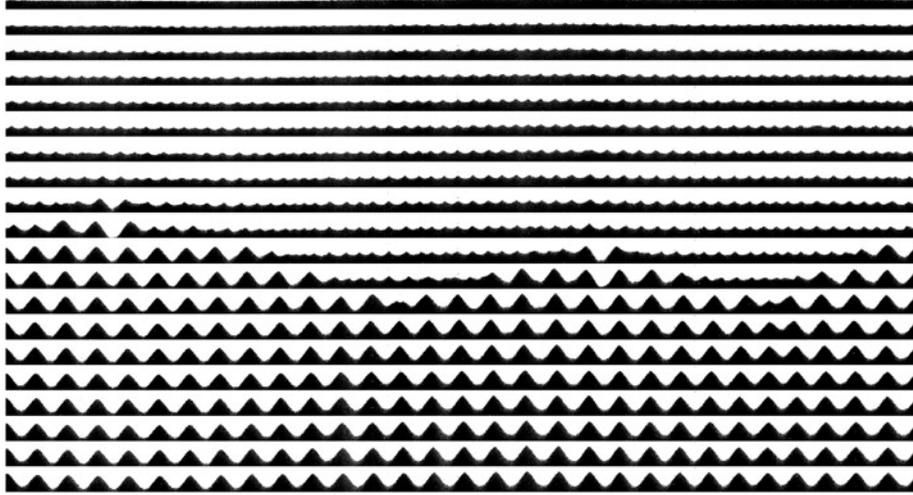


FIG. 13 – Diagramme spatio-temporel obtenu en représentant une photographie des rides au fond d'une cellule annulaire en fonction du temps. L'axe vertical a été dilaté pour les besoins de la visualisation.

Par ailleurs, les dunes ne se forment pas avec un motif totalement régulier: il existe un désordre intrinsèque à toute instabilité linéaire. Il se produit alors des réarrangement progressifs du champ de dunes (Andersen *et al.* 2001). On peut identifier deux processus simples. Tout d'abord, nous avons vu que les petites dunes sont plus rapides que les grandes. Elles rattrapent donc celles-ci, provoquant une fusion partielle et donc la formation d'une dune encore plus grande. Ce processus absorption conduit donc logiquement à une croissance perpétuelle de la taille des dunes (hauteur et longueur). D'autre part, le dos d'une grande dune ressemble à un lit plat et est donc instable vis-à-vis de la formation de nouvelles structures à la taille élémentaires. Il y a donc régénérescence permanente de dunes à l'échelle élémentaire (Elbelrhiti *et al.* 2005).

En réalité, différents processus peuvent venir arrêter cette évolution du motif dunaire. Considérons en successivement quelques-uns. Une variante des rides aquatiques ou des dunes éoliennes consiste à générer des structures à partir d'un écoulement alterné. Dans l'environnement naturel, cette situation se rencontre sur le lit sableux du fond des mers: la houle ou le clapot créent un écoulement quasi-sinusoidal sur le fond, dont l'amplitude A décroît exponentiellement avec le rapport de la hauteur d'eau sur la longueur d'onde des vagues. Au laboratoire, il est plus simple de faire osciller le lit sableux par rapport au liquide utilisé; il est possible de travailler soit dans une situation linéaire (plateau oscillant) soit en conditions au limites périodiques (cellule de Couette oscillante). L'instabilité linéaire du lit met en jeu un nouveau temps caractéristique, la pulsation Ω des oscillations. Dans la limite où Ω est petit devant le temps de saturation du transport, on se ramène au cas simple des rides, si ce n'est que l'on varie quasi-statiquement la vitesse de l'écoulement. Le taux de croissance résultant se calcule donc comme une moyenne pondérée des taux de croissance obtenus précédemment pour différents u_* . Lorsque Ω devient comparable au temps de saturation du flux, un nouveau régime apparaît dont l'analyse de stabilité linéaire n'a jamais été menée à ce jour. Le diagramme de la figure 13 montre l'évolution typique du motif ainsi formé. Pendant une première phase, la motif conserve la longueur d'onde initiale. Puis, une fusion de rides s'opère par nucléation hétérogène, qui induit par propagation une transition vers le motif périodique final, dont la longueur d'onde est déterminée par l'amplitude d'oscillation A . Ainsi, la longueur d'onde finale des rides au fond de la mer est petite, en eau peu profonde, lorsque la longueur d'onde des vagues est faible, et en eau profonde, dans le cas de la houle. Dans le cas de la houle en eau peu profonde, les longueurs d'ondes des rides peut atteindre plusieurs dizaines de mètres. On parle alors plutôt de trou d'eau, bien que l'origine soit la même.

Dans le cas des motifs au fond des rivières sableuses, l'écoulement est unidirectionnel. C'est

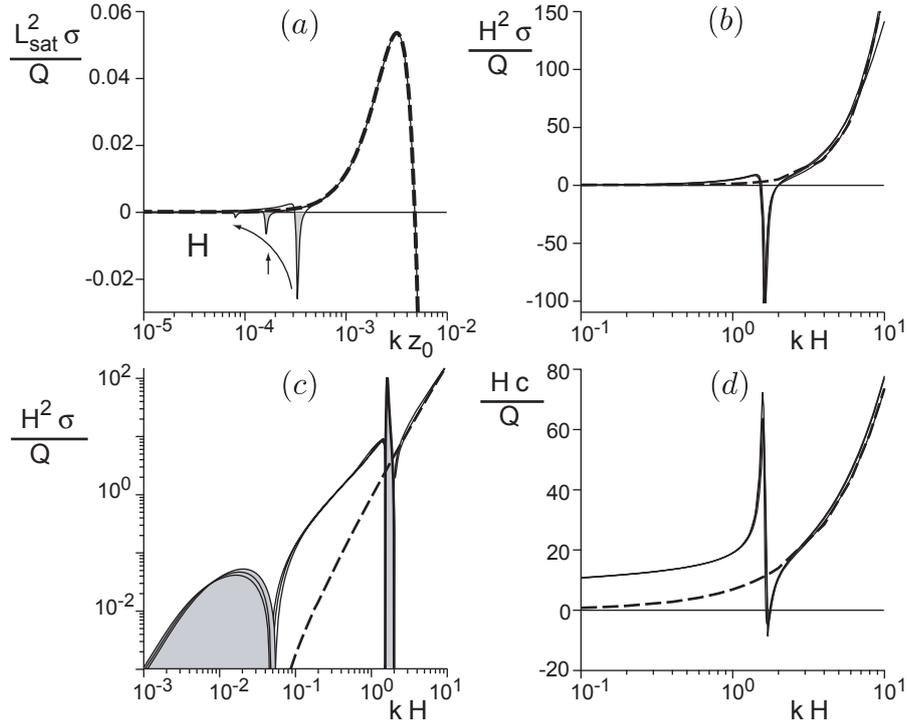


FIG. 14 – *Instabilité linéaire d’un lit de sable au fond d’une rivière de profondeur H : taux de croissance σ et vitesse de propagation c en fonction du nombre d’onde k , pour différentes valeurs de H/z_0 ($H/z_0 = 5000, 10000, 20000$). Les paramètres sont fixés à des valeurs typiques: nombre de Froude $\mathcal{F} = 0.8$; coefficient de friction $\mu = \tan 32^\circ$; seuil de transport adimensionné $u_{th}/u_* = 0.8$ et longueur de saturation $L_{sat}/z_0 = 80$. En (a), σ est adimensionné par L_{sat} et k par z_0 de sorte que les courbes se superposent dans la région $kH \ll 1$. En (b), (c) et (d), au contraire, toutes les longueurs sont adimensionnées par H , de sorte que les courbes se superposent quand $kH \simeq 1$. Les courbes en pointillés montrent la relation de dispersion en l’absence de surface libre, lorsque le domaine n’est pas borné, pour la même valeur de kz_0 . Le panel (c) est une représentation semi-logarithmique; par convention, est représenté le logarithme de la valeur absolue de σ , le dessous de la courbe étant grisé lorsque σ est négatif.*

alors la profondeur d’eau finie H qui limite la croissance des motifs. L’écoulement autour d’une rangée périodique de dunes en rivière est contrôlé par quatre paramètres indépendants. On retrouve les deux paramètres présents dans le cas d’une hauteur d’eau grande devant la longueur d’onde: le rapport entre la longueur d’onde et la rugosité hydrodynamique du lit, et le rapport d’aspect de la dune. Le confinement de l’écoulement par la surface libre est contrôlé par le rapport entre la longueur d’onde λ et la hauteur d’eau H , ou de manière équivalente, le nombre d’onde adimensionné kH . Comme nous l’avons vu, par simple conservation du débit, cet effet de confinement conduit à une augmentation de la vitesse au sommet des dunes. Ce premier effet conduit à un taux de croissance et une vitesse de propagation plus grands que dans le cas semi-infini, dans une gamme de nombre d’onde adimensionné kH entre 10^{-1} et 10^0 (fig. 14c et d). Dans la limite des très petits kH , cependant, la couche interne, responsable du déphasage entre contrainte et relief, devient de taille comparable à la hauteur d’eau. Dès lors, il n’existe plus de couche externe et les contraintes turbulentes deviennent importantes dans tout l’écoulement. Il s’ensuit une restauration de cette gamme de longueur d’ondes, marquée par un déphasage B/A négatif (zone grisée $kH < 4 \cdot 10^{-2}$ sur la fig. 14c). Enfin, le dernier paramètre est le nombre de Froude de l’écoulement, qui contrôle la longueur d’onde des dunes à laquelle les ondes de surfaces sont en condition de résonance. A la résonance, la déformation de la surface libre est en quadrature avec le fond, ce qui

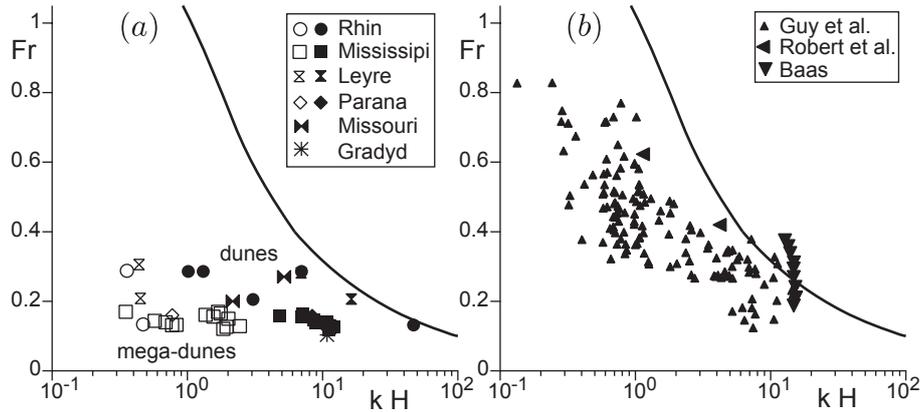


FIG. 15 – Représentation des caractéristiques des dunes en rivière dans un digramme reliant le nombre de Froude \mathcal{F} au nombre d’onde adimensionné par la hauteur d’eau, kH . La courbe en trait plein montre les conditions résonantes pour les ondes de surfaces stationnaires et sépare le régime supercritique (à droite) du régime sous-critique (à gauche). (a) Dunes (symboles noirs) et méga-dunes (symboles blancs) en rivières naturelles (Annambhotla et al. 1972, Carling et al. 2000, Carling et al. 2005, Fourrière et al. 2009, Parsons et al. 2005). (b) Expériences en canal hydraulique: longueur d’onde des structures obtenues à temps asymptotiquement long (Baas 1994, Baas 1999, Guy et al. 1966).

se traduit par des lignes de courant pincées vers l’aval des dunes. Du point de vue de l’instabilité, les ondes de surfaces conduisent donc à une restabilisation autour des conditions de résonance (zone grisée $kH \simeq 2$ sur les figures 14b et c). Globalement, ces différents effets ne modifient pas les conclusions de l’analyse de stabilité linéaire: dès qu’il y a séparation d’échelle entre la hauteur d’eau et la longueur de saturation, le maximum du taux de croissance, associé au rides, est insensible aux effets de taille finie (fig. 14a). Dans la mesure où il n’y a pas de nouveau pic de taux de croissance comparable à ce dernier, les dunes ne se forment pas en rivière par instabilité linéaire. Les processus de fusion de structures décrits plus haut conduisent à une croissance de la longueur d’onde, jusqu’à ce que les effets stabilisants associés à la profondeur finie deviennent dominants. On a alors une restabilisation des structures à une longueur d’onde commensurable avec la hauteur d’eau. La figure 15 montre une série de mesures expérimentales de ces longueurs d’onde observées à temps long. Les points, extrêmement dispersés, se situent à gauche de la résonance, en régime d’ondes sous-critique, et à droite de la zone de restabilisation par confinement ($kH > 0.3$). Les dunes simples se localisent le long de la courbe de résonance tandis que les méga-dunes – qui présentent par définition des dunes sur leur dos – sont observées dans les rivières naturelles, à bas Froude et petit kH .

Dans le cas des dunes éoliennes, il n’y a de prime abord pas de surface libre pour arrêter la croissance des dunes, comme dans le cas des rivières. Pourtant, on conçoit aisément que l’écoulement du vent autour de dunes de longueur kilométrique commence à mettre en jeu la structure verticale de l’atmosphère. Dans les zones désertiques, cette structure est particulièrement simple (Stull 1988, Garrat 1994). Par définition, un désert est une zone où il ne pleut pas, ce qui traduit une structure primaire d’atmosphère extrêmement stable. Cette stabilité provient d’une stratification en densité de l’atmosphère. La variable thermodynamique adaptée est la température virtuelle potentielle Θ , déjaugée des effets adiabatiques et des effets de teneur en humidité (Stull 1988, Garrat 1994). L’atmosphère est stratifiée de manière stable, ce qui implique une suppression des fluctuations turbulentes, lorsque Θ croît avec l’altitude (fig. 16). Bien entendu les zones désertiques sont aussi des zones où le sol peut-être fortement chauffé. Il s’ensuit le développement d’une couche de convection d’autant plus haute que la température du sol est forte. La couche de convection est séparée de l’atmosphère stratifiée par une interface appelée couche d’inversion, au sein de laquelle la température virtuelle potentielle croît fortement. Sur cette couche viennent rebondir les plumes

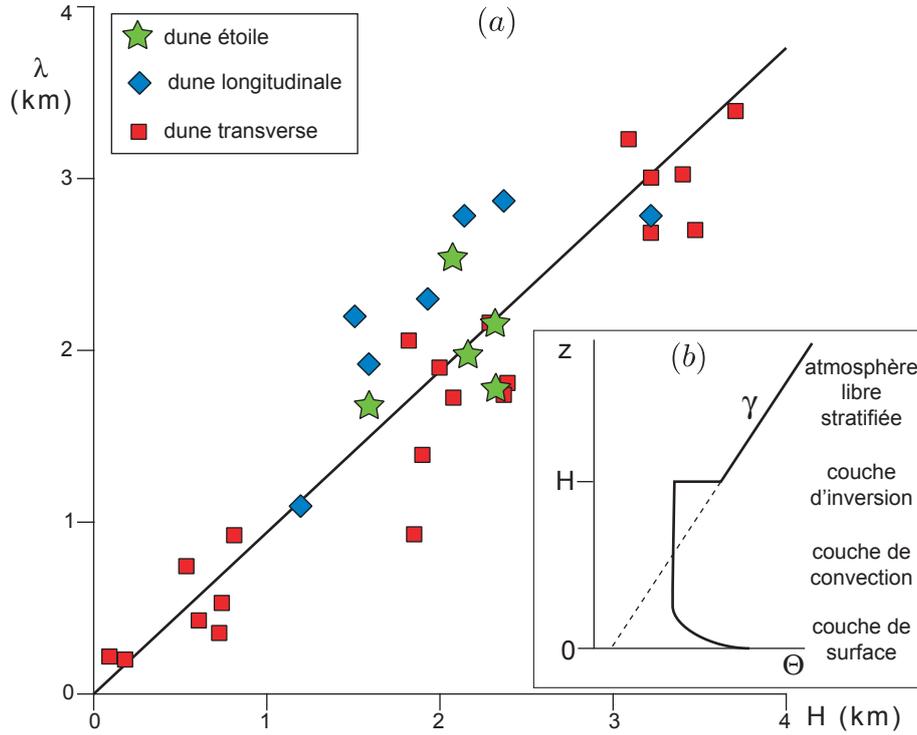


FIG. 16 – (a) Longueur d’onde moyenne des dunes géantes de tous les déserts du monde en fonction de la hauteur moyenne H de la couche d’inversion. (b) Représentation schématique du profil vertical de température virtuelle potentielle dans les régions désertiques.

thermiques émises par le sol, dont les extrémités sont marquées par des nuages de type cumulus. Ainsi, la couche d’inversion correspond au dessus de la première couche nuageuse. Cette couche étant très fine par rapport à la longueur d’onde des dunes, elle se comporte comme une interface où la densité subit une discontinuité $\Delta\rho$. Cette interface est aussi caractérisée par l’annulation des fluctuations turbulentes et donc de la contrainte de cisaillement qui y est associée. Enfin, elle peut propager des ondes dont le rappel est à la fois dû à la gravité et à la stratification de la couche supérieure. Cette dernière est caractérisée par la fréquence de Brunt-Väisälä, qui se construit à partir du gradient de température virtuelle potentielle:

$$N^2 = g\gamma/\Theta, \quad \text{avec} \quad \gamma \equiv \frac{d\Theta}{dz} \quad (26)$$

La relation de dispersion $\omega(k)$ des ondes guidées sur l’interface s’écrit alors, dans la limite des grands kH ,

$$\omega^2 + \left(1 - \frac{\Delta\rho}{\rho_0}\right) \omega \sqrt{\omega^2 - N^2} = \frac{\Delta\rho}{\rho_0} gk, \quad (27)$$

A noter que l’on retrouve la relation des ondes de surface en rivière lorsque $N = 0$ et $\Delta\rho = \rho$. La stratification apporte une propriété qui n’existe pas dans le cas des rivières: les ondes de surface ne peuvent se propager que pour $\omega > N$. En dessous de cette fréquence de coupure, des ondes internes sont rayonnées dans l’atmosphère, ce qui se traduit par une atténuation longitudinale de l’amplitude. Ce nouvel effet est extrêmement stabilisant pour les dunes de grande longueur d’onde. Comme précédemment, ces effets stoppent la croissance des dunes géantes éoliennes par fusion, et sélectionnent une longueur d’onde finale (fig. 16) de l’ordre de la hauteur moyenne de la couche d’inversion (Andreotti *et al.* 2009).

7 Appendice: Origine naturelle des milieux granulaires

Une large partie des sédiments provient de la dégradation des roches, ordinairement classées en trois groupes. Les roches ignées résultent du refroidissement et de la cristallisation de magmas, issus soit du manteau, soit de la fusion de roches métamorphiques. Les roches métamorphiques résultent de la modification, par l'action de la chaleur et de la pression, de roches ignées ou sédimentaires. Les roches sédimentaires proviennent de la lithification par diagenèse des sédiments: la porosité du dépôt est réduite par compaction, cimentation (par dissolution puis précipitation ou cristallisation) et transformation minérale, jusqu'à expulsion du fluide interstitiel et formation d'une roche solide.

L'altération est la désagrégation de roches ignées, métamorphiques ou sédimentaires par action mécanique, chimique et biologique. L'altération physique provient essentiellement de la formation de fractures par dilatation induite par les variations de températures ou simplement par relaxation des pré-contraintes sous lesquelles les roches se sont formées (décompression). En climat humide, l'alternance entre gel et dégel élargit les fractures du fait du changement de volume de l'eau. Les racines des plantes peuvent jouer le même rôle. A ces effets s'ajoute l'érosion directe par l'eau ou la glace, ou encore par les chocs des grains transportés par le vent. L'altération chimique agit principalement en présence d'eau et d'air. Certains minéraux (halite, calcite) se dissolvent totalement et leurs ions sont évacués en solution. D'autres minéraux, comme les micas ou les feldspaths sont transformés en d'autres espèces minérales, souvent de granulométrie plus fine (argiles) et plus facilement mobilisables par l'érosion. Ces réactions peuvent être accélérées par l'action biologique. La fermentation et la respiration induisent une oxydation de la matière organique produisant de l'eau et du dioxyde de carbone, ce dernier étant fondamental pour les réactions de mise en solution (de la calcite notamment). Par ailleurs, les microorganismes sont capables de dissoudre des minéraux par attaque acide, libérant des ions (métalliques en particulier). Outre l'altération, des sédiments peuvent être produits par l'activité volcanique, notamment les cendres, les laves et les débris plus grossiers rejetés par les volcans lors d'éruptions. Ces processus donnent naissance à des sols et des débris rocheux. L'érosion correspond à l'enlèvement de ces produits d'altération des zones d'altération active et le transport est leur mouvement vers les bassins de sédimentation où ils se déposent. Parallèlement, les ions en solution dans l'eau sont transportés et participent à la formation des roches sédimentaires.

Les géologues utilisent une terminologie différente pour des grains de granulométries différentes: par ordre de taille croissante, argile, limon (silt), sable (fin, moyen ou grossier), gravier, galet (caillou), bloc rocheux. La classification physique ne distingue que deux classes de grains, selon qu'ils présentent des interactions cohésives ou non. Le degré de polydispersité des sédiments naturels dépend de l'existence ou non d'un processus de tri lors du transport. Les moraines glaciaires constituées de sédiments érodés et transportés par un glacier sont extrêmement polydisperses. Les dépôts fluviaux de galets, de sable et de limon sont par comparaison un peu mieux triés et les dépôts lacustres et marins un peu mieux encore. Enfin, les dépôts éoliens et en particulier les dunes sont constitués de sable pratiquement monodisperse.

La forme des grains dépend également de l'origine. Les grains de dépôts glaciaires et fluviaux sont très anguleux et brillants. Au cours du transport, il apparaît des traces d'impact en croissant asymétrique ("coup d'ongle"). Les grains des dépôts sableux éoliens sont arrondis, dépolis et mats. Ils présentent les traces de l'abrasion induite par les collisions des grains transportés sur le sol.

La couleur des grains de sable peut s'acquérir pendant la diagenèse. Des réactions avec les oxydes de fer apportent une coloration rouge. Pendant la phase d'expulsion des fluides, la présence de matière organique appauvrit le milieu en oxygène et amène des ions Fe^{++} de couleur verte. Enfin, les grains de quartz des dépôts éoliens peuvent être enduits de pigment hématitique rouge. Les impacts des grains érodant cette pellicule de rouille, une dune est d'autant plus rouge qu'elle est statique et d'autant plus blanche qu'elle est mobile (fig. 17).

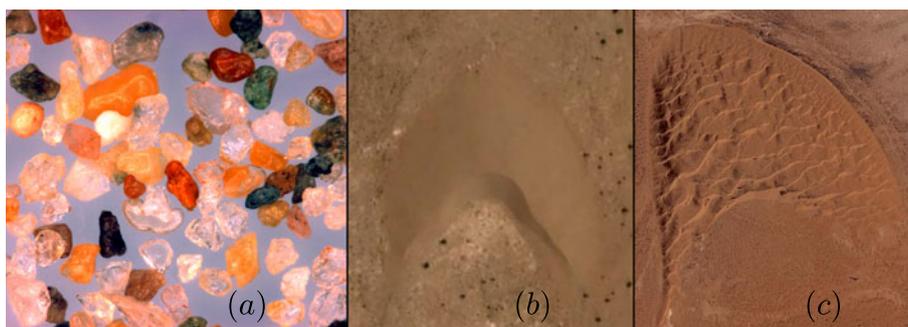


FIG. 17 – *Gauche: photographie de grains éoliens, recouverts pour certains d'oxyde ferrique. Droite: comparaison entre les couleurs d'une dune barchane de taille moyenne, très mobile et claire, et dune barchane géante, peu mobile et rouge.*