

Chapitre 1

Le photon et la théorie quantique du rayonnement

1.1 De l'optique ondulatoire au photon

Un des plus grands succès de la physique du XIX^{ème} siècle a été, suite aux travaux de Young et Fresnel, la compréhension de la nature ondulatoire de la lumière, puis son identification à la propagation d'ondes électromagnétiques par Maxwell. Ce triomphe ne fut cependant que de courte durée : dès la fin de ce siècle une série de mystères expérimentaux vinrent mettre à bas l'élégant édifice de l'optique ondulatoire, entraînant avec elle toute la physique classique et laissant la place aux théories quantiques et relativistes. En effet, ces deux révolutions ont pour point commun d'avoir vu le jour suite à des mesures optiques inexplicables : l'expérience de Michelson et Morley¹ dans le cas de la Relativité, et l'effet photoélectrique et le spectre du corps noir pour la mécanique quantique.

Bien que Planck fut le premier à envisager le caractère discret des échanges d'énergie entre lumière et matière, c'est Einstein qui émit en 1905 l'hypothèse de l'existence d'une particule de lumière qui fut baptisée par la suite photon. La preuve de l'existence du photon n'était à l'époque qu'indirecte et ne fut acceptée que tardivement², notamment suite aux expériences de Compton sur la diffusion des rayons X par les électrons d'un solide [5]. mais aujourd'hui, les progrès technologiques (photomultiplicateurs, photodiodes à avalanches) nous permettent d'observer des photons uniques, qui nous prouvent sans ambiguïté aucune l'existence directe de ces particules (Fig. 1.1).

Ce premier chapitre présente les principes de la théorie quantique du rayon-

1. Qui constitue en réalité le point final d'une série d'expériences (découverte de l'aberration des étoiles par Bradley ou expérience de Fizeau) qui ont montré l'incohérence de la notion d'éther lumineux.

2. Citons ainsi M. Planck, qui dans un rapport sur la candidature d'Albert Einstein à l'Académie de Berlin écrivit "Qu'il ait parfois manqué la cible dans ces spéculations, par exemple avec son hypothèse des quanta lumineux ne peut être retenu contre lui, car il n'est pas possible d'introduire des idées réellement nouvelles sans prendre parfois un risque".

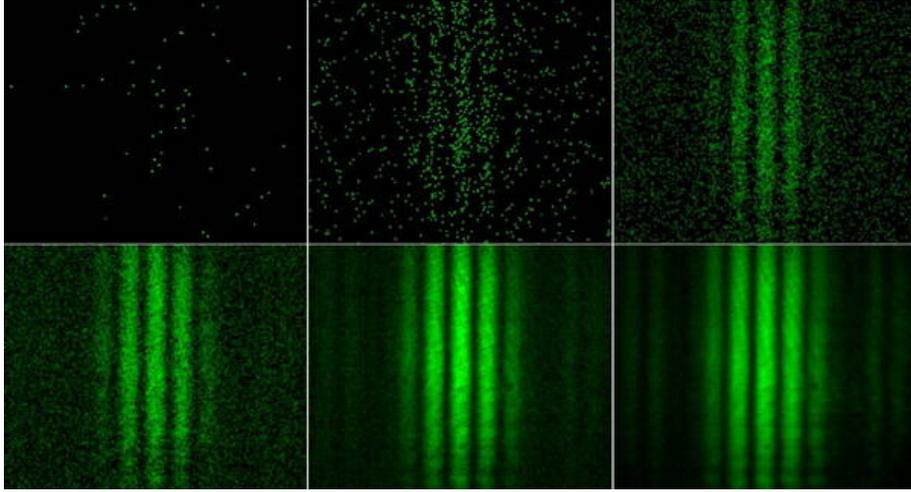


FIGURE 1.1 – Expérience de fentes de Young extraite de [7] démontrant la dualité onde corpuscule. En haut à droite, le temps d’intégration est court et les photons arrivent un à un sur le détecteur. Pour des temps d’intégration plus longs, la distribution moyenne de photons forme la figure d’interférence caractéristique des fentes d’Young.

nement unifiant dans un formalisme unique les aspects corpusculaires et ondulatoires de la lumière. Le développement qui suit ne se veut cependant pas exhaustif, faute de place d’une part, puisqu’une dérivation rigoureuse et complète de l’électrodynamique quantique serait l’objet d’un semestre à elle toute seule, et d’autre part car le cadre naturel de l’électromagnétisme est l’espace-temps Minkovskien de la Relativité d’Einstein qui requiert une réécriture des principes de la mécanique quantique dans le cadre de la théorie quantique des champs. En raison de ces limitations intrinsèques, certains résultats présentés ci-dessous pourront paraître à première vue arbitraires, mais trouvent pourtant tout leur sens dans ce cadre étendu.

Le constituant élémentaire de la lumière étant le photon, nous débuterons par un rappel de ses propriétés. Nous présenterons ensuite la “seconde quantification”, qui servira d’introduction à la théorie quantique des champs et nous fournira un cadre adapté à l’étude des phénomènes collectifs ainsi qu’aux phénomènes d’absorption ou d’émission de photons. Armés de ce formalisme, nous verrons comment construire les observables champs électrique et magnétique et nous retrouverons alors les équations de Maxwell dans le vide. Nous exhiberons les spécificités de la théorie quantique lors de la discussion des fluctuations du champ électromagnétique durant laquelle nous nous pencherons plus particulièrement sur les propriétés singulières du vide quantique et les expériences mettant en évidence ses propriétés paradoxales.

1.1.1 Masse du photon

Le photon se déplaçant à la vitesse de la lumière (!) cette particule doit être de masse nulle. En effet, on montre en Relativité que la relation de dispersion liant l'énergie E à l'impulsion p d'une particule de masse m s'écrit

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4. \quad (1.1)$$

On calcule la vitesse de la particule en utilisant les équations de Hamilton³, ce qui nous donne

$$v = \frac{dE}{dp} = \frac{p/m}{\sqrt{1 + p^2/m^2 c^2}}. \quad (1.2)$$

Pour $m \neq 0$, on obtient une vitesse dépendant de l'impulsion (avec pour $p \rightarrow 0$, la formule classique $v = p/m$), alors que pour $m = 0$, il vient simplement $E = pc$ et donc $v = c$.

Expérimentalement, affirmer que le photon n'a pas de masse n'a cependant aucun sens, car toute mesure présente des incertitudes expérimentales et tout au plus peut-on donner une borne supérieure à celle-ci⁴. Plusieurs expériences ont testé la possibilité d'une masse non nulle du photon et ont toutes à ce jour conclu à une valeur compatible avec 0, à une précision de 10^{-51} kg. Pour simplifier, ces expériences mesurent les déviations aux lois de l'électromagnétisme de Maxwell dues à l'existence d'une éventuelle masse du photon, soit en laboratoire par le test de la loi de Coulomb, et en particulier l'annulation du champ électrique dans d'une cavité conductrice, soit par des expériences astrophysiques, comme la mesure du champ magnétique de Jupiter par les sondes Pioneer.

Pour faire court⁵, on peut construire une équation de Schrödinger relativiste à partir de l'équation (1.1) en remplaçant p et E par leurs observables quantiques, ce qui nous donne un hamiltonien \hat{H} satisfaisant la condition

$$\hat{H}^2 = \hat{p}^2 c^2 + m^2 c^4. \quad (1.3)$$

Pour une fonction d'onde obéissant à l'équation de Schrödinger $i\hbar\partial_t\psi = \hat{H}\psi$, on a $-\hbar^2\partial_t^2\psi = \hat{H}^2\psi$, soit

$$-\frac{1}{c^2}\partial_t^2\psi = (-\nabla^2 + m^2 c^2/\hbar^2)\psi, \quad (1.4)$$

3. Alternativement, on peut aussi calculer la vitesse de groupe de l'onde $v_g = d\omega/dk$ qui redonne la même formule.

4. Il peut paraître étrange d'envisager un photon de masse non nulle, car d'après l'argument précédent, la lumière ne se propagerait plus à la vitesse de la lumière c . En fait, ceci provient d'une ambiguïté de la définition de c , qui cache en réalité deux interprétations physiques distinctes. En effet, il s'agit d'une part de la vitesse limite qu'aucune particule massive ne peut dépasser et qui intervient dans la théorie de la Relativité – et notamment dans l'équation (1.1) – et d'autre part, elle s'identifie à la vitesse d'une certaine famille de particules, les photons, qui se trouvent avoir une masse nulle aux incertitudes expérimentales près.

5. La procédure que nous allons suivre ne s'applique en toute rigueur qu'à une particule de spin nul, ce qui n'est pas le cas du photon, mais ne change cependant pas les conclusions du propos.



FIGURE 1.2 – Les sondes Pioneer ont permis l'étude précise du champ magnétique jovien bornant la masse du photon à au plus 10^{-51} kg [6]. (©Nasa)

baptisée équation de Klein-Gordon⁶. Pour $m = 0$, on trouve bien l'équation d'onde caractérisant la propagation des ondes électromagnétiques. Dans le cas statique, ψ satisfait l'équation de Poisson $\nabla^2\psi = 0$, donnant un comportement en $1/r$ caractéristique des potentiels électromagnétiques (scalaire ou vectoriel) statiques, comme on le voit en notant qu'en coordonnées sphériques $\nabla^2\psi = r^{-1}\partial_r^2(r\psi)$. En nous fondant sur cette analogie, nous identifierons donc par la suite la fonction d'onde ψ avec le potentiel électrostatique.

Lorsque l'on considère une particule de masse non nulle, on constate que la solution de l'équation de Klein-Gordon statique se met sous la forme d'un potentiel de Yukawa

$$\psi \propto \frac{e^{-r/\lambda_c}}{r}, \quad (1.5)$$

où $\lambda_c = \hbar/mc$ est la longueur d'onde de Compton. Dans cette expression, on retrouve la dépendance en $1/r$, mais "écrantée" sur des distances plus grandes que λ_c par la décroissance exponentielle⁷. Ce résultat, valable pour une charge

6. En réalité, écrite pour la première fois par Schrödinger, avant même qu'il ne considère la version non relativiste qui porte son nom. Il abandonna l'équation 1.4 car celle-ci ne redonnait pas la bonne structure fine de l'atome d'hydrogène, qui dépend du spin et ne peut donc pas être correctement décrite par l'équation de Klein-Gordon décrivant des particules sans spin.

7. Le même argument permet de comprendre la portée finie des interactions nucléaires fortes et faibles, puisque celles-ci sont transportées par des particules de masse non nulle (le pion et les bosons W et Z respectivement, dont les masses sont de l'ordre du GeV et correspondent à une longueur d'onde de Compton de l'ordre du fm.

ponctuelle générant un potentiel isotrope, se généralise à toute distribution de charge et de courant qui crée dans ce modèle un champ électrique et magnétique présentant le même comportement exponentiel s'atténuant sur une distance λ_c . Les mesures du champ magnétique de Jupiter par les sondes Pioneer ont ainsi pu borner inférieurement λ_c à 5×10^8 m (autrement dit, sur cette échelle de distance le champ magnétique de la planète varie bien en $1/r^3$) ce qui fixe la borne supérieure la plus précise à ce jour pour la masse du photon.

1.1.2 Le spin du photon

Le photon est une particule de spin 1 qui d'un point de vue ondulatoire peut être associé à la polarisation du champ électromagnétique. En effet, on peut montrer expérimentalement comme proposé pour la première fois par Poynting et observé par Beth [2] (voir Fig. 1.3 pour une réalisation récente.) que lorsqu'une onde électromagnétique de puissance P et polarisée circulairement est absorbée dans un milieu absorbant, celui-ci subit un couple $\Gamma = P/\omega$, correspondant au transfert d'un moment cinétique \hbar par photon absorbé⁸. En effet soit Φ le flux de photons incidents, chaque photon portant une énergie $\hbar\omega$, la puissance du faisceau lumineux et donc $P = \hbar\omega\Phi$. Lorsque le photon est absorbé, celui-ci cède à la fois son énergie (ce qui chauffe le milieu absorbant), sa quantité de mouvement (se traduisant par le phénomène de pression de radiation) et aussi son moment cinétique. Chaque photon portant un moment cinétique \hbar , le couple subi par le milieu absorbant vaut donc simplement $\Gamma = \Phi\hbar = P/\omega$.

Le photon étant une particule de spin 1, son espace des degrés de liberté internes est de dimension 3 et peut être engendré par les vecteurs $|m_z \in \{0, \pm 1\}\rangle$ correspondant aux états de moment cinétique fixé selon z . Comme nous l'avons vu plus haut, les états $|m_z = \pm 1\rangle$ portant du moment cinétique correspondent à des polarisations circulaires. Pour construire l'équivalent des états de polarisation linéaire dans l'espace de Hilbert des états de spin du photon, on pose

$$|z\rangle = |m_z = 0\rangle \quad (1.6)$$

$$|x\rangle = \frac{|m_z = +1\rangle - |m_z = -1\rangle}{\sqrt{2}i} \quad (1.7)$$

$$|y\rangle = \frac{|m_z = +1\rangle + |m_z = -1\rangle}{\sqrt{2}}, \quad (1.8)$$

que l'on va identifier aux polarisations dans les trois directions (x, y, z) de l'espace. On peut construire ces vecteurs par analogie avec la représentation complexe d'une onde polarisée circulairement, mais plus fondamentalement, cette relation provient du fait que les vecteurs $|x, y, z\rangle$ se transforment comme les vecteurs de base $\mathbf{u}_{x,y,z}$ de l'espace "réel" sous l'effet d'une rotation. Considérons

8. Notons que ce résultat obtenu en invoquant la notion de photon peut se retrouver par un bilan de force à partir des équations de Maxwell dans un milieu absorbant, comme le montre l'absence de la constante de Planck dans le résultat final.

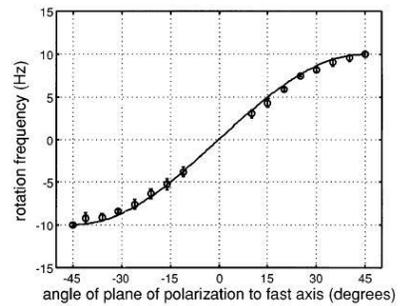
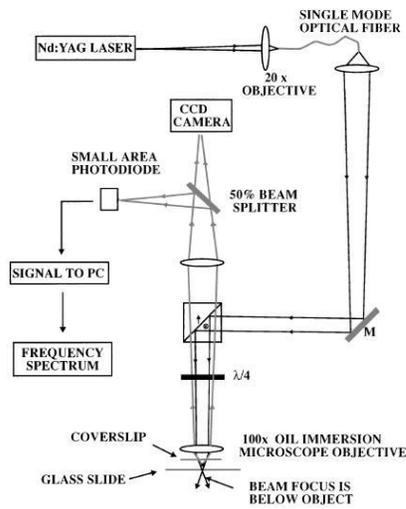


FIGURE 1.3 – Gauche : principe de l'expérience : on focalise un faisceau laser sur une bille micrométrique maintenue au foyer de l'objectif de microscope et que l'on observe sur une caméra CCD. On inverse la polarisation de la lumière de circulaire gauche à circulaire droit à l'aide de la lame $\lambda/4$ ce qui provoque une inversion du sens de rotation de la bille, comme observé sur la courbe de droite. Données extraites de [9].

ainsi le cas d'une rotation d'un angle θ autour de l'axe z dont l'action dans l'espace des états est donné par l'opérateur $\widehat{R}_\theta = \exp -i\theta\widehat{L}_z/\hbar$. On a alors

$$\widehat{R}_\theta|x\rangle = \frac{e^{-i\theta}|m_z = +1\rangle - e^{i\theta}|m_z = -1\rangle}{\sqrt{2}i}, \quad (1.9)$$

soit en réexprimant les vecteurs $|m_z = \pm 1\rangle$ en fonction des polarisations linéaires,

$$\widehat{R}_\theta|x\rangle = \cos\theta|x\rangle - \sin\theta|y\rangle, \quad (1.10)$$

qui correspond à la formule de rotation de \mathbf{u}_x d'un angle θ autour de l'axe z . Plus généralement, on démontre que dans la base $|x, y, z\rangle$, l'opérateur de rotation \widehat{R}_θ possède les mêmes éléments de matrice que la rotation de \mathbb{R}^3 correspondante.

Comme on le sait bien, la transversalité des ondes électromagnétique interdit l'existence d'une polarisation parallèle à la direction de propagation. Si celle-ci est alignée selon l'axe z , ceci revient à interdire l'état $|z\rangle = |m_z = 0\rangle$. Cette particularité est relié à une propriété subtile de la notion de spin des particules de masse nulle (et donc du photon). En effet, de manière général, l'opérateur moment cinétique est défini comme le générateur infinitésimal des rotations. Pour définir le spin (ou moment cinétique *intrinsèque* par rapport au moment cinétique *orbital* classique $\mathbf{r} \wedge \mathbf{p}$), on se place dans le référentiel du centre de masse de la particule considérée de façon à annuler le moment cinétique orbital, et on caractérise comment les variables internes de la particule se transforment sous l'effet des rotations de l'espace ambiant à trois dimensions. Cette procédure n'est cependant pas réalisable dans le cas du photon, puisque d'après le Principe de Relativité, celui se déplace à la vitesse c dans tout référentiel et ne peut donc être immobilisé. Dit autrement, il est impossible de dissocier le moment cinétique orbital du moment cinétique interne d'une particule de masse nulle.

Dans le cas du photon, on va donc plutôt considérer l'hélicité σ , c'est-à-dire la projection du moment cinétique sur la direction de propagation du photon – qui est toujours défini puisqu'on ne peut arrêter une particule de masse nulle – soit $\widehat{\sigma} = \widehat{\mathbf{J}} \cdot \widehat{\mathbf{u}}_{\mathbf{p}}$, où $\widehat{\mathbf{J}}$ est le moment cinétique total du photon et $\mathbf{u}_{\mathbf{p}} = \mathbf{p}/p$ désigne le vecteur unitaire selon la direction de propagation. L'avantage est que le moment cinétique orbital ne contribue pas à l'hélicité⁹, puisque par définition, il est orthogonal à \mathbf{p} . Lors de la caractérisation des variables internes sous l'effet d'une rotation, on ne considère plus une rotation quelconque de l'espace à 3D, mais simplement une rotation dans le plan transverse à \mathbf{p} . Mathématiquement, on montre que cette restriction des transformations admissibles aboutit à ne considérer pour l'hélicité que les valeurs $\pm S\hbar$, et non plus l'ensemble des $2S + 1$ valeurs $\{-S, -S + 1, \dots, S - 1, S\}$, où S est le spin de la particules (pour une particule de spin S). Dans le cas du photon, particule de spin 1, ceci signifie que seules les hélicités $\pm\hbar$ sont permises, et que $\sigma = 0$ est interdit.

9. Et aussi que cette quantité est un invariant relativiste.

1.2 Notion de seconde quantification

1.2.1 Espace de Fock

Partant des propriétés générales du photon énoncées précédemment, nous allons à présent développer le formalisme nécessaire à la description d'une assemblée de photons. Le photon étant une particule de spin 1, c'est un boson et la fonction d'onde d'un ensemble de N photons doit être symétrique par échange de deux particules. Soit \mathcal{H}_1 l'espace des états à une particule que l'on dote d'une base $|\mu\rangle$ (caractérisée par exemple par l'impulsion et l'hélicité du photon). Si l'on ne prend pas en compte l'indiscernabilité, une base de l'espace des états à N particules \mathcal{H}_N est engendrée par la famille $|1 : \mu_1, 2 : \mu_2, \dots, N : \mu_N\rangle$, où $|k : \mu_k\rangle$ désigne l'état de la particule k . Dans le cas d'un ensemble de particules indiscernables, on ne peut pas identifier les particules individuellement et l'état physique du système doit être invariant par échange de deux particules.

Dans le cas des bosons, cette base est générée à partir des états discernables en effectuant des combinaisons linéaires symétriques de la forme

$$|\{n_\mu\}\rangle = \mathcal{N} \sum_{\tau \in \mathcal{S}_N} |1 : \mu_{\tau(1)}, 2 : \mu_{\tau(2)}, \dots, N : \mu_{\tau(N)}\rangle, \quad (1.11)$$

où n_μ désigne le nombre de particules dans l'état μ (pour un état à N particules, on a donc $\sum_\mu n_\mu = N$) et où \mathcal{S}_N désigne le groupe des permutations de l'ensemble $\{1, \dots, N\}$ et \mathcal{N} est un facteur de normalisation (égal à $\sqrt{N! / \prod_k n_k!}$). Comme on le conçoit, ce formalisme s'avère malaisé à mettre en œuvre lorsque le nombre de particules est important. Par ailleurs, la relativité permet la création et la disparition de particules, ce qui va constituer l'essence même de l'interaction lumière-matière dont les processus élémentaires mettent en jeu l'absorption et l'émission de photons. La théorie quantique "usuelle" fondée sur les propriétés des fonctions d'ondes de la forme $\psi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$ considère un espace de Hilbert contenant un nombre fixé de particules et ne peut donc pas décrire ce type de phénomène.

Afin de pouvoir étudier les processus d'absorption et l'émission de photons, on est par conséquent amené à considérer un espace plus vaste, appelé *espace de Fock*, défini comme la somme de tous les espaces \mathcal{H}_N , c'est-à-dire

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{N=0}^{\infty} \mathcal{H}_N^s, \quad (1.12)$$

où l'on note \mathcal{H}_N^s l'espace des états à N particules symétrique par échange et où l'on a introduit un espace \mathcal{H}_0^s de dimension 1 correspondant au vide de photons¹⁰.

10. Étendre l'espace de Hilbert à un nombre quelconque de particules peut amener à des conclusions paradoxales puisque d'après le postulat de superposition, il est à présent possible d'envisager des états dans des superpositions de nombres de photons différents. À y regarder plus près cependant, certaines situations élémentaires de mécanique quantique relèvent de ce phénomène. En effet, dans la RMN, le spin nucléaire oscille entre deux états suite à l'interaction

1.2.2 Opérateurs création et annihilation de bosons

Nous allons à présent introduire les opérateurs création et annihilation de particules. On définit \hat{a}_μ par

$$\hat{a}_{\mu_k} |n_{\mu_1}, n_{\mu_2}, \dots, n_{\mu_k}, \dots\rangle = \sqrt{n_{\mu_k}} |n_{\mu_1}, n_{\mu_2}, \dots, n_{\mu_k} - 1, \dots\rangle. \quad (1.13)$$

Cet opérateur couple un espace \mathcal{H}_N avec l'espace \mathcal{H}_{N-1} et supprime une particule dans le mode μ_k . L'intérêt du facteur $\sqrt{n_{\mu_k}}$, introduit par analogie avec l'opérateur annihilation d'un oscillateur harmonique, apparaîtra par la suite. Le complexe conjugué de \hat{a}_μ est l'opérateur création dont l'action est simplement donnée par

$$\hat{a}_{\mu_k}^\dagger |n_{\mu_1}, n_{\mu_2}, \dots, n_{\mu_k}, \dots\rangle = \sqrt{n_{\mu_k} + 1} |n_{\mu_1}, n_{\mu_2}, \dots, n_{\mu_k} + 1, \dots\rangle. \quad (1.14)$$

Les opérateurs création et annihilation satisfont alors les relations de commutation suivantes

$$[\hat{a}_\mu, \hat{a}_{\mu'}^\dagger] = \delta_{\mu, \mu'} \quad (1.15)$$

$$[\hat{a}_\mu, \hat{a}_{\mu'}] = 0 \quad (1.16)$$

Tout comme dans le cas de l'oscillateur harmonique, on définit l'opérateur $\hat{N}_\mu = \hat{a}_\mu^\dagger \hat{a}_\mu$ donc l'action sur les états de Fock s'écrit comme pour un oscillateur harmonique

$$\hat{N}_\mu |n_\mu\rangle = n_\mu |n_\mu\rangle. \quad (1.17)$$

Autrement dit, les états de Fock sont des états propres de \hat{N}_μ avec pour valeurs propres les nombres de particules dans l'état μ . \hat{N}_μ est donc l'opérateur *nombre de particules dans l'état μ* .

Avant de poursuivre plus avant notons que le formalisme mis en œuvre ici ne s'applique qu'à des bosons, puisque, comme démontré dans le cas d'un oscillateur harmonique, les valeurs propres de \hat{N}_μ prennent toutes les valeurs entières. Pour définir des opérateurs créations et annihilation de fermions, il faut modifier les relations de commutations (1.15) et (1.16) de façon à prendre en compte l'antisymétrisation de la fonction d'onde.

1.2.3 Hamiltonien et évolution du vecteur d'état

On cherche ici à construire le hamiltonien décrivant les photons dans le vide : celui-ci n'absorbant pas la lumière, le nombre de photons est conservé en l'absence de matière. Ceci signifie que n_μ doit être une constante du mouvement

avec un champ magnétique tournant. D'un point de vue corpusculaire, ces oscillations de Rabi s'interprètent comme des cycles d'émission et d'absorption de photon. Lorsque le noyau se trouve dans une superposition de l'état fondamental et excité, il a "à la fois" émis et absorbé un photon.

et donc que \widehat{N}_μ commute avec le hamiltonien. En conséquence de quoi, les états de Fock, états propres des \widehat{N}_μ , sont aussi états propres de \widehat{H} .

Or, les photons n'interagissant pas entre eux, ajouter au système un photon dans le mode μ revient à augmenter l'énergie de $\hbar\omega_\mu$, où $\omega_\mu = ck_\mu$ est la pulsation du mode considéré. L'énergie d'un état de Fock est donc de la forme

$$E(\{n_\mu\}) = \sum_{\mu} \hbar\omega_{\mu} (n_{\mu} + c_{\mu}), \quad (1.18)$$

où c_μ est une constante servant à définir l'origine des énergies¹¹. Or, d'après la remarque précédente, $E(\{n_\mu\})$ doit être valeur propre de \widehat{H} , ce qui permet d'écrire que $\widehat{H}|\{n_\mu\}\rangle = E(\{n_\mu\})|\{n_\mu\}\rangle$, soit

$$\widehat{H} = \sum_{\mu} \hbar\omega_{\mu} (\widehat{N}_{\mu} + c_{\mu}), \quad (1.19)$$

qui redonne la bonne expression lorsqu'on le fait agir sur les états de Fock.

1.3 Opérateurs champs, équations de Maxwell dans le vide

Jusqu'à présent, nous ne nous sommes intéressés qu'aux aspects corpusculaires de la lumière, et il nous reste à faire le lien avec la description ondulatoire fournie par les équations de Maxwell. D'un point de vue expérimental, le champ électromagnétique est déterminé par la valeur de \mathbf{E} et \mathbf{B} (ou les potentiels associés) en tout point de l'espace, qui doivent donc correspondre à des observables opérant sur l'espace de Hilbert des photons. L'objet de ce paragraphe sera de construire ces observables, dont nous montrerons ensuite que les valeurs moyennes obéissent bien aux équations de Maxwell.

1.3.1 Opérateurs champs

Comme nous l'avons discuté ci-dessus, le but de cette partie est de construire les observables $\widehat{\mathbf{E}}(\mathbf{r})$ et $\widehat{\mathbf{B}}(\mathbf{r})$ correspondant à la mesure des champs électrique et magnétique en un point \mathbf{r} donné de l'espace. À ce titre, la position \mathbf{r} n'est qu'un *paramètre* définissant le point de mesure, et n'est donc pas elle-même une observable, contrairement à la situation considérée dans le formalisme habituel.

En mécanique quantique, on caractérise la dynamique d'un système par son hamiltonien \widehat{H} (l'énergie) dont on obtient l'expression par le Principe de Correspondance consistant à remplacer les observables physiques par les opérateurs de l'espace de Hilbert associés. En électromagnétisme classique, la densité d'énergie électromagnétique est donnée par $\varpi = \epsilon E^2/2 + B^2/2\mu_0$. En mécanique quantique on définira le hamiltonien par

¹¹. Pour un oscillateur harmonique, on a ainsi $c_\mu = 1/2$, ce qui se trouve être aussi la valeur à prendre pour retrouver l'électromagnétisme classique.

$$\widehat{H} = \int \frac{d^3\mathbf{r}}{2} \left(\varepsilon_0 \widehat{\mathbf{E}}(\mathbf{r})^2 + \widehat{\mathbf{B}}^2(\mathbf{r})/\mu_0 \right), \quad (1.20)$$

et nous déterminerons les expressions de $\widehat{\mathbf{E}}$ et $\widehat{\mathbf{B}}$ de façon à ce que ce hamiltonien se mette sous la forme (1.19). Afin de simplifier notre recherche, nous allons plutôt tenter d'exprimer les champs en termes des potentiels électromagnétiques : en effet, plutôt que d'avoir à manipuler deux champs vectoriels, nous n'aurons à utiliser qu'un champ vectoriel (le potentiel vecteur \mathbf{A}) et un champ scalaire (le potentiel scalaire V).

Il peut sembler au premier abord paradoxal de prendre comme objets centraux de la théorie que nous allons développer des quantités n'ayant pas d'interprétation physique directe, puisque plusieurs potentiels décrivent le même champ électromagnétique. En effet, on rappelle que si f est un champ scalaire quelconque, le changement de jauge

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} + \nabla f \quad (1.21)$$

$$V \rightarrow V - \partial_t f, \quad (1.22)$$

laisse inchangés \mathbf{E} et \mathbf{B} . Afin de se convaincre néanmoins de la réalité physique du potentiel vecteur, considérons l'expérience de pensée suivante¹² : on prend un solénoïde infini parcouru par un courant I . On sait dans ce cas que le champ magnétique est uniforme dans le solénoïde (et vaut $B_0 = \mu_0 n I$, où n est le nombre de spires par mètre) et nul à l'extérieur. Le potentiel vecteur \mathbf{A} est quant-à lui non nul, et par symétrie est orienté dans la direction orthoradiale $\mathbf{A} = A(r)\mathbf{u}_\theta$. En intégrant la relation $\mathbf{B} = \nabla \mathbf{A}$ sur un cercle de rayon r centré sur l'axe du solénoïde, on en déduit que $2\pi r A = \Phi(r)$, où Φ désigne le flux de \mathbf{B} à travers le cercle. Or si r est supérieur au rayon a du solénoïde, Φ est constant et vaut $\Phi_0 = \pi a^2 B_0$, soit $A(r) = \Phi_0/2\pi r$. Imaginons que l'on enserre le solénoïde par une spire de rayon R et que l'on module le courant I . D'après la loi de Faraday, il apparaît une fem d'induction dans la spire, associée à la variation de Φ . Si l'on suppose que le champ magnétique est la grandeur physique pertinente, on constate que dans cette situation, il y a une action "à distance" du champ \mathbf{B} sur la spire, puisque $\mathbf{B} = 0$ sur la spire. Ce paradoxe est cependant levé si l'on admet que c'est le potentiel vecteur qui a un sens, auquel cas on sait que la fem résulte du champ électrique induit $\partial_t \mathbf{A}$, qui lui est non nul sur la spire. Autrement dit, si l'on veut décrire une interaction *locale*, il faut faire intervenir \mathbf{A} plutôt que \mathbf{B} - ce que l'on retrouve par exemple dans l'écriture du hamiltonien d'interaction d'un champ magnétique avec une particule classique ou quantique. L'argument a été étendu au cas quantique par Aharonov et Bohm [1]. Dans cette expérience, on réalise une expérience de fentes d'Young en plaçant le solénoïde entre les deux fentes. Aharonov et Bohm ont montré qu'il devait apparaître un déphasage entre les deux bras de l'interféromètre proportionnel au flux enserré par le solénoïde. Comme dans le cas de l'induction, on observe un effet sur les

12. Ceci sans compter que $(\mathbf{A}, V/c)$ constitue un 4-vecteur relativiste.

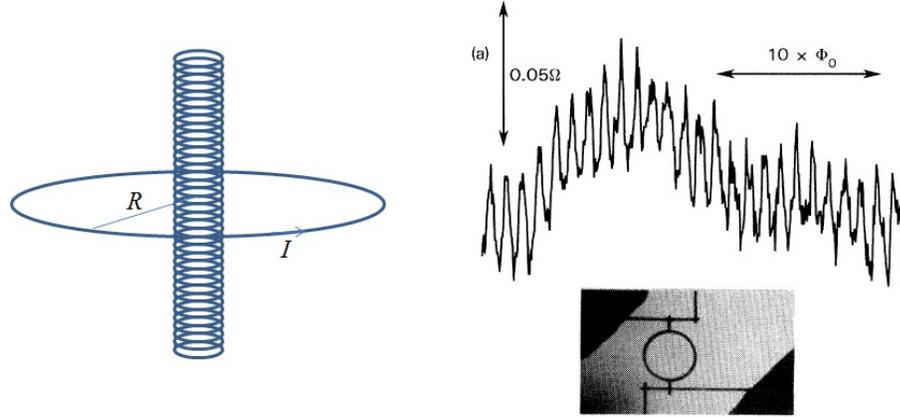


FIGURE 1.4 – Réalité physique du potentiel vecteur. Gauche : induction par un solénoïde ; Droite : observation de l'Effet Aharonov-Bohm dans les oscillations de la magnéto-résistance d'un anneau mésoscopique de 784 nm de diamètre en fonction du flux Φ_0 (Figure extraite de [11]).

particules dans une région où le champ est nul, mais pas le potentiel. Cet effet prédit dans les années 50 a pu être vérifié expérimentalement directement sur des faisceaux d'électrons [4] ainsi que sur des anneaux mésoscopiques [11] - voir Fig. 1.4.

La liberté de jauge nous permet de fixer une condition sur le potentiel vecteur. Dans le cadre non-relativiste, la jauge la plus adaptée est la jauge de Coulomb dans laquelle on impose $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$. Dans l'espace de Fourier, cette relation se traduit par $i\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{A}}_{\mathbf{k}} = 0$, ce qui implique que la transformée de Fourier $\hat{\mathbf{A}}_{\mathbf{k}}$ du potentiel vecteur est orthogonale à \mathbf{k} . Par ailleurs, si l'on écrit l'équation de Maxwell-Gauss, on a dans le vide $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$, et donc puisque $\mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{A} - \nabla V$, on a $\nabla^2 V = 0$. Si l'on impose par ailleurs au potentiel de s'annuler à l'infini, alors d'après l'unicité des solutions de l'équation de Poisson, on a $V = 0$, autrement dit, dans cette jauge et dans le vide, le champ électromagnétique n'est caractérisé que par un potentiel vecteur transverse.

Dans la suite, nous décomposerons le potentiel vecteur dans l'espace de Fourier, ce qui revient à décomposer le champ électromagnétique en ondes planes. De façon à ce que son énergie reste bornée, nous travaillerons dans un volume fini, aux bornes duquel nous imposerons des conditions aux limites périodiques. Ceci revient à quantifier les vecteurs d'ondes dans l'espace de Fourier qui peuvent prendre les valeurs $\mathbf{k} = 2\pi\mathbf{n}/L$, où \mathbf{n} est un vecteur à coordonnées entières (voir appendice).

Considérons l'observable quantique potentiel vecteur $\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r})$. On peut décomposer celle-ci en série de Fourier, ce qui nous permet d'écrire

$$\widehat{\mathbf{A}} = \sum_{\mathbf{k}} \widehat{\mathbf{A}}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}. \quad (1.23)$$

En utilisant la jauge de Coulomb, le vecteur $\widehat{\mathbf{A}}_{\mathbf{k}}$ est orthogonal à \mathbf{k} ce qui permet de le décomposer sur la base \mathbf{e}_{μ} utilisée pour décrire la polarisations des photons¹³. On réécrit alors la somme comme

$$\widehat{\mathbf{A}} = \sum_{\mu} \widehat{\mathcal{A}}_{\mu} \mathbf{e}_{\mu} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}. \quad (1.24)$$

Enfin, comme \widehat{A} est une observable, c'est un opérateur hermitien, ce qui impose la condition $\widehat{\mathcal{A}}_{\mu}^{\dagger} = \widehat{\mathcal{A}}_{\bar{\mu}}$, où $\bar{\mu} = (-\mathbf{k}, \sigma_{\mu})$. La connaissance de l'observable $\widehat{\mathbf{A}}$ nous permet ensuite de définir les observables champs électrique et magnétique. En effet, on a tout d'abord $\mathbf{B} = \nabla \wedge \mathbf{A}$ et donc

$$\widehat{\mathbf{B}} = \sum_{\mu} \widehat{\mathcal{A}}_{\mu} i\mathbf{k} \wedge \mathbf{e}_{\mu} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}. \quad (1.25)$$

Pour ce qui est du champ électrique, on a classiquement $\mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{A}$. Les observables ne dépendant pas du temps, cette relation n'est plus directement applicable et n'est vrai que pour les valeurs moyennes¹⁴, ce qui nous permet d'écrire $\langle \widehat{\mathbf{E}} \rangle = -\partial_t \langle \widehat{\mathbf{A}} \rangle$. Or, d'après le théorème d'Ehrenfest (cf. appendice 1.7.2), on a

$$i\hbar \partial_t \langle \widehat{\mathbf{A}} \rangle = \langle [\widehat{\mathbf{A}}, \widehat{H}] \rangle, \quad (1.26)$$

soit

$$\langle \widehat{\mathbf{E}} \rangle = \frac{i}{\hbar} \langle [\widehat{\mathbf{A}}, \widehat{H}] \rangle. \quad (1.27)$$

Cette relation étant valable pour tout état, on a finalement

$$\widehat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = \frac{i}{\hbar} [\widehat{\mathbf{A}}, \widehat{H}] = \frac{i}{\hbar} \sum_{\mu} [\widehat{\mathcal{A}}_{\mu}, \widehat{H}] \mathbf{e}_{\mu} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}. \quad (1.28)$$

On peut ensuite réécrire le hamiltonien (1.20) en fonction des opérateurs $\widehat{\mathcal{A}}_{\mu}$. On obtient alors

$$\widehat{H} = L^3 \sum_{\mu} \left(\frac{\varepsilon_0}{2\hbar^2} [\widehat{\mathcal{A}}_{\mu}, \widehat{H}]^{\dagger} [\widehat{\mathcal{A}}_{\mu}, \widehat{H}] + \frac{k^2}{2\mu_0} \widehat{\mathcal{A}}_{\mu}^{\dagger} \widehat{\mathcal{A}}_{\mu} \right), \quad (1.29)$$

qu'il nous faut identifier à l'expression

$$\widehat{H} = \sum_{\mu} \frac{\hbar\omega_{\mu}}{2} (\widehat{a}_{\mu}^{\dagger} \widehat{a}_{\mu} + \widehat{a}_{\mu} \widehat{a}_{\mu}^{\dagger}). \quad (1.30)$$

13. Nous travaillerons ici dans une base de polarisations linéaires de façon à ne considérer que des \mathbf{e}_{μ} réels.

14. Remarquons qu'en se plaçant dans la représentation de Heisenberg, on peut se débarrasser des valeurs moyennes.

On constate que d'une part les deux formes découplent les différents modes μ et que d'autre part, il sont quadratiques en \hat{a}_μ et \hat{A}_μ respectivement. Ceci suggère que chercher l'amplitude du potentiel vecteur sous la forme $\hat{A}_\mu = \mathcal{A}_\mu^0 \hat{a}_\mu$. Cependant, nous avons vu que la condition d'hermiticité de \hat{A} imposait d'avoir $\hat{A}_\mu^\dagger = \hat{A}_{\bar{\mu}}$ ce qui couple les modes μ et $\bar{\mu}$ et n'est pas satisfait pas la forme précédente. Une façon d'y remédier est de généraliser notre forme à $\hat{A}_\mu = \mathcal{A}_\mu^0 (\hat{a}_\mu + \hat{a}_{\bar{\mu}}^\dagger)$. En utilisant cette forme pour le potentiel vecteur, la condition d'hermiticité est en effet satisfaite, et l'on obtient dans l'équation (1.29)

$$\hat{H} = \sum_{\mu} \left[\varepsilon_0 L^3 \omega_\mu^2 \mathcal{A}_\mu^0{}^2 (\hat{a}_\mu^\dagger \hat{a}_\mu + \hat{a}_\mu \hat{a}_{\bar{\mu}}^\dagger) \right]. \quad (1.31)$$

Si l'on compare avec l'expression (1.30) obtenue dans le formalisme de seconde quantification, les deux hamiltoniens sont identiques à condition de prendre

$$\mathcal{A}_\mu^0 = \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0 L^3 \omega_\mu}}. \quad (1.32)$$

On en déduit donc l'expression des opérateurs champs

$$\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}) = \sum_{\mu} \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0 L^3 \omega_\mu}} [e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \hat{a}_\mu \mathbf{e}_\mu + \text{h.c.}] \quad (1.33)$$

$$\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = i \sum_{\mu} \sqrt{\frac{\hbar \omega_\mu}{2\varepsilon_0 L^3}} [e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \hat{a}_\mu \mathbf{e}_\mu - \text{h.c.}] \quad (1.34)$$

$$\hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r}) = i \sum_{\mu} \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0 L^3 \omega_\mu}} [e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \hat{a}_\mu \mathbf{k} \wedge \mathbf{e}_\mu - \text{h.c.}] \quad (1.35)$$

1.3.2 Retour sur les équations de Maxwell dans le vide

Nous allons montrer que les valeurs moyennes des observables $\hat{\mathbf{E}}$ et $\hat{\mathbf{B}}$ que nous venons d'introduire obéissent bien aux équations de Maxwell. Commençons donc par les équations portant sur les divergences de \mathbf{E} et \mathbf{B} . On a par exemple dans le cas du champ électrique

$$\nabla \cdot \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = - \sum_{\mu} \omega_\mu \mathcal{A}_\mu^0 (e^{i\mathbf{k}_\mu \cdot \mathbf{r}} \hat{a}_\mu \mathbf{k}_\mu \cdot \mathbf{e}_\mu + \text{h.c.}) = 0, \quad (1.36)$$

car la polarisation des photons est transverse. En prenant la valeur moyenne sur l'état des photons, on en déduit donc que $\langle \nabla \cdot \mathbf{E} \rangle = 0$ et de même pour $\nabla \cdot \mathbf{B}$.

Intéressons nous ensuite à l'équation de Maxwell-Faraday. Pour cela, il nous faut évaluer $\partial_t \langle \mathbf{B}(\mathbf{r}) \rangle$, où la dépendance temporelle provient de l'évolution du vecteur d'état. En utilisant le théorème d'Ehrenfest, on a

$$i\hbar \frac{d\langle \hat{a}_\mu \rangle}{dt} = \langle [\hat{a}_\mu, \hat{H}] \rangle. \quad (1.37)$$

Le commutateur se calcule sans difficulté puisque l'on a

$$[\hat{a}_\mu, \hat{H}] = \sum_{\mu'} \hbar\omega_{\mu'} [\hat{a}_\mu, \hat{a}_{\mu'}^\dagger \hat{a}_{\mu'}] = \hbar\omega_\mu [\hat{a}_\mu, \hat{a}_\mu^\dagger \hat{a}_\mu], \quad (1.38)$$

puisque d'après l'équation (1.16) les opérateurs création et annihilation de modes distincts commutent. Le dernier commutateur se calcule en utilisant l'identité $[\hat{A}, \hat{B}\hat{C}] = \hat{B}[\hat{A}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{B}]\hat{C}$ qui nous donne d'après (1.15) $[\hat{a}_\mu, \hat{a}_\mu^\dagger \hat{a}_\mu] = \hat{a}_\mu$ et donc

$$i \frac{d\langle \hat{a}_\mu \rangle}{dt} = \omega_\mu \langle \hat{a}_\mu \rangle. \quad (1.39)$$

D'après la relation (1.39), nous voyons que $\partial_t \langle \mathbf{B}(\mathbf{r}) \rangle$ peut s'écrire

$$\partial_t \langle \hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r}) \rangle = \sum_{\mu} \mathcal{A}_\omega (e^{i\mathbf{k}_\mu \cdot \mathbf{r}} (-i\omega_\mu \langle \hat{a}_\mu \rangle) i\mathbf{k}_\mu \wedge \mathbf{e}_\mu - \text{h.c.}), \quad (1.40)$$

soit puisque $\nabla \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) = i\mathbf{k} \cdot \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$

$$\partial_t \langle \hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r}) \rangle = -\nabla \wedge \langle \mathbf{E}(\mathbf{r}) \rangle. \quad (1.41)$$

En raisonnant de même sur $\partial_t \langle \mathbf{E} \rangle$, on retrouve sans difficulté l'équation de Maxwell-Ampère.

1.4 Fluctuations quantiques du champ électromagnétique

Le résultat fourni par le paragraphe précédent peut paraître décevant : quel intérêt y a-t-il à développer un formalisme quantique si, à la fin, on retrouve les équations de Maxwell ? Plus généralement, quelles sont réellement les spécificités de la théorie de l'électrodynamique quantique que nous venons de développer, par rapport à l'optique classique héritée du XIXème siècle ? Si l'on veut observer des effets réellement quantiques, il ne faut pas s'intéresser aux valeurs moyennes des observables champs, qui comme on l'a vu obéissent aux équations de Maxwell. Il faut plutôt s'intéresser aux *fluctuations* autour de cette valeur moyenne, comme nous le verrons dans les quelques exemples ci-dessous, et de façon plus détaillée au chapitre suivant.

L'idée peut paraître paradoxale, car traditionnellement, ce qu'il convient d'appeler du bruit est considéré comme une nuisance dont il faut au maximum s'affranchir pour parvenir à des résultats expérimentaux aussi précis que possible. Cependant, au cours du XXème siècle, il est apparu que dans un grand nombre de situations physique, une fois éliminé le bruit technique dû aux imperfections expérimentales, il pouvait rester des fluctuations inhérentes au système

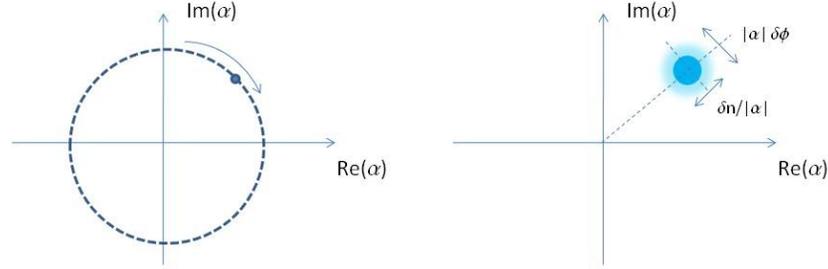


FIGURE 1.5 –

étudié et dont la caractérisation pouvait apporter de précieuses informations. Historiquement, c'est Einstein qui le premier a pris conscience de cette opportunité dans son travail de 1905 sur le mouvement Brownien où il montre que l'étude du mouvement erratique de grains de pollen mis en évidence par Brown pouvait s'interpréter quantitativement par l'agitation thermique des molécules d'eau et permettait de mesurer le nombre d'Avogadro. Un peu plus tard, Johnson et Nyquist démontrèrent qu'à température finie, la tension aux bornes d'un conducteur ohmique subissait des fluctuations dont l'amplitude était proportionnelle à la résistance et la température. Dans le cas de l'optique, une première expérience due à Hanbury-Brown et Twiss montra que l'étude des corrélations de fluctuations d'intensité lumineuse mesurées par deux capteurs spatialement séparés permettaient de mettre en œuvre un nouveau type d'interférométrie qui leur permit de mesurer la taille de l'étoile Sirius. Leur intuition fut par la suite formalisée par Roy Glauber que l'on considère comme le père de l'optique quantique moderne et qui reçut le prix Nobel 2005 pour ces travaux. Mentionnons pour finir que l'étude des fluctuations du rayonnement fossile issu du Big-Bang et baignant l'univers d'un rayonnement du corps noir à ~ 2.7 K a fait l'objet d'études récentes par les satellites COBE (lancé en 1989), WMAP (en 2001) et Planck (en 2009) qui ont permis d'en extraire des informations précieuses sur la structure de l'univers à grande échelle (notamment la courbure de l'espace temps ou la quantité de matière noire et d'énergie noire).

1.4.1 Variables normales, représentation quasi-classique d'un état du champ.

Comme nous l'avons mentionné plus haut, l'état du champ électromagnétique est complètement caractérisé en jauge de Coulomb par la donnée de son potentiel vecteur \mathbf{A} . Pour un champ classique, on peut représenter le potentiel vecteur associé au mode μ par un nombre complexe α_μ (appelée variable normale) tel que

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mu} \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0 L^3 \omega_{\mu}}} [e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \alpha_{\mu}(t) \mathbf{e}_{\mu} + \text{c.c.}], \quad (1.42)$$

auquel cas, en comparant avec l'expression quantique, α_{μ} n'est rien d'autre que la valeur moyenne de de l'opérateur \hat{a}_{μ} . Classiquement, l'état du mode μ à un instant t est donc représenté par un point du plan complexe. D'après (1.39), on constate que l'évolution libre de α_{μ} est décrite par la relation $\alpha_{\mu}(t) = \alpha_{\mu}(0) \exp(-i\omega_{\mu}t)$ et décrit par conséquent un cercle dans le plan complexe à la pulsation ω_{μ} . Cette dépendance temporelle correspond à la décomposition du champ en ondes planes progressives monochromatiques, et le module de α (ou plutôt son module carré) représente, à un facteur numérique près, l'énergie (ou le nombre de photons) dans le mode, et son argument la phase du mode.

Quantiquement, la valeur de \hat{a} n'est en générale pas définie et peut fluctuer d'une mesure à l'autre. L'état du champ va par conséquent être représenté par une tache dans l'espace des phases, dont l'extension dans les directions radiales et orthoradiales vont représenter les fluctuations de phase et de nombre de photons du champ électromagnétique. La surface minimale de cette tache est donnée par la relation d'incertitude temps énergie $\Delta E \Delta t \gtrsim \hbar$. En effet, l'énergie du mode vaut $\hbar\omega_{\mu}n$ et la phase du champ à l'instant t est $\varphi = \omega_{\mu}t + \varphi_0$. En différenciant ces relations, on déduit de l'inégalité temps énergie que $\delta n \delta \varphi \gtrsim 1$.

Précisons cette relation en considérant l'état d'un champ quasi-classique dont la variable normale fluctue peu autour de sa valeur moyenne α . Ceci revient à dire que si l'on pose $\hat{a} = \bar{\alpha} + \delta\hat{a}$, les valeurs prises par $\delta\hat{a} = \hat{a} - \bar{\alpha}$ sont resserrées autour de 0. Considérons le nombre de photons dans le mode. L'observable correspondante \hat{n} peut s'écrire sous la forme $\hat{n} = |\bar{\alpha}|^2 + \delta\hat{n} + \dots$, avec

$$\delta\hat{n} = \bar{\alpha}^* \hat{a} + \bar{\alpha} \hat{a}^{\dagger} - 2|\bar{\alpha}|^2. \quad (1.43)$$

Classiquement, la phase de α (son argument) peut être définie par $\tan \varphi = \alpha''/\alpha'$, où l'on a posé $\alpha = \alpha' + i\alpha''$. Si l'on suppose que α est une variable aléatoire fluctuant faiblement autour de sa valeur moyenne $\bar{\alpha}$, la fluctuation de la phase peut s'écrire

$$\frac{\delta\varphi}{\cos^2 \bar{\varphi}} = \frac{\bar{\alpha}' \delta\alpha'' - \bar{\alpha}'' \delta\alpha'}{\alpha'^2}. \quad (1.44)$$

En notant que $\cos \bar{\varphi} = \bar{\alpha}'/|\bar{\alpha}|$ et que $\delta\alpha = \alpha - \bar{\alpha}$, on en déduit que

$$\delta\varphi = \frac{\text{Im}(\alpha\bar{\alpha}^*)}{|\bar{\alpha}|^2} = \frac{\alpha\bar{\alpha}^* - \alpha^*\bar{\alpha}}{2i|\bar{\alpha}|^2}. \quad (1.45)$$

Quantiquement, on remplace α par l'opérateur \hat{a} , ce qui permet de définir l'opérateur fluctuation de la phase par

$$\delta\hat{\varphi} = \frac{\bar{\alpha}^* \hat{a} - \bar{\alpha} \hat{a}^{\dagger}}{2i|\bar{\alpha}|^2}. \quad (1.46)$$

Le commutateur de $\delta\hat{n}$ et $\delta\hat{\varphi}$ se déduit alors sans difficulté de la condition $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$ et l'on a alors

$$[\delta\hat{n}, \delta\hat{\varphi}] = i \quad (1.47)$$

En utilisant la relation d'Heisenberg $\Delta A \Delta B \geq |\langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle|/2$, on en déduit que

$$\Delta n \Delta \varphi \geq \frac{1}{2}. \quad (1.48)$$

Illustrons cette inégalité dans le cas limite d'un état de Fock où le nombre de photon est parfaitement défini. Afin de simplifier la discussion, on ne considère ici qu'un seul mode du champ électromagnétique et l'on injecte à $t = 0$ n photons dans le mode considéré. On constate alors que le champ électrique moyen $\langle \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) \rangle$ associé à cet état vaut 0, puisque l'on peut l'écrire

$$\langle \hat{\mathbf{E}} \rangle = \langle n | i \mathcal{E}_0 \left(\frac{\hat{a} - \hat{a}^\dagger}{\sqrt{2}} \right) | n \rangle = 0, \quad (1.49)$$

car l'action de \hat{a} et \hat{a}^\dagger donnent naissance aux états $|n+1\rangle$ et $|n-1\rangle$ par définition orthogonaux à $|n\rangle$. L'état $|n\rangle$ étant un état propre du hamiltonien, le système va y rester à tout instant ultérieur, et donc à tout t , on aura $\langle \hat{\mathbf{E}} \rangle = 0$. Ce résultat s'interprète immédiatement à la lumière de l'inégalité de Heisenberg puisque dans le cas présent, $\delta n = 0$ et donc $\delta \varphi = \infty$. La phase du champ électromagnétique est complètement indéterminée et donc les mesures successives du champ se brouillent du fait des fluctuations de phase.

1.4.2 Fluctuations quantiques du vide

La conséquence la plus directe et la plus paradoxale du formalisme développé ici est l'existence d'un champ électromagnétique fluctuant dans le vide (ou dit autrement en l'absence de photons). En effet, si l'on s'intéresse à l'énergie électromagnétique la formule (1.30) prédit que pour $n_\mu = 0$, il existe une énergie résiduelle

$$E_{\text{vide}} = \sum_{\mu} \frac{\hbar \omega_{\mu}}{2}. \quad (1.50)$$

Comme la densité d'énergie électromagnétique vaut $\varpi = \varepsilon_0 E^2/2 + B^2/2\mu_0$, ceci signifie nécessaire que E^2 , B^2 ou les deux possèdent une valeur moyenne non nulle (en fait un théorème d'équipartition montre que les contributions électriques et magnétiques sont égales). L'existence et la mise en évidence de ces fluctuations posent d'évidents problèmes. Tout d'abord, prise formellement, l'expression (1.50) est divergente et implique donc une densité d'énergie en principe infinie¹⁵. On peut se débarrasser formellement de ce problème en repérant

15. Cette divergence n'est que l'une des nombreuses surgissant en électrodynamique quantique et dans lesquelles les physiciens du milieu du XXème siècle ont longtemps été empêtrés sans savoir quel sens donner à ces résultats infinis. La situation a été par la suite clarifiée grâce

les énergies par rapport à E_{vide} auquel cas la théorie redevient finie, mais on se retrouve alors confronté à un nouveau paradoxe : s’il est si facile de “balayer” E_{vide} sous le tapis, qu’en est-il des fluctuations de \mathbf{E} et \mathbf{B} ? Par ailleurs, si ces fluctuations existent réellement, comment les observer ? En effet, la détection d’un signal électromagnétique nécessite un transfert d’énergie du champ au photodétecteur. Comme le vide est par définition l’état d’énergie minimale du champ électromagnétique, il ne peut pas exciter le détecteur qui ne sera donc pas sensible aux fluctuations de points zéros.

Déplacement de Lamb du niveau 2S de l’atome d’hydrogène

Dans la théorie de Schrödinger de l’atome d’hydrogène, les niveaux 2S et 2P sont dégénérés. Cependant, lorsque l’on inclue les effets relativistes en utilisant l’équation de Dirac, on trouve que le niveau 2P se scinde en deux sous-niveaux, notés $2P_{1/2}$ et $2P_{3/2}$ formant la structure fine de l’atome d’hydrogène¹⁶. Dans la théorie de Dirac, les niveaux $2S_{1/2}$ et $2P_{1/2}$ restent cependant en principe dégénérés. En 1947, Lamb et Retherford mirent expérimentalement en évidence une levée de dégénérescence de ces deux niveaux d’environ 1 GHz, ce que l’on nomme depuis le *déplacement de Lamb* [10], qui fut rapidement interprété par Bethe comme un effet des fluctuations du vide électromagnétique [3]. Cette mesure constituant la première manifestation expérimentale des effets d’électrodynamique quantique fournissait donc la possibilité de tester les théories quantiques du rayonnement de l’époque.

Le calcul exact de cet effet relève d’un formalisme trop avancé pour le présent propos, et nous nous contenterons d’une approche semi-classique proposée par T. Welton [12]. Dans cette approche, si l’on adopte une description classique du mouvement de l’électron, on remarque que celui-ci est libre, la position \mathbf{r} de son centre de masse fluctue sous l’effet des fluctuations quantiques du champ électrique selon l’équation

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = q_e \mathbf{E}(\mathbf{r}, t), \quad (1.51)$$

où \mathbf{E} désigne le champ électrique fluctuant du vide. L’existence de ces fluctuations implique que l’électron explore une sphère de rayon $\sim \rho$. Dans le cas d’un atome d’hydrogène, l’énergie d’interaction de l’électron avec le noyau est donc moyennée sur cette sphère. Si l’on met la position de l’électron sous la forme $\bar{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\rho}$, où $\bar{\mathbf{r}}$ est la position moyenne de l’électron. L’énergie vue par l’électron est donc

au développement des techniques de renormalisation inventées notamment par R.P. Feynman et généralisée par Wilson.

16. En notation spectroscopique un état nL_J est caractérisé par un nombre quantique principal n , un moment cinétique orbital L et un moment cinétique *total* (orbital + spin) J . Comme $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$, les valeurs permises pour J sont comprises entre $|L - S|$ et $L + S$. Pour un niveau P ($L = 1$) et un électron de spin $1/2$, les valeurs permises pour J sont donc $J = 1/2$ et $J = 3/2$, alors que pour le niveau S, $L = 0$ et la seule valeur permise pour le moment cinétique total est $J = 1/2$

$$V(\bar{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\rho}) = V(\bar{\mathbf{r}}) + \sum_i \rho_i \partial_i V + \frac{1}{2} \sum_{ij} \rho_i \rho_j \partial_{ij} V + \dots \quad (1.52)$$

Le premier terme correspond au potentiel coulombien. Moyenné sur les fluctuations quantiques du champ, le deuxième terme disparaît puisque par définition $\langle \rho_i \rangle = 0$. Enfin, le troisième terme donne naissance à une moyenne non-nulle, avec $\langle \rho_x^2 \rangle = \langle \rho_y^2 \rangle = \langle \rho_z^2 \rangle = \langle \rho^2 \rangle / 3$ et $\langle \rho_i \rho_j \rangle = 0$ pour $i \neq j$. On en déduit donc que

$$\langle V \rangle = V(r) + \frac{\langle \rho^2 \rangle}{6} \nabla^2 V(r). \quad (1.53)$$

D'après la relation

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{4\pi r} \right) = -\delta(\mathbf{r}), \quad (1.54)$$

on voit que les fluctuations de champ électrique du vide donnent lieu à un nouveau terme dans le potentiel d'interaction, localisé à l'origine. Comme les états S sont les seuls à posséder une fonction d'onde non-nulle en 0, on voit que ce sont les seuls à être influencés par les fluctuations du vide et explique la levée de dégénérescence entre états S et P .

Il resterait en principe à évaluer $\langle \rho^2 \rangle$. Si l'on décompose le champ électrique selon ses modes propres, on constate que l'amplitude des fluctuations de l'électron à la fréquence ω_μ est simplement $\rho_\mu = -q_e \mathcal{E}_\mu / m\omega^2$.

La valeur moyenne du champ électrique dans le vide se calcule sans difficulté et formellement s'écrit

$$\langle \hat{\rho}^2 \rangle = \frac{q_e^2}{m^2} \sum_\mu \frac{\hbar}{\varepsilon_0 2\omega_\mu^3 V}. \quad (1.55)$$

Si l'on transforme la somme en une intégrale en passant à la limite thermodynamique $V \rightarrow \infty$, on obtient

$$\langle \hat{\rho}^2 \rangle = \frac{q_e^2}{2m^2} \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{\hbar}{\varepsilon_0 c^3 k^3}. \quad (1.56)$$

En intégrant en coordonnées sphériques, on pose $d^3 \mathbf{k} = 4\pi k^2 dk$. On constate que l'intégrand varie en $1/k$ et aboutit à une divergence logarithmique aux petites et aux grandes valeurs de k . On fixe la coupure infrarouge à $k \sim 1/a_0$ où a_0 est le rayon de Bohr. En effet, lorsque la longueur d'onde devient grande devant la taille de l'atome, le rayonnement n'est plus capable de "résoudre" l'électron individuel et l'équation (1.51) n'est plus valable. La coupure ultraviolette est fixée par l'entrée dans le domaine relativiste. En effet, pour des photons de haute énergie, le transfert d'impulsion aux électrons est importante et peut les amener dans le domaine relativiste. Après absorption d'un photon, la vitesse de l'électron vaut $v \sim \hbar k / m$ et devient donc relativiste pour $k \sim mc / \hbar = \lambda_c^{-1}$, où

λ_c désigne la longueur d'onde de Compton. On obtient donc dans cette approximation

$$\langle \widehat{\rho}^2 \rangle = \frac{2e^2 \hbar}{\pi m^2 c^3} \ln(\lambda_c/a_0). \quad (1.57)$$

De cette analyse on déduit d'après l'équation (1.53) que les fluctuations du vide ajoutent au potentiel coulombien en $1/r$ une contribution

$$\widehat{V}_{\text{QED}} = \frac{4e^4 \hbar}{3m^2 c^3} \ln(\lambda_c/a_0) \delta(\mathbf{r}). \quad (1.58)$$

Si l'on traite ce terme en perturbation à l'ordre 1, il donne une déviation

$$\delta E = \langle \psi | \widehat{V}_{\text{QED}} | \psi \rangle = \frac{4e^4 \hbar}{3m^2 c^3} \ln(\lambda_c/a_0) |\psi(0)|^2. \quad (1.59)$$

Dimensionnellement, $|\psi(0)|^2$ est de l'ordre de $1/a_0^3$ et donne donc un décalage de l'ordre du GHz, en accord avec les mesure expérimentales.

Effet Casimir

Une autre manière de sonder les fluctuations du vide est de modifier la structure des modes propres en changeant la taille du volume de quantification. Concrètement, plus le volume est important et plus les modes propres du champ électromagnétique sont resserrés. Comme chaque mode contribue à une énergie $\hbar\omega/2$ dans le vide, on obtient donc dans un intervalle de fréquence donné des densités spectrales de fluctuations d'énergie d'autant plus importantes que la boîte est grande.

Cette idée a été exploitée par H.B.G. Casimir pour proposer une mise en évidence expérimentale des fluctuations du vide. L'idée se fonde sur l'égalité entre pression de radiation sur un conducteur parfait et densité d'énergie électromagnétique¹⁷. Si l'on considère un miroir parfaitement conducteur, il s'exerce sur chaque face une pression de radiation due aux fluctuations d'énergie du vide de part et d'autre du miroir. Par symétrie, lorsque le miroir est seul, les pressions sur chaque face se compensent et la résultante de la pression de radiation est nulle. Considérons à présent le cas d'une cavité constituée de deux miroirs en vis-à-vis et séparés d'une distance L . Dans la cavité, les modes sont moins resserrés qu'à l'extérieur, ce qui implique donc une pression de radiation du vide plus faible sur la face interne des miroirs. On s'attend par conséquent à une force nette tendant à attirer les deux miroirs. Dans son article original, Casimir dérive l'expression exacte de la force par unité de surface s'exerçant sur chaque miroir. On se contente ici d'une analyse dimensionnelle qui permet de retrouver - à un facteur numérique près - la formule exacte (pour un calcul rigoureux, on pourra se référer à [8]).

17. À l'angle d'incidence près, comme on s'en convainc en étudiant la réflexion d'un photon sur une surface réfléchissante.

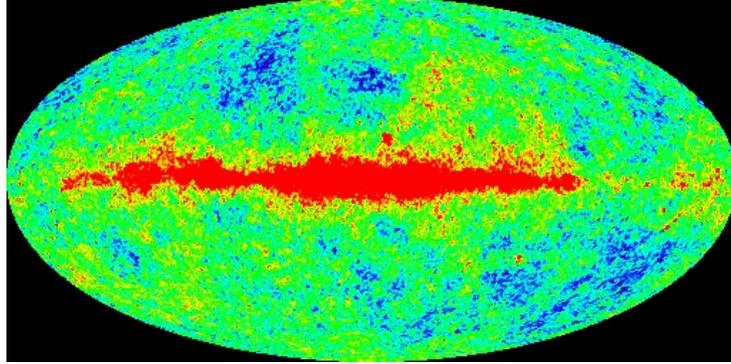


FIGURE 1.6 – Fluctuations du Rayonnement Cosmologique mesurées par la mission WMAP.

Dans le problème de la force de Casimir, la pression s'exerçant sur les miroirs n'est fonction que de la distance L (la distance entre miroirs), \hbar (car le problème est d'essence quantique) et c (car la vitesse de la lumière caractérise les phénomènes électromagnétiques), les miroirs étant supposés ici parfaits, il n'y a pas besoin de paramètres physiques supplémentaires pour caractériser leurs propriétés. On écrit donc la pression sous la forme

$$P \propto L^\alpha \hbar^\beta c^\gamma. \quad (1.60)$$

La résolution de l'équation aux dimensions correspondantes aboutit après un calcul sans difficulté aux valeurs suivantes $\alpha = -4$, $\beta = 1$ et $\gamma = 1$, ce qui est confirmé par le résultat de Casimir

$$P = \frac{\pi^2 \hbar c}{240 L^4}. \quad (1.61)$$

Énergie du vide et cosmologie

La soustraction de l'énergie du vide pour se débarrasser de sa valeur infinie n'est en réalité réalisable que si l'on néglige la gravité. En effet dans le cas contraire, d'après la loi d'Einstein $E = mc^2$ toute forme d'énergie contribue à la densité de masse et agit donc comme une source de champ de gravitation. L'énergie de point zéro infinie (ou tout du moins très grande) va donc induire une importante courbure de l'espace-temps et un calcul de relativité générale montre que le rayon de courbure de l'univers devrait être de l'ordre de grandeur de la distance Terre-Lune.

les mesures astrophysiques les plus récentes de l'expansion galactique résultant de l'analyse de supernovae ou du rayonnement cosmologique indiquent cependant l'existence d'une "énergie sombre" pouvant résulter des fluctuations des différents champs quantiques du modèle standard. Cependant, la valeur expérimentale de la densité d'énergie noire est des dizaines d'ordres de grandeur plus

faible que celle prédite par la physique quantique et la réconciliation de ces deux valeurs reste un des problèmes ouverts de la physique contemporaine.

1.5 Couplage à une source classique

1.5.1 Équations de Maxwell en présence de sources de courant

On s'intéresse ici au problème classique de rayonnement par une antenne que l'on décrit par une distribution de courant $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ satisfaisant la condition $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$ de façon à conserver une densité de charge nulle. On admet alors que le couplage du courant au champ revient à ajouter un terme d'interaction

$$\hat{H}_1 = - \int (\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \cdot \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r})) d^3\mathbf{r} \quad (1.62)$$

au hamiltonien libre (1.30). La pertinence de ce hamiltonien de couplage peut cependant être discutée *a posteriori*, puisque \hat{H}_1 est local (il couple \mathbf{j} et \mathbf{A} au même point), invariant de jauge (on le vérifie en utilisant le théorème de Green-Ostrogradski et l'indivergence du courant en régime stationnaire) et invariant relativiste puisque l'intégrand est égal au scalaire de Lorentz $j_\mu A^\mu$.

Montrons que \hat{H}_1 redonne bien les équations de Maxwell pour les valeurs moyennes du champ électromagnétique. Nous n'avons pour cela qu'à vérifier l'équation de Maxwell-Ampère, puisque les trois autres traduisent la transversalité du champ et la relation entre \mathbf{E} , \mathbf{B} et \mathbf{A} . Commençons par réexprimer \hat{H}_1 dans la base des états μ . Puisque \mathbf{j} est de divergence nulle, c'est un champ de vecteur transverse dans l'espace de Fourier et on peut donc le décomposer comme

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mu} j_{\mu}(t) e^{i\mathbf{k}_{\mu} \cdot \mathbf{r}} \mathbf{e}_{\mu}, \quad (1.63)$$

où les j_{μ} sont des fonctions du temps à valeurs complexes. Soit $\mu = (\mathbf{k}, \sigma)$, on note $\bar{\mu} = (-\mathbf{k}, \sigma)$ correspondant au mode de vecteur d'onde opposé à celui de μ et de même polarisation. On fait par ailleurs l'hypothèse que les bases de polarisations associées à \mathbf{k} et $-\mathbf{k}$ sont identiques, et que l'on a donc $\mathbf{e}_{\mu} = \mathbf{e}_{\bar{\mu}}$. Avec ces notations, et en faisant le changement de variable $\mu = \bar{\mu}'$, on note que \mathbf{j} peut aussi s'écrire comme

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mu'} j_{\bar{\mu}'}(t) e^{i\mathbf{k}_{\bar{\mu}'} \cdot \mathbf{r}} \mathbf{e}_{\bar{\mu}'} = \sum_{\mu'} j_{\bar{\mu}'}(t) e^{-i\mathbf{k}_{\mu'} \cdot \mathbf{r}} \mathbf{e}_{\mu'} \quad (1.64)$$

En passant au complexe conjugué et en notant que μ' étant une variable muette peut être rebaptisé μ , on trouve que

$$\mathbf{j}^*(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mu} j_{\bar{\mu}}^*(t) e^{i\mathbf{k}_{\mu} \cdot \mathbf{r}} \mathbf{e}_{\mu} \quad (1.65)$$

Le courant étant une grandeur réelle, et par unicité de la décomposition de Fourier, on trouve, en comparant à (1.63), que $j_{\bar{\mu}} = j_{\mu}^*$. Calculons alors \widehat{H}_1 en fonction des j_{μ} . On a en écrivant explicitement les sommes sur les différents modes

$$\int d^3\mathbf{r} \left(\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \cdot \widehat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}) \right) = - \int d^3\mathbf{r} \sum_{\mu, \mu'} A_{\mu}^0 j_{\mu'}(t) \mathbf{e}_{\mu} \cdot \mathbf{e}_{\mu'} e^{i\mathbf{k}_{\mu'} \cdot \mathbf{r}} \left(\widehat{a}_{\mu} e^{i\mathbf{k}_{\mu} \cdot \mathbf{r}} + \widehat{a}_{\mu}^{\dagger} e^{-i\mathbf{k}_{\mu} \cdot \mathbf{r}} \right). \quad (1.66)$$

Les intégrales spatiales se calculent sans difficulté, et ne sont non nulles que pour $\mathbf{k}_{\mu} = \mathbf{k}_{\mu'}$ (resp. $\mathbf{k}_{\mu} = -\mathbf{k}_{\mu'}$) pour le terme en $\widehat{a}_{\mu}^{\dagger}$ (resp. \widehat{a}_{μ}). En ajoutant la condition d'égalité des polarisations imposée par le produit scalaire $\mathbf{e}_{\mu} \cdot \mathbf{e}_{\mu'}$, on en déduit que la somme sur μ' se résume à $\mu' = \mu$ (resp. $\mu' = \bar{\mu}$), soit

$$\widehat{H}_1 = -L^3 \sum_{\mu} A_{\mu}^0 \left(j_{\mu}^* \widehat{a}_{\mu} + j_{\mu} \widehat{a}_{\mu}^{\dagger} \right). \quad (1.67)$$

On remarque que le hamiltonien total $\widehat{H} = \widehat{H}_0 + \widehat{H}_1$ se met sous la forme d'une somme d'opérateurs découplés n'opérant chacun que sur un seul mode μ , à savoir

$$\widehat{H} = \sum_{\mu} \left[\hbar \omega_{\mu} (\widehat{a}_{\mu}^{\dagger} \widehat{a}_{\mu} + 1/2) - A_{\mu}^0 L^3 \left(j_{\mu}^*(t) \widehat{a}_{\mu} + j_{\mu}(t) \widehat{a}_{\mu}^{\dagger} \right) \right], \quad (1.68)$$

ce qui permet de ne s'intéresser qu'à un seul mode à la fois. Avant de poursuivre, discutons la forme générale de \widehat{H}_1 . On constate que celui-ci ne commute pas avec $\widehat{n}_{\mu} = \widehat{a}_{\mu}^{\dagger} \widehat{a}_{\mu}$, le nombre de photons dans le mode μ , ce qui signifie que le nombre de photons n'est pas constant lorsque le champ électromagnétique est couplé au courant. Plus précisément, on constate que \widehat{H}_1 est linéaire en opérateurs création et annihilation, ce qui s'interprète par l'émission et l'absorption d'un photon à la fois, comme on s'en convainc aisément en étudiant l'effet de \widehat{H}_1 à l'ordre 1 en perturbation.

Pour retrouver la dernière équation de Maxwell, nous allons chercher l'évolution de $\langle \widehat{a}_{\mu} \rangle$ en utilisant comme précédemment le théorème d'Ehrenfest. En procédant de la sorte, on obtient immédiatement

$$i \frac{d\langle \widehat{a}_{\mu} \rangle}{dt} = \omega_{\mu} \langle \widehat{a}_{\mu} \rangle - \frac{A_{\mu}^0 L^3}{\hbar} j_{\mu}(t), \quad (1.69)$$

et en passant au complexe conjugué

$$-i \frac{d\langle \widehat{a}_{\mu}^{\dagger} \rangle}{dt} = \omega_{\mu} \langle \widehat{a}_{\mu}^{\dagger} \rangle - \frac{A_{\mu}^0 L^3}{\hbar} j_{\bar{\mu}}(t). \quad (1.70)$$

En multipliant par $\omega_{\mu} A_{\mu}^0$ et en sommant sur μ , on en déduit d'après la définition de l'opérateur champ électrique (Eq. 1.34)

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial \langle \widehat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) \rangle}{\partial t} = \sum_{\mu} \left[A_{\mu}^0 k_{\mu}^2 \langle \widehat{a}_{\mu} \rangle \mathbf{e}_{\mu} - \frac{\mu_0}{2} j_{\mu}(t) \right] e^{i\mathbf{k}_{\mu} \cdot \mathbf{r}} + \text{c.c.} \quad (1.71)$$

Le premier terme du membre de droite ainsi que son complexe conjugué vont donner naissance au rotationnel du champ magnétique, puisque d'après l'équation (1.35), on a

$$\nabla \wedge \widehat{\mathbf{B}}(\mathbf{r}) = i \sum_{\mu} A_{\mu}^0 [i\mathbf{k}_{\mu} \wedge (\mathbf{k}_{\mu} \wedge \mathbf{e}_{\mu}) e^{i\mathbf{k}_{\mu} \cdot \mathbf{r}} \widehat{a}_{\mu} - \text{h.c.}] \quad (1.72)$$

$$= \sum_{\mu} A_{\mu}^0 [k_{\mu}^2 \mathbf{e}_{\mu} e^{i\mathbf{k}_{\mu} \cdot \mathbf{r}} \widehat{a}_{\mu} + \text{h.c.}], \quad (1.73)$$

où l'on a utilisé la formule du double produit vectoriel ainsi que la transversalité de \mathbf{e}_{μ} .

Pour ce qui est du second terme de l'équation (1.71), on reconnaît directement la décomposition en série de Fourier de \mathbf{j} . Comme cette grandeur est réelle, elle est égale à son complexe conjugué et l'on obtient donc en définitive

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial \langle \widehat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) \rangle}{\partial t} = \nabla \wedge \langle \widehat{\mathbf{B}}(\mathbf{r}) \rangle - \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}, t), \quad (1.74)$$

qui n'est autre que l'équation de Maxwell-Ampère en présence d'une densité de courant.

1.5.2 États cohérents du champ électromagnétique

Nous avons montré que le hamiltonien de couplage (1.62) redonnait bien les équations de Maxwell pour la valeur moyenne du champ électromagnétique. Nous allons ici affiner ce résultat et montrer que l'on peut même trouver les solutions exactes de l'équation de Schrödinger pour l'état quantique du champ. Ce résultat nous permettra ainsi d'introduire la famille des états cohérents - aussi appelés états quasi-classiques - qui par définition décrivent un champ classique dans le formalisme quantique.

Dans le cas classique, le potentiel vecteur se met sous la forme

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mu} A_{\mu}^0 \left(\alpha_{\mu, \text{cl}}(t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} + \alpha_{\mu, \text{cl}}^*(t) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \right), \quad (1.75)$$

où la variable normale $\alpha_{\mu, \text{cl}}$ est solution de (1.69), puisque les équations de la théorie quantique redonnent pour les valeurs moyennes des observables les mêmes résultats que dans le cas classique.

Dans le cas quantique, nous allons montrer que, si l'on part d'un champ électromagnétique vide de tout photon, l'état du champ va se mettre à l'instant t sous la forme

$$|\psi(t)\rangle = \bigotimes_{\mu} |\alpha_{\mu}(t)\rangle, \quad (1.76)$$

où les état $|\alpha_{\mu}(t)\rangle$ sont des états appelés *états cohérents* satisfaisant la condition

$$\widehat{a}_{\mu} |\alpha_{\mu}\rangle = \alpha_{\mu} |\alpha_{\mu}\rangle, \quad (1.77)$$

et où $\alpha_\mu(t)$ est la variable normale associée au problème classique solution de l'équation (1.70).

Afin de démontrer ce résultat, on commence par noter que le hamiltonien décrivant le champ s'écrit comme une somme d'opérateurs opérant chacun sur un seul mode μ . Ceci permet de découpler les différents modes et de ne considérer que le hamiltonien

$$\hat{H} = \hbar\omega(\hat{a}^\dagger\hat{a} + 1/2) + A^0L^3(j^*(t)\hat{a} + j(t)\hat{a}^\dagger), \quad (1.78)$$

où pour alléger les notations, nous nous sommes débarrassés des indices μ . Supposons qu'à $t = 0$ le champ soit dans l'état vide $|0\rangle$, par définition de l'opérateur évolution, le système sera à l'instant t dans l'état

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t)|0\rangle, \quad (1.79)$$

où \hat{U} est solution de l'équation

$$i\hbar\frac{d\hat{U}}{dt} = \hat{H}\hat{U} \quad (1.80)$$

avec la condition initiale

$$\hat{U}(0) = 1. \quad (1.81)$$

On introduit alors $\hat{b}(t) = \hat{U}^\dagger\hat{a}\hat{U}$. D'après l'équation (1.80), $\hat{b}(t)$ satisfait l'équation différentielle

$$i\hbar\frac{d\hat{b}}{dt} = \hat{U}^\dagger[\hat{a}, \hat{H}]\hat{U}, \quad (1.82)$$

avec la condition initiale $\hat{b}(0) = \hat{a}$. Pour calculer le commutateur, on développe le terme d'énergie potentiel dans \hat{H} que l'on écrit

$$\hat{H}(t) = \hat{H}_0 + \hat{H}_1, \quad (1.83)$$

avec

$$\hat{H}_0 = \hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{a} \quad (1.84)$$

$$\hat{H}_1 = A^0L^3(j^*(t)\hat{a} + j(t)\hat{a}^\dagger) \quad (1.85)$$

Nous avons déjà calculé le commutateur $[\hat{a}, \hat{H}_0]$ dans l'étude des équations de Maxwell dans le vide où nous avons montré que

$$[\hat{a}, \hat{H}_0] = \hbar\omega\hat{a}. \quad (1.86)$$

Le terme en \hat{H}_1 se calcule sans difficulté à l'aide de la condition $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$ liant les opérateurs création et annihilation et nous donne

$$[\widehat{a}, \widehat{H}_1] = A^0 L^3 j(t). \quad (1.87)$$

En utilisant ces identités, on trouve finalement que \widehat{b} est solution de l'équation différentielle

$$i\hbar \frac{d\widehat{b}}{dt} = -\hbar\omega\widehat{b} + A^0 L^3 j(t), \quad (1.88)$$

avec la condition initiale $\widehat{b}(0) = \widehat{a}$. Cette équation différentielle peut se récrire comme

$$-i \frac{d\widehat{b}}{dt} = \omega\widehat{b} - \frac{A^0 L^3}{\hbar} j(t), \quad (1.89)$$

où l'on reconnaît l'équation (1.69) donnant l'évolution classique de la variable normale α . Elle s'intègre donc sans difficulté et nous donne

$$\widehat{b}(t) = \widehat{a}e^{-i\omega t} + \alpha_{\text{cl}}(t), \quad (1.90)$$

où α_{cl} désigne la solution du problème classique (Eq. 1.69). À l'aide de ce résultat, montrons que si l'on prépare le système dans l'état vide $|0\rangle$, alors il restera dans un état cohérent $|\alpha_{\text{cl}}(t)\rangle$ où $\alpha_{\text{cl}}(t)$ suit l'évolution classique de la variable normale. On rappelle que par définition de l'opérateur d'évolution, l'état du système à l'instant t est $|\psi(t)\rangle = \widehat{U}(t)|\psi(0)\rangle$. Pour montrer que $|\psi(t)\rangle$ est un état cohérent, il faut vérifier qu'il reste état propre de \widehat{a} et l'on calcule donc

$$\widehat{a}|\psi(t)\rangle = \widehat{a}\widehat{U}(t)|\alpha_0\rangle = \widehat{U}\widehat{b}(t)|0\rangle, \quad (1.91)$$

où l'on a utilisé l'unitarité de \widehat{U} permettant d'écrire $\widehat{U}^\dagger\widehat{U} = 1$. En utilisant l'expression de $\widehat{b}(t)$ on en déduit que

$$\widehat{a}|\psi(t)\rangle = \widehat{U}(\widehat{a}e^{-i\omega t} + \alpha_{\text{cl}}(t))|0\rangle = \alpha_{\text{cl}}(t)|\psi(t)\rangle, \quad (1.92)$$

où l'on a utilisé la condition $\widehat{a}|0\rangle = 0$. On en déduit donc que, comme annoncé, $|\psi(t)\rangle$ est un état cohérent associé à $\alpha(t) = \alpha_{\text{cl}}(t)$ identique à l'évolution de la variable normale de l'oscillateur classique.

1.5.3 Propriétés des états cohérents

Décomposition sur les états de Fock

Par définition les états cohérents sont solutions de l'équation aux valeurs propres

$$\widehat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle. \quad (1.93)$$

Décomposons $|\alpha\rangle$ sur la base des états de Fock $|n\rangle$ en écrivant

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle \quad (1.94)$$

avec $\sum |c_n|^2 = 1$. En utilisant l'action de l'opérateur d'annihilation sur un état $|n\rangle$, on a

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \sqrt{n} |n-1\rangle = \sum_{n'=0}^{\infty} c_{n'+1} \sqrt{n'+1} |n'\rangle, \quad (1.95)$$

où pour établir la deuxième égalité on a posé $n' = n - 1$ et où l'on a noté que le terme $n = 0$ ne contribuait pas à la somme en raison du facteur \sqrt{n} s'annulant pour $n = 0$. En projetant l'équation aux valeurs propres sur l'état $|n\rangle$, on en déduit donc la relation $c_{n+1} \sqrt{n+1} = \alpha c_n$, soit après une récurrence immédiate

$$c_n = c_0 \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}. \quad (1.96)$$

La valeur de c_0 s'obtient en normalisant α . On a en effet $|c_n|^2 = |c_0|^2 |\alpha|^{2n}/n!$, et donc

$$\sum_n |c_n|^2 = |c_0|^2 \sum_n \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} = |c_0|^2 e^{|\alpha|^2}. \quad (1.97)$$

En choisissant la phase de c_0 de façon à ce qu'il soit réel on en déduit que $c_0 = \exp(-|\alpha|^2/2)$ et donc

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \quad (1.98)$$

1.5.4 Fluctuations des phases des états cohérents

Dans l'espace des phases, les états cohérents correspondent à des "taches" centrées sur $\langle \alpha | \hat{a} | \alpha \rangle = \alpha$. Ainsi que nous l'avons vu plus haut, l'amplitude des fluctuations quantiques du champ peut être caractérisés par des fluctuations de la phase et du nombre de photons.

Pour effectuer ce calcul, on commence par noter que la valeur moyenne sur un état cohérent d'un produit de \hat{a} et \hat{a}^\dagger rangés dans l'ordre dit *normal* - opérateurs annihilation à droite des opérateurs création - s'écrit simplement

$$\langle \alpha | \hat{a}^{\dagger m} \hat{a}^p | \alpha \rangle = \alpha^{*m} \alpha^p. \quad (1.99)$$

On utilise cette propriété pour calculer les fluctuations de nombre de photons et de phase, et l'on obtient alors

$$\Delta N^2 = |\alpha|^2 \quad (1.100)$$

$$\Delta \varphi^2 = |\alpha|^{-2}, \quad (1.101)$$

autrement dit, $\Delta N \Delta \varphi$ sature la relation d'incertitude phase/nombre d'atomes, ce qui peut d'ailleurs en constituer une définition.

Relation de fermeture

Les états cohérents ne forment pas une famille orthonormée. En effet, si l'on calcule le produit scalaire $\langle \alpha | \alpha' \rangle$, on a en utilisant le développement de l'état cohérent sur la base des $|n\rangle$

$$\langle \alpha | \alpha' \rangle = e^{-(|\alpha|^2 + |\alpha'|^2)/2} \sum_{n,m} \frac{\alpha^{*n} \alpha'^m}{\sqrt{n!m!}} \langle m | n \rangle. \quad (1.102)$$

En utilisant la relation d'orthonormalité $\langle n | m \rangle = \delta_{nm}$, il vient

$$\langle \alpha | \alpha' \rangle = e^{-(|\alpha|^2 + |\alpha'|^2)/2} \sum_n \frac{(\alpha^* \alpha')^n}{n!} = e^{-(|\alpha|^2 + |\alpha'|^2 - 2\alpha^* \alpha')/2}. \quad (1.103)$$

Si l'on prend le module, en notant que $|\exp z| = \exp(\operatorname{Re}(z))$, il vient pour finir

$$|\langle \alpha | \alpha' \rangle| = e^{-|\alpha - \alpha'|^2/2}. \quad (1.104)$$

Bien que n'étant pas orthonormés, les états cohérents forment une famille génératrice de l'espace de Hilbert et l'on a la relation de fermeture

$$\int \frac{d^2\alpha}{\pi} |\alpha\rangle \langle \alpha| = 1, \quad (1.105)$$

où l'on intègre dans le plan complexe des variables α , avec $d^2\alpha = d\operatorname{Re}(\alpha)d\operatorname{Im}(\alpha)$. En effet, en utilisant de nouveau la décomposition des états cohérents sur la base des états de Fock, on trouve que

$$\int d^2\alpha |\alpha\rangle \langle \alpha| = \sum_{nm} \frac{|n\rangle \langle m|}{\sqrt{n!m!}} \int d^2\alpha e^{-|\alpha|^2} \alpha^n \alpha^{*m}. \quad (1.106)$$

Posons $\alpha = \rho e^{i\theta}$ et intégrons alors la variable α en coordonnées polaires. On obtient dans ce cas

$$\int d^2\alpha e^{-|\alpha|^2} \alpha^n \alpha^{*m} = \int \rho d\rho e^{-\rho^2} \rho^{n+m} \int d\theta e^{i(n-m)\theta}. \quad (1.107)$$

L'intégrale sur θ se réalise immédiatement, et donne zéro, sauf lorsque $n = m$, auquel cas elle vaut 2π . On en déduit alors que

$$\int d^2\alpha e^{-|\alpha|^2} \alpha^n \alpha^{*m} = 2\pi \int \rho^{2n+1} d\rho e^{-\rho^2} \quad (1.108)$$

En posant ensuite $\rho^2 = u$ et en notant que $\int u^n e^{-u} du = n!$, on en déduit que

$$\int d^2\alpha |\alpha\rangle\langle\alpha| = \pi \sum_n |n\rangle\langle n| = \pi, \quad (1.109)$$

en utilisant la relation de fermeture $\sum_n |n\rangle\langle n| = 1$.

1.5.5 Évolution libre des états cohérents

Intéressons nous ensuite à l'évolution d'un système préparé à $t = 0$ dans un état cohérent $|\alpha_0\rangle$. Sachant que les états propres de \hat{H}_0 sont déphasés de $\omega_0 t(n + 1/2)$, la linéarité de l'équation de Schrödinger nous permet d'écrire que

$$|\psi(t)\rangle = e^{-|\alpha_0|^2/2} \sum_n \frac{\alpha_0^n}{\sqrt{n!}} e^{-i\omega_0 t(n+1/2)} |n\rangle \quad (1.110)$$

$$= e^{-i\omega_0 t/2} e^{-|\alpha_0|^2/2} \sum_n \frac{(\alpha_0 e^{-i\omega_0 t})^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \quad (1.111)$$

$$= e^{-i\omega_0 t/2} |\alpha_0 e^{-i\omega_0 t}\rangle. \quad (1.112)$$

Autrement dit, durant son évolution le système reste dans un état cohérent dont la variable normale $\alpha(t)$ suit l'évolution classique.

1.6 Source de photons uniques : réalisation et caractérisation

Nous avons vu que le couplage du champ électromagnétique quantique à une source classique aboutissait à un état cohérent du champ. Dans ce paragraphe, nous allons explorer la possibilité de générer des états non classiques du champ et notamment les états de Fock à nombre de photons fixés.

Pour commencer, notons qu'un atome unique ne peut émettre qu'un seul photon à la fois. Les fluctuations de nombre de photons dans une source classique comportant un grand nombre d'atomes proviennent donc du fait que les photons sont émis à des instants différents par des atomes différents. Pour réaliser une source de photon unique, il est donc nécessaire d'isoler une source (atome, molécule etc.) unique.

- *Molécules fluorescentes.* L'utilisation de molécules fluorescente est la première option pouvant venir à l'esprit, par exemple une molécule de rhodamine isolée. Si celle-ci est pompée dans un état excité, elle retombe dans l'état fondamental en émettant un photon unique. L'inconvénient des molécules fluorescentes est le phénomène de "photoblanchiment" qui correspond à la disparition des propriétés de fluorescence après une irradiation trop longue. C'est pourquoi des recherches intensives sont menées pour développer des composés fluorescents à longue durée de vie, tels que les centres colorés ou les boîtes quantiques.

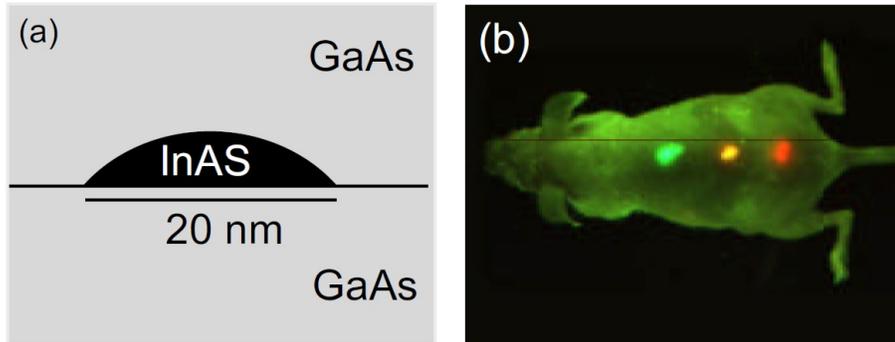


FIGURE 1.7 – a) a) Principe de réalisation d’une boîte quantique semi-conductrice. b) Observation des organes d’une souris vivante par fluorescence de boîtes quantiques semi-conductrices.

- *Centres colorés.* Une voie possible est l’utilisation de centres colorés (i.e. de défauts) dans les cristaux, en particulier les centres N-V du diamant, correspondant à l’association d’un atome d’azote avec une lacune de la matrice de carbone. Chaque centre N-V se comporte comme une molécule fluorescente et peut donc être utilisé comme source de photons uniques.
- *Boîtes quantiques.* Une seconde alternative est l’utilisation de boîtes quantiques, des agrégats d’InAs inclus dans une matrice de GaAs. Ces agrégats sont obtenus en déposant InAs sur un substrat de GaAs. Du fait de la différence de maille entre les deux structures cristallines, il existe une énergie de surface associée à l’interface InAs/GaAs. Pour minimiser cette interface, InAs forme des “gouttes” à la surface du substrat de GaAs. Ces gouttes, de quelques dizaines de nanomètres de diamètre et quelques nanomètres d’épaisseur, sont ensuite recouvertes par un dépôt de GaAs. Bien que stables uniquement à basse température, les techniques aujourd’hui parfaitement maîtrisées de croissance cristalline des semi-conducteurs permettent de les inclure dans des édifices microscopiques plus vastes telles que des micro-cavités qui permettent d’améliorer la directionnalité de la source.

1.6.1 Application à la cryptographie quantique

Le commerce sur internet ou la téléphonie mobile ont étendu du domaine militaire au domaine civil la nécessité de communications cryptées. Le protocole de cryptographie le plus sûr est le cryptage par clef secrète. Il consiste à écrire le message à transmettre en une série m_i de 0 et de 1 et de le coder en la sommant modulo 2 à une suite aléatoire de c_i 0 et de 1 (la clef) de même longueur que le message initial. La suite $m'_i = m_i + c_i$ est transmise d’un correspondant à l’autre sur un canal public puis décodée en effectuant l’opération $m'_i + c_i = m_i$.

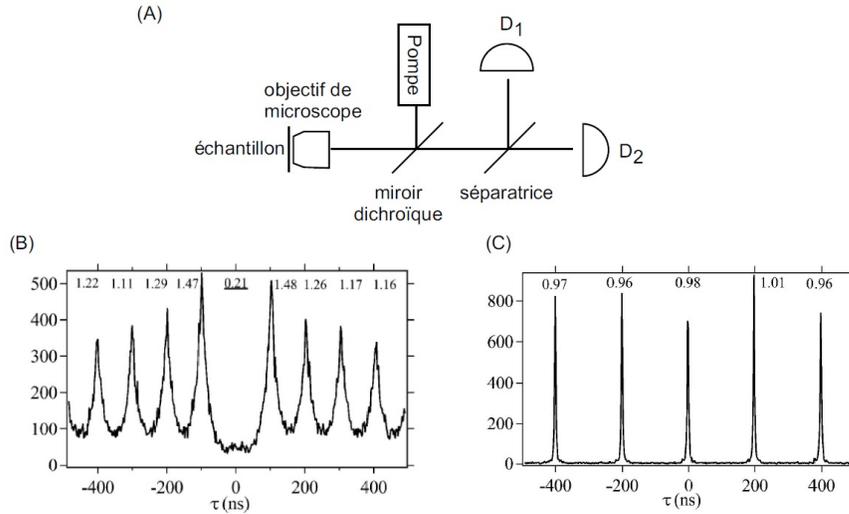


FIGURE 1.8 – Caractérisation d’une source à un photon par corrélation d’intensité (extrait de Beveratos A. *et al.*, Eur. Phys. J. D, **18** 191 (2002)). A) Principe de l’expérience. La source à un photon, ici un centre N-V, est placée sur le porte échantillon d’un objectif de microscope. Le pompage est assuré par un laser pulsé émettant des impulsions de 0.8 ns avec un taux de répétition de 5.3 MHz. Le miroir dichroïque réfléchit la longueur d’onde du laser de pompe (532 nm) et transmet la longueur d’onde d’émission du centre coloré (690 nm). Le nombre de photons émis par la source est mesuré par corrélation temporelle. On mesure le nombre d’événements où un photon est détecté par D_1 à l’instant t et un photon est détecté par D_2 à $t + \tau$. Si la source n’émet qu’un photon à la fois, ce nombre d’événements doit être nul pour $\tau = 0$. B) et C) Résultat de la mesure pour une source à photon unique (B) et une source classique (C). Les pics latéraux correspondent à des photons arrivés dans deux impulsions successives.

Ce protocole bien qu'en principe parfaitement sûr possède deux faiblesses. D'une part il est nécessaire que les deux partenaires (Alice et Bob conventionnellement) connaissent la clef de cryptage c_i . Il se pose donc un problème de distribution de cette clef sur un canal secret. Deuxièmement, une clef ne peut servir qu'une seule fois. On peut en effet montrer que l'on peut reconstruire la clef de cryptage à partir de deux messages codés avec une même clef.

Ces deux difficultés rendent la cryptographie par clef aléatoire inopérante en pratique et on lui préfère plutôt les algorithmes dits à clef publique actuellement en usage de nos jours sur internet. La sécurité de ces protocoles n'est cependant pas absolue : la difficulté du décryptage d'un message codé se fonde sur la difficulté à décomposer un grand nombre en facteurs premiers et est donc tributaire de la puissance de calcul des ordinateurs : on peut notamment montrer que le développement d'un éventuel ordinateur quantique rendrait caduque tous ces algorithmes.

La cryptographie quantique est née en vue de résoudre le problème la communication d'une clef secrète entre Alice et Bob en se fonde sur un des fondements de la mécanique quantique, qui est que la mesure perturbe irrémédiablement l'état d'un système. Dans le protocole le plus simple de cryptographie quantique, les 0 et 1 de la clef secrète sont représentés par les états de polarisation d'un photon : un photon polarisé selon x correspond à 0 et selon y elle correspond à 1.

Imaginons donc qu'Alice génère une succession de photons, dont les polarisations sont choisies aléatoirement dans deux bases de polarisations \mathcal{B} et \mathcal{B}' inclinée à 45° l'une de l'autre. Chaque photon émis est donc caractérisé par deux grandeurs aléatoires, respectivement la base choisie et la polarisation choisie dans cette base, ces deux informations étant conservées par Alice.

Bob, lorsqu'il reçoit les photons émis par Alice, ne connaît pas la base choisie pour coder les photons et va donc mesurer la polarisation de chacun d'eux aléatoirement dans \mathcal{B} et \mathcal{B}' . Pour un photon donné, si Alice et Bob ont fait un même choix de base, l'état de polarisation mesuré par Bob est identique à celui choisi par Alice. En revanche, si la base est mal choisie, Bob a une chance sur deux d'obtenir un résultat différent d'Alice. Une fois les photons tous lus par Bob, Alice communique sur un canal public le choix de base pour chaque photon envoyé : Alice et Bob peuvent donc construire une clef commune en ne conservant que les polarisations de photons mesurées dans une même base.

Pour vérifier la sécurité de ce protocole, imaginons qu'Eve cherche à intercepter la communication entre Alice et Bob. Eve ne connaît pas non plus le choix de polarisation d'Alice et doit donc choisir à chaque photon émis une base de lecture parmi \mathcal{B} et \mathcal{B}' . Statistiquement, elle choisit la même base qu'Alice une fois sur deux. Dans ce cas, elle mesure le bon état de polarisation du photon et celui-ci est ensuite réémis dans le même état de polarisation à Bob. En revanche, lorsque Eve choisit la mauvaise base (\mathcal{B}' pour fixer les idées), va se retrouver aléatoirement polarisé selon x' ou y' lorsqu'il sera émis vers Bob et la mesure de Bob va s'en trouver affecté. En effet, si Bob fait la mesure de l'état de polarisation du photon dans la même base qu'Alice, il ne trouvera pas le même résultat que celle-ci avec une probabilité de 100 %.



FIGURE 1.9 – Système commercial de cryptographie quantique développé par la firme genevoise ID-Quantique (<http://www.idquantique.com/>).

Pour détecter la présence d'Eve, Alice et Bob vont donc sacrifier une partie de la clef qu'ils s'étaient transmis en communiquant publiquement une partie de celle-ci. Comme nous venons de le voir, les polarisations mesurées par Alice et Bob doivent être identiques en l'absence de tout espion, puisque les états des photons conservés par les deux interlocuteurs ont été mesurés dans des bases identiques. Un rapide calcul de probabilité montre que lorsque N photons sont sacrifiés, la probabilité qu'a Eve de passer inaperçu vaut $(3/4)^N$ et tend donc vers 0 rapidement.

Pour être efficace, le protocole de cryptographie quantique nécessite l'utilisation de sources à photons uniques. En effet, si les impulsions envoyées par Alice contenaient plusieurs photons, Eve pourrait en prélever un seul et faire la mesure sur celui-ci, sans perturber le reste des photons : ceci justifie donc la nécessité de recourir à des sources de photons non classiques telles que les centres colorés ou les boîtes quantiques que nous venons de décrire.

1.7 Appendice : Conditions aux limites périodiques

1.7.1 Séries de Fourier

On considère l'ensemble \mathcal{E} des fonctions f possédant des conditions aux limites périodiques sur une boîte cubique de côtés de longueur L parallèles aux axes $x_1 = x$, $x_2 = y$ et $x_3 = z$. Cet espace peut se mettre sous la forme $\mathcal{E} = \mathcal{E}_x \otimes \mathcal{E}_y \otimes \mathcal{E}_z$, où \mathcal{E}_α désigne l'espace des fonctions de la variable $x_{\alpha=1,2,3}$, périodiques et de période L .

En utilisant le théorème de Fourier, un élément f_α de \mathcal{E}_α se décompose en série de Fourier de la forme

$$f_\alpha(x_\alpha) = \sum_{n_\alpha} c_{n_\alpha} e^{2i\pi n_\alpha x_\alpha / L}. \quad (1.113)$$

Cette relation traduit le fait que la famille des exponentielles imaginaires forme une base (hilbertienne) de l'espace \mathcal{E}_α . Une base de l'espace produit tensoriel est constitué des produits tensoriels des vecteurs de base de chacun des \mathcal{E}_α . On peut par conséquent décomposer une fonction quelconque sous la forme

$$f(x, y, z) = \sum_{n_x, n_y, n_z} c_{n_x, n_y, n_z} e^{2i\pi(n_x x + n_y y + n_z z)/L}. \quad (1.114)$$

Dit autrement, la famille des ondes planes $\exp i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$ où les coordonnées de \mathbf{k} sont quantifiés en unité de $2\pi/L$ forme une base de l'espace des fonctions périodiques.

Calcul d'intégrale

On cherche ici à calculer

$$\int_{L^3} d^3\mathbf{r} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} = \prod_j \left(\int_0^L dx_j e^{i2\pi n_j x_j / L} \right), \quad (1.115)$$

On doit alors étudier deux cas. Si $n_j \neq 0$, on a

$$\int_0^L dx_j e^{i2\pi n_j x_j / L} = \left[\frac{L}{2i\pi n_j} e^{2i\pi n_j x_j / L} \right]_0^L = 0. \quad (1.116)$$

Pour $n_j = 0$, l'intégrand vaut 1, et l'intégrale vaut alors simplement L . On en déduit donc que

$$\int_{L^3} d^3\mathbf{r} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} = L^3 \prod_j \delta_{n_j, 0}. \quad (1.117)$$

De même, on montre que

$$\int_{L^3} d^3\mathbf{r} e^{i(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{r}} = L^3 \prod_j \delta_{n_j, n'_j}. \quad (1.118)$$

1.7.2 Théorème d'Ehrenfest

On considère l'équation de Schrödinger

$$i\hbar \frac{d}{dt} \langle \hat{A} \rangle = \hat{H} \langle \hat{A} \rangle, \quad (1.119)$$

Soit \hat{A} un opérateur, en mécanique quantique on définit la valeur moyenne de \hat{A} par $\langle \hat{A} \rangle = \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle$. On a alors

$$i\hbar \frac{d}{dt} \langle \psi \rangle = \left(i\hbar \frac{d}{dt} \langle \psi | \right) \hat{A} | \psi \rangle + \langle \psi | \hat{A} \left(i\hbar \frac{d}{dt} | \psi \rangle \right), \quad (1.120)$$

soit en utilisant l'équation de 'Schrödinger,

$$i\hbar \frac{d}{dt} \langle \hat{A} \rangle = -\langle \psi | \hat{H} \hat{A} | \psi \rangle + \langle \psi | \hat{A} \hat{H} | \psi \rangle = \langle [\hat{A}, \hat{H}] \rangle, \quad (1.121)$$

où l'on reconnaît le théorème d'Ehrenfest pour l'évolution des observables.

Bibliographie

- [1] Y. Aharonov and D. Bohm. Significance of electromagnetic potentials in the quantum theory. *Phys. Rev.*, 115(3) :485–491, Aug 1959.
- [2] R. A. Beth. Mechanical detection and measurement of the angular momentum of light. *Phys. Rev.*, 50(2) :115–125, Jul 1936.
- [3] H. A. Bethe. The electromagnetic shift of energy levels. *Phys. Rev.*, 72(4) :339–341, Aug 1947.
- [4] R. G. Chambers. Shift of an electron interference pattern by enclosed magnetic flux. *Phys. Rev. Lett.*, 5(1) :3–5, Jul 1960.
- [5] Arthur H. Compton. A quantum theory of the scattering of x-rays by light elements. *Phys. Rev.*, 21(5) :483–502, May 1923.
- [6] L. Davis, A. S. Goldhaber, and M. M. Nieto. Limit on the photon mass deduced from pioneer-10 observations of jupiter’s magnetic field. *Phys. Rev. Lett.*, 35(21) :1402–1405, Nov 1975.
- [7] T. L. Dimitrova and A. Weis. The wave-particle duality of light : A demonstration experiment. *Am. J. of Phys.*, 76 :137, 2008.
- [8] P. Duplantier. L’énergie du vide.
- [9] M. E. J. Friese, T. A. Nieminen, N. R. Heckenberg, and H. Rubinsztein-Dunlop. Optical torque controlled by elliptical polarization. *Optics letters*, 23(1) :1–3, 1998.
- [10] W. E. Lamb and R. C. Retherford. Fine structure of the hydrogen atom by a microwave method. *Phys. Rev.*, 72(3) :241–243, 1947.
- [11] R. A. Webb, S. Washburn, C. P. Umbach, and R. B. Laibowitz. Observation of $\frac{h}{e}$ aharonov-bohm oscillations in normal-metal rings. *Phys. Rev. Lett.*, 54(25) :2696–2699, Jun 1985.
- [12] T. A. Welton. Some observable effects of the quantum-mechanical fluctuations of the electromagnetic field. *Phys. Rev.*, 74(9) :1157–1167, Nov 1948.

Chapitre 2

Propagation de la lumière

2.1 Introduction qualitative

Nous avons vu au précédent chapitre que dans la théorie quantique, les champs électriques et magnétiques obéissent (en moyenne) aux équations de Maxwell. Dans ce chapitre nous allons nous pencher sur leur résolution dans le cadre de l'approximation paraxiale correspondant aux conditions de Gauss de l'optique géométrique où l'on considère des rayons faiblement inclinés par rapport à l'axe optique du système considéré.

Les concepts que nous aborderons s'illustrent de manière simple sur l'exemple de la propagation de la lumière laser dont une des particularités remarquables est sa grande directionnalité. Au contraire de la lumière issue de sources lumineuses classiques qui est émise dans toutes les directions, le faisceau issu d'un laser est pratiquement unidirectionnel. Cette conséquence de l'émission stimulée n'est en réalité vraie qu'à *courte distance* de la source. En effet, on constate que loin du laser le rayon diverge légèrement. Cette propriété est simplement due à la diffraction, conséquence du diamètre fini d du faisceau laser. Plus précisément, on sait que pour un faisceau de longueur d'onde λ , l'angle de diffraction vaut $\alpha \sim \lambda/d$ et le rayon du laser à une distance L de la source vaut

$$d(z) \sim \alpha L \sim \frac{\lambda L}{d} \quad (2.1)$$

Cette relation n'est valable qu'à longue distance. En effet, lorsque L tend vers 0, le diamètre $d(z)$ doit tendre vers d , ce qui contredit l'équation (2.1). Cette relation n'est donc valable que pour $d(z) \gg d$ soit $z \gg d^2/\lambda$. Pour z plus petit, on peut supposer que le diamètre du rayon n'a pas été sensiblement modifié (Fig. 2.1).

L'existence de ces deux régimes délimités par une échelle de distance $z_R \sim d^2/\lambda$, appelée longueur de Rayleigh, est un phénomène général que nous retrouverons dans l'étude de la propagation d'un faisceau lumineux quelconque. Nous montrerons en particulier que ces deux régimes correspondent à des limites différentes du Principe de Huygens. À longue distance, on est dans la li-

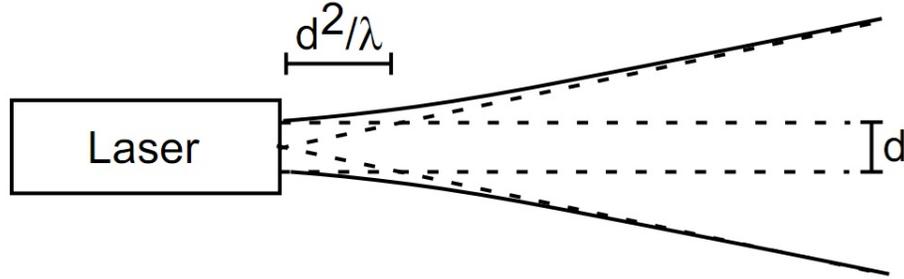


FIGURE 2.1 – Évolution du diamètre d’un faisceau laser. Pour un faisceau de diamètre d , la divergence due à la diffraction ne se manifeste qu’à partir d’une distance $z_R \sim d^2/\lambda$ de la source appelée longueur de Rayleigh.

mite de Fraunhofer, dans laquelle les phénomènes de diffraction sont en général présentés. La limite opposée est quant à elle la limite de Fresnel que nous discuterons brièvement.

Application au laser Terre-Lune

Dans le cas d’un laser typique, le diamètre du faisceau est de l’ordre du millimètre et de longueur d’onde d’un micron. La distance en dessous de laquelle on pourra supposer le faisceau comme collimaté est donc de l’ordre du mètre. Dans les applications courantes, on peut donc considérer le faisceau issu du laser comme parfaitement parallèle. Une application où cette divergence devient dramatique est la mesure de la distance Terre-Lune. Actuellement, cette mesure est réalisée par télémétrie laser : on envoie des impulsions lumineuses depuis la Terre vers la Lune et grâce à des miroirs déposés par les missions Appolo XI, XIV et XV et Lunakhod 17 et 21, la lumière est renvoyée vers les télescopes terrestres. La mesure du temps mis par la lumière pour réaliser l’aller-retour fournit alors une mesure précise de la distance Terre-Lune. Du fait de la divergence du faisceau, l’intensité de l’onde est considérablement diminuée au retour. Pour la maximiser, on agrandit le faisceau à l’aide d’un miroir de télescope de 1,5 m (celui du plateau de Calern en France, ainsi que d’autres situés au Japon, aux États-Unis et en Australie), ce qui donne un rayon du faisceau au niveau de la Lune de “seulement” 100 m. Bien que la divergence soit considérablement réduite, l’intensité lumineuse collectée au retour est extrêmement faible : à peine un photon tous les cents tirs ! Malgré cela, la précision des mesures est exceptionnellement bonne : la distance Terre-Lune est connue aujourd’hui au millimètre près, soit une précision relative de l’ordre de 10^{-11} .

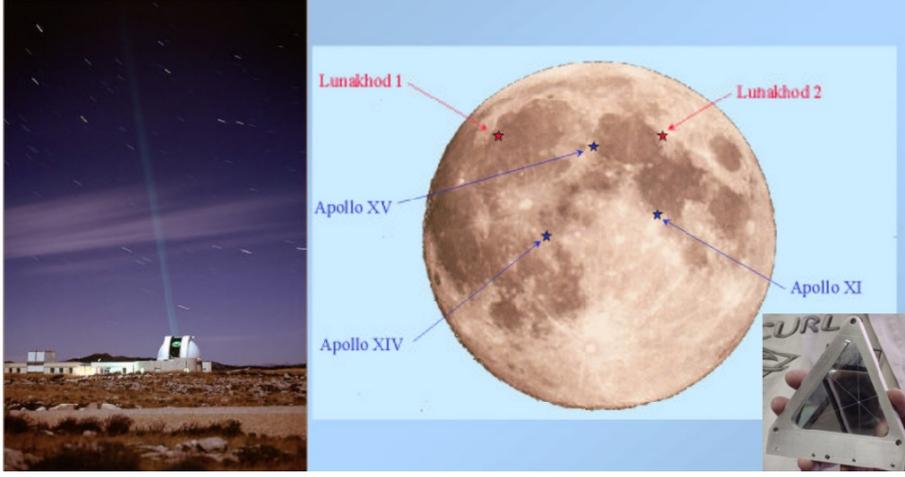


FIGURE 2.2 – À gauche, coupole du télescope abritant le laser Terre-Lune (Projet MéO – Métrologie Optique – de l’Observatoire de Côte d’Azur). À droite carte de la Lune indiquant l’emplacement des miroirs déposés sur la Lune. Insert : réplique d’un de ces miroirs.

2.2 Approximation de l’enveloppe lentement variable

Plus quantitativement, dans le vide le champ électrique est solution de l’équation d’onde $\square \mathbf{E} = 0$. Considérons le cas d’une onde se propageant dans la direction z et polarisée selon x pour laquelle on pose

$$\mathbf{E} = \mathcal{E}(\mathbf{r})e^{i(kz - \omega t)}\mathbf{u}_x, \quad (2.2)$$

avec $\omega = kc$. \mathcal{E} est l’enveloppe du rayon lumineux dont le module décrit le profil du faisceau laser. Si l’on retranscrit l’équation d’onde en terme de \mathcal{E} , on constate que celle-ci vérifie l’équation

$$(\partial_z^2 + \nabla_\perp^2 + 2ik\partial_z)\mathcal{E} = 0, \quad (2.3)$$

où ∇_\perp désigne la projection du gradient dans le plan (x, y) . Comme nous l’avons vu dans l’analyse qualitative de la propagation du faisceau, l’échelle de variation dans la direction z est grande devant la longueur d’onde, ce qui fait que $k \gtrsim \partial_z \sim 1/z_R$. On peut par conséquent négliger le terme en ∂_z^2 devant celui en $k\partial_z$, ce qui permet de simplifier l’équation (2.3) sous la forme

$$(\nabla_\perp^2 + 2ik\partial_z)\mathcal{E} = 0. \quad (2.4)$$

Cette équation est appelée *équation de l’enveloppe lentement variable* et est formellement équivalente à une équation de Schrödinger pour une particule libre

à deux dimensions (x, y) , à condition de faire le changement de variable $z \rightarrow t$, ce qui nous guidera dans sa résolution. En effet, dans le problème quantique, l'invariance par translation du problème suggère de résoudre l'équation de Schrödinger dans l'espace des impulsions. Soit $\boldsymbol{\rho} = (x, y)$. On définit donc la transformée de Fourier bidimensionnelle de \mathcal{E} par la relation

$$\tilde{\mathcal{E}}(\mathbf{q}, z) = \int d^2\boldsymbol{\rho} \mathcal{E}(\boldsymbol{\rho}, z) e^{-i\mathbf{q}\cdot\boldsymbol{\rho}}. \quad (2.5)$$

Dans l'espace de Fourier, ∇_{\perp}^2 est représenté par $-q^2$, ce qui nous donne pour (2.4)

$$(2ik\partial_z - q^2) \tilde{\mathcal{E}} = 0. \quad (2.6)$$

Cette équation du premier ordre en z s'intègre alors sans difficulté et nous fournit par la suite

$$\tilde{\mathcal{E}}(\mathbf{q}, z) = e^{-iq^2 z/2k} \tilde{\mathcal{E}}(\mathbf{q}, 0). \quad (2.7)$$

En repassant dans l'espace réel, on en déduit que

$$\mathcal{E}(\boldsymbol{\rho}, z) = \int \frac{d^2\mathbf{q}}{(2\pi)^2} \tilde{\mathcal{E}}(\mathbf{q}, z) e^{i\mathbf{q}\cdot\boldsymbol{\rho}} = \int \frac{d^2\mathbf{q}}{(2\pi)^2} e^{-iq^2 z/2k} \tilde{\mathcal{E}}(\mathbf{q}, 0) e^{i\mathbf{q}\cdot\boldsymbol{\rho}}. \quad (2.8)$$

En notant ensuite que $\tilde{\mathcal{E}}(\mathbf{q}, 0) = \int d^2\boldsymbol{\rho}' \mathcal{E}(\boldsymbol{\rho}', 0) e^{-i\mathbf{q}\cdot\boldsymbol{\rho}'}$, on obtient

$$\mathcal{E}(\boldsymbol{\rho}, z) = \int \frac{d^2\mathbf{q} d^2\boldsymbol{\rho}'}{(2\pi)^2} e^{-iq^2 z/2k} e^{i\mathbf{q}\cdot(\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}')} \mathcal{E}(\boldsymbol{\rho}', 0), \quad (2.9)$$

Or, on peut récrire cette équation sous la forme

$$\mathcal{E}(\boldsymbol{\rho}, z) = \int d^2\boldsymbol{\rho}' \mathcal{G}(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}', z) \mathcal{E}(\boldsymbol{\rho}', 0), \quad (2.10)$$

avec le noyau

$$\mathcal{G}(\boldsymbol{\rho}, z) = \int \frac{d^2\mathbf{q}}{(2\pi)^2} e^{-iq^2 z/2k} e^{i\mathbf{q}\cdot\boldsymbol{\rho}} \quad (2.11)$$

On utilise le résultat de l'appendice 2.7.1 pour évaluer cette intégrale qui nous donne

$$\mathcal{G}(\boldsymbol{\rho}, z) = \frac{k}{2i\pi z} e^{ik\rho^2/2z}. \quad (2.12)$$

L'équation (2.10) traduit le Principe de Huygens dans l'approximation paraxiale. En effet, ce principe stipule que l'on peut obtenir le champ électrique en tout point de l'espace z à partir de celui dans le plan $z = 0$ en propageant des "ondelettes" sphériques secondaires (Fig. 2.3), ce qui se traduit mathématiquement par

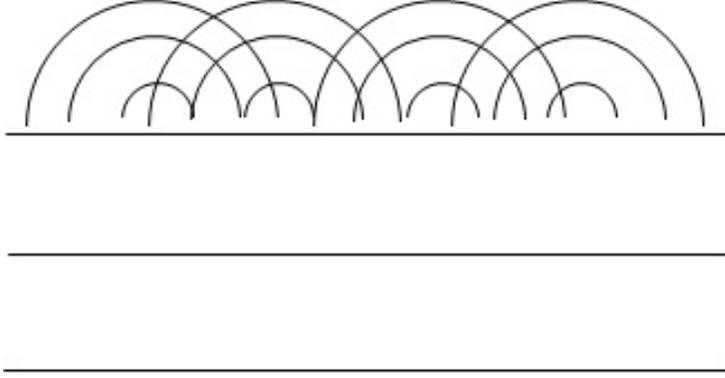


FIGURE 2.3 – Principe de Huygens : on peut décrire le comportement de la lumière par une propagation de proche en proche d’ondelettes sphériques secondaires.

$$\mathcal{E}(\boldsymbol{\rho}, z) = \int d^2 \boldsymbol{\rho}' \mathcal{G}_H(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}', z) \mathcal{E}(\boldsymbol{\rho}', 0), \quad (2.13)$$

où le noyau est à présent proportionnel à l’amplitude d’une onde sphérique, à savoir

$$\mathcal{G}_H(\boldsymbol{\rho}, z) \propto \frac{e^{ikr}}{r} \quad (2.14)$$

et $r = \sqrt{\rho^2 + z^2}$ désigne la distance entre la source de l’onde sphérique et le point d’observation. Plaçons nous comme précédemment dans l’approximation paraxiale qui revient à supposer $z \gg \rho$ puisque les “rayons” émis de chaque source secondaire sont peu inclinés sur l’axe optique. On a alors $r \sim |z| (1 + \rho^2/2z^2)$, ce qui nous permet de réexprimer \mathcal{G}_H comme

$$\mathcal{G}_H(\boldsymbol{\rho}, z) \propto \frac{e^{ik|z|}}{|z|} e^{ik\rho^2/2|z|}. \quad (2.15)$$

2.3 Diffraction de Fresnel et de Fraunhofer

Comme nous venons de le voir, les équations (2.10) et (2.12) solutions de l’équation d’onde dans l’approximation paraxiale redonnent le Principe de Huygens et doivent par conséquent pouvoir décrire les phénomènes de diffraction. Le calcul explicite de l’intégrale (2.10) aboutit à deux régimes différents, suivant que l’on s’intéresse au champ électrique diffracté à courte distance (diffraction en champ proche, ou diffraction de Fresnel) ou à longue distance (diffraction en champ lointain ou diffraction de Fraunhofer).

2.3.1 Diffraction de Fraunhofer

Considérons un faisceau de taille transverse a supposée petite (nous préciserons le critère exact plus loin). Dans ce cas l'intégrale (2.10) ne porte que sur des valeurs de $\rho' \lesssim a$ et si l'on développe $(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}')^2$ à l'ordre 1 inclus en ρ' , on peut faire l'approximation suivante

$$\mathcal{G}(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}', z) \sim \frac{ke^{ik\rho^2/2z}}{2i\pi z} e^{-ik\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\rho}'/z}. \quad (2.16)$$

D'après la relation (2.10), on en déduit que le champ diffracté vaut

$$\mathcal{E}(\boldsymbol{\rho}, z) = \frac{ke^{ik\rho^2/2z}}{2i\pi z} \int d^2\boldsymbol{\rho}' \mathcal{E}(\boldsymbol{\rho}', 0) e^{-ik\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\rho}'/z} \quad (2.17)$$

$$= \frac{ke^{ik\rho^2/2z}}{2i\pi z} \tilde{\mathcal{E}}(k\boldsymbol{\rho}/z). \quad (2.18)$$

On retrouve ici le fait que la figure de diffraction en champ lointain correspond à la transformée de Fourier du champ électrique initial pour un vecteur d'onde $\mathbf{q} = k\boldsymbol{\rho}/z$. Or d'après l'inégalité de Heisenberg, on sait que les largeurs en ρ et en q du champ $\mathcal{E}(\boldsymbol{\rho}, z)$ sont liés par la condition $\Delta\rho\Delta q \geq 1/2$. Si l'on suppose que l'on se trouve proche de la saturation, on a donc $\Delta q \sim 1/a$ et la figure de diffraction a donc en z une largeur typique $\Delta\rho(z) \sim z/ka \sim z\lambda/a$, ce qui correspond à l'angle de diffraction de l'ordre de λ/a discuté dans la discussion qualitative du début de ce chapitre. Cet ordre de grandeur nous permet de préciser la condition de validité de la condition “ ρ' petit” dans le calcul du champ diffracté. En effet, pour que celle-ci soit valable, nous avons vu qu'il fallait que $\rho'/\rho \ll 1$. D'après les valeurs typiques de ρ' ($\sim a$) et ρ ($\sim z\lambda/a$), on en déduit que le critère de validité de l'approximation de Fraunhofer peut s'exprimer par la condition $a^2/z\lambda \ll 1$. Cette condition étant valide aux grandes valeurs de z , on comprend l'appellation de “champ lointain” donnée à ce régime¹.

2.3.2 Diffraction de Fresnel

Pour des raisons évidentes, la diffraction de Fresnel est aussi appelée *diffraction en champ proche*. Dans cette limite, on ne peut plus négliger la courbure des ondelettes de Huygens, ce qui interdit d'appliquer la formule de Fraunhofer. C'est aussi le régime où l'approximation de l'optique géométrique n'est plus valable, comme on s'en convainc en revenant à l'introduction qualitative. En effet, dans la région proche du point de focalisation du laser, l'optique géométrique prédirait un faisceau de diamètre nul, alors qu'en réalité son diamètre est fini.

En l'absence de résultat général concernant le profil d'intensité dans le régime de champ proche, nous allons nous contenter de la discussion d'un cas particulier,

1. Remarquons que ce critère peut aussi s'écrire $z/a \gg a/\lambda$. Dans le régime $a/\lambda \gg 1$ où nous nous sommes placés dans le cadre de l'approximation paraxiale, ceci signifie que la distance z est nécessairement grande devant la taille de l'objet diffractant.

à la savoir le cas de la diffraction par une structure périodique, telle qu'un réseau de diffraction infiniment étendu. Si le réseau est réellement périodique, son extension est infinie, ce qui empêche d'entrer dans le régime de champ lointain.

Dans l'espace direct, le champ électrique transmis par le réseau est périodique et on note b sa période dans la direction x (on le suppose invariant par translation dans la direction y). On peut alors décomposer $\mathcal{E}(\boldsymbol{\rho}, 0)$ en *série* de Fourier, soit

$$\mathcal{E}(\boldsymbol{\rho}, 0) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{2i\pi n x/b}. \quad (2.19)$$

Si l'on calcule ensuite la transformée de Fourier de \mathcal{E} , on trouve que

$$\tilde{\mathcal{E}}(\mathbf{q}, 0) = 2\pi\delta(q_y) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \delta(q_x - 2\pi n/b), \quad (2.20)$$

où l'on a utilisé l'identité

$$\int e^{iqx} dx = 2\pi\delta(q). \quad (2.21)$$

Dans l'espace de Fourier, $\tilde{\mathcal{E}}$ est alors piqué autour de "pics" de Fourier centrés en $(q_x = q_n = 2\pi n/b, q_y = 0)$ qui donnent naissance aux pics de diffraction dans le champ lointain. À une distance z quelconque, on sait d'après la relation (2.7) que le champ électrique diffracté à une distance z est simplement déphasé dans le plan de Fourier avec

$$\tilde{\mathcal{E}}(\mathbf{q}, z) = e^{-iq^2 z/2k} \tilde{\mathcal{E}}(\mathbf{q}, 0). \quad (2.22)$$

En utilisant la décomposition en série de Fourier de $\tilde{\mathcal{E}}(\mathbf{q}, 0)$ (Eq. 2.23), on en déduit que

$$\tilde{\mathcal{E}}(\mathbf{q}, z) = 2\pi\delta(q_y) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \delta(q_x - q_n) e^{-iq_n^2 z/2k}. \quad (2.23)$$

On constate alors deux choses. Tout d'abord, $\tilde{\mathcal{E}}(\mathbf{q}, z)$ est piqué autour des mêmes pics de Fourier que $\tilde{\mathcal{E}}(\mathbf{q}, 0)$ ce qui implique que $\mathcal{E}(\boldsymbol{\rho}, z)$ possède la même période spatiale que $\mathcal{E}(\boldsymbol{\rho}, 0)$ dans le plan (x, y) , comme on s'en convainc aisément en utilisant la transformée de Fourier inverse de (2.21). Par ailleurs, on constate que le facteur de phase apparaissant dans (2.23) se met sous la forme

$$e^{-2i\pi^2 n_x^2 z/kb^2}. \quad (2.24)$$

Plaçons nous alors en $z = mkb^2/\pi$, avec m entier. On voit qu'alors l'argument de l'exponentielle est égale à un nombre entier de fois $2i\pi$ pour toute valeur de n_x , impliquant ainsi une égalité entre le champ initial et le champ diffracté dans l'espace de Fourier, et par voie de conséquence dans l'espace direct : c'est

l'effet Talbot, découvert en 1836 par Henry Talbot qui observa l'existence de ces images d'un réseau de diffraction.

Notons que l'effet Talbot n'est valable que dans le régime de champ proche. Lorsque l'on s'éloigne du réseau d'une distance supérieure à sa taille, on finit par être sensible à ses dimensions finies. Dit autrement, les pics de $\tilde{\mathcal{E}}(\mathbf{q}, 0)$ ont en réalité une largeur $\Delta q \sim 1/Nb$, où N est le nombre de motifs du réseau. Sur le pic centré sur q_n , on attend donc un déphasage de l'ordre de $\sim q_n \Delta q z / k$. Pour que l'effet Talbot reste observable, il faut que ce déphasage reste petit devant 1 pour toutes les valeurs de n contribuant à la série de Fourier. Si l'on note n_c l'indice de Fourier typique au-delà duquel les termes de la série deviennent négligeable, on en déduit le critère

$$\frac{2n_c \pi z}{Nkb^2} \ll 1, \quad (2.25)$$

ce qui, au facteur n_c/N près correspond au critère de validité de l'approximation de champ proche.

Lorsque ce critère n'est plus valable, on passe dans le régime de Fraunhofer dont nous avons vu qu'il prédisait un champ électrique diffracté proportionnel à la transformée de Fourier de \mathcal{E} dont nous avons déterminé l'expression plus haut.

2.3.3 Application à l'holographie

Le principe de Huygens stipule que pour connaître le champ électromagnétique en tout point de l'espace, il suffit de le connaître sur un plan (ou une surface), le champ en un point extérieur se déduisant par la propagation d'ondes sphériques secondaires. Dans le principe, ceci permet donc de stocker sur une surface bidimensionnelle toute l'information nécessaire à la reconstruction de l'image d'un objet tridimensionnel. La photographie classique ne stocke que l'information sur l'intensité lumineuse et donc le module du champ électrique, ce qui explique qu'elle ne puisse pas rendre la profondeur d'une image réelle. Au contraire, l'holographie est un processus interférométrique permettant de reproduire à la fois le module et la phase d'un champ électrique, ce qui permet ainsi de créer des images tridimensionnelles.

Au delà de leur simple aspect ludique, les techniques holographiques ont d'importantes applications pratiques dont certaines seront développées à la fin de cette section. Les techniques interférentielles permettent par exemple de mesurer des déplacements égaux à une fraction de longueur d'onde (soit typiquement des fractions de micron) ce qui permet d'utiliser l'holographie dans l'étude des propriétés mécaniques des matériaux.

En pratique, on réalise un hologramme d'un objet tridimensionnel en divisant en deux le faisceau issu d'un laser. Un des deux faisceaux est diffusé par l'objet et on enregistre sur un film photographique l'interférogramme du faisceau référence avec la lumière diffusée (2.4.A). Afin de reconstruire l'image de l'objet, on éclaire le film à l'aide d'une lumière cohérente : nous allons alors montrer que la lumière

diffractionnée par le film est identique (dans une certaine limite que nous précisons) à celle issue de l'objet initial (2.4.B).

Pour comprendre pourquoi ces deux étapes permettent bien de reconstruire l'image tridimensionnelle de l'objet initial, on note $E_{\text{dif}}(x, y)$ et $E_{\text{ref}}(x, y)$, les champs électriques des ondes diffusées et de référence dans le plan (x, y) du film photographique. On pose alors

$$\begin{aligned} E_{\text{dif}} &= E_{\text{dif},0}(x, y) \cos(\omega t - \psi(x, y)) \\ E_{\text{ref}} &= E_{\text{ref},0} \cos(\omega t - \phi(x, y)), \end{aligned}$$

les pulsations des deux ondes étant identiques car les faisceaux sont issus de la même source. Notons que l'onde de référence est une onde plane et que son amplitude est prise indépendante de x et y . Si \mathbf{k} est son vecteur d'onde $\phi(x, y) = k_x x + k_y y$. La phase ϕ est donc reliée à l'inclinaison de l'onde de référence par rapport au film.

Le film photographique est sensible à l'intensité lumineuse totale avec laquelle il est éclairé. Après impression, sa transmission T vaut en un point (x, y)

$$T = 1 - 2\beta I_0(x, y), \quad (2.26)$$

où β est un paramètre et I_0 est l'intensité lumineuse avec laquelle le film est éclairé au point (x, y) donnée par

$$I_0(x, y) = \langle |E_{\text{dif}} + E_{\text{ref}}|^2 \rangle = \frac{1}{2} (E_{\text{dif},0}^2 + E_{\text{ref},0}^2 + 2E_{\text{ref},0}E_{\text{dif},0} \cos(\phi - \psi)).$$

Passons à la phase de reconstruction de l'image. On éclaire le film avec l'onde référence seule. Le champ transmis E_{rec} vaut TE_{ref} , soit

$$\begin{aligned} E_{\text{rec}}(x, y) &= E_{\text{ref}}(1 - \beta(E_{\text{dif},0}^2 + E_{\text{ref},0}^2)) \cos(\omega t - \phi) \\ &\quad - \beta E_{\text{ref}}^2 E_{\text{dif}}(x, y) (\cos(\omega t - \psi) + \cos(\omega t + \psi - 2\phi)). \end{aligned}$$

Le champ électrique se met donc sous la forme d'une somme de trois termes $E_{i=1,2,3}$ respectivement égaux à

$$\begin{aligned} E_1 &= -\beta E_{\text{ref},0}^2 E_{\text{dif},0}(x, y) \cos(\omega t - \psi) \\ E_2 &= E_{\text{ref},0}(1 - \beta(E_{\text{dif},0}^2 + E_{\text{ref},0}^2)) \cos(\omega t - \phi) \\ E_3 &= -\beta E_{\text{ref},0}^2 E_{\text{dif},0}(x, y) \cos(\omega t + \psi - 2\phi) \end{aligned}$$

et que nous allons chercher à interpréter

- Le champ E_1 est celui qui produit l'hologramme, puisqu'à un facteur près, il est identique au champ électrique diffusé par l'objet au niveau du film.

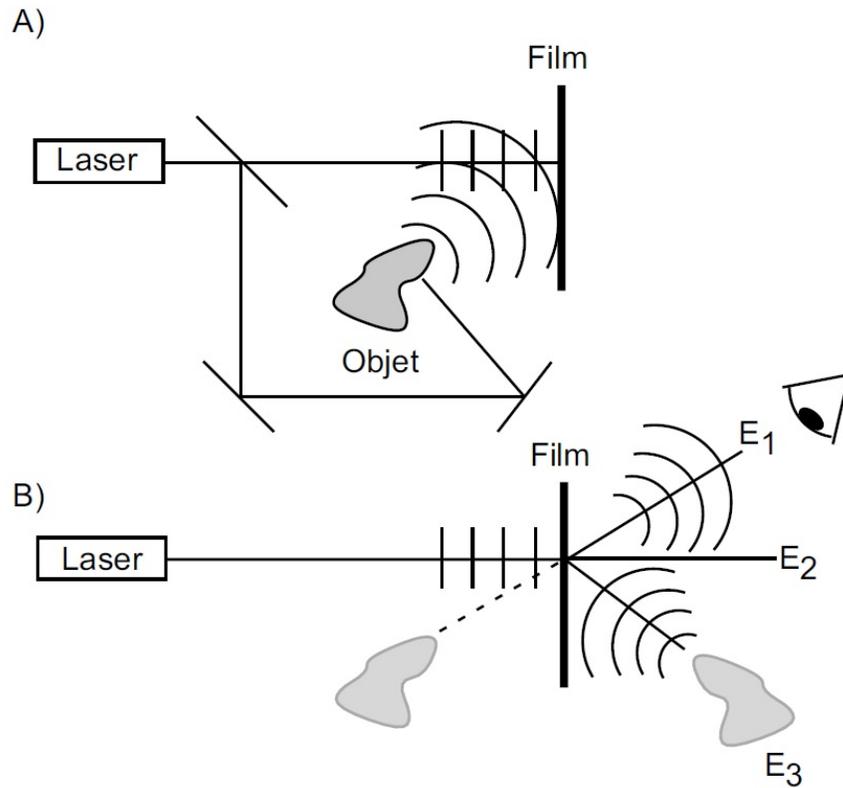


FIGURE 2.4 – Principe de l'holographie. A) Enregistrement : on sépare en deux le faisceau issu d'une source laser et un des faisceaux est diffusé par l'objet dont on souhaite obtenir l'hologramme. Les deux faisceaux sont ensuite recombinaés sur un film photographique qui stocke leur figure d'interférence. B) Lecture. On éclaire le film avec le faisceau de référence seul. La figure de diffraction due à la traversée du film fait apparaître trois rayons distincts : E_1 reconstruit l'image *virtuelle* de l'objet initial. C'est cette image qui constitue l'hologramme proprement dit. E_2 est le rayon transmis directement par le film. E_3 enfin reconstruit une image *réelle* de l'objet initial.

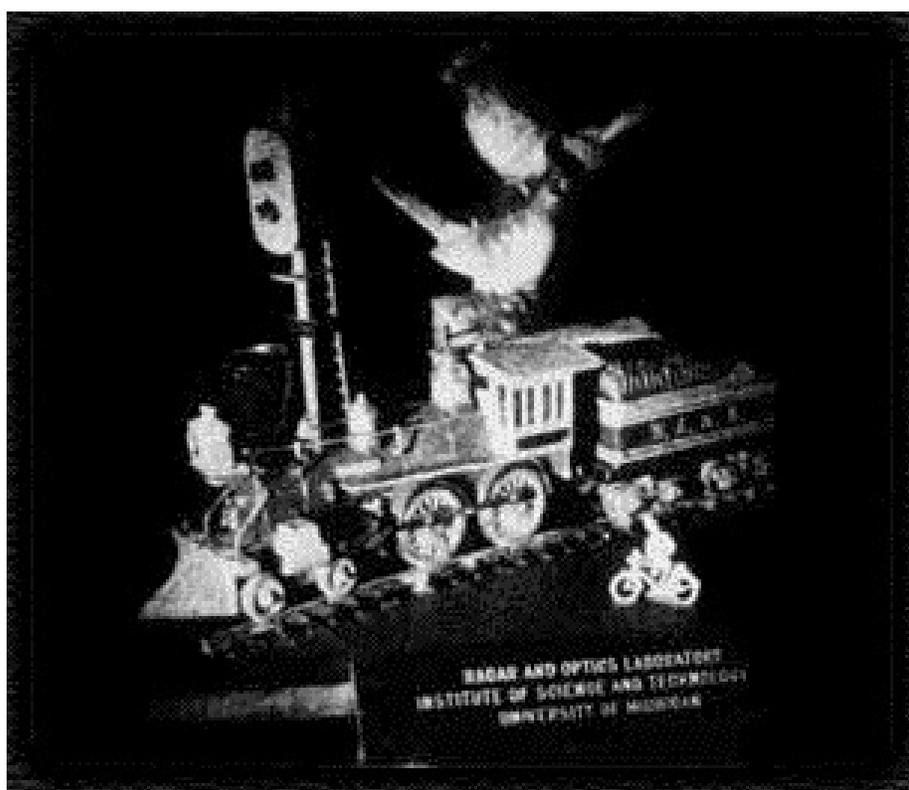


FIGURE 2.5 – *Train and Bird*, le premier hologramme de l'histoire, réalisé en 1964 par Emmeth Leith et Juris Upatnieks à l'université du Michigan.

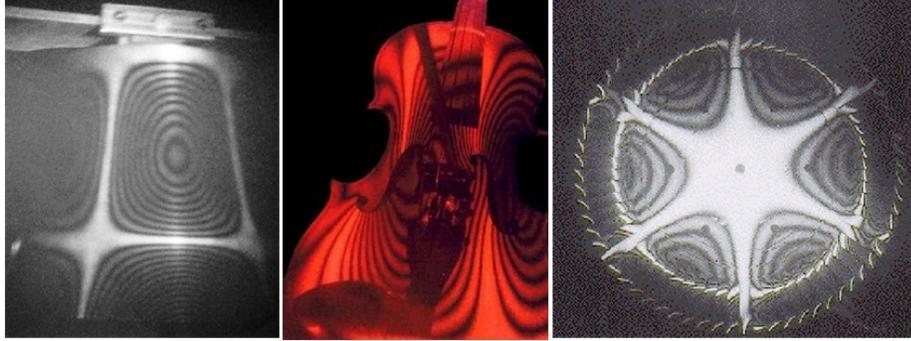


FIGURE 2.6 – Structures spatiales des modes de vibrations d’une cloche, d’un violon et d’un rotor de turbine, obtenues par holographie.

- Le champ E_2 possède la même phase ϕ que le champ de référence E_{ref} . Comme nous l’avons vu, cette phase est liée aux coordonnées du vecteur d’onde et indique donc la direction de propagation de l’onde. Le champ E_2 donne donc lieu à une onde se propageant dans la même direction que l’onde de référence, avec un profil d’amplitude spatiale modifié par la traversée du film.
- La structure de l’onde engendrée par le champ E_3 est un peu plus complexe que dans les deux premiers cas. Formellement, la phase $\cos(\omega t + \psi - 2\phi)$ est fonction de ψ et contient donc effectivement l’information de phase nécessaire à la reconstruction de l’objet, mais “dans le désordre”. En effet, la phase ϕ tout d’abord. Comme nous l’avons déjà vu, cette phase est associée à une onde se propageant selon la direction du faisceau de référence. Le champ E_3 va donc créer un faisceau incliné par rapport à l’image reconstruite par E_1 . Par ailleurs, si l’on omet ϕ , la phase n’est toujours pas la bonne, puisque le cosinus s’écrit $\cos(\omega t + \psi)$, au lieu de $\cos(\omega t - \psi)$. On peut cependant se ramener à cette deuxième forme en notant que

$$\cos(\omega t + \psi) = \cos(-\omega t - \psi) = \cos(\omega(-t) - \psi).$$

Autrement dit, E_3 possède la même phase que l’onde diffusée, à condition de changer t en $-t$, autrement dit de renverser le sens du temps. En terme moins “ésotérique”, ceci signifie que le champ E_3 va générer une image réelle de l’objet diffusant.

Applications : La principale application de l’holographie est la détection de petits mouvements, permettant ainsi l’étude de la réponse de matériaux à des vibrations acoustiques : l’atout de l’holographie provient de sa nature interférométrique, qui lui permet de détecter des mouvements de l’ordre d’une fraction de longueur d’onde, soit moins d’une centaine de nanomètres ! Une

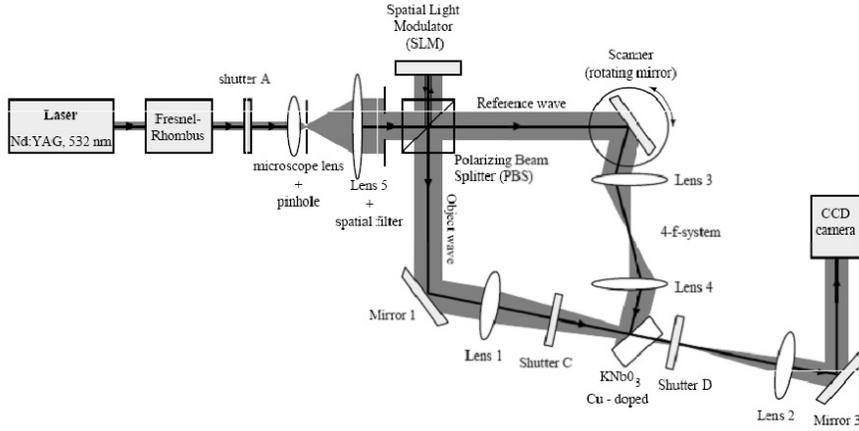
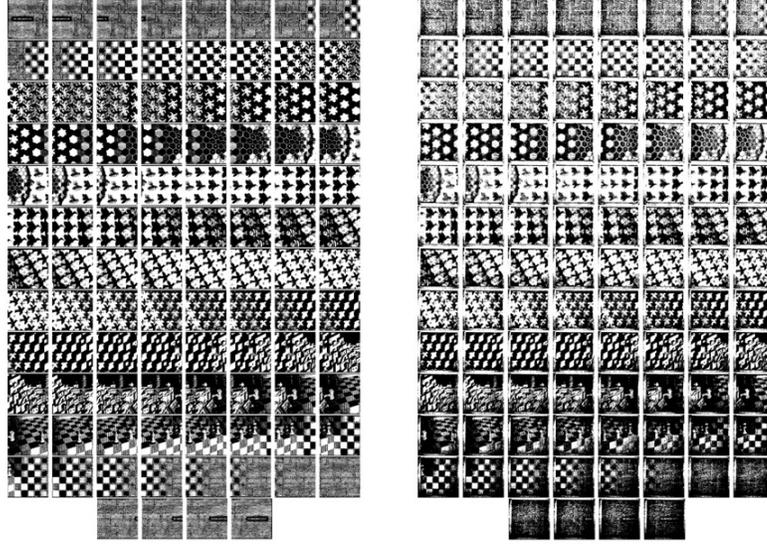


FIGURE 2.7 – Exemple de réalisation expérimentale d’une mémoire holographique. La série des métamorphoses de Escher est affichée sur l’écran à cristaux liquides (SLM). À chaque image, l’angle du miroir tournant miroir est modifié. La série des images est ensuite reconstruite en n’éclairant le cube qu’à l’aide de la référence et en en tournant le cube pour faire apparaître les images l’une après l’autre sur la caméra (<http://www.crypto.ethz.ch/przydatek/hms.html>). On trouvera la série des images initiales et reconstruites dans les deux pages qui suivent.

technique utilisée est de procéder par moyenne temporelle : on enregistre l’hologramme alors que l’objet est en train de vibrer. Aux points où l’objet est immobile l’hologramme n’est pas perturbé et l’objet initial est reconstruit fidèlement. En revanche, aux points où l’objet vibre, les interférences entre la référence et la lumière diffusée se brouillent et on obtient des franges sombres lors de la reconstruction de l’hologramme (Fig. 2.6). Une deuxième technique, plus adaptée à une étude en temps réel, consiste à superposer l’objet vibrant à son hologramme figé. De nouveau, le mouvement de l’objet se manifeste par l’apparition de franges d’interférences lorsque l’on observe à travers le film.

Une seconde application, plus futuriste, est la réalisation de mémoires holographiques qui, à terme, pourraient remplacer les CD ou les DVD. Les cubes holographiques actuellement en développement permettent en effet de stocker de l’information en volume, et non plus en surface, comme cela est fait dans les supports usuels de l’information. Ce nouveau type de mémoire devrait permettre de stocker jusqu’à 1000 Go dans un cube de la taille d’un sucre en cube, ces données pouvant être récupérées à très grande vitesse (un DVD lu en 30 s) ! Dans ce dispositif, l’information à stocker est tout d’abord transformée en une série de pixels noirs et blancs (des 0 et des 1) d’un écran à cristaux liquides. Comme dans l’holographie classique, on effectue ensuite l’interférence d’un faisceau de référence avec la lumière diffusée par l’écran à cristaux liquide, à ceci



près que l'on réalise cette interférence non sur un film photographique, mais au sein d'un cube photoréfractif (KNbO_3 par exemple), dont l'indice est modifié de façon permanente par la lumière. Comme précédemment, la lecture de l'hologramme se fait en illuminant le cube à l'aide de la référence seule. Le point central est ici que l'angle d'incidence du faisceau de référence doit être strictement le même dans le cas de la lecture et de l'écriture. Plusieurs hologrammes différents peuvent par conséquent être stockés, en choisissant pour chacun un angle d'incidence différent pour le faisceau de référence.

2.4 Formation des images. Pouvoir de résolution d'un système optique

2.4.1 Modélisation d'une lentille mince, formule de conjugaison

Dans ce paragraphe, nous allons nous intéresser à la propagation de la lumière à travers une lentille dans l'approximation paraxiale. En première approximation, l'effet de la lentille est d'imprimer au champ électromagnétique un déphasage dépendant de la distance à l'axe optique : pour une lentille convexe, plus on se trouve proche de l'axe optique, plus l'épaisseur de verre à traverser est grande et plus le déphasage est important. En d'autres termes, si l'on suppose la lentille placée en $z = z_0$ sur l'axe optique on aura

$$\mathcal{E}(x, y, z_0^+) = e^{i\phi(x,y)} \mathcal{E}(x, y, z_0^-). \quad (2.27)$$

2.4. FORMATION DES IMAGES. POUVOIR DE RÉOLUTION D'UN SYSTÈME OPTIQUE 15

Dans l'approximation paraxiale, on peut développer ϕ au voisinage de l'axe optique et si la lentille est invariante par rotation autour de l'axe optique, on pourra écrire $\phi(x, y) \simeq \phi(0, 0) - kb(x^2 + y^2)/2 + \dots$, où b est homogène à l'inverse d'une longueur dont on donnera l'interprétation plus loin. Afin d'alléger les notations, on considère le cas d'une lentille placée en $z_0 = 0$ et par choix de l'origine des temps, on prendra $\phi(0, 0) = 0$. Si l'on considère un objet en $z' < 0$ décrit par un champ électrique $\mathcal{E}(\boldsymbol{\rho}', z')$, le champ électrique en $z > 0$ est donné par la propagation de z' à la lentille, le déphasage au niveau de la lentille puis la propagation jusqu'au point z , soit²

$$\mathcal{E}(\boldsymbol{\rho}, z) = \int d^2 \boldsymbol{\rho}' \mathcal{K}_{zz'}(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}') \mathcal{E}(\boldsymbol{\rho}', z') \quad (2.28)$$

avec le noyau

$$\mathcal{K}_{zz'}(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}') = \frac{k^2}{(2\pi)^2 z z'} \int d^2 \boldsymbol{\rho}'' e^{ik(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}'')^2/2z} e^{i\phi(\boldsymbol{\rho}'')} e^{-ik(\boldsymbol{\rho}'' - \boldsymbol{\rho}')^2/2z'} \quad (2.29)$$

Si l'on développe l'argument de l'exponentielle, on constate que ce noyau peut s'écrire

$$\mathcal{K}_{zz'}(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}') = \frac{k^2 e^{ik(\rho^2/z - \rho'^2/z')/2}}{(2\pi)^2 z z'} \int d^2 \boldsymbol{\rho}'' e^{ik\rho''^2(1/z - 1/z' - b)/2} e^{ik\boldsymbol{\rho}'' \cdot (\boldsymbol{\rho}'/z' - \boldsymbol{\rho}/z)}. \quad (2.30)$$

On constate que lorsque

$$1/z - 1/z' = b, \quad (2.31)$$

le terme quadratique dans l'intégrale s'annule, et $\mathcal{K}_{zz'}$ s'écrit alors à un facteur de phase près

$$\mathcal{K}_{zz'}(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}') \propto \frac{k^2}{z z'} \delta(k(\boldsymbol{\rho}'/z' - \boldsymbol{\rho}/z)) \propto \frac{z'}{z} \delta(\boldsymbol{\rho}' - z' \boldsymbol{\rho}/z). \quad (2.32)$$

L'équation (2.28) se simplifie alors en

$$\mathcal{E}(\boldsymbol{\rho}, z) = \frac{z'}{z} \mathcal{E}(z' \boldsymbol{\rho}/z, z'). \quad (2.33)$$

On voit que si la condition (2.31) est remplie alors le champ en z est identique à celui en z' à un facteur d'échelle z/z' . En terme d'optique géométrique, ceci correspond à la conjugaison des plans z' et z . Si l'on compare (2.31) avec la relation de conjugaison pour une lentille mince, on voit alors sans difficulté que $1/b$ s'interprète comme la focale de la lentille. De même, le grandissement z/z' est identique à celui prédit par le théorème de Thalès dans le cadre de l'optique géométrique.

2. Mettons ici en garde le lecteur au sujet d'un conflit de notation : étant donné que l'on est amené à sommer dans le plan objet, on y "primera" les position, ce qui correspond malheureusement à la notation inverse de l'optique géométrique où les notations "prime" sont associées aux images.

2.4.2 Fonction d'étalement du point. Pouvoir de résolution d'un instrument optique.

Malgré l'aspect formel du paragraphe précédent, le noyau $\mathcal{K}_{zz'}$ a une interprétation relativement intuitive. Considérons en effet une source ponctuelle localisée en ρ'_0 . Ceci revient à considérer un champ électrique $\mathcal{E}(\rho', z') = a\delta(\rho' - \rho'_0)$ et donc

$$\mathcal{E}(\rho, z) = a\mathcal{K}_{zz'}(\rho, \rho'_0). \quad (2.34)$$

Autrement dit, \mathcal{K} représente le champ électrique créé dans le plan image par une source ponctuelle, dont le module carré³ est appelé la *fonction d'étalement du point*⁴.

Dans le cas que nous avons examiné au paragraphe précédent, nous avons vu que si la lentille se contente de déphaser le champ incident, alors \mathcal{K} est une fonction δ ce qui signifie que l'image d'un point est aussi un point (on a un stigmatisme parfait). Dans la réalité, on sait que ceci n'est pas vrai et que du fait de la diffraction l'image d'un point est en réalité une tache. Cet effet peut être incorporé en modifiant l'équation (2.27) décrivant l'effet de la lentille, en incorporant notamment le diamètre fini de celle-ci. On pose donc à présent

$$\mathcal{E}(x, y, z_0^+) = t(x, y)e^{i\phi(x, y)}\mathcal{E}(x, y, z_0^-), \quad (2.35)$$

où $t(x, y)$ est une fonction de transmission réelle décrivant l'absorption du faisceau incident – dans le cas le plus courant, il s'agit simplement d'une fonction porte coupant le faisceau au delà du rayon de la lentille.

L'analyse faite précédemment peut-être reprise à l'identique, et l'on trouve que le $\mathcal{K}_{zz'}$ dans le plan image s'écrit simplement

$$\mathcal{K}_{zz'}(\rho, \rho') = \frac{k^2 e^{ik(\rho^2/z - \rho'^2/z')}}{(2\pi)^2 zz'} \int d^2\rho'' t(\rho'') e^{ik\rho'' \cdot (\rho'/z' - \rho/z)}, \quad (2.36)$$

autrement dit, au facteur de phase près, la PSF est donnée par la transformée de Fourier de la fonction de transmission de la lentille.

Dans le cas d'une ouverture circulaire, $t(\rho) = \theta(R - \rho)$, où θ désigne la fonction de Heaviside et R est le rayon de la lentille, dont la transformée de Fourier s'exprime en fonction de la fonction de Bessel J_1 puisque l'on a⁵

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R r dr e^{-ikr \cos \theta} = 2\pi R^2 \left(\frac{J_1(kR)}{kR} \right). \quad (2.37)$$

La PSF d'un objet placé sur l'axe optique et traversant une lentille est donc, à un facteur numérique près

3. Correspondant donc à l'intensité lumineuse

4. *Point Spread Function* (PSF) en anglais.

5. Pour plus de détails sur les fonctions de Bessel, voir par exemple le site MathWorld, <http://mathworld.wolfram.com/BesselFunctionoftheFirstKind.html>

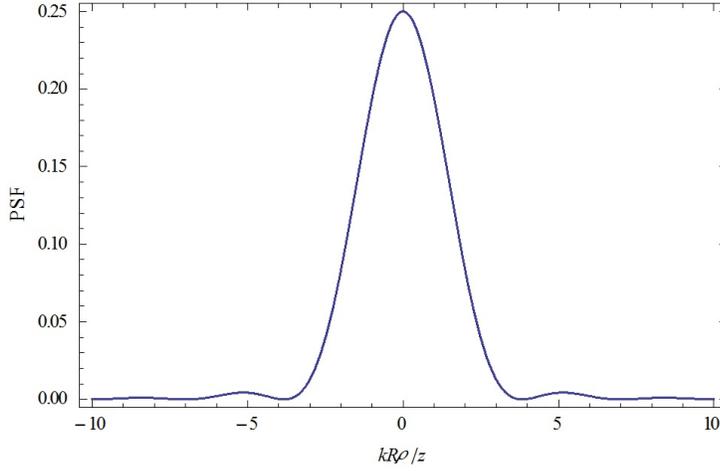


FIGURE 2.8 – Figure d’Airy donnant la fonction d’étalement du point d’une lentille de rayon R .

$$\text{PSF}(\rho) = \left(\frac{J_1(x)}{x} \right)^2, \quad (2.38)$$

avec $x = kR\rho/z$.

La figure correspondante est appelée figure d’Airy (Fig. 2.8). et la largeur de la tache de diffraction limite la résolution du système optique. On estime cette limite grâce au critère de Rayleigh qui considère que deux pics voisins ne peuvent être résolus si le maximum de l’un correspond au minimum de l’autre. Conventionnellement, on exprime ce critère en fonction du diamètre $D = 2R$ de la lentille. En utilisant la position du premier zéro de la fonction J_1 , on montre alors que la séparation maximale entre deux images permise par le critère de Rayleigh est $\Delta\rho = 1.22\lambda z/D$. En utilisant le théorème de Thalès, on peut donc séparer deux objets distants de $\Delta\rho' = 1.22\lambda z'/D$.

Le critère de Rayleigh est néanmoins trop restrictif et la connaissance précise de la PSF permet d’obtenir une précision bien meilleure. En effet, dans le cas idéal de données non bruitées, la connaissance parfaite de la PSF permet en principe en utilisant un algorithme d’ajustement de distinguer deux taches arbitrairement proches. En pratique, cependant, la PSF n’est qu’imparfaitement connue et les données expérimentales présentent du bruit. En conséquence, la résolution maximale est limitée à une fraction du critère de Rayleigh. On illustre cette possibilité sur la figure 2.9 extraite de la référence [2] où l’on a effectué l’image d’atomes refroidis par laser et piégés dans un potentiel périodique de pas 532 nm. La résolution de l’imagerie étant en principe de 700 nm, il devrait être impossible d’identifier la position des particules individuelles, comme on le voit sur les figures du haut. Cependant, en déconvoluant la PSF , il est finalement possible de détecter la position de chaque atome.

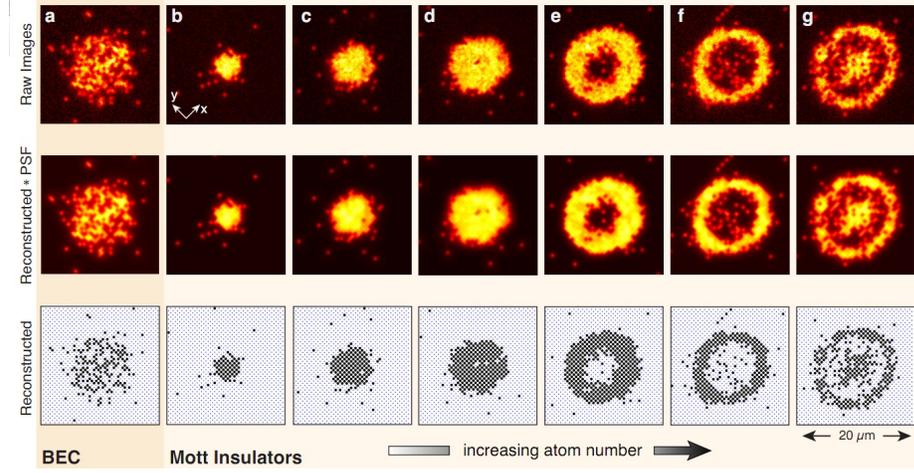


FIGURE 2.9 – En haut image d’un nuage d’atomes froids répartis dans un potentiel périodique de pas 532 nm. La résolution du système optique est de 700 nm. En utilisant la connaissance de la fonction d’étalement du point, il est possible de repérer chaque atome individuellement (Rangée du bas). La rangée du milieu représente le profil de densité recalculé à partir des positions des atomes et de la PSF. Figure extraite de [2].

2.4.3 Optique de Fourier et microscopie à contraste de phase

Comme nous venons de le voir, la propagation à longue distance d’un champ électrique donne accès à sa transformée de Fourier. Une façon de ramener le plan de Fourier à distance finie est de regarder dans le plan focal d’une lentille. En effet, dans ce cas, tous les rayons émis par la source dans une direction donnée sont focalisés en un unique point du plan focal. Nous pouvons retrouver ce résultat dans le cadre de l’optique ondulatoire en calculant le noyau $\mathcal{K}_{zz'}$ dans le cas où le point final se trouve dans le plan focal, c’est à dire en $z = f = 1/b$.

Repartons de l’expression générale (2.30) du noyau que l’on calcule à présent explicitement. En utilisant l’expression de l’intégrale gaussienne à deux dimensions (2.120), on trouve que

$$\mathcal{K}_{zz'} = \frac{ik e^{ik(\rho^2/z - \rho'^2/z')}}{2\pi z z' (1/z - 1/z' - b)} \exp \left[-i \frac{k(\rho'/z' - \rho/z)^2}{2(1/z - 1/z' - b)} \right]. \quad (2.39)$$

Dans le plan focal $z = 1/b$, cette expression se simplifie en

$$\mathcal{K}_{zz'} = -\frac{ik e^{ik(\rho^2/z - \rho'^2/z')}}{2\pi z} \exp \left[iz' k (\rho'/z' - \rho/z)^2 \right]. \quad (2.40)$$

Le champ électrique dans le plan focal est donc donné par

$$\mathcal{E}(\boldsymbol{\rho}, z) = \int d^2 \rho' \mathcal{K}_{zz'}(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}') \mathcal{E}(\boldsymbol{\rho}', z') \propto \int d\boldsymbol{\rho}' e^{-ik\boldsymbol{\rho}\boldsymbol{\rho}'/f} \mathcal{E}(\boldsymbol{\rho}', z'). \quad (2.41)$$

Au préfacteur près, le champ dans le plan focal est donc comme attendu donné par la transformée de Fourier du champ initial.

En agissant sur le faisceau dans le plan focal/de Fourier, il est possible de réaliser un certain nombre de traitements du signal lumineux permettant d'améliorer une image (comme dans le détramage⁶) ou même de faire apparaître des objets *a priori* invisibles comme dans la microscopie à contraste de phase qui est couramment utilisée en biologie ou biophysique : en effet, les composants de la cellule sont transparents et la microscopie classique qui mesure essentiellement l'absorption de l'objet étudié ne peut par conséquent en révéler ses constituants. Afin de contourner cette difficulté, il est possible d'utiliser des colorants se fixant plus favorablement à tel ou tel constituant cellulaire⁷. Ces colorants peuvent cependant se révéler toxiques pour la cellule et ne peuvent donc pas être utilisés lors d'études *in vivo*. Du point de vue optique, la cellule agit néanmoins comme une lame d'indice spatialement variable et la technique de contraste de phase (Zernike 1935) permet de visualiser le déphasage subi par la lumière lors de la traversée du milieu cellulaire (Fig. 2.13).

Le principe de son fonctionnement est relativement ingénieux et consiste à insérer une lame $\lambda/4$ au centre du plan focal/de Fourier. En effet, supposons que l'on éclaire l'objet de phase avec un faisceau collimaté et d'éclairement uniforme. Après la traversée de l'objet, le champ électrique est de la forme $E = E_0 e^{i\phi(x,y)}$, où ϕ désigne le déphasage produit par la traversée de l'objet. Afin de simplifier l'analyse, on suppose ϕ suffisamment petit pour faire l'approximation $E \sim E_0 (1 + i\phi)$. Dans le plan de Fourier, et en l'absence de la lame mince, le champ est proportionnel à la transformée de Fourier de E soit $E' \propto \delta(k_x, k_y) + i\hat{\phi}(k_x, k_y)$. Si $\hat{\phi}$ est suffisamment étendu, la présence de la lame mince sur l'axe optique déphase essentiellement la composante $k_x = k_y = 0$ du champ : après traversée de la lame, le champ devient $E'' \propto i\delta(k_x, k_y) + i\hat{\phi}(k_x, k_y)$. La propagation du plan focal au plan image effectue la transformée de Fourier inverse. On obtient alors dans le plan image $E_{\text{Im}} \propto i(1 + \phi)$. Si l'on s'intéresse à l'intensité lumineuse, on constate que celle-ci est simplement proportionnelle à $1 + 2\phi$, et est donc modulée par le déphasage.

2.4.4 Microscopie de fluorescence

La microscopie par contraste de phase est un outil puissant pour observer de "gros" objets, telles qu'un nuage d'atomes froids ou une cellule. Elle se révèle cependant insuffisante pour l'étude d'objets nanométriques dont la taille est plus petite que la longueur d'onde. Dans le cas particulier des objets biologiques, les

6. Il s'agit d'éliminer les raies régulièrement espacées apparaissant sur certaines photos ou illustrations dans les journaux.

7. C'est ce qui vaut leur nom aux chromosomes qui ne sont observables que grâce à des colorants.

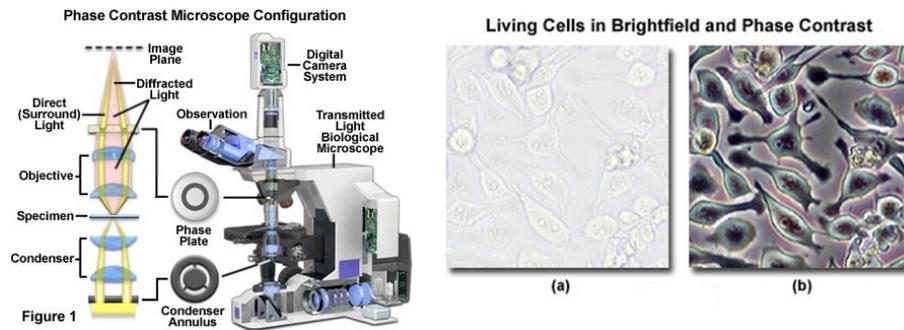


FIGURE 2.10 – Gauche : principe du microscope à contraste de phase. Droite : Exemple d’images prises en microscopie standard (a) et contraste de phase (b). Figures extraites de <http://www.microscopyu.com/articles/phasecontrast/index.html>.

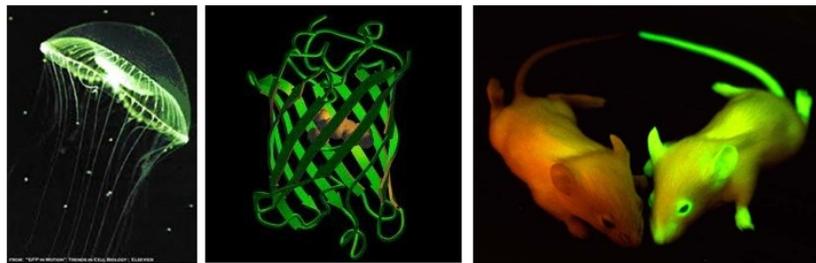


FIGURE 2.11 – De gauche à droite : Aequora Victoria, méduse fluorescente dont est extraite la GFP. Structure de la GFP. Souris modifiée génétiquement synthétisant la GFP.

progrès de la biochimie et du génie génétique permettent à présent de rendre ceux-ci visibles en leur greffant des fluorophores, sous la forme de protéines (par exemple la GFP – *Green Fluorescent Protein* – (Fig. 2.18) ou de boîtes quantiques fluorescentes (Voir chapitre ??). Grâce à ces techniques développées durant les vingt dernières années, il est à présent possible de réaliser des observations d’objets biologiques, tels que l’ADN ou des protéines, à l’échelle de la molécule unique.

Dans une expérience typique de fluorescence, on excite le milieu à l’aide d’un faisceau lumineux de longueur d’onde λ_{exc} qui permet d’exciter les fluorophores. Ceux-ci se désexcitent ensuite en émettant un photon de longueur d’onde λ_{flu} , en général plus grande que λ_{exc} en raison de l’élargissement vibra-rotationnel des états moléculaires. Un des inconvénients de la microscopie classique par fluorescence est l’émission d’une lumière de fluorescence tout le long de l’axe de propagation du faisceau d’excitation (Fig. 2.12). Si la profondeur de champ du microscope d’observation est trop grande, le détecteur collectera de la lumière

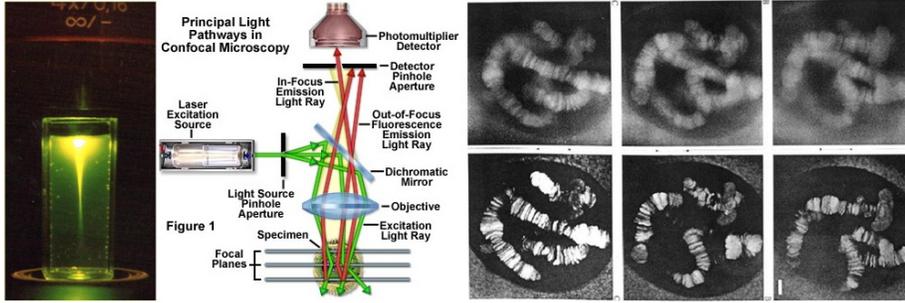


FIGURE 2.12 – De gauche à droite : Microscopie de fluorescence classique : la fluorescence (ici d’une solution de fluorescéine) est émise tout le long du trajet du faisceau d’excitation) ; Principe du microscope confocal : Image des chromosomes d’un noyau cellulaire en microscopie classique (en haut) et confocale (en bas).

provenant d’un grand volume spatial, ce qui brouillera l’image et empêchera la détection d’une molécule unique. Ce problème peut être contourné par l’utilisation du microscope confocal dans laquelle on focalise le faisceau d’excitation dans le milieu à étudier, et l’on collecte la lumière de fluorescence après passage après un diaphragme de filtrage spatial qui bloque l’essentiel de la lumière émise hors du foyer du faisceau d’excitation (Fig. 2.12).

2.5 De l’optique ondulatoire à l’optique géométrique

Les approximations nous ayant conduit à l’équation de l’enveloppe lentement variable reposent sur l’hypothèse d’une longueur d’onde petite devant les dimensions caractéristiques (col et longueur de Rayleigh) du faisceau lumineux. Cette hypothèse étant aussi celle régissant l’optique géométrique, nous pouvons appliquer le même type de procédure pour retrouver les lois de la propagation d’un faisceau lumineux dans un milieu inhomogène.

2.5.1 Approximation eikonale

En anticipant sur la suite du cours, un milieu linéaire et isotrope se décrit par une densité volumique de polarisation $\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi \mathbf{E}$, où χ est un nombre sans dimension caractérisant la polarisabilité diélectrique du milieu que l’on supposera réelle (autrement dit le milieu est non absorbant). Ce vecteur polarisation induit une densité de charge $\rho_{\text{pol}} = -\nabla \cdot \mathbf{P}$ et de courant $\mathbf{j}_{\text{pol}} = \partial_t \mathbf{P}$. Dans le cas d’un milieu inhomogène, la polarisation dépend de la position et en l’absence de charge libre, les équations de Maxwell s’écrivent

$$\nabla \cdot ((1 + \chi)\mathbf{E}) = 0 \quad (2.42)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.43)$$

$$\nabla \wedge \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B} \quad (2.44)$$

$$\nabla \wedge \mathbf{B} = \varepsilon_0 \mu_0 (1 + \chi) \partial_t \mathbf{E}. \quad (2.45)$$

On cherche des solutions sous la forme d'une onde monochromatique dont on écrit le champ électrique en notations complexes sous la forme

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) e^{i(\phi(\mathbf{r}) - \omega t)}. \quad (2.46)$$

On effectue comme précédemment l'approximation de l'enveloppe lentement variable dans laquelle on suppose que \mathcal{E} et χ varient sur des échelles de longueur caractéristiques L grandes devant la longueur d'onde. En revanche, comme pour une onde plane on aurait $\phi = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$ et donc $\nabla \phi = \mathbf{k}$, l'échelle de longueur caractéristique de variation de ϕ est la longueur d'onde. Cette séparation des échelles nous permet dans les équations de Maxwell de négliger les variations spatiales de \mathbf{E}_0 et de χ devant celles de ϕ ce qui nous permet de simplifier les équations de Maxwell sous la forme

$$\nabla \phi \cdot \mathbf{E}_0 = 0 \quad (2.47)$$

$$\nabla \phi \cdot \mathbf{B}_0 = 0 \quad (2.48)$$

$$\nabla \phi \wedge \mathbf{E}_0 = \omega \mathbf{B}_0 \quad (2.49)$$

$$\nabla \phi \wedge \mathbf{B}_0 = -\frac{\omega}{c^2} (1 + \chi) \mathbf{E}_0, \quad (2.50)$$

où l'on a posé $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}_0(\mathbf{r}) e^{i(\phi(\mathbf{r}) - \omega t)}$ dont l'amplitude \mathbf{B}_0 obéit à l'hypothèse de variation spatiale lente. Si l'on identifie $\nabla \phi$ avec un vecteur d'onde local de l'onde, on voit d'après les trois premières équations que l'onde possède localement la même structure qu'une onde plane avec \mathbf{E}_0 , \mathbf{B}_0 et $\nabla \phi$ formant un trièdre direct. Par ailleurs, en utilisant les deux dernières équations on obtient que

$$(\nabla \phi)^2 = (1 + \chi) \frac{\omega^2}{c^2}. \quad (2.51)$$

Si l'on identifie de nouveau $\nabla \phi$ avec un vecteur d'onde local, cette équation s'interprète comme l'existence d'une vitesse de phase locale $v_{\text{loc}} = \omega / |\nabla \phi| = c / \sqrt{1 + \chi}$. Par définition de l'indice optique n , on a par conséquent $n(\mathbf{r})^2 = (1 + \chi)$ ce qui permet de récrire l'équation (2.51) comme

$$\nabla \phi = n(\mathbf{r}) \frac{\omega}{c} \mathbf{u}, \quad (2.52)$$

où $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ est le vecteur unitaire porté par $\nabla \phi$.

L'onde étant localement plane, le vecteur de Poynting $\mathbf{E} \wedge \mathbf{B} / \mu_0$ est porté par le "vecteur d'onde" $\nabla \phi$. Comme le vecteur de Poynting indique la direction de propagation de l'énergie, les rayons lumineux sont localement tangents à $\nabla \phi$ et forment donc les lignes de champ de $\nabla \phi$. Plus précisément, considérons un

rayon lumineux suivant un trajet $\mathbf{r}(s)$ paramétré par l'abscisse curviligne s . Le vecteur tangent $d\mathbf{r}/ds$ satisfait donc la condition

$$\frac{d\phi(\mathbf{r}(s))}{ds} = \mathbf{u}(\mathbf{r}(s)). \quad (2.53)$$

Considérons l'équation (2.52) sur un rayon lumineux. On a alors

$$\nabla\phi(\mathbf{r}(s)) = n(\mathbf{r}(s))\frac{\omega}{c}\mathbf{u}(\mathbf{r}(s)). \quad (2.54)$$

Si l'on dérive cette équation par rapport à l'abscisse curviligne, on trouve que

$$\frac{d}{ds} [\nabla\phi(\mathbf{r}(s))] = \frac{\omega}{c} \frac{d(n\mathbf{u})}{ds}, \quad (2.55)$$

En utilisant les formules de dérivation pour les fonctions composées et en notant que ϕ dépend de s uniquement *via* sa dépendance en \mathbf{r} , on obtient

$$\left(\frac{d\mathbf{r}}{ds} \cdot \nabla\right) \nabla\phi = \frac{\omega}{c} \frac{d(n\mathbf{u})}{ds}, \quad (2.56)$$

soit

$$\left(\frac{d\mathbf{r}}{ds} \cdot \nabla\right) (n\mathbf{u}) = \frac{d(n\mathbf{u})}{ds}, \quad (2.57)$$

Utilisons la relation vectorielle $(\nabla \wedge \mathbf{v}) \wedge \mathbf{v} = (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} - \nabla(v^2)/2$ pour $\mathbf{v} = n\mathbf{u}$. Puisque \mathbf{v} est un gradient et \mathbf{u} est unitaire, on obtient

$$\frac{d(n\mathbf{u})}{ds} = \nabla n. \quad (2.58)$$

L'équation (2.58) (ou équation eikonale⁸) constitue l'équation fondamentale de l'optique géométrique et permet de calculer la trajectoire d'un rayon lumineux dans un milieu homogène arbitraire. Avant d'étudier le cas de l'approximation paraxiale et faire le lien avec les résultats obtenus dans le cadre de l'optique ondulatoire, étudions le cas simplifié d'un milieu stratifié pour lequel n ne dépend que de z . Si l'on projette l'équation (2.58) dans les directions x et y on constate que les composantes x et y de $n\mathbf{u}$ sont constantes. Par une rotation éventuelle des axes x et y , on peut supposer $u_y = 0$ en $s = 0$ et par suite pour tout s : le rayon se propage donc dans un plan orthogonal à l'axe y . Si l'on note θ l'angle entre le vecteur tangent et la direction z , on a $u_x = \sin\theta$, ce qui nous donne donc

$$n(\mathbf{r}) \sin\theta = \text{cte}. \quad (2.59)$$

On a ainsi retrouvé les relations de Descartes pour la réfraction.

8. Du grec $\epsilon\iota\kappa\omega\nu$, image, qui a donné icône en français.

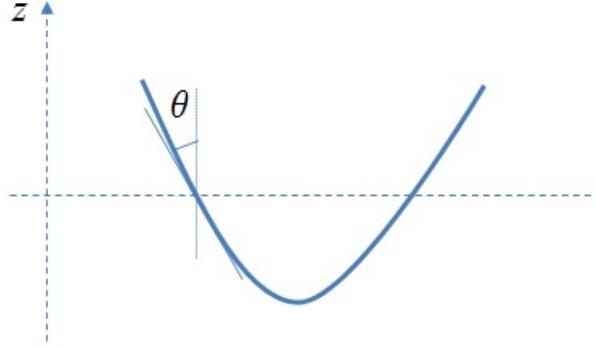


FIGURE 2.13 – Propagation dans un milieu stratifié où l’indice n ne dépend que de z . On note θ l’angle entre le rayon et l’axe z .

2.5.2 Principe de Fermat

Avant de l’étudier dans quelques cas particuliers remarquons la similitude existant entre l’équation (2.59) et le principe fondamental de la dynamique pour une particule matérielle. En effet, effectuons le changement de variable $ds = ndt$. On peut alors réécrire l’équation (2.58) comme

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = n\nabla n = \nabla\left(\frac{n^2}{2}\right). \quad (2.60)$$

Autrement dit, on retrouve ici l’équation du mouvement d’une particule de masse $m = 1$ évoluant dans un potentiel $V(\mathbf{r}) = -n^2(\mathbf{r})/2$. Cette constatation n’est en réalité qu’à moitié surprenante. En effet, tout comme l’optique géométrique, la mécanique classique est la limite d’une théorie ondulatoire (la mécanique quantique) lorsque la longueur d’onde de de Broglie tend vers zéro. Dans le cadre de la mécanique ondulatoire on peut d’ailleurs retrouver la mécanique classique par une approximation assez similaire à l’approximation eikonale, qui dans ce contexte porte le nom d’approximation WKB (pour Wenzel-Kramers-Brillouin).

Si l’on pousse plus loin l’analogie, on sait que les équations de la mécanique newtonienne peuvent se dériver d’un principe variationnel dans lequel on minimise l’action

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{mv^2}{2} - V(\mathbf{r}) \right] dt. \quad (2.61)$$

associée aux trajectoires liant deux points A_1 et A_2 entre les instants t_1 et t_2 . On peut donc formellement retrouver la trajectoire d’un rayon lumineux en minimisant une “action”

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)^2 + \frac{n^2}{2} \right] dt. \quad (2.62)$$

Si l'on paramètre la courbe par son abscisse curviligne on trouve que

$$S = \int_{s_1}^{s_2} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\mathbf{r}}{ds} \right)^2 + \frac{1}{2} \right] nds. \quad (2.63)$$

Comme, par définition de l'abscisse curviligne, $d\mathbf{r}/ds$ est un vecteur unitaire, ceci s'écrit simplement comme

$$S = \int_{s_1}^{s_2} nds. \quad (2.64)$$

Or S/c n'est rien d'autre que le temps mis par le rayon pour parcourir le trajet A_1A_2 . On a ainsi démontré le Principe de Fermat - ou Principe de moindre temps. Le trajet effectivement suivi par la lumière entre deux points minimise⁹ le temps mis pour parcourir le trajet.

2.5.3 Équation des rayons lumineux dans l'approximation paraxiale

Dans l'approximation paraxiale, on fait l'hypothèse de l'existence d'un axe optique autour duquel l'indice est invariant par rotation. Si l'on prend l'axe z selon l'axe optique, l'indice n est une fonction de z et $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ uniquement. Par ailleurs, on suppose que les faisceaux considérés sont peu inclinés et proche de l'axe optique. Ceci permet tout d'abord de développer n au voisinage de $r = 0$. Par symétrie $r \rightarrow -r$, on a $n'(r=0) = 0$ et donc $n(r, z) = n_0(z) + n_2(z)r^2/2$, avec $n_2(z) = n''(r=0, z)$ et $\mathbf{u} \sim \mathbf{u}_z$, où \mathbf{u}_z est le vecteur unitaire porté par l'axe z (autrement dit, $u_x, u_y \ll u_z$). Considérons le cas particulier d'un rayon se propageant dans le plan $y = 0$. Si l'on développe à l'ordre dominant la projection sur x de l'équation eikonale (2.58), on obtient alors

$$\frac{d(n_0(z)u_x)}{dz} = xn_2(z)\frac{dx}{dz} = u_x \quad (2.65)$$

où l'on a par ailleurs utilisé l'approximation $ds \sim dz$. Les équations eikonales peuvent donc se mettre sous la forme d'un système linéaire 2×2 de la forme

$$\frac{d}{dz} \begin{pmatrix} x \\ n_0(z)u_x \end{pmatrix} = M(z) \cdot \begin{pmatrix} x \\ n_0(z)u_x \end{pmatrix}. \quad (2.66)$$

avec

$$M(z) = \begin{pmatrix} 0 & 1/n_0(z) \\ n_2(z) & 0 \end{pmatrix} \quad (2.67)$$

9. En réalité rend stationnaire

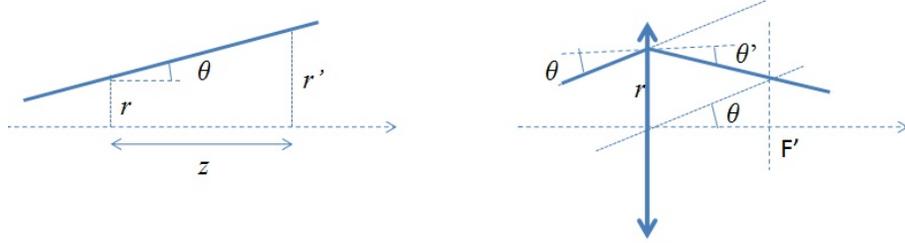


FIGURE 2.14 – Propagation dans un milieu homogène (gauche) et à travers une lentille (droite).

Ce système étant linéaire, il existe une relation linéaire entre les valeurs de $(x, n_0 u_x)$ en $z = 0$ et en z quelconque que l'on écrit formellement

$$\begin{pmatrix} x(z) \\ n_0(z)u_x(z) \end{pmatrix} = R(z) \cdot \begin{pmatrix} x(0) \\ n_0(0)u_x(0) \end{pmatrix}. \quad (2.68)$$

La matrice $R(z)$ (appelée matrice *résolvante*) caractérise complètement les propriétés optiques du milieu traversé, puisque connaissant les conditions initiales pour le rayon en $z = 0$ (décalage et inclinaison par rapport à l'axe optique) on en déduit celles en z . Elle est solution de l'équation différentielle

$$\frac{dR}{dz} = M(z) \cdot R(z), \quad (2.69)$$

avec la condition initiale $R(0) = \text{Id}$.

La matrice R est de déterminant égal à 1. En effet, On a d'après l'équation (2.69),

$$R(z + dz) = R(z) + M(z) \cdot R(z)dz = (\text{Id} + M(z)dz) \cdot R(z). \quad (2.70)$$

En prenant le déterminant de l'équation, on a

$$\det [R(z + dz)] = \det (\text{Id} + M(z)dz) \cdot \det(R(z)). \quad (2.71)$$

Or, en développant le déterminant à l'ordre 1 en dz , on a $\det (\text{Id} + M(z)dz) = 1 + \text{Tr}(M)dz$ (cette propriété est vraie quelle que soit la dimension n de l'espace, mais on peut la vérifier explicitement dans le cas $n = 2$). On en déduit donc que

$$\frac{d(\det R)}{dz} = \text{Tr}(M) \cdot \det R. \quad (2.72)$$

Comme $\text{Tr}(M) = 0$, on en déduit que le déterminant de R est constant et puisque $R(0) = \text{Id}$, celui-ci est égal à 1.

Calculons R dans quelques cas particuliers :

Propagation dans le vide

On a alors (Fig. 2.14) $\theta \sim u_x$ constant et $x(z) = x(0) + z \tan \theta \sim x(0) + zu_x(0)$. On en déduit donc que

$$R(z) = \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \hat{=} \mathcal{P}_z. \quad (2.73)$$

Propagation à travers une lentille mince

On considère (Fig. 2.14) le passage au travers d'une lentille entre $z = 0^-$ (état initial) et $z = 0^+$ (état final). La lentille étant mince, le décalage par rapport à l'axe optique n'est pas modifié par la traversée de la lentille. On a donc $x(0^+) = x(0^-)$. Par ailleurs, comme tous les rayons incidents inclinés du même angle par rapport à l'axe optique convergent au même point du plan focal, on a

$$x + f \tan(\theta(0^+)) = f \tan(\theta(0^-)), \quad (2.74)$$

Dans l'approximation paraxiale, on a $\sin \theta \sim \tan \theta$ et donc

$$R(0^+) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{pmatrix} \hat{=} \mathcal{L}_f. \quad (2.75)$$

Fibre optique à gradient d'indice

Les fibres optiques sont des fibres de silice possédant un indice inhomogène piégeant la lumière et permettant de propager celle-ci sur de longues distances. Dans une description schématique, correspondant au cas particulier des fibres à gradient d'indice, on suppose que l'indice varie continûment avec r , de façon à ce que $n(r)$ possède un maximum en $r = 0$. D'après l'analogie avec la mécanique, on voit que l'énergie potentielle effective $-n^2$ possède un minimum en $r = 0$, ce qui permet de piéger les rayons au voisinage de l'axe optique.

On peut décrire plus quantitativement la propagation de la lumière dans une telle fibre en la découpant en tranches de longueur dz . À la propagation proprement dite, s'ajoute un déphasage $\delta\phi = kgr^2 dz$, où g caractérise la variation radiale de l'indice et peut d'après ce qui précède être associé à une focale $f = 1/g dz$. La propagation dans la tranche dz va donc être décrite par une matrice ABCD produit de \mathcal{P}_{dz} et $\mathcal{L}_{1/g dz}$, soit en développant à l'ordre 1 en dz

$$R(dz) = \mathbb{I} + dz \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -g & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.76)$$

Pour obtenir la propagation sur une distance z finie, on divise celle-ci en $N = z/dz$ intervalles, de sorte que

$$R(z) = R(dz)^{z/dz}. \quad (2.77)$$

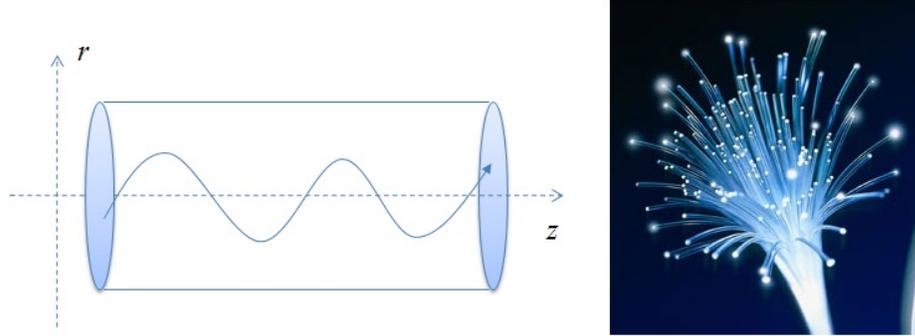


FIGURE 2.15 – Principe de la fibre optique à gradient d'indice : un gradient d'indice transverse permet de maintenir les rayons lumineux proches de l'axe optique.

En notant que $R(dz)^{z/dz} = \exp[z/dz \ln R(dz)]$, et en développant le logarithme, on en déduit que

$$R(z) = \exp \left[z \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -g & 0 \end{pmatrix} \right] = \exp [z\sqrt{g}G] \quad (2.78)$$

où la matrice G est définie par

$$G = \begin{pmatrix} 0 & g^{-1/2} \\ -g^{1/2} & 0 \end{pmatrix} \quad (2.79)$$

et satisfait la condition $G^2 = -\mathbb{I}$. Cette dernière propriété nous permet de voir que $G^{2n} = (-1)^n \mathbb{I}$ et $G^{2n+1} = (-1)^n G$. Si l'on développe en série l'exponentielle apparaissant dans (2.78), on voit immédiatement que

$$R(z) = \cos(\sqrt{g}z)\mathbb{I} + \sin(\sqrt{g}z)G. \quad (2.80)$$

En revenant à la définition de R , on en déduit que la distance à l'axe de la fibre évolue comme

$$x(z) = \cos(\sqrt{g}z)x(0) + \sin(\sqrt{g}z)n_0(0)u_x(0)/\sqrt{g}, \quad (2.81)$$

et reste donc comme attendu piégé au voisinage de l'axe optique.

De nos jours, les fibres optiques sont utilisées intensivement par l'industrie des télécommunications pour le transport optique de l'information : la lumière est en effet moins sujette aux perturbations électromagnétiques, et en l'absence d'effet Joule, les pertes y sont moins importantes. Une des limitations actuelles au transport sur de longues distance est l'existence de radicaux hydroxyles piégés dans la silice qui sont responsables de pics d'absorption vers 1.4 et 1.7 microns. En combinaison avec l'utilisation de laser émettant dans la fenêtre de transparence à 1.5 microns, l'utilisation d'amplificateurs de lumière permet cependant de propager des informations numériques sur de grandes distances : Il existe ainsi

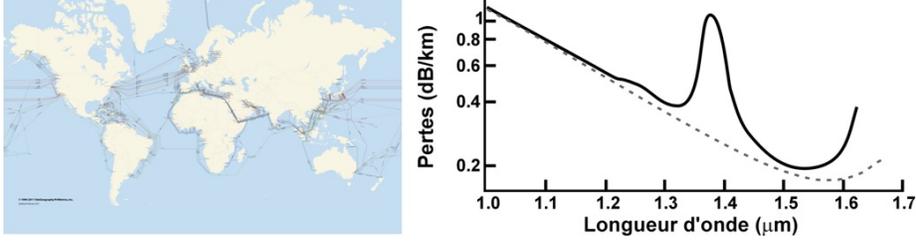


FIGURE 2.16 – À gauche : carte des câbles de télécommunication sous-marins (source <http://www.telegeography.com>). À droite : absorption d'une fibre optique. Les télécommunications utilisent la fenêtre de transparence située autour de 1.5 microns.

depuis 1988 des fibres optiques transatlantiques reliant l'Europe à l'Amérique (Fig. 2.16).

2.6 Faisceaux gaussiens

2.6.1 Faisceau limité par la diffraction

Dans la discussion de l'approximation de Fraunhofer, nous avons montré qu'un faisceau de profil transverse de largeur typique $\Delta\rho \sim a$ diffractait dans le champ lointain avec un angle $\alpha \sim \lambda/a$ donné par la largeur de la transformée de Fourier du champ électrique en $z = 0$, et donc limité par la relation d'incertitude d'Heisenberg $\Delta\rho\Delta q \gtrsim 1$. Dans cette partie, nous allons chercher à caractériser les faisceaux les plus collimatés", c'est-à-dire ceux qui, à diamètre fixé, divergent le moins possible à longue distance.

Pour commencer, notons qu'une onde électromagnétique physique réaliste portant une puissance finie, l'enveloppe $\mathcal{E}(\rho)$ doit être de carré sommable, et on peut donc définir le produit scalaire

$$\langle \mathcal{E}_1 | \mathcal{E}_2 \rangle = \int d^2\rho' \mathcal{E}_1^*(\rho') \mathcal{E}_2(\rho'). \quad (2.82)$$

Par analogie avec le problème quantique équivalent, on définit des opérateurs position $\hat{\rho}$ et impulsion \hat{q} par

$$\langle \rho | \hat{\rho} | \mathcal{E} \rangle = \rho \mathcal{E}(\rho) \quad (2.83)$$

$$\langle \rho | \hat{q} | \mathcal{E} \rangle = -i \nabla_{\perp} \mathcal{E}(\rho), \quad (2.84)$$

ces opérateurs satisfaisant la relation de commutation $[\hat{\rho}_{\alpha}, \hat{q}_{\beta}] = i\delta_{\alpha,\beta}$, où $\hat{\rho}_{\alpha}$ et \hat{q}_{β} désignent les coordonnées α et β des opérateurs vectoriels $\hat{\rho}$ et \hat{q} . Les dimensions transverses sont alors définies par

$$\Delta\rho_\alpha^2 = \langle \mathcal{E} | \hat{\rho}_\alpha^2 | \mathcal{E} \rangle / \langle \mathcal{E} | \mathcal{E} \rangle \quad (2.85)$$

$$\Delta q_\alpha^2 = \langle \mathcal{E} | \hat{q}_\alpha^2 | \mathcal{E} \rangle / \langle \mathcal{E} | \mathcal{E} \rangle, \quad (2.86)$$

où le facteur $\langle \mathcal{E} | \mathcal{E} \rangle$ normalise le champ électrique à l'unité pour le produit hermitien considéré. D'après les inégalités de Heisenberg correspondante (Eq. 2.124 pour $\hat{A} = \hat{q}_\alpha$ et $\hat{B} = \hat{\rho}_\alpha$), on a bien

$$\Delta\rho_\alpha \Delta q_\alpha \geq 1/2. \quad (2.87)$$

Par ailleurs, d'après (2.125), ce critère est saturé pour un champ \mathcal{E} satisfaisant la condition

$$\left(\hat{q}_\alpha - \frac{i}{2\Delta\rho_\alpha^2} \hat{\rho}_\alpha \right) | \mathcal{E} \rangle = 0. \quad (2.88)$$

Dans l'espace des positions, cette équation s'écrit

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \rho_\alpha} + \frac{\rho_\alpha}{2\Delta\rho_\alpha^2} \mathcal{E} = 0, \quad (2.89)$$

qui s'intègre ensuite comme

$$\mathcal{E} = \text{cte} \times e^{-\rho_\alpha^2/4\Delta\rho_\alpha^2}, \quad (2.90)$$

où la constante dépend de $\rho_{\beta \neq \alpha}$. Si l'on prend en compte les deux dimensions transverses, on obtient finalement un profil gaussien¹⁰ de la forme

$$\mathcal{E}(\boldsymbol{\rho}) = \mathcal{E}_0 e^{-(\rho_x^2/w_{x,0}^2 + \rho_y^2/w_{y,0}^2)/4}, \quad (2.91)$$

où l'on pose conventionnellement $w_{\alpha,0} = 2\Delta\rho_\alpha$, que l'on baptise le col (ou *wais*) du faisceau. La relation précédente donne le profil du champ électrique en $z = 0$ et intéressons nous à présent à la propagation du champ pour $z \neq 0$. Pour cela, utilisons la formule intégrale (2.10) qui nous donne

$$\mathcal{E}(\boldsymbol{\rho}, z) = \mathcal{E}_0 \frac{k}{2i\pi z} \prod_\alpha \left(\int_{-\infty}^{+\infty} d\rho'_\alpha e^{-\rho'^2_\alpha/w_{\alpha,0}^2} e^{ik(\rho_\alpha - \rho'_\alpha)^2/2z} \right) \quad (2.92)$$

L'intégrale sur ρ'_α est une intégrale gaussienne dont le calcul est présenté dans l'appendice 2.7.1 et nous donne

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\rho'_\alpha e^{-\rho'^2_\alpha/w_{\alpha,0}^2} e^{ik(\rho_\alpha - \rho'_\alpha)^2/2z} = \sqrt{\frac{\pi}{1/w_{\alpha,0}^2 + k/2iz}} e^{-\frac{\rho_\alpha^2}{w_{\alpha,0}^2} \left(\frac{1}{1+2iz/kw_{\alpha,0}^2} \right)} \quad (2.93)$$

10. On peut noter que la gaussienne représente aussi l'état fondamental de l'oscillateur harmonique. Ceci n'est pas une surprise car l'équation (2.88) peut s'écrire $\hat{a}_\alpha | \mathcal{E} \rangle = 0$ avec $\hat{a}_\alpha = \hat{\rho}_\alpha / \sqrt{2\Delta\rho_\alpha} + i\sqrt{2\Delta\rho_\alpha} \hat{q}_\alpha$ qui possède les propriétés d'un opérateur d'annihilation.

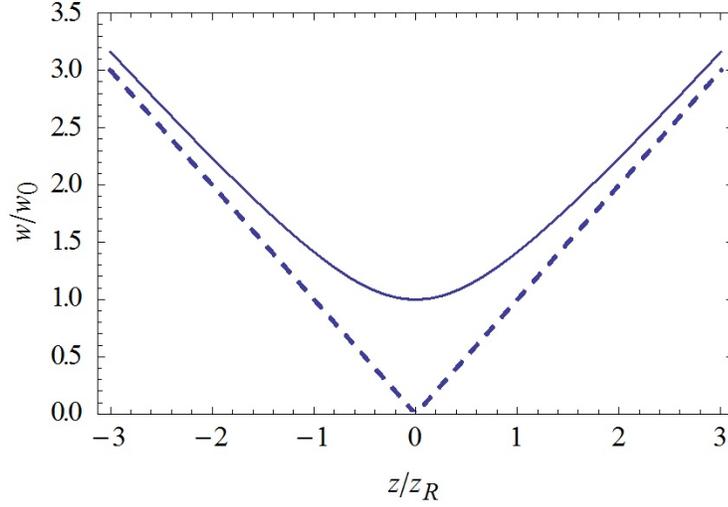


FIGURE 2.17 – Évolution du diamètre d'un faisceau gaussien : pour $z \ll z_R = \pi w_0^2/\lambda$, le diamètre reste constant égal à w_0 . Pour $z \gg z_R$ on entre dans le régime de champ lointain et le faisceau s'“auto-diffracte”.

On pose $z_{R\alpha} = kw_\alpha^2/2$, baptisé longueur de Rayleigh, et $q_\alpha(z) = z + iz_{R\alpha}$. Le champ électrique en z a donc pour expression

$$\mathcal{E}(\boldsymbol{\rho}, z) = \mathcal{E}_0 \prod_{\alpha} \left[\sqrt{\frac{k}{2q_\alpha(z)}} e^{-ik\rho_\alpha^2/2q_\alpha(z)} \right]. \quad (2.94)$$

L'intensité du faisceau est proportionnelle à $|\mathcal{E}|^2$, ce qui nous donne

$$I(\boldsymbol{\rho}, z) \propto e^{-2\sum_{\alpha} \rho_\alpha^2/w_\alpha^2(z)}, \quad (2.95)$$

avec

$$w^2(z) = w_0^2(1 + z^2/z_R^2), \quad (2.96)$$

où par souci de simplicité, nous avons omis l'indice α . On retrouve le comportement qualitatif mentionné dans l'introduction. Pour $z \ll z_{R\alpha}$, correspondant au régime de diffraction de Fresnel, le diamètre du faisceau change peu et reste égal à w_0 . Pour $z \gg z_R$, on entre dans le régime de la diffraction de Fraunhofer et le faisceau diverge sous l'effet de la diffraction. Dans cette limite, on a en effet $w(z) \sim w_0 z/z_R$, correspondant à une divergence avec un angle $\theta \sim w_0/z_R \sim \lambda/w_0$, qui correspond bien à l'angle de diffraction par un objet de taille w_0 (Fig. 2.17).

2.6.2 Propagation d'un faisceau non-gaussien, notion de M^2

D'après l'inégalité de Heisenberg (2.87), on a pour un faisceau de profil transverse quelconque

$$\Delta q_\alpha^2 = \frac{M^2}{4\Delta\rho_\alpha^2}, \quad (2.97)$$

où M^2 est un nombre supérieur à 1, ne valant 1 que pour un faisceau gaussien. Ce paramètre m^2 mesure la qualité du mode transverse du faisceau et caractérise la divergence de celui-ci (puisque par définition, lorsque $M = 1$ le faisceau est gaussien et donc de divergence minimale). On montre en effet dans ce qui suit que l'évolution du rayon du faisceau s'exprime simplement en fonction de M^2 . En effet, comme nous l'avons noté précédemment, nous pouvons mettre l'équation de l'enveloppe lentement variable sous la forme d'une équation de Schrödinger

$$ik \frac{d}{dz} |\mathcal{E}\rangle = \widehat{H} |\mathcal{E}\rangle, \quad (2.98)$$

où l'on introduit le "hamiltonien" $\widehat{H} = \widehat{q}^2/2$. D'après le théorème d'Ehrenfest (cf. appendice ??), le diamètre $\Delta\rho_\alpha^2 = \langle \mathcal{E} | \widehat{\rho}_\alpha^2 | \mathcal{E} \rangle$ obéit à l'équation d'évolution

$$ik \frac{d\langle \widehat{\rho}_\alpha^2 \rangle}{dz} = \langle [\widehat{\rho}_\alpha^2, \widehat{H}] \rangle, \quad (2.99)$$

où le commutateur se calcule sans difficulté en utilisant la relation $[\widehat{A}, \widehat{B}\widehat{C}] = [\widehat{A}, \widehat{B}]\widehat{C} + \widehat{B}[\widehat{A}, \widehat{C}]$, ce qui nous donne

$$[\widehat{\rho}_\alpha^2, \widehat{H}] = i(\widehat{\rho}_\alpha \widehat{q}_\alpha + \widehat{q}_\alpha \widehat{\rho}_\alpha). \quad (2.100)$$

En introduisant le corrélateur $\widehat{C}_\alpha = \widehat{\rho}_\alpha \widehat{q}_\alpha + \widehat{q}_\alpha \widehat{\rho}_\alpha$, on en déduit que

$$k \frac{d\langle \widehat{\rho}_\alpha^2 \rangle}{dz} = \langle \widehat{C}_\alpha \rangle. \quad (2.101)$$

Pour poursuivre le calcul, nous avons besoin de la valeur de $\langle \widehat{C}_\alpha \rangle$ que l'on obtient une nouvelle fois en utilisant le théorème d'Ehrenfest, ce qui nous donne après application de la formule pour le commutateur avec un produit d'opérateurs

$$ik \frac{d\langle \widehat{C}_\alpha \rangle}{dz} = \langle [\widehat{C}_\alpha, \widehat{H}] \rangle = 2i\langle \widehat{q}_\alpha^2 \rangle. \quad (2.102)$$

On clôt alors en notant que \widehat{q}_α^2 commute avec \widehat{H} et est donc conservé en valeur moyenne. On en déduit par conséquent que

$$\langle \widehat{C}_\alpha \rangle = \frac{2\Delta q_\alpha^2}{k} (z - z_0), \quad (2.103)$$

puis

$$\Delta\rho_\alpha^2(z) = \Delta\rho_\alpha^2(z_0) + \frac{\Delta q_\alpha^2}{k^2} (z - z_0)^2. \quad (2.104)$$

Cette équation peut alors se mettre sous une forme analogue à l'évolution de la largeur du faisceau gaussien (Eq. 2.96), puisque l'on a pour finir

$$\Delta\rho_\alpha^2(z) = \Delta\rho_\alpha^2(z_0) \left(1 + M^2 (z - z_0)^2 / z_R^2\right), \quad (2.105)$$

où l'on a défini la longueur de Rayleigh par $z_R = k\Delta\rho_0^2(z_0)$.

2.6.3 Optique gaussienne, matrices $ABCD$

Considérons la propagation d'un faisceau gaussien au travers d'une lentille décrite par le formalisme mis en place dans le cadre général de la propagation paraxiale. D'après ce que nous avons vu, l'effet de la lentille est d'introduire un déphasage quadratique en position de sorte qu'à la sortie d'une lentille située en z_0 , l'amplitude d'un faisceau gaussien de paramètre q s'écrit

$$\mathcal{E}(\boldsymbol{\rho}, z_0^+) = \frac{k\mathcal{E}_0}{q} e^{-ik\rho^2/2(1/q-1/f)}, \quad (2.106)$$

autrement dit, le faisceau reste gaussien avec un nouveau paramètre q' tel que

$$\frac{1}{q'} = \frac{1}{q} + \frac{1}{f}. \quad (2.107)$$

Cette relation est formellement analogue à la relation de conjugaison pour une lentille mince obtenue en optique géométrique, à condition de remplacer la distance au centre optique par le paramètre q de la gaussienne.

La relation liant (2.107) q' à q peut se récrire sous la forme d'une homographie

$$q' = \frac{Aq + B}{Cq + D}, \quad (2.108)$$

où les coefficients ABCD peuvent se mettre sous la forme d'une matrice

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.109)$$

où l'on reconnaît la matrice ABCD (2.75) introduite dans le cadre de l'optique géométrique. Cette coïncidence n'est pas un hasard, et se généralise en réalité à tout système optique paraxial. À titre d'exemple, on voit que la propagation libre du faisceau gaussien pour laquelle $q(z) = q(0) + z$ peut se mettre sous la forme (2.108) avec la matrice ABCD (2.73).

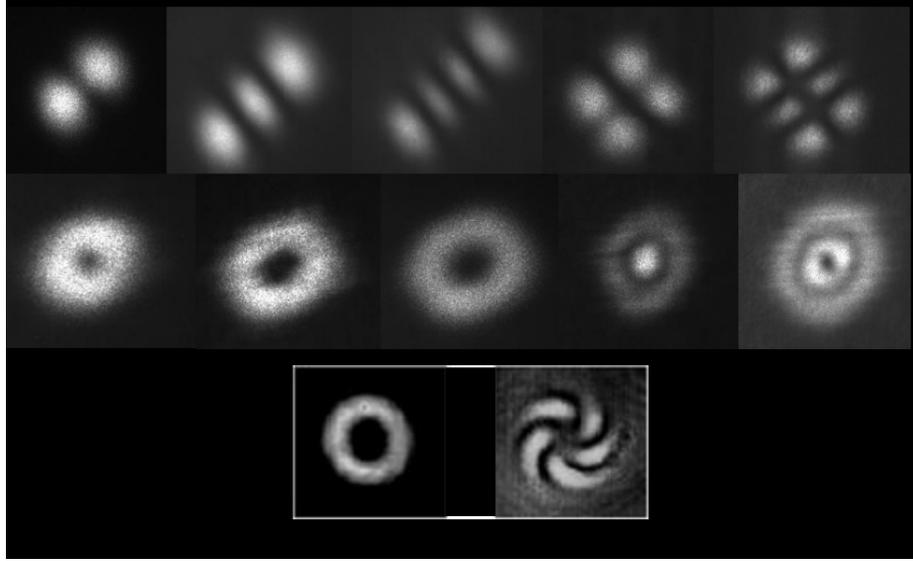


FIGURE 2.18 – Ligne du haut : visualisation de modes de Hermite-Gauss. De gauche à droite, HG_{01} , HG_{02} , HG_{03} , HG_{11} , HG_{21} . Ligne du milieu, modes de Laguerre-Gauss LG_{10} , LG_{20} , LG_{30} , LG_{11} , LG_{21} . Ligne du bas, visualisation du profil de phase d'un mode de Laguerre-Gauss par interférence avec un faisceau gaussien.

2.6.4 Faisceaux gaussiens d'ordre supérieur

Les faisceaux gaussiens que nous venons d'étudier peuvent se généraliser à des bases de fonctions solutions de l'équation de l'enveloppe lentement variable. Les deux principales familles de solutions sont constituées respectivement par les modes de Hermite-Gauss et Laguerre-Gauss.

Les modes de Hermite-Gauss, notés $H_{m,n}$ correspondent à un profil transverse de la forme

$$\mathcal{E}(x; y) = P_n(x)P_m(y) \exp(-(x^2 + y^2)/w^2) \quad (2.110)$$

où P_n est le polynôme de Hermite de degré n . Le polynôme P_n possède n racines, ce qui implique l'existence de n (resp. m) annulations de l'intensité dans la direction x (resp. y).

Exprimé en coordonnées polaire (ρ, θ) , le profil transverse d'un mode de Laguerre-Gauss LG_{mn} s'écrit

$$\mathcal{E}(x, y) = P_{mn}(\rho) e^{-\rho^2/w^2} e^{im\theta} \quad (2.111)$$

où les P_{mn} sont des polynômes de Laguerre.

Des profils expérimentaux de ces deux classes de solutions sont représentés sur la figure 2.18. On note la mise en évidence du profil de phase des modes

de Laguerre-Gauss. La structure en spirale est associée à une propagation “en hélice” de l’énergie le long du faisceau. En effet les surfaces équiphasées, dont la normale définit le vecteur de Poynting, sont des hélicoïdes données par l’équation $kz + m\theta = \text{cte}$. Cette structure de phase est par ailleurs associée à un moment orbital des photons, par analogie aux états propres du moment cinétique en mécanique quantique. Les modes de Laguerre-Gauss peuvent ainsi être utilisés pour transférer du moment cinétique à la matière, comme cela a par exemple été utilisé récemment pour mettre en rotation un gaz d’atomes froids [1]. Le principe de l’expérience consiste simplement à réaliser une sorte de vis d’Archimède optique en faisant interférer un faisceau gaussien et un faisceau de Laguerre-Gauss contrepropageant. Si les faisceaux étaient gaussiens, on obtiendrait simplement une onde stationnaire dont les nœuds et les ventres constitueraient une succession de plans orthogonaux à l’axe de propagation. Dans le cas présent, les surfaces nodales sont des hélices, que l’on peut mettre en rotation en décalant légèrement la fréquence relative des deux faisceaux. On obtient alors un profil d’intensité lumineuse analogue à un tire-bouchon en rotation qui peut entraîner les atomes avec lui¹¹.

2.6.5 Mode propre d’une cavité optique

En plus d’être associés à une divergence minimale, les faisceaux gaussiens constituent le mode naturel d’émission d’un grand nombre de lasers. En effet, comme nous allons le montrer dans ce qui suit, ce sont aussi des modes propres d’une cavité optique constituée de deux miroirs sphériques en vis-à-vis. Formellement, le rôle du miroir sphérique est identique à celui d’une lentille mince puisqu’il introduit un déphasage entre les rayons réfléchis dépendant de la distance à l’axe optique. En “dépliant” la cavité il est formellement possible de remplacer les deux miroirs par une succession de lentilles.

Soit M la matrice ABCD correspondant à un aller-retour dans la cavité. Si l’on note $q' = (Aq + B)/(Cq + D)$, on doit avoir $q' = q$ et donc

$$q = \frac{Aq + B}{Cq + D}. \quad (2.112)$$

Cette équation se transforme en une équation polynômiale de degré deux $Cq^2 + (D - A)q - B = 0$ dont les solutions doivent être complexes puisque $\text{Im}(q) = z_{\text{R}} \neq 0$ donne le diamètre du faisceau au niveau de son col. Cette condition est remplie lorsque le discriminant est négatif et donc $(D - A)^2 + 4BC < 0$. En utilisant le fait que le déterminant des matrices ABCD vaut 1, on voit que $DA - BC = 1$ ce qui permet de récrire la condition sur le discriminant comme $(D + A)^2 - 4 < 0$, soit

$$|\text{Tr}(M)| < 2, \quad (2.113)$$

11. Plus précisément, le champ résultant de l’interférence des deux faisceaux contrepropageants est de la forme $e^{i(kz + m\theta - \omega_+ t)} + e^{i(-kz - \omega_- t)}$ dont le module carré est $2\sin^2(kz + m\theta/2 - \delta\omega t/2)$, où $\delta\omega = \omega_+ - \omega_-$.

puisque $\text{Tr}(M) = A + D$.

Si l'on considère deux miroirs identiques de focale f et distants d'une distance L , la matrice M vaut $M = \mathcal{P}_L \mathcal{L}_f \mathcal{P}_L \mathcal{L}_f$ où les matrices \mathcal{L}_f et \mathcal{P}_L sont les matrices ABCD décrivant respectivement la traversée d'une lentille (ou la réflexion sur un miroir) et la propagation dans l'espace libre (cf. Eq. (2.73) et (2.75)). On a donc ici

$$M = \begin{pmatrix} (1 - L/f)^2 - L/f & L(2 - L/f) \\ (-2 + L/f)/f & 1 - L/f \end{pmatrix}, \quad (2.114)$$

ce qui nous donne pour la condition (2.113)

$$L/f < 4 \quad (2.115)$$

Lorsque cette condition est remplie, on dit que la cavité est stable et qu'elle peut abriter un mode gaussien. Ce critère de stabilité peut se réinterpréter en terme d'optique géométrique puisque l'on montre qu'il correspond à une stabilité des rayons qui restent alors proches de l'axe optique.

2.7 Appendices

2.7.1 Intégrales gaussiennes

On cherche ici à calculer l'intégrale

$$I(\alpha, \beta) = \int d^2 \boldsymbol{\rho} e^{-\alpha \rho^2 / 2 - \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\rho}}, \quad (2.116)$$

où α et β sont deux nombres complexes, avec $\text{Re}(\alpha) > 0$ de façon à garantir la convergence. Commençons par étudier le cas où α est réel et β nul. Dans ce cas, on doit calculer

$$I = \int d^2 \boldsymbol{\rho} e^{-\alpha \rho^2}, \quad (2.117)$$

que l'on calcule par exemple en passant en coordonnées polaires (ρ, θ) , soit

$$I = \int_0^\infty 2\pi \rho d\rho e^{-\alpha \rho^2 / 2} = \frac{2\pi}{\alpha}, \quad (2.118)$$

en posant $u = \rho^2$ dans l'intégrale.

Pour $\boldsymbol{\beta} \neq 0$, mais réel, on met l'argument de l'exponentielle sous forme canonique, soit

$$\begin{aligned} I &= \int d^2 \boldsymbol{\rho} \exp [-\alpha (\rho^2 + 2\boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\rho} / \alpha) / 2] \\ &= \int d^2 \boldsymbol{\rho} \exp [-\alpha ((\boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\beta} / \alpha)^2 - \beta^2 / \alpha^2) / 2]. \end{aligned}$$

En posant $\boldsymbol{\rho}' = \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\beta}/\alpha$, on en déduit que

$$I = e^{\beta^2/2\alpha} \int d^2 \boldsymbol{\rho}' e^{-\alpha \rho'^2/2}. \quad (2.119)$$

On est donc ramené au problème précédent, ce qui nous donne pour finir

$$\int d^2 \boldsymbol{\rho} e^{-\alpha \rho^2/2 - \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\rho}} = \frac{2\pi}{\alpha} e^{\beta^2/2\alpha}. \quad (2.120)$$

En toute rigueur, nous n'avons montré cette égalité que pour α et $\boldsymbol{\beta}$ réels. Cependant, les deux membres de l'égalité étant définis et analytiques sur le demi-plan complexe $\text{Re}(\alpha) > 0$, on en déduit leur égalité en vertu de l'unicité du prolongement analytique.

2.7.2 Inégalité de Heisenberg et critère de saturation.

Considérons deux opérateurs hermitiens \widehat{A} et \widehat{B} opérant sur les fonctions de carré sommable. Pour λ réel, on définit

$$P(\lambda) = \left\| \left(\widehat{A} + i\lambda \widehat{B} \right) |\mathcal{E}\rangle \right\|^2. \quad (2.121)$$

P étant un module est positif pour tout λ . Par ailleurs, si on le développe explicitement, on voit que celui-ci est un polynôme d'ordre 2 que l'on écrit sous la forme

$$P(\lambda) = \langle \widehat{A}^2 \rangle + i\lambda \langle [\widehat{A}, \widehat{B}] \rangle + \lambda^2 \langle \widehat{B}^2 \rangle. \quad (2.122)$$

Comme ce polynôme ne change jamais de signe, ceci signifie qu'il ne possède pas de racine réelle et que son discriminant est par conséquent négatif, soit

$$(i \langle [\widehat{A}, \widehat{B}] \rangle)^2 - 4 \langle \widehat{A}^2 \rangle \langle \widehat{B}^2 \rangle \leq 0. \quad (2.123)$$

Comme \widehat{A} et \widehat{B} sont hermitien, $i[\widehat{A}, \widehat{B}]$ l'est aussi et donc $i \langle [\widehat{A}, \widehat{B}] \rangle$ est réel. Si \widehat{A} et \widehat{B} sont de valeur moyenne nulle¹², on peut par conséquent récrire l'inégalité précédente comme

$$\Delta A \Delta B \geq \left| \frac{\langle [\widehat{A}, \widehat{B}] \rangle}{2} \right|, \quad (2.124)$$

où $\Delta A^2 = \langle \widehat{A}^2 \rangle$ désigne la variance de l'observable \widehat{A} .

Cherchons à présent à quelle condition cette inégalité est saturée (ou, autrement dit, à quelle condition l'inégalité de Heisenberg est une égalité). Cette condition est remplie lorsque le discriminant de P s'annule et donc lorsque celui-ci possède une racine double $\lambda_0 = -i \langle [\widehat{A}, \widehat{B}] \rangle / 2\Delta B^2$. Pour cette valeur particulière de λ , on a d'après (2.121)

¹². Au besoin en soustrayant aux observables leurs valeurs moyennes, ce qui ne change pas leurs commutateurs.

$$\left(\widehat{A} + i\lambda_0\widehat{B}\right)|\mathcal{E}\rangle = 0 \quad (2.125)$$

Bibliographie

- [1] M. F. Andersen, C. Ryu, Pierre Cladé, Vasant Natarajan, A. Vaziri, K. Helmerson, and W. D. Phillips. Quantized rotation of atoms from photons with orbital angular momentum. *Phys. Rev. Lett.*, 97(17) :170406, Oct 2006.
- [2] J.F. Sherson, C. Weitenberg, M. Endres, M. Cheneau, I. Bloch, and S. Kuhr. Single-atom-resolved fluorescence imaging of an atomic Mott insulator. *Nature*, 467(7311) :68–72, 2010.

Chapitre 3

Cohérence et interférométrie

Comme nous l'avons déjà mentionné au chapitre précédent, une des grandes découvertes du XXème siècle est la prise de conscience que le bruit entachant les mesures n'est pas qu'une nuisance due aux imperfections expérimentales et que dans certains cas celui-ci pouvait être attribué à des causes physiques fondamentales, telles que l'agitation thermique pour des systèmes macroscopiques ou les fluctuations quantiques à l'échelle microscopique. L'étude des propriétés statistiques de la lumière est au cœur de l'optique quantique et le chapitre qui suit est consacré à une description du formalisme de l'optique statistique qui permettent de préciser le concept de cohérence de la lumière et donne accès à des phénomènes nouveaux associés à la nature quantique du rayonnement.

3.1 Rayonnement incohérent, notion de matrice densité

3.1.1 Expérience des fentes d'Young pour une source spatialement étendue, analyse classique

En guise d'introduction aux propriétés de cohérence de la lumière, nous allons considérer l'exemple bien connu de l'expérience des fentes d'Young. Considérons dans un premier temps une source cohérente S placée à une distance L' des fentes, elle-mêmes séparées d'une distance d . On observe les interférences sur un écran placé à une distance L des fentes (Fig. 3.1).

Si l'on note x' la distance de la source au plan de symétrie des fentes, le champ électrique reçu en un point x' du plan d'observation peut s'écrire

$$E = E_0 \left(e^{i\theta_1(x',x)} + e^{i\theta_2(x',x)} \right), \quad (3.1)$$

où $\theta_i(x, x')$ désigne le déphasage de l'onde lors de la propagation de x' à x . L'intensité lumineuse est proportionnelle à $|E|^2$ et varie donc comme

$$I(x) \propto [1 + \cos((\theta_1(x, x') - \theta_2(x, x')))], \quad (3.2)$$

où l'on retrouve la formule des interférences à deux ondes.

Dans l'approximation paraxiale, on a

$$\theta_2(x, x') - \theta_1(x, x') = 2\pi \frac{d}{\lambda} \left(\frac{x}{L} + \frac{x'}{L'} \right). \quad (3.3)$$

Supposons à présent que la source est une fente de largeur h émettant un rayonnement spatialement incohérent. La figure d'interférence obtenue sur l'écran s'obtient alors en sommant les *intensités* émises par chaque source élémentaires $S(x')$. En supposant l'éclairement de la fente source uniforme, on en déduit d'après (3.2) que l'intensité en un point x de l'écran s'écrit

$$I(x) \propto \int_{-h/2}^{+h/2} dx' [1 + \cos(\theta_2(x, x') - \cos(\theta_1(x, x')))]. \quad (3.4)$$

Dans l'approximation paraxiale, on calcule l'intégrale sans difficulté, ce qui nous donne

$$I(x) \propto h + \frac{L'\lambda}{2\pi d} \left[\sin \left(\frac{2\pi d}{\lambda} \left(\frac{x}{L} + \frac{x'}{L'} \right) \right) \right]_{x'=-h/2}^{x'=h/2}. \quad (3.5)$$

En utilisant l'identité $\sin a - \sin b = 2 \sin((a - b)/2) \cos((a + b)/2)$, on en déduit que

$$I(x) \propto h + \frac{L'\lambda}{\pi d} \sin \left(\frac{\pi dh}{L'\lambda} \right) \cos \left(\frac{2\pi dx}{L\lambda} \right), \quad (3.6)$$

soit

$$I(x) \propto 1 + \operatorname{sinc} \left(\frac{\pi dh}{L'\lambda} \right) \cos \left(\frac{2\pi dx}{L\lambda} \right). \quad (3.7)$$

Cette relation se met sous la forme $I(x) = 1 + C \cos(2\pi xd/\lambda L)$, où C désigne le contraste des franges. Dans le modèle considéré, on constate que C est simplement donné par

$$C = \operatorname{sinc} \left(\frac{\pi dh}{L'\lambda} \right), \quad (3.8)$$

et décroît donc lorsque l'on augmente la largeur de la source, ce que l'on observe effectivement sur les photographies de la figure 3.1. On note en particulier la vérification d'une prédiction particulièrement remarquable de la formule du contraste, qui est une inversion de celui-ci lorsque le sinus cardinal change de signe, les franges blanches devenant alors des franges brillantes.

Cette expérience bien connue illustre le concept de cohérence spatiale : malgré son extension spatiale, la source est cohérente sur un angle $\alpha_{\text{coh}} \sim h/\lambda$ sur lequel on peut négliger les retards mutuels entre les différents points

3.1. RAYONNEMENT INCOHÉRENT, NOTION DE MATRICE DENSITÉ

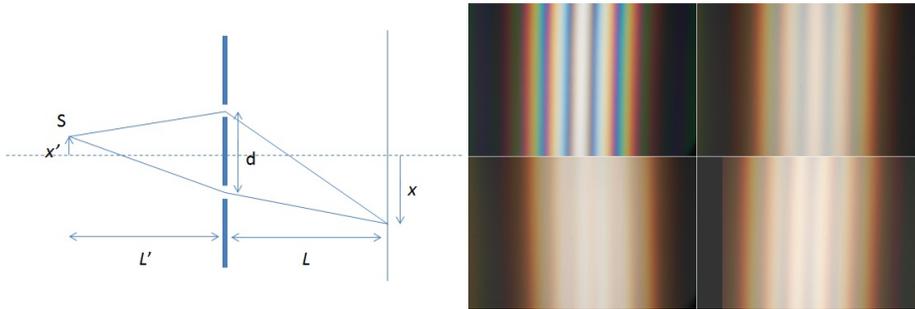


FIGURE 3.1 – Gauche : Principe de l'expérience des fentes d'Young. Droite : évolution du contraste des franges en lumière blanche pour des fentes séparées de $d = 0.2$ mm et pour différentes largeurs de la fente source : 0.03 mm (en haut à gauche); 0.36 mm (haut à droite); 0.46 mm (bas à gauche) contraste quasi-nul et 0.68 mm (bas à droite) inversion du contraste. La distance entre les fentes et la source est de 15 cm. Photo extraite de [6]

sources¹ : la différence de marche provient alors seulement de la propagation *après* l'écran. Dans l'expérience des fentes d'Young, on fait interférer deux points du front d'onde distants angulairement de $\alpha \sim d/L'$ (on dit que les fentes d'Young constituent un interféromètre à division du front d'onde). On n'obtiendra des franges que lorsque $\alpha \lesssim \alpha_{\text{coh}}$, soit $dh/L'\lambda \lesssim 1$.

3.1.2 Interféromètre stellaire de Michelson et interférométrie optique à longue base

De par leur grande sensibilité, les techniques interférométriques permettent de sensiblement améliorer la résolution et les performances des télescopes. Nous en avons vu un premier exemple dans le cas de l'holographie et nous l'illustrons ici dans le cas de l'interférométrie stellaire en particulier l'interférométrie optique à longue base dont le principe est utilisé dans les télescopes modernes comme le VLT (*Very Large Telescope*) au Chili.

Comme nous l'avons vu au chapitre précédent, la résolution théorique d'un système optique est limitée par la taille des optiques utilisées². En astronomie, on peut donc en principe améliorer la finesse des observations en utilisant des miroirs le plus grand possible³. Pour des raisons techniques évidentes, il est compliqué et cher de réaliser des miroirs géants et la taille des miroirs des télescopes est en pratique limitée à une dizaine de mètres (le plus grand télescope

1. Il s'agit du même angle que celui de la figure de diffraction de la fente dans l'approximation de Fraunhofer, puisque la tâche de diffraction s'interprète comme la région où les ondelettes de Huygens interfèrent en phase et donc constructivement.

2. Si l'on s'affranchit de la turbulence atmosphérique qui est le vrai facteur limitant pour les télescopes de plus d'un mètre de diamètre.

3. Un autre avantage des miroirs de grande taille est la puissance lumineuse qu'ils peuvent collecter.

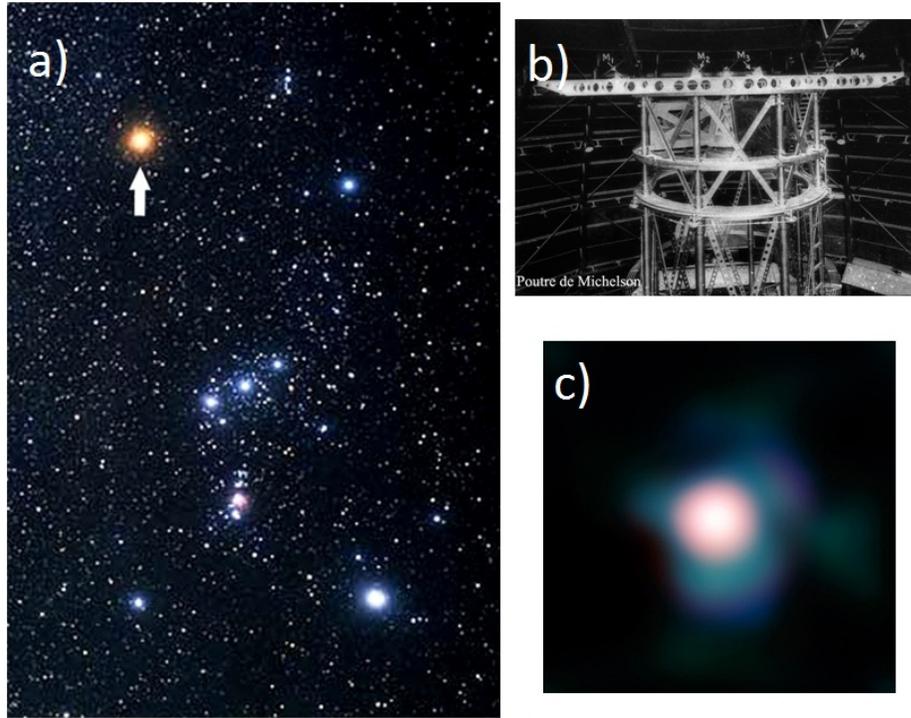


FIGURE 3.2 – Bételgeuse est une supergéante rouge situé dans la constellation d’Orion, à 640 années-lumière de la Terre (a). Son diamètre a été mesuré par Pease à l’observatoire du Mont Wilson (b) en utilisant (les miroirs M_i sont les miroirs). (c) Image de Bételgeuse prise par le VLT.

aujourd’hui en activité est le *Grantepa*, au Canaries).

Dans ce qui suit, nous allons montrer que des techniques interférométriques permettent de contourner ces limitations techniques et qu’en utilisant un ensemble de petite télescopes, il est possible d’atteindre la résolution d’un miroir de diamètre de l’ordre de la distance entre télescopes. Cette technique, suggérée par Fizeau au XIXème siècle et inaugurée par Pease et Michelson en 1920 est baptisée “synthèse d’ouverture” et se fonde sur un principe relativement similaire à la discussion de la cohérence spatiale dans l’expérience des fentes d’Young. Son principe est présenté dans sa version historique sur la figure 3.3 : les trous d’Young sont remplacés par deux miroirs de télescopes. La lumière collectée par les deux miroirs est ensuite recombinaée sur un détecteur afin de mesurer la différence de marche des faisceaux incidents. Au niveau du détecteur, l’intensité lumineuse s’écrit comme la somme incohérente des figures d’interférences provenant des différentes directions incidentes, soit

3.1. RAYONNEMENT INCOHÉRENT, NOTION DE MATRICE DENSITÉ

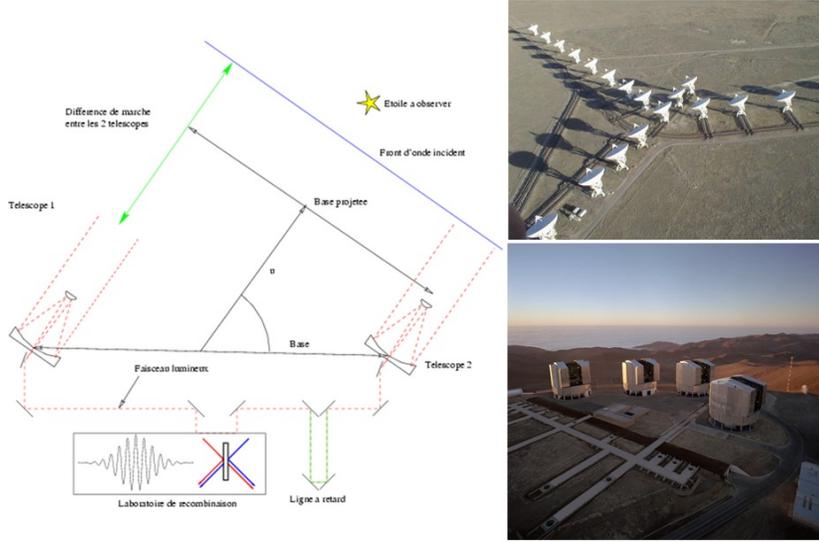


FIGURE 3.3 – Gauche : Principe de l’interférométrie stellaire. Droite : Mise en œuvre pratique dans le domaine radio pour le Very Large Array (VLA, Nouveau Mexique, en haut) et le *Very large Telescope* de l’Observatoire Européen Austral (VLT, Chili, en bas).

$$I(x) = \int d\theta I(\theta) \left[1 + \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} (d\theta + x) \right) \right], \quad (3.9)$$

où $I(\theta)$ désigne la distribution angulaire d’éclairement et x est la différence de marche entre les miroirs et le détecteur, que l’on peut contrôler à l’aide d’une ligne à retard. En introduisant l’intensité totale $I_0 = \int d\theta I(\theta)$,

$$\frac{I(x)}{I_0} = 1 + \text{Re} \left[\underline{C} e^{-2i\pi dx/L\lambda} \right], \quad (3.10)$$

où le contraste complexe \underline{C} est donné par la transformée de Fourier de l’intensité incidente, à savoir

$$\underline{C} = \frac{1}{I_0} \int d\theta I(\theta) e^{2i\pi d\theta/\lambda} = \frac{\widehat{I}(2\pi d/\lambda)}{I_0}. \quad (3.11)$$

La mesure pour différentes valeurs de D du contraste $|\underline{C}|$ des frange ainsi que leur décalage (associé à la phase de \underline{C}) donne donc directement accès à la transformée de Fourier de I , évaluée en $2\pi d/\lambda$. Faire varier la distance d entre les télescopes, permet alors de reconstruire par transformée de Fourier inverse le profil d’intensité $I(\theta)$. Si D est la distance maximale des télescopes, il est possible d’explorer une plage $\sim 2\pi D/\lambda$ dans l’espace de Fourier, et donc de discerner des

détails de l'ordre de $\delta\Theta \sim \lambda/D$: on constate ainsi que la résolution est limitée par la distance entre télescope, et plus la taille des télescopes individuels⁴.

Comme mentionné plus haut, la première utilisation de cette technique est due à Pearse et Michelson, qui en utilisant le télescope du Mont Wilson aux États Unis sont parvenus à mesurer la taille de Bételgeuse dans la constellation d'Orion (Fig. 3.2). La généralisation de cette technique expérimentale est cependant délicate. En effet, de par sa nature interférométrique, elle nécessite un excellent contrôle des chemins optiques parcourus dans les deux bras de l'interféromètre. Ceci explique pourquoi elle a dans un premier temps été appliquée aux ondes radios, de grande longueur d'onde. Le *Very large Array* (VLA) au Nouveau Mexique a ainsi été inauguré en 1980, et est composé d'un réseau de 27 paraboles de 25 m de diamètres, réparties en Y sur une trentaine de kilomètres et possédant la résolution d'une parabole de 36 km de diamètre. Dans le domaine optique, c'est Antoine Labeyrie qui, à l'Observatoire de Haute Provence, démontra dans les années 70 la possibilité de réaliser de l'observation astronomique interférométrique. Ces travaux sont à l'origine de la mise en chantier du VLT (*Very Large Telescope*) construit au Chili par l'Observatoire Européen Austral (ESO) et mis en service en 2001. Ce réseau de 4 télescopes de 8 m de diamètre chacun réalise un diamètre équivalent d'une centaine de mètre (Fig. 3.3).

3.1.3 Expérience des fentes d'Young pour une source spatialement étendue, analyse quantique

Cherchons à exprimer et modéliser la perte de cohérence spatiale d'une source étendue dans le langage de la mécanique quantique.

Cas d'une source cohérente ponctuelle

Dans sa version cohérente, le photon est émis au point $\mathbf{r}' = (x', -L')$ et se propage jusqu'aux fentes d'Young. L'état du photon s'exprime en fonction de l'opérateur d'évolution $\widehat{U}_{L'} = \widehat{U}(t = L'/c)$ par

$$|\psi\rangle = \widehat{U}_{L'}|\mathbf{r}'\rangle = \int d\mathbf{r}''|\mathbf{r}''\rangle\langle\mathbf{r}''|\widehat{U}_{L'}|\mathbf{r}'\rangle, \quad (3.12)$$

Le passage à travers les fentes revient à effectuer une mesure de position laissant indéterminée la fente effectivement empruntée et peut donc être décrit par un projecteur sur l'espace engendré par les états $|\mathbf{r}_{1,2}\rangle$, où $\mathbf{r}_1 = (d/2, 0)$ et $\mathbf{r}_2 = (-d/2, 0)$ désignent la position des deux fentes. D'après le postulat de projection du paquet d'onde, le système après passage dans les fentes est préparé à un facteur de normalisation près dans l'état

$$|\psi'\rangle = |\mathbf{r}_1\rangle\langle\mathbf{r}_1|\widehat{U}_{L'}|\mathbf{r}'\rangle + |\mathbf{r}_2\rangle\langle\mathbf{r}_2|\widehat{U}_{L'}|\mathbf{r}'\rangle. \quad (3.13)$$

4. Comme mentionné précédemment, la taille des télescopes limite la quantité de photons collectés.

3.1. RAYONNEMENT INCOHÉRENT, NOTION DE MATRICE DENSITÉ

On obtient l'état du photon en un point x de l'écran d'observation en appliquant une nouvelle fois l'opérateur d'évolution $\widehat{U}_L = \widehat{U}(t = L/c)$ décrivant la propagation des fentes d'Young au détecteur. L'état du photon juste avant la détection peut alors se mettre sous la forme

$$|\psi''\rangle = \widehat{U}_L|\psi'\rangle \propto \widehat{U}_L|\mathbf{r}_1\rangle\langle\mathbf{r}_1|\widehat{U}_{L'}|\mathbf{r}'\rangle + \widehat{U}_L|\mathbf{r}_2\rangle\langle\mathbf{r}_2|\widehat{U}_{L'}|\mathbf{r}'\rangle.. \quad (3.14)$$

On en déduit que l'amplitude de détecter le photon en \mathbf{r} est donnée par

$$\langle\mathbf{r}|\psi''\rangle \propto \left[\langle\mathbf{r}|\widehat{U}_L|\mathbf{r}_1\rangle\langle\mathbf{r}_1|\widehat{U}_{L'}|\mathbf{r}'\rangle + \langle\mathbf{r}|\widehat{U}_L|\mathbf{r}_2\rangle\langle\mathbf{r}_2|\widehat{U}_{L'}|\mathbf{r}'\rangle \right]. \quad (3.15)$$

où les éléments de matrice $\langle\mathbf{r}|\widehat{U}_L|\mathbf{r}_{1,2}\rangle\langle\mathbf{r}_{1,2}|\widehat{U}_{L'}|\mathbf{r}'\rangle$ désignent l'amplitude de probabilité d'aller de \mathbf{r}' à \mathbf{r} en passant par la fente située en $\mathbf{r}_{1,2}$. Dans l'approximation paraxiale, les probabilités sont indépendantes des positions initiales ou finales et sont identiques sur les deux chemins. On pose donc

$$\langle\mathbf{r}|\widehat{U}_L|\mathbf{r}_{1,2}\rangle\langle\mathbf{r}_{1,2}|\widehat{U}_{L'}|\mathbf{r}'\rangle = \sqrt{\rho}e^{i\theta_{1,2}(\mathbf{r},\mathbf{r}')}, \quad (3.16)$$

où ρ et $\theta_{1,2}$ sont réels. On en déduit que la densité de probabilité d'observer le photon en \mathbf{r} est donnée par

$$P(\mathbf{r}) = |\langle\mathbf{r}|\psi''\rangle|^2 \propto [1 + \cos(\theta_1 - \theta_2)], \quad (3.17)$$

un résultat tout à fait analogue à celui obtenu dans le cas classique.

Cas d'une source étendue

Pour décrire dans ce cadre le comportement d'une source étendue, on modélise celle-ci par une assemblée d'atomes initialement tous dans l'état excité. À $t = 0$ un atome situé en \mathbf{r}' se désexcite et émet un photon. Le système photon + source peut alors être décrit par un état

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\mathbf{r}'} |\mathbf{r}'\rangle \otimes |f_{\mathbf{r}'}\rangle, \quad (3.18)$$

où N est le nombre d'atomes de la source et $|f_{\mathbf{r}'}\rangle$ désigne l'état de la source dans lequel tous les atomes sont dans l'état excité, sauf celui en \mathbf{r}' qui est passé dans l'état fondamental. Si l'on laisse évoluer le système on trouve après le temps $t' = L'/c$ nécessaire au photon à atteindre les fentes

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\mathbf{r}'} \left(\widehat{U}_{L'}|\mathbf{r}'\rangle \right) \otimes \left(\widehat{U}'_{L'}|f_{\mathbf{r}'}\rangle \right), \quad (3.19)$$

où $\widehat{U}_{L'}$ est l'opérateur d'évolution du photon introduit précédemment et $\widehat{U}'_{L'}$ est l'opérateur d'évolution des atomes. On a supposé par ailleurs qu'une fois émis le photon n'interagit plus avec les atomes.

Après passage à travers les fentes, on a comme précédemment une projection de l'état du système sur le sous-espace des états du photon engendré par les $|\mathbf{r}_{1,2}\rangle$, soit

$$|\psi'\rangle \propto \left[\sum_{\mathbf{r}', \alpha=1,2} \langle \mathbf{r}_\alpha | \widehat{U}_{L'} | \mathbf{r}' \rangle | \mathbf{r}_\alpha \rangle \otimes | f'_{\mathbf{r}'} \rangle \right], \quad (3.20)$$

avec $|f'_{\mathbf{r}'}\rangle = \widehat{U}'_{L'} |f_{\mathbf{r}'}\rangle$. Notons que l'opérateur évolution étant unitaire, la famille des états $|f'_{\mathbf{r}'}\rangle$ est orthonormée. La propagation durant le temps $t = L/c$ jusqu'à l'écran d'observation se décrit comme précédemment à l'aide des opérateur \widehat{U}_L et $\widehat{U}_{L'}$ et le système juste avant la mesure est décrit par le vecteur d'état

$$|\psi''\rangle \propto \left[\sum_{\mathbf{r}', \alpha=1,2} \langle \mathbf{r}_\alpha | \widehat{U}_{L'} | \mathbf{r}' \rangle \widehat{U}_L | \mathbf{r}_\alpha \rangle \otimes | f''_{\mathbf{r}'} \rangle \right], \quad (3.21)$$

avec $|f''_{\mathbf{r}'}\rangle = \widehat{U}'_L |f'_{\mathbf{r}'}\rangle = \widehat{U}'_L \widehat{U}'_{L'} |f_{\mathbf{r}'}\rangle$. La famille des $|f''_{\mathbf{r}'}\rangle$ étant une famille orthonormée, la probabilité d'observer le photon en un point \mathbf{r} de l'écran est donnée par

$$P(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{r}'} |(\langle \mathbf{r} | \otimes \langle f''_{\mathbf{r}'} |) |\psi''\rangle|^2 \propto \left| \sum_{\alpha} \langle \mathbf{r} | \widehat{U}_L | \mathbf{r}_\alpha \rangle \langle \mathbf{r}_\alpha | \widehat{U}_{L'} | \mathbf{r}' \rangle \right|^2. \quad (3.22)$$

En utilisant l'expression des éléments de matrice de l'opérateur d'évolution, on en déduit que

$$P(\mathbf{r}) \propto \sum_{\mathbf{r}'} [1 + \cos(\theta_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - \theta_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}'))]. \quad (3.23)$$

On retrouve la formule établie classiquement, à savoir que l'on reconstruit la figure d'interférence de la source étendue en sommant les intensités (les probabilités) issues des sources élémentaires. On peut d'ailleurs pousser l'analogie plus loin en supposant que les atomes sont suffisamment densément répartis pour pouvoir remplacer la somme sur x' par une intégrale, soit

$$P(x) = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{2dx'}{h} [1 + \cos(\theta_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - \theta_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}'))], \quad (3.24)$$

qui redonne à un facteur multiplicatif près la figure d'interférence classique.

On voit ici l'origine de la perte de cohérence : après son émission, le photon n'est pas dans un état pur, mais est *intriqué* avec la source⁵. Cette intrication transfère aux atomes une partie de l'information sur l'état quantique du photon et permet d'avoir connaissance du chemin suivi par celui-ci en effectuant une mesure sur les atomes. On est alors dans une situation très similaire au cas où l'on place un polariseur devant une des fentes, qui permet en effectuant une mesure de polarisation du photon de connaître le chemin suivi.

5. Autrement dit, l'état du système photon+source ne peut pas se mettre sous forme d'un produit $|\psi_{\text{photon}}\rangle \otimes |\psi_{\text{source}}\rangle$.

3.1.4 Notion de matrice densité

On généralise la situation précédente en considérant une situation où le rayonnement, décrit par l'espace de Hilbert \mathcal{E}_1 introduit au premier chapitre précédents, est couplé à un environnement dont les états quantiques appartiennent à un espace \mathcal{E}_2 . Si l'on note $|\alpha\rangle_1$ et $|\beta\rangle_2$ une base des deux espaces, une base d'états décrivant le système complet est donnée par la base produit tensorielle $|\alpha\rangle_1 \otimes |\beta\rangle_2$ que l'on notera pour simplifier $|\alpha, \beta\rangle$. De façon générale, un état du système se met sous la forme

$$|\psi\rangle = \sum_{\alpha, \beta} c_{\alpha, \beta} |\alpha, \beta\rangle. \quad (3.25)$$

Du fait de la structure de l'espace produit-tensoriel, cet état ne se met pas en général sous la forme d'un état produit-tensoriel $|\varphi\rangle_1 \otimes |\varphi\rangle_2$ ce qui correspond à l'existence d'états intriqués dans lesquels une partie de l'information concernant le rayonnement peut se trouver cachée dans l'environnement, aboutissant ainsi à une possible perte des phénomènes d'interférence.

Cherchons à calculer la valeur moyenne d'une observable \hat{A} du rayonnement. D'après les principes généraux de la mécanique quantique, cette valeur moyenne vaut

$$\langle \hat{A} \rangle = \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle = \sum_{\alpha, \alpha', \beta, \beta'} c_{\alpha, \beta} c_{\alpha', \beta'}^* \langle \alpha', \beta' | \hat{A} | \alpha, \beta \rangle. \quad (3.26)$$

Comme \hat{A} n'opère que sur le rayonnement, on peut écrire que $\langle \alpha', \beta' | \hat{A} | \alpha, \beta \rangle = \langle \alpha' | \hat{A} | \alpha \rangle \langle \beta' | \beta \rangle = \langle \alpha' | \hat{A} | \alpha \rangle \delta_{\beta, \beta'}$. On peut par conséquent simplifier l'expression de la valeur moyenne qui nous donne

$$\langle \hat{A} \rangle = \sum_{\alpha, \alpha'} \left[\left(\sum_{\beta} c_{\alpha, \beta} c_{\alpha', \beta}^* \right) \langle \alpha' | \hat{A} | \alpha \rangle \right]. \quad (3.27)$$

Introduisons un opérateur $\hat{\rho}$, appelé matrice densité, défini par les éléments de matrice

$$\langle \alpha' | \hat{\rho} | \alpha \rangle = \left(\sum_{\beta} c_{\alpha, \beta} c_{\alpha', \beta}^* \right).$$

On peut alors récrire la valeur moyenne de \hat{A} comme

$$\langle \hat{A} \rangle = \sum_{\alpha, \alpha'} \left(\rho_{\alpha, \alpha'} \langle \alpha' | \hat{A} | \alpha \rangle \right) = \text{Tr}(\hat{\rho} \hat{A}), \quad (3.28)$$

où Tr désigne la trace.

La connaissance de l'opérateur densité contient donc toute l'information nécessaire à la description des propriétés du rayonnement, et nous allons en préciser certaines propriétés.

1. $\hat{\rho}$ est hermitien. Ceci découle immédiatement de sa définition (3.1.4), puisque l'on a $\langle \alpha' | \hat{\rho} | \alpha \rangle = \langle \alpha | \hat{\rho} | \alpha \rangle^*$.
2. La probabilité de trouver le système dans l'état α est l'élément diagonal $\langle \alpha | \hat{\rho} | \alpha \rangle$. En effet, d'après le postulat de la mesure, cette probabilité vaut $\sum_{\beta} |\langle \alpha \beta | \psi \rangle|^2 = \sum_{\beta} |c_{\alpha\beta}|^2 = \langle \alpha | \hat{\rho} | \alpha \rangle$.
3. La matrice densité est positive et de trace unité. Ceci découle de la propriété précédente.
4. Si l'état total se met sous la forme d'un produit tensoriel $|\varphi_1\rangle \otimes |\varphi_2\rangle$, alors $\hat{\rho}$ est le projecteur $|\varphi_1\rangle\langle\varphi_1|$. Écrivons $|\varphi_1\rangle = \sum_{\alpha} a_{\alpha} |\alpha\rangle$ et $|\varphi_2\rangle = \sum_{\beta} b_{\beta} |\beta\rangle$. L'état complet $|\psi\rangle = |\varphi_1\rangle \otimes |\varphi_2\rangle$ s'écrit alors

$$|\psi\rangle = \sum_{\alpha, \beta} a_{\alpha} b_{\beta} |\alpha, \beta\rangle, \quad (3.29)$$

soit $c_{\alpha\beta} = a_{\alpha} b_{\beta}$. On en déduit donc que $\langle \alpha' | \hat{\rho} | \alpha \rangle = a_{\alpha} a_{\alpha'}^* \sum_{\beta} |b_{\beta}|^2 = a_{\alpha} a_{\alpha'}^*$, en utilisant la normalisation de $|\varphi_2\rangle$. En notant que $\hat{\rho} = \sum_{\alpha, \alpha'} \rho_{\alpha' \alpha} |\alpha'\rangle\langle\alpha|$, ceci nous permet d'écrire

$$\hat{\rho} = \sum a_{\alpha} |\alpha\rangle\langle\alpha'| a_{\alpha'}^* = |\varphi_1\rangle\langle\varphi_1|. \quad (3.30)$$

Notons au passage que la valeur moyenne de l'observable \hat{A} définie par la relation (3.28) redonne bien alors la définition classique $\langle \hat{A} \rangle = \langle \varphi_1 | \hat{A} | \varphi_1 \rangle$.

5. $\text{Tr}(\hat{\rho}^2) \leq 1$ et l'égalité est atteinte si et seulement si $\hat{\rho}$ est un projecteur. $\hat{\rho}$ étant hermitien, on peut le diagonaliser et on note p_i ses valeurs propres. D'après ce qui précède, on a l'encadrement $0 \leq p_i \leq 1$ ce qui implique que $p_i^2 \leq p_i$ et donc $\text{Tr}(\hat{\rho}^2) = \sum_i p_i^2 \leq \sum_i p_i = 1$. Si ρ est un projecteur, on a $\hat{\rho}^2 = |\varphi_1\rangle\langle\varphi_1| \langle\varphi_1|\varphi_1\rangle \langle\varphi_1| = \hat{\rho}$ et donc $\text{Tr}(\hat{\rho}^2) = \text{Tr}(\hat{\rho}) = 1$. La réciproque se démontre en notant que si aucun p_i différent de 0 ou 1, alors l'inégalité $p_i^2 \leq p_i$ est en fait une inégalité stricte. Pour obtenir l'égalité, il faut par conséquent avoir pour tout i $p_i^2 = p_i$ et donc $p_i = 0$ ou $p_i = 1$. Comme par ailleurs, $\sum_i p_i = 1$, un seul p_i (disons $i = 0$ pour fixer les idées) vaut 1, les autres valant 0, ce qui prouve le résultat souhaité, $\hat{\rho}$ étant le projecteur sur le vecteur propre associé à la valeur propre p_0 .

La matrice densité généralise par conséquent a notion de vecteur d'état aux systèmes ouverts. À ce titre, elle est au cœur de la physique statistique quantique puisque dans les ensembles canoniques et grand-canonique on met le système étudié en contact avec des réservoirs d'énergie et de particules. Elle permet ainsi la définition quantique de l'entropie qui caractérise le contenu en information du système. On l'utilise aussi abondamment en information quantique pour caractériser le degré d'intrication de deux q-bits ou la décohérence d'un état quantique.

3.1.5 Equation d'évolution de la matrice densité

Dans l'espace complet rayonnement+environnement, le vecteur d'état obéit à l'équation de Schrödinger dépendant du temps

3.1. RAYONNEMENT INCOHÉRENT, NOTION DE MATRICE DENSITÉ 11

$$i\hbar \frac{d|\psi\rangle}{dt} = \widehat{H}|\psi\rangle, \quad (3.31)$$

ce qui s'écrit dans la base des états couplés $|\alpha, \beta\rangle$

$$i\hbar \dot{c}_{\alpha\beta} = \sum_{\alpha'\beta'} \langle \alpha, \beta | \widehat{H} | \alpha', \beta' \rangle c_{\alpha'\beta'}. \quad (3.32)$$

Nous avons vu que les éléments de matrice de la matrice densité se mettaient sous la forme $\rho_{\alpha,\alpha'} = \sum_{\beta} c_{\alpha,\beta} c_{\alpha',\beta}^*$. En dérivant par rapport au temps, on en déduit donc que

$$i\hbar \frac{d\rho_{\alpha,\alpha'}}{dt} = i\hbar \sum_{\beta} [\dot{c}_{\alpha,\beta} c_{\alpha',\beta}^* + c_{\alpha,\beta} \dot{c}_{\alpha',\beta}^*], \quad (3.33)$$

soit en utilisant l'équation de Schrödinger

$$i\hbar \frac{d\rho_{\alpha,\alpha'}}{dt} = \sum_{\beta,\beta''\alpha''} [H_{\alpha\beta,\alpha''\beta''} c_{\alpha''\beta''} c_{\alpha',\beta}^* - H_{\alpha'\beta,\alpha''\beta''} c_{\alpha,\beta} c_{\alpha''\beta''}^*]. \quad (3.34)$$

Supposons à présent que le hamiltonien \widehat{H} ne couple pas les systèmes 1 et 2 et puisse par conséquent s'écrire $\widehat{H} = \widehat{H}^{(1)} + \widehat{H}^{(2)}$. On aura alors respectivement $H_{\alpha\beta,\alpha'\beta'}^{(1)} = H_{\alpha\alpha'}^{(1)} \delta_{\beta\beta'}$ et $H_{\alpha\beta,\alpha'\beta'}^{(2)} = H_{\beta\beta'}^{(2)} \delta_{\alpha\alpha'}$. Si l'on remplace dans (3.34) \widehat{H} par cette expression, on constate que la contribution de $\widehat{H}^{(2)}$ disparaît et qu'il reste pour finir

$$i\hbar \frac{d\rho_{\alpha,\alpha'}}{dt} = \sum_{\beta,\alpha''} [H_{\alpha,\alpha''}^{(1)} c_{\alpha''\beta} c_{\alpha',\beta}^* - H_{\alpha',\alpha''}^{(1)} c_{\alpha,\beta} c_{\alpha''\beta}^*] \quad (3.35)$$

$$= \sum_{\alpha''} [H_{\alpha,\alpha''}^{(1)} \rho_{\alpha''\alpha'} - H_{\alpha',\alpha''}^{(1)} \rho_{\alpha\alpha''}] \quad (3.36)$$

On reconnaît ici un produit matriciel, ce qui permet de simplifier cette expression en

$$i\hbar \frac{d\widehat{\rho}}{dt} = [\widehat{H}^{(1)}, \widehat{\rho}]. \quad (3.37)$$

Cette équation peut être résolue formellement en introduisant l'opérateur d'évolution $\widehat{U}^{(1)}$ associé à $\widehat{H}^{(1)}$ et donc solution de l'équation

$$i\hbar \frac{d\widehat{U}^{(1)}}{dt} = \widehat{H}^{(1)} \widehat{U}^{(1)}. \quad (3.38)$$

On constate alors que la solution générale de (3.37) est donnée par

$$\widehat{\rho}(t) = \widehat{U}^{(1)}(t) \widehat{\rho}(0) \widehat{U}^{(1)\dagger}(t), \quad (3.39)$$

ce que l'on peut vérifier en remplaçant simplement dans l'équation (3.37), et en utilisant l'unicité des solutions d'une équation différentielle du premier ordre.

Remarquons que pour un état pur, l'état $|\psi(t)\rangle = \tilde{U}^{(1)}(t)|\psi(0)\rangle$, ce qui nous donne bien la relation (3.39) pour $\hat{\rho}(t) = |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|$.

3.1.6 Retour sur la cohérence spatiale du rayonnement

La matrice densité nous permet de réinterpréter et généraliser l'expérience des fentes d'Young pour une source incohérente, sans avoir à décrire explicitement l'état de la source lumineuse. Après passage à travers les fentes d'Young, nous avons vu que dans le cas cohérent, le photon était décrit par un état pur

$$|\psi'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[e^{i\chi'_1} |\mathbf{r}_1\rangle + e^{i\chi'_2} |\mathbf{r}_2\rangle \right], \quad (3.40)$$

où $\chi'_\alpha(\mathbf{r}')$ correspond au déphasage associé à la propagation de la source en \mathbf{r}' à la fente située en \mathbf{r}_α

Au contraire, dans le cas incohérent, le photon est intriqué à la source et nous avons vu que l'état du système photon+source se mettait sous la forme

$$|\psi'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2N}} \sum_{\mathbf{r}'} |f'_{\mathbf{r}'}\rangle \otimes \left(e^{i\chi'_1(\mathbf{r}')} |\mathbf{r}_1\rangle + e^{i\chi'_2(\mathbf{r}')} |\mathbf{r}_2\rangle \right). \quad (3.41)$$

Formellement cet état se met sous la forme $|\psi'\rangle = \sum_{\mathbf{r}',\alpha} c_{\alpha,\mathbf{r}'} |f'_{\mathbf{r}'}\rangle |\alpha\rangle$ avec

$$c_{\alpha,\mathbf{r}'} = \frac{e^{i\chi'_\alpha(\mathbf{r}')}}{\sqrt{2N}}. \quad (3.42)$$

On peut donc décrire l'état du photon après passage à travers les fentes à l'aide d'une matrice densité, dont les composantes s'écrivent

$$\rho_{\alpha,\alpha'} = \sum_{\mathbf{r}'} c_{\alpha,\mathbf{r}'} c_{\alpha',\mathbf{r}'}^* \sim \int \frac{dx' N}{h} c_{\alpha,\mathbf{r}'} c_{\alpha',\mathbf{r}'}^*, \quad (3.43)$$

où l'on a fait comme précédemment l'hypothèse d'une densité uniforme d'atomes le long de la source. Les éléments de matrice se calculent ensuite sans difficulté et l'on obtient

$$\rho_{11} = \rho_{22} = 1/2 \quad (3.44)$$

$$\rho_{12} = \rho_{21}^* = \int_{-h/2}^{h/2} e^{i\chi'_1(\mathbf{r}') - \chi'_2(\mathbf{r}')} \frac{dx'}{h} = \text{sinc}(khd/2L), \quad (3.45)$$

où l'on reconnaît le contraste des franges dans le modèle classique. On peut interpoler entre les deux situations limites étudiées précédemment en considérant un source partiellement cohérente en considérant que l'état du photon après passage par les fentes se met sous la forme d'une matrice densité s'écrivant

$$\widehat{\rho} = \frac{1}{2} \langle (|\mathbf{r}_1\rangle\langle\mathbf{r}_1| + |\mathbf{r}_2\rangle\langle\mathbf{r}_2|) + \alpha|\mathbf{r}_1\rangle\langle\mathbf{r}_2| + \alpha^*|\mathbf{r}_2\rangle\langle\mathbf{r}_1| \quad (3.46)$$

La propagation du photon jusqu'à l'écran d'observation est décrite par le même opérateur d'évolution que précédemment avec $\widehat{\rho}(t = c/L) = \widehat{U}_L \widehat{\rho} \widehat{U}_L^\dagger$. La probabilité d'observer le photon au point \mathbf{r} est donné par $\langle \widehat{r} | \widehat{\rho} | \widehat{r} \rangle$, soit

$$P(\mathbf{r}) = \langle \widehat{r} | \widehat{U}_L \widehat{\rho} \widehat{U}_L^\dagger | \widehat{r} \rangle \quad (3.47)$$

$$\begin{aligned} &= \rho_{11} |\langle \mathbf{r}_1 | \widehat{U}_L | \mathbf{r} \rangle|^2 + \rho_{22} |\langle \mathbf{r}_2 | \widehat{U}_L | \mathbf{r} \rangle|^2 + 2\text{Re} \left[\rho_{12} \langle \mathbf{r} | \widehat{U}_L | \mathbf{r}_1 \rangle \langle \mathbf{r}_2 | \widehat{U}_L | \mathbf{r} \rangle \right] \\ &= 1 + |\alpha| \cos(\chi_1(\mathbf{r}) - \chi_2(\mathbf{r}) + \varphi), \end{aligned} \quad (3.49)$$

où φ est l'argument de α . On constate que dans le cas d'une source incohérente, on obtient comme attendu le résultat classique. On note par ailleurs que $|\alpha|$ (et plus généralement les éléments non diagonaux) caractérise le contraste des frange. Pour $\alpha = 0$, les franges disparaissent⁶.

3.1.7 Application à la polarisation de la lumière

Les concepts précédents fournissent un nouvel éclairage à la notion de polarisation de la lumière. Pour cela, on s'intéresse à l'espace des états de spin du photon, qui comme nous l'avons vu est un espace de dimension 2 dont une base est constituée des états de polarisations linéaires orthogonales $|x\rangle$ et $|y\rangle$ (si la direction de propagation est selon z).

D'après ce que nous avons vu au paragraphe précédent, l'état de polarisation le plus général du champ électromagnétique est donné par une matrice densité 2×2 . Si on la représente dans la base des états de polarisation linéaire, celle-ci prend donc la forme

$$\widehat{\rho} = \begin{pmatrix} p_x & \alpha \\ \alpha^* & p_y \end{pmatrix}, \quad (3.50)$$

où $p_{i=x,y}$ représente la probabilité de mesurer le photon dans l'état de polarisation linéaire $|i = x, y\rangle$, avec $p_x + p_y = 1$. Dans ce cas particulier, ρ est aussi baptisé "matrice de polarisation". Comme nous l'avons vu dans la discussion des propriétés générales de la matrice densité, celle-ci correspond à un état pur (une lumière polarisée) si $\text{Tr}(\widehat{\rho}^2) = 1$. Plus précisément, on a

$$\text{Tr}(\widehat{\rho}^2) = p_x^2 + p_y^2 + 2|\alpha|^2 = p_x^2 + (1 - p_x)^2 + 2|\alpha|^2.$$

Lorsque l'on varie p_x entre -1 et +1, le minimum de $\text{Tr}(\widehat{\rho}^2)$ est atteint pour $p_x = 1/2$ où il vaut $1/2 + 2|\alpha|^2$. $\text{Tr}(\widehat{\rho}^2)$ est donc toujours supérieur à $1/2$, ce qui permet de définir le degré de polarisation du rayonnement $\pi = (2\text{Tr}(\widehat{\rho}^2) - 1)^{1/2}$ qui vaut 1 pour une lumière parfaitement polarisée et 0 si celle-ci est non polarisée.

⁶. C'est pour cette raison que les éléments non-diagonaux de la matrice densité sont donc appelées les cohérences.

À titre d'exemple, considérons un rayonnement dont les intensités dans les polarisations x et y sont égales. On a alors $p_x = p_y = 1/2$.

La lumière la moins polarisée (c'est-à-dire la plus loin de la condition $\text{Tr}(\hat{\rho}^2) = 1$) correspond à $\alpha = 0$ et donc une matrice densité

$$\hat{\rho} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}. \quad (3.51)$$

Cette matrice est une homothétie et garde donc la même forme dans toute base. En particulier, quelle que soit la représentation choisie, ses éléments diagonaux valent $1/2$. Du point de vue expérimental, ceci correspond à une transmission $1/2$ à travers un polariseur, quelle que soit la direction de son axe passant ⁷.

Au contraire, on obtient un état pur si $|\alpha| = 1/2$. Le cas $\alpha = 1/2$ correspond à un état de polarisation $|\psi\rangle_{\pi/4}$, puisque le projecteur associé à pour expression ⁸

$$|\psi_{\pi/4}\rangle\langle\psi_{\pi/4}| = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}. \quad (3.52)$$

3.2 Optique statistique

3.2.1 Optique statistique

Nous avons vu dans les parties précédentes comment décrire des rayonnements cohérents et incohérents. Nous allons à présent rassembler ces notions de façon à établir les propriétés de cohérence temporelle du champ électromagnétique.

Considérons le champ électromagnétique dans le formalisme de la seconde quantification. Pour simplifier la discussion nous ne considérerons ici qu'un seul mode de vecteur d'onde \mathbf{k} , de pulsation ω et dont l'opérateur annihilation associé est noté \hat{a} . L'observable champ électrique est alors définie par

$$\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = i\mathcal{E}_{\mathbf{k}} (\hat{a}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} - \hat{a}^\dagger e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}) \mathbf{e}_\mu. \quad (3.53)$$

Si l'état du champ est représenté par un opérateur densité $\hat{\rho}$, la valeur moyenne du champ électrique au point \mathbf{r} se met comme précédemment sous la forme

$$\langle\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r})\rangle = \text{Tr}(\hat{\rho}\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r})). \quad (3.54)$$

Le calcul de cette quantité nécessite la connaissance des valeurs moyennes de \hat{a} et \hat{a}^\dagger . Or, en utilisant la relation de fermeture des états cohérents, on a pour tout opérateur \hat{A} , $\text{Tr}(\hat{A}) = \int d^2\alpha \langle\alpha|\hat{A}|\alpha\rangle/\pi$, soit

$$\langle\hat{a}\rangle = \int \frac{d^2\alpha}{\pi} \langle\alpha|\hat{\rho}\hat{a}|\alpha\rangle. \quad (3.55)$$

⁷. Y compris en étendant la mesure aux polarisations circulaires.

⁸. On laissera au lecteur le soin de vérifier que le cas $\alpha = \pm i/2$ correspond à un état pur de polarisation circulaire droite ou gauche.

Or par définition des états cohérents, on a $\widehat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$, ce qui nous permet d'écrire

$$\langle \widehat{a} \rangle = \int \frac{d^2\alpha}{\pi} \alpha \langle \alpha | \widehat{\rho} | \alpha \rangle, \quad (3.56)$$

et en passant au complexe conjugué

$$\langle \widehat{a}^\dagger \rangle = \int \frac{d^2\alpha}{\pi} \alpha^* \langle \alpha | \widehat{\rho} | \alpha \rangle. \quad (3.57)$$

Autrement dit, tout se passe comme si l'on tirait la valeur de la variable normale α selon une distribution de probabilité $P(\alpha) = \langle \alpha | \widehat{\rho} | \alpha \rangle$. Ce résultat se généralise à toute grandeur dans lesquelles les opérateurs créations et annihilations sont rangées dans l'ordre *anti-normal*, les opérateurs annihilations à gauche des opérateurs créations. En effet pour un monôme $\widehat{a}^m \widehat{a}^{\dagger m}$, on a

$$\langle \widehat{a}^n \widehat{a}^{\dagger m} \rangle = \text{Tr}(\widehat{\rho} \widehat{a}^n \widehat{a}^{\dagger m}) = \text{Tr}(\widehat{a}^{\dagger m} \widehat{\rho} \widehat{a}^n). \quad (3.58)$$

Si l'on développe la trace selon les états cohérents, il vient en utilisant leur définition

$$\langle \widehat{a}^n \widehat{a}^{\dagger m} \rangle = \int \frac{d^2\alpha}{\pi} \langle \alpha | \widehat{a}^{\dagger m} \widehat{\rho} \widehat{a}^n | \alpha \rangle = \int \frac{d^2\alpha}{\pi} \alpha^{*m} \alpha^n P(\alpha). \quad (3.59)$$

Dans le cas où les opérateurs ne sont pas rangés dans l'ordre anti-normal (par exemple si l'on considère le nombre d'excitations $\widehat{a}^\dagger \widehat{a}$), cette propriété n'est plus valable. On peut cependant s'y ramener en utilisant la relation de commutation $[\widehat{a}, \widehat{a}^\dagger] = 1$. Ainsi, on aurait pour le nombre d'excitations

$$\langle \widehat{a}^\dagger \widehat{a} \rangle = \langle \widehat{a} \widehat{a}^\dagger + 1 \rangle = 1 + \int P(\alpha) |\alpha|^2 \frac{d^2\alpha}{\pi}. \quad (3.60)$$

Dans le dernier terme, le 1 correspond à la valeur du commutateur entre les opérateurs créations et annihilation et donc aux phénomènes purement quantiques. Dans la limite classique où le système est fortement excité, on a $\langle \widehat{a}^\dagger \widehat{a} \rangle \gg 1$, ce qui permet d'écrire que

$$\langle \widehat{a}^\dagger \widehat{a} \rangle \sim \int P(\alpha) |\alpha|^2 \frac{d^2\alpha}{\pi}. \quad (3.61)$$

Cette propriété s'étend à tout produit d'opérateurs \widehat{a} et \widehat{a}^\dagger et on conclue que dans la limite classique, on peut utiliser la distribution $P(\alpha)$ pour calculer la valeur moyenne d'un produit d'opérateur rangé dans l'ordre quelconque.

Ces résultats se généralisent sans difficulté au cas où plusieurs modes du champ électromagnétique sont peuplés et l'on peut ainsi définir une distribution $P(\{\alpha_\mu\})$ donnant la probabilité d'observer les modes μ dans un produit d'états cohérents $\bigotimes_\mu |\alpha_\mu\rangle$.

Étudions la distribution $P(\alpha)$ dans quelques cas simples.

1. *État cohérent.* Si le champ électromagnétique est dans un état cohérent $|\alpha_0\rangle$, on a $\hat{\rho} = |\alpha_0\rangle\langle\alpha_0|$. La distribution de probabilité $P(\alpha)$ est donc $|\langle\alpha|\alpha_0\rangle|^2 = \exp -|\alpha - \alpha_0|^2$. Autrement dit, α suit une loi Gaussienne centrée sur α_0 . Dans la limite classique discutée plus haut $|\alpha_0| \gg 1$. Ceci permet de négliger la largeur de la distribution para rapport à sa valeur moyenne, ce qui permet d'approcher $P(\alpha)$ par $\pi\delta(\alpha - \alpha_0)$.
2. *État nombre.* Si le champ est dans un état de Fock $|n\rangle$, on a $\hat{\rho} = |n\rangle\langle n|$ et donc $P(\alpha) = |\langle\alpha|n\rangle|^2 = e^{-|\alpha|^2} |\alpha|^{2n}/n!$. Dans le plan complexe, cette distribution décrit un anneau, ce qui traduit l'indétermination de la phase d'un état nombre. Le rayon de l'anneau est $|\alpha| = \sqrt{n}$.
3. *Distribution thermique.* D'après la loi de Boltzmann, la matrice densité d'un système à l'équilibre thermodynamique avec un thermostat à la température T est $\hat{\rho} = e^{-\beta\hat{H}}/Z$, où $\beta = 1/k_B T$ et $Z = \text{Tr} e^{-\beta\hat{H}}$ est la fonction de partition. Dans le cas présent, si l'on omet les fluctuations du vide⁹, on a $\hat{H} = \hbar\omega\hat{n}$ et donc

$$\hat{\rho} = \frac{1}{Z} \sum_n e^{-\beta\hbar\omega n} |n\rangle\langle n|. \quad (3.62)$$

La distribution de probabilité dans l'espace des phases vaut par conséquent

$$P(\alpha) = \frac{e^{-|\alpha|^2}}{Z} \sum_n \frac{(e^{-\beta\hbar\omega} |\alpha|^2)^n}{n!} = \frac{1}{Z} \exp [|\alpha|^2 (e^{-\beta\hbar\omega} - 1)]. \quad (3.63)$$

Dans ce cas aussi, nous constatons que la distribution de probabilité décrit un anneau traduisant l'absence de cohérence de phase d'une source thermique.

D'après ce qui précède, dans le cadre de la mécanique quantique tout se passe comme si le champ électrique se décomposait comme une superposition aléatoires d'ondes planes décrites par des variables normales α_μ tirées selon la distribution $P(\{\alpha_\mu\})$. En notation complexes, le champ électrique s'écrit donc

$$\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = \sum_\mu \mathcal{E}_k |\alpha_\mu| e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega_k t + \phi_\mu)} \mathbf{e}_\mu, \quad (3.64)$$

où $|\alpha_\mu$ et ϕ_μ (l'argument de α_μ) sont tirés selon la loi $P(\{\alpha_\mu\})$.

Dans ce qui suit, nous allons montrer que les propriétés statistiques de la lumière peuvent être étudiées expérimentalement par diverses techniques interférométriques qui, à leur tour, peuvent nous fournir des informations précieuses sur la source du rayonnement électromagnétique.

9. Qui peuvent de toute façon être absorbées dans la fonction de partition.

3.2.2 Notion de fonction de corrélation

On définit la fonction de corrélation spatio-temporelle $g_{\alpha\beta}(\mathbf{r}_1, t_1; \mathbf{r}_2, t_2)$ par

$$g_{\alpha\beta}(\mathbf{r}_1, t_1; \mathbf{r}_2, t_2) = \frac{\langle \underline{E}_\alpha^*(\mathbf{r}_1, t_1) \underline{E}_\beta(\mathbf{r}_2, t_2) \rangle}{\sqrt{\langle |\underline{E}_\alpha(\mathbf{r}_1, t_1)|^2 \rangle \langle |\underline{E}_\beta(\mathbf{r}_2, t_2)|^2 \rangle}}. \quad (3.65)$$

Cette fonction mesure le degré de corrélation entre les composantes α et β du champs en (\mathbf{r}_i, t_i) . En effet, considérons le cas où les phases des $\underline{E}_\alpha^*(\mathbf{r}_i, t_i)$ sont complètement aléatoires, ce qui correspond à une valeur moyenne nulle du champ. Si les deux champs ceux-ci sont statistiquement indépendants, on a $\langle \underline{E}(\mathbf{r}_1, t_1)^* \underline{E}(\mathbf{r}_2, t_2) \rangle = \langle \underline{E}(\mathbf{r}_1, t_1)^* \rangle \langle \underline{E}(\mathbf{r}_2, t_2) \rangle = 0$. Par ailleurs, d'après l'inégalité de Schwarz, on a $|g_{\alpha\beta}(\mathbf{r}_1, t_1; \mathbf{r}_2, t_2)| \leq 1$, le maximum étant atteint lorsque les deux grandeurs sont proportionnelles l'une à l'autre et donc parfaitement corrélées.

Comme nous allons le voir, cette fonction permet d'unifier et généraliser les différentes mesure de cohérence spatiale, temporelle ou de polarisation

1. *Mesure de polarisation.* Considérons comme dans le cas de la discussion du degré de polarisation, une onde électromagnétique dont on sait que les intensités dans les polarisations x et y sont égales et que l'on fait passer à travers un polariseur dont l'axe passant est incliné d'un angle θ par rapport à l'axe x . Après passage dans le polariseur, le champ électrique $\underline{E}'(\mathbf{r}, t)$ est donné par la projection sur la direction passante du champ incident, soit en négligeant de déphasage dû à la propagation dans le polariseur

$$\underline{E}'(\mathbf{r}, t) = [\underline{E}_x(\mathbf{r}, t) \cos \theta + \underline{E}_y(\mathbf{r}, t) \sin \theta] \mathbf{u}_\theta, \quad (3.66)$$

où \mathbf{u}_θ désigne la direction passante du polariseur. Si l'on calcule l'intensité transmise, on constate que celle-ci vaut après la moyenne statistique

$$\langle |\underline{E}'(\mathbf{r}, t)|^2 \rangle = [\langle |\underline{E}_x|^2 \rangle + \langle |\underline{E}_y|^2 \rangle + \sin(2\theta) \text{Re} (E_x(\mathbf{r}, t)^* E_y(\mathbf{r}, t))] . \quad (3.67)$$

Si l'on considère le cas particulier $\langle E_x^2 \rangle = \langle E_y^2 \rangle = E_0^2$, on constate que cette expression peut se mettre sous une forme plus compacte en introduisant la fonction de corrélation (3.65), soit

$$\langle |\underline{E}'(\mathbf{r}, t)|^2 \rangle = E_0^2 [1 + \sin(2\theta) \text{Re} (g_{xy}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}, t))] . \quad (3.68)$$

Comme décrit précédemment, on observe une modulation de l'intensité lorsque l'angle θ varie, et plus les composantes x et y sont corrélées, plus le contraste des oscillations est important. Pour des une polarisation incohérente, la phase relative des composantes x et y est aléatoire, et on a donc $g_{xy} = 0$: l'intensité transmise ne dépend pas de l'angle de rotation du polariseur. Au contraire, lorsque la polarisation est purement linéaire inclinée de $\pi/4$ par rapport à l'axe x , on retrouve un contraste de 100%,

correspondant à une extinction totale lorsque l'axe passant est orthogonal à la polarisation incidente.

2. *Interféromètre à division du front d'onde, expérience des fentes d'Young.* Considérons une onde monochromatique polarisée linéairement. Le champ électrique complexe en un point \mathbf{r} de l'écran peut s'écrire

$$\underline{E}(\mathbf{r}, t) = \left[e^{ik\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}/L_0} \underline{E}(\mathbf{r}_1, t) + e^{ik\mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}/L_0} \underline{E}(\mathbf{r}_2, t) \right] e^{ikL_0}. \quad (3.69)$$

L'intensité moyenne sur l'écran s'écrit donc

$$|\underline{E}(\mathbf{r}, t)|^2 = |\underline{E}(\mathbf{r}_1, t)|^2 + |\underline{E}(\mathbf{r}_2, t)|^2 + 2\text{Re} \left(\underline{E}(\mathbf{r}_1, t)^* \underline{E}(\mathbf{r}_2, t) e^{ik(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \cdot \mathbf{r}/L_0} \right). \quad (3.70)$$

Lorsque l'on réalise la moyenne statistique, et en supposant les intensités égales au niveau des deux fentes sources, on constate que

$$|\underline{E}(\mathbf{r})|^2 \propto 1 + \text{Re} \left[g(\mathbf{r}_1, t; \mathbf{r}_2, t) e^{ik(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \cdot \mathbf{r}/L_0} \right]. \quad (3.71)$$

En comparant aux résultats déjà obtenus précédemment, nous en déduisons que le module de la fonction de corrélation spatiale définit le contraste des franges d'interférences.

3. *Interféromètre à division d'amplitude.* Les deux grandes familles d'interféromètres à division d'amplitude sont l'interféromètre de Mach-Zender et l'interféromètre de Michelson (voir Fig. 3.4). Dans les deux cas, le faisceau lumineux est divisé en deux par une lame séparatrice et les faisceaux se propagent indépendamment dans chaque bras de l'interféromètre. On les recombine ensuite sur une séparatrice et l'on observe l'intensité résultant de l'interférence des deux faisceaux. Si l'on éclaire l'interféromètre en lumière quasi-parallèle, on fait interférer deux faisceaux provenant de points identiques de la source, ce qui permet de négliger les problèmes de cohérence spatiale. En notant $L_{1,2}$ les chemins optiques des deux bras de l'interféromètres, le champ électrique total au point d'observation s'écrit

$$\underline{E}(\mathbf{r}, t) \propto \underline{E}(\mathbf{r}_0, t - L_1/c) + \underline{E}(\mathbf{r}_0, t - L_2/c). \quad (3.72)$$

En supposant comme précédemment les deux bras équilibrés, l'intensité mesurée en sortie de l'interféromètre s'écrit

$$\langle |\underline{E}(\mathbf{r}, t)|^2 \rangle \propto 1 + \text{Re} [g(\mathbf{r}_0, t - L_1/c; \mathbf{r}_0, t - L_2/c)]. \quad (3.73)$$

Le signal d'interférence est donc donné par la fonction de corrélation temporelle du champ électrique et mesure donc le degré de cohérence des entre deux instants distincts.

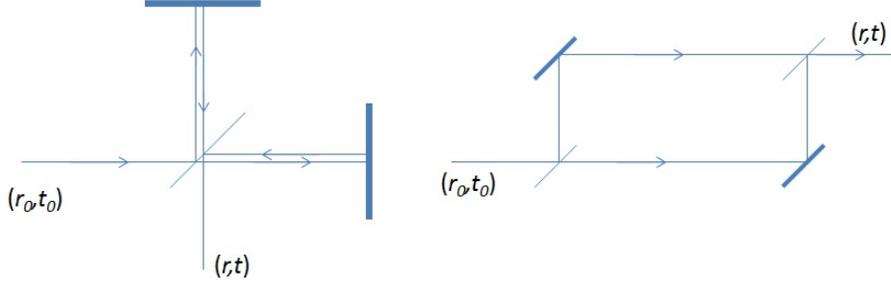


FIGURE 3.4 – Interféromètre à division d'amplitude : à gauche l'interféromètre de Michelson, à droite l'interféromètre de Mach-Zehnder.

3.2.3 Théorème de Wiener-Khintchine, spectroscopie par transformée de Fourier

Nous avons déjà discuté des notions de cohérence spatiale d'une source et nous allons ici nous concentrer sur les propriétés de cohérence temporelle, mesurées par exemple dans un interféromètre de Michelson, en montrant notamment que la fonction de corrélation temporelle donne accès au contenu spectral du rayonnement.

En effet, considérons une expérience dans laquelle on acquiert pendant un intervalle de temps $[-T, T]$ le champ électrique $\underline{E}(t)$ émis par la source. On peut alors calculer la transformée de Fourier $\widehat{\underline{E}}_T(\omega)$ de ce signal, définie par ¹⁰

$$\widehat{\underline{E}}_T(\omega) = \int_{-T}^{+T} \underline{E}(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (3.74)$$

La moyenne statistique du module-carré de $\widehat{\underline{E}}_T$ s'écrit alors

$$\langle |\widehat{\underline{E}}_T|^2 \rangle = \int_{-T}^T dt \int_{-T}^{+T} dt' e^{i\omega(t-t')} \langle \underline{E}^*(t) \underline{E}(t') \rangle. \quad (3.75)$$

On reconnaît dans l'intégrale la fonction de corrélation du champ électrique. Si l'on suppose la situation stationnaire, la fonction $g^{(1)}(t, t')$ ne dépend que de $t' - t$ et l'on en déduit que

$$\langle |\widehat{\underline{E}}_T|^2 \rangle = \langle |\underline{E}|^2 \rangle \int_{-T}^T dt \int_{-T}^{+T} dt' e^{i\omega(t-t')} g^{(1)}(t' - t) = \int_{-T}^T dt \int_{-T-t}^{T-t} d\tau e^{-i\omega\tau} g^{(1)}(\tau), \quad (3.76)$$

avec $\tau = t' - t$. Lorsque le temps d'acquisition tend vers l'infini, l'intégrale sur τ tend vers la transformée de Fourier de $g^{(1)}$ et l'on obtient alors

10. On limite le domaine d'intégration à l'intervalle $[-T, T]$ pour deux raisons : d'une part parce qu'en pratique une acquisition expérimentale dure un temps fini et par ailleurs, ceci permet à l'intégrale 3.74 d'être bien définie en temps que fonction.

$$\left\langle \left| \widehat{\underline{E}}_T \right|^2 \right\rangle \sim \langle |\underline{E}|^2 \rangle \int_{-T}^T dt \widehat{g}^{(1)}(\omega) = 2T \langle |\underline{E}|^2 \rangle 2T \widehat{g}_1(\omega), \quad (3.77)$$

Cette dernière égalité montre que la fonction $\langle |\widehat{\underline{E}}_T|^2 \rangle / 2T$ a une limite bien définie lorsque T tend vers l'infini, que l'on baptise distribution spectrale de \underline{E} , et notée $S_{\underline{E}}(\omega)$. D'après l'expression précédente, on en déduit par ailleurs que la distribution spectrale est proportionnelle à la transformée de Fourier de la fonction de corrélation du champ, à savoir

$$S_{\underline{E}}(\omega) = \langle |\underline{E}|^2 \rangle \widehat{g}^{(1)}(\omega). \quad (3.78)$$

La présence du facteur $2T$ dans la définition du spectre de puissance peut se comprendre en notant que $|\underline{E}(t)|^2$ est proportionnel au vecteur de Poynting de l'onde et donc à son intensité. Si l'on veut connaître l'intensité moyenne de l'onde, on doit calculer

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} |\underline{E}(t)|^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-\text{inf}}^{+\infty} |\widehat{\underline{E}}_T(\omega)|^2 d\omega, \quad (3.79)$$

où l'on a utilisé le théorème de Parseval-Plancherel pour établir la seconde égalité. On constate donc que la densité spectrale de puissance est proportionnelle à $|\widehat{\underline{E}}_T(\omega)|^2 / 2T$, qui n'est rien d'autre que la fonction $S_{\underline{E}}(\omega)$ introduite plus haut.

L'égalité 3.78 constitue le *Théorème de Wiener-Kintchine* qui pose les bases de la spectroscopie par transformée de Fourier. En effet, comme nous l'avons déjà remarqué, la fonction $g^{(1)}$ est aisément mesurable par des techniques interférométriques. En effectuant la transformée de Fourier de celle-ci on a alors accès au contenu spectral de l'onde. Cette technique se fondant sur des mesures interférométriques est d'autant plus facile d'usage que les longueurs d'onde concernées sont grandes. On l'utilise donc couramment dans l'infra-rouge lointain ($\lambda \sim 10 \mu\text{m}$), domaine spectral correspondant aux spectres de vibration/rotation des molécules. On l'utilise par conséquent dans l'analyse chimique de composés organiques ou inorganiques, sa relative robustesse permettant notamment la réalisation de spectromètres portatifs utilisés pour l'analyse de vapeurs de pots d'échappements.

3.3 Interférométrie d'intensité et effet Hanbury-Brown et Twiss

L'interférométrie stellaire présentée au paragraphe précédente est très délicate à mettre en œuvre puisqu'il est nécessaire de maintenir à tout instant un trajet optique identique entre les différents télescopes. Pour contourner cette difficulté, Hanbury-Brown et Twiss¹¹ ont démontré la possibilité de réaliser des interférences à partir de la corrélation temporelle des intensités lumineuses et

11. Remarque : Hanbury-Brown n'est qu'une seule personne!

3.3. INTERFÉROMÉTRIE D'INTENSITÉ ET EFFET HANBURY-BROWN ET TWISS²¹

sans avoir donc à maintenir le déphasage entre télescopes constants. Contrairement aux interféromètres plus standard que nous avons décrit jusqu'ici, l'interféromètre d'Hanbury-Brown et Twiss mesure les corrélations d'intensité, et pas du champ électrique et donne donc accès à la fonction de corrélation d'ordre deux

$$g^{(2)}(t_1, t_2) = \frac{\langle I(t_1)I(t_2) \rangle}{\langle I(t_1) \rangle \langle I(t_2) \rangle}. \quad (3.80)$$

La fonction de corrélation $g^{(2)}$ possède les propriétés mathématiques suivantes :

1. $g^{(2)}(t, t) \geq 1$. En effet, on a $\langle (I(t) - \langle I(t) \rangle)^2 \rangle \geq 0$. En développant le terme de gauche de l'inégalité, on en déduit que $\langle I(t)^2 \rangle \geq \langle I(t) \rangle^2$, ce qui conclue la démonstration.
2. $g^{(2)}(t_1, t_2) \rightarrow 1$ lorsque $|t_2 - t_1| \rightarrow \infty$. En effet, pour des intervalles de temps grand devant le temps de corrélation de l'intensité, les variables aléatoires $I(t_1)$ et $I(t_2)$ deviennent indépendantes. On en déduit donc que $\langle I(t_1)I(t_2) \rangle = \langle I(t_1) \rangle \langle I(t_2) \rangle$ et donc $g^{(2)}(t_1, t_2) = 1$.
3. $g^{(2)}(t_1, t_2) \leq \sqrt{g^{(2)}(t_1, t_1)g^{(2)}(t_2, t_2)}$. Cette inégalité est une conséquence directe de l'inégalité de Cauchy-Schwarz $\langle AB \rangle \leq \sqrt{\langle A^2 \rangle \langle B^2 \rangle}$. Dans le cas où les fluctuations de l'intensité sont stationnaires, $g^{(2)}$ ne dépend que de $\tau = t_2 - t_1$ et l'on a donc $g^{(2)}(\tau) \leq g^{(2)}(\tau = 0)$.

À partir de ces propriétés, on peut tracer l'allure générique de la fonction $g^{(2)}$. Comme montré ci-dessus, elle présente un maximum pour $t_1 = t_2$. Ceci s'explique par un effet de *groupement* des photons, due à leur nature bosonique.

Dans le cas où le champ électromagnétique peut être décomposé en modes incohérents entre eux, il existe une relation simple entre $g^{(2)}$ et $g^{(1)}$ étudiée précédemment. En effet, on peut écrire $\langle I(t_1)I(t_2) \rangle$ à l'aide des champs électriques sous la forme

$$\langle I(t_1)I(t_2) \rangle = \langle \underline{E}^*(t_1)\underline{E}^*(t_2)\underline{E}(t_1)\underline{E}(t_2) \rangle. \quad (3.81)$$

Si prend pour origine le point de mesure et que l'on décompose le champ électrique selon ces modes propres, ceci se réécrit comme

$$\langle I(t_1)I(t_2) \rangle = \sum_{1234} \langle \mathcal{E}_1^* \mathcal{E}_2^* \mathcal{E}_3 \mathcal{E}_4 \rangle e^{-i(\omega_1 t_1 + \omega_2 t_2 - \omega_3 t_1 - \omega_4 t_2)}. \quad (3.82)$$

Les modes étant incohérents entre eux, la moyenne du produit vaut zéro, sauf lorsque les modes 1,2,3,4 sont deux à deux identiques. On a dans ce cas deux possibilités : soit $(1 \equiv 3; 2 \equiv 4)$, soit $(1 \equiv 4; 2 \equiv 3)$, ce qui nous donne alors¹²

12. En toute rigueur, il faudrait traiter à part le cas $1 \equiv 2 \equiv 3 \equiv 4$, puisque l'on n'a pas en général $\langle \mathcal{E}_1^4 \rangle = \langle \mathcal{E}_2 \rangle^2$. Cependant, si le nombre de mode peuplé est important, cette situation se produit rarement et peut donc être négligée - pour N modes peuplés, il y a N^2 valeurs possibles du couple $(1, 2)$ dont seulement N cas correspondant à $1 \equiv 2$.

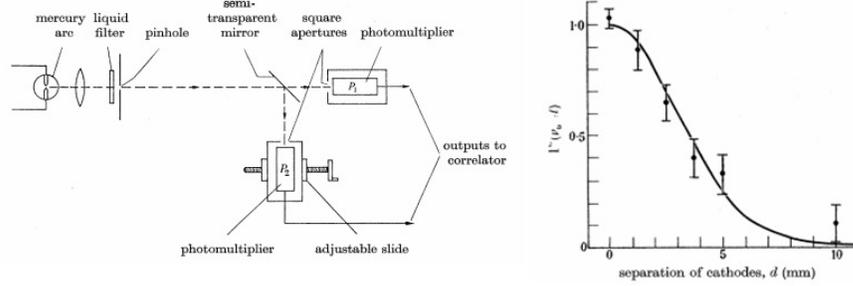


FIGURE 3.5 – Mesure de la fonction de corrélation $g^{(2)}$ par Hanbury-Brown et Twiss (données extraites de [1]). Gauche : schéma du dispositif expérimental. Une lampe à mercure éclaire une lame séparatrice dirigeant les photons vers les deux photomultiplicateurs. Le décalage temporel dans les deux bras est réalisé en déplaçant un des détecteurs par rapport à la lame. Droite : résultat expérimentaux, avec $\Gamma(\tau) = (g^{(2)}(\tau) - 1)/((g^{(2)}(0) - 1))$ et $\tau = d/c$. L'amplification des corrélations provient de la nature bosoniques des photons qui ont tendance à arriver ensemble sur le détecteur.

$$\langle I(t_1)I(t_2) \rangle = \sum_{12} \langle |\mathcal{E}_1|^2 \rangle \langle |\mathcal{E}_2|^2 \rangle + \sum_{12} \langle |\mathcal{E}_2|^2 \rangle \langle |\mathcal{E}_1|^2 \rangle e^{-i(\omega_1(t_1-t_2))} e^{-i(\omega_2(t_2-t_1))}. \quad (3.83)$$

On peut alors factoriser les sommes sur 1 et 2, ce qui donne alors

$$\langle I(t_1)I(t_2) \rangle = \langle I(t_1) \rangle \langle I(t_2) \rangle \left[1 + |g^{(1)}(t_1, t_2)|^2 \right], \quad (3.84)$$

soit

$$g^{(2)}(t_1, t_2) = 1 + |g^{(1)}(t_1, t_2)|^2. \quad (3.85)$$

Cette équation montre que la mesure de la fonction de corrélation du second ordre donne accès aux mêmes informations que les techniques interférométriques décrites dans la partie précédente, et donc de mesurer des propriétés de phase du rayonnement, *sans avoir à maintenir la condition de cohérence entre les champs en t_1 et t_2* . Cette propriété a été mise en évidence par Robert Hanbury-Brown et Richard Twiss qui l'ont ensuite utilisée pour mesurer le rayon de l'étoile Sirius, on procédant de façon tout à fait analogue à ce que nous avons étudié dans l'interférométrie stellaire.

Du point de vue quantique, on peut interpréter le résultat de l'expérience de Hanbury-Brown et Twiss comme un effet de coalescence des photons qui tendent à se regrouper sous l'effet de leur propriétés statistiques. Si les photons avaient été des fermions, on aurait d'ailleurs observé un effet inverse, c'est-à-dire une diminution de $g^{(2)}$ pour $t_2 = t_1$. Cet effet peut être observé sur des électrons comme démontré dans la référence [3, 5]. Une comparaison directe des

3.3. INTERFÉROMÉTRIE D'INTENSITÉ ET EFFET HANBURY-BROWN ET TWISS²³

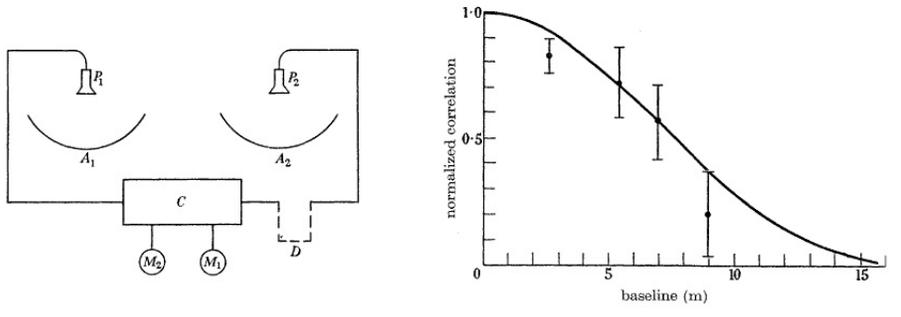


FIGURE 3.6 – Principe de l'interféromètre stellaire de Hanbury-Brown et Twiss.[2]

corrélations bosoniques et fermioniques dans le domaine spatial a par ailleurs été réalisée récemment dans des expériences d'atomes ultra-froids sur les isotopes bosoniques et fermioniques de l'hélium (^4He et ^3He respectivement, cf. fig. 3.7, tirée de [4]).

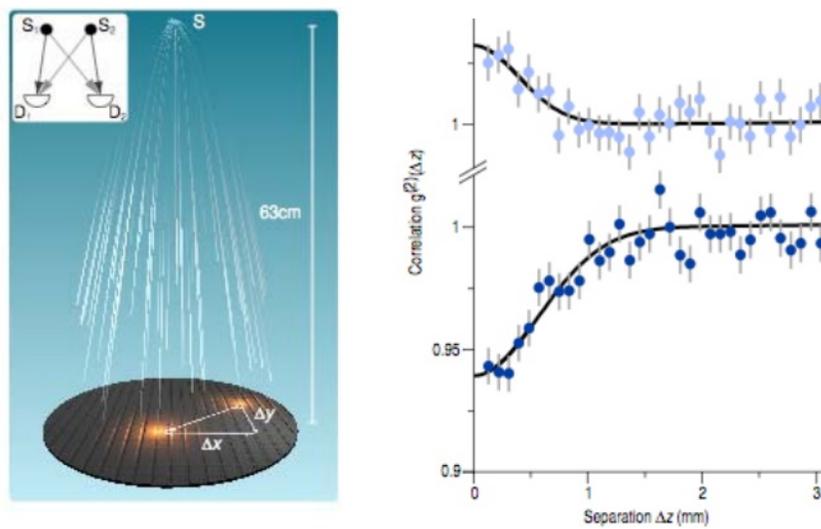


FIGURE 3.7 – Effet Hanbury Brown et Twiss atomique : mesure des corrélations spatiales d'intensité pour un gaz d'atomes d'hélium bosonique (haut) ou fermionique (bas).

Bibliographie

- [1] R. Hanbury-Brown and RQ Twiss. Interferometry of the intensity fluctuations in light II. An experimental test of the theory for partially coherent light. *Proc. of the Royal Society of London A*, 243(1234) :291–319, 1958.
- [2] R. Hanbury-Brown and RQ Twiss. Interferometry of the intensity fluctuations in light. IV. A test of an intensity interferometer on Sirius A. *Proc. Royal Society of London. Series A*, 248(1253) :222–237, 1958.
- [3] M. Henny, S. Oberholzer, C. Strunk, T. Heinzel, K. Ensslin, M. Holland, and C. Schönenberger. The fermionic hanbury brown and twiss experiment. *Science*, 284(5412) :296, 1999.
- [4] T. Jelts, J.M. McNamara, W. Hogervorst, W. Vassen, V. Krachmalnicoff, M. Schellekens, A. Perrin, H. Chang, D. Boiron, A. Aspect, et al. Comparison of the Hanbury Brown–Twiss effect for bosons and fermions. *Nature*, 445(7126) :402–405, 2007.
- [5] H. Kiesel, A. Renz, and F. Hasselbach. Observation of Hanbury Brown–Twiss anticorrelations for free electrons. *Nature*, 418(6896) :392–394, 2002.
- [6] G. Reibmann and F.-X. Bally. Franges d’Young en lumière blanche pour différentes largeurs de fente source - Inversion du contraste. <http://hal-sfo.ccsd.cnrs.fr/sfo-00291697/en/>, 2008.

Chapitre 4

Interaction avec un atome

Dans ce chapitre nous détaillerons les mécanismes fondamentaux d'interaction entre la lumière et un atome isolé. Nous commencerons par quelques rappels sur le modèle de Thomson (ou modèle de l'électron élastiquement lié), en poursuivant ensuite par une description quantique de ces phénomènes. Enfin nous aborderons certains aspects de l'action mécanique de la lumière sur la matière.

4.1 Modèle classique de l'atome

L'étude scientifique de l'interaction matière rayonnement a débuté avec le développement de la spectrométrie. Les expériences réalisées au courant du XIXème siècle ont montré que les vapeurs atomiques ou moléculaires n'absorbaient ou n'émettaient la lumière que selon des raies discrètes dont la position fournissait l'identité du composé en question. Cette découverte permis de nombreuses percées, comme la découverte de l'hélium dans l'atmosphère solaire en 1868.

L'origine de ces raies discrètes constitua pendant très longtemps un défi à la sagacité des physiciens et son élucidation nécessita l'élaboration de la mécanique quantique. Des modèles classiques de l'atomes furent cependant élaborés. Ainsi, après sa découverte de l'électron, le physicien anglais J.J. Thomson propose en 1904 le modèle du *plum pudding* dans lequel les électrons sont piégés dans une sphère chargée uniformément. D'après le théorème de Gauss, le champ électrique dans une sphère chargée est linéaire en distance et exerce donc une force de rappel

$$\mathbf{F}_{\text{rapp}} = \frac{q_e \rho}{3\varepsilon_0} \mathbf{r}, \quad (4.1)$$

où q_e est la charge de l'électron, ρ désigne la densité de charge dans le "pudding". L'équation du mouvement correspond donc à une trajectoire sinusoïdale de pulsation

$$\omega_0^2 = \frac{q_e \rho}{3\varepsilon_0 m_e}. \quad (4.2)$$

Si on éclaire l'atome avec une onde électromagnétique, il faut ajouter à la force de rappel précédente la force de Lorentz dont l'expression bien connue est donnée par

$$\mathbf{F} = q_e [\mathbf{E}(\mathbf{r}) + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}(\mathbf{r})], \quad (4.3)$$

où \mathbf{E} et \mathbf{B} sont les champs électrique et magnétique et \mathbf{r} est la position instantanée de l'électron. Pour une onde plane progressive et monochromatique, le rapport E/B vaut c , la vitesse de la lumière. Le rapport des force électrique et magnétique vaut par conséquent $\dot{\mathbf{r}}/c$ et est donc très petit pour une particule non relativiste. Par ailleurs, la taille typique d'un atome valant une fraction d'Angstrom, l'amplitude du déplacement de l'électron reste faible devant la longueur du rayonnement (si celui-ci est choisi dans le domaine optique). On peut donc négliger les variations spatiales du champ électrique, ce qui nous permet d'écrire l'équation du mouvement de l'électron comme

$$m_e \ddot{\mathbf{r}} = -m\omega_0^2 \mathbf{r} + q_e \mathbf{E}(0). \quad (4.4)$$

Lorsque le champ oscille à une pulsation ω fixée (champ monochromatique), cette équation se résout sans difficulté et l'on trouve pour le dipôle atomique $\mathbf{p} = q_e \mathbf{r}$

$$\mathbf{p} = \varepsilon_0 \chi \mathbf{E}, \quad (4.5)$$

avec

$$\chi = \frac{q_e^2}{m\varepsilon_0} \left(\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} \right), \quad (4.6)$$

et où la susceptibilité a la dimension d'un *volume*. Comme attendu pour un oscillateur harmonique forcé, on voit que la susceptibilité diverge pour $\omega \sim \omega_0$. Cette condition s'interprète par la conservation de l'énergie lors de l'absorption d'un photon d'énergie $\hbar\omega$ faisant passer l'atome de son état fondamental à un état excité d'énergie $\hbar\omega_0$.

4.2 Description quantique de l'interaction matière rayonnement

Comme nous allons le voir dans ce paragraphe, bien que se fondant sur des hypothèses complètement fausses, le modèle de Thomson redonne quantitativement les mêmes résultats que la mécanique quantique.

4.2.1 Rappels de physique atomique. Ordres de grandeur

On considère un atome constitué d'un noyau de charge $-Zq_e$ entouré de Z électrons. On suppose pour simplifier le noyau infiniment lourd et la dynamique

4.2. DESCRIPTION QUANTIQUE DE L'INTERACTION MATIÈRE RAYONNEMENT³

des électrons non relativiste, de sorte que l'on puisse écrire le hamiltonien du système comme

$$\hat{H}_0 = \sum_{i=1}^N \left[\frac{\hat{P}_i^2}{2m_e} - \frac{Zq_e^2}{4\pi\epsilon_0 r_i} \right] + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \frac{q_e^2}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}. \quad (4.7)$$

Ce hamiltonien est bien entendu bien trop complexe pour pouvoir être diagonalisé de façon exacte, excepté dans le cas de l'atome d'hydrogène ou des ions hydrogénoïdes. On se contente ici de remarquer que l'énergie du $n^{\text{ème}}$ état excité peut formellement s'écrire

$$E_n = F(\hbar, m_e, q_e, \epsilon_0; Z, n). \quad (4.8)$$

Dimensionnellement, on constate aisément qu'il existe une seule combinaison de \hbar , m_e , q_e et ϵ_0 ayant la dimension d'une énergie¹. On voit alors que E_n peut s'écrire comme

$$E_n = \frac{e^4 m_e}{\hbar^2} \tilde{E}(n, Z), \quad (4.9)$$

avec $e^2 = q_e^2/4\pi\epsilon_0$, et $\tilde{E}(n, Z)$ est un simple nombre dépendant de l'espèce atomique (Z) et du nombre quantique caractérisant l'état n concerné². On reconnaît dans le préfacteur le Rydberg qui va donc fixer l'énergie caractéristique des systèmes atomiques.

Ces considérations nous permettent de préciser le critère de validité de l'approximation non relativiste. En effet, on quitte le régime classique pour $|E_n| \gtrsim m_e^2 c^2$, soit

$$\tilde{E}(n, Z) \left(\frac{e^4}{\hbar^2 c^2} \right) \gtrsim 1. \quad (4.10)$$

On voit ici apparaître la constante de structure fine α définie par

$$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} \sim \frac{1}{137.04}. \quad (4.11)$$

Ce nombre sans dimension est une constante universelle qui, comme nous venons de le voir mesure l'importance des effets relativistes dans les atomes³. Ceci permet ainsi de faire apparaître ces effets supplémentaires dans un développement en puissance de α . Ainsi, le premier terme correctif relativiste apparaît-il comme une contribution en $\alpha^2 \text{Ry}$, que l'on appelle structure fine de l'atome.

1. Un simple comptage de paramètre suffit : on a en effet quatre paramètres pour satisfaire quatre équations aux dimensions associées aux unités MKSA.

2. On ne rentrera pas ici dans la zoologie des notations spectroscopique pour les atomes polyélectroniques.

3. Plus généralement, la constante de structure fine faisant intervenir la charge de l'électron fournit une mesure absolue de la force des interactions électromagnétiques, qui sont donc relativement faible au vu de la petite valeur de α .

4.2.2 Interaction avec un champ classique

Hamiltonien dipolaire

On suppose connus les états propres $|n\rangle$ de \hat{H}_0 associés aux valeurs propres $E_n = \hbar\omega_n$. On éclaire l'atome avec une onde plane progressive monochromatique. Dans la jauge de Coulomb, nous avons vu que l'on pouvait la décrire par un potentiel vecteur uniquement, dont la forme est donnée par

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{A}_0 \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}). \quad (4.12)$$

Pour décrire l'interaction de cette onde avec l'atome, il suffit de faire le changement $\hat{\mathbf{P}}_i$ en $\hat{\mathbf{P}}_i - q_e \mathbf{A}$ dans le terme cinétique. On obtient alors le nouveau hamiltonien

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^N \left[\frac{(\hat{\mathbf{P}}_i - q_e \mathbf{A}(\mathbf{r}_i, t))^2}{2m_e} - \frac{Zq_e^2}{4\pi\epsilon_0 r_i} \right] + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \frac{q_e^2}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}. \quad (4.13)$$

On peut développer ce hamiltonien en puissance du potentiel vecteur et l'on trouve alors $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_1 + \hat{H}_2$, où \hat{H}_0 est le hamiltonien de l'atome isolé et les $\hat{H}_{i=1,2}$ décrivent l'interaction avec le champ électromagnétique et valent respectivement

$$\begin{aligned} \hat{H}_1 &= -\frac{q_e}{2m_e} \sum_{i=1}^N \left[\hat{\mathbf{P}}_i \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}_i, t) + \mathbf{A}(\mathbf{r}_i, t) \cdot \hat{\mathbf{P}}_i \right] \\ \hat{H}_2 &= \frac{q_e^2}{2m_e} \sum_{i=1}^N A^2(\mathbf{r}_i, t). \end{aligned}$$

Plaçons nous dans un régime de faible intensité lumineuse. Dans ce cas, le terme en A^2 devient négligeable devant les deux autres, ce qui nous permet de ne considérer que le terme \hat{H}_1 dans notre description de l'atome.

La seconde approximation, dite approximation dipolaire, consiste à comparer la taille de l'atome à la longueur d'onde λ du rayonnement incident. Dimensionnellement, ceci est d'ordre a_0/λ , où a_0 est le rayon de Bohr. Pour une onde résonnante avec une transition atomique on a $\lambda \sim \hbar c/Ry$ et donc pour finir

$$\frac{a_0}{\lambda} \sim \frac{e^2}{\hbar c} = \alpha \ll 1. \quad (4.14)$$

Autrement dit, la taille de l'atome est petite devant la longueur d'onde du rayonnement utilisé (1 Å contre quelques centaines de nm pour un rayonnement dans le domaine visible). Ceci nous permet de négliger la dépendance spatiale de \mathbf{A} et donc de simplifier \hat{H}_1 comme

$$\hat{H}_1 \sim -\frac{q_e}{m_e} \cos(\omega t) \sum_{i=1}^N [\hat{\mathbf{P}}_i \cdot \mathbf{A}_0] = \cos(\omega t) \hat{h}_1, \quad (4.15)$$

avec $\hat{h}_1 = -\sum_i q_e \hat{\mathbf{P}}_i \cdot \mathbf{A}_0 / m_e$.

Équivalence des hamiltoniens $\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}$ et $\mathbf{p} \cdot \mathbf{A}$

La forme trouvée pour l'énergie d'interaction peut paraître surprenante et intuitivement, il aurait été plus naturel d'envisager un terme en $-\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}$ décrivant l'énergie d'interaction classique entre un dipôle $\mathbf{d} = \sum_i q_e \mathbf{r}_i$ et un champ électrique $\mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{A}$. Nous allons montrer ici qu'en réalité les deux formulations sont équivalentes et que proche de résonance, les deux hamiltoniens ont les mêmes éléments de matrice.

Considérons pour cela l'élément de matrice $\langle n | [\hat{H}_0, \hat{\mathbf{r}}_i] | m \rangle$ que l'on calcule de deux façon différentes. On utilise dans un premier temps la définition des états propres de \hat{H}_0 . En écrivant explicitement le commutateur, on voit sans difficulté que

$$\langle n | [\hat{H}_0, \hat{\mathbf{r}}_i] | m \rangle = (E_n - E_m) \langle n | \hat{\mathbf{r}}_i | m \rangle. \quad (4.16)$$

On peut par ailleurs calculer explicitement le commutateur. En effet, dans l'expression (4.7) de \hat{H}_0 , le seul terme ne commutant pas avec $\hat{\mathbf{r}}_i$ est le terme d'énergie cinétique de l'électron i . On a par conséquent

$$[\hat{H}_0, \hat{\mathbf{r}}_i] = \left[\frac{\hat{P}_i^2}{2m_e}, \hat{\mathbf{r}}_i \right]. \quad (4.17)$$

En utilisant la relation $[f(\hat{\mathbf{P}}), \mathbf{r}] = -i\hbar \partial_{\mathbf{P}} f$, il vient alors sans difficulté

$$[\hat{H}_0, \hat{\mathbf{r}}_i] = -i\hbar \frac{\hat{\mathbf{P}}_i}{m_e}. \quad (4.18)$$

En combinant les équations (4.16) et (4.18), il vient pour finir

$$\langle n | \hat{\mathbf{r}}_i | m \rangle = -\frac{i}{m_e \omega_{nm}} \langle n | \hat{\mathbf{P}}_i | m \rangle, \quad (4.19)$$

avec $E_n - E_m = \hbar \omega_{nm}$. D'après cette formule, les éléments de matrice de \hat{h}_1 peuvent par conséquent s'écrire

$$\langle n | \hat{h}_1 | m \rangle = \frac{q_e \omega_{nm}}{i} \sum_{i=1}^N \langle n | \hat{\mathbf{r}}_i \cdot \mathbf{A}_0 | m \rangle = -i \omega_{nm} \mathbf{A}_0 \cdot \mathbf{d}_{nm}, \quad (4.20)$$

où $\mathbf{d}_{nm} = \langle n | \hat{\mathbf{d}} | m \rangle$ désigne l'élément de matrice du dipôle électrique $\hat{\mathbf{d}} = \sum_i q_e \hat{\mathbf{R}}_i$ entre les états n et m . Le champ électrique associé au potentiel vecteur se calcule grâce à la relation $\mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{A}$, soit

$$\mathbf{E} = \omega \mathbf{A}_0 \sin(\omega t). \quad (4.21)$$

Considérons un onde électromagnétique quasi-résonnante (c'est à cette condition seulement que le rayonnement aura un effet non négligeable sur l'atome). Dans ce cas, on a $\omega_{nm} \sim \omega$, ce qui permet d'écrire l'amplitude du champ électrique sous la forme $\mathbf{E}_0 \sim \omega_{nm} \mathbf{A}_0$, et donc

$$\langle n | \hat{h}_1 | m \rangle = -i \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{d}_{nm}. \quad (4.22)$$

Au facteur de phase près⁴ que l'on peut toujours éliminer en redéfinissant la phase d'un des états n ou m , on voit donc que les hamiltoniens en $\mathbf{p} \cdot \mathbf{A}$ et $\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}$ ont des éléments de matrice identiques.

Traitement perturbatif

On considère le système initialement dans son état fondamental $|n = 0\rangle$. Comme nous avons supposé A faible de façon à pouvoir négliger le terme \hat{H}_2 , on peut envisager dans un premier temps de traiter \hat{H}_1 en perturbation de \hat{H}_0 . Suivant la procédure standard, on décompose donc le vecteur d'état $|\Psi(t)\rangle$ selon la base des états propres de \hat{H}_0 que l'on écrit en représentation d'interaction,

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_n c_n(t) e^{-i\omega_n t} |n\rangle. \quad (4.23)$$

Si l'on écrit l'équation de Schrödinger pour $|\Psi\rangle$ on obtient après projection sur l'état $|n\rangle$

$$i\hbar \dot{c}_n(t) = \sum_m c_m(t) e^{i\omega_{nm} t} \langle n | \hat{H}_1 | m \rangle. \quad (4.24)$$

En l'absence de perturbation, on aurait $\dot{c}_n = 0$, et donc c_n constant. Puisque l'on prépare le système dans l'état $n = 0$, on en déduit que $c_n(t) = \delta_{n,0}$. Si la perturbation est faible on peut raisonnablement penser (ce que l'on vérifiera *a posteriori*) que les $c_n(t)$ vont rester proches de leurs valeurs en l'absence de perturbation, ce qui nous permet de supposer que pour $|c_0| \sim 1$ et $c_{n \neq 0} \ll 1$. Dans cette limite, on peut donc restreindre la somme apparaissant dans l'équation (4.24) à $m = 0$ car \hat{H}_1 étant déjà d'ordre 1 en perturbation, un terme $c_{n \neq 0} \hat{H}_1$ sera d'ordre 2. On a alors à l'ordre 1

$$i\hbar \dot{c}_n(t) = c_0(t) e^{i\omega_{n0} t} \langle n | \hat{H}_1 | 0 \rangle. \quad (4.25)$$

Étudions dans un premier temps le cas particulier $n = 0$. L'équation s'écrit alors simplement $i\hbar \dot{c}_0 = c_0 \langle 0 | \hat{H}_1 | 0 \rangle$. Le hamiltonien \hat{H}_1 étant proportionnel aux \hat{P}_i , est impair. Si l'on considère une base d'état propres de parité donnée (ce qui est toujours possible), alors la valeur moyenne de l'impulsion est non nulle et

4. Dans l'approximation du champ tournant que nous verrons plus loin, le facteur i permet de décrire le déphasage de $\pi/2$ entre le champ électrique et le potentiel vecteur.

4.2. DESCRIPTION QUANTIQUE DE L'INTERACTION MATIÈRE RAYONNEMENT 7

donc $\dot{c}_0 = 0$. On en déduit par conséquent que c_0 reste égal à 1 à tout instant, ce qui permet de simplifier plus avant les équations pour les c_n puisque l'on a alors

$$i\hbar\dot{c}_n(t) = e^{i\omega_{n0}t} \langle n | \widehat{H}_1 | 0 \rangle. \quad (4.26)$$

ce qui s'intègre comme

$$c_{n \neq 0}(t) = \frac{1}{i\hbar} \int_0^t dt' e^{i\omega_{n0}t'} \cos(\omega t') \langle n | \widehat{h}_1 | 0 \rangle, \quad (4.27)$$

où l'on a utilisé la condition initiale $c_{n \neq 0}(0) = 0$. c_n se calcule alors sans difficulté et l'on obtient

$$c_{n \neq 0} = \frac{\langle n | \widehat{h}_1 | 0 \rangle}{2i\hbar} \left[\frac{e^{i(\omega + \omega_{n0})t} - 1}{i(\omega + \omega_{n0})} + \frac{e^{i(\omega_{n0} - \omega)t} - 1}{i(\omega_{n0} - \omega)} \right]. \quad (4.28)$$

Connaissant les composantes du vecteur d'état sur les états $|n\rangle$, on peut à présent calculer le dipôle électrique \mathbf{d} de l'atome. À l'ordre 1 en perturbation, celui s'écrit

$$\langle \widehat{\mathbf{d}} \rangle = \langle 0 | \widehat{\mathbf{d}} | 0 \rangle + \sum_{n \neq 0} \left[c_n e^{-i\omega_{n0}t} \langle 0 | \widehat{\mathbf{d}} | n \rangle + \text{c.c.} \right] + \dots \quad (4.29)$$

Dans un atome isolé, l'invariance par symétrie centrale par rapport au noyau permet de considérer les états propres du hamiltonien comme des états de parité fixée. On a alors dans ce cas $\langle \widehat{\mathbf{d}} \rangle = 0$. Le dipôle se trouve s'écrit alors comme la somme d'un terme forcé (oscillant à la pulsation ω) et d'un terme libre oscillant aux fréquences de Bohr ω_{n0} . Ce second terme est un artefact provenant du fait que nous avons brutalement allumé le champ électromagnétique à $t = 0$ et que notre modèle ne contient aucun mécanisme dissipatif - comme nous le verrons plus loin dans ce chapitre la dissipation provient de l'émission spontanée⁵. Si l'on s'intéresse uniquement à la composante forcée, on trouve

$$\langle \widehat{\mathbf{d}} \rangle_{\text{forcé}} = -\frac{1}{\hbar} \text{Re} \left[\sum_{n \neq 0} \langle 0 | \mathbf{d} | n \rangle \langle n | \widehat{h}_1 | 0 \rangle \left(\frac{e^{i\omega t}}{\omega_{n0} + \omega} + \frac{e^{-i\omega t}}{\omega_{n0} - \omega} \right) \right] \quad (4.30)$$

En remplaçant \widehat{h}_1 par son expression en terme des éléments de matrice du dipôle électrique, on trouve que

$$\langle \widehat{\mathbf{d}} \rangle_{\text{forcé}} = -\frac{1}{\hbar} \text{Im} \left[\sum_{n \neq 0} \langle 0 | \widehat{\mathbf{d}} | n \rangle \langle n | \widehat{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{A}_0 | 0 \rangle \omega_{n0} \left(\frac{e^{i\omega t}}{\omega_{n0} + \omega} + \frac{e^{-i\omega t}}{\omega_{n0} - \omega} \right) \right]. \quad (4.31)$$

5. Il est possible de s'en débarrasser en branchant lentement le champ électromagnétique. En pratique, on suppose que l'on prépare le système à $t = -\infty$ dans l'état $|n = 0\rangle$ et que la perturbation varie comme $\widehat{h}_1 e^{\varepsilon t}$ où ε^{-1} désigne le temps d'allumage de la perturbation, que l'on fait tendre vers l'infini.

Par invariance par rotation, le dipôle électrique est parallèle à \mathbf{A}_0 . Si l'on suppose l'onde électromagnétique polarisée selon la direction x , \mathbf{d} est aussi orienté dans cette direction et l'on trouve

$$\langle \widehat{d}_z \rangle_{\text{forcé}} = \frac{\omega A_0}{\hbar} \sin \omega t \left[\sum_{n \neq 0} \frac{2\omega_{n0} |\langle 0 | \widehat{d}_x | n \rangle|^2}{\omega_{n0}^2 - \omega^2} \right]. \quad (4.32)$$

Comme vu précédemment, $\mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{A} = \omega \mathbf{A}_0 \cos(\omega t)$. On peut donc écrire le dipôle atomique $\langle \widehat{d}_x \rangle_{\text{forcé}} = \varepsilon_0 \chi \mathbf{E}$, avec la susceptibilité

$$\chi = \frac{q_e^2}{m_e \varepsilon_0} \sum_{n \neq 0} \frac{f_{n0}}{\omega_{n0}^2 - \omega^2}, \quad (4.33)$$

avec

$$f_{n0} = \frac{2m_e \omega_{n0} |\langle 0 | \widehat{\mathbf{d}} | n \rangle|^2}{q_e^2 \hbar} \quad (4.34)$$

L'analogie avec la susceptibilité prédite par le modèle de Thomson est frappante, puisque dans le modèle quantique la polarisabilité atomique apparaît comme une somme de polarisabilité classiques correspondant aux différentes résonances atomiques, pondérées par un coefficient f_{n0} appelé par conséquent force d'oscillateur. On retrouve notamment la condition de résonance lorsque la pulsation de la lumière est égale (au facteur \hbar près) à l'énergie séparant le niveau fondamental d'un de ses états excités⁶

Complément : Règle de Thomas-Reich-Kuhn

Les forces d'oscillateurs satisfont la règle de somme

$$S = \sum_n f_{n0} = Z. \quad (4.35)$$

où Z désigne le nombre d'électrons dans l'atome. Pour démontrer cette relation, dite de Thomas-Reich-Kuhn, on remarque dans un premier qu'en utilisant la définition des forces d'oscillateur, cette somme peut se récrire comme

$$\frac{2m_e}{q_e^2 \hbar} \sum_{n \neq 0} \langle 0 | \widehat{d}_x^2 | n \rangle \omega_{n0} \langle n | \widehat{d}_x^2 | 0 \rangle. \quad (4.36)$$

Prenons pour origine des énergies l'état $n = 0$. Dans ce cas, on a simplement $\omega_{n0} = E_n/\hbar$. En utilisant la définition des états $|n\rangle$, on a $\widehat{H}_0 |n\rangle = E_n |n\rangle$, et donc

6. À ce sujet, il est intéressant de noter que nous aboutissons à cette condition de résonance sans avoir à invoquer la notion de photon. Le caractère discret du spectre de fluorescence atomique est donc une preuve de la quantification des états atomiques plus que de la nature ondulatoire de la lumière comme on le lit parfois.

$$S = \frac{2m_e}{q_e^2 \hbar} \sum_{n \neq 0} \langle 0 | \hat{d}_x \hat{H}_0 | n \rangle \langle n | \hat{d}_x | 0 \rangle. \quad (4.37)$$

On voit alors apparaître une relation de fermeture qui nous permet d'écrire que

$$S = \frac{2m_e}{q_e^2 \hbar^2} \langle 0 | \hat{d}_x \hat{H}_0 \hat{d}_x | 0 \rangle = -\frac{m_e}{q_e^2 \hbar^2} \langle 0 | [\hat{d}_x, [\hat{d}_x, \hat{H}_0]] | 0 \rangle, \quad (4.38)$$

où l'on a utilisé le fait que par choix du zéro des énergies on a $\hat{H}_0 | 0 \rangle = 0$. Nous avons déjà calculé le commutateur $[\hat{d}_x, \hat{H}_0]$ dont nous avons vu qu'il valait

$$[\hat{d}_x, \hat{H}_0] = \frac{i\hbar q_e}{m_e} \sum_i \hat{P}_{x,i}. \quad (4.39)$$

On calcule ensuite sans difficulté le second commutateur, soit

$$[\hat{d}_x, [\hat{d}_x, \hat{H}_0]] = -\frac{\hbar^2 q_e^2 Z}{m_e}, \quad (4.40)$$

ce qui nous finalement le résultat souhaité.

Notion de règle de sélection

Les forces d'oscillateurs mesurent la facilité avec laquelle un atome peut transiter d'un état à un autre et un grand nombre d'entre eux sont en fait nuls en raison de conditions de symétrie. Illustrons ceci dans le cas de la symétrie miroir. On introduit pour cela l'opérateur parité $\hat{\Pi}$ dont l'action dans la base des positions est $\hat{\Pi} | \mathbf{r} \rangle = | -\mathbf{r} \rangle$ et dont les valeurs propres sont ± 1 et son associées aux vecteurs d'états symétriques ou antisymétriques par symétrie. Le hamiltonien \hat{H}_0 est bien entendu invariant sous l'action de $\hat{\Pi}$ ce qui se traduit en mécanique quantique par la condition de commutation de $\hat{\Pi}$ et \hat{H}_0 . Dans ce cas, on peut chercher les états propres de \hat{H}_0 comme des vecteurs de parité bien définie satisfaisant donc la condition $\hat{\Pi} | n \rangle = \lambda_n | n \rangle$, avec $\lambda_n = \pm 1$.

Dans ce choix de base, on montre que l'opérateur dipôle \hat{d}_x ne peut coupler que des états de parité différentes. En effet, en utilisant l'action de $\hat{\Pi}$ sur la base des états de position, on voit sans difficulté que $\hat{\Pi}^\dagger \hat{d}_x \hat{\Pi} = -\hat{d}_x$. En prenant les éléments de matrices de cette égalité entre opérateurs, on voit que

$$\langle n | \hat{\Pi}^\dagger \hat{d}_x \hat{\Pi} | m \rangle = -\langle n | \hat{d}_x | m \rangle, \quad (4.41)$$

soit en introduisant la parité des états $| n \rangle$ et $| m \rangle$,

$$(1 + \lambda_n \lambda_m) \langle n | \hat{d}_x | m \rangle = 0. \quad (4.42)$$

On voit ici que si les états n et m ont même parité alors $\lambda_n \lambda_m + 1 = 2$ et donc $\langle n | \hat{d}_x | m \rangle = 0$. En comparant à l'expression des forces d'oscillateurs, on en déduit donc qu'il ne peut y avoir de transition vers un état $| n \rangle$ si il a la même

parité que l'état fondamental. À titre d'exemple, on peut montrer que dans l'atome d'hydrogène les états de moment cinétique ℓ ont une parité $(-1)^\ell$. On en déduit donc que la transition de l'état 1S vers l'état 2S par absorption d'un photon est interdite par parité, les états ayant même ℓ et donc même parité.

Une autre symétrie important est l'invariance par rotation, que l'on utilise par exemple explicitement dans la diagonalisation du hamiltonien de l'atome d'hydrogène et qui reste valable dans le cas des atomes polyélectroniques. Sans entrer dans les détails qui font appels à la théorie de la composition des moments cinétiques et des coefficients de Clebsch-Gordan, on peut montrer que cette symétrie est elle aussi à l'origine d'un certain nombre de règles de sélection et impose notamment que le moment cinétique atomique ne change pas de plus d'une unité⁷. Dans le cas de l'atome d'hydrogène, l'atome dans l'état fondamental se trouvant dans un état S de moment cinétique nul, on en déduit que l'interaction avec le champ électromagnétique ne peut entraîner des transitions vers des états P ($\ell = 1$), ou S ($\ell = 0$). Mais comme nous l'avons vu plus haut, les transitions $S - S$ violent la symétrie par parité et ne restent donc que les transitions $S - P$.

4.2.3 Aparté : violation de la parité

Bien qu'intuitivement, on s'attendrait intuitivement à ce que la physique soit la même pour un système et son image dans un miroir, on sait depuis les années 1950 que ce n'est pas le cas pour les phénomènes impliquant l'interaction faible. Cette interaction, qui fait partie des quatre interactions élémentaires du Modèle Standard de la physique des particules, intervient uniquement dans les réaction nucléaires et est responsable des mécanismes de radioactivité β , comme la désintégration du proton.

L'interaction faible intervient aussi dans l'interaction entre les électrons et le noyau d'un atome et viole là aussi la symétrie par parité. Autrement dit, tous les états propre d'un atome sont légèrement différents de leur image dans un miroir. Cette propriété assez contre-intuitive peut être testée par des expériences de spectroscopie atomique. En effet, la règle de sélection interdisant les transitions entre états de parité identiques se fondent sur la symétrie miroir d'un atome. Si celle-ci n'est pas exacte, alors ces transitions ne sont pas complètement interdites et doivent pouvoir être (faiblement) excitées. De nombreuses expériences sur le césium et l'ytterbium ont confirmé cet effet et ont vérifié les prédictions du modèle standard avec une précision d'un fraction de pour cent [3].

Excitation résonnante

Par définition, la méthode perturbative n'est valable que si les $c_{n \neq 0}$ restent faibles. Lorsque le champ électromagnétique est proche d'une résonance atomique excitant une transition vers un état que l'on note $|n = 1\rangle$, alors le dénominateur $\omega_{10} - \omega$ dans l'expression (4.28) devient petit et c_1 quitte donc le

⁷. Pour simplifier, le photon ayant un spin \hbar ne peut modifier le moment cinétique atomique que d'au plus une unité de \hbar .

régime perturbatif. On doit donc considérer dans le développement perturbatif que c_0 et c_1 sont tous les deux d'ordre 0. Ainsi, l'équation sur c_0 devient à l'ordre 1 en perturbation

$$i\hbar\dot{c}_0 = c_1 e^{-i\omega_{10}t} \langle 0 | \hat{h}_1 | 1 \rangle \cos(\omega t). \quad (4.43)$$

$$i\hbar\dot{c}_1 = c_0 e^{i\omega_{10}t} \langle 1 | \hat{h}_1 | 0 \rangle \cos(\omega t). \quad (4.44)$$

$$(4.45)$$

Ce système peut être simplifié plus avant en notant que lorsque l'on décompose le cosinus en exponentielle complexe, seul un des deux terme donnera un terme résonnant. L'autre oscillant à la fréquence $\omega + \omega_{10}$ pourra être traité en perturbation, comme les $c_{n \neq 0,1}$. On obtient alors le système suivant

$$i\hbar \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \hbar\Omega e^{i\Delta t}/2 \\ \hbar\Omega^* e^{-i\Delta t}/2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix}, \quad (4.46)$$

avec $\Delta = \omega - \omega_{10}$ et $\hbar\Omega = \langle 0 | \hat{h}_1 | 1 \rangle$. Cette approximation s'appelle approximation du champ tournant. En effet, on peut mettre ce système sous la forme

$$i\hbar \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix} = \hat{H}_{\text{eff}} \cdot \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix}, \quad (4.47)$$

avec $\hat{H}_{\text{eff}} = -\mathbf{B}_{\text{eff}} \cdot \mathbf{S}$, $\gamma \mathbf{B}_{\text{eff}}$ désigne un vecteur du plan (x, y) de coordonnées $\Omega(-\cos(\Delta t), \sin(\Delta t))$ et où $\hat{\mathbf{S}} = \hbar \hat{\boldsymbol{\sigma}}/2$ est l'opérateur moment cinétique d'une particule de spin 1/2. Ce hamiltonien décrit le comportement d'un spin 1/2 de facteur gyromagnétique $\gamma = 1$ placé dans un champ magnétique tournant dans le plan (x, y) à la pulsation Δ . Ce problème est bien connu puisqu'il est à la base de la physique de la RMN et l'équation de Schrödinger se résout en passant dans le référentiel tournant en posant $|\psi\rangle = \hat{U}(t)|\tilde{\psi}\rangle$, avec $\hat{U} = \exp(-i\hat{S}_z \Delta t/\hbar)$. Dans cette nouvelle représentation, $|\tilde{\psi}\rangle$ satisfait une équation de Schrödinger pour un hamiltonien \tilde{H}_{eff} indépendant du temps défini par

$$\tilde{H}_{\text{eff}} = \begin{pmatrix} \hbar\Delta/2 & \hbar\Omega \\ \hbar\Omega & -\hbar\Delta/2 \end{pmatrix}. \quad (4.48)$$

Afin de calculer l'évolution du dipôle dans cette approximation, on commence par chercher le spectre de \tilde{H}_{eff} . Le polynôme caractéristique de \tilde{H}_{eff} s'écrivant simplement

$$\chi(E) = E^2 - \hbar^2(|\Omega|^2 + \Delta^2/4), \quad (4.49)$$

dont les racines sont simplement $E_{\pm} = \pm \hbar \sqrt{|\Omega|^2 + \Delta^2/4}$. On trouve les vecteurs propres associés en introduisant un angle de mélange θ défini par

$$\cos 2\theta = \Delta/2E_+ \quad (4.50)$$

$$\sin 2\theta = \Omega/E_+. \quad (4.51)$$

Si l'on écrit l'équation aux valeurs propres définissant les vecteurs $|\psi_{\pm}\rangle$, on en déduit alors aisément que

$$|\psi_{+}\rangle = \cos\theta|0\rangle + \sin\theta|1\rangle \quad (4.52)$$

$$|\psi_{-}\rangle = -\sin\theta|0\rangle + \cos\theta|1\rangle. \quad (4.53)$$

L'atome étant préparé dans l'état $|0\rangle$ à $t = 0$, on a dans un premier temps

$$|\tilde{\psi}(t=0)\rangle = |0\rangle = \cos\theta|\psi_{+}\rangle - \sin\theta|\psi_{-}\rangle. \quad (4.54)$$

Lorsqu'on laisse évoluer le système, chaque projection sur les états propres du système évolue selon un simple déphasage, et l'on trouve que

$$|\tilde{\psi}(t)\rangle = \cos\theta e^{-iE_{+}t/\hbar}|\psi_{+}\rangle - \sin\theta e^{-iE_{-}t/\hbar}|\psi_{-}\rangle. \quad (4.55)$$

Si l'on repasse ensuite dans la base initiale, on trouve finalement que

$$|\tilde{\psi}(t)\rangle = \left(\cos^2\theta e^{-iE_{+}t/\hbar} - \sin^2\theta e^{-iE_{-}t/\hbar}\right)|0\rangle - i\sin(2\theta)\sin(E_{+}t/\hbar)|1\rangle. \quad (4.56)$$

Commençons par étudier la probabilité de transition de l'état $|0\rangle$ à l'état $|1\rangle$ que l'on note $P_{01}(t) = |\langle 1|\tilde{\psi}(t)\rangle|^2$. On voit d'après ce qui précède que

$$P_{01}(t) = \sin^2(2\theta)\cos^2(E_{+}t) = \frac{\Omega^2}{\Omega^2 + \Delta^2/4}. \quad (4.57)$$

Autrement dit, on assiste à des oscillations de Rabi entre l'état fondamental et l'état excité. L'amplitude de ces oscillations dépend du désaccord et suit une loi Lorentzienne valant

$$P_{01}^{\max} = \frac{\Omega^2}{\Omega^2 + \Delta^2/4}. \quad (4.58)$$

À résonance ($\Delta = 0$) cette amplitude vaut 1, ce qui signifie que l'on peut passer avec une probabilité unité l'atome dans l'état excité.

Au-delà de l'approximation dipolaire

L'approximation dipolaire se fonde sur l'existence de deux petits paramètres que sont l'intensité lumineuse et la taille de l'atome. Le calcul présenté ci-dessus constitue donc le premier du développement en puissance de ces deux quantités, et l'on peut s'interroger sur le comportement du système lorsque l'on quitte le domaine de validité de cette approximation.

1. *Rayonnement de courte longueur d'onde.* Dans ce cas la taille de l'atome n'est plus négligeable devant la longueur d'onde et on ne peut plus considérer le champ électromagnétique comme constant sur l'ensemble de l'atome. Le développement de $\cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{R}_i)$ fait alors apparaître des termes d'ordre $(\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}_i)^n$ associés aux moments multipolaires de la distribution de probabilité du cortège électronique.

2. *Rayonnement de forte intensité.* Dans ce cas, l'ordre 1 de la théorie de perturbation ne suffit plus à traiter l'effet de \hat{H}_1 et \hat{H}_2 sur l'atome et il faut pousser le développement aux ordres supérieurs en \mathbf{A} . Ceci fait alors apparaître à l'ordre n des termes en A^n oscillant à la puissance $n\omega$. Bien que dans le détail les calculs soient plus complexes que ceux présentés dans le cadre de la théorie des perturbations à l'ordre 1, la condition de résonance reste la même et l'atome ne réagira que lorsque la fréquence de modulation $n\omega$ sera égale à une fréquence atomique ω_{n0} . En terme corpusculaire, ceci correspond à un processus multiphotonique, puisque par conservation de l'énergie n photons d'énergie $\hbar\omega$ sont ainsi nécessaires pour passer de l'état fondamental à l'état excité. Ce phénomène est à la base de l'optique non-linéaire qui permet notamment le doublement de la fréquence d'une source laser. En effet, considérons le cas d'une absorption à deux photons que l'on excite à l'aide d'un laser de pulsation $\omega = \omega_{10}/2$. Une fois arrivé dans l'état excité, l'atome peut se désexciter en émettant un photon de fréquence ω_{10} , ce qui va donc générer un rayonnement à la fréquence double de celle utilisée pour l'excitation. Ce phénomène est par exemple utilisé pour générer la lumière des pointeurs lasers verts à partir d'une source infrarouge.

4.2.4 Interaction avec un champ quantique.

L'atome habillé

Dans le paragraphe précédent, nous avons considéré que le champ électromagnétique était un objet classique décrit par un potentiel vecteur \mathbf{A} réel. Comme nous l'avons vu au début de ce cours, le potentiel vecteur est en réalité un opérateur agissant sur l'espace de Hilbert des photons. Nous admettons ici que dans l'approximation dipolaire (grande longueur d'onde, faible nombre de photons) le hamiltonien du système atome + photons s'écrit $\hat{H} = \hat{H}_{\text{em}} + \hat{H}_0 + \hat{H}_1$ où \hat{H}_0 et \hat{H}_1 ont la même forme que dans les équations (4.7) et (4.15), à condition de changer les potentiels vecteurs par les opérateurs $\hat{\mathbf{A}}$ et $\hat{H}_{\text{em}} = \sum_{\mu} \hbar\omega_{\mu} \hat{a}_{\mu}^{\dagger} \hat{a}_{\mu}$ désigne le hamiltonien du champ libre.

Dans ce formalisme, une base de l'espace de Hilbert est donnée par les états $|n, \{N_{\mu}\}\rangle$, produits des états atomiques et des états du champ. On appelle cette description le formalisme de l'atome habillé, qui fut développé notamment par Claude Cohen-Tannoudji.

Couplage à un seul mode du champ

On considère dans un premier temps la situation où l'atome n'interagit essentiellement qu'avec un seul mode $\mu = (\mathbf{k}, \sigma)$ du champ électromagnétique de fréquence ω et contenant initialement N photons. On suppose que ce mode est quasi-résonnant avec la transition entre les états $|n = 0\rangle$ et $|n = 1\rangle$. Par conservation de l'énergie, ceci nous permet de ne considérer que la restriction des états

atomiques à l'espace engendré par ces deux états⁸.

En prenant $E_0 = 0$, on obtient alors le hamiltonien

$$\hat{H} = \hbar\omega_\mu \hat{a}_\mu^\dagger \hat{a}_\mu + \hbar\omega_1 |1\rangle\langle 1| - \frac{q_e}{m_e} \left(\sum_{i=1}^Z \hat{\mathbf{P}}_i \right) \cdot \mathbf{e}_\mu \mathcal{A}_\mu (\hat{a}_\mu + \hat{a}_\mu^\dagger). \quad (4.59)$$

Par parité, les éléments diagonaux des opérateurs $\hat{\mathbf{P}}_i$ sont nuls dans la base des états $|n\rangle$. En utilisant l'équivalence entre les éléments de matrice des hamiltoniens $\hat{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{A}$ et $\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}$ démontrée dans le cadre du modèle classique, on peut récrire \hat{H} comme

$$\hat{H} = \hbar\omega_\mu \hat{a}_\mu^\dagger \hat{a}_\mu + \hbar\omega_1 |1\rangle\langle 1| - i\omega_1 (\mathbf{d}_{10}|1\rangle\langle 0| - \mathbf{d}_{10}^*|0\rangle\langle 1|) \cdot \mathbf{e}_\mu \mathcal{A}_\mu (\hat{a}_\mu + \hat{a}_\mu^\dagger). \quad (4.60)$$

On peut simplifier cette expression en utilisant une nouvelle fois l'argument de conservation de l'énergie qui nous permet d'éliminer les termes non résonants du hamiltonien. En effet, l'opérateur $|1\rangle\langle 0|$ fait passer l'atome de son état fondamental à son état excité. Par conservation de l'énergie, ceci ne peut se produire qu'en conjonction avec l'absorption d'un photon, et donc un opérateur annihilation, ce qui nous permet d'éliminer le terme $|1\rangle\langle 0| \hat{a}_\mu^\dagger$. En raisonnant de même le terme en $|0\rangle\langle 1|$ décrivant la désexcitation de l'atome, on aboutit à la forme simplifiée, appelée hamiltonien de Jaynes-Cummings,

$$\hat{H}_{\text{JC}} = \hbar\omega_\mu \hat{a}_\mu^\dagger \hat{a}_\mu + \hbar\omega_1 |1\rangle\langle 1| - i\omega_1 \mathcal{A}_\mu (\mathbf{d}_{10} \hat{a}_\mu |1\rangle\langle 0| - \hat{a}_\mu^\dagger \mathbf{d}_{10}^* |0\rangle\langle 1|). \quad (4.61)$$

La structure de ce hamiltonien est extrêmement simple, puisqu'il laisse stable les espaces \mathcal{E}_N de dimension 2 engendrés par les vecteurs $|1, N\rangle$ et $|0, N+1\rangle$, où N désigne le nombre de photons dans le mode μ considéré. La restriction de \hat{H}_{JC} à un \mathcal{E}_N s'écrit alors

$$\hat{H}_{\text{JC}} = (2N+1) \frac{\hbar\omega}{2} + \frac{\hbar\omega_1}{2} + \begin{pmatrix} \hbar\Delta/2 & \hbar\Omega_N \\ \hbar\Omega_N^* & -\hbar\Delta/2 \end{pmatrix}, \quad (4.62)$$

avec $\hbar\Omega_N = \sqrt{N+1} \omega_1 \mathcal{A}_\mu \mathbf{d}_{10} \cdot \mathbf{e}_\mu$. En comparant au hamiltonien (4.48), on constate que le modèle quantique à un mode redonne au voisinage de la résonance les mêmes résultats que le modèle semi-classique développé plus haut.

La structure des niveaux habillés peut être sondée grâce à l'étude des doublets de Autler-Townes. Dans cette expérience, on considère un troisième niveau (noté $|2\rangle$). Un premier faisceau laser est accordé comme précédemment sur la transition $1-2$. Ce laser ne modifie pas l'état $|3\rangle$ mais couple en revanche les états $|1\rangle$ et $|2\rangle$. Si N est comme précédemment le nombre de photons, la base propre du système est constituée des états $|\psi_\pm\rangle$ et $|2, N\rangle$.

⁸. On peut montrer que cette approximation est équivalente à l'approximation du champ tournant.

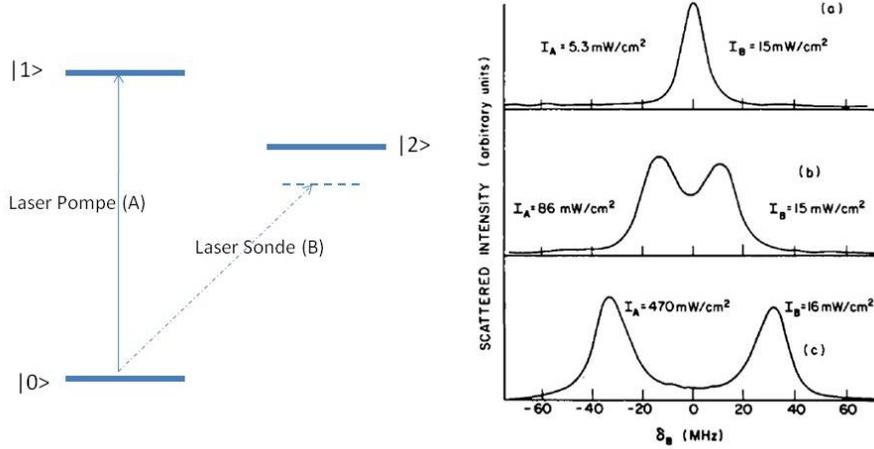


FIGURE 4.1 – Doublet de Autler-Townes [2]

On sonde ensuite la transition $2 - 1$ avec un second laser. Comme $|\psi_+\rangle$ et $|\psi_-\rangle$ possèdent tous les deux une projection sur $|1, N\rangle$, on s'attend donc à deux résonances, séparées de $E_+ - E_- = 2\hbar\Omega$ dans le cas où le premier laser est résonnant.

On peut ainsi prédire deux résultats importants : d'une part la structure de niveaux de l'atome habillé.

D'autre part, si l'on se place à résonance l'on part de l'état $|0, N + 1\rangle$, on effectue des oscillations de Rabi avec l'état $|1, N\rangle$ à la pulsation $\Omega_N \propto \sqrt{N}$. La figure 4.2 présente une mesure de la probabilité de transition en présence d'une distribution de photons. La transformée de Fourier de ce signal montre une série de pics correspondant aux différents nombres de photons dans la cavité et confirme la dépendance en \sqrt{N} prédite par la théorie de l'atome habillé.

Émission spontanée

Jusqu'à présent, nous n'avons considéré qu'un seul mode du champ électromagnétique, ce qui aboutissait à une physique relativement simple donnant lieu à des cycles d'émission/absorption réversibles entre l'état fondamental et l'état excité. On sait pourtant qu'en réalité un atome placé dans l'état excité se désexcite de manière irréversible en émettant un photon selon un processus d'émission spontanée. La différence essentielle par rapport au calcul précédent est que l'émission spontanée se fait dans un mode quelconque et en particulier dans les modes vides que nous n'avons pas considéré jusqu'à présent. On reprend donc le hamiltonien de Jaynes-Cummings dans lequel on considère à présent l'intégralité des modes du champs électromagnétique. Le hamiltonien dipolaire est dans ce cas

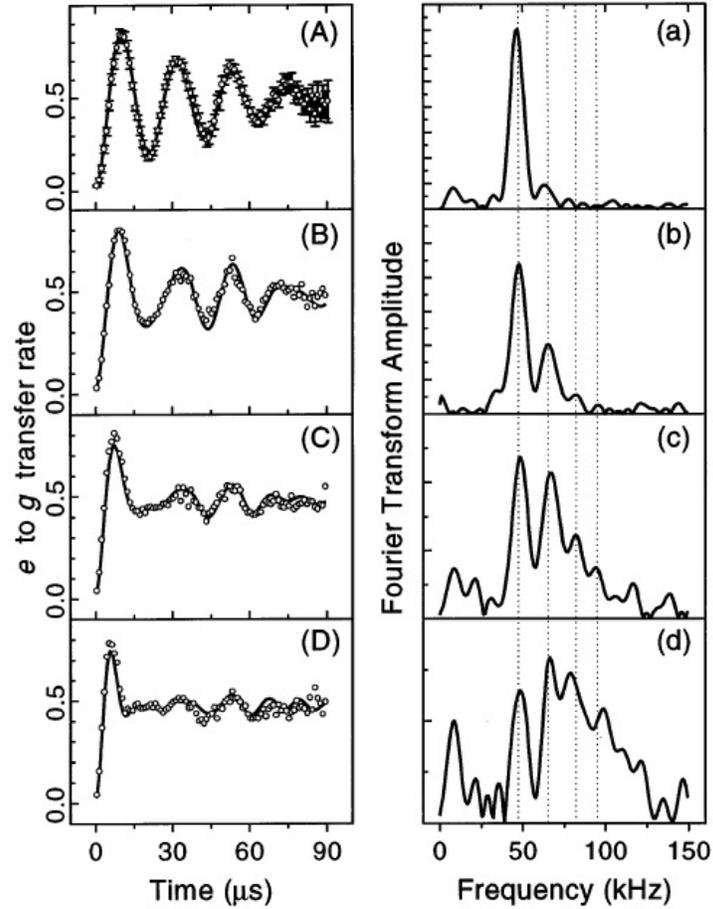


FIGURE 4.2 – Oscillation de Rabi quantiques : Oscillations de Rabi en électrodynamique en cavité. À gauche, probabilité de trouver l'atome dans l'état fondamental à l'instant t . À droite, transformée p de Fourier du signal précédent. Les pics à 47 kHz, 67 kHz $\sim \sqrt{2} \times 47$ kHz, 82 kHz $\sim \sqrt{3} \times 47$ kHz et 94 kHz $\sim \sqrt{4} \times 47$ kHz sont bien dans les rapports prédits par la théorie quantique. Données extraites de [1].

$$\hat{H} = \sum_{\mu} \hbar\omega_{\mu} \hat{a}_{\mu}^{\dagger} \hat{a}_{\mu} + \hbar\omega_1 |1\rangle\langle 1| - i \sum_{\mu} \omega_1 \mathcal{A}_{\mu} (\mathbf{d}_{10} \hat{a}_{\mu} |1\rangle\langle 0| - \hat{a}_{\mu}^{\dagger} \mathbf{d}_{10}^* \cdot \mathbf{e}_{\mu} |0\rangle\langle 1|). \quad (4.63)$$

On considère la situation simplifiée d'un atome dans l'état excité ($|n = 1\rangle$) placé dans le vide de photons. Par le hamiltonien (4.63), cet état est couplé aux états $|0, 1_{\mu}\rangle$ associés à l'atome dans l'état fondamental en présence d'un photon dans le mode μ . En représentation d'interaction L'état du système s'écrit donc

$$|\psi(t)\rangle = c_1(t) e^{-i\omega_1 t} |1, \emptyset\rangle + \sum_{\mu} c_{\mu}(t) e^{-i\omega_{\mu} t} |0, 1_{\mu}\rangle. \quad (4.64)$$

On se trouve dans la situation de la Règle d'Or de Fermi, dans laquelle un état initial (l'état $|1, \emptyset\rangle$) est couplé à un continuum d'états finals (les états $|0, 1_{\mu}\rangle$) et qui aboutit à une évolution irréversible. Afin de retrouver ce résultat, on écrit l'équation de Schrödinger que l'on projette sur les états de base. On trouve alors

$$i\hbar\dot{c}_1 = -i \sum_{\mu} c_{\mu}(t) e^{-i(\omega_{\mu} - \omega_1)t} \omega_1 \mathcal{A}_{\mu} (\mathbf{d}_{10}^* \cdot \mathbf{e}_{\mu}) \quad (4.65)$$

$$i\hbar\dot{c}_{\mu} = ic_0(t) e^{i(\omega_{\mu} - \omega_1)t} \omega_1 \mathcal{A}_{\mu} (\mathbf{d}_{10} \cdot \mathbf{e}_{\mu}). \quad (4.66)$$

La seconde équation s'intègre formellement immédiatement, ce qui nous permet d'exprimer c_{μ} en fonction de c_0 . Puisque l'atome est initialement dans l'état $n = 1$, on a $c_{\mu}(0) = 0$ et l'on trouve alors

$$c_{\mu}(t) = \frac{1}{\hbar} \int_0^t dt' \left[c_1(t') e^{i(\omega_{\mu} - \omega_1)t'} \omega_1 \mathcal{A}_{\mu} (\mathbf{d}_{10} \cdot \mathbf{e}_{\mu}) \right]. \quad (4.67)$$

En intégrant cette expression dans l'équation (4.65), on obtient une équation intégral-différentielle ne portant que sur c_1

$$\dot{c}_1 = -\frac{1}{\hbar^2} \int_0^t dt' \sum_{\mu} \left[c_1(t') e^{i(\omega_{\mu} - \omega_1)(t' - t)} \omega_1^2 \mathcal{A}_{\mu}^2 |\mathbf{d}_{10} \cdot \mathbf{e}_{\mu}|^2 \right]. \quad (4.68)$$

On peut réécrire cette équation comme

$$\dot{c}_1 = - \int_0^t dt' K(t - t') c_1(t'), \quad (4.69)$$

avec $K(\tau) = \sum_{\mu} e^{i(\omega_{\mu} - \omega_1)\tau} \omega_1^2 \mathcal{A}_{\mu}^2 |\mathbf{d}_{10} \cdot \mathbf{e}_{\mu}|^2 / \hbar^2$. Intéressons nous à la structure du noyau K . Tout d'abord, on s'attend à ce que K tende vers 0 aux grandes valeurs de τ . En effet, lorsque τ devient grand, le facteur exponentielle oscille de plus en plus vite avec ω_{μ} . Lorsque l'on somme ensuite sur μ , ces oscillations se brouillent, ce qui aboutit à une diminution de K . On note dans la suite

$\Delta\tau$ le temps caractéristique de décroissance de K . Dimensionnellement, on a $\Delta\tau \sim \omega_1^{-1}$ car les autres paramètres du problème apparaissent comme un facteur d'échelle en facteur devant K .

Notons Γ^{-1} le temps caractéristique d'évolution de c_1 . Ce temps est d'autant plus long que le dipôle atomique est faible. En effet, si l'on fait tendre \mathbf{d} vers zéro on obtient l'équation triviale $\dot{c}_1 = 0$, traduisant l'absence d'évolution du système. Lorsque l'on considère à présent un dipôle fini, on s'attend à retrouver une évolution de c_1 , mais d'autant plus lente que d_{10} sera faible, par continuité. Dans la suite on fait donc l'hypothèse d'un couplage faible de l'atome au champ caractérisé par la condition $\Gamma\Delta\tau \sim \Gamma/\omega_1 \ll 1$.

Dans cette limite, c_1 n'a pas le temps de varier sur le temps caractéristique mis par K pur tendre vers 0. Ceci signifie dans l'équation (4.69), seules les valeurs de c_1 proche de $t' = t$ contribuent et que l'on peut donc faire l'approximation

$$\dot{c}_1 = -c_1(t) \int_0^t K(t-t') dt', \quad (4.70)$$

Si à présent on regarde le système à un temps t grand devant $\Delta\tau$, on peut remplacer la limite supérieure de l'intégrale par $t' = +\infty$, ce qui nous donne donc

$$\dot{c}_1 = -\gamma c_1, \quad (4.71)$$

avec $\gamma = \int_0^{+\infty} K(\tau) d\tau$. γ est un nombre complexe que l'on met sous la forme $\gamma = \Gamma/2 + i\Delta'$, où Δ' et Γ sont deux nombres réels. On résoud sans difficulté l'équation, en utilisant la condition initiale $c_1(0) = 1$ et l'on trouve alors

$$c_1(t) = e^{-i\Delta't - \Gamma t/2} \quad (4.72)$$

Afin de les interpréter physiquement, cherchons les probabilités d'occupation des états du système à un instant t . On voit que pour l'état initial $|1, \emptyset\rangle$, cette probabilité vaut simplement $P_1(t) = |c_1|^2$, soit

$$P_1(t) = e^{-\Gamma t}. \quad (4.73)$$

La probabilité de rester dans l'état initial décroît donc exponentiellement avec le temps, avec une probabilité de départ par unité de temps Γ .

Calculons la probabilité P_μ d'occupation d'un état $|0, 1_\mu\rangle$ à la fin de l'évolution. En utilisant la relation (4.67) ainsi que l'expression de c_1 , on en déduit que pour $t \rightarrow \infty$,

$$P_\mu = |c_\mu|^2 \sim \frac{1}{\hbar^2} \frac{\omega_1^2 \mathcal{A}_\mu^2 |\mathbf{d}_{10} \cdot \mathbf{e}_\mu|^2}{(\omega_\mu - \omega_1 - \Delta')^2 + \Gamma^2/4}. \quad (4.74)$$

On constate que le spectre des photons émis suit une loi lorentzienne de largeur à mi hauteur Γ . Cette largeur de la distribution peut être interpréter comme une illustration de la relation d'Heisenberg temps-énergie $\Delta t \Delta \sim \hbar$, dans laquelle Δt est la dure de de vie de l'état excité et ΔE la largeur en énergie

de la distribution des photons émis. Notons que l'on s'attendrait naïvement à ce que P_μ soit centrée sur $\omega_\mu = \omega_1$. On constate qu'en réalité la fréquence d'émission la plus probable est $\omega_1 + \Delta'$. Ce décalage de la raie atomique est en fait la manifestation du déplacement de Lamb dont nous avons discuté au premier chapitre. En effet, l'énergie de l'état $|1\rangle$ est calculée pour le hamiltonien \hat{H}_0 d'un atome ne se couplant pas aux degrés de liberté du champ électromagnétique. Lorsque l'on introduit un moment dipolaire, on s'aperçoit que, même dans le vide de photon, les états $|n\rangle$ sont affectés par les fluctuations quantiques du vide.

Pour finir, on s'intéresse au diagramme de rayonnement des photons. Pour cela, on choisit l'axe z parallèle au vecteur \mathbf{d}_{10} et l'on choisit pour base de polarisation des polarisations linéaires, la première dans le plan (z, \mathbf{k}) et la seconde orthogonale à ce plan (ces deux polarisations correspondent donc aux vecteurs \mathbf{e}_θ et \mathbf{e}_φ en coordonnées sphériques). La présence du produit scalaire $\mathbf{d} \cdot \mathbf{e}_\mu$ implique que la probabilité d'émission d'un photon de polarisation selon \mathbf{e}_φ est nulle. Tous les photons sont donc émis avec une polarisation selon \mathbf{e}_θ . Par ailleurs, la probabilité d'émission d'un photon de vecteur d'onde \mathbf{k} incliné d'un angle θ par rapport à z est proportionnelle $|\mathbf{e}_\theta \cdot \mathbf{e}_z|^2 = \sin^2 \theta$. On retrouve ainsi la structure bien connue du diagramme de rayonnement d'un dipôle oscillant, avec en particulier une absence d'émission dans la direction z du dipôle.

L'analogie avec le dipôle oscillant est encore plus frappante lorsque l'on calcule explicitement la valeur du taux d'émission spontanée. D'après ce qui précède, nous avons posé $\gamma = \int_0^\infty K(\tau) d\tau$, soit n utilisation l'expression de K

$$\gamma = \frac{1}{\hbar^2} \int_0^\infty \left[\sum_\mu e^{i(\omega_\mu - \omega_1)\tau} \omega_1^2 \mathcal{A}_\mu^2 |\mathbf{d}_{10} \cdot \mathbf{e}_\mu|^2 \right] d\tau. \quad (4.75)$$

On calcule l'intégrale temporelle en utilisant la relation

$$\int_0^\infty e^{i\omega\tau} d\tau = \pi\delta(\omega) + i\mathcal{P}\frac{1}{\omega}, \quad (4.76)$$

où \mathcal{P} désigne la partie principale au sens des distributions. En insérant cette égalité dans l'expression de γ , on trouve

$$\Gamma = 2\text{Re}(\gamma) = \frac{2\pi}{\hbar^2} \sum_\mu \omega_1^2 \mathcal{A}_\mu^2 |\mathbf{d}_{10} \cdot \mathbf{e}_\mu|^2 \delta(\omega_\mu - \omega_1). \quad (4.77)$$

La somme sur les modes μ du champ électromagnétique se décompose en principe en une somme sur le vecteur d'onde et une somme sur les polarisations. Comme nous l'avons vu cependant, le terme en $\mathbf{d}_{10} \cdot \mathbf{e}_\mu$ élimine la contribution de la polarisation \mathbf{e}_φ ce qui ne laisse qu'une seule polarisation. Si l'on transforme la somme en une intégrale, on obtient alors

$$\Gamma = \frac{2\pi}{\hbar^2} \int \frac{d^3\mathbf{k}_\mu L^3}{(2\pi)^3} \omega_1^2 \mathcal{A}_\mu^2 d_{10}^2 \sin^2 \theta \delta(\omega_\mu - \omega_1). \quad (4.78)$$

Si l'on intègre en coordonnées sphériques en posant $k_\mu = \omega_\mu/c$ et que l'on remplace \mathcal{A}_μ par son expression, on obtient alors

$$\Gamma = \frac{L^3}{\hbar^2(2\pi)^2c^3} \int \omega_\mu^2 d\omega_\mu \sin\theta d\theta d\varphi \omega_1^2 \left(\frac{\hbar}{2\varepsilon_0\omega_\mu L^3} \right) d_{10}^2 \sin^2\theta \delta(\omega_\mu - \omega_1). \quad (4.79)$$

Les différentes intégrales se calculent sans difficulté et l'on obtient pour finir

$$\Gamma = \frac{\omega_1^3 d_{10}^2}{3\pi\hbar\varepsilon_0 c^3}. \quad (4.80)$$

Pour des paramètres typiques, on trouve $\Gamma \sim 10^9 \text{ s}^{-1}$ qui est très lent devant les fréquences de Bohr du système. Cette propriété, qui valide nos approximations, provient de nouveau de la faible valeur de la constante de structure fine. En effet, en notant que dimensionnellement $d_{10} \sim q_e a_0$, le rapport Γ/ω_1 se met en ordre de grandeur sous la forme

$$\frac{\Gamma}{\omega_1} \sim \alpha \frac{\omega_1^2 a_0^2}{c^2}. \quad (4.81)$$

Mais, par ailleurs, $\hbar\omega_1 \sim \text{Ry} \sim e^2/a_0$. On en déduit donc que

$$\frac{\Gamma}{\omega_1} \sim \alpha^3 \sim 10^{-6}. \quad (4.82)$$

Pour finir, remarquons que la formule (4.80) est très similaire à celle que l'on obtient dans le modèle de Thomson en incluant le rayonnement du dipôle. En effet, en électrodynamique classique, on montre que la puissance rayonnée par un dipôle oscillant à la pulsation ω s'écrit

$$P_{\text{cl}} = \frac{\mu_0 \omega^4 d_0^2}{12\pi c}. \quad (4.83)$$

L'amplitude du dipôle oscillant vaut $d_0 = q_e a$ où a est l'amplitude du mouvement de l'électron. Si l'on introduit l'énergie mécanique totale de l'électron $E = m_e \omega^2 a^2/2$, on peut récrire la puissance rayonnée comme

$$P_{\text{cl}} = \frac{\omega^2}{3\pi\varepsilon_0 c^3 \hbar} \left(\frac{\hbar q_e^2}{2m_e \omega} \right) E. \quad (4.84)$$

Si l'on écrit le bilan d'énergie pour le dipôle, on voit que $\dot{E} = -P_{\text{cl}}$ qui se résout sans difficulté et aboutit à une décroissance exponentielle de l'énergie à un taux Γ_{cl} donné par

$$\Gamma_{\text{cl}} = \frac{\omega^2}{3\pi\varepsilon_0 c^3 \hbar} \left(\frac{\hbar q_e^2}{2m_e \omega} \right). \quad (4.85)$$

Un calcul d'ordre de grandeur montre que le terme entre parenthèse est de l'ordre⁹ de d_{01}^2 . En effet, d'après le théorème du Viriel, les énergies cinétiques

9. Dans le cas d'un électron dans un piège harmonique, on a même égalité entre les deux expressions.

4.2. DESCRIPTION QUANTIQUE DE L'INTERACTION MATIÈRE RAYONNEMENT 21

et potentielles contribuent de façon à peu près équivalente à l'énergie totale, et l'on a attend donc $\hbar\omega_1 \sim \hbar^2/m_e a_0^2$, si l'on suppose par ailleurs les inégalités de Heisenberg pratiquement saturées et donc $p \sim \hbar/a_0$. On en déduit alors que $\hbar q_e^2/2m_e\omega \sim q_e^2 a_0^2 \sim d_{10}^2$.

Bibliographie

- [1] M. Brune, F. Schmidt-Kaler, A. Maali, J. Dreyer, E. Hagley, JM Raimond, and S. Haroche. Quantum Rabi oscillation : A direct test of field quantization in a cavity. *Phys. Rev. Lett.*, 76(11) :1800–1803, 1996.
- [2] H. R. Gray and C. R. Stroud. Autler-townes effect in double optical resonance. *Optics Communications*, 25(3) :359 – 362, 1978.
- [3] J. Guena, M. Lintz, and M. A. Bouchiat. Atomic parity violation : Principles, recent results, present motivations. *Mod. Phys. Lett. A*, 20 :375, 2005.