

L3 – Physique – Ecole Normale Supérieure

Introduction à l'astrophysique

François Levrier
2023 – 2024



*La nébuleuse de la Tarentule, une région de formation stellaire intense dans la galaxie du grand nuage de Magellan
(NASA, ESA, CSA, STScI, Webb ERO)*

Table des matières

1	L'observation astronomique	8
1.1	La lumière, messagère de l'astronomie	8
1.1.1	Fréquence, longueur d'onde, échelles d'énergie et de température	8
1.1.2	L'ouverture du spectre au-delà du visible	10
1.1.3	Distribution spatiale	12
1.1.4	Distribution spectrale	13
1.1.5	Propriétés de polarisation	15
1.1.6	Variabilité temporelle	15
1.2	Télescopes et détecteurs	16
1.2.1	Les images géométriques	16
1.2.2	La fonction d'étalement de point	17
1.2.3	Les différents types de détecteurs	19
1.2.4	Interférométrie	24
1.3	L'astrophysique multi-messagers	25
1.3.1	Les rayons cosmiques	25
1.3.2	Les neutrinos	27
1.3.3	Les ondes gravitationnelles	29
2	Le transfert de rayonnement	33
2.1	L'intensité spécifique	33
2.1.1	Des équations de Maxwell à l'énergie portée par le champ	33
2.1.2	Définition et propriétés de l'intensité spécifique	36
2.2	Les grandeurs photométriques dérivées	38
2.2.1	Les moments de l'intensité spécifique	38
2.2.2	Les magnitudes	43
2.3	Équation du transfert	45
2.3.1	Absorption et émission	45
2.3.2	L'équation du transfert	47
2.3.3	Les phénomènes de diffusion	50
2.3.4	L'équation du transfert en présence de diffusion	53
3	L'équilibre thermodynamique	58
3.1	Rayonnement de corps noir	58
3.1.1	Loi de Kirchhoff	58
3.1.2	Loi de Planck	60
3.1.3	Conséquences de la loi de Planck	62
3.1.4	Températures caractéristiques	66

3.2	Lois relatives à la matière	67
3.2.1	Distribution de Maxwell	67
3.2.2	Distribution de Boltzmann	68
3.2.3	Loi de Saha	69
4	Les raies spectrales	72
4.1	Coefficients d'Einstein	72
4.1.1	Absorption, émission spontanée, émission stimulée	72
4.1.2	Relations d'Einstein	73
4.1.3	Remarques	74
4.2	Emissivité, coefficient d'absorption, fonction source	75
4.2.1	Lien avec les coefficients d'Einstein	75
4.2.2	Fonction source	76
4.2.3	Coefficient d'absorption dans la raie	76
4.2.4	Effet MASER	77
4.3	Profil des raies	77
4.3.1	Élargissement Doppler	77
4.3.2	Élargissement naturel	80
4.3.3	Élargissement par collisions	82
4.3.4	Forme générale d'un profil (simple) de raie	83
4.3.5	Du profil de raie au profil de raie...	85
4.4	Quelques exemples de raies astrophysiques	87
4.4.1	La raie à 21 cm de l'hydrogène atomique neutre	87
4.4.2	Les raies rotationnelles du monoxyde de carbone	87
5	Les étoiles	90
5.1	Caractérisation des étoiles	90
5.1.1	Mesure des distances stellaires	91
5.1.2	Températures et couleurs	92
5.1.3	Composition chimique	93
5.1.4	Classification spectrale	95
5.1.5	Détermination des masses stellaires	97
5.1.6	Détermination des rayons stellaires	101
5.2	La structure stellaire	102
5.2.1	Les équations générales de la structure stellaire	102
5.2.2	Des temps caractéristiques	102
5.2.3	Équilibre hydrostatique	104
5.2.4	Équation d'état	106
5.2.5	Transport radiatif de l'énergie	106
5.2.6	Évolution temporelle de la composition chimique	110
5.2.7	Convection	112
5.3	Nucléosynthèse stellaire	114
5.3.1	Caractéristiques des noyaux atomiques	114
5.3.2	Énergie de liaison	114
5.3.3	Taux de réactions nucléaires	115
5.4	Évolution après la séquence principale	120
5.4.1	Stade géante rouge	120
5.4.2	Flash de l'hélium	120
5.4.3	Phases ultérieures	122

6	Les stades ultimes de l'évolution stellaire	123
6.1	La compacité	123
6.2	Intérêts de l'étude des objets compacts	124
6.2.1	Objets compacts et astrophysique des hautes énergies	124
6.2.2	Objets compacts et physique fondamentale	124
6.2.3	Objets compacts et cosmologie	125
6.3	Les populations d'objets compacts	126
6.3.1	Naines blanches et variables cataclysmiques	126
6.3.2	Étoiles à neutrons et pulsars	127
6.3.3	Trous noirs	129
7	Les naines blanches	133
7.1	Un bref historique de l'étude des naines blanches	134
7.2	Équation d'état de la matière	134
7.2.1	Quelques ordres de grandeur	134
7.2.2	La statistique de Fermi-Dirac	135
7.2.3	Densité d'états	135
7.2.4	Impulsion et température de Fermi d'un gaz de fermions	137
7.2.5	Pression de dégénérescence des électrons	139
7.2.6	Les autres pressions disponibles	141
7.3	Structure des naines blanches	142
7.3.1	Équations de structure	142
7.3.2	Les modèles polytropiques : équation de Lane-Emden	142
7.3.3	La masse de Chandrasekhar	144
7.4	Observations des naines blanches	145
7.4.1	Rayonnement thermique et classification spectrale	145
7.4.2	Relation masse-rayon observationnelle	146
7.4.3	Le refroidissement des naines blanches	147
8	Les étoiles à neutrons	148
8.1	Introduction	148
8.1.1	Ordres de grandeur	148
8.1.2	Un bref historique	148
8.2	Équation d'état	149
8.2.1	L'approche d'Oppenheimer et Volkoff	149
8.2.2	Interaction forte	149
8.3	Structure et masse maximale des étoiles à neutrons	150
8.3.1	Système T.O.V.	150
8.3.2	Solution relativiste - masse maximale	151
8.4	Observation des étoiles à neutrons	153
8.4.1	Le phénomène de pulsar	153
8.4.2	Modélisation de l'émission d'un pulsar	154
8.4.3	Ralentissement du pulsar	155
8.4.4	Champ magnétique du pulsar	156
8.4.5	Le diagramme période-dérive	156
8.4.6	Propagation de l'émission des pulsars	156
9	Les trous noirs	164
9.1	Historique	164
9.1.1	Une approche Newtonienne	164
9.1.2	Les trous noirs en relativité générale	165
9.2	L'espace-temps des trous noirs	165

9.2.1	Observateurs statiques, limite statique et horizon des évènements	165
9.2.2	Mouvement d'une particule matérielle dans l'espace-temps du trou noir	166
9.2.3	Le trou noir de Kerr	174
9.3	Rayonnement de Hawking	175
9.3.1	Évaporation d'un trou noir	175
9.3.2	Thermodynamique des trous noirs	175
10	Le milieu interstellaire	178
10.1	Introduction	178
10.1.1	Un système physique complexe	178
10.1.2	Des questions fondamentales, parfois encore ouvertes	179
10.2	Structure et composition du MIS	182
10.2.1	Un tour de la Galaxie	182
10.2.2	Bilans de masse	182
10.2.3	Les composantes de la physique interstellaire	183
10.2.4	Densités et bilan d'énergie du MIS	184
10.3	Le gaz interstellaire	184
10.3.1	Un milieu multiphasique et dynamique	184
10.3.2	Composition chimique	186
10.3.3	Un exemple de phase ionisée, les régions HII	186
10.3.4	Origine des phases du gaz atomique	190
10.4	Les grains de poussière	194
10.4.1	Structure	194
10.4.2	Interaction avec le rayonnement	194
10.4.3	La température des grains	195
10.4.4	Rôles thermodynamique et chimique	200
10.4.5	Dynamique des grains	201
10.4.6	Traceurs	202
10.5	Les rayons cosmiques	202
10.5.1	Nature et origine	202
10.5.2	Rôle dans le MIS	203
10.5.3	Observations	203
10.6	Les champs de rayonnement	204
10.6.1	Les différentes composantes	204
10.6.2	Rôles du rayonnement dans le MIS	207
10.7	Le champ magnétique interstellaire	209
10.7.1	Structure et origine	209
10.7.2	Rôle dans le MIS	209
10.7.3	Méthodes de mesure	210
10.8	La turbulence interstellaire	210
10.8.1	Signatures observationnelles	210
10.8.2	Origine et rôle	211
11	La formation des étoiles	212
11.1	Observations de la formation stellaire	212
11.1.1	Les sites de formation stellaire : associations OB, T et R	212
11.1.2	Classification des objets stellaires jeunes	213
11.1.3	Séquence d'évolution	216
11.1.4	Estimation des âges par le diagramme HR	217
11.1.5	Les amas ouverts	218
11.1.6	La fonction de masse initiale (IMF)	219
11.1.7	Observations des cœurs préstellaires	220

11.2	Des cœurs aux protoétoiles	222
11.2.1	Sphères isothermes	222
11.2.2	Instabilité gravitationnelle et approche de Jeans	224
11.2.3	Support rotationnel	225
11.2.4	Support magnétique	226
11.2.5	Temps de chute libre	230
11.2.6	La fragmentation hiérarchique	230
11.2.7	Afranchissement des supports magnétique et rotationnel	231
11.2.8	Premier cœur hydrostatique de Larson	232
11.3	L'évolution vers la séquence principale	234
11.3.1	La phase principale d'accrétion	234
11.3.2	Évolution dans le diagramme de Hertzsprung-Russell	236
11.3.3	La structure d'un système protostellaire	238
11.4	Les extrêmes : étoiles massives et naines brunes	239
11.4.1	Le cas des étoiles massives	239
11.4.2	Les naines brunes	242
12	La cosmologie	243
12.1	L'expansion de l'Univers : la loi de Hubble	243
12.1.1	Des univers-îles	243
12.1.2	La loi de Hubble-Lemaître	244
12.1.3	Équations d'Einstein	244
12.2	Les modèles Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker	246
12.2.1	Le principe cosmologique	246
12.2.2	Les équations de Friedmann	247
12.2.3	Les équations d'état	248
12.2.4	Taux d'expansion, paramètres de densité et densité critique	249
12.2.5	Les univers "poussières" ouverts et fermés	250
12.2.6	Univers à un seul fluide de courbure nulle	252
12.2.7	Univers Λ -CDM	253
12.2.8	Interprétation des observations	255
12.3	Le modèle du Big Bang et l'inflation	259
12.3.1	Le fond diffus cosmologique	259
12.3.2	La nucléosynthèse primordiale	262
12.3.3	L'inflation	264

Chapitre 1

L'observation astronomique

1.1 La lumière, messagère de l'astronomie

1.1.1 Fréquence, longueur d'onde, échelles d'énergie et de température

L'essentiel de l'information accessible aux astrophysiciennes et astrophysiciens pour leur permettre de comprendre les objets et phénomènes de l'Univers est porté par le **rayonnement électromagnétique**¹. Celui-ci couvre une vaste étendue en fréquence, des grandes ondes radio aux rayons gamma (Fig. 1.1), et chaque domaine du spectre fournit des renseignements complémentaires liés aux **échelles d'énergie** des phénomènes mis en jeu. Par les relations d'ordre de grandeur

$$E \sim h\nu \sim k_B T \sim hc/\lambda \quad (1.1)$$

on peut aussi associer à chaque domaine une plage de **températures caractéristiques**, dont on parlera au moment d'aborder le rayonnement du corps noir. Numériquement, dans des unités usuelles²,

$$E \sim 4.13 \cdot 10^{-4} \left(\frac{\nu}{1 \text{ GHz}} \right) \text{ eV} \quad T \sim 14 \left(\frac{\lambda}{1 \text{ mm}} \right)^{-1} \text{ K} \quad (1.2)$$

À titre d'exemples :

- ▶ Le rayonnement du **fond diffus cosmologique**, dans le domaine des **micro-ondes**, est associé à la température du bain de photons issu du découplage d'avec la matière à un redshift de $z \sim 1100$, et qui est aujourd'hui à $T_{\text{CMB}} \approx 2.725 \text{ K}$.
- ▶ Les **poussières interstellaires**, dont les températures sont typiquement de l'ordre de quelques dizaines de K, émettent un rayonnement dans le domaine **submillimétrique**.
- ▶ Le spectre de la lumière du **Soleil** se situe principalement dans le domaine **visible** ($0.4\text{-}0.8 \mu\text{m}$), et est directement lié à sa température de surface d'environ 6000 K.
- ▶ Le **gaz très chaud** ($\sim 10^7 \text{ K}$) dans le milieu intergalactique des amas de galaxies émet un rayonnement situé essentiellement dans le domaine des **rayons X**.

1. Pour un traitement de la théorie de Maxwell de l'électromagnétisme, on se reportera au début du chapitre suivant, ou mieux encore aux ouvrages de référence, notamment *Classical Electrodynamics* de J. D. Jackson [1].

2. Ce type d'écriture, où les grandeurs sont rapportées à des valeurs "typiques", est très répandue en astrophysique, car elle permet de voir rapidement les dépendances et les ordres de grandeur des quantités calculées, qui sont parfois difficilement accessibles à l'expérience quotidienne.

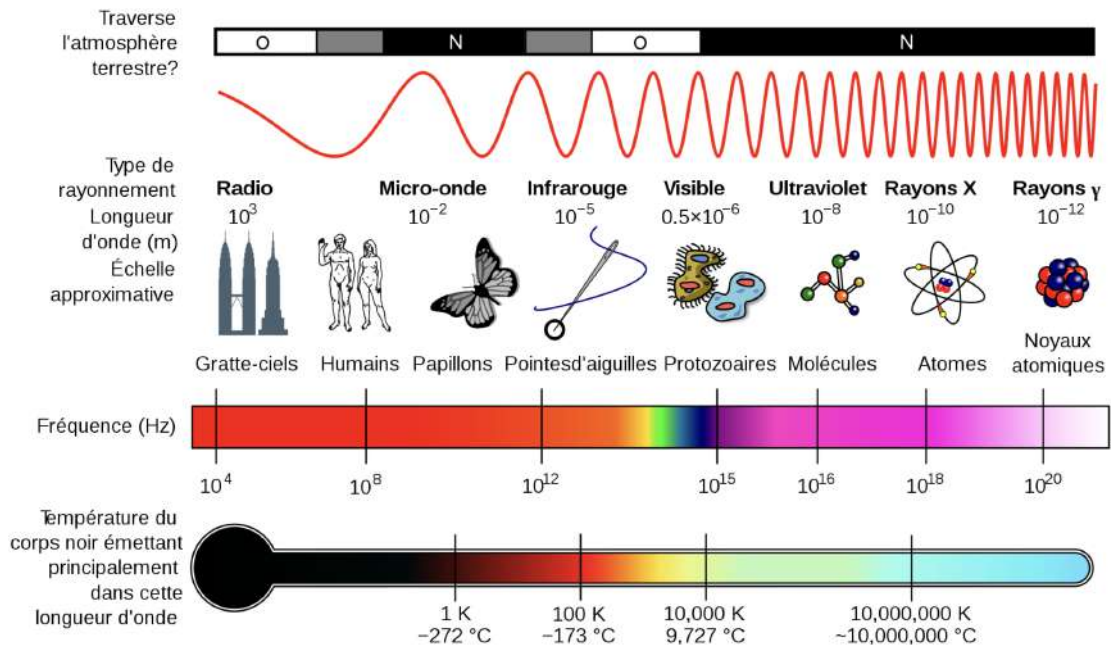


FIGURE 1.1 – Le spectre électromagnétique (Source : Wikimedia Commons)

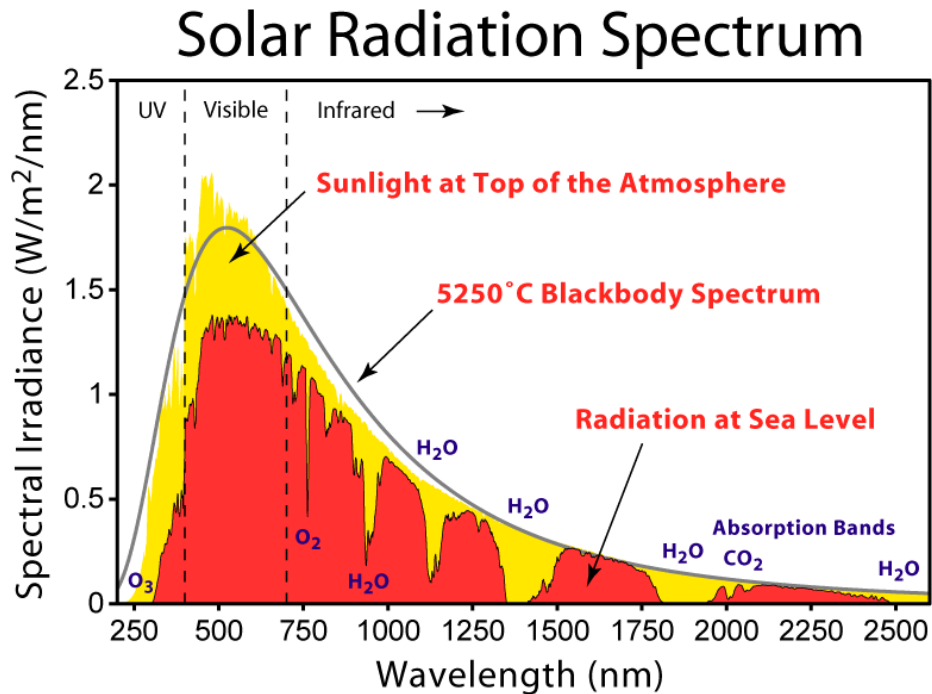


FIGURE 1.2 – Le spectre solaire (Source : Wikimedia Commons)

1.1.2 L'ouverture du spectre au-delà du visible

Des découvertes essentiellement faites en laboratoire

L'observation du ciel a naturellement commencé par le **domaine visible**, dans lequel le Soleil émet son maximum de rayonnement (Fig. 1.2). En 1800, William Herschel³ a l'idée de mesurer la température des différentes composantes de la lumière solaire vue au travers d'un prisme (Fig. 1.3). À sa grande surprise, il découvre que la température maximale est atteinte au-delà du rouge, obtenant ainsi la première observation du **rayonnement infrarouge**⁴.

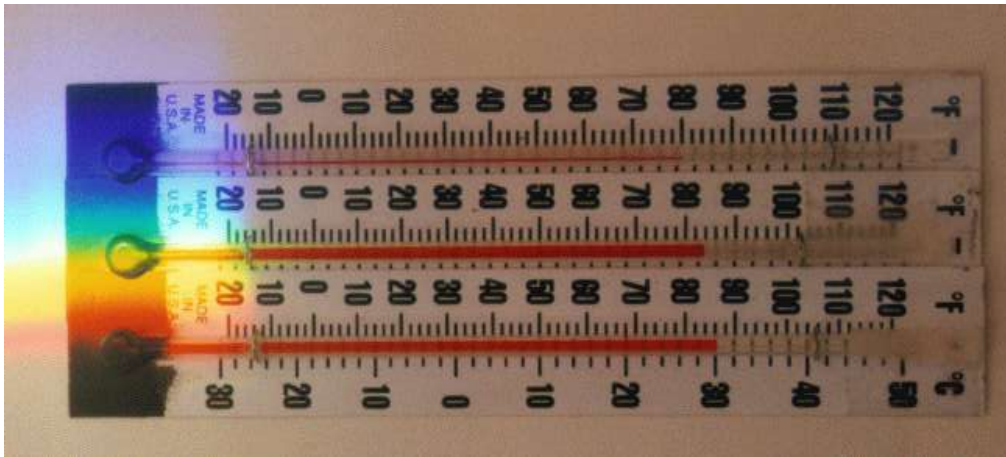


FIGURE 1.3 – **Présence de rayonnement infrarouge dans le spectre Solaire** (Source : Caltech <http://www.ipac.caltech.edu/Outreach/Edu/Herschel/backyard.html>)

L'année suivante, Johann Wilhelm Ritter⁵ cherche à explorer l'autre extrémité du spectre visible à la façon d'Herschel. Il constate que le chlorure d'argent, dont on sait qu'il noircit en présence de lumière et que cet effet est d'autant plus marqué que l'on se rapproche du bleu, continue de noircir au-delà du spectre visible. Il découvre ainsi, en laboratoire, ce qui sera plus tard appelé **rayonnement UV**.

Les travaux expérimentaux de Michael Faraday⁶ vers 1845 et l'unification théorique de l'électricité et du magnétisme par James Clerk Maxwell⁷ en 1873 apportent une base solide à l'exploration du reste du spectre, à commencer par la démonstration éclatante de la justesse de la **théorie électromagnétique** dans le domaine **radio** par Heinrich Hertz⁸ entre 1886 et 1888. L'ouverture du reste du spectre se fait encore dans des expériences de laboratoire : découverte des **rayons X** par Wilhelm Conrad Röntgen⁹ en 1895 et des **rayons γ** par Paul Villard¹⁰ en 1900.

De l'observation au sol à l'observation spatiale

La découverte des rayonnements d'origine cosmique dans les domaines autres que le visible et l'infrarouge proche commence en 1932, avec l'observation, par Karl Jansky¹¹, d'une **émission radio diffuse** à 20,5 MHz ($\lambda = 14,6$ m), dont la position du maximum coïncide avec la direction du centre

3. Hanovre, 15 novembre 1738 - Slough, 25 août 1822.
4. Il convient de noter que cette interprétation est biaisée par le caractère non-linéaire de la dispersion du prisme vis-à-vis de la longueur d'onde. L'observation d'Herschel n'en démontre pas moins l'existence du rayonnement infrarouge.
5. Samitz, 16 décembre 1776 - Munich, 23 janvier 1810.
6. Londres, 22 septembre 1791 - Londres, 25 août 1867.
7. Edimbourg, 13 juin 1831 - Cambridge, 5 novembre 1879.
8. Hambourg, 22 février 1857 - Bonn, 1^{er} janvier 1894.
9. Lennep, 27 mars 1845 - Munich, 10 février 1923.
10. Saint-Germain-au-Mont-d'Or, 28 septembre 1860 - Bayonne, 13 janvier 1934.
11. Norman, 22 octobre 1905 - Red Bank, 14 février 1950.

Galactique, dans la constellation du Sagittaire. Jansky a ainsi profité de l'autre fenêtre du spectre électromagnétique pour laquelle l'atmosphère terrestre est **transparente** au rayonnement (Fig. 1.4).

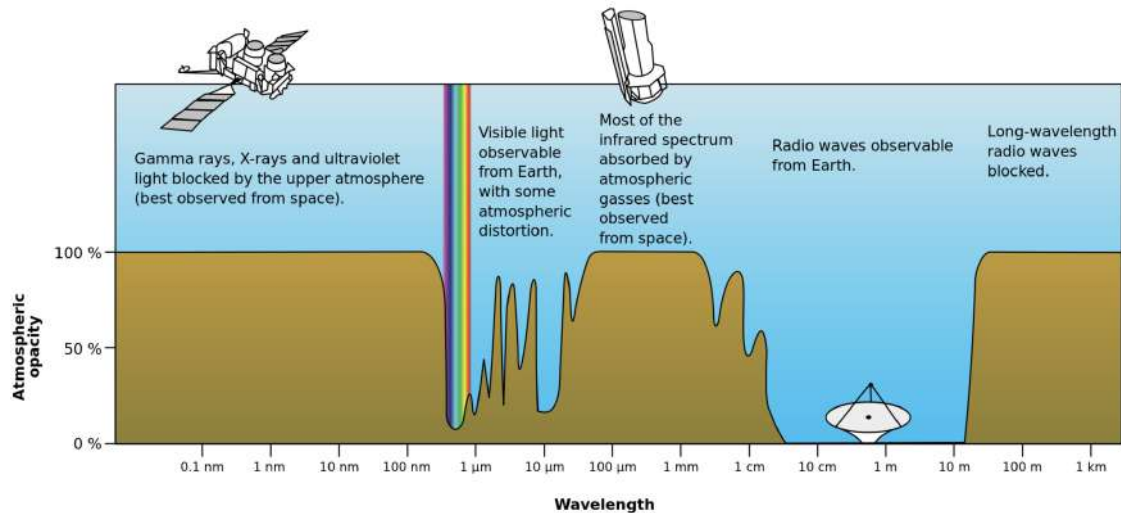


FIGURE 1.4 – L'opacité de l'atmosphère terrestre (Source : Wikimedia Commons)

Il a ensuite fallu attendre l'après-guerre, le développement des **ballons sondes** et des **fusées**, et l'avènement des **missions spatiales** pour observer le ciel dans les autres domaines du spectre, en raison précisément de l'opacité de l'atmosphère à ces fréquences. Cette opacité a des origines différentes suivant le domaine de fréquences :

- ▶ Aux **basses fréquences radio** (en deçà d'environ 10 MHz), l'**ionosphère** supprime la propagation des ondes¹².
- ▶ Dans la majeure partie du spectre **infrarouge** (sauf dans l'infrarouge proche¹³), c'est l'**absorption par les gaz** de l'atmosphère, en particulier par la vapeur d'**eau** et dans une moindre mesure par le **dioxyde de carbone**, qui la rend opaque (voir les raies indiquées sur la Fig. 1.2).
- ▶ Aux plus hautes fréquences, **les photons UV sont absorbés par l'ozone** O_3 (Fig. 1.2) et les photons d'énergie encore plus grande subissent une cascade d'interactions dans la haute atmosphère qui leur fait perdre une grande partie de leur énergie jusqu'à ce qu'ils soient absorbés dans l'UV.

Avec les missions spatiales, l'ouverture du spectre électromagnétique a permis non seulement de contraindre les modèles astrophysiques, mais également de découvrir de **nouveaux phénomènes**, comme les **binaires X** ou les **sursauts γ** (GRB, pour *Gamma-Ray Bursts*). Leur compréhension implique d'améliorer constamment les outils de l'observation, notamment en termes de **sensibilité** et de **résolutions spatiale, spectrale, et temporelle**, mais aussi en termes de nouvelles capacités, telles que la **polarimétrie**.

12. La pulsation de coupure est la **pulsation plasma**, en dessous de laquelle une onde ne peut se propager dans cette couche ionisée de l'atmosphère, située au-delà de 60 km d'altitude :

$$\omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{m_e \epsilon_0}} \quad (1.3)$$

où e est la charge élémentaire, m_e la masse de l'électron, n la densité des électrons libres et ϵ_0 la permittivité électrique du vide. Seules les ondes de pulsation $\omega > \omega_p$ peuvent se propager. Inversement, on utilise la réflexion totale des ondes basse fréquence sur cette couche de l'atmosphère pour transmettre des signaux radio à grande distance, au-delà de ce que permettrait la courbure terrestre.

13. NIR, pour *Near Infrared* (0,75-1,4 μm). On distingue aussi les domaines de l'infrarouge moyen (MIR, pour *Mid Infrared*, 3-8 μm) et l'infrarouge lointain (FIR, pour *Far Infrared*, 15-1000 μm)

1.1.3 Distribution spatiale

La propriété la plus immédiatement évidente du rayonnement électromagnétique d'origine cosmique est son **anisotropie** : le ciel n'est pas uniformément brillant ou sombre. On tire de l'analyse de la **distribution spatiale** de ce rayonnement une information sur la position des **objets ponctuels** (étoiles, corps du système solaire, etc ...), ce qui constitue le domaine de l'**astrométrie**. On en tire aussi une information sur la **distribution de brillance**¹⁴ des **objets étendus** (galaxies, nuages interstellaires, fond diffus cosmologique, etc ...). Pour visualiser cette information, c'est à dire représenter des images, plusieurs problèmes se présentent :

- La **projection** de la sphère céleste sur un plan. Ce problème est mineur lorsqu'on représente des régions de petites dimensions¹⁵, mais il devient critique dans le cas de l'imagerie à **grand champ**, et dans les représentations du ciel complet. On développe alors des projections comme celle de Mollweide, utilisée sur la Fig. 10.25.
- La **pixellisation**, c'est-à-dire l'échantillonnage de la distribution spatiale. Cette question doit être discutée en regard du **critère de Nyquist** vis-à-vis de la **résolution spatiale** de l'instrument, qu'on caractérise par la **fonction d'étalement de point** (PSF, pour *Point-Spread Function*), qu'on reverra un peu plus loin.
- L'**échelle de couleur** utilisée pour visualiser la brillance (échelles **monochromes ou non**, adoption de **coupures** inférieure et supérieure¹⁶, échelles **linéaires ou logarithmiques**, etc...).

Tous ces choix, et en particulier le dernier, rendent largement arbitraire l'aspect de l'image représentant la distribution spatiale d'un rayonnement d'origine astrophysique, mais en tout état de cause, pour faire de l'astrophysique, il faudra aller plus loin qu'une simple visualisation.

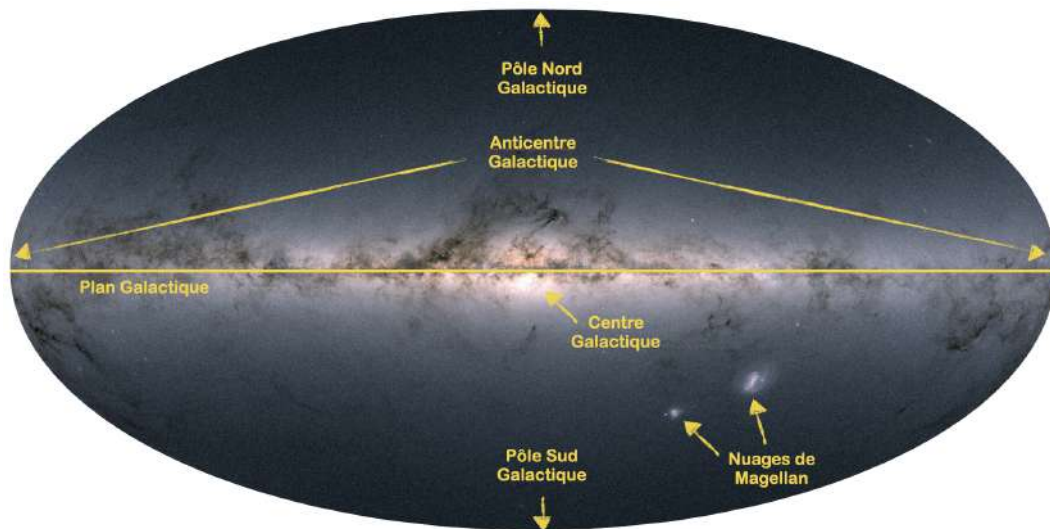


FIGURE 1.5 – Émission visible Galactique observée par Gaia, utilisant une projection de Mollweide permettant de représenter l'ensemble du ciel. Plan, centre, anticentre et pôles Galactiques sont indiqués, ainsi que les Nuages de Magellan, galaxies naines satellites de la nôtre. (Crédit : ESA/Gaia/DPAC)

14. On définira ce terme précisément au chapitre suivant.

15. Le plan tangent à la sphère diffère alors peu de la surface de la sphère. Il faut néanmoins prendre garde aux coordonnées utilisées, qui peuvent être **équatoriales, écliptiques, galactiques, ...**

16. Ce choix peut être dicté par des considérations fondamentales sur la **sensibilité** de l'instrument (niveau de bruit) et sa **dynamique** (saturation des capteurs).

1.1.4 Distribution spectrale

Le ciel n'apparaît pas identique à toutes les fréquences (voir par exemple les cartes de la mission *Planck*, Fig. 1.6), et la **variation de l'émission** lorsqu'on considère les différents domaines spectraux est intimement liée aux **phénomènes physiques mis en jeu** dans les objets observés. La forme globale du spectre fournit ainsi des informations précieuses sur les processus à l'origine du **rayonnement continu** (rayonnement **thermique**, rayonnement **synchrotron**, rayonnement *free-free* aussi appelé **bremstrahlung**, ...), comme on peut le voir sur la Fig. 1.7, qui représente la **distribution spectrale en énergie** (SED, pour *Spectral Energy Distribution*) du **champ de rayonnement interstellaire standard** dans notre Galaxie, montrant les différentes contributions à ce rayonnement.

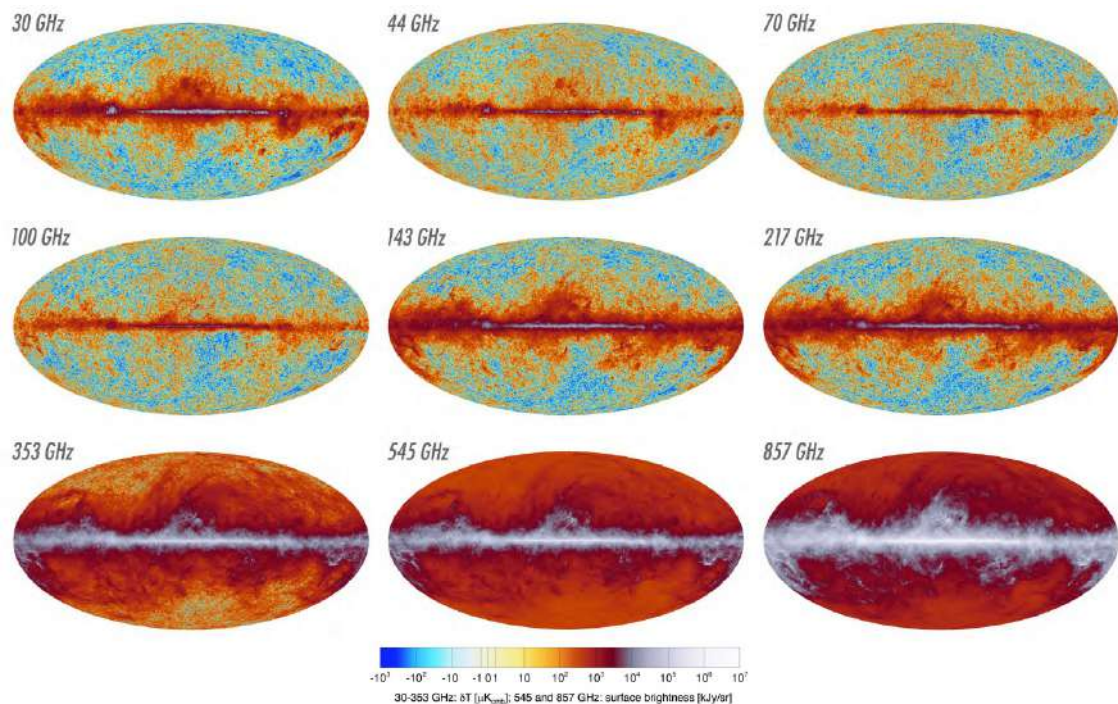


FIGURE 1.6 – Le ciel vu par *Planck* dans ses neuf bandes de fréquences. Figure issue de [2]

Les **signatures spectrales** (discontinuités, raies ...), qu'elles soient en **émission** (lors de la recombinaison ion-électron dans une région HII par exemple) ou en **absorption** (ions, atomes, molécules placés en avant-plan de la source observée) portent également une information extrêmement utile sur la **composition chimique** de la matière, son état d'**ionisation** ou d'**excitation**. À titre d'exemple, il convient d'admirer la richesse de la chimie détectée dans la nébuleuse d'Orion par la mission *Herschel* (Fig. 1.8). L'observation de ces raies spectrales permet ainsi par exemple d'établir une **cartographie de la distribution et de la cinématique**¹⁷ du gaz dans les galaxies ou les régions de formation d'étoiles.

Il faut enfin remarquer que les distributions de brillance représentent généralement l'émission reçue sur une **plage finie de fréquences**, car le rayonnement est observé au travers de **filtres** et que les détecteurs eux-mêmes ont une **bande passante finie**. La réponse fréquentielle d'un instrument peut ainsi présenter des formes assez complexes (Fig. 1.9). Les images **composites** (parfois appelées "en fausses couleurs") sont reconstituées à partir de plusieurs images obtenues dans des filtres différents.

17. Pour accéder à la cinématique, on utilise l'effet Doppler qui décale les raies en fonction de la composante de la vitesse sur la ligne de visée.

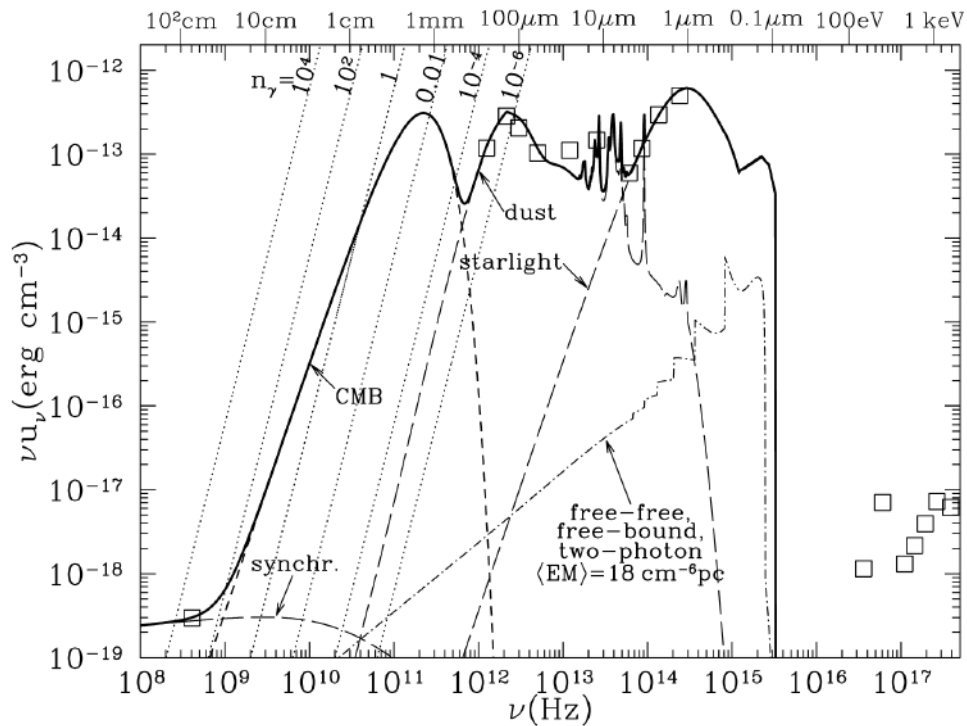


FIGURE 1.7 – Le champ de rayonnement interstellaire standard, montrant les différentes sources de rayonnement (synchrotron Galactique, fond diffus cosmologique, émission thermique des poussières, rayonnement stellaire, rayonnement de freinage et continua de recombinaison, ...). Figure issue de [3].

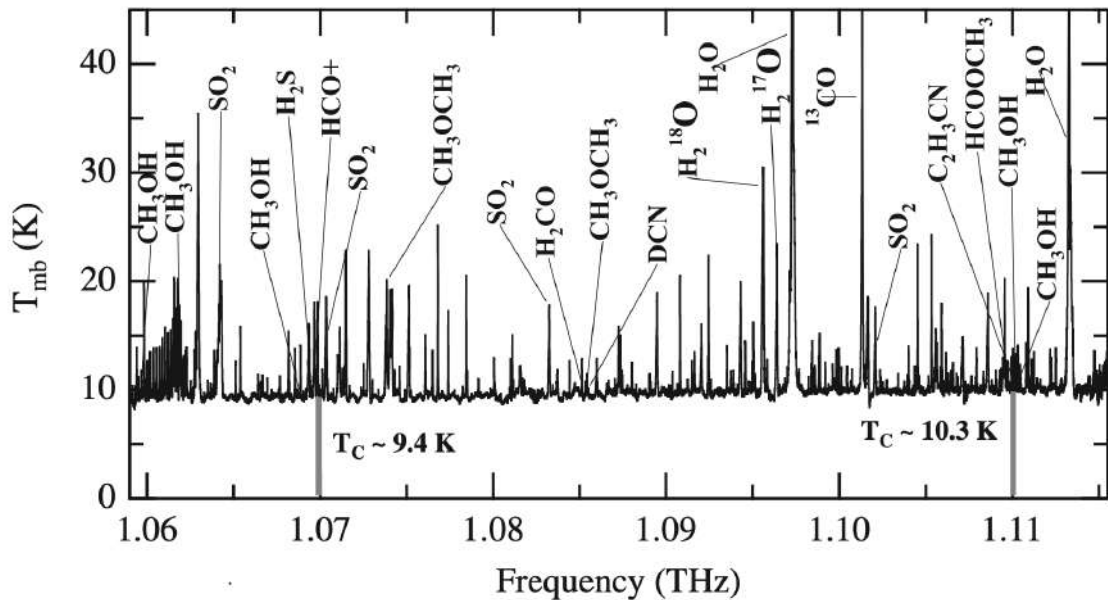


FIGURE 1.8 – Le spectre de raies observé par Herschel/HIFI en direction de la région de formation d'étoiles Orion KL. Figure issue de [4]

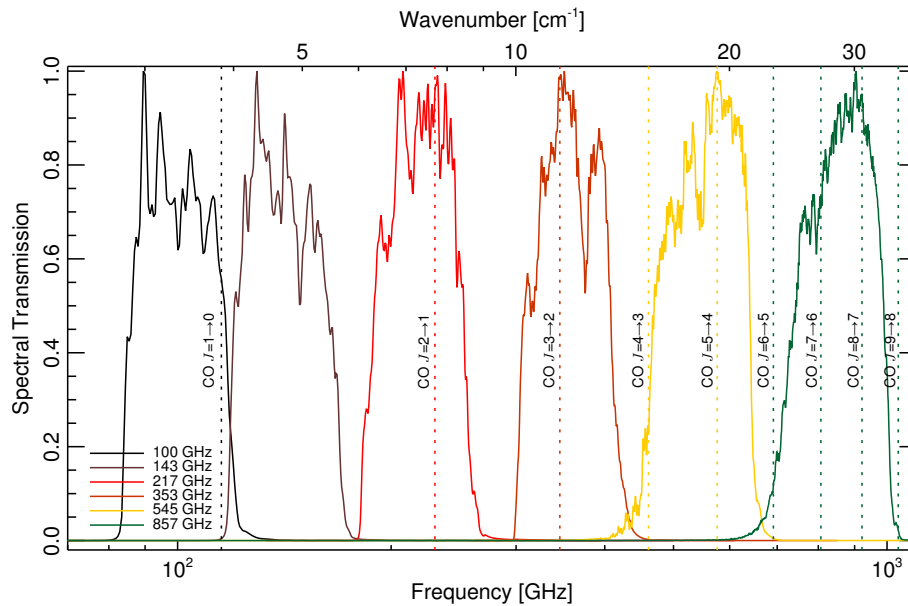


FIGURE 1.9 – Les bandes passantes de *Planck* HFI. Les pointillés verticaux montrent les positions des transitions rotationnelles principales du CO Galactique se situant dans les bandes de l'instrument. Figure issue de [5].

1.1.5 Propriétés de polarisation

Le rayonnement électromagnétique peut être **polarisé** (en général **linéairement**, et très **partiellement**). Cette polarisation peut être **liée aux processus d'émission eux-mêmes**, c'est notamment le cas du rayonnement **synchrotron**, mais elle peut aussi avoir pour origine **l'absorption sélective** d'un rayonnement selon une direction particulière (c'est ainsi que la lumière des étoiles traversant un nuage de poussières dans lequel règne un champ magnétique acquiert une polarisation linéaire partielle [6]) ou encore un processus de **polarisation par diffusion** (c'est le cas par exemple du rayonnement stellaire UV ou visible diffusé par les grains d'un **disque protoplanétaire**). Avec les développements instrumentaux, cet aspect du rayonnement, peu étudié jusqu'à présent, est amené à constituer une part importante de l'astrophysique dans les années à venir.

1.1.6 Variabilité temporelle

Les sources astrophysiques sont souvent très **stables dans le temps**. Pour les anciens, tout ce qui se rapportait au ciel était considéré comme "immuable" par nature, à l'opposé des phénomènes "terrestres", souvent éphémères¹⁸. L'observation des **supernovæ** SN 1572 et SN 1604 a ébranlé cette certitude. Maintenant, on sait que de nombreux objets donnent lieu à des **variations de brillance, de couleur, ou de vitesse**. Certains objets comme les **sursauts gamma** ou les **sursauts radio rapides** (FRB, pour *Fast Radio Bursts*) présentent une variabilité extrême et sont tellement éphémères que leur existence même est restée longtemps méconnue. Evidemment, la notion de variabilité dépend beaucoup de la sensibilité qui peut être atteinte : à très haute sensibilité, le flux de nombreuses étoiles varie au cours du temps, et l'étude de ces fluctuations et de leur spectre de fréquences temporelles constitue **l'astérosismologie**, qui fournit des renseignements précieux sur la **structure interne des étoiles**. Les variations de flux non imputables aux étoiles elles-mêmes peuvent permettre de détecter des **systèmes exoplanétaires** par la méthode des transits, comme sur la Fig. 1.10.

18. Le mouvement des planètes, qui semble erratique dans un système géocentrique, leur conférait d'ailleurs un statut intermédiaire.

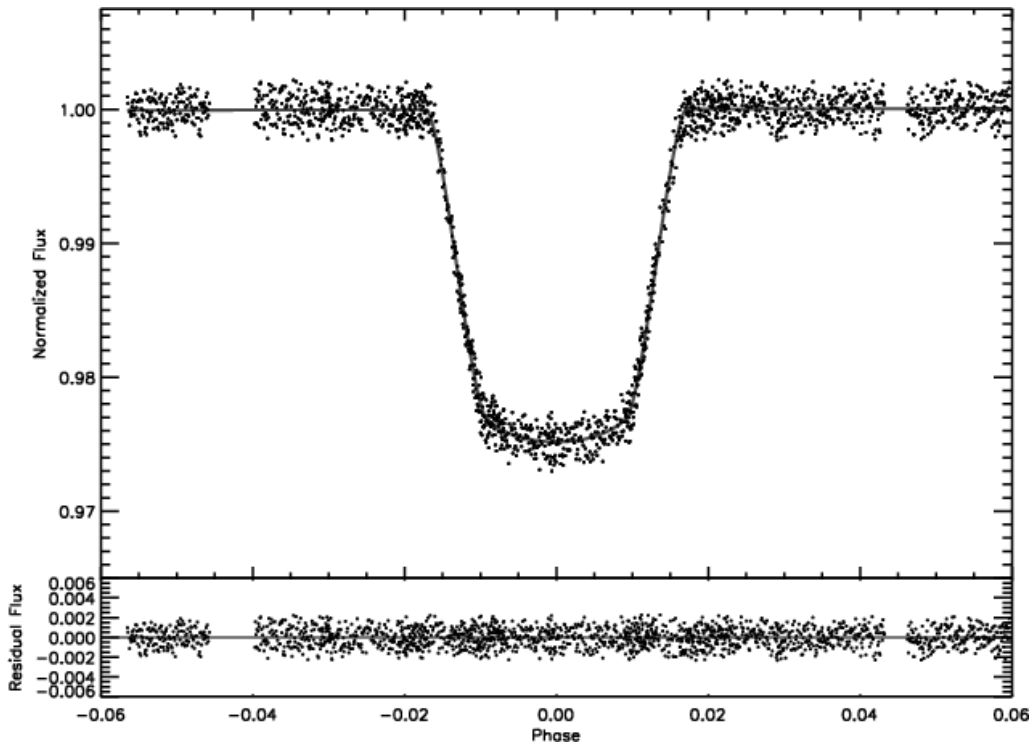


FIGURE 1.10 – **Courbe de lumière de l'étoile HD189733.** La (faible) chute du flux observé est attribuée au passage d'une planète entre l'étoile et l'observateur. Figure issue de [7].

1.2 Télescopes et détecteurs

Le **télescope**¹⁹ est le premier élément du système d'observation des sources de rayonnement astrophysiques. Son rôle est de collecter les photons et de former les images dans un **plan focal** où les **détecteurs (spectromètres, bolomètres, polarimètres)** permettent de transformer ce signal lumineux en un signal électrique manipulable et analysable.

1.2.1 Les images géométriques

L'**optique géométrique** est une première approximation raisonnable permettant de comprendre la formation des images au travers d'un télescope. Le premier élément de celui-ci est le **miroir primaire**, qui en détermine la capacité maximale de collection des photons. Il est suivi d'autres éléments (miroirs secondaires, lames séparatrices, filtres, ...) avant que le rayon lumineux aboutisse au plan focal. Le but de la configuration instrumentale est d'aboutir à un **stigmatisme**²⁰ le plus rigoureux²¹ possible sur le plus grand **champ** possible, c'est à dire la plus grande plage de directions d'incidence par rapport à l'axe du télescope pour lesquelles on obtient une image suffisamment nette. Il faut noter que certains télescopes utilisent d'ailleurs un "plan" focal courbé, qui peut augmenter sensiblement le champ.

La Fig. 1.11 présente quelques configurations usuelles. Aucune n'est exempte d'**aberrations**, à savoir le fait que l'image d'une source ponctuelle n'est pas un point. On explore usuellement les propriétés

19. Il convient de distinguer le télescope, où l'élément collecteur est un miroir, des **lunettes astronomiques** dont les éléments d'optique sont des lentilles.

20. C'est-à-dire qu'un objet ponctuel donne une image ponctuelle.

21. Le **paraboloïde de révolution** est la surface qui permet ce stigmatisme rigoureux pour un point objet situé sur son axe, mais pas pour un objet hors axe. Il faut donc un système optique plus complexe.

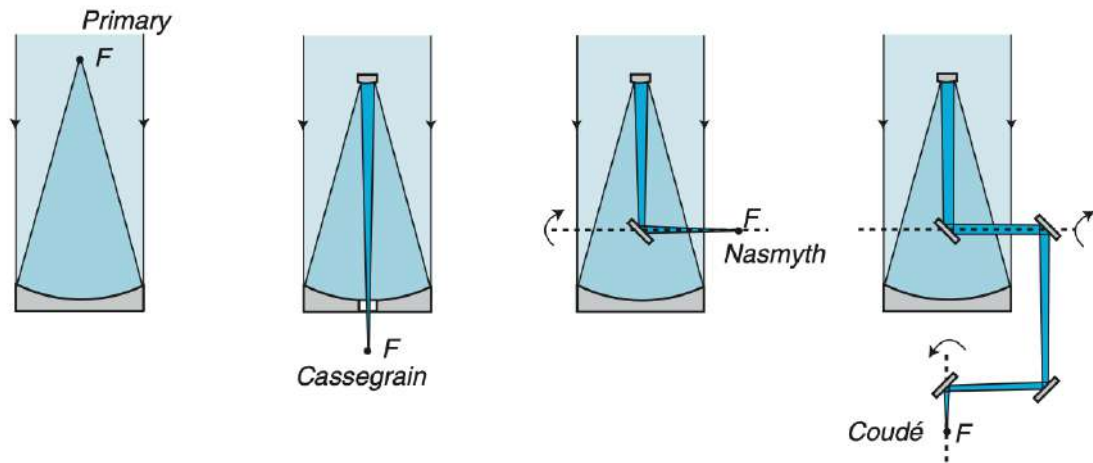


FIGURE 1.11 – Quelques configurations usuelles de télescopes. Figure issue de [8].

d'un système optique, existant ou en cours de conception, par des simulations numériques de **tracé de rayons** de l'entrée du télescope au plan focal.

1.2.2 La fonction d'étalement de point

La diffraction

Même dans le cas d'un stigmatisme rigoureux en optique géométrique, le phénomène de **diffraction** causé par les **irrégularités** des éléments optiques et par la **taille finie** des ouvertures provoque un étalement de l'image d'une source ponctuelle dans le plan focal. Cet effet apparaît lorsque les défauts de surface deviennent comparables à la longueur d'onde. La modélisation la plus simple de cet effet consiste à considérer la **diffraction de Fraunhofer** d'une onde électromagnétique plane, monochromatique de longueur d'onde λ , et d'intensité I_0 , au travers d'une ouverture circulaire de diamètre D (Fig. 1.12). Notant θ l'angle par rapport à la direction de pointé du télescope, la répartition de l'intensité dans le plan focal prend la forme d'une **tache d'Airy**, représentée sur le panneau de gauche de la Fig. 1.13. Elle fait intervenir la fonction de Bessel de première espèce, J_1 , avec

$$I(\theta) = 4I_0 \left[\frac{J_1(u)}{u} \right]^2 \quad u = \frac{\pi D \sin \theta}{\lambda} \quad (1.4)$$

Cette distribution de l'intensité dans le plan focal pour une source ponctuelle dans l'axe du télescope s'appelle la **fonction d'étalement de point** (PSF, pour *Point-Spread Function*), ou encore **réponse impulsionnelle spatiale**. Elle prend des formes différentes suivant l'ouverture et les éléments optiques (y compris les détecteurs) du télescope. À titre d'exemple, les **aigrettes** à six branches principales de la PSF du télescope spatial JWST (Fig. 1.13, à droite) sont caractéristiques²².

L'effet de la turbulence atmosphérique

Pour les télescopes au sol, la présence d'une masse d'air s'interposant entre le rayonnement des sources astrophysiques et le système d'observation présente des difficultés particulières. L'atmosphère est en effet **hétérogène**, et la répartition spatiale de sa densité au dessus du télescope **varie sur des échelles de temps assez courtes**, de l'ordre de la seconde, et de manière **turbulente**, donc imprévisible. Ainsi, un **front d'onde** incident, plan en haut de l'atmosphère, est rapidement **déformé**, du fait que

22. Elles sont liées à la structure hexagonale des éléments de miroir du JWST.

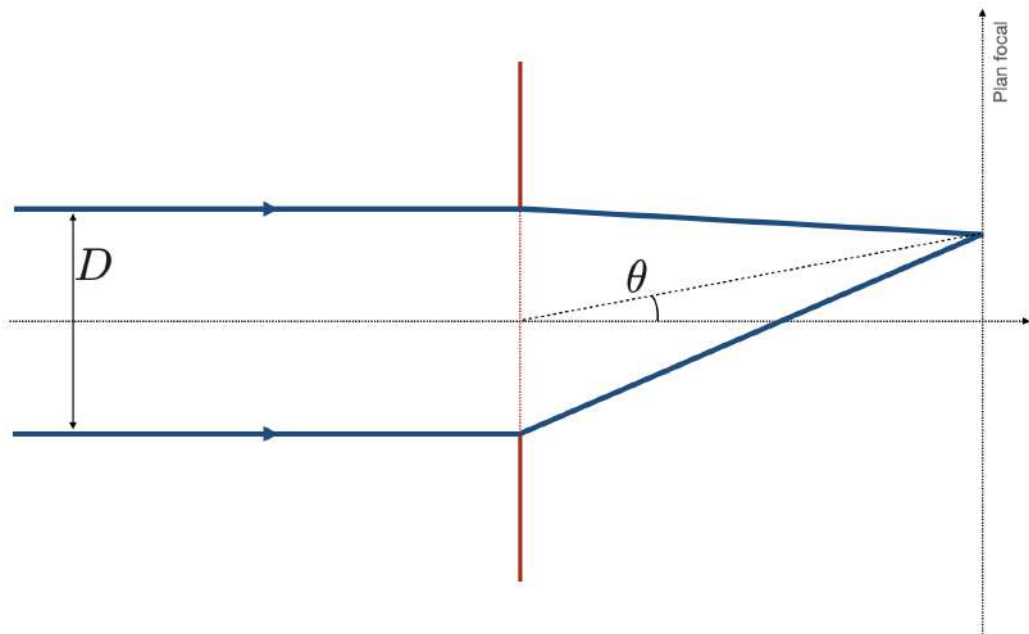


FIGURE 1.12 – **Diffraction de Fraunhofer** pour une ouverture circulaire parfaite de diamètre D .

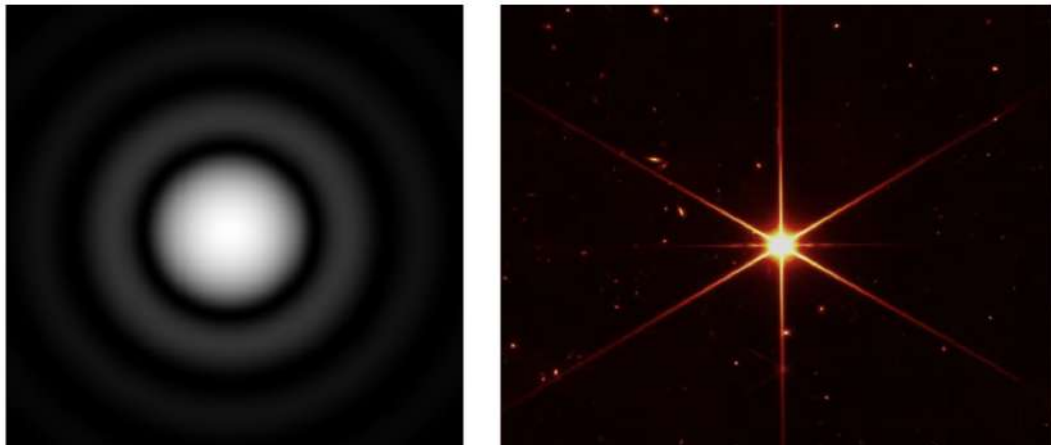


FIGURE 1.13 – **Fonctions d'étalement de point** pour une ouverture circulaire parfaite donnant une tache d'Airy (à gauche) et pour le JWST (à droite, *Crédit : NASA/STScI*).

chaque rayon subit un **déphasage**²³ différent. Cet effet provoque une **distortion de la PSF**, comme le montre la Fig. 1.14. On la mesure au travers du **seeing**, qui est la valeur de la largeur à mi-hauteur de la PSF, usuellement indiquée en seconde d'arc. Les meilleures conditions dans les observatoires au sol en altitude donnent environ $0.25''$. Il serait alors illusoire d'espérer observer des structures plus petites angulairement que cette valeur de seeing.

Afin de corriger ce défaut, les télescopes actuels font appel à l'**optique adaptative**, un système par lequel les miroirs sont déformés de manière active, asservie à la mesure du front d'onde par des

23. On rappelle que la **vitesse de phase** s'écrit $v_\phi = c/n$, où n est l'indice optique, variable donc spatialement et temporellement dans l'atmosphère.



FIGURE 1.14 – **Effet de la turbulence atmosphérique sur la PSF.** L'échelle de Danjon qualifie le degré de turbulence, du plus faible (V) au plus élevé (I). [Source : <https://shorturl.at/aovS3>]

senseurs. La déformation du miroir permet de corriger en temps réel les déformation du front d'onde incident et de s'affranchir ainsi fortement de la turbulence atmosphérique (Fig. 1.15).



FIGURE 1.15 – **Optique adaptative.** Schéma de principe de la déformation du miroir (à gauche, Source : <https://shorturl.at/filxZ>) et comparaison avec et sans optique adaptative sur l'observation d'un amas globulaire (à droite, Crédit : ESO).

Sources ponctuelles et sources étendues

La PSF est caractérisée par une certaine taille angulaire θ_{PSF} , typiquement sa **largeur à mi-hauteur**. Par exemple, pour la simple tache d'Airy, on note que celle-ci vaut

$$\theta_{\text{PSF}} \approx \frac{\lambda}{D} \quad (1.5)$$

pour une ouverture de diamètre D et un rayonnement de longueur d'onde λ . On parle à propos de cette quantité de **résolution spatiale** ou plus précisément de **résolution angulaire**. Cette taille caractéristique permet de distinguer d'une part les **sources ponctuelles**, dont la taille angulaire est $\theta < \theta_{\text{PSF}}$, et les **sources étendues**, pour lesquelles $\theta > \theta_{\text{PSF}}$. Les sources ponctuelles apparaissent dans l'image avec une répartition de l'intensité qui suit la PSF, comme le montre la Fig. 1.13 (droite). Les sources étendues, quant à elles, donnent une distribution dans le plan focal qui est la **convolution** de leur véritable distribution de brillance par la PSF. Cela est dû aux propriétés de la **transformée de Fourier**.

1.2.3 Les différents types de détecteurs

Dans le plan focal, on place les **détecteurs** qui vont recueillir les photons pour convertir le signal lumineux en signal électrique²⁴. Plusieurs technologies sont disponibles, dépendant notamment du

²⁴. Il convient de remarquer qu'un élément essentiel n'est pas mentionné ici, à savoir le système qui permet de **coupler** efficacement le télescope aux récepteurs : fibres optiques, cornets, amplificateurs, ...

domaine spectral considéré, faisant appel soit à des méthodes de **détection des "quanta"**, soit à la **détection du champ électrique**.

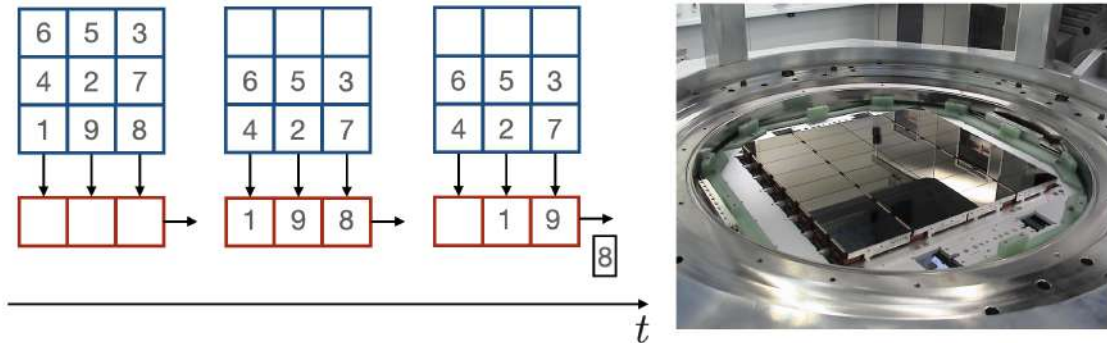


FIGURE 1.16 – **Matrices CCD**. Principe de lecture (à gauche) et matrice CCD (268 Megapixels) OmegaCAM du *Very Large telescope* (ESO/VLT).

Matrices CCD

Dans le visible, les **matrices CCD** (pour "Charge-Coupled Device") ont pris le pas sur les plaques photographiques et les **photomultiplicateurs** au cours des années 1990. Leur principe repose sur l'**effet photoélectrique** dans les solides, c'est-à-dire l'arrachement d'un électron par apport d'énergie radiative. Celui-ci est mis en application dans une multitude de petits récepteurs individuels, chacun d'eux constituant un **pixel**, déposés sur un monocristal de silicium. Lorsqu'un des pixels est éclairé, il produit des charges électriques qui sont stockées localement pendant un certain temps, puis transférées au travers d'une **électronique de lecture** via l'application de potentiels adéquats²⁵. La Fig. 1.16 illustre ce principe et montre un exemple de matrice CCD utilisée en astronomie (celle d'OmegaCAM installée au foyer du VLT Survey Telescope).

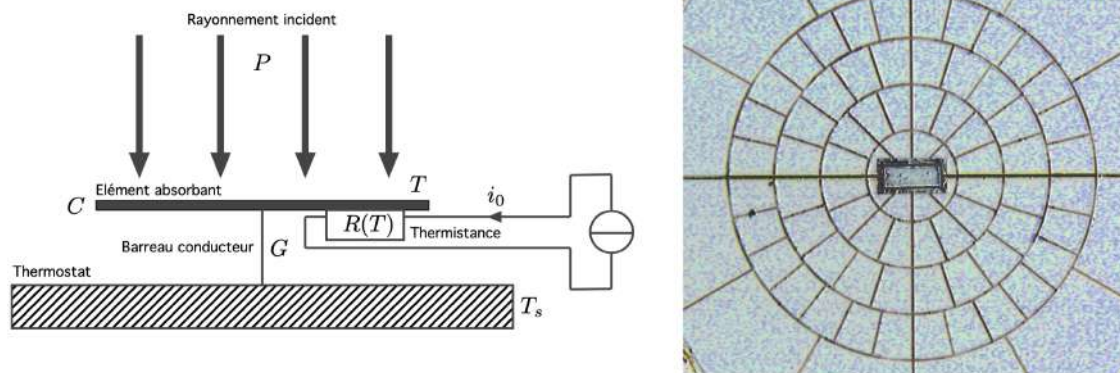


FIGURE 1.17 – **Bolomètres**. Schéma de principe (à gauche) et exemple d'un bolomètre à 143 GHz de l'instrument HFI sur la mission *Planck* (Source : <https://shortur1.at/jvCG7>).

25. Par des tensions appliquées entre deux cellules adjacentes, on fait migrer les charges accumulées sur un pixel au pixel adjacent, d'abord sur une ligne, puis toute la ligne vers la sortie, où elles sont lues séquentiellement, ce qui donne la mesure du flux lumineux reçu dans chaque pixel.

Bolomètres

À plus basse fréquence, dans l'infrarouge et le millimétrique, on utilise des **bolomètres**, qui sont des détecteurs fondés sur le principe de la mesure de l'**échauffement d'un solide** suite à l'absorption d'un photon. La mesure de cet échauffement est faite à l'aide d'une **thermistance**, un dipôle semiconducteur dont la résistance dépend très sensiblement de la température. Le schéma de principe de ce type de détecteur est présenté sur la Fig. 1.17 (à gauche). La partie droite de la figure présente une photographie de l'un des bolomètres "spiderweb" de l'instrument HFI (*High-Frequency Instrument*) à bord de la mission *Planck*, fonctionnant à 143 GHz. L'élément absorbant est la grille qui donne son nom au type de bolomètre, et le dispositif rectangulaire au centre est le circuit de mesure de la température.

Détecteurs hétérodynes

À basses fréquences, dans le millimétrique et au-delà, la variation temporelle du champ électrique est suffisamment lente pour qu'on puisse en récupérer la **phase** et non plus seulement l'amplitude²⁶. C'est le principe de la **détection hétérodyne**, utilisée par exemple dans les télescopes et interféromètres radio comme ALMA ou NOEMA (Fig. 1.18). Un **oscillateur local** fournit un signal de fréquence ν_0 très précise et de phase connue, qui est **mélangé**, c'est-à-dire multiplié, au signal astrophysique de fréquence ν , grâce à des systèmes de type **jonctions SIS (superconducteur-isolant-superconducteur) à effet tunnel**. Le signal résultant a les propriétés du signal astrophysique (amplitude et phase), mais est décalé à plus basse fréquence encore, soit $|\nu - \nu_0|$, et peut être numérisé pour être stocké et analysé.

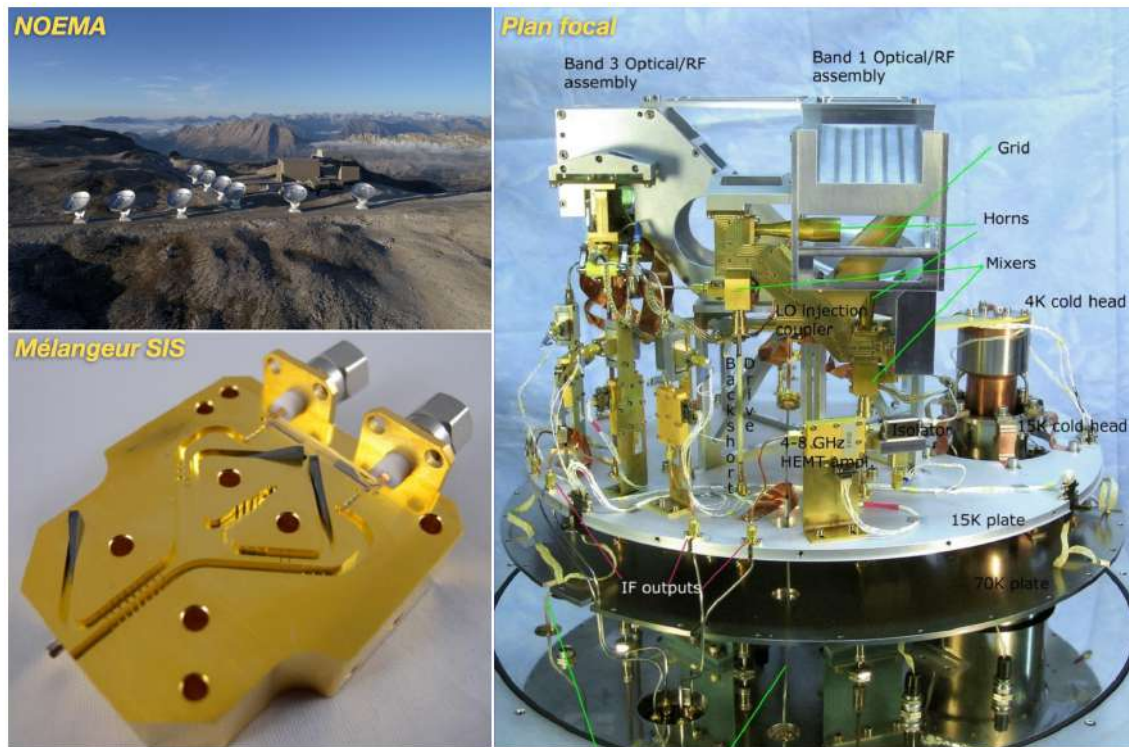


FIGURE 1.18 – **NO**rthern **EX**tended **M**illimetre **A**rray (**NOEMA**). Vue d'ensemble de l'interféromètre (en haut à gauche), dispositif placé au plan focal d'une antenne (à droite) et mélangeur SIS en bande 1, soit 72 – 116 GHz (en bas à gauche), *Crédit : IRAM*.

²⁶. On rappelle par exemple que les détecteurs optiques, et nos yeux en particulier, sont sensibles à l'**intensité** $I \propto \langle E^2 \rangle$, **moyenne temporelle du carré du champ**, ce qui élimine l'information de phase.

Scintillateurs

À l'autre bout du spectre, aux hautes énergies, la détection des photons présente la particularité que ceux-ci sont **très peu nombreux**, et portent chacun, par définition, une énergie $\varepsilon = h\nu$ très importante. Il est donc essentiel de pouvoir détecter même un très faible flux de photons. C'est pourquoi on utilise des **scintillateurs**, dont le principe repose sur la production, dans un matériau comme un cristal d'iodure de sodium, de particules ionisantes par un seul photon énergétique (par **effet photoélectrique**, par **diffusion Compton**, ou encore par **production de paires**). Ces particules ionisantes vont exciter des atomes dans le matériau, qui vont se désexciter en émettant des photons de plus basse énergie. Ceux-ci vont ensuite arracher des électrons à une **photo-cathode**, premier élément d'un **tube photomultiplicateur**, comme le montre la Fig. 1.19 (à gauche). Une cascade d'électrons secondaires est produite au travers de nombreuses **dynodes**, sous une haute tension permettant leur accélération. Le courant mesuré à l'**anode** finale est extrêmement sensible au flux de photons à haute énergie incident.

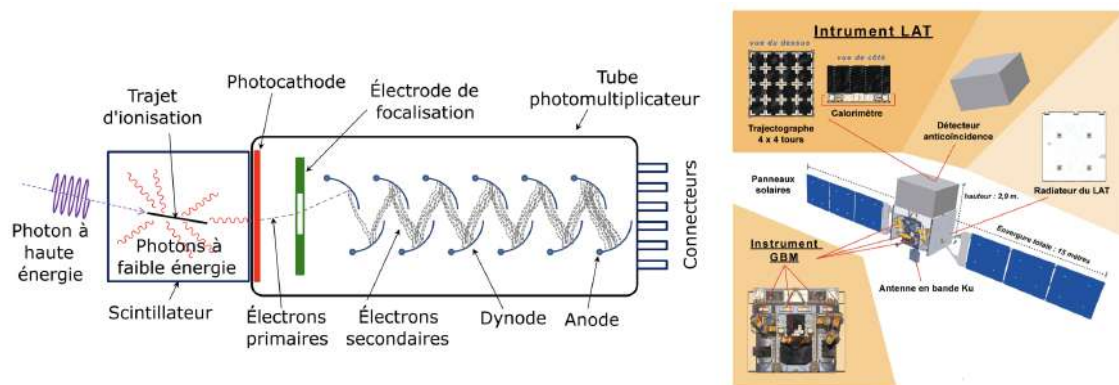


FIGURE 1.19 – **Détecteurs du rayonnement de haute énergie**. Schéma de principe d'un système scintillateur-photomultiplicateur (à gauche, *Crédit : Wikimedia Commons*) et satellite Fermi, dont l'instrument GBM est composé d'une quinzaine de scintillateurs (à droite, *Crédit : Wikimedia Commons*).

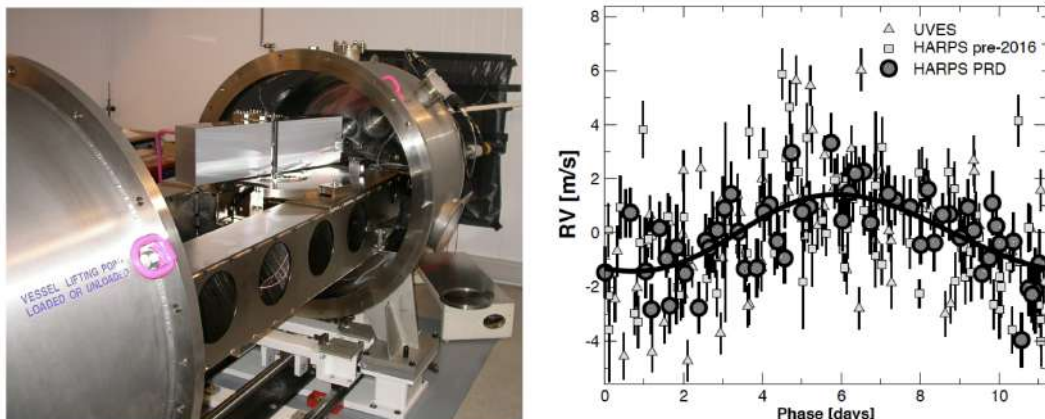


FIGURE 1.20 – **Spectromètre HARPS**. Photographie du dispositif montrant le réseau en réflexion (à gauche, *Crédit : ESO/HARPS*) et mesures de la vitesse radiale de l'étoile Proxima Centauri avec (notamment) HARPS. Les données (représentées par les cercles, carrés et triangles) ont été prises au cours de 16 ans d'observations, et compilées pour faire ressortir, par ajustement (courbe en traits pleins), le signal périodique associé à la présence d'une planète [9].

Spectromètres

Les détecteurs placés au foyer des télescopes présentent une **bande passante** potentiellement assez large, mais la répartition spectrale de la lumière reçue recèle une information cruciale sur les processus physiques mis en jeu dans les objets astrophysiques. On a donc recours à des systèmes de **spectrométrie**, pour disperser la lumière et mesurer son intensité longueur d'onde par longueur d'onde. Plus précisément, on définit la **résolution spectrale** d'un instrument comme le rapport

$$\mathcal{R}_\lambda = \frac{\lambda}{\delta\lambda} \quad (1.6)$$

entre la longueur d'onde observée λ et le plus petit écart en longueur d'onde $\delta\lambda$ décelable. L'instrument HARPS (*High Accuracy Radial velocity Planet Searcher*), présenté sur la Fig. 1.20 et installé au foyer du télescope de 3.6 m de diamètre de l'ESO (Observatoire de La Silla, Chili), est un exemple de spectromètre de haute résolution ($\mathcal{R}_\lambda = 115000$), fonctionnant sur le principe du **réseau de type échelle**. L'élément de base de l'instrument est un **réseau de diffraction** fonctionnant en réflexion (Fig 1.21). Le réseau est **blazé** pour présenter un maximum de luminosité dans un ordre $q \neq 0$. En sortie du réseau, on place une lentille et une **barrette CCD**, qui sert de détecteur, dans le plan focal de cette lentille, chaque élément de la barrette recevant alors une partie de la lumière dispersée par le réseau, correspondant donc à une petite partie du spectre²⁷. Ces systèmes ont permis la détection de nombreuses **exoplanètes** en utilisant la **méthode des vitesses radiales** (Fig. 1.20, droite).

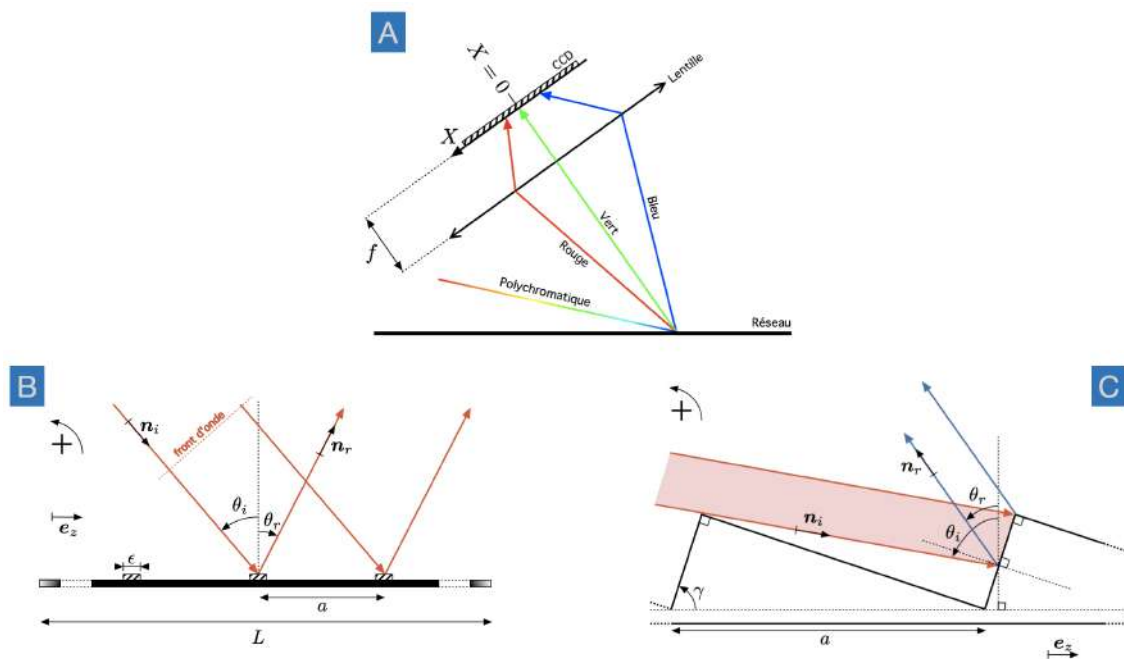


FIGURE 1.21 – **Spectromètre échelle**. Principe de la dispersion avec un système réseau-lentille-CCD (A), schéma d'un réseau en réflexion (B) et motif de réseau en réflexion blazé (C).

27. En réalité, il y a **recouvrement des ordres**, de sorte que chaque pixel est en réalité éclairé par un ensemble **discret** de composantes de longueurs d'onde λ_q . Il est donc nécessaire de disposer un **second élément disperser** entre le réseau échelle et le détecteur, qui est typiquement un **grism**, c'est-à-dire un prisme auquel on accole un réseau de diffraction en transmission. Pour séparer les ordres qui se recouvrent, on place ce grism de telle sorte qu'il disperse la lumière perpendiculairement à la direction de dispersion du réseau échelle. C'est ce qu'on appelle une **dispersion croisée**. Le détecteur est alors un ensemble de barrettes CCD, qui peuvent recueillir un spectre complet comme celui de la Fig. 1.22.

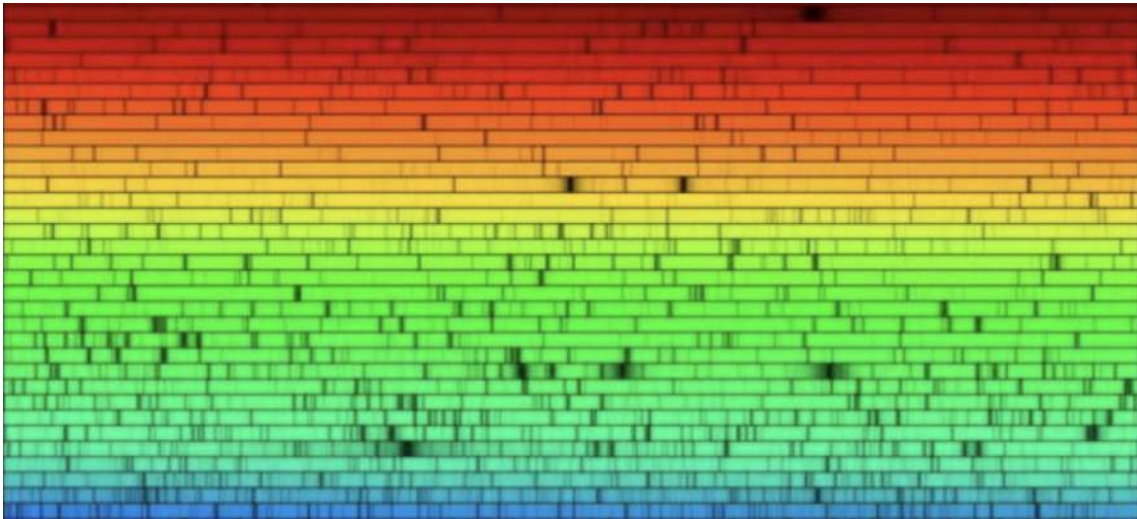


FIGURE 1.22 – **Spectre stellaire obtenu avec un réseau de type échelle.** On y distingue clairement des raies d'absorption permettant de classifier l'étoile (Crédit : Australia National University).

1.2.4 Interférométrie

Dans les meilleures conditions imaginables, la résolution spatiale d'un télescope est néanmoins limitée par la diffraction, avec $\theta_{\text{PSF}} \approx \lambda/D$. Pour pouvoir séparer des objets très proches dans le ciel (comme une planète et son étoile), ou pour distinguer des détails très fins d'une source, on a recours à l'**interférométrie**, c'est-à-dire à la combinaison des signaux reçus par les différentes antennes d'un **réseau** (des exemples sont montrés sur la Fig. 1.23). Tout se passe alors (presque) comme si l'on disposait d'un télescope dont le diamètre était égal à la plus grande séparation D_{max} entre deux éléments du réseau,

$$\theta_{\text{eff}} \approx \frac{\lambda}{D_{\text{max}}} \quad (1.7)$$

ce qui est potentiellement nettement plus petit que θ_{PSF} . La façon dont les signaux sont combinés dépend du domaine spectral : en **optique** et en **infrarouge**, on combine les faisceaux lumineux captés par les différents télescopes en insérant des **lignes à retard** pour assurer la **cohérence temporelle**. La superposition, c'est-à-dire l'addition, des champs électriques de haute fréquence produit des interférences, et on mesure l'intensité du signal résultant (moyenne temporelle du carré du champ). En radioastronomie, comme on l'a dit plus haut, on peut avoir accès pour chaque antenne non seulement à l'amplitude mais aussi à la phase du signal reçu, converti en tension électrique. On combine ces tensions en les multipliant, ce qui fournit ce qu'on appelle des **visibilités**, qui échantillonnent la transformée de Fourier de la distribution de brillance sur le ciel. On reconstruit alors l'image par transformée de Fourier inverse²⁸. On peut même procéder à cette combinaison *a posteriori*, en enregistrant le signal reçu par chaque antenne. C'est le principe de l'**interférométrie à très longue base** (VLBI, pour *Very Long Baseline Interferometry*), dont l'un des succès éclatants des dernières années est la production des **premières images directes de l'environnement immédiat de trous noirs supermassifs** au centre des galaxies (Fig. 1.24).

²⁸. C'est bien entendu un peu plus compliqué que cela, puisque l'échantillonnage du plan de Fourier est incomplet. On doit avoir recours à des méthodes de **déconvolution** sophistiquées, telles que l'algorithme CLEAN ou les approches par maximum d'entropie [10].



FIGURE 1.23 – **Quelques observatoires interférométriques.** VLTI (domaine optique et proche infrarouge, ESO), VLA (domaine radio centimétrique, NRAO), SMA (domaine submillimétrique, A. Darian / SMA), et le projet international SKA (domaine radio centimétrique à métrique, SKAO).

1.3 L'astrophysique multi-messagers

Si le rayonnement électromagnétique constitue l'essentiel de notre source d'information sur le fonctionnement des objets astrophysiques, d'autres canaux existent, ouvrant l'ère de l'astrophysique **multi-messagers** : des particules (**rayons cosmiques** et **neutrinos**) et des **ondes gravitationnelles**.

1.3.1 Les rayons cosmiques

Nature et origine

Les **rayons cosmiques** sont des particules (noyaux et électrons) de haute énergie (10 à 10^{14} MeV), donc relativistes²⁹. Ils ont été découverts au début du XX^e siècle par Victor Hess³⁰, au travers de leur effet d'ionisation de l'atmosphère terrestre³¹. Produits par les supernovæ et les objets compacts³², qui fournissent également des rayons X de 1 à 10 keV, ils sont accélérés par un processus appelé **diffusion de Fermi** dans les **chocs magnétisés**³³. La composition de ces rayons cosmiques (Fig. 10.21, droite) est approximativement celle du voisinage solaire, avec une surabondance d'éléments légers (lithium, beryllium et bore) du fait du phénomène de **spallation** des noyaux plus lourds par interaction avec le milieu interstellaire (MIS). La **distribution en énergie** des rayons cosmiques (Fig. 10.21, gauche) suit une loi de puissance, c'est-à-dire que le flux de cosmiques (nombre de particules par unité de surface, par unité de temps et par intervalle en énergie) varie comme

$$\Phi_{\text{CR}}(E) \propto E^{-\alpha} \quad (1.8)$$

29. Le **facteur de Lorentz** est $\gamma \gg 1$, de sorte que leur énergie $E = \gamma mc^2$ est très grande devant l'**énergie de masse**.

30. Peggau, 24 juin 1883 - Mount Vernon, 17 décembre 1964.

31. L'ionisation augmentait avec l'altitude, ne subissait pas de variation diurne, et était sensiblement isotrope.

32. ACela est vrai au moins pour les cosmiques d'énergie jusqu'à 10^9 MeV. Les cosmiques plus énergétiques sont probablement d'origine extragalactique.

33. L'accélération de Fermi des rayons cosmiques nécessite un champ magnétique variable dans le temps, ce qui est fourni par le fait que le champ magnétique est gelé dans le plasma turbulent des restes de supernova.

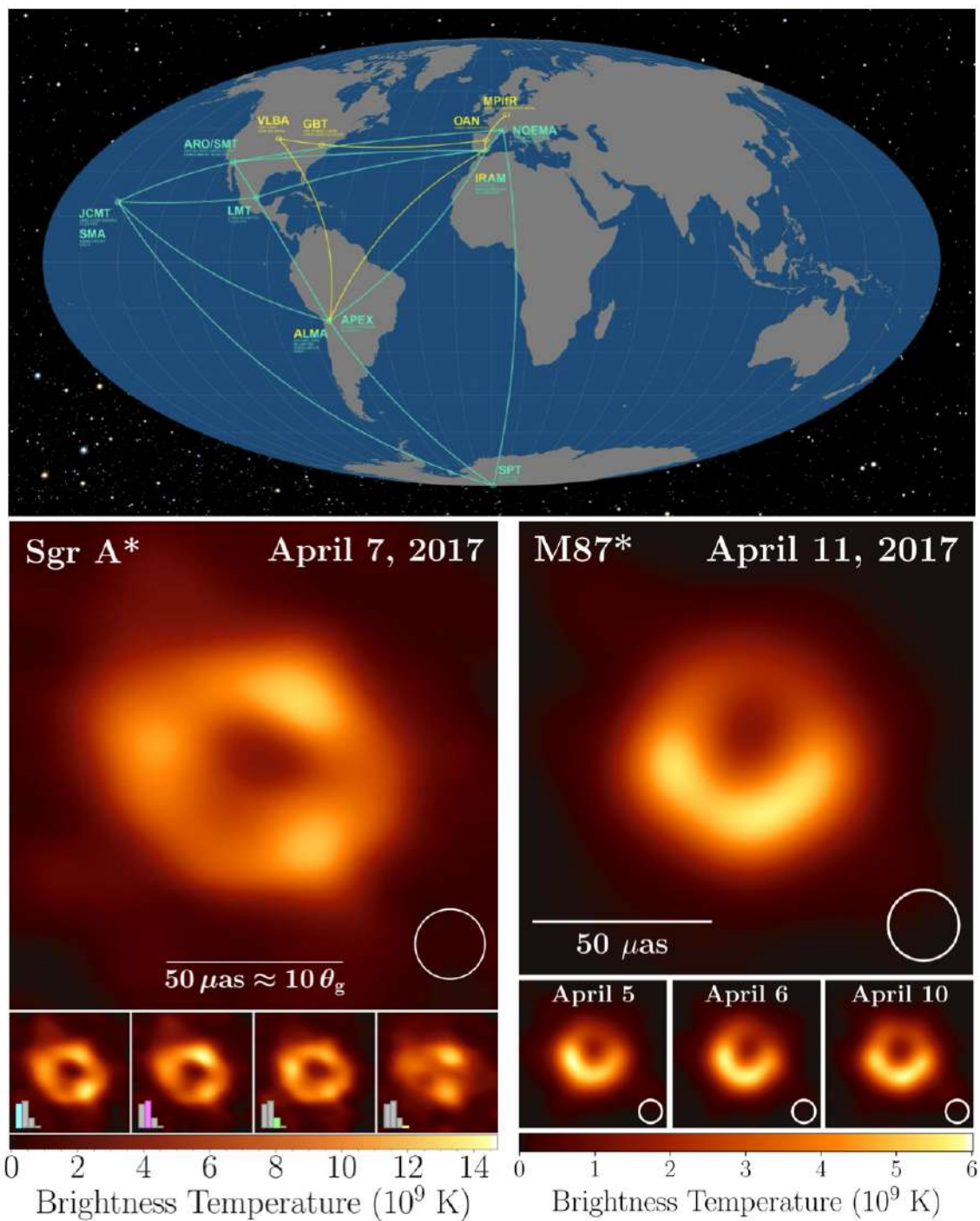


FIGURE 1.24 – VLBI avec l'Event Horizon Telescope (EHT). Positions des antennes formant le réseau EHT (en haut, *Wikimedia Commons*) et premières images directes de trous noirs supermassifs au centre de notre Galaxie (en bas à gauche) [11] et au centre de la galaxie M87 (en bas à droite) [12].

avec un **indice spectral** $\alpha \sim 2.7$. Cette loi de puissance présente une coupure à basse énergie, les cosmiques peu énergétiques étant déviés par le vent solaire magnétisé (on parle de **modulation**). L'in-

teraction entre champ magnétique et rayons cosmiques se manifeste également dans l'équipartition entre densité d'énergie des cosmiques et densité d'énergie du champ magnétique dans le milieu interstellaire. Les cosmiques, particules chargées, sont contraints à des orbites hélicoïdales autour des lignes de champ, avec des **rayons de gyration** $r_B = \gamma mv / (qB)$ bien plus petits que la taille de la Galaxie³⁴ et ils sont donc **confinés** dans la Galaxie. Les irrégularités du champ magnétique amènent cependant à une **diffusion** progressive, sur des échelles de temps de l'ordre de 10^7 an.

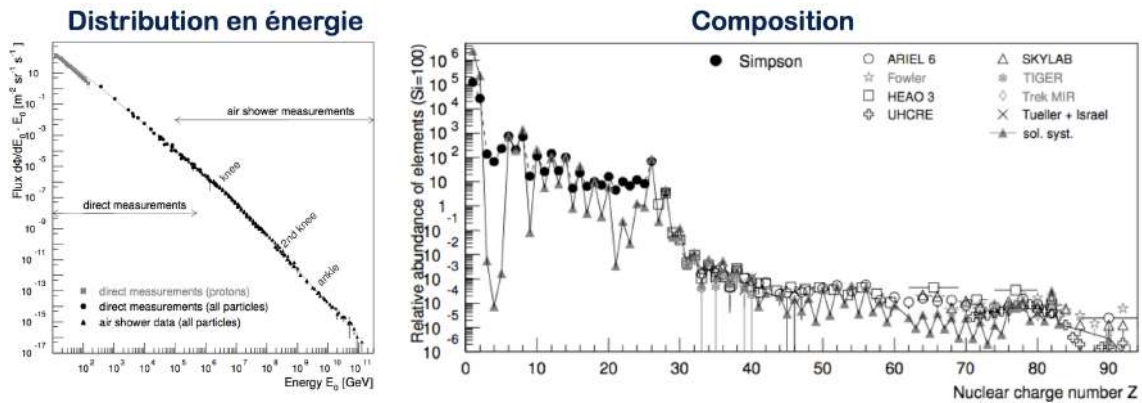


FIGURE 1.25 – **Distribution en énergie et composition des rayons cosmiques.** Figures issues de [3].

Observations

Les rayons cosmiques parvenant au sommet de l'atmosphère terrestre interagissent avec les molécules présentes, créant des particules secondaires en cascade sous la forme de **gerbes cosmiques**. Ces particules relativistes se déplacent plus vite que la lumière dans l'air, ce qui provoque un **effet Cerenkov** observé par des télescopes γ (H.E.S.S. - Fig. 1.27, MAGIC, VERITAS, Auger et le futur Cerenkov Telescope Array). Les particules qui atteignent le sol peuvent être détectées par le biais de **scintillateurs**. On peut ainsi mesurer le flux total et la distribution en énergie des cosmiques, mais aussi mettre en évidence les sources individuelles de cosmiques, notamment les restes de supernovæ³⁵.

1.3.2 Les neutrinos

Les **neutrinos** sont créés à la suite de certains types de **désintégrations radioactives**, de **réactions nucléaires** telles que celles qui ont lieu dans le Soleil, de phénomènes astrophysiques à haute énergie comme les **supernovæ**, ou encore lorsque les rayons cosmiques frappent des atomes dans l'atmosphère. Les neutrinos **interagissent très faiblement avec la matière**, ce qui signifie d'une part qu'il est peu probable qu'ils se dispersent le long de leur trajectoire, contrairement aux photons, et donc qu'ils offrent une occasion unique d'observer des processus inaccessibles aux télescopes optiques, et d'autre part que les **détecteurs de neutrinos** doivent avoir de grandes masses cibles et se situer dans des endroits limitant le bruit de fond, comme des mines, le fond des mers, ou encore en Antarctique (Fig. 1.28).

34. La propagation des cosmiques dans la Galaxie est modélisée par des codes dédiés, tels GALPROP.

35. Des mesures indirectes des cosmiques sont également possibles, notamment dans le domaine des γ , avec des observatoires spatiaux (Compton-GRO, Chandra, Integral, Fermi). Ce **rayonnement continuum** γ , observé dès les années 1960, est dû à l'interaction des protons de haute énergie avec les protons du milieu interstellaire, produisant des pions qui se désintègrent ensuite en photons γ selon

$$p_{CR} + p_{MIS} \rightarrow p_{CR} + p_{MIS} + \pi^0 \quad \pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma \quad (1.9)$$

D'autre part, les électrons relativistes dans le champ magnétique interstellaire produisent un **rayonnement synchrotron** à basse fréquence, observable depuis le sol.

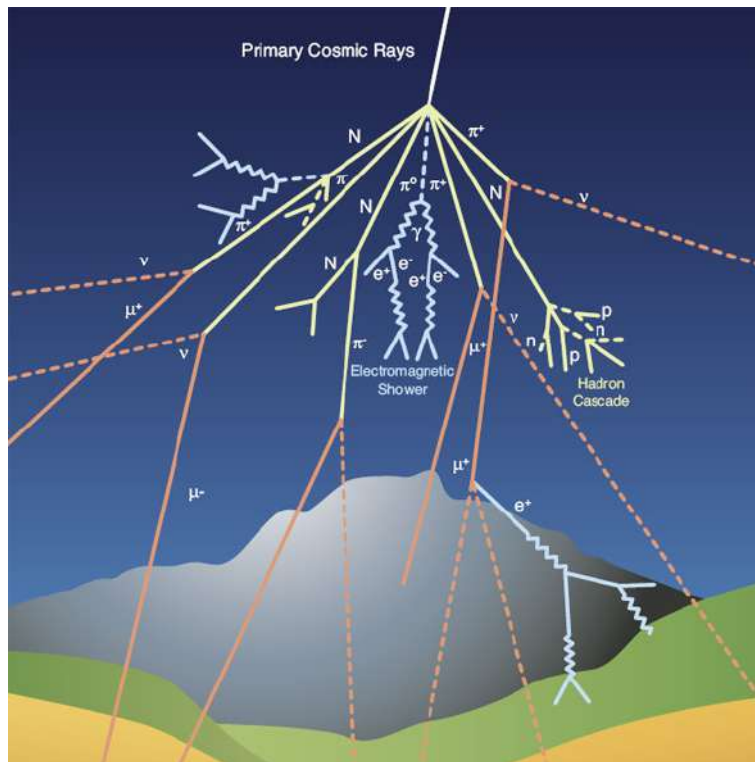


FIGURE 1.26 – Gerbe cosmique. (Crédit : CERN).

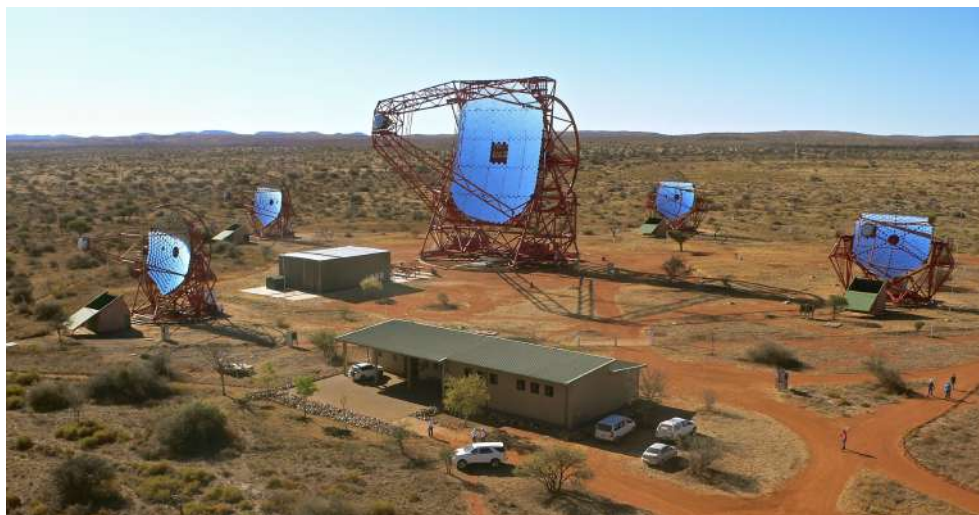


FIGURE 1.27 – Télescope H.E.S.S. II. (Crédit : Wikimedia Commons)

Les premiers **neutrinos solaires** furent détectés en 1968 avec l'expérience Homestake. Ces neutrinos ont pour origine les processus de fusion de l'hydrogène qui ont lieu au cœur du Soleil (**chaîne proton-proton** principalement et **cycle CNO** dans une moindre proportion). Cette expérience mesura un flux de neutrinos électroniques³⁶ sensiblement inférieur à la valeur attendue (entre un tiers et la moitié du

36. Selon le modèle standard, il existe **trois familles, ou "saveurs"** de neutrinos : électronique, muonique, et tauonique.

nombre de neutrinos électroniques prévu par le modèle solaire standard). Cette divergence, connue sous le nom de **problème des neutrinos solaires**, est restée sans solution pendant une trentaine d'années, jusqu'à ce qu'il soit réalisé que les neutrinos étaient plus complexes qu'on ne le pensait. Il a été postulé que les trois neutrinos avaient des **masses non nulles et légèrement différentes**, et pouvaient donc **osciller en des saveurs indétectables** lors de leur vol vers la Terre, ce qui fut confirmé par l'expérience SNO, qui pouvait détecter toutes les saveurs de neutrinos et n'a trouvé aucun déficit. La caractérisation des neutrinos solaires permet de contraindre la composition du cœur du Soleil, du fait que les différents processus de fusion thermonucléaires produisent des neutrinos avec des spectres en énergie différents.

Les neutrinos permettent également de sonder les **phénomènes astrophysiques violents** comme les supernovæ. Ainsi, lors d'une **supernova à effondrement de cœur**, 99% de l'énergie libérée se trouve sous forme de neutrinos, qui, interagissant très peu avec la matière, sont capables de s'échapper en quelques secondes, tandis que les photons peuvent être piégés dans la supernova dense pendant des heures. Les détecteurs de neutrinos peuvent être ainsi utilisés comme **système d'alerte** permettant de détecter une supernova avant qu'elle ne devienne visible et donc d'alerter les télescopes optiques.

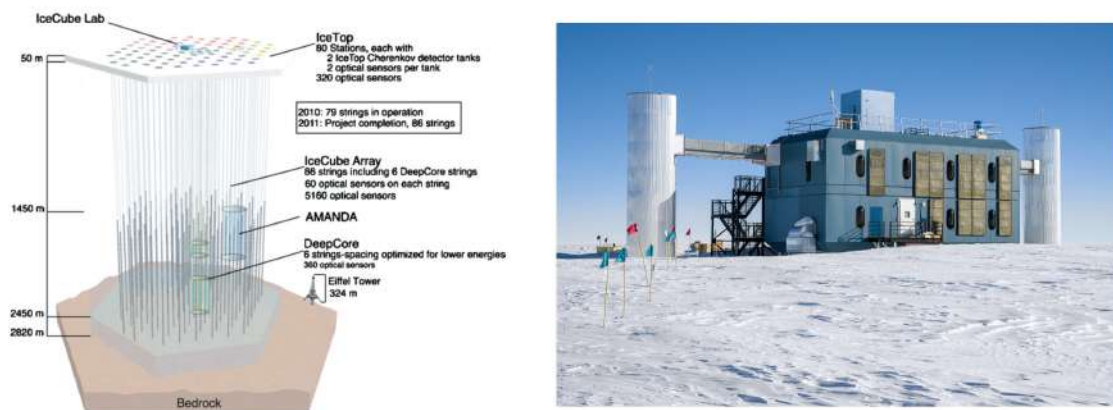


FIGURE 1.28 – Expérience IceCube de détection de neutrinos d'origine astrophysique. (Crédit : Wikimedia Commons)

1.3.3 Les ondes gravitationnelles

Les **ondes gravitationnelles** sont des déformations du champ de gravitation qui se propagent. Elles sont produites par des objets astrophysiques massifs accélérés³⁷, en particulier les **systèmes binaires** constitués de deux **objets compacts**, dénomination recouvrant les **trous noirs**, les **étoiles à neutrons** ou **pulsars**³⁸ et les **naines blanches**. Leur existence a été postulée par Oliver Heaviside³⁹ et Henri Poincaré⁴⁰ au début du siècle dernier, mais c'est le développement de la **relativité générale** par Albert Einstein⁴¹ qui leur a fourni un cadre théorique solide⁴², en montrant la possibilité d'une propagation d'ondulations de l'espace-temps à la vitesse de la lumière c .

La première **preuve indirecte** de l'existence des ondes gravitationnelles a été apportée en 1974 par l'observation du système PSR 1913+16, constitué d'un pulsar et d'une étoile à neutrons. Russell A.

37. Il est nécessaire que la distribution des masses présente une certaine **asymétrie**.

38. Les pulsars sont des étoiles à neutrons en rotation dont on détecte un rayonnement pulsé très stable en fréquence.

39. Camden Town, 18 mai 1850 - Torquay, 3 février 1925.

40. Nancy, 29 avril 1854 - Paris, 17 juillet 1912.

41. Ulm, 14 mars 1879 - Princeton, 18 avril 1955.

42. En effet, si les propositions antérieures d'ondes gravitationnelles faisaient l'**analogie avec les ondes électromagnétiques**, le cadre classique de la mécanique suppose l'instantanéité des actions gravitationnelles.

Hulse⁴³ et Joseph Hooton Taylor Jr.⁴⁴ ont observé que la **période des pulsés** du pulsar changeait de manière systématique, et elle-même périodique, ce qui impliquait la présence d'un compagnon, l'étoile à neutrons. La mesure de ces variations leur a permis de montrer que **la distance orbitale entre les deux astres était décroissante**, donc que le système perdait de l'énergie. Cette observation était en parfait accord avec la prédiction d'émission d'ondes gravitationnelles qui emporteraient cette énergie.

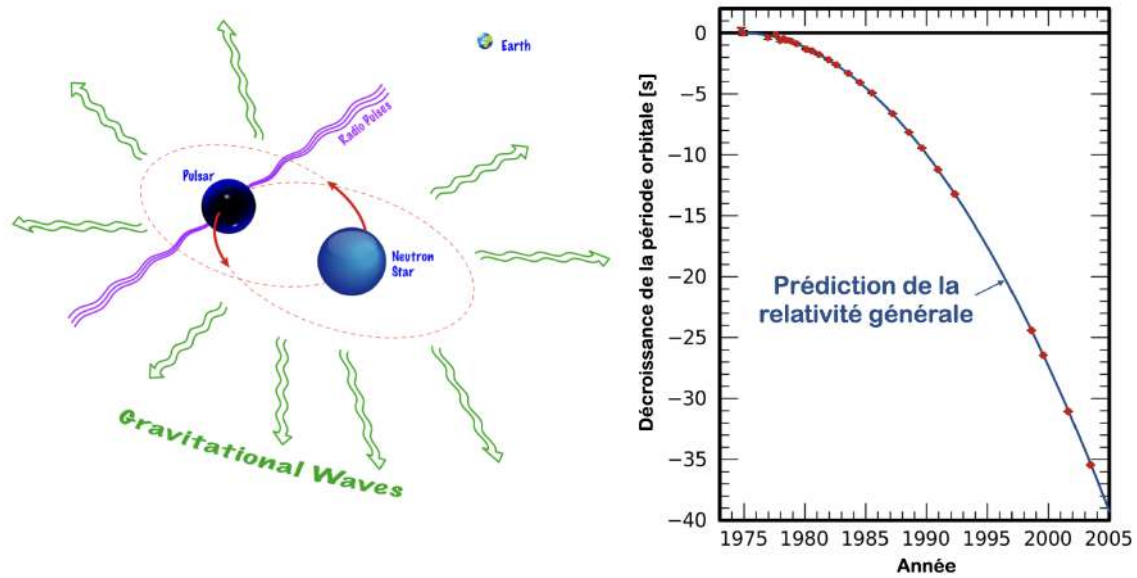


FIGURE 1.29 – **Détection indirecte des ondes gravitationnelles.** Schéma du système binaire observé (à gauche, *Crédit : S. L. Larson*) et mesure de la décroissance orbitale (à droite, *Crédit : Wikimedia Commons*).

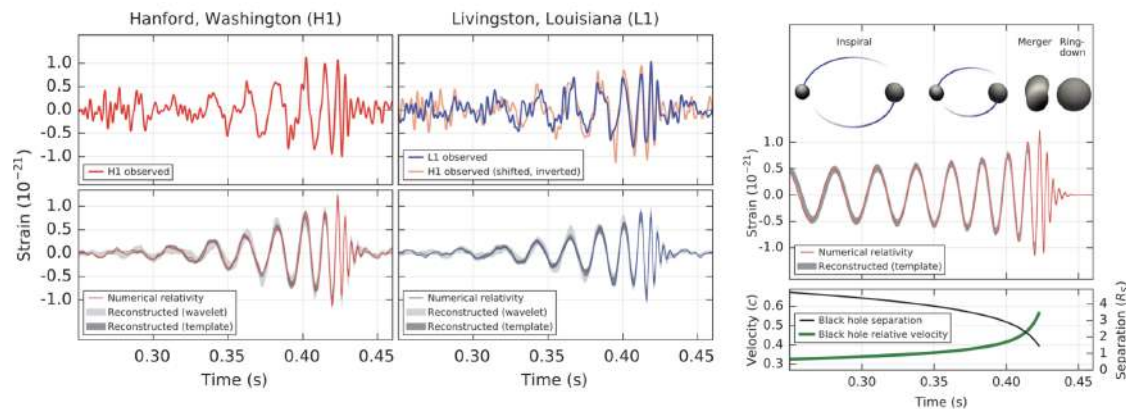


FIGURE 1.30 – **Détection directe d'ondes gravitationnelles par l'instrument LIGO.** Les figures à gauche montrent les données observationnelles et leur modélisation, le schéma de droite en explique les différentes parties ("inspiral", "merger" et "ring-down") [13].

La première **observation directe** des ondes gravitationnelles a eu lieu le 14 septembre 2015 et a été annoncée par les collaborations LIGO et Virgo le 11 février 2016. Un signal produit par la **fusion**

43. New York City, 28 novembre 1950 - ...

44. Philadelphie, 29 mars 1941 - ...

de deux trous noirs d'une trentaine de masses solaires chacun, situés à environ 400 Mpc⁴⁵, a été reçu par les détecteurs d'ondes gravitationnelles LIGO à Livingston (Louisiane) et Hanford (état de Washington) [14]. Ces détecteurs sont des **interféromètres de Michelson** extrêmement sensibles, capables de détecter les variations infimes de la longueur de leurs bras (les variations relatives sont de l'ordre 10^{-21} !) au passage de l'onde gravitationnelle. Depuis, de nombreux autres évènements de ce type ont été observés, notamment des fusions entre un trou noir et une étoile à neutron, ainsi que des contreparties en ondes électromagnétiques, dans le domaine γ , qui ont permis de confirmer que la vitesse des ondes gravitationnelles est bien c (Fig. 1.31).

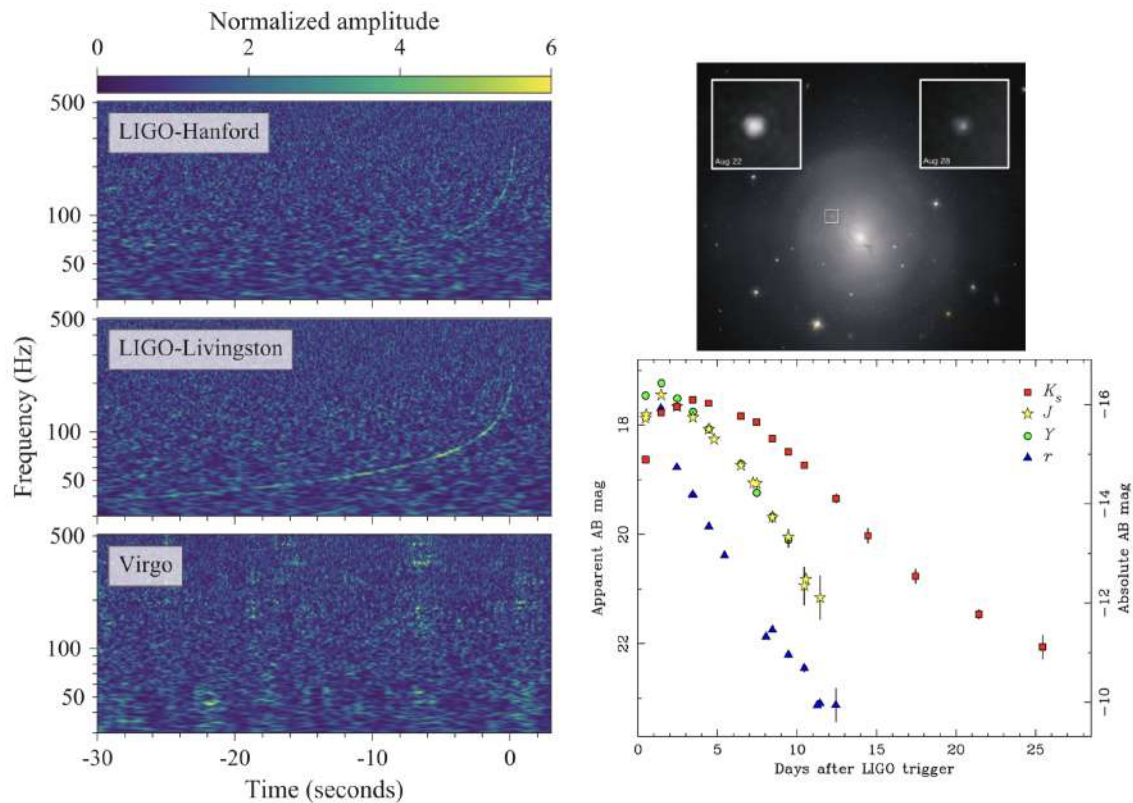


FIGURE 1.31 – **L'évènement du 17 août 2017.** Cet évènement de fusion de deux étoiles à neutrons a été vu en ondes gravitationnelles GW170817 (à gauche) et a donné lieu à une contrepartie transitoire électromagnétique de type **kilonova** (à droite) [15].

Les autres sources possibles d'ondes gravitationnelles sont les évènements violents comme les **supernovæ**, à condition que cette explosion ne soit pas parfaitement à symétrie sphérique (c'est-à-dire si la matière n'est pas expulsée uniformément dans toutes les directions). Comme le mécanisme exact par lequel les supernovæ se produisent n'est pas entièrement compris, il n'est cependant pas facile de modéliser le rayonnement gravitationnel qu'elles émettent. Enfin, de nombreux modèles de l'**Univers primordial** suggèrent l'existence d'une période **inflationnaire** pendant laquelle l'expansion a suivi une loi exponentielle. Ces modèles prédisent que des **ondes gravitationnelles primordiales** auraient été produites à cette époque, dont la signature pourrait se trouver dans la **polarisation du fond diffus cosmologique**. Des projets observationnels, au sol (CMB-S4) comme depuis l'espace (LiteBIRD) sont actuellement en développement pour rechercher ce signal. Enfin, le **chronométrage ultra-précis des pulsars** (PTA pour *Pulsar Timing Array*) permet depuis l'an dernier de détecter le **fond stochastique**

45. Historiquement, un **parsec** est défini comme la distance à laquelle une unité astronomique (UA), c'est-à-dire la distance moyenne Terre-Soleil, sous-tend un angle d'une seconde d'arc. On a $1 \text{ pc} \approx 3.26 \text{ a.l.} \approx 3 \cdot 10^{16} \text{ m}$.

d'ondes gravitationnelles associé aux très nombreux événements trop faibles pour être détectés individuellement (Fig. 1.32, [16]). Dans le futur, des projets d'**interféromètres spatiaux** comme LISA permettront d'explorer systématiquement cette nouvelle fenêtre sur l'Univers.

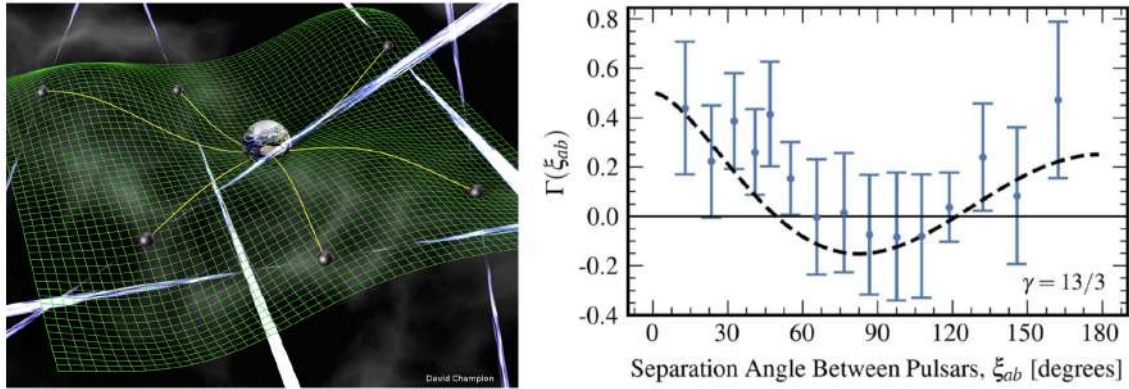


FIGURE 1.32 – **Détection du fond stochastique d'ondes gravitationnelles.** Le schéma de gauche présente le principe de la détection par mesure des variations des temps d'arrivées de pulses en provenance d'un ensemble de pulsar, la figure de droite montre la corrélation entre ces variations en fonction de la séparation angulaire entre deux pulsars dans le ciel. En l'absence de fond d'ondes gravitationnelles, on se serait attendu à une corrélation nulle [16].

Chapitre 2

Le transfert de rayonnement

Pour traiter de l'observation du rayonnement des objets astrophysiques, il convient d'introduire la grandeur fondamentale de ce domaine qu'est l'**intensité spécifique**, en partant des équations de Maxwell régissant l'électromagnétisme dans le vide. On définit ensuite les **grandeurs photométriques** qui en sont dérivées, en particulier le système des **magnitudes** couramment utilisé. Pour comprendre le fonctionnement des objets de l'Univers, il est également essentiel de comprendre l'interaction de la lumière avec les milieux matériels (**émission**, **absorption**, et **diffusion**), ce qui amène à l'**équation du transfert**, fondamentale en astrophysique.

2.1 L'intensité spécifique

2.1.1 Des équations de Maxwell à l'énergie portée par le champ

Équations de Maxwell dans le vide

L'électromagnétisme dans le vide est fondé classiquement sur les quatre équations de Maxwell :

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned} \quad (2.1)$$

Les objets qu'on sera amené à considérer étant très lointains, on pourra supposer que les ondes électromagnétiques qui nous en parviennent sont planes et progressives, se propageant dans une direction repérée par un vecteur unitaire \vec{k} . On rappelle que le champ électrique et le champ magnétique de cette onde sont reliés par

$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{c}, \quad (2.2)$$

où $c = 299792458 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ est la célérité de la lumière dans le vide¹. Les vecteurs $(\vec{k}, \vec{E}, \vec{B})$ forment donc un **trièdre orthogonal direct**. La **linéarité des équations de Maxwell** permet de se restreindre à des ondes **monochromatiques**, le cas d'une onde polychromatique pouvant être traité ensuite en utilisant le **théorème de superposition**.

1. On rappelle qu'on a la relation $\epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$.

Vecteur et identité de Poynting

À partir des équations de Maxwell dans le vide, on peut établir une équation de **conservation de l'énergie**, qu'on appelle **identité de Poynting**

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{\Pi} = 0 \quad \text{avec} \quad u = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} \quad \text{et} \quad \vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \quad (2.3)$$

Exercice 1 : Établir l'équation (2.3).

Dans cette équation, u est la **densité volumique d'énergie électromagnétique** et $\vec{\Pi}$ est le **vecteur de Poynting**. On a noté $E = \|\vec{E}\|$ le module du vecteur champ électrique et $B = \|\vec{B}\|$ celui du vecteur champ magnétique. Le vecteur de Poynting est porté par le vecteur unitaire \vec{k} , avec

$$\vec{\Pi} = \frac{1}{\mu_0 c} \vec{E} \wedge (\vec{k} \wedge \vec{E}) = \frac{E^2}{\mu_0 c} \vec{k} \quad (2.4)$$

La **formule de Green-Ostrogradsky**² permet d'écrire l'identité de Poynting sous une forme intégrale, en considérant un volume \mathcal{V} fixe, dont on note la surface frontière Σ . En posant $d\vec{S} = dS\vec{e}$ avec \vec{e} le vecteur normal à la surface dirigé vers l'extérieur de \mathcal{V} , et $d\tau$ l'élément de volume, on montre alors que

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \oint_{\Sigma} \vec{\Pi} \cdot d\vec{S} \quad \text{avec} \quad \mathcal{E} = \iiint_{\mathcal{V}} u \, d\tau \quad (2.6)$$

\mathcal{E} est l'énergie du champ contenue dans le volume \mathcal{V} . Cette expression permet d'interpréter le **flux du vecteur de Poynting** apparaissant dans le membre de droite comme la **puissance électromagnétique** (énergie par unité de temps) traversant la surface Σ .

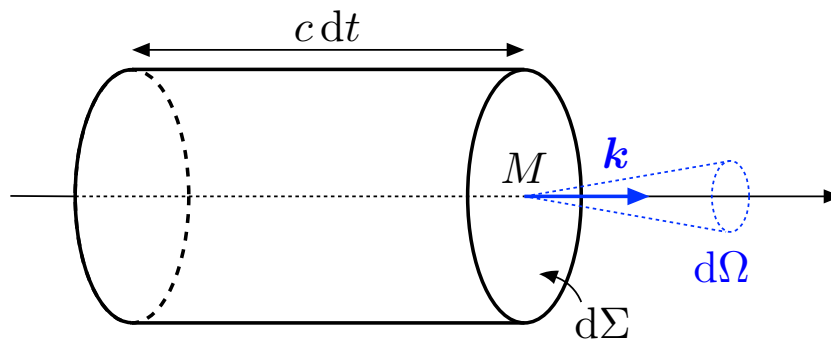


FIGURE 2.1 – **Définition de l'intensité spécifique dans la direction normale.** Notations utilisées pour définir l'intensité spécifique dans la direction \vec{k} normale à l'élément de surface.

2. On rappelle que celle-ci s'écrit

$$\iiint \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \iint \vec{A} \cdot d\vec{S} \quad (2.5)$$

Énergie électromagnétique traversant une surface

On considère une petite surface $d\Sigma$ perpendiculaire à la direction de propagation \vec{k} . Comme le montre le schéma de la Fig. 2.1, l'énergie électromagnétique traversant cette surface pendant un petit temps dt s'écrit $d\mathcal{E} = cu d\Sigma dt$. Dans le cas où la petite surface $d\Sigma$ est inclinée d'un angle θ par rapport à la direction de propagation (Fig. 2.2), cette expression devient $d\mathcal{E} = cu d\Sigma \cos \theta dt$.

Exercice 2 : Justifier que cette énergie s'écrit bien $d\mathcal{E} = cu d\Sigma dt$.

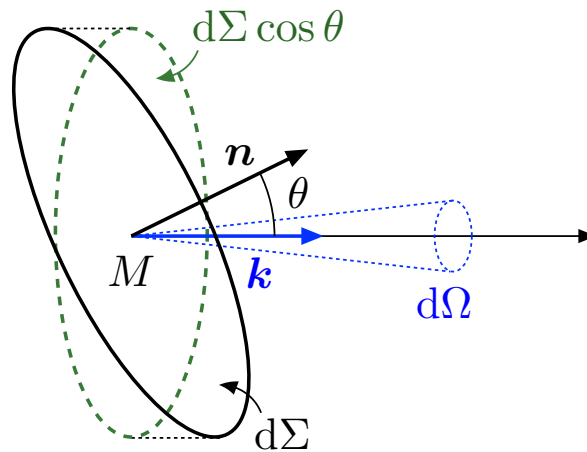


FIGURE 2.2 – Définition de l'intensité spécifique dans une direction quelconque. Notations utilisées pour définir l'intensité spécifique dans une direction \vec{k} quelconque.

On considère maintenant un rayonnement constitué d'un **ensemble d'ondes planes progressives**, avec une **répartition spectrale** continue en fonction de la fréquence ν , se propageant toutes dans la même direction. On considère que ces différentes ondes n'interfèrent pas entre elles et on peut donc traiter le rayonnement de fréquence ν à $d\nu$ près comme une onde plane progressive monochromatique. Dans une **approche corpusculaire** du rayonnement, l'énergie électromagnétique est donc portée par des **photons** de différentes fréquences ν , et l'on rappelle que l'énergie d'un photon est

$$\varepsilon = h\nu \quad (2.7)$$

On note $n_\nu d\nu$ le **nombre de photons par unité de volume dont la fréquence est comprise entre ν et $\nu + d\nu$** , et $u_\nu d\nu$ la densité volumique d'énergie du champ électromagnétique dans cet intervalle de fréquence. On a bien sûr

$$u_\nu = h\nu n_\nu \quad u = \int_0^\infty u_\nu d\nu = \int_0^\infty h\nu n_\nu d\nu \quad (2.8)$$

Si l'on ne s'intéresse qu'à l'énergie électromagnétique $d\mathcal{E}_\nu$ traversant la surface $d\Sigma$ pendant dt et portée par des photons de fréquence comprise entre ν et $\nu + d\nu$, on peut donc l'écrire

$$d\mathcal{E}_\nu = c(u_\nu d\nu) \cos \theta d\Sigma dt = h\nu c n_\nu d\Sigma \cos \theta dt d\nu. \quad (2.9)$$

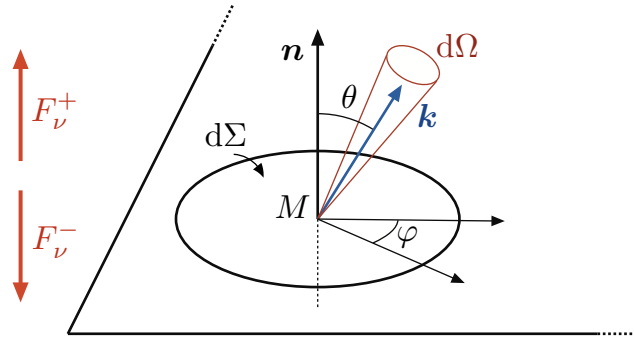


FIGURE 2.3 – Définition des angles θ et ϕ , et de l'élément d'angle solide $d\Omega$. Ces notations sont aussi utilisées plus tard pour définir l'élément de densité spectrale de flux, dF_ν : l'intégration sur le demi-espace avant fournit F_ν^+ (puissance traversant la surface "vers le haut"), celle sur le demi-espace arrière fournit F_ν^- (flux "vers le bas").

2.1.2 Définition et propriétés de l'intensité spécifique

Définition de l'intensité spécifique

Jusqu'à présent, nous avons considéré que la direction \vec{k} de propagation des photons était parfaitement déterminée. En réalité, il convient de tenir compte du fait que **cette direction de propagation n'est pas à valeurs discrètes, mais peut varier continûment**. Il faut donc exhiber un **élément d'intégration sur les directions**, semblable à ce que peut être dt pour le temps ou $d\nu$ pour la fréquence. Comme on repère la direction de propagation par le couple d'angles (θ, ϕ) indiqué sur la Fig. 2.3, avec $\theta \in [0, \pi]$ et $\phi \in [0, 2\pi]$, cet élément d'intégration sur les directions est l'**angle solide élémentaire**³ $d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$. On introduit alors la quantité $\mathcal{N}_\nu(\theta, \phi)$ de telle sorte que le **nombre de photons par unité de volume dont la fréquence est comprise entre ν et $\nu + d\nu$ et dont la direction de propagation est \vec{k} à $d\Omega$ près** soit $\mathcal{N}_\nu(\theta, \phi)d\nu d\Omega$. L'énergie $d\mathcal{E}_\nu$ portée par ces photons et traversant la surface $d\Sigma$ pendant dt s'écrit alors

$$d\mathcal{E}_\nu = h\nu c \mathcal{N}_\nu(\theta, \phi) d\nu d\Omega d\Sigma \cos\theta dt = I_\nu(\theta, \phi) d\Sigma \cos\theta dt d\nu d\Omega \quad (2.10)$$

où l'on a introduit l'**intensité spécifique** I_ν (aussi appelée **brillance**)

$$I_\nu = \frac{d\mathcal{E}_\nu}{d\Sigma \cos\theta dt d\nu d\Omega} = h\nu c \mathcal{N}_\nu \quad (2.11)$$

L'intensité spécifique, $I_\nu(M, \vec{k}, t, \nu)$ dépend en général du point M de l'espace considéré, de la direction \vec{k} , du temps t et de la fréquence ν . **Elle décrit complètement la distribution spatiale, angulaire, spectrale et temporelle du champ de rayonnement**⁴.

3. L'angle solide correspondant à l'ensemble des directions de l'espace est $\Omega_0 = 4\pi$

4. Une réserve importante toutefois est que la grandeur scalaire I_ν ainsi définie ne contient aucune information sur l'état de **polarisation** (linéaire, circulaire ou elliptique, totale ou partielle) du rayonnement. Dans certaines situations, il est important de le prendre en compte et on introduit alors une matrice dont les éléments sont les **paramètres de Stokes** notés I, Q, U et V

Unités et grandeurs associées

L'intensité spécifique I_ν s'exprime en $\text{W.m}^{-2}.\text{Hz}^{-1}.\text{sr}^{-1}$ dans le système international⁵. En intégrant sur toutes les fréquences, on définit une **intensité bolométrique**,


$$I(M, \vec{k}, t) = \int_0^\infty I_\nu(M, \vec{k}, t, \nu) d\nu$$

qui s'exprime en $\text{W.m}^{-2}.\text{sr}^{-1}$ dans le système international. L'intensité émise par une source de lumière de la vie courante (tube néon, ampoule à filament, flamme) est parfois appelée **luminance**. Pour parler d'une source astrophysique, ou d'un écran, on emploie le terme de **brillance** ou encore **brillance de surface**, ce dernier nom étant la plupart du temps réservé au cas des sources étendues, **résolues spatialement**.

Conservation de l'intensité spécifique dans le vide

L'importance conceptuelle de l'intensité spécifique vient d'une propriété fondamentale de **conservation dans le vide**. Comme on le verra par la suite, cette caractéristique importante de I_ν est une conséquence immédiate de l'**équation du transfert** mais pour mieux saisir le sens et la portée de cette propriété, on peut l'établir séparément, à partir de **considérations géométriques** et de la **conservation de l'énergie**, en s'appuyant sur la Fig. 2.4.

Cette propriété de conservation dans le vide (en l'absence d'absorption, de diffusion, ou de source de rayonnement entre les points A et B), s'écrit sous la forme


$$I_\nu(A, \vec{k}, t, \nu) = I_\nu(B, \vec{k}, t', \nu) \quad (2.12)$$

Notons que le temps de parcours de la lumière est pris en compte dans l'écriture ci-dessus, via

$$t' = t + \frac{AB}{c} \quad (2.13)$$

Exercice 3 : Démontrer la relation 2.12.

La conservation de I_ν est une propriété très importante car elle nous indique que **si le milieu traversé n'altère pas le rayonnement, l'intensité mesurée au niveau du récepteur est identique à celle émise par la source astrophysique** : on peut se la représenter à la fois comme une énergie sortant de la source et comme une énergie entrant dans le détecteur. La seconde conséquence importante est qu'étant indépendante de la distance, **la brillance des objets célestes résolus ne dépend pas de l'instrument** : la Lune vue à travers des jumelles apparaît plus grosse, mais pas plus brillante qu'à l'œil nu. Pour rendre des objets résolus apparemment plus "brillants", il faut un détecteur (par exemple une **matrice de CCD**) qui intègre sur des temps longs, puisque $d\mathcal{E}_\nu \propto dt$, ou bien sur une bande passante plus large, puisque $d\mathcal{E}_\nu \propto d\nu$. Cette propriété n'est en rien paradoxale, et ne saurait être opposée à l'idée intuitive d'une décroissance en raison du carré inverse de la distance. Cette dernière propriété est en effet réalisée pour le **flux**, dont on parlera plus bas, et non pour l'intensité.

Définition de l'intensité spécifique en longueur d'onde

On peut tout aussi bien définir l'intensité spécifique en considérant les photons de longueur d'onde comprise entre λ et $\lambda + d\lambda$. On écrit alors l'énergie correspondante sous la forme

$$d\mathcal{E}_\lambda = I_\lambda d\Sigma \cos \theta dt d\Omega d\lambda \quad (2.14)$$

5. Elle s'exprime en $\text{erg.cm}^{-2}.\text{s}^{-1}.\text{Hz}^{-1}.\text{sr}^{-1}$ dans le système CGS prisé des astrophysiciens.

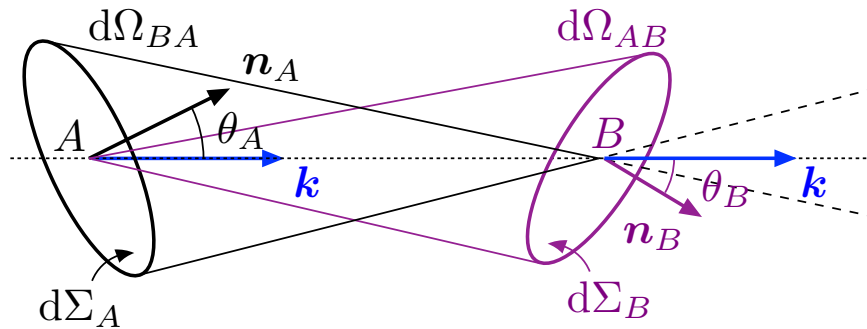


FIGURE 2.4 – **Conservation de I_ν dans le vide.** Notations utilisées pour établir la conservation de l'intensité spécifique entre les points A et B lorsqu'aucune interaction n'intervient le long du trajet AB entre les deux points.

ce qui définit alors une intensité spécifique I_λ s'exprimant (par exemple) en $\text{W.m}^{-2}.\text{nm}^{-1}.\text{sr}^{-1}$. Il existe bien entendu une relation entre I_λ et I_ν , qu'on établit en écrivant que $d\mathcal{E}_\lambda$ est égale à $d\mathcal{E}_\nu$ si les intervalles spectraux en fréquence et en longueur d'onde se correspondent l'un à l'autre. On obtient alors

$$\nu I_\nu = \lambda I_\lambda \quad (2.15)$$

Exercice 4 : Démontrer la relation 2.15.

Les quantités λI_λ ou νI_ν sont fréquemment employées pour présenter des spectres astrophysiques (plutôt que simplement I_λ ou I_ν) car elles ont l'avantage de ne pas dépendre du fait qu'on choisisse λ ou ν pour préciser l'intervalle spectral qu'on considère. Ainsi, on pourra représenter une seule courbe, avec un axe horizontal inférieur repérant les fréquences, et un axe horizontal supérieur représentant les longueurs d'onde⁶.

2.2 Les grandeurs photométriques dérivées

2.2.1 Les moments de l'intensité spécifique

$I_\nu(M, \vec{k}, t, \nu)$ contient une information **très complète**, puisqu'elle dépend de sept paramètres (trois coordonnées de position, deux angles, le temps, et la fréquence), mais en général, ni l'observation ni la modélisation ne permettront de caractériser le champ de rayonnement avec autant de détails⁷. On est donc amené à considérer des **grandeurs dérivées**, décrivant moins finement le champ de rayonnement, mais fournissant en revanche directement une caractéristique globale importante. Ces grandeurs peuvent être vues comme des **moments de l'intensité spécifique** vis à vis de la direction \vec{k} .

6. C'est le cas par exemple sur la Fig. 1.7.

7. Il est commode de caractériser la dépendance angulaire de l'intensité (émise ou reçue par une antenne radio par exemple) par un **diagramme de rayonnement**. On utilise alors une représentation en coordonnées sphériques dans laquelle $r(\theta, \varphi)$ est proportionnel à l'intensité dans la direction (θ, φ) .

L'intensité moyenne

Par exemple, si l'on renonce complètement à connaître la répartition angulaire du rayonnement, on peut se contenter de la moyenne sur toutes les directions, ce qui amène à définir **l'intensité moyenne**

$$J_\nu = \frac{1}{4\pi} \int I_\nu d\Omega = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi I_\nu \sin \theta d\theta \quad (2.16)$$

où θ et φ sont les angles décrivant la direction \vec{k} (voir la Fig. 2.3). L'intensité moyenne J_ν s'exprime donc, comme I_ν , en $\text{W.m}^{-2}.\text{Hz}^{-1}.\text{sr}^{-1}$.

La densité spectrale et volumique d'énergie

On définit ensuite la **densité spectrale et volumique d'énergie** du rayonnement par la relation

$$u_\nu = \frac{1}{c} \int I_\nu d\Omega = \frac{4\pi}{c} J_\nu \quad (2.17)$$

Pour comprendre cette dénomination, on peut l'écrire à l'aide de la grandeur \mathcal{N}_ν définie plus haut,

$$u_\nu = h\nu \int \mathcal{N}_\nu d\Omega$$

Son interprétation est ainsi triviale, puisque l'intégrale de $\mathcal{N}_\nu d\Omega$ sur toutes les directions représente la densité volumique de photons de fréquence ν à $d\nu$ près. Chacun de ces photons emporte une énergie $h\nu$, ce qui justifie que u_ν représente bien l'énergie du rayonnement par unité de volume et par intervalle de fréquence, d'où le nom de densité spectrale et volumique d'énergie.

La densité spectrale de flux

On définit la **densité spectrale de flux** par la relation

$$F_\nu = \int I_\nu \cos \theta d\Omega \quad (2.18)$$

La raison de cette définition est comprise en généralisant à une **densité spectrale de flux de nature vectorielle** qui représente de manière évidente une **moyenne vectorielle de l'intensité**

$$\vec{F}_\nu = \int I_\nu \vec{k} d\Omega \quad (2.19)$$

Les composantes de ce vecteur s'écrivent

$$F_{\nu,x} = \int I_\nu \sin \theta \cos \varphi d\Omega \quad F_{\nu,y} = \int I_\nu \sin \theta \sin \varphi d\Omega \quad F_{\nu,z} = \int I_\nu \cos \theta d\Omega \quad (2.20)$$

Dans le cas d'une **symétrie axiale** du champ de rayonnement autour de l'axe z , seule la composante $F_{\nu,z}$ est non nulle, ce qui justifie qu'on nomme abusivement densité spectrale de flux l'expression scalaire (2.18). Son unité SI⁸ est le $\text{W.m}^{-2}.\text{Hz}^{-1}$. Il s'agit donc d'une **puissance par intervalle de fréquence et par unité de surface**⁹.

8. En radioastronomie on utilise le **Jansky**, avec $1 \text{ Jy} = 10^{-26} \text{ W.m}^{-2}.\text{Hz}^{-1}$.

9. Notons quelques remarques lexicales : lorsque le flux concerne du rayonnement arrivant sur un récepteur, on parle d'**éclairage**. Si, au contraire, il s'agit d'un rayonnement émis par la surface d'une source lumineuse, on parle d'**émittance**.

Le flux total

Le **flux total** ou **flux bolométrique** F est alors l'intégrale de F_ν sur toutes les fréquences :

$$F = \int_0^\infty F_\nu d\nu \quad (2.21)$$

Il s'exprime bien entendu en W.m^{-2} et représente la **puissance lumineuse totale traversant une unité de surface**.

Le flux entrant et le flux sortant

Le flux total et la densité spectrale de flux ainsi écrits sont des flux **algébriques**, dont le signe dépend de l'orientation du vecteur normal à la surface (\vec{n} sur la Fig. 2.3). En effet, sur le demi-espace "avant" défini par $0 \leq \theta < \pi/2$, $\mu = \cos \theta$ est positif alors que sur le demi-espace "arrière" ($\pi/2 < \theta < \pi$), $\mu = \cos \theta$ est négatif. Aussi est-il judicieux d'introduire des grandeurs **positives** caractérisant la puissance lumineuse traversant $d\Sigma$ dans un sens ou dans l'autre, respectivement F_ν^+ et F_ν^- , par

$$F_\nu^+ = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} I_\nu \cos \theta \sin \theta d\theta \quad \text{et} \quad F_\nu^- = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\pi/2}^\pi I_\nu |\cos \theta| \sin \theta d\theta. \quad (2.22)$$

qu'on nommera respectivement **densité spectrale de flux sortant** et **densité spectrale de flux entrant**. De même, on définit des quantités intégrées sur la fréquence,

$$F^+ = \int_0^\infty F_\nu^+ d\nu \quad \text{et} \quad F^- = \int_0^\infty F_\nu^- d\nu$$

qu'on nommera respectivement **flux sortant** et **flux entrant**. Avec ces définitions, F_ν apparaît comme la différence entre deux termes positifs : $F_\nu = F_\nu^+ - F_\nu^-$.

Décroissance du flux avec la distance

Contrairement à l'intensité spécifique, **la densité spectrale de flux varie avec la distance à la source**. Pour le montrer, on considère la densité spectrale de flux reçue sur Terre en provenance d'une étoile autre que le Soleil, donc non résolue spatialement, c'est-à-dire que l'angle θ_i caractérisant la résolution de l'instrument¹⁰ est supérieur à la taille apparente θ_c de l'étoile. Celle-ci est supposée à symétrie sphérique, **Lambertienne**¹¹, de rayon R , et son centre est situé à la distance D du détecteur placé en O (voir la Fig. 2.5). La densité spectrale de flux reçue sur le détecteur est alors

$$F_\nu = \pi I_0 \left(\frac{R}{D} \right)^2 \quad (2.23)$$

Exercice 5 : Démontrer la relation 2.23 en s'appuyant sur les notations de la Fig. 2.5.

ou encore d'**exitance**. De plus, dans d'autres domaines de la physique on emploie le terme de flux dans un sens différent, pour caractériser la puissance (ou le nombre de particules, la masse, etc ...) traversant l'ensemble d'une surface donné. La notion locale de **densité de flux** est alors introduite pour définir la puissance traversant l'unité de surface. Pour nous, le terme de densité est entendu au sens spectral, c'est-à-dire par intervalle de fréquence, et la notion de localité est implicite.

10. Pour simplifier, on suppose que le détecteur est parfaitement sensible pour $|\theta| \leq \theta_i/2$ et insensible à la radiation en provenance des directions $|\theta| > \theta_i/2$.

11. Cela signifie que l'intensité spécifique I_0 qu'elle émet dans un demi-espace ne dépend pas de la direction.

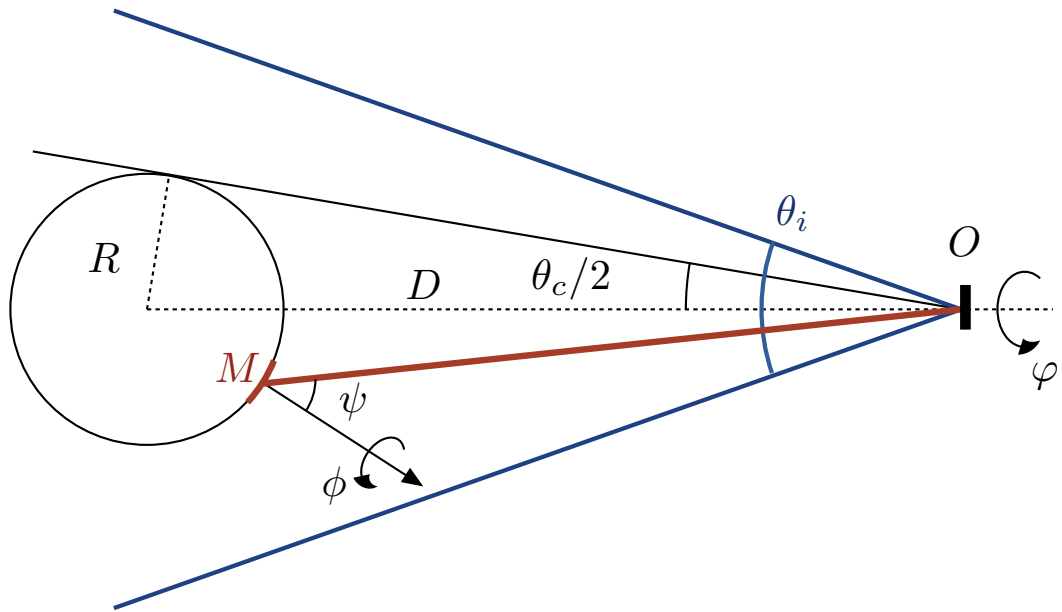


FIGURE 2.5 – Décroissance du flux en $1/r^2$.

On constate une dépendance en fonction de la distance, $F_\nu \propto D^{-2}$. **Les objets non résolus apparaissent d'autant plus brillants¹² qu'ils sont plus près.** De même, si on les observe avec un instrument grossissant, leur diamètre apparent θ_c augmente et ils apparaissent alors plus brillants. Cet effet cesse dès que les objets sont résolus (Fig. 2.6). En effet, pour prendre un cas simple, considérons l'observation du centre d'une étoile à symétrie sphérique, Lambertienne (avec $I_\nu = I_0$) et résolue spatialement, en notant Ω_i l'angle solide correspondant à la résolution instrumentale et Ω_c l'angle solide apparent de l'étoile. On suppose donc que $\Omega_i < \Omega_c$. Si cet angle solide Ω_i est suffisamment petit, le facteur $\cos\theta$ dans l'intégrale (2.18) est très proche de 1, et la densité spectrale de flux reçue par le détecteur prend la forme $F_\nu = I_0\Omega_i$. Elle est donc indépendante de la taille apparente Ω_c . Dans le cas d'une source non résolue, en revanche, la densité spectrale de flux reçue est $F_\nu = I_0\Omega_c$ et dépend donc de la taille apparente de l'objet, qui varie comme le carré inverse de la distance.

La pression de radiation

Comme on le sait, le rayonnement transporte non seulement de l'énergie mais aussi de la **quantité de mouvement**, chaque photon de fréquence ν portant également une **impulsion**

$$\vec{\pi} = \frac{\varepsilon}{c}\vec{k} = \frac{h\nu}{c}\vec{k}$$

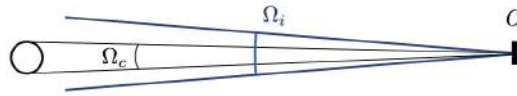
avec \vec{k} le vecteur unitaire de la direction de propagation. Ce transport d'impulsion permet de définir une **densité spectrale de pression de radiation** par la relation¹³

12. Le terme est trompeur, puisqu'il est question ici de flux, et non de brillance. C'est la puissance reçue qui augmente avec la taille angulaire de la source.

13. Notons qu'on peut généraliser cette définition en introduisant un **tenseur de densité spectrale de pression radiative**,

$$\mathbb{P}_\nu = \frac{1}{c} \int I_\nu \vec{k} \otimes \vec{k} d\Omega \quad (2.24)$$

Source non résolue

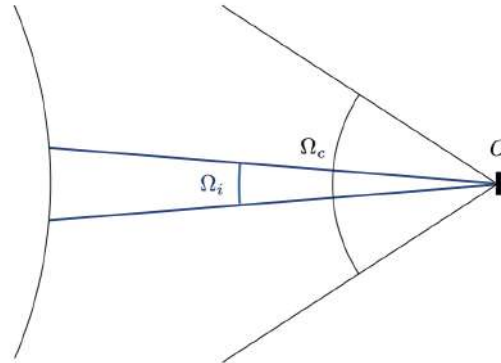


$$F = I_0 \Omega_c$$

Ω_c Taille de la source

Ω_i Résolution instrumentale

Source résolue



$$F = I_0 \Omega_i$$

FIGURE 2.6 – Observation d'une source résolue ou non.

$$p_\nu = \frac{1}{c} \int I_\nu \cos^2 \theta \, d\Omega \quad (2.25)$$

La **pression de radiation** est alors simplement définie comme l'intégrale de p_ν sur la fréquence

$$p = \int_0^\infty p_\nu \, d\nu$$

Exercice 6 : Montrer, par un raisonnement analogue à celui du calcul de la pression cinétique d'un gaz, que l'expression (2.25) correspond bien à une pression par intervalle de fréquence exercée par les photons. On s'appuiera sur la Fig. 2.7 et on fera appel à la quantité \mathcal{N}_ν .

Luminosité spécifique et luminosité bolométrique

On définit la **luminosité spécifique** ou **luminosité spectrale** L_ν comme étant la **puissance émise par intervalle de fréquence**. C'est donc une intégrale de la densité spectrale de flux sur une surface

$$L_\nu = \iint \vec{F}_\nu \cdot d\vec{S} \quad (2.26)$$

où $d\vec{S}$ représente le vecteur élémentaire de surface. Habituellement, on considérera la surface d'un astre, et si on le suppose sphérique de rayon R , avec une densité spectrale de flux à symétrie axiale et indépendante de la position sur la surface, on écrira

dont (2.25) est la composante zz .

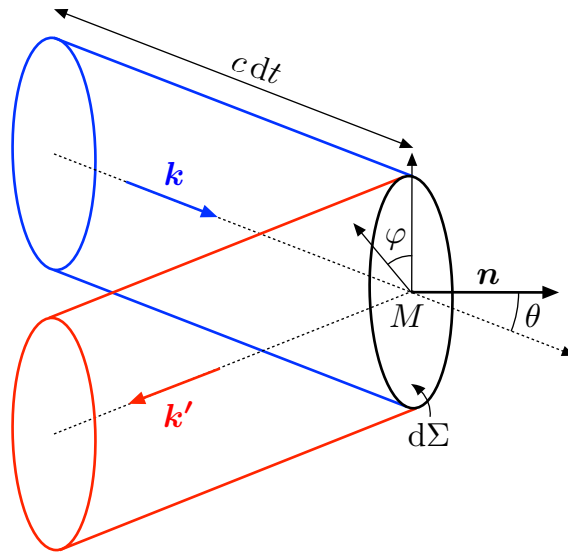


FIGURE 2.7 – Définition de la pression de radiation

$$L_\nu = 4\pi F_\nu R^2 \quad (2.27)$$

La **luminosité bolométrique** est l'intégrale de L_ν sur les fréquences, c'est donc la **puissance totale émise** par un astre

$$L = \int_0^\infty L_\nu = 4\pi R^2 F \quad (2.28)$$

Par exemple, la **luminosité bolométrique solaire** est $L_\odot = 3.8 \cdot 10^{26} \text{ W}$.

2.2.2 Les magnitudes

Le système des magnitudes est un héritage de l'ancienne classification grecque (due à Hipparque¹⁴ puis Ptolémée¹⁵) de la brillance apparente des étoiles, établie à l'œil nu. Le classement de l'éclat des étoiles se divisait en six **grandeurs** : les étoiles les plus brillantes étaient appelées étoiles de première grandeur, et les étoiles les plus faibles (observables à l'œil nu), étoiles de sixième grandeur.

Magnitude monochromatique

La sensation visuelle étant approximativement **logarithmique** vis-à-vis du flux lumineux F , on a construit l'échelle des magnitudes de manière relative, en posant que la **magnitude monochromatique** m_λ est liée à la densité spectrale de flux¹⁶ F_λ reçue par un détecteur via¹⁷

14. Nicée, vers -190 - Rhodes, vers -120.

15. Canope, vers 100 - Canope, vers 168.

16. De même qu'on peut définir l'intensité spécifique en terme de fréquence ou de longueur d'onde, ce même choix est possible pour la densité spectrale de flux.

17. Attention qu'il s'agit ici de logarithmes en base 10.

$$m_\lambda = -2.5 \log \left(\frac{F_\lambda}{F_0} \right) = -2.5 \log F_\lambda + q_0 \quad (2.29)$$

où F_0 est une constante qui définit ainsi la magnitude zéro. En pratique, la mesure du flux se fait sur une **bande passante** présentant une certaine réponse spectrale $T(\lambda)$, de sorte que l'on établit des **systèmes de magnitudes différents pour chaque bande**. On aura ainsi des notations telles que m_V , qui désigne la magnitude en bande V (dans le visible, $\lambda = 550$ nm).

Magnitude bolométrique

On dérive de la notion de magnitude monochromatique celle de **magnitude bolométrique**, qui mesure l'intégralité du flux F en échelle logarithmique,

$$m = -2.5 \log \frac{F}{F_{\text{bol}}} \quad \text{avec} \quad F_{\text{bol}} = 2.52 \cdot 10^{-8} \text{ W m}^{-2}. \quad (2.30)$$

Elle est directement liée à la **luminosité** L d'une source, connaissant sa distance D (exprimée en parsecs) et s'il n'y a pas d'absorption ou de diffusion sur la ligne de visée

$$m = -0.25 + 5 \log \left(\frac{D}{1 \text{ pc}} \right) - 2.5 \log \frac{L}{L_\odot} \quad (2.31)$$

Exercice 7 : Établir la relation (2.31)

Magnitude apparente et magnitude absolue

Comme la magnitude dépend donc de la distance, on parle de **magnitude apparente** m . On définit alors une **magnitude absolue** M en plaçant la source à une distance hypothétique de 10 pc, et en l'absence de toute **extinction** (absorption ou diffusion sur la ligne de visée), on a donc

$$M = m + 5 - 5 \log \left(\frac{D}{1 \text{ pc}} \right) \quad (2.32)$$

Ces magnitudes absolues peuvent être bolométriques (M), monochromatiques (M_λ) ou se rapporter à une certaine bande de longueur d'onde (M_V). On définit aussi le **module de distance** μ comme mesure logarithmique de la distance d'un astre

$$\mu = m - M = 5 \log \left(\frac{D}{10 \text{ pc}} \right) \quad (2.33)$$

Il faut prendre garde que les **grains de poussière interstellaires** sur la ligne de visée vont absorber ou diffuser plus ou moins la lumière incidente, selon leur taille et leur composition, et ce **sélectivement en longueur d'onde**. Pour caractériser cela, on définit l'**extinction** A_λ comme l'augmentation de magnitude induite à la longueur d'onde λ par l'absorption et la diffusion due aux grains, par rapport à la magnitude m_λ^0 qu'aurait l'objet sans extinction sur la ligne de visée

$$A_\lambda = m_\lambda - m_\lambda^0. \quad (2.34)$$

La magnitude observée est alors, en tenant compte de cette extinction,

$$m_\lambda = M_\lambda^0 + 5 \log \left(\frac{D}{10 \text{ pc}} \right) + A_\lambda \quad (2.35)$$

où M_λ^0 est la magnitude absolue monochromatique en l'absence d'extinction.

Quelques exemples

Il convient de se souvenir qu'**un objet est d'autant plus brillant que sa magnitude est basse**. À titre d'exemples, le Soleil a une magnitude (bolométrique) apparente de -27 et Sirius, l'étoile visible la plus brillante du ciel nocturne, de -1.46 . Vénus, à son point le plus lumineux, a une magnitude de -5 . La station spatiale internationale (ISS) atteint parfois une magnitude de -6 . De l'autre côté de l'échelle des magnitudes, le relevé du ciel ultra-profond fait par le télescope spatial Hubble (*Hubble Ultra-Deep Field*) a permis la détection d'objets de magnitude 30.

Indices de couleur

En faisant la différence entre les magnitudes d'un même objet à deux longueurs d'onde (ou plus pratiquement dans deux bandes), on obtient un **indice de couleur**, tel que par exemple

$$B - V = m_B - m_V \quad (2.36)$$

Pour les étoiles, ces indices sont directement liés à leur **température effective**, les étoiles bleues étant plus chaudes que les étoiles rouges (Fig. 2.8).

Class ↕	B-V ↕	U-B ↕	V-R ↕	R-I ↕	T_{eff} (K) ↕	Celestial body	B-V color index	U-B color index
O5V	-0.33	-1.19	-0.15	-0.32	42,000	Mercury	0.97	0.40
B0V	-0.30	-1.08	-0.13	-0.29	30,000	Venus	0.81	0.50
A0V	-0.02	-0.02	0.02	-0.02	9,790	Earth	0.20	0.0
F0V	0.30	0.03	0.30	0.17	7,300	Moon	0.92	0.46
G0V	0.58	0.06	0.50	0.31	5,940	Mars	1.43	0.63
K0V	0.81	0.45	0.64	0.42	5,150	Jupiter	0.87	0.48
M0V	1.40	1.22	1.28	0.91	3,840	Saturn	1.09	0.58
						Uranus	0.56	0.28
						Neptune	0.41	0.21

FIGURE 2.8 – Indices de couleur de différentes classes d'étoiles et d'objets du système solaire. On voit pourquoi on parle de "planète bleue" pour la Terre et de "planète rouge" pour Mars! (Crédit : Wikipedia)

2.3 Équation du transfert

2.3.1 Absorption et émission

Section efficace d'absorption

Nous avons vu plus haut que, dans le vide, I_ν reste constante le long d'une ligne de visée donnée. Lorsque le rayonnement interagit avec la matière, il n'en est plus ainsi et nous allons maintenant préciser comment I_ν varie sous l'effet de deux processus, l'absorption et l'émission, caractérisés par le **coefficient d'absorption** d'une part et l'**émissivité** d'autre part.

Considérons un cylindre élémentaire d'axe \vec{k} , de surface de base $d\Sigma$ centrée en M et de hauteur dl , la variable l repérant la position le long de l'axe défini par M et \vec{k} (Fig. 2.9). Soit $d\mathcal{E}_\nu(l)$ l'énergie des photons de fréquence ν à $d\nu$ près traversant $d\Sigma$ pendant dt avec la direction \vec{k} à $d\Omega$ près¹⁸.

18. Le cas où la direction \vec{k} n'est pas perpendiculaire à la surface $d\Sigma$ s'en déduit simplement par projection, comme sur la Fig. 2.1.

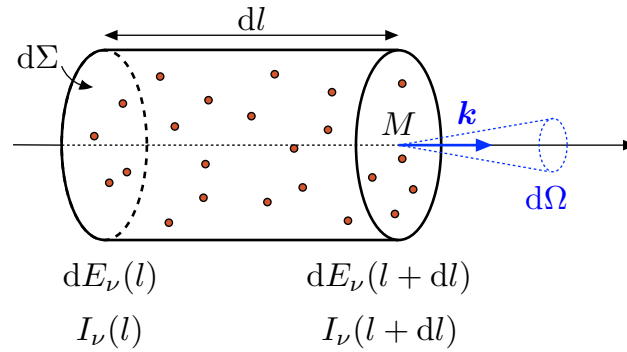


FIGURE 2.9 – **Variation de l'intensité due à l'absorption.** Notations utilisées pour exprimer la variation de l'énergie $d\mathcal{E}_\nu$ traversant l'élément de surface $d\Sigma$, du fait du processus d'absorption.

On va chercher à exprimer la variation (négative) de $d\mathcal{E}_\nu$ entre l et $l + dl$, sous l'effet du processus d'absorption, soit

$$d\mathcal{E}_\nu(l + dl) - d\mathcal{E}_\nu(l) = d^2\mathcal{E}_{\nu,a} < 0 \quad (2.37)$$

Soit n la **densité numérique** (nombre par unité de volume) des éléments absorbants (grain de poussière, atome, ion, molécule) et $s_{\nu,a}$ leur **section efficace d'absorption**¹⁹. On montre alors que

$$d^2\mathcal{E}_{\nu,a} = -n s_{\nu,a} dl d\mathcal{E}_\nu = -\kappa_\nu dl d\mathcal{E}_\nu, \quad (2.38)$$

le signe $-$ traduisant le fait que l'absorption prélève de l'énergie au faisceau.

Exercice 8 : Établir la relation (2.38). Quelle hypothèse portant sur la section efficace et la densité des éléments absorbants fait-on implicitement ?

Coefficient d'absorption

La grandeur $\kappa_\nu = n s_{\nu,a}$ est le **coefficient d'absorption**. Il a la dimension de l'inverse d'une longueur²⁰ et s'exprime par exemple en cm^{-1} . Il dépend bien sûr de la position, ainsi que de la fréquence via $s_{\nu,a}$, en particulier au voisinage d'une fréquence de transition si l'élément absorbant est un atome ou une molécule. Sauf cas particuliers (présence d'un fort champ électrique \vec{E} ou magnétique \vec{B} , par exemple), κ_ν est indépendant de la direction²¹. Il est utile de noter que si l'on remplace $d\mathcal{E}_\nu$ par son expression (2.11) dans (2.38), on obtient

$$d^2\mathcal{E}_{\nu,a} = -\kappa_\nu I_\nu dl d\Sigma d\Omega dt d\nu = -\kappa_\nu I_\nu dV d\Omega dt d\nu, \quad (2.39)$$

où dV est l'élément de volume concerné. Par intégration, on montre aisément que cette relation donnant l'énergie absorbée par l'élément de volume dV est indépendante de la forme de cet élément²².

19. Cette section efficace dépend en général de la fréquence.

20. Notons que certains auteurs écrivent que $\kappa_\nu = \chi_\nu \rho$, où ρ est la masse volumique du milieu, et appellent coefficient d'absorption la grandeur χ_ν , qui s'exprime en $\text{cm}^2 \text{g}^{-1}$ dans le système CGS.

21. Il faut préciser que cela n'est plus vrai lorsque le milieu absorbant est en mouvement, en raison de l'**effet Doppler**.

22. Cela est vrai tant qu'il reste infinitésimal, bien sûr.

Épaisseur optique

Introduisons maintenant la notion très importante d'**épaisseur optique** τ_ν le long du trajet en posant

$$\begin{array}{|l} \parallel \\ \parallel \\ \parallel \end{array} \quad d\tau_\nu = \kappa_\nu dl. \quad (2.40)$$

La grandeur τ_ν est sans dimension et dépend en général de ν via κ_ν . La variation d'énergie due à l'absorption s'exprime alors simplement par

$$d^2\mathcal{E}_{\nu,a} = -d\tau_\nu d\mathcal{E}_\nu. \quad (2.41)$$

On parle de milieu **optiquement mince** lorsque $\tau_\nu \ll 1$, et **optiquement épais** lorsque $\tau_\nu \gg 1$.

Émissivité

La présence de sources de rayonnement dans le cylindre considéré ci-dessus va également contribuer à la variation de $d\mathcal{E}_\nu$. Supposant pour commencer qu'il n'y a pas d'éléments absorbants mais uniquement des sources de rayonnement dans le cylindre élémentaire de la Fig. 2.9, on aura

$$d\mathcal{E}_\nu(l + dl) - d\mathcal{E}_\nu(l) = d^2\mathcal{E}_{\nu,e} > 0 \quad (2.42)$$

Pour exprimer $d^2\mathcal{E}_{\nu,e}$, on introduit l'**émissivité** ϵ_ν telle que

$$\begin{array}{|l} \parallel \\ \parallel \\ \parallel \end{array} \quad d^2\mathcal{E}_{\nu,e} = \epsilon_\nu dV d\Omega dt d\nu. \quad (2.43)$$

L'émissivité ϵ_ν est donc la **puissance émise par unité de volume, par unité d'angle solide et par intervalle de fréquence dans la direction \vec{k}** . Elle s'exprime en $\text{W.m}^{-3}.\text{Hz}^{-1}.\text{sr}^{-1}$. Dans le cas général, ϵ_ν dépend de M , de ν , éventuellement de la direction \vec{k} si le milieu émetteur est en mouvement par rapport à l'observateur, et du temps t si l'on n'est pas en régime stationnaire.

2.3.2 L'équation du transfert

Établissement de l'équation

Dans le cas général où l'absorption et l'émission coexistent, on déduit de ce qui précède que

$$d\mathcal{E}_\nu(l + dl) - d\mathcal{E}_\nu(l) = d^2\mathcal{E}_{\nu,a} + d^2\mathcal{E}_{\nu,e} = -\kappa_\nu I_\nu dV d\Omega dt d\nu + \epsilon_\nu dV d\Omega dt d\nu \quad (2.44)$$

Nous relierons ainsi la variation de $d\mathcal{E}_\nu$ le long d'un rayon aux phénomènes d'absorption et d'émission. Cette quantité $d\mathcal{E}_\nu$ s'exprime par ailleurs en fonction de l'intensité spécifique²³ $I_\nu(l)$,

$$d\mathcal{E}_\nu(l) = I_\nu(l) d\Sigma d\Omega dt d\nu \quad \text{et} \quad d\mathcal{E}_\nu(l + dl) = I_\nu(l + dl) d\Sigma d\Omega dt d\nu, \quad (2.45)$$

d'où la variation $d^2\mathcal{E}_\nu = (dI_\nu)d\Sigma d\Omega dt d\nu$. En égalant cette expression de $d^2\mathcal{E}_\nu$ à celle obtenue plus haut (2.44) pour $d^2\mathcal{E}_{\nu,a} + d^2\mathcal{E}_{\nu,e}$, on aboutit finalement à l'équation d'évolution de I_ν le long de la ligne de visée, qui est **l'équation fondamentale du transfert**

$$\begin{array}{|l} \parallel \\ \parallel \\ \parallel \end{array} \quad \frac{dI_\nu}{dl} = -\kappa_\nu I_\nu + \epsilon_\nu. \quad (2.46)$$

23. Celle-ci est supposée ne dépendre que de la position l , et donc indépendante de la direction et du temps.

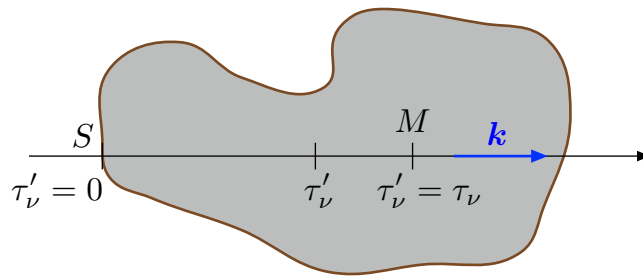


FIGURE 2.10 – **Calcul de l'intensité dans un nuage.** Pour obtenir la valeur de I au point M , on intègre l'équation du transfert entre S et M avec la condition aux limites $I(S, \vec{k}) = I_0$.

Fonction source

Si $\kappa_\nu \neq 0$, l'équation (2.46) peut être réécrite sous une forme équivalente en remplaçant la coordonnée l le long de la direction considérée par l'épaisseur optique τ_ν . Avec $d\tau_\nu = \kappa_\nu dl$, et en introduisant la **fonction source**

$$S_\nu = \frac{\epsilon_\nu}{\kappa_\nu}. \quad (2.47)$$

on met ainsi l'équation du transfert sous la forme trompeusement simple

$$\frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = S_\nu - I_\nu \quad (2.48)$$

Résolution

L'équation du transfert (2.46) est une **équation différentielle linéaire du premier ordre**. On peut l'intégrer, au moins formellement, pour déterminer l'intensité $I_\nu(M, \vec{k})$ en un point M donné et dans une direction \vec{k} donnée, à condition bien entendu de connaître les **conditions aux limites ainsi que l'émissivité et le coefficient d'absorption**. La difficulté centrale du problème du transfert de rayonnement réside dans le fait que **les propriétés d'absorption et d'émission du milieu vont dépendre du champ de rayonnement**, à savoir la densité d'énergie ou l'intensité moyenne. Or, pour obtenir l'intensité moyenne $J_\nu(M)$ au point M , on devra intégrer l'équation (2.46) pour toutes les directions passant par M , ce qui nécessite la connaissance de $I_\nu(S', \vec{k}_{S'})$ pour tout point S' de la surface, dans la direction $\vec{k}_{S'}$ le liant au point M , mais surtout celle de κ_ν et ϵ_ν , qui dépendent du champ de rayonnement, dans l'ensemble du volume... En l'absence de diffusion, chaque ligne de visée $S'M$ peut être traitée indépendamment, mais on voit que, même dans ce cas, le problème est hautement **non-linéaire**.

Solution formelle dans un milieu purement absorbant

Lorsque $\epsilon_\nu = 0$, la fonction source est nulle et l'équation du transfert s'intègre trivialement pour donner la solution formelle de l'équation du transfert dans un milieu purement absorbant

$$I_\nu(\tau_\nu) = I_0 e^{-\tau_\nu}, \quad (2.49)$$

avec $\tau_\nu = 0$ là où $I_\nu = I_0$ (pour un nuage comme celui de la Fig. 2.10, il est naturel de choisir $\tau_\nu = 0$ là où la ligne de visée atteint le bord du nuage). On retrouve la loi d'atténuation exponentielle bien connue, dite **loi de Beer-Lambert**. Sur cet exemple très simple, on voit clairement que la "bonne variable" à utiliser est l'épaisseur optique τ_ν et non la position l .

Exercice 9 : Montrer que dans la limite $\tau_\nu \ll 1$ l'intensité spécifique est atténuée linéairement avec la quantité d'absorbant présents sur la ligne de visée. Interpréter physiquement la saturation de l'absorption lorsque τ_ν devient proche de l'unité.

Solution formelle dans un milieu absorbant et émissif

Commençons par une remarque qualitative. Lorsque S_ν est uniforme et non nulle, on peut voir aisément que si l'on pénètre profondément dans le milieu, I_ν doit nécessairement tendre vers S_ν . En effet, l'équation (2.48) nous indique que

$$\text{si } I_\nu < S_\nu \implies \frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} > 0 \quad \text{et} \quad \text{si } I_\nu > S_\nu \implies \frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} < 0$$

Dans le premier cas, I_ν croît le long de la ligne de visée jusqu'à atteindre S_ν , et dans le second cas, I_ν décroît également jusqu'à atteindre S_ν . Le "régime stationnaire", pour $\tau_\nu \rightarrow \infty$, est donc $I_\nu = S_\nu$.

Généralisons à une fonction source non uniforme. Pour une direction \vec{k} donnée, supposons la fonction source $S_\nu(\tau'_\nu, \vec{k})$ connue pour toutes les épaisseurs optiques τ'_ν (voir la Fig. 2.10) et intégrons l'équation (2.48), laquelle se présente comme une équation différentielle linéaire du premier ordre avec second membre, où τ'_ν désigne la variable courante. On montre alors que la solution formelle de l'équation du transfert dans un milieu absorbant et émissif est

$$I_\nu(\tau_\nu) = I_0 e^{-\tau_\nu} + \int_0^{\tau_\nu} S_\nu(\tau'_\nu) e^{-(\tau_\nu - \tau'_\nu)} d\tau'_\nu \quad (2.50)$$

Exercice 10 : Établir l'expression (2.50).

L'interprétation des deux termes qui apparaissent dans le membre de droite est immédiate : le premier correspond au rayonnement incident atténué par la traversée du milieu jusqu'à τ_ν , comme pour (2.49), tandis que le second correspond à l'émission le long de la ligne de visée, atténuée par la matière située entre le point émetteur considéré et le point où l'on calcule I_ν (Fig. 2.10).

Si la fonction source est uniforme dans le milieu ($S_\nu = S_0$), la solution prend la forme simple

$$I_\nu(\tau_\nu) = I_0 e^{-\tau_\nu} + S_0(1 - e^{-\tau_\nu}) \quad (2.51)$$

où l'on voit clairement que $I_\nu \approx S_0$ lorsque $\tau_\nu \gg 1$. Dans ce cas, l'intensité dans le milieu devient alors indépendante des conditions aux limites.

Dans la pratique, comme on l'a déjà évoqué, S_ν n'est pas nécessairement connue *a priori* car ϵ_ν , tout comme κ_ν , peut dépendre du champ de rayonnement lui-même (par exemple, le coefficient d'absorption

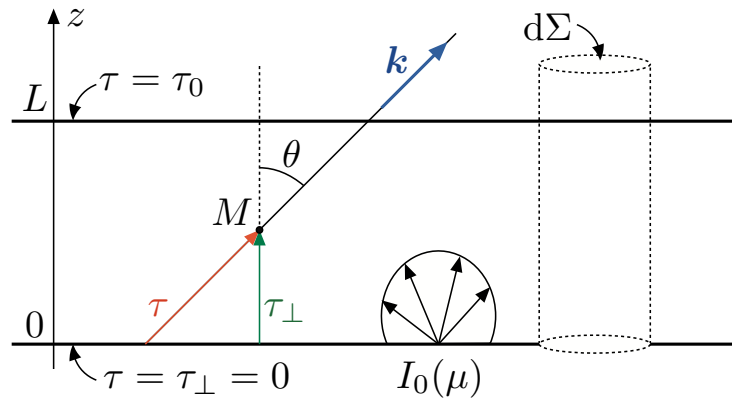


FIGURE 2.11 – **Transfert dans une couche plan-parallèle.** La couche plan-parallèle, d'épaisseur L et d'épaisseur optique totale τ_0 est éclairée sur sa face inférieure par l'intensité $I_0(\mu)$. L'épaisseur optique τ_{\perp} est comptée le long de Oz .

d'un gaz dépend de son degré d'ionisation, lequel est déterminé en partie par la valeur du champ de rayonnement). Dans ce cas, on a affaire à un **problème non linéaire** et l'expression (2.50) ne fournit qu'une solution formelle. Si la dépendance de S_{ν} vis à vis de I_{ν} est "faible", on pourra éventuellement obtenir la solution par itérations successives.

Équation du transfert en géométrie plan-parallèle

Lorsque la géométrie du milieu et les conditions aux limites présentent la **symétrie axiale**, il est naturel de mesurer l'épaisseur optique le long de l'axe de symétrie. Notons celui-ci Oz et notons \vec{u}_z son vecteur unitaire. Le rayon qu'on considère (Fig. 2.11), porté par le vecteur unitaire \vec{k} , fait un angle θ supposé aigu avec cet axe de symétrie. Avec $\vec{k} \cdot \vec{u}_z = \cos \theta = \mu > 0$, on peut alors définir une épaisseur optique $\tau_{\nu, \perp}$ le long de Oz et il est clair que celle-ci est liée à l'épaisseur optique τ_{ν} le long du rayon par $d\tau_{\nu, \perp} = \mu d\tau_{\nu}$, ce qui permet de mettre l'équation du transfert sous la forme

$$\mu \frac{dI_{\nu}}{d\tau_{\nu, \perp}} = S_{\nu} - I_{\nu} \quad (2.52)$$

Il est facile de vérifier que pour une direction $\mu < 0$, cette relation est également valable.

2.3.3 Les phénomènes de diffusion

Dans la réalité, lors de l'interaction du rayonnement avec la matière, le phénomène de **diffusion du rayonnement** coexiste souvent avec l'absorption. Il peut prendre diverses formes.

La diffusion Thomson

La **diffusion Thomson** a lieu lors de l'interaction de photons de faible énergie avec des charges libres, donc dans des gaz au moins partiellement ionisés, comme les intérieurs stellaires (Fig. 2.12). Du fait de leur moindre inertie, l'interaction se fait principalement avec les électrons. La section efficace d'interaction est indépendante de la longueur d'onde λ et vaut, pour du rayonnement non polarisé,

$$s_{\nu} = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2} \right)^2 \quad (2.53)$$

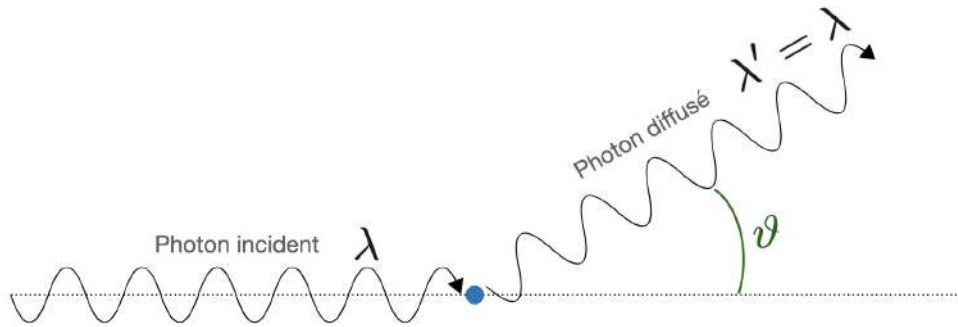


FIGURE 2.12 – Diffusion Thomson.

où q et m sont la charge électrique et la masse de la particule sur laquelle diffuse le rayonnement. Dans le cas des électrons, on a numériquement $s_\nu = 6.65 \cdot 10^{-25} \text{ cm}^2$. La répartition angulaire du rayonnement diffusé, toujours pour du rayonnement incident non polarisé, est également indépendante de la longueur d'onde, et varie comme $1 + \cos^2 \vartheta$, avec ϑ l'angle entre les directions incidente et diffusée. On a ainsi la **section efficace différentielle de diffusion Thomson**

$$\frac{ds_\nu}{d\Omega} = \left(\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2} \right)^2 \frac{1 + \cos^2 \vartheta}{2} \quad (2.54)$$

Cette diffusion est **élastique**, ou encore **cohérente**, ce qui signifie que la fréquence du photon n'est pas modifiée. La diffusion Thomson contribue par exemple à l'épaisseur optique des étoiles et à l'épaisseur optique de l'univers avant la **recombinaison**.

La diffusion Compton et Compton inverse

En présence de photons ou d'électrons libres très énergétiques, on ne peut adopter un traitement classique fondé sur le rayonnement du dipôle²⁴ et on parle de **diffusion Compton**, là encore sur les charges libres (Fig. 2.13). Notons que cette diffusion est **inélastique**, ce qui signifie que l'énergie du photon, donc la fréquence du rayonnement, change lors de l'interaction. On a ainsi, lorsque la charge est un électron initialement au repos, une perte d'énergie du photon correspondant à une augmentation de sa longueur d'onde selon

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \vartheta) \quad (2.55)$$

où $h/m_e c$ est la **longueur d'onde Compton**. Lorsque le photon perd ainsi de l'énergie, on parle de **diffusion Compton directe**, mais il est aussi possible qu'il en gagne si l'électron est en mouvement rapide. On parle alors de **diffusion Compton inverse**. Un exemple de ce dernier cas est l'**effet Sunyaev-Zeldovich**, qui explique la distortion spectrale du fond diffus cosmologique au travers du gaz très chaud des amas de galaxies (Fig. 2.14). Notons que la diffusion Thomson est la limite de la diffusion Compton à basse énergie.

La diffusion Rayleigh et la diffusion de Mie

La **diffusion Rayleigh** a lieu lorsqu'un photon interagit avec une charge liée (dans un atome ou une molécule), que l'on peut en première approximation traiter par le modèle de l'électron élastiquement lié. La différence importante par rapport à la diffusion Thomson est le comportement à basse fréquence, où une dépendance en λ^{-4} apparaît. Celle-ci explique que les atmosphères planétaires (celle de la Terre en particulier !) diffusent davantage la lumière solaire dans le bleu que dans le rouge, d'où la couleur

24. C'est cette approche classique qui donne la section efficace Thomson.

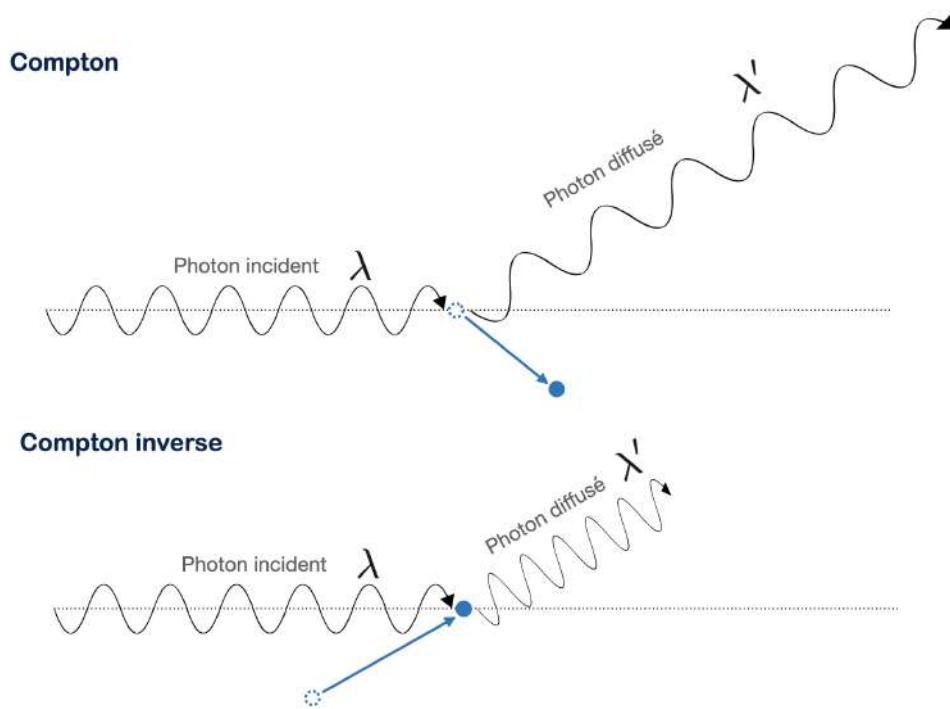


FIGURE 2.13 – Diffusion Compton et Compton inverse.

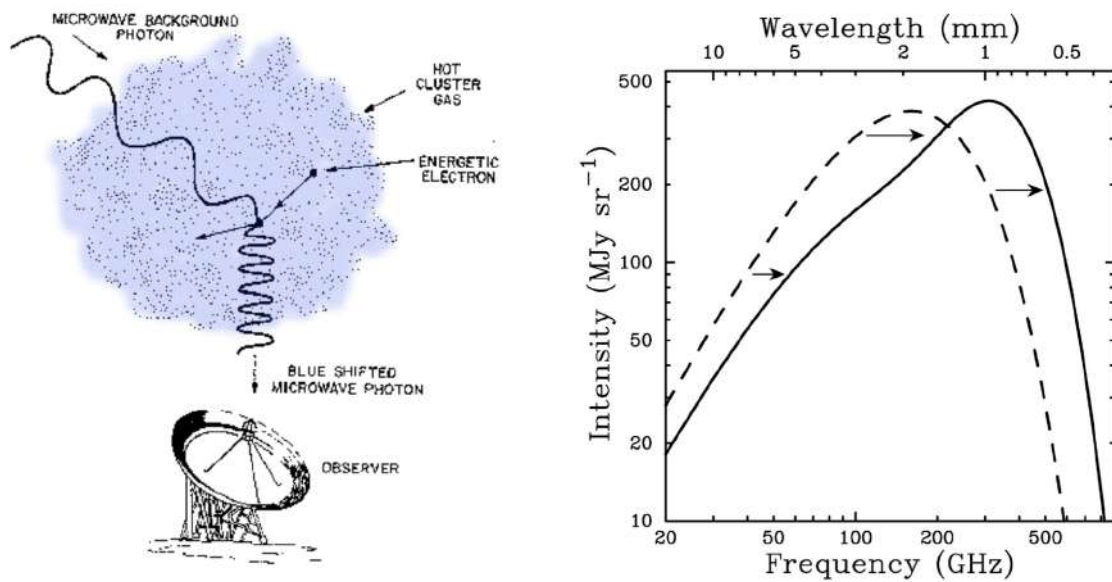


FIGURE 2.14 – **Effet Sunyaev-Zel'dovich**. Le schéma de gauche présente le principe de l'effet (Crédit : *L. Van Speybroeck*) et la figure de droite montre la déformation du spectre du CMB (en tirets) par l'effet SZ (traits plein) [17].

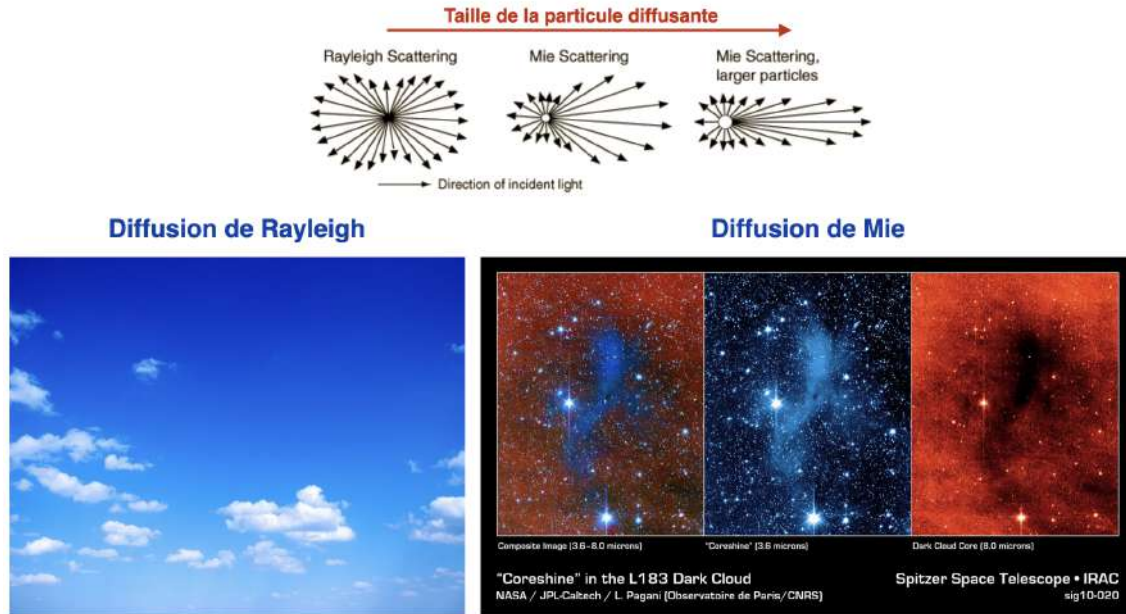


FIGURE 2.15 – Diffusion de Rayleigh-Mie.

bleue du ciel. Lorsque la taille des particules diffusantes augmente (grains de poussière interstellaires, gouttelettes d'eau dans un brouillard), on passe à la **diffusion de Mie**, beaucoup moins chromatique (Fig. 2.15).

2.3.4 L'équation du transfert en présence de diffusion

On a vu précédemment qu'en l'absence de diffusion on peut résoudre l'équation du transfert le long d'une ligne de visée particulière, indépendamment des autres, à condition de connaître la fonction source S_ν . Le phénomène de diffusion va coupler entre elles toutes les régions et il faudra maintenant résoudre l'équation du transfert globalement, pour l'ensemble du milieu, ce qui complique beaucoup le problème. Dans la suite, nous allons pour simplifier supposer que la diffusion est cohérente.

Section efficace, coefficient de diffusion, diffusion hors du faisceau

Comme pour le cas sans diffusion, nous allons chercher à exprimer la variation $d^2\mathcal{E}_{\nu,d}$ - due uniquement à la diffusion - de l'énergie $d\mathcal{E}_\nu$ traversant la surface $d\Sigma$, entre l et $l + dl$, dans la direction \vec{k} . Ce processus provoque d'une part une diminution de $d\mathcal{E}_\nu$, notée $d^2\mathcal{E}_{\nu,d}^-$, car des photons sont défléchis dans une direction autre que \vec{k} , telle que \vec{k}'_1 sur la Fig. 2.16. Pour caractériser cet effet, nous définissons comme pour l'absorption une **section efficace de diffusion** $s_{\nu,d}$ et un **coefficient de diffusion** $\sigma_\nu = ns_{\nu,d}$, avec n la densité numérique des éléments diffusants. La dimension de σ_ν est la même que celle de κ_ν , à savoir l'inverse d'une longueur, et ce coefficient dépend en général de la fréquence. La variation de l'énergie lumineuse du fait de ce phénomène de **diffusion hors du faisceau** est alors

$$d^2\mathcal{E}_{\nu,d}^- = -ns_{\nu,d}dld\mathcal{E}_\nu = -\sigma_\nu dld\mathcal{E}_\nu = -\sigma_\nu I_\nu dV d\Omega dt d\nu \quad (2.56)$$

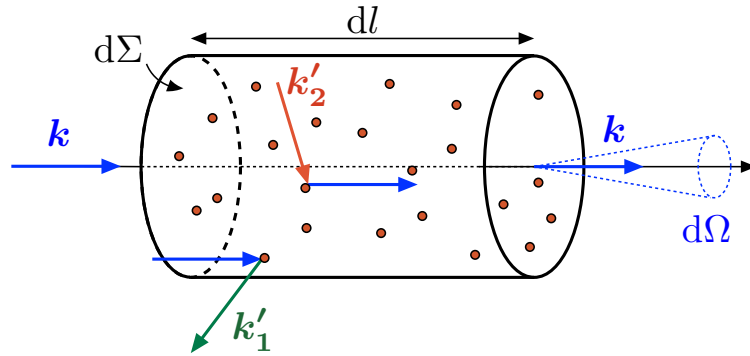


FIGURE 2.16 – **Le double effet de la diffusion.** La diffusion a pour effet d'une part d'envoyer des photons ayant la direction incidente considérée \vec{k} vers une autre direction \vec{k}'_1 (contribution négative à $d\mathcal{E}_\nu$) et d'autre part de ramener dans la direction \vec{k} des photons arrivant dans l'élément de volume dV avec des directions de vol telles que \vec{k}'_2 (contribution positive à $d\mathcal{E}_\nu$).

Exercice 11 : Établir la relation (2.56).

À cette diminution $d^2\mathcal{E}_{\nu,d}^-$ est associée une variation de I_ν tout à fait analogue à celle liée à l'absorption, à savoir $dI_{\nu,a} = -\kappa_\nu I_\nu dl$ (voir l'équation 2.39), soit

$$dI_{\nu,d}^- = -\sigma_\nu I_\nu dl. \quad (2.57)$$

Section efficace différentielle de diffusion

La diffusion a d'autre part pour effet de ramener dans la direction \vec{k} des photons issus d'autres directions telles que \vec{k}'_2 (Fig. 2.16). Afin d'exprimer la contribution correspondante à la variation de l'énergie ($d^2\mathcal{E}_{\nu,d}^+$, positive cette fois) il faut revenir sur l'expression du terme $d^2\mathcal{E}_{\nu,d}^-$ en faisant apparaître explicitement l'énergie diffusée dans chacune des différentes directions $\vec{k}'_1 \neq \vec{k}$. Pour ce faire, on introduit la **section efficace différentielle de diffusion** $\tilde{s}_{\nu,d}(\vec{k} \rightarrow \vec{k}')$ caractérisant l'efficacité de la diffusion depuis la direction \vec{k} initiale (à $d\Omega$ près) vers la direction finale \vec{k}' (à $d\Omega'$ près)²⁵. À $\tilde{s}_{\nu,d}$ est associé un **coefficient différentiel de diffusion** $\tilde{\sigma}_\nu(\vec{k} \rightarrow \vec{k}') = n \tilde{s}_{\nu,d}(\vec{k} \rightarrow \vec{k}')$ que, par analogie avec l'équation (2.56), nous définirons par la relation

$$d^3\mathcal{E}_{\nu,d}^-(\vec{k} \rightarrow \vec{k}') = -\frac{\tilde{\sigma}_\nu(\vec{k} \rightarrow \vec{k}')}{4\pi} d\Omega' I_\nu(\vec{k}) dV d\Omega dt d\nu, \quad (2.60)$$

25. Notons que la définition usuelle de la section efficace différentielle est

$$\tilde{s} = \frac{ds}{d\Omega} \quad (2.58)$$

mais que nous utilisons ici plutôt

$$\tilde{s} = 4\pi \frac{ds}{d\Omega} \quad (2.59)$$

afin de conserver la même dimension entre s et \tilde{s} .

où $d^3\mathcal{E}_{\nu,d}^-(\vec{k} \rightarrow \vec{k}')$ désigne l'énergie venant de \vec{k} et redistribuée dans la direction \vec{k}' . Le terme $d^2\mathcal{E}_{\nu,d}^-$ n'est alors rien d'autre que le résultat de l'intégration sur $d\Omega'$ de l'expression précédente, soit

$$d^2\mathcal{E}_{\nu,d}^-(\vec{k}) = \int_{\Omega'} d^3\mathcal{E}_{\nu,d}^-(\vec{k} \rightarrow \vec{k}') = - \left[\int \frac{\tilde{\sigma}_{\nu}(\vec{k} \rightarrow \vec{k}')}{4\pi} d\Omega' \right] I_{\nu}(\vec{k}) dV d\Omega dt d\nu. \quad (2.61)$$

Ainsi, avec la définition choisie pour $\tilde{\sigma}_{\nu}$, on a simplement

$$\sigma_{\nu} = \int \frac{\tilde{\sigma}_{\nu}(\vec{k} \rightarrow \vec{k}')}{4\pi} d\Omega', \quad (2.62)$$

et σ_{ν} n'est autre que la valeur moyenne de $\tilde{\sigma}_{\nu}$ sur tous les angles de diffusion (\vec{k}, \vec{k}') . Notons que $\tilde{\sigma}_{\nu}$ a la même dimension que σ_{ν} et s'exprime donc en m^{-1} ou en cm^{-1} .

Diffusion à l'intérieur du faisceau

Nous sommes maintenant en mesure d'exprimer la variation $dI_{\nu,d}^+$ de l'intensité spécifique I_{ν} liée au phénomène de **diffusion à l'intérieur du faisceau**, qui s'écrit

$$dI_{\nu,d}^+(\vec{k}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega'} \tilde{\sigma}_{\nu}(\vec{k}' \rightarrow \vec{k}) I_{\nu}(\vec{k}') d\Omega' dl. \quad (2.63)$$

Exercice 12 : Établir l'expression (2.63).

L'équation du transfert en présence de diffusion

L'équation du transfert devient alors, en comptant toutes les contributions,

$$\frac{dI_{\nu}}{dl} = -(\kappa_{\nu} + \sigma_{\nu})I_{\nu} + \epsilon_{\nu} + \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega'} \tilde{\sigma}_{\nu}(\vec{k}' \rightarrow \vec{k}) I_{\nu}(\vec{k}') d\Omega' \quad (2.64)$$

Cette équation fait clairement apparaître la difficulté supplémentaire imposée par la diffusion dans le traitement du transfert. Même en supposant que l'émissivité et les coefficients d'absorption et de diffusion sont indépendants du champ de rayonnement²⁶, on doit néanmoins résoudre une **équation intégral-différentielle** couplant tous les rayons.

Le cas particulier de la diffusion isotrope

Dans le cas important de la **diffusion isotrope**, $\tilde{\sigma}_{\nu}(\vec{k} \rightarrow \vec{k}')$ ne dépend pas de l'angle de diffusion (angle entre les directions \vec{k} et \vec{k}') et l'on a simplement $\sigma_{\nu} = \tilde{\sigma}_{\nu}$. C'est pour obtenir cette propriété que l'on a introduit le facteur $1/(4\pi)$ dans (2.60). Dans ce cas, l'équation du transfert devient

$$\frac{dI_{\nu}}{dl} = -(\kappa_{\nu} + \sigma_{\nu})I_{\nu} + \epsilon_{\nu} + \sigma_{\nu}J_{\nu}. \quad (2.65)$$

On voit que l'hypothèse d'une diffusion isotrope rend l'équation vérifiée par I_{ν} (apparemment) plus simple. Le coefficient $\alpha_{\nu} = \kappa_{\nu} + \sigma_{\nu}$ est appelé **coefficient d'extinction**. On introduit également l'**albedo de simple diffusion** ω_{ν} qui représente la part de l'extinction due à la diffusion, soit

$$\omega_{\nu} = \frac{\sigma_{\nu}}{\kappa_{\nu} + \sigma_{\nu}}. \quad (2.66)$$

26. Ce qui n'est pas vrai *a priori*.

Il est alors naturel de définir l'épaisseur optique par $d\tau_\nu = (\kappa_\nu + \sigma_\nu)dl$, de sorte que

$$\frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = -I_\nu + \mathcal{S}_\nu \quad \text{avec} \quad \mathcal{S}_\nu = \frac{\epsilon_\nu + \sigma_\nu J_\nu}{\kappa_\nu + \sigma_\nu} = \omega_\nu J_\nu + (1 - \omega_\nu) S_\nu \quad (2.67)$$

où $S_\nu = \epsilon_\nu/\kappa_\nu$ est la fonction source en l'absence de diffusion. Cette équation est analogue à (2.48) mais on voit clairement ici que la nouvelle fonction source \mathcal{S}_ν , moyenne pondérée de S_ν et de J_ν ne saurait être connue a priori puisqu'elle dépend explicitement de J_ν , c'est-à-dire du champ de rayonnement lui-même. Les solutions obtenues précédemment pour l'équation sans diffusion (2.50) ont exactement la même forme. Ces expressions ne fournissent toutefois pas une solution explicite puisque \mathcal{S}_ν dépend de I_ν via J_ν .

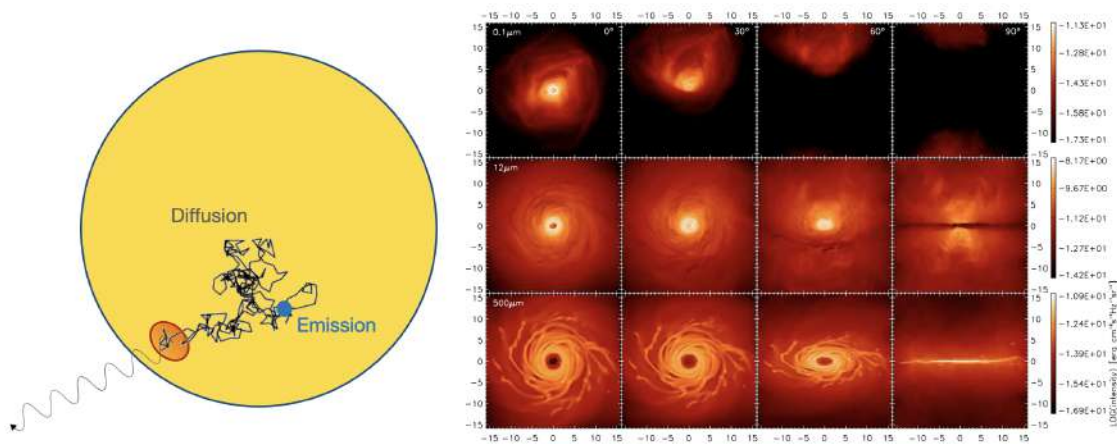


FIGURE 2.17 – **Marche au hasard et méthodes Monte Carlo.** Le schéma de gauche montre une marche au hasard d'un photon émis à l'intérieur du Soleil et diffusé de nombreuses fois avant d'être émis à la surface. La figure de droite montre le résultat d'observations synthétiques avec le code de transfert radiatif Monte Carlo RADMC-3D²⁸ sur des simulations d'un tore poussiérier aux-tour d'un noyau actif de galaxie [18].

Interprétation probabiliste de la diffusion

L'effet de la diffusion peut être vu comme une **marche au hasard** pour les photons, particulièrement importante dans les milieux denses comme les intérieurs stellaires (Fig. 2.17, gauche). Pour le comprendre, nous allons préciser en quoi le phénomène de diffusion modifie le destin d'un photon avant son absorption, en nous plaçant dans la limite où les photons subissent (en moyenne) un **nombre élevé de diffusions avant d'être absorbés**. Cela implique d'une part que $\omega_\nu \approx 1$ et d'autre part que le milieu considéré soit optiquement épais (sans quoi de nombreux photons pourraient quitter le milieu avant d'interagir). Considérons le déplacement de photons individuels et les interactions que ceux-ci subissent avec la matière. Ces interactions sont de deux types : **absorption** (le photon disparaît "sur place") et **diffusion** (le photon repart dans une autre direction, aléatoire, telle qu'en moyenne sur de nombreux événements la distribution des angles de diffusion reproduise la dépendance angulaire du coefficient $\tilde{\sigma}_\nu$). La probabilité pour qu'une interaction soit une diffusion vaut simplement ω_ν (albedo de simple diffusion), la probabilité pour que cette interaction soit une absorption étant $\eta_\nu = 1 - \omega_\nu$. On montre que la distance moyenne $\langle l \rangle$ parcourue avant interaction (le **libre parcours moyen**) est

$$\langle l \rangle = \frac{1}{\kappa_\nu + \sigma_\nu} \quad (2.68)$$

Exercice 13 : Établir l'expression (2.68) du libre parcours moyen. On pourra commencer par montrer que la probabilité de non-interaction d'un photon après un trajet de "longueur" τ_ν dans le milieu est $P_s(\tau_\nu) = e^{-\tau_\nu}$, puis en déduire la probabilité pour qu'une interaction intervienne précisément entre τ_ν et $\tau_\nu + d\tau_\nu$.

Le nombre moyen de diffusions avant absorption, noté $\bar{N}(\omega_\nu)$, est évidemment une fonction de l'albedo ω_ν et on peut dire *a priori* que lorsque $\omega_\nu \rightarrow 0$ alors $\bar{N} \rightarrow 0$, et que pour $\omega_\nu \rightarrow 1$ alors $\bar{N} \rightarrow +\infty$. On montre sans grande difficulté qu'il a pour expression

$$\bar{N}(\omega_\nu) = \frac{\omega_\nu}{1 - \omega_\nu} \quad (2.69)$$

Exercice 14 : Établir l'expression (2.69). On commencera par exprimer la probabilité $p(N)$ d'observer exactement N diffusions avant une absorption.

La **marche aléatoire** que subissent ainsi les photons implique que la distance moyenne \bar{R} à laquelle se trouve un photon, par rapport à son point de départ, lorsqu'il est finalement absorbé, est

$$\bar{R} = \sqrt{\bar{N}} \langle l \rangle \quad (2.70)$$

Cette **approche probabiliste** de la diffusion, et plus généralement du transfert de rayonnement, est mise à profit dans les méthodes de résolution par **simulation Monte-Carlo** (Fig. 2.17, droite).

Chapitre 3

L'équilibre thermodynamique

Dans des milieux assez denses et opaques ($\tau_\nu \gg 1$) s'établit un **équilibre thermodynamique** au sein de la matière et entre la matière et le rayonnement. Des lois simples permettent alors de décrire les caractéristiques du rayonnement (distribution spectrale de I_ν) et de la matière (population des niveaux fondamental et excités, distribution des vitesses, états d'ionisation, ...). Cette description peut être étendue à des systèmes où l'équilibre thermodynamique varie de point en point, ce qu'on nomme ETL pour **équilibre thermodynamique local** (LTE en anglais). Cette situation idéale est généralement prise pour référence, même si les milieux astrophysiques les plus dilués ne sont fréquemment pas à l'ETL.

3.1 Rayonnement de corps noir

Considérons, comme sur la Fig. 3.1, une **enceinte, maintenue à la température T par un thermostat, contenant un champ de rayonnement**, et supposons que cette enceinte soit entièrement opaque à toutes les fréquences, ce qui revient à supposer que l'épaisseur optique $\tau_\nu \rightarrow \infty$ quelle que soit la fréquence ν . Du fait des **collisions** entre les photons enfermés dans l'enceinte avec les parois, qui amènent un **échange d'énergie entre photons et matière**, un équilibre va s'établir entre la matière constituant ces parois et le rayonnement, et donc entre les photons eux-mêmes. Le système ainsi constitué est appelé **corps noir**, appellation qui fait référence à son épaisseur optique infinie à toutes les fréquences. Nous allons établir les propriétés du rayonnement du corps noir, qu'on peut mesurer en perçant un trou suffisamment petit dans la paroi de l'enceinte pour que l'équilibre ne soit pas fondamentalement perturbé. Il faut noter que la notion de corps noir est un **concept idéalisé**, même si certains systèmes physiques s'en approchent.

3.1.1 Loi de Kirchhoff

Une propriété importante du rayonnement du corps noir est que son intensité spécifique I_ν ne dépend que de la température¹, ce qui constitue la **loi de Kirchhoff**, qu'on écrit sous la forme

$$I_\nu = B_\nu(T) \quad (3.1)$$

Une démonstration élégante de cette propriété, fondée sur la considération de deux enceintes à la même température T percées chacune d'un petit trou en regard (Fig. 3.2), est laissée en exercice.

1. et de la fréquence, bien entendu...

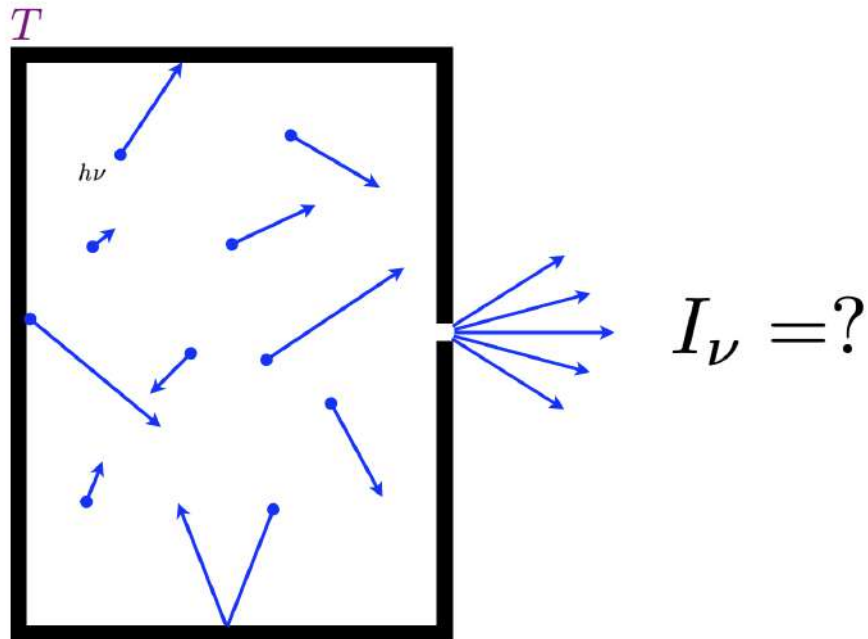


FIGURE 3.1 – Schématisation d'un corps noir.

Exercice 15 : En considérant l'expérience de pensée décrite sur la Fig. 3.2, et en partant de l'hypothèse qu'à une fréquence ν donnée l'intensité du rayonnement dans l'enceinte (1) est supérieure à celle du rayonnement dans l'enceinte (2), montrer qu'on aboutit à une contradiction avec un principe fondamental de la physique. Conclure.

Ce rayonnement est nécessairement **isotrope** et **non polarisé**, du fait des interactions multiples (en nombre infini, en toute rigueur) que subissent les photons avec les parois de l'enceinte.

Revenons à notre enceinte unique à la température T , et plaçons maintenant, à l'intérieur de l'enceinte et juste devant le trou, un corps matériel, lui aussi à la température T (Fig. 3.3). On cherche à savoir quelles sont les propriétés de l'émission de ce corps du fait qu'il est porté à cette température. On montre que la fonction source S_ν associée à cette **émission thermique** est donnée par

$$S_\nu = B_\nu(T) \quad (3.2)$$

Exercice 16 : Démontrer cette relation, en considérant l'équation du transfert appliquée à un rayon traversant le corps matériel et sortant par le trou percé dans l'enceinte. On pourra raisonner par l'absurde en supposant par exemple que $S_\nu > B_\nu(T)$.

Sous cette forme, **la loi de Kirchhoff relie donc de manière fondamentale les propriétés d'absorption et d'émission des corps matériels en équilibre thermique**, puisqu'elle indique que le rapport de l'émissivité au coefficient d'absorption est une fonction - qu'on déterminera plus loin - de la seule température².

$$\frac{\epsilon_\nu}{\kappa_\nu} = B_\nu(T) \quad (3.3)$$

2. Il s'agit de la **température cinétique**, caractérisant l'agitation thermique des constituants du corps.

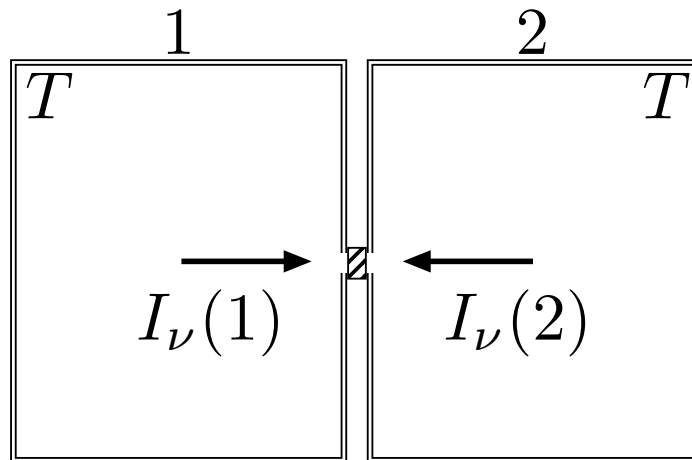


FIGURE 3.2 – Schéma d'une expérience de pensée permettant de démontrer la loi de Kirchhoff. Deux enceintes à la température T , séparées par un filtre de largeur spectrale $\delta\nu$ autour de ν .

On a ainsi l'expression de la fonction source pour un milieu à l'équilibre thermique, l'intensité émise étant ensuite obtenue par intégration de l'équation du transfert le long de la ligne de visée, suivant

$$\frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = B_\nu(T) - I_\nu. \quad (3.4)$$

Il convient donc de bien distinguer l'émission thermique, pour laquelle $S_\nu = B_\nu(T)$, de l'émission de corps noir, pour laquelle $I_\nu = B_\nu(T)$. La seconde est la limite de la première lorsque l'épaisseur optique tend vers l'infini.

3.1.2 Loi de Planck

La forme de $B_\nu(T)$ a été obtenue par Max Planck³ en supposant que le rayonnement est constitué de quanta d'énergie, les **photons**. Cette hypothèse était à l'époque (1900) plutôt iconoclaste, étant donné les succès de la théorie électromagnétique de Maxwell, pour laquelle la **nature ondulatoire de la lumière** ne fait aucun doute. Pour faire ce calcul en s'appuyant sur des méthodes de physique statistique, il faut obtenir d'une part la **densité d'états des photons** dans une enceinte de type corps noir⁴, et d'autre part trouver le **nombre moyen de photons** dans chacun de ces états. Le produit de ces deux quantités donnera ainsi accès à la quantité \mathcal{N}_ν , reliée à l'intensité spécifique par $I_\nu = h\nu c \mathcal{N}_\nu$.

Densité d'états des photons du corps noir

Le calcul de la densité d'états implique de considérer les **états quantiques possibles pour un photon** enfermé dans une enceinte de volume V opaque à tout rayonnement. On montre que ces états sont caractérisés par des **valeurs discrètes du vecteur d'onde**⁵ \vec{k} , qui est relié à l'**impulsion du photon** par $\vec{p} = \hbar\vec{k}$. On montre alors, en dénombrant les états possibles correspondant à un intervalle $[\nu, \nu + d\nu]$, par unité de volume et d'angle solide, que cette densité d'états s'écrit

3. Kiel, 23 avril 1858 - Göttingen, 4 octobre 1947.

4. C'est-à-dire le nombre d'états quantiques par intervalle d'énergie (ou ce qui revient au même par intervalle de fréquence), par unité de volume, et par unité d'angle solide.

5. Attention, ici \vec{k} est un vecteur d'onde qui a la dimension de l'inverse d'une longueur ($k = 2\pi/\lambda$) et n'est plus le vecteur unitaire utilisé dans le chapitre 2.

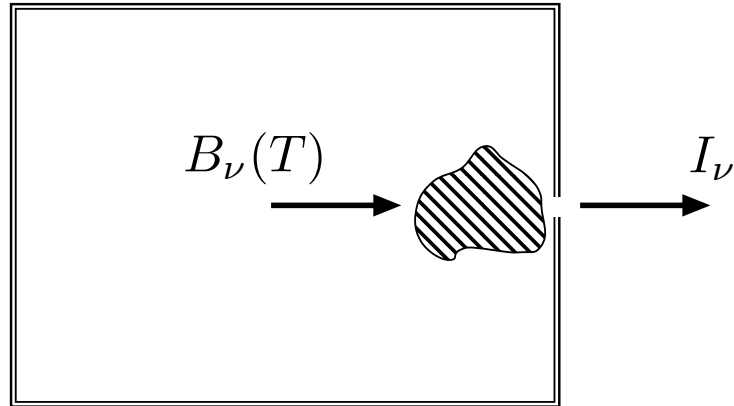


FIGURE 3.3 – **Emission thermique.** Source thermique placée en sortie de l'enceinte corps noir.

$$\rho(\nu) = \frac{2\nu^2}{c^3} \quad (3.5)$$

Exercice 17 : Démontrer la relation (3.5). On pourra considérer l'enceinte comme parallépipédique, et on n'omettra pas de compter les deux états de spin possibles.

Nombre moyen d'occupation d'un état

Les photons sont des **bosons**, ils obéissent donc à la **statistique quantique de Bose-Einstein**, selon laquelle le nombre moyen $\langle N(E) \rangle$ de particules dans un état d'énergie E est donné par

$$\langle N(E) \rangle = \frac{1}{\exp\left(\frac{E - \mu}{k_B T}\right) - 1} \quad (3.6)$$

où μ est le potentiel chimique. Comme les photons sont des **particules de masse nulle**, dont le **nombre n'est pas nécessairement conservé** lors des interactions avec les parois de l'enceinte, **ce potentiel chimique est nul**. Avec $E = h\nu$, on en déduit que les photons suivent la **statistique de Bose**, avec un nombre d'occupation moyen par état

$$\langle N_\nu \rangle = \frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right) - 1} \quad (3.7)$$

Exercice 18 : Démontrer la relation (3.7). On partira d'une approche canonique et de la fonction de partition Z correspondante pour calculer l'énergie moyenne d'un état contenant un nombre n de photons de même énergie $h\nu$.

Loi de Planck

Il est alors simple d'écrire l'intensité spécifique du rayonnement de corps noir en passant par la grandeur $\mathcal{N}_\nu(\vec{n})$ introduite au chapitre 2, telle que $\mathcal{N}_\nu(\vec{n})d\nu d\Omega$ est le nombre de photons par unité de volume dont la direction de propagation⁶ est \vec{n} à $d\Omega$ près et la fréquence ν à $d\nu$ près, car on a manifestement $\mathcal{N}_\nu = \rho(\nu) \langle N_\nu \rangle$ et donc $B_\nu(T) = I_\nu = h\nu c \mathcal{N}_\nu = h\nu c \rho(\nu) \langle N_\nu \rangle$. On en déduit la **loi de Planck**, donnant l'intensité spécifique du rayonnement de corps noir

$$B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right) - 1} \quad (3.8)$$

$$B_\lambda(T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{\exp\left(\frac{hc}{\lambda k_B T}\right) - 1} \quad (3.9)$$

La seconde expression est obtenue via la relation $\nu I_\nu = \lambda I_\lambda$ vue au chapitre 2.

Courbes représentatives

À une fréquence ν donnée, si $T_2 > T_1$, on a immédiatement $B_\nu(T_2) > B_\nu(T_1)$ et $B_\lambda(T_2) > B_\lambda(T_1)$, ce qui montre que les courbes représentatives de l'émission du corps noir sont "emboîtées", c'est-à-dire qu'à toute fréquence, elles se placent les unes par rapport aux autres de façon monotone croissante avec la température, comme indiqué sur la Fig. 3.4 pour le cas de $B_\nu(T)$.

Un exemple : le fond diffus cosmologique

Dans la nature, un corps noir quasi parfait est celui associé au **rayonnement du fond diffus cosmologique (CMB)**, prédit⁷ par les travaux de Ralph Alpher⁸, Robert Herman⁹ et George Gamow¹⁰ en 1948 [19, 20] et découvert par Arno Penzias¹¹ et Robert Wilson¹² en 1965 [21]. Il ne présente aucune déviation spectrale mesurable par rapport à la loi de Planck, comme le montre la Fig. 3.5. Les barres d'erreur sur ce spectre mesuré par COBE/FIRAS en 1990 [22] représentent 400σ , ce qui signifie que l'incertitude-type σ sur chaque point de mesure est extrêmement faible! Le pic d'émission de I_ν se trouve aux alentours de 1.87 mm de longueur d'onde, soit une fréquence de 160 GHz, ce qui correspond à une **température du CMB à l'époque actuelle** de $T_{\text{CMB}} = 2.725$ K. Le modèle cosmologique standard prédit que cette température varie avec le redshift comme $T_{\text{CMB}}(z) = 2.725(1+z)$, résultat bien vérifié par la spectroscopie de quasars lointains en utilisant des transitions d'espèces chimiques particulières comme "thermomètres".

3.1.3 Conséquences de la loi de Planck

Loi de déplacement de Wien

À chaque température, la courbe $B_\nu(T)$ présente un maximum en fonction de la fréquence dont on voit sur la Fig. 3.4 que la position ν_{max} augmente lorsque la température augmente. On peut montrer qu'elle est donnée par la **loi de déplacement de Wien**, qui s'écrit

6. On a modifié la notation du vecteur unitaire de propagation pour éviter une confusion avec le vecteur d'onde.
7. On trouvera une intéressante description historique de cette découverte ici : <https://arxiv.org/abs/1310.2146>.
8. Washington, 3 février 1921 - Austin, 12 août 2007.
9. New York, 29 août 1914 - Austin, 13 février 1997.
10. Odessa, 4 mars 1904 - Boulder, 19 août 1968.
11. Munich, 26 avril 1933 - San Francisco, 22 janvier 2024
12. Houston, 10 janvier 1936 - ...

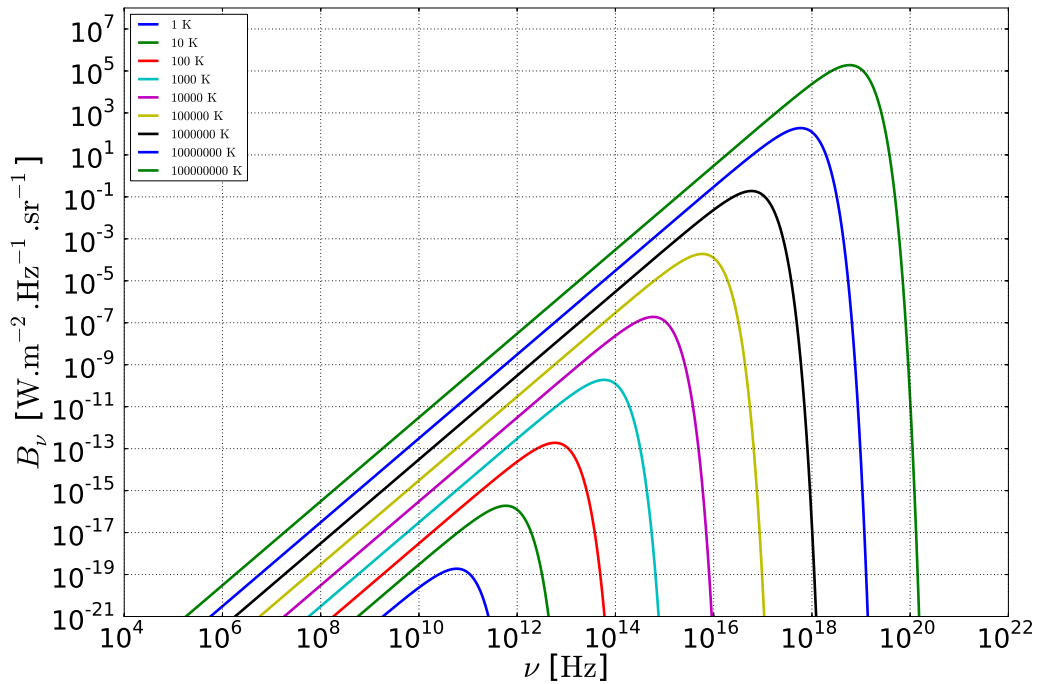


FIGURE 3.4 – **Courbes de l'émission du corps noir** B_ν . Ces courbes sont représentées pour $T = 1$ K, 10 K, 10^2 K, 10^3 K, 10^4 K, 10^5 K, 10^6 K, 10^7 K et 10^8 K (de bas en haut sur chaque sous-figure).

$$\frac{\nu_{\max}}{T} \approx 2.82 \frac{k_B}{h} = 5.88 \cdot 10^{10} \text{ Hz.K}^{-1} \quad (3.10)$$

Exercice 19 : Démontrer la loi de déplacement de Wien (3.10). On pourra montrer analytiquement que cette démonstration implique de résoudre l'équation implicite $(3 - x)e^x = 3$ et résoudre celle-ci numériquement.

Pour obtenir la longueur d'onde λ_{\max} maximisant $B_\lambda(T)$, on procède de la même manière, et on obtient dans ce cas une forme alternative de la loi de déplacement de Wien :

$$\lambda_{\max} T = 2.89 \cdot 10^{-3} \text{ K.m} \quad (3.11)$$

Exercice 20 : Démontrer la loi de déplacement de Wien (3.11).

À titre d'exemple, la table 3.1 donne les positions des maxima d'intensité, en fréquence et en longueur d'onde, pour des étoiles de divers **types spectraux**, dont le Soleil (G2).

13. On n'a pas $\lambda_{\max} \nu_{\max} = c$ parce qu'on ne maximise pas la même fonction.

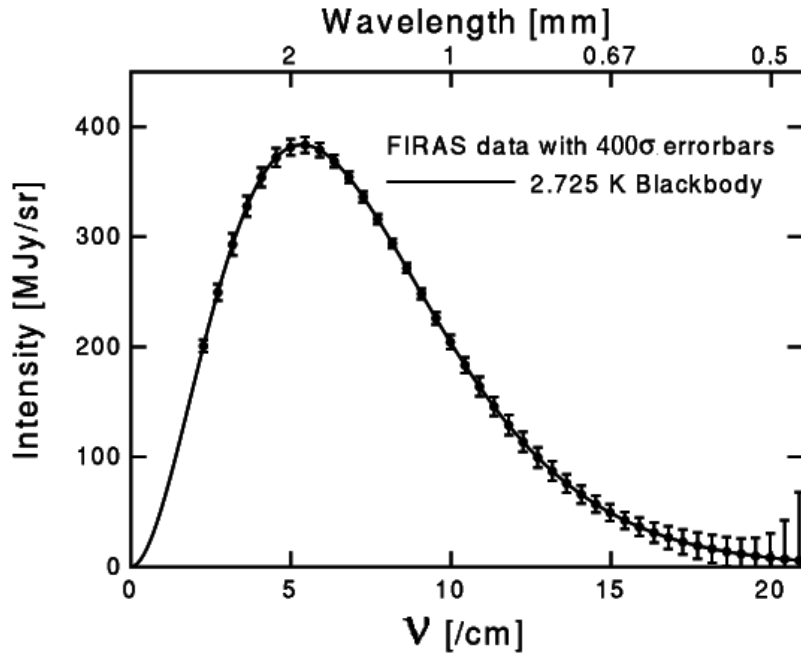


FIGURE 3.5 – Spectre de l'émission du corps noir cosmologique (CMB) mesuré par l'instrument FIRAS à bord de la mission COBE [22].

Type spectral	O5	B5	A5	F5	G2	G5	K5	M5
T [K]	54000	15200	8310	6700	5778	5660	4400	3200
ν_{\max} [10^{15} Hz]	3.17	0.89	0.49	0.39	0.34	0.33	0.26	0.19
λ_{\max} [μm]	0.05	0.19	0.35	0.43	0.50	0.51	0.66	0.91

TABLE 3.1 – Positions des maxima d'intensité du corps noir pour des étoiles de divers types spectraux.

Loi de Stefan

La **loi de Stefan** exprime que la puissance rayonnée par élément de surface d'un corps noir à la température T est proportionnelle à T^4 , ce qu'on écrit

$$F = \int_0^{\infty} F_{\nu}^{+} d\nu = \sigma_S T^4 \quad (3.12)$$

La constante de proportionnalité est appelée **constante de Stefan**, et elle vaut

$$\sigma_S = \frac{2\pi^5 k_B^4}{15c^2 h^3} = 5.67 \cdot 10^{-8} \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-4} \quad (3.13)$$

Exercice 21 : Démontrer la loi de Stefan (3.12) directement à partir de l'expression de l'intensité spécifique du corps noir $B_{\nu}(T)$.

La densité volumique d'énergie et la pression de radiation correspondantes sont alors toutes les deux également proportionnelles à T^4 , ce qu'on démontre en utilisant le caractère isotrope du rayonnement du corps noir, qui implique que $J_\nu = I_\nu$ et $p_\nu = u_\nu/3$. On a alors

$$u = \int_0^\infty u_\nu d\nu = \frac{4\pi}{c} \int_0^\infty I_\nu d\nu = \frac{4F}{c} = \frac{4\sigma_S}{c} T^4 \quad (3.14)$$

$$p = \int_0^\infty p_\nu d\nu = \int_0^\infty \frac{u_\nu}{3} d\nu = \frac{u}{3} = \frac{4\sigma_S}{3c} T^4 \quad (3.15)$$

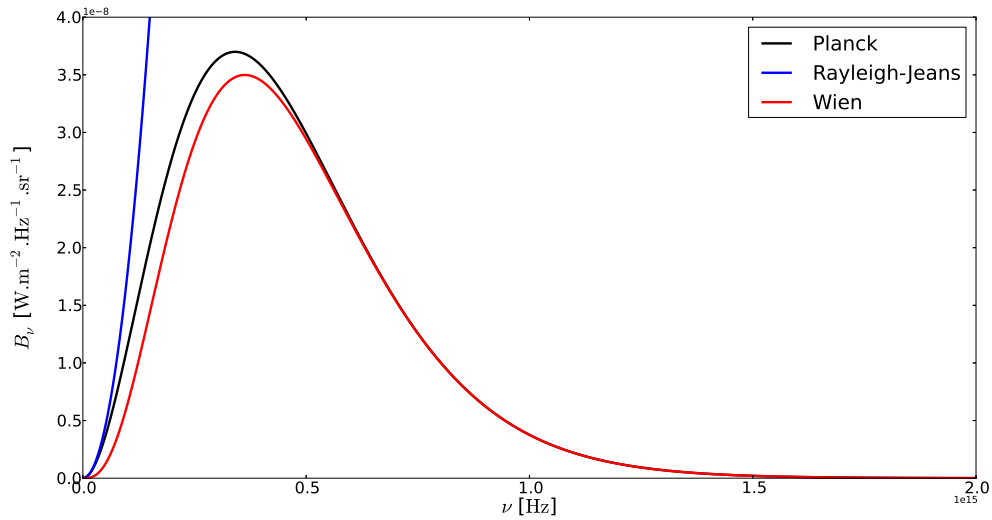


FIGURE 3.6 – **Lois de Planck, Rayleigh-Jean et Wien.** Loi de Planck (en noir), loi de Rayleigh-Jeans (en bleu) et loi de Wien (en rouge), pour un corps noir à $T = 5800$ K.

Loi de Rayleigh-Jeans et loi de Wien

Aux **basses fréquences**, c'est-à-dire pour $\nu \ll k_B T/h$, ou de manière équivalente aux grande longueurs d'onde $\lambda \gg hc/k_B T$, les fonctions de Planck $B_\nu(T)$ et $B_\lambda(T)$ peuvent être approchées par des expressions constituant la **loi de Rayleigh-Jeans**

$$B_{\nu,RJ} = \frac{2k_B T \nu^2}{c^2} \quad \text{et} \quad B_{\lambda,RJ} = \frac{2k_B c T}{\lambda^4}. \quad (3.16)$$

Inversement, à **haute fréquence** $\nu \gg k_B T/h$ et à courte longueur d'onde $\lambda \ll hc/k_B T$, les fonctions de Planck $B_\nu(T)$ et $B_\lambda(T)$ peuvent être approchées par des expressions constituant la **loi de Wien**

$$B_{\nu,W} = \frac{2h\nu^3}{c^2} \exp\left(-\frac{h\nu}{k_B T}\right) \quad \text{et} \quad B_{\lambda,W} = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \exp\left(-\frac{hc}{\lambda k_B T}\right). \quad (3.17)$$

Exercice 22 : Démontrer les relations (3.16) et (3.17).

Les courbes correspondantes sont représentées sur la Fig. 3.6 pour un corps noir à $T = 5800$ K. La loi de Rayleigh-Jeans est particulièrement utilisée en **radio-astronomie**, car à ces fréquences (disons $\nu \sim 100$ GHz) on a typiquement un rapport $h\nu/k_B \sim 5$ K, généralement inférieur aux températures mises en jeu dans les objets étudiés. La loi de Wien, inversement, est appliquée en **astronomie X**.

Notons que dans la limite de Rayleigh-Jeans, il faut beaucoup de photons pour obtenir une énergie $k_B T$, de sorte que la **quantification de la lumière** n'apparaît pas dans cette limite. L'absence de la constante de Planck dans l'expression de $B_{\nu, RJ}$ en est la signature. Inversement, à haute fréquence, chaque photon transporte une part non négligeable de l'énergie du champ et **leur caractère discret devient manifeste**. C'est d'ailleurs pour résoudre le problème de la **catastrophe ultraviolette** que Max Planck a été amené à postuler la quantification de l'énergie du champ électromagnétique.

Exercice 23 : Qu'entend-on par "catastrophe ultraviolette" ? On rappelle que, classiquement, chaque mode du champ porte en moyenne une énergie $k_B T$.

3.1.4 Températures caractéristiques

De nombreuses quantités astrophysiques associées à la radiation peuvent s'exprimer sous la forme de températures. On en donne ici quelques unes d'importance.

Température de brillance

Le corps noir est pris comme référence pour définir la **température de brillance** $T_b(\nu)$ d'une source astrophysique par la relation suivante, qui exprime que T_b est la température du corps noir émettant la même intensité spécifique que la source considérée à la fréquence ν ,

$$I_\nu = B_\nu(T_b), \quad (3.18)$$

De manière générale, la température de brillance dépend donc de la fréquence d'observation ν . L'exception à cette règle est bien entendu le cas d'une source ayant un spectre de corps noir à la température T . Dans ce cas, $T_b = T$ est indépendante de ν . La température de brillance est surtout utilisée en radio-astronomie, car on a une simple relation de proportionnalité entre T_b et l'intensité spécifique lorsque l'approximation de Rayleigh-Jeans s'applique

$$T_b(\nu) = \frac{c^2 I_\nu}{2k_B \nu^2}, \quad (3.19)$$

Exercice 24 : Déterminer l'expression générale (hors Rayleigh-Jeans) de la température de brillance.

Température de couleur

Lorsqu'une source émet un spectre dont la forme est (au moins dans un certain intervalle de fréquence) proche de celle d'un corps noir, mais sans échelle verticale absolue parce que la taille et la distance de la source sont inconnues, on peut définir une **température de couleur** T_c via un **ajustement du spectre** par une fonction de Planck. En pratique, cet ajustement peut se limiter à mesurer la **pente du spectre** entre deux fréquences, ou entre deux bandes de fréquences, et à déterminer la

température du corps noir présentant la même pente entre ces deux mêmes fréquences¹⁴. Bien entendu, si la source a un spectre de corps noir à la température T , alors $T_c = T_b = T$.

Température effective

Enfin, la **température effective** T_{eff} est celle du corps noir qui émet un flux identique à celui de la source observée sur l'ensemble du spectre. Ce paramètre est donc défini par $F = \sigma_S T_{\text{eff}}^4$, soit

$$T_{\text{eff}} = \left(\frac{F}{\sigma_S} \right)^{1/4} \quad (3.20)$$

Bien entendu, si la source est un corps noir à la température T , on a également $T_{\text{eff}} = T$.

3.2 Lois relatives à la matière

3.2.1 Distribution de Maxwell

Expression de la distribution

La **distribution de Maxwell** donne la distribution en probabilité des vitesses des particules libres dans un gaz globalement au repos, à l'équilibre thermique à la température¹⁵ T . La probabilité qu'une particule ait une vitesse \vec{v} à $d^3\vec{v}$ près est $dP(\vec{v}) = f(\vec{v})d^3\vec{v}$, avec la distribution en probabilité

$$f(\vec{v}) = \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2k_B T}\right). \quad (3.21)$$

où $v = \|\vec{v}\|$ est la norme du vecteur vitesse. Cette distribution est donc une **Gaussienne** à trois dimensions (v_x, v_y, v_z) , de moyenne nulle et d'écart-type

$$\sigma_v = \sqrt{\frac{k_B T}{m}} \quad (3.22)$$

La distribution en probabilité de chacune des composantes de la vitesse est également une Gaussienne, de même écart-type¹⁶.

Enfin, la **densité de probabilité du module v de la vitesse** est donnée par

$$f_v(v) = \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2k_B T}\right) 4\pi v^2. \quad (3.23)$$

ce qu'on obtient en explicitant l'élément de volume dans l'espace des vitesses, $d^3\vec{v} = 4\pi v^2 dv$.

14. On peut relier cela aux indices de couleur introduits au chapitre 2.

15. Cette température est appelée **température cinétique**, pour rappeler son interprétation en termes de distribution microscopique des vitesses.

16. En toute rigueur, cette distribution est également une fonction de la position \vec{x} et du temps t , via la dépendance potentielle de la température en ces variables (l'équilibre thermodynamique étant local). On définit plus généralement une fonction de distribution $\mathcal{F}(\vec{x}, \vec{v}, t)$ telle que la probabilité $dP(\vec{x}, \vec{v}, t)$ de trouver, à l'instant t , une particule de vitesse \vec{v} à $d^3\vec{v}$ près dans un volume $d^3\vec{x}$ autour du point \vec{x} s'écrit $\mathcal{F}(\vec{x}, \vec{v}, t)d^3\vec{x}d^3\vec{v}$.

Exercice 25 : Démontrer la relation (3.21) à partir de considérations très générales sur les symétries (stationnarité, homogénéité et isotropie) de $\mathcal{F}(\vec{x}, \vec{v}, t)$, sans hypothèse autre que la présence d'un nombre "suffisamment grand" de particules dans tout élément de volume mésoscopique.

Vitesses caractéristiques

La distribution de Maxwell permet de calculer un certain nombre de vitesses caractéristiques, que sont la **vitesse quadratique moyenne** v_q (dite aussi **vitesse RMS** pour *Root Mean Square*), la **vitesse la plus probable** v_p , et la **vitesse moyenne** $\langle v \rangle$. On montre que pour cette distribution, ces vitesses ont pour expressions, respectivement,

$$v_q = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}} \quad (3.24)$$

$$v_p = \sqrt{\frac{2k_B T}{m}} \quad (3.25)$$

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8k_B T}{\pi m}} \quad (3.26)$$

Exercice 26 : Démontrer les relations, (3.24), (3.25) et (3.26).

Numériquement, on a, en posant $\mu = m/m_p$ avec $m_p = 1.673 \times 10^{-27}$ kg la masse du proton, et en exprimant la température cinétique T en Kelvin,

$$v_q = 0.157 \sqrt{\frac{T}{\mu}} \text{ km s}^{-1} \quad v_p = 0.128 \sqrt{\frac{T}{\mu}} \text{ km s}^{-1} \quad \langle v \rangle = 0.145 \sqrt{\frac{T}{\mu}} \text{ km s}^{-1} \quad (3.27)$$

Exemple : Un ordre de grandeur utile à avoir en tête est que la vitesse typique des atomes d'hydrogène dans le milieu interstellaire neutre et froid (100 K) est d'environ 1 km s^{-1} .

3.2.2 Distribution de Boltzmann

Expression de la distribution

La **distribution de Boltzmann** précise, pour un système d'atomes ou de molécules par exemple, le peuplement de niveaux discrets i et j , d'énergies respectives \mathcal{E}_i et \mathcal{E}_j et de multiplicités¹⁷ respectives g_i et g_j , lorsque le système est à l'équilibre thermodynamique :

$$\frac{n_{j,\text{ET}}}{n_{i,\text{ET}}} = \frac{g_j}{g_i} \exp\left(-\frac{\mathcal{E}_j - \mathcal{E}_i}{k_B T}\right). \quad (3.28)$$

Exercice 27 : Démontrer la relation (3.28) en considérant un système à deux niveaux, à l'équilibre thermodynamique à la température T . On notera que la probabilité de trouver le système sur un niveau ne peut dépendre que de l'énergie du niveau et de la température.

17. La **multiplicité** ou **poids statistique** d'un niveau est le nombre d'états quantiques différents ayant cette énergie. Lorsque $g > 1$ on parle de **niveau dégénéré**. Des processus divers permettent de lever cette dégénérescence.

Température d'excitation

Dans les systèmes qui ne sont pas à l'équilibre thermodynamique, le rapport des populations des niveaux n'a pas de raison de suivre la distribution de Boltzmann, mais on peut néanmoins toujours définir une **température d'excitation** T_x par la relation

$$\frac{n_j}{n_i} = \frac{g_j}{g_i} \exp\left(-\frac{\mathcal{E}_j - \mathcal{E}_i}{k_B T_x}\right), \quad (3.29)$$

qui exprime que la température d'excitation est la valeur que devrait prendre la température pour que les populations effectivement observées obéissent à la loi de Boltzmann. Si le milieu n'est pas à l'équilibre thermodynamique, on aura $T_x \neq T$ et la valeur de T_x obtenue pourra dépendre du couple de niveaux choisis.

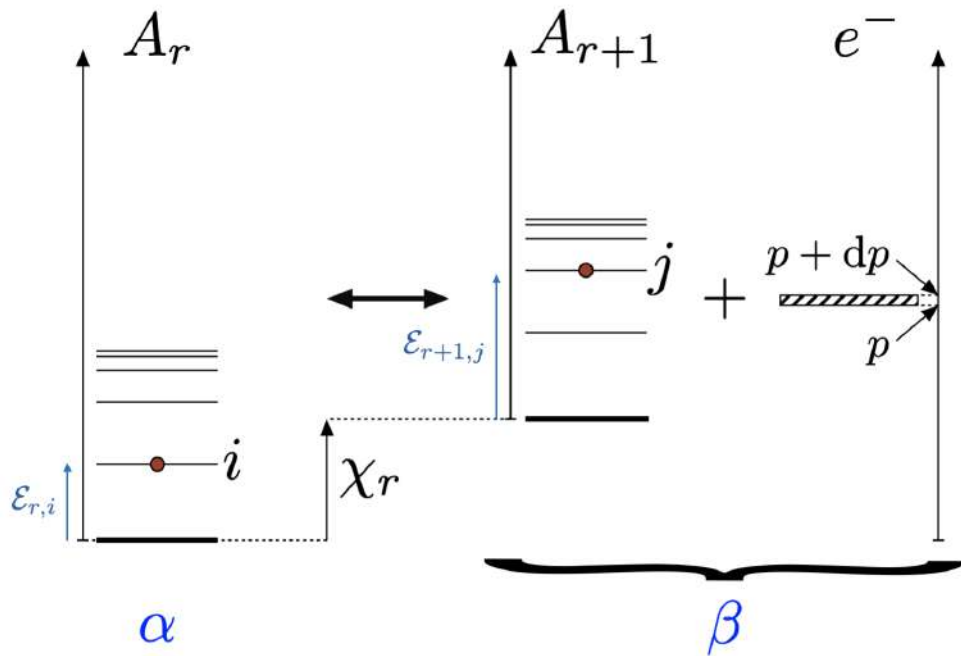


FIGURE 3.7 – Equilibre d'ionisation entre les états r et $r + 1$ fois ionisé.

3.2.3 Loi de Saha

Expression de la loi

La **loi de Saha** régit la distribution des particules d'une même espèce dans différents **états d'ionisation** (par exemple H et H^+) lorsque le système est à l'équilibre thermodynamique à la température T . Elle s'écrit sous la forme

$$\frac{n_{r+1} n_e}{n_r} = \frac{2Z_{r+1}}{Z_r} \frac{(2\pi m_e k_B T)^{3/2}}{h^3} \exp\left(-\frac{\chi_r}{k_B T}\right), \quad (3.30)$$

où n_e est la **densité des électrons libres**, n_r est la **densité de l'ion r fois ionisé**, qu'on note

A_r , avec χ_r son **potentiel d'ionisation** (c'est-à-dire l'énergie à fournir pour passer de l'ion r fois ionisé à l'ion $r + 1$ fois ionisé, tous les deux étant pris dans leurs niveaux fondamentaux respectifs), et Z_r sa **fonction de partition**, dont on rappelle la définition

$$Z_r(T) = \sum_{j \geq 0} g_{r,j} \exp\left(-\frac{\mathcal{E}_{r,j}}{k_B T}\right), \quad (3.31)$$

avec $g_{r,j}$ et $\mathcal{E}_{r,j}$ le poids statistique et l'énergie du niveau $j \geq 0$ de l'ion r fois ionisé, comptée depuis son état fondamental $j = 0$, c'est-à-dire que $\mathcal{E}_{r,0} = 0$ pour tous les états r d'ionisation.

On peut également obtenir une relation donnant le rapport des populations niveau par niveau

$$\frac{n_{r+1,j}}{n_{r,i}} = \frac{g_{r+1,j}}{g_{r,i}} \frac{2(2\pi m_e k_B T)^{3/2}}{n_e h^3} \exp\left(-\frac{\mathcal{E}_{r+1,j} + \chi_r - \mathcal{E}_{r,i}}{k_B T}\right) \quad (3.32)$$

Exercice 28 : Établir la relation (3.32), en considérant l'équilibre d'ionisation décrit par la Fig. 3.7, à savoir $A_{r,i} \rightleftharpoons A_{r+1,j} + e^-$. On appliquera la loi de Boltzmann aux deux états $\alpha = \{A_{r,i}\}$ et $\beta = \{A_{r+1,j} + e^-(p)\}$ en tenant compte de l'impulsion p de l'électron.

Exercice 29 : Établir alors la loi de Saha (3.30).

Application à un plasma d'hydrogène

À titre d'exemple, considérons le cas simple d'un gaz d'hydrogène de densité n fixée, à la température T . Les notations n_0 et n_1 désignent alors respectivement les densités des atomes d'hydrogène neutre H (notés habituellement HI) et des protons libres H^+ (notés habituellement HII). La fonction de partition des protons libres est simplement $Z_1(T) = 1$ car l'ion H^+ n'a pas d'électron lié, par définition. En ce qui concerne l'atome d'hydrogène neutre, on a la fonction de partition

$$Z_0(T) = \sum_{j \geq 1} Z_{0,j}(T) \quad (3.33)$$

où chaque terme est donné par

$$Z_{0,j}(T) = g_j \exp\left(-\frac{E_j}{k_B T}\right) = 2j^2 \exp\left[-\frac{\chi_0}{k_B T} \left(1 - \frac{1}{j^2}\right)\right] \quad (3.34)$$

avec $\chi_0 = 13.6 \text{ eV} = 2.179 \times 10^{-18} \text{ J}$ l'énergie d'ionisation de l'atome d'hydrogène, et en prenant comme référence d'énergie le niveau fondamental $j = 1$.

Exercice 30 : Calculer les deux premiers termes $Z_{0,1}(T)$ et $Z_{0,2}(T)$ dans le cas de la photosphère Solaire ($T_\odot = 6400 \text{ K}$). Quelle difficulté rencontre-t-on lorsqu'on veut calculer la fonction de partition complète $Z_0(T)$? Comment résoudre ce paradoxe ?

On peut alors se limiter au premier terme, soit $Z_0(T_\odot) \simeq 2$, et montrer que la loi de Saha dans ce cas particulier s'écrit, en introduisant le degré d'ionisation $y = n_1/n$, comme

$$\frac{y^2}{1-y} = \frac{(2\pi m_e k_B T)^{3/2}}{n h^3} \exp\left(-\frac{\chi_0}{k_B T}\right) \quad (3.35)$$

soit encore, numériquement,

$$\frac{y^2}{1-y} = 2.41 \left(\frac{T}{1 \text{ K}} \right)^{3/2} \left(\frac{n}{10^{21} \text{ m}^{-3}} \right)^{-1} \exp \left(-\frac{1.58 \times 10^5 \text{ K}}{T} \right). \quad (3.36)$$

Exercice 31 : Établir l'équation (3.35).

Il convient de remarquer que l'expression (3.35) fait apparaître la **longueur d'onde thermique de de Broglie des électrons**

$$\Lambda_e = \frac{h}{\sqrt{2\pi m_e k_B T}} \quad (3.37)$$

et qu'elle se met alors sous la forme simple

$$\frac{y^2}{1-y} = \frac{1}{n\Lambda_e^3} \exp \left(-\frac{\chi_0}{k_B T} \right) \quad (3.38)$$

Cette équation peut par exemple être appliquée à la **photosphère Solaire**, pour laquelle on a $n = 2 \times 10^{23} \text{ m}^{-3}$ et $T = 6400 \text{ K}$. On trouve alors un degré d'ionisation

$$y = \frac{n_1}{n} \simeq \frac{n_1}{n_0} \simeq 3.7 \times 10^{-4}. \quad (3.39)$$

On constate que l'hydrogène y est presque entièrement neutre. Il faudrait augmenter la température vers 23000 K pour obtenir un taux d'ionisation $y \simeq 1$. Notons que cette dernière température est **nettement inférieure** à χ_0/k_B (de l'ordre de $1.58 \times 10^5 \text{ K}$), à laquelle on aurait pu intuitivement penser. La raison en est que dans les gaz diffus considérés, un atome, une fois qu'il a été ionisé, a peu de chances de rencontrer un électron pour se recombiner. C'est aussi pour cette raison qu'à une température donnée, le degré d'ionisation augmente lorsque la densité totale n diminue¹⁸.

18. Remarquons qu'en appliquant cette formule au centre du Soleil, pour lequel on prend $n = 6 \times 10^{31} \text{ m}^{-3}$ et $T = 1.5 \times 10^7 \text{ K}$, on trouverait $y \simeq 0.75$. Bien entendu, ce résultat est erroné! En réalité, à ces densités, la distance moyenne entre deux atomes s'approche de la taille d'un atome isolé, de sorte que les électrons ne sont plus liés à un seul atome en particulier, mais forment un continuum entre les protons. Le centre du Soleil est entièrement ionisé ($y = 1$) par la pression énorme qui y règne.

Chapitre 4

Les raies spectrales

Le rayonnement de corps noir vu au chapitre précédent présente un **spectre continu**, c'est-à-dire que les variations de I_ν avec la fréquence ν sont lentes. Il en va de même pour d'autres processus d'émission (synchrotron, bremsstrahlung, ...). Il est cependant connu depuis le milieu du XVIII^e siècle que de fortes variations de I_ν sur une très petite plage de fréquences peuvent exister. Ces **raies spectrales**, en émission ou en absorption, liées au caractère discret des niveaux d'énergie dans les systèmes quantiques (atomes, ions et molécules), sont observées dans le **visible et en UV** dans les spectres des étoiles et des nébuleuses ionisées, mais également dans le domaine **radio** en direction des nuages interstellaires, ou encore dans le **domaine X** en direction de régions très chaudes comme le gaz des amas de galaxies.

4.1 Coefficients d'Einstein

On va voir ici que les probabilités de transition d'un niveau d'énergie discret à un autre sont gouvernées par des coefficients, appelés **coefficients d'Einstein**, qu'on peut relier les uns aux autres par des relations simples.

4.1.1 Absorption, émission spontanée, émission stimulée

Considérons, pour simplifier, un **système à deux niveaux** infiniment fins u (pour *upper*) et l (pour *lower*) d'énergies respectives E_u et E_l , avec donc $E_u > E_l$. On note g_u et g_l les **poinds statistiques** de ces niveaux, n_u et n_l leurs **populations**, c'est-à-dire le nombre de particules par unité de volume dans chacun des deux niveaux possibles. La **transition radiative** d'un niveau à l'autre¹ se fait via **l'émission** (dans le cas $u \rightarrow l$) ou **l'absorption** (dans le cas $l \rightarrow u$) d'un photon de fréquence

$$\nu_{ul} = \frac{E_u - E_l}{h}. \quad (4.1)$$

La loi de Kirchhoff $\epsilon_\nu = \kappa_\nu B_\nu(T)$ suggère que les processus d'émission (ϵ_ν) et d'absorption (κ_ν) sont reliés à l'échelle microscopique. Einstein a découvert cette relation en identifiant trois processus par lesquels un système atomique et un champ de rayonnement peuvent être couplés : **l'absorption, l'émission spontanée, et l'émission stimulée (ou induite)**.

Émission spontanée

Ce processus a lieu lorsqu'un atome sur le niveau u descend spontanément sur le niveau l , en émettant un photon de fréquence ν_{ul} . Ce processus a lieu indépendamment de la présence ou non d'un

1. On ignore ici les **transitions collisionnelles**, importantes pour discuter de l'équilibre thermodynamique.

champ de rayonnement, et est caractérisé par le coefficient A_{ul} , dit **coefficient d'Einstein d'émission spontanée**, défini comme étant la **probabilité par unité de temps qu'un atome sur le niveau u subisse une transition d'émission spontanée**. Le coefficient A_{ul} est donc exprimé en s^{-1} .

Absorption

Ce processus a lieu lorsqu'un atome sur le niveau l absorbe un photon de fréquence ν_{ul} , de sorte que l'énergie $h\nu_{ul}$ lui permette de passer sur le niveau supérieur u . Ce processus nécessite évidemment la présence d'un champ de rayonnement à ν_{ul} , et est caractérisé par un coefficient B_{lu} , dit **coefficient d'Einstein d'absorption**. La définition de ce coefficient en termes de probabilité de transition par unité de temps fait intervenir le champ de rayonnement via son **intensité moyenne**²

$$J_{\nu_{ul}} = \frac{1}{4\pi} \int I_{\nu_{ul}} d\Omega. \quad (4.2)$$

La manière la plus simple de procéder à cette définition est d'écrire que **la probabilité par unité de temps qu'un atome sur le niveau l absorbe un photon est $B_{lu}J_{\nu_{ul}}$** , donc proportionnelle au nombre de photons de fréquence ν_{ul} .

Émission stimulée

Comme nous allons le voir, Einstein a été amené à supposer qu'il existait un troisième processus en jeu, l'émission stimulée (ou induite), par le biais duquel un atome sur le niveau u descend sur le niveau l en émettant un photon de fréquence ν_{ul} , comme pour l'émission spontanée, mais dont la probabilité est cette fois proportionnelle au champ de rayonnement. Ce processus est donc caractérisé par un coefficient B_{ul} , dit **coefficient d'Einstein d'émission stimulée**, tel que **la probabilité par unité de temps qu'un atome sur le niveau u subisse un processus d'émission stimulée est $B_{ul}J_{\nu_{ul}}$** . Notons que le photon émis est en tous points identique à celui qui a stimulé la transition.

4.1.2 Relations d'Einstein

Les coefficients d'Einstein ainsi définis décrivent des **processus élémentaires au niveau quantique**. Ils ne préjugent en rien de l'**état statistique macroscopique** d'un système contenant un grand nombre de particules. Il est donc possible de faire une hypothèse sur cet état macroscopique et d'en tirer des relations entre les coefficients qui seront valables en toutes circonstances. On se place donc dans le cas particulier de l'**équilibre thermodynamique** d'un grand nombre de systèmes quantiques identiques à celui utilisé plus haut pour définir les coefficients d'Einstein, et on montre alors que les coefficients d'Einstein sont reliés entre eux par les **relations d'Einstein**

$$g_l B_{lu} = g_u B_{ul} \quad \frac{A_{ul}}{B_{ul}} = \frac{2h\nu_{ul}^3}{c^2} \quad (4.3)$$

Ces relations lient les coefficients d'Einstein entre eux et ne font aucune référence à la température T , contrairement à la loi de Kirchhoff. Ce sont des **relations valables même en dehors de l'équilibre thermodynamique** qui nous a servi à les établir. On peut les voir comme des extensions de la loi de Kirchhoff aux cas où l'équilibre thermodynamique n'est pas réalisé. Elles traduisent des **relations d'équilibre détaillé entre processus microscopiques**. Remarquons aussi qu'il suffit de connaître un seul des coefficients d'Einstein pour déterminer les deux autres. Les tables spectroscopiques³ donnent généralement les valeurs de A_{ul} , des poids statistiques et des énergies des niveaux impliqués.

2. La transition atomique ne dépend bien entendu pas de la direction d'où vient le photon...
3. Par exemple LAMDA : <http://home.strw.leidenuniv.nl/~moldata/>. À titre d'exemple, quelques lignes du fichier correspondant aux transitions rotationnelles de l'espèce $^{12}\text{C}^{16}\text{O}$ sont reproduites sur la Fig. 4.1.

```

!MOLECULE!
CO!
!MOLECULAR WEIGHT!
28.0!
!NUMBER OF ENERGY LEVELS!
41!
!LEVEL + ENERGIES (cm^-1) + WEIGHT + J!
  1      0.000000000!   1.0!   0!
  2      3.845033413!   3.0!   1!
  3     11.534919938!   5.0!   2!
  4     23.069512649!   7.0!   3!
  5     38.448164669!   9.0!   4!
  6     57.670329083!  11.0!   5!
[.....]!
!NUMBER OF RADIATIVE TRANSITIONS!
40!
!TRANS + UP + LOW + EINSTEINA (s^-1) + FREQ (GHz) + E_u (K)!
  1      2      1      7.203e-08      115.2712018      5.53!
  2      3      2      6.910e-07      230.5380000      16.60!
  3      4      3      2.497e-06      345.7959899      33.19!
  4      5      4      6.126e-06      461.0407682      55.32!
  5      6      5      1.221e-05      576.2679305      82.97!
  6      7      6      2.137e-05      691.4730763     116.16!
  7      8      7      3.422e-05      806.6518060     154.87

```

FIGURE 4.1 – Extrait d'un fichier de LAMDA. Ce fichier (ici pour les transitions rotationnelles de $^{12}\text{C}^{16}\text{O}$) donne notamment les niveaux d'énergie et les coefficients d'Einstein A_{ul} .

Exercice 32 : Établir les relations d'Einstein (4.3).

Exemple : Pour donner un ordre de grandeur, on a $A_{ul} \sim 10^8 \text{ s}^{-1}$ pour des raies dites **permises**. Pour les transitions dites **interdites**, ces valeurs sont beaucoup plus faibles (on verra l'exemple de la raie HI à 21 cm, pour laquelle $A_{ul} = 2.85 \cdot 10^{-15} \text{ s}^{-1}$).

4.1.3 Remarques

Nécessité de l'émission stimulée

Imaginons qu'Einstein n'ait pas introduit le processus d'émission stimulée. Dans la même hypothèse d'équilibre thermodynamique, on serait amené à écrire l'intensité moyenne à la transition comme

$$J_{\nu_{ul}} = \frac{n_u A_{ul}}{n_l B_{lu}} = \frac{A_{ul} g_u}{B_{lu} g_l} \exp\left(-\frac{h\nu_{ul}}{k_B T}\right) = \frac{2h\nu_{ul}^3}{c^2} \exp\left(-\frac{h\nu_{ul}}{k_B T}\right)$$

qui n'est autre que la loi de Wien, dont Einstein savait qu'elle n'était pas correcte à toutes les fréquences. Remarquons que le fait qu'on retrouve la loi de Wien dans le cas de l'équilibre thermodynamique en négligeant l'émission stimulée correspond au fait que pour $h\nu_{ul} \gg k_B T$, on a $n_u \ll n_l$, de sorte que

l'émission stimulée ($\propto n_u$) est effectivement négligeable devant l'absorption ($\propto n_l$). En effet, comme $g_u \sim g_l$, on a $B_{ul} \sim B_{lu}$ et donc $n_u B_{ul} \ll n_l B_{lu}$.

Prise en compte du profil de la raie

Si les niveaux d'énergie sont discrets, il n'en sont pas pour autant infiniment étroits, de sorte que le rayonnement associé aux transitions $u \rightarrow l$ et $l \rightarrow u$ a une certaine distribution en fréquence, qu'on caractérise par un **profil de raie** $\phi(\nu)$ normalisé, soit

$$\int_0^\infty \phi(\nu) d\nu = 1. \quad (4.4)$$

Le profil ϕ a donc la dimension de l'inverse d'une fréquence, et sa valeur n'est sensiblement différente de zéro que sur une petite plage de fréquences $\delta\nu$ autour de ν_{ul} . Les définitions des coefficients d'Einstein doivent en toute rigueur faire apparaître ce profil, puisqu'il représente l'efficacité relative de chaque fréquence (à l'intérieur de la raie) à participer aux processus d'absorption et d'émission stimulée. On définit alors $B_{lu}\bar{J}$ et B_{ul} en écrivant les probabilités de transitions par unité de temps comme

$$B_{lu}\bar{J} = B_{lu} \int_0^\infty J_\nu \phi(\nu) d\nu \quad \text{et} \quad B_{ul}\bar{J} = B_{ul} \int_0^\infty J_\nu \phi(\nu) d\nu \quad (4.5)$$

Exercice 33 : Montrer que cette nouvelle définition ne modifie pas les relations d'Einstein tant que $B_\nu(T)$ ne varie pas appréciablement sur la plage $\delta\nu$.

Définition en termes de la densité d'énergie du rayonnement

Il est également possible⁴ de définir B_{lu} et B_{ul} non pas en termes de l'intensité moyenne, mais de la densité d'énergie du rayonnement. On écrit alors les probabilités d'absorption et d'émission stimulée par unité de temps sous la forme

$$B_{lu}\bar{u} = B_{lu} \int_0^\infty u_\nu \phi(\nu) d\nu \quad \text{et} \quad B_{ul}\bar{u} = B_{ul} \int_0^\infty u_\nu \phi(\nu) d\nu \quad (4.6)$$

Exercice 34 : Déterminer les relations d'Einstein avec les coefficients ainsi définis.

4.2 Emissivité, coefficient d'absorption, fonction source

4.2.1 Lien avec les coefficients d'Einstein

La variation de la population du niveau inférieur est donnée par la combinaison des processus d'absorption, d'émission induite et d'émission spontanée

$$\frac{dn_l}{dt} = A_{ul}n_u + B_{ul}n_u\bar{J} - B_{lu}n_l\bar{J} \quad (4.7)$$

On a obtenu les relations d'Einstein en commençant par écrire que le membre de droite était nul à l'équilibre, mais on peut maintenant les utiliser dans le cas général exprimé par cette équation bilan pour la matière, pour établir un lien entre les coefficients d'Einstein, l'émissivité ϵ_ν et le coefficient

4. C'est ce que font de nombreux ouvrages, il faut donc être conscient de cette différence.

d'absorption κ_ν . On montre en effet que⁵

$$\epsilon_\nu = A_{ul} n_u \frac{h\nu}{4\pi} \phi(\nu) \quad (4.8)$$

$$\kappa_\nu = \frac{h\nu}{4\pi} \phi(\nu) (B_{lu} n_l - B_{ul} n_u) \quad (4.9)$$

Exercice 35 : Démontrer les relations (4.8) et (4.9). On se placera dans une hypothèse d'isotropie locale du rayonnement, et on reliera les variations de la population n_l aux variations de la population des photons, associées à chacun des trois processus élémentaires.

4.2.2 Fonction source

À partir des expressions (4.8) et (4.9), on montre alors que la fonction source dans la raie s'écrit

$$S_\nu = \frac{2h\nu_{ul}^3}{c^2} \frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu_{ul}}{k_B T_x}\right) - 1} = B_{\nu_{ul}}(T_x). \quad (4.10)$$

Exercice 36 : Démontrer la relation (4.10).

En supposant donc que les profils en émission et en absorption sont identiques, **la fonction source est constante sur le profil de la raie**. Elle ne dépend pas de la fréquence exacte ν , mais uniquement de la fréquence centrale de la transition et de la **température d'excitation** T_x , dont on rappelle qu'elle est la température pour laquelle les populations n_u et n_l vérifient la statistique de Boltzmann. On rappelle également que, dans des milieux non thermalisés, T_x n'a pas de raison d'être identique à la température cinétique T , qu'il peut y avoir des températures d'excitations différentes pour différentes raies, et qu'elles peuvent varier d'un point à l'autre. Néanmoins, pour une raie unique à une position donnée, il est toujours possible de définir T_x via

$$\frac{n_u}{n_l} = \frac{g_u}{g_l} \exp\left(-\frac{h\nu_{ul}}{k_B T_x}\right). \quad (4.11)$$

4.2.3 Coefficient d'absorption dans la raie

En revanche, l'émissivité monochromatique ϵ_ν et le coefficient d'absorption monochromatique κ_ν dépendent eux de la fréquence exacte ν . On montre en effet qu'on a, pour ce dernier

$$\kappa_\nu = \frac{c^2\nu}{8\pi\nu_{ul}^3} A_{ul} n_l \frac{g_u}{g_l} \left[1 - \exp\left(-\frac{h\nu_{ul}}{k_B T_x}\right)\right] \phi(\nu). \quad (4.12)$$

Exercice 37 : Démontrer la relation (4.12).

5. On a fait une hypothèse implicite dans le calcul, à savoir que le profil d'émission (apparaissant avec A_{ul}) est le même que le profil d'absorption (apparaissant avec B_{ul} et B_{lu}), ce qui n'est pas toujours le cas, notamment s'il y a un changement de fréquence entre les processus d'absorption et d'émission (exemple de la **fluorescence**). Dans le cas le plus général, on aura un profil ψ pour l'émission spontanée, ϕ pour l'absorption, et χ pour l'émission stimulée.

Remarquons que dans le cas de raies assez fines, ϕ n'est sensiblement différent de zéro qu'au voisinage de ν_{ul} , de sorte qu'on a

$$\kappa_\nu \simeq \frac{c^2}{8\pi\nu_{ul}^2} A_{ul} n_l \frac{g_u}{g_l} \left[1 - \exp\left(-\frac{h\nu_{ul}}{k_B T_x}\right) \right] \phi(\nu) \quad (4.13)$$

Cette hypothèse est faite implicitement dans de nombreux ouvrages.

4.2.4 Effet MASER

Le coefficient d'absorption contient un **terme négatif issu de l'émission stimulée**. Ce terme est généralement petit dans l'UV et le visible, mais il peut devenir **important à basse fréquence**. En particulier, la température d'excitation peut devenir **négative** dans certaines conditions pour lesquelles on observe une **inversion de population**, soit $n_u > n_l$ ⁶. Cela peut arriver s'il existe un troisième niveau, d'énergie plus élevée que les deux autres, facilement peuplé (on parle d'un **phénomène de pompage**) par différents mécanismes (collisions, rayonnement) et qui se désexcite plus vite sur le niveau u que sur le niveau l . Cet effet est **observable dans de nombreuses sources radio**, et est connu sous le nom d'**effet MASER** (pour *Microwave Amplification by Stimulated Emission of Radiation*). L'effet net est que le coefficient d'absorption κ_ν devient négatif car le terme lié à l'émission induite devient plus grand que celui lié à l'absorption. Ceci traduit une **amplification, parfois très forte, du signal**. On observe cet effet notamment dans des raies de OH (découverte des masers astrophysiques en 1965, [24]), H₂O et SiO. Les températures de brillance observées sont souvent autour de 10⁹ K et peuvent atteindre 10¹² K.

4.3 Profil des raies

Nous allons voir dans cette section les processus microscopiques et macroscopiques responsables de **l'élargissement des raies spectrales**, et comment l'étude de ces profils permet d'obtenir des informations sur les conditions physiques dans les milieux concernés.

4.3.1 Élargissement Doppler

Effet Doppler-Fizeau

L'**effet Doppler-Fizeau** est le changement de fréquence apparente d'un photon émis par une particule en mouvement par rapport à l'observateur. Si l'on note ν_e la fréquence émise, mesurée dans un référentiel au repos par rapport à la particule, ν la fréquence observée et v_z la projection de la vitesse de la particule émettrice par rapport à l'observateur sur la ligne de visée (avec $v_z > 0$ pour une particule s'éloignant de l'observateur), on a

$$\frac{\nu}{\nu_e} = \sqrt{\frac{c - v_z}{c + v_z}}. \quad (4.14)$$

Cette formule relativiste peut être simplifiée lorsque $v_z \ll c$. On a alors approximativement

$$\frac{\nu}{\nu_e} \simeq 1 - \frac{v_z}{c}. \quad (4.15)$$

6. Dans l'hypothèse simplificatrice $g_u = g_l$.

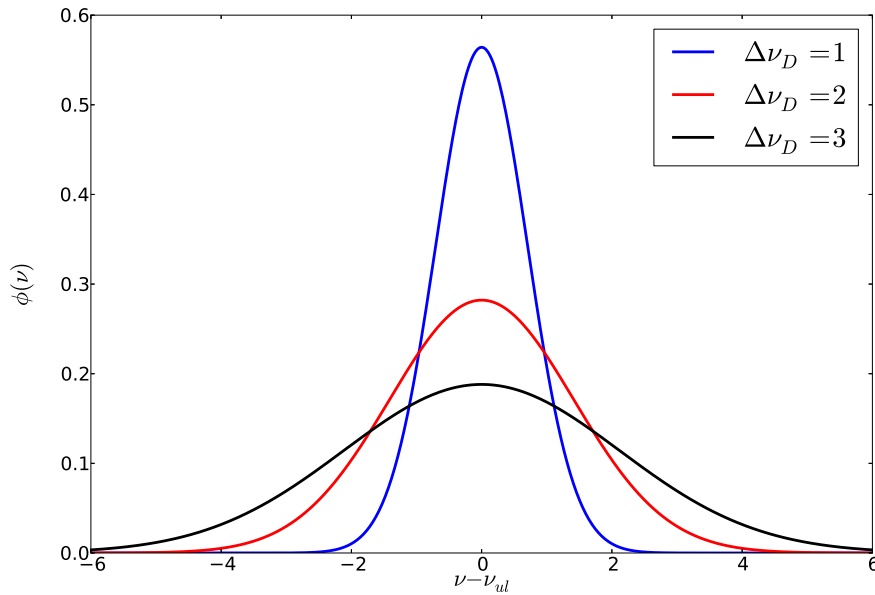


FIGURE 4.2 – **Profils de Gauss.** On montre les cas $\Delta\nu_D = 1$ (bleu), $\Delta\nu_D = 2$ (rouge) et $\Delta\nu_D = 3$ (noir). Les unités de $\Delta\nu_D$ sont les mêmes que celles de l'axe $\nu - \nu_{ul}$.

Élargissement thermique

Dans un milieu à l'équilibre à la température cinétique T , une raie intrinsèquement infiniment fine présente un **profil Doppler thermique**, dû à l'agitation des particules émettrices, de forme Gaussienne

$$\phi(\nu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\Delta\nu_D} \exp\left[-\left(\frac{\nu - \nu_{ul}}{\Delta\nu_D}\right)^2\right] \quad (4.16)$$

en définissant la **largeur Doppler thermique**

$$\Delta\nu_D = \frac{\nu_{ul}}{c} \sqrt{\frac{2k_B T}{m}} \quad (4.17)$$

Le coefficient d'absorption au centre de la raie est alors donné par

$$\kappa_0 = \frac{c^2}{8\pi^{3/2}\nu_{ul}^2\Delta\nu_D} A_{ul} n_l \frac{g_u}{g_l} \left[1 - \exp\left(-\frac{h\nu_{ul}}{k_B T_x}\right)\right] \quad (4.18)$$

Il varie en $\Delta\nu_D^{-1}$. Toutes choses étant égales par ailleurs, une raie est donc d'autant plus intense en émission, ou profonde en absorption, que la distribution est étroite (ce qui correspond à un milieu froid). On montre sur la Fig. 4.2 quelques profils Doppler thermiques correspondant à différents élargissements.

Exercice 38 : Démontrer la relation (4.16).

Ces formules ne sont valables que pour une **vitesse moyenne du fluide nulle** par rapport à l'ob-

servateur, $\langle v_z \rangle = 0$. Dans le cas contraire $\langle v_z \rangle = v_0 \neq 0$, le profil est toujours Gaussien, mais il est centré sur la fréquence ν_0 et présente une largeur $\Delta\nu'_D$, avec

$$\nu_0 = \nu_{ul} \sqrt{\frac{c - v_0}{c + v_0}} \quad \Delta\nu'_D = \frac{\nu_0}{c} \sqrt{\frac{2k_B T}{m}}. \quad (4.19)$$

Élargissement Doppler turbulent

L'agitation thermique est loin d'être la seule cause d'élargissement Doppler des raies spectrales. En effet, **le milieu responsable de la raie peut généralement être décrit par une approximation fluide**, et il est maintenant établi que de nombreux objets astrophysiques (le milieu interstellaire en est un exemple parfait) sont le siège de **mouvements turbulents mésoscopiques**. Cela signifie que sur une ligne de visée donnée, chaque élément de longueur ds possède sa propre vitesse moyenne projetée $\langle v_z(s) \rangle = v_0(s)$, et le profil thermique de la raie associé à cet élément est une Gaussienne centrée sur ⁷

$$\nu_0(s) = \nu_{ul} \left[1 - \frac{v_0(s)}{c} \right] \quad (4.20)$$

Si l'on suppose que la température cinétique du milieu est uniforme, et que la distribution des vitesses turbulentes est Maxwellienne, avec une moyenne nulle,

$$g(v_0) = \frac{1}{\sqrt{\pi} b_t} \exp\left(-\frac{v_0^2}{b_t^2}\right), \quad (4.21)$$

on peut alors montrer que le profil résultant ϕ est également une Gaussienne, de largeur

$$\Delta\nu_D = \frac{\nu_{ul}}{c} \sqrt{\frac{2k_B T}{m} + b_t^2} \quad (4.22)$$

Exercice 39 : Montrer que si T est uniforme, le profil ϕ est la convolution du profil thermique ϕ_T et d'une distribution en fréquence f associée à la distribution des vitesses turbulentes. La formule (4.22) en est un cas particulier si f est Gaussienne.

Cette formule permet, via la comparaison des largeurs de raies correspondant à différentes espèces sur une même ligne de visée, de déterminer si l'élargissement est dominé par l'agitation thermique ou par les mouvements turbulents. En effet, dans le premier cas, on a

$$\frac{\Delta\nu_D}{\nu_{ul}} \propto \frac{1}{\sqrt{m}} \quad (4.23)$$

alors que dans le second cas $\Delta\nu_D/\nu_{ul}$ est indépendant de la raie. En pratique, on constate qu'on est la plupart du temps dans ce second cas de figure, ce qui montre que **l'élargissement turbulent est prépondérant**. Notons aussi que les mouvements d'ensemble du gaz (comme la rotation d'une galaxie) provoquent eux aussi un élargissement des raies. Notons enfin qu'on parle souvent de la **largeur à mi-hauteur, ou FWHM** pour *Full-Width at Half-Maximum*, et on note que pour la forme Gaussienne, on a la relation

$$\text{FWHM} = 2\sqrt{\ln 2} \Delta\nu_D \simeq 1.66 \Delta\nu_D = \frac{\nu_{ul}}{c} \sqrt{8 \ln 2} \sigma_{v_z} \quad (4.24)$$

où σ_{v_z} est la dispersion des vitesses à une dimension.

Exercice 40 : Démontrer la relation entre FWHM et la largeur Doppler $\Delta\nu_D$.

7. On se place dans la limite non-relativiste.

4.3.2 Élargissement naturel

Temps de vie des niveaux

Le **principe d'incertitude d'Heisenberg** indique que la largeur finie d'un niveau excité u est liée à la durée finie qu'une particule peut passer dans cet état. En notant δE_u la largeur du niveau u et τ_u son **temps de vie**, on a $\delta E_u \tau_u \simeq \hbar$. Or le temps de vie est relié aux coefficients d'Einstein, par

$$\tau_u = \frac{1}{\sum_{l < u} A_{ul}}, \quad (4.25)$$

et la décroissance de la population du niveau supérieur est exponentielle

$$n_u(t) = n_u(0)e^{-t/\tau_u}. \quad (4.26)$$

Exercice 41 : Justifier la relation (4.25).

Lorsqu'un champ de rayonnement est présent, ce temps caractéristique diminue⁸

$$\tau_u = \frac{1}{\sum_{l < u} (A_{ul} + B_{ul}J)} < \frac{1}{\sum_{l < u} A_{ul}} \quad (4.27)$$

Notons que ces écritures négligent le fait qu'en réalité, il peut y avoir des particules dans des états d'énergie $E_{u'}$ supérieure à E_u , ce qui complique l'analyse car la variation de n_u dépend des populations de ces niveaux (via l'émission spontanée et l'émission stimulée $u' \rightarrow u$).

Pour les transitions permises, A_{ul} est très grand (de l'ordre de 10^8 s^{-1}), de sorte que les temps de vie des niveaux supérieurs impliqués dans ces transitions sont très courts, et leur élargissement très important, de l'ordre de 10 MHz. Inversement, pour les transitions interdites, l'élargissement des niveaux supérieurs est très faible. On parle à leur propos de **niveaux métastables**.

Profil Lorentzien

Dans une approche classique⁹ de l'interaction entre matière et rayonnement, on traite l'électron lié dans l'atome comme un oscillateur harmonique amorti soumis à une force excitatrice associée au champ électrique variable du rayonnement (**modèle de Thomson**). On montre alors que la **section efficace d'interaction** prend la forme

$$\sigma_\omega = \frac{e^2}{\epsilon_0 m_e c} \frac{\gamma \omega^2}{(\omega^2 - \omega_{ul}^2)^2 + \omega^2 \gamma^2} \quad (4.28)$$

où γ est le **coefficient d'amortissement**

$$\gamma = \frac{e^2 \omega^2}{6\pi \epsilon_0 m_e c^3} \quad (4.29)$$

Dans ces expressions, m_e est la masse de l'électron et ω_{ul} est la pulsation de la transition considérée, autrement dit $\omega_{ul} = 2\pi\nu_{ul}$. Lorsqu'on se place au voisinage de la résonance, et en passant en variable fréquence, on montre que le coefficient d'absorption prend la forme suivante (où $\delta = \gamma/4\pi$)

$$\kappa_\nu = n_l \frac{e^2}{4\pi \epsilon_0 m_e c} \frac{\delta}{\delta^2 + (\nu - \nu_{ul})^2} = n_l \frac{e^2}{4\epsilon_0 m_e c} \phi(\nu) \quad (4.30)$$

8. L'absorption n'est pas à prendre en compte - au moins aux temps courts - puisqu'elle ne concerne pas les atomes sur le niveau excité.

9. En particulier, on ignore les transitions stimulées.

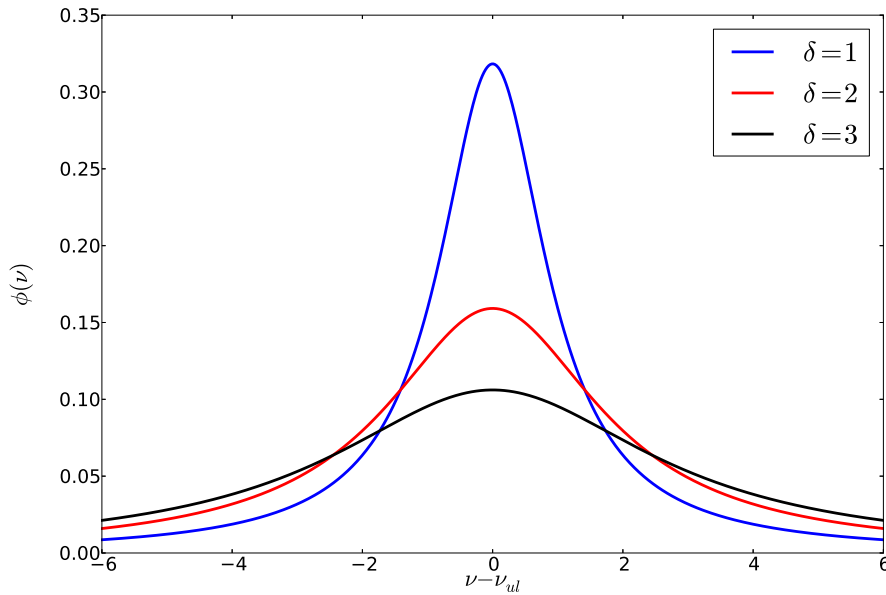


FIGURE 4.3 – **Profils de Lorentz.** On montre les cas $\delta = 1$ (bleu), $\delta = 2$ (rouge) et $\delta = 3$ (noir). Les unités de δ sont les mêmes que celles de l'axe $\nu - \nu_{ul}$.

en introduisant le **profil Lorentzien** normalisé (représenté pour différentes valeurs de δ sur la Fig. 4.3)

$$\phi(\nu) = \frac{1}{\pi} \frac{\delta}{\delta^2 + (\nu - \nu_{ul})^2}. \quad (4.31)$$

Exercice 42 : Démontrer la relation (4.30).

Le profil Lorentzien mis en évidence ici s'écrit

$$\phi(\nu) = \frac{1}{\pi} \frac{\delta}{\delta^2 + (\nu - \nu_{ul})^2} \quad \text{avec} \quad \delta = \frac{1}{4\pi\tau_u} = \frac{\gamma_u}{4\pi} \quad (4.32)$$

où $\gamma_u = 1/\tau_u$ est la constante d'amortissement du niveau supérieur. Ce profil est donc lié au temps de vie fini du niveau supérieur de la transition, et très différent du profil Gaussien lié à l'effet Doppler : **il décroît rapidement au centre de la raie, mais a des ailes beaucoup plus importantes**, en $(\nu - \nu_{ul})^{-2}$. Sa largeur à mi-hauteur est 2δ , et il tend vers une distribution de Dirac lorsque $\delta \rightarrow 0$.

Forces d'oscillateur

À partir du coefficient d'absorption, et toujours dans une approche classique négligeant l'émission stimulée, on en déduit une expression classique du coefficient d'Einstein d'absorption

$$B_{lu} = \frac{\pi}{h\nu_{ul}} \frac{e^2}{\epsilon_0 m_e c} \quad (4.33)$$

Un calcul quantique donne un résultat identique au facteur correctif près $f_{ul} < 1$, la **force d'oscillateur**,

$$B_{lu} = \frac{\pi}{h\nu_{ul}} \frac{e^2}{\epsilon_0 m_e c} f_{ul} \quad (4.34)$$

Exercice 43 : Démontrer la relation (4.33).

4.3.3 Élargissement par collisions

Origine

Les interactions et collisions entre particules provoquent des désexcitations supplémentaires, donc **réduisent la durée de vie du niveau supérieur u** . Cela implique un **élargissement Lorentzien accru** des raies faisant intervenir ce niveau. Pour obtenir un ordre de grandeur de la constante d'amortissement γ_{coll} liée aux collisions, on la relie à la durée moyenne τ_{coll} entre deux collisions

$$\gamma_{\text{coll}} \sim \frac{1}{\tau_{\text{coll}}} \sim n_p \pi r_p^2 v \quad (4.35)$$

en notant n_p la **densité des particules** perturbatrices, v leur **vitesse relative** par rapport à l'atome rayonnant, et r_p le **rayon de l'interaction** mise en jeu. La vitesse relative fait intervenir la température

$$v \sim \sqrt{k_B T \left(\frac{1}{m_p} + \frac{1}{m_a} \right)} \quad (4.36)$$

avec m_p et m_a les masses respectives des particules perturbatrices et de l'atome rayonnant. Le potentiel d'interaction mis en jeu dépend de la nature des particules perturbatrices : on aura un **potentiel de Van der Waals** s'il s'agit par exemple d'atomes d'hydrogène neutre créant un potentiel dipolaire, et on aura un **potentiel Coulombien**¹⁰ dans le cas d'électrons ou d'ions.

Transitions permises et interdites

On peut maintenant expliquer pourquoi certaines transitions sont dites **permises** et d'autres **interdites**, en remarquant que dans les conditions terrestres, on a un taux de collisions γ_{coll} de l'ordre de 10^9 s^{-1} . En effet, la vitesse caractéristique des molécules de diazote à 300 K est

$$v \sim 0.1 \sqrt{\frac{300}{14}} \simeq 0.46 \text{ km s}^{-1} = 460 \text{ m s}^{-1} \quad (4.37)$$

leur rayon est typiquement $r_p \sim 10^{-10} \text{ m}$ et leur densité $n_p \sim 3 \times 10^{25} \text{ m}^{-3}$. Comme le taux de désexcitations radiatives est donné par A_{ul} , il y en aura une fraction non négligeable uniquement si A_{ul} est au moins de l'ordre de γ_{coll} . On pourra alors observer ces raies dans ces conditions. Inversement, **on n'observera pas de transitions interdites, car elles sont beaucoup moins probables qu'une désexcitation collisionnelle dans les conditions terrestres**¹¹.

Notion de densité critique

Les processus mis en jeu pour déterminer les populations des niveaux incluent les **transitions radiatives** qu'on discute dans ce chapitre, caractérisées par les coefficients d'Einstein A_{ul} , B_{ul} et B_{lu} , mais également des **transitions collisionnelles** - sans émission ou absorption de rayonnement

10. Corrigé de l'écrantage au delà de la **longueur de Debye**.

11. Plus rigoureusement, ce sont les **règles de sélection** de la mécanique quantique qui déterminent si une transition est permise (de type dipolaire électrique) ou interdite.

- Un atome ou une molécule A dans un état d'énergie E_l peut être excité vers un état d'énergie $E_u > E_l$ par interaction avec une particule excitatrice p , d'énergie cinétique suffisante, et qui en cède une partie $E_{ul} = E_u - E_l$ à A .
- Un atome ou une molécule A dans un état d'énergie E_u peut être désexcité vers un état d'énergie $E_l < E_u$ par interaction avec une particule excitatrice p , qui récupère alors l'énergie $E_{ul} = E_u - E_l$ sous forme d'énergie cinétique.

Ces transitions sont caractérisées par des **coefficients d'excitation et de désexcitation collisionnelle**, appelés aussi **taux de collisions** et notés respectivement C_{lu} et C_{ul} . On définit le premier en écrivant que $C_{lu}n_p n_l$ représente le nombre d'excitations collisionnelles $l \rightarrow u$ par unité de volume et par unité de temps, où n_p est la densité des partenaires de collision et n_l la population du niveau inférieur. De même, on définit le second coefficient en écrivant que $C_{ul}n_p n_u$ représente le nombre de désexcitations collisionnelles $u \rightarrow l$ par unité de volume et par unité de temps. Le bilan pour le niveau inférieur l est alors, en l'absence d'autres processus de transition¹²,

$$\frac{dn_l}{dt} = -C_{lu}n_p n_l + C_{ul}n_p n_u \quad (4.38)$$

Ces coefficients C_{lu} et C_{ul} s'expriment en $\text{cm}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ dans le système CGS. On voit ainsi que le nombre de désexcitations collisionnelles par unité de volume et intervalle de temps est $n_p n_u C_{ul}$, tandis que le nombre de désexcitations radiatives par unité de volume et intervalle de temps est $n_u A_{ul}$. On voit donc qu'il existe une **densité critique** des partenaires de collision

$$n_{\text{crit}} = \frac{A_{ul}}{C_{ul}} \quad (4.39)$$

telle que les désexcitations collisionnelles sont négligeables si $n_p \ll n_{\text{crit}}$ et prépondérantes si $n_p \gg n_{\text{crit}}$.

4.3.4 Forme générale d'un profil (simple) de raie

Causes multiples d'élargissement

Chacun des processus discutés ci-dessus provoque un élargissement $\phi_i(\nu)$, où l'indice i fait référence au processus considéré. **Lorsque plusieurs causes d'élargissement sont à prendre en compte, le profil résultant est la convolution des profils de chaque processus**¹³.

Exercice 44 : Démontrer cette dernière affirmation.

On a vu que les fonctions ϕ_i pouvaient prendre la forme d'une Gaussienne ou d'une Lorentzienne. Or la convolution de deux Gaussiennes de largeurs respectives σ_1 et σ_2 est également une Gaussienne, de largeur $\sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$. De même, la convolution de deux Lorentziennes, de paramètres respectifs δ_1 et δ_2 , est aussi une Lorentzienne, de paramètre $\delta = \delta_1 + \delta_2$, ce qui peut se montrer en passant par la transformée de Fourier (la convolution devenant une multiplication). On a donc **deux types de profils élémentaires** : des profils **Gaussiens** (élargissement Doppler thermique et turbulent) et des profils **Lorentziens** (élargissement naturel et élargissement par collisions).

Profil de Voigt

Si l'on suppose la présence d'une seule composante avec une distribution de vitesse Gaussienne (que celle-ci soit d'origine thermique ou turbulente, ou une combinaison des deux), l'élargissement Gaussien et l'élargissement Lorentzien vont se combiner. Le profil résultant est appelé **profil de Voigt**, et est la

12. Notamment en ignorant les transitions radiatives, la présence d'autres niveaux, et la possibilité qu'il existe différentes espèces de collisionneurs.

13. Il faut supposer pour cela que les processus sont indépendants.

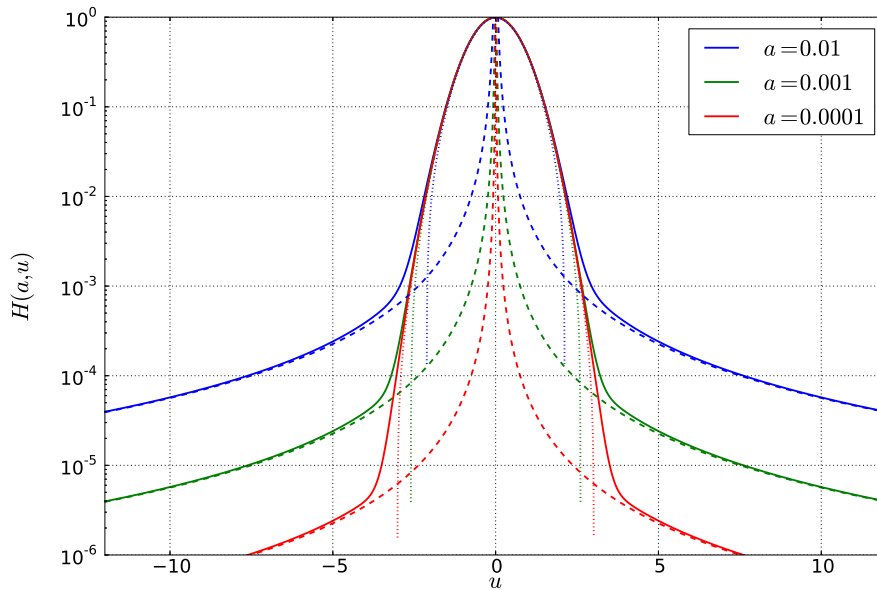


FIGURE 4.4 – **Profils de Voigt.** On montre en traits pleins les cas $a = 10^{-2}$ (bleu), $a = 10^{-3}$ (vert) et $a = 10^{-4}$ (rouge). Les courbes en pointillés représentent les approximations Gaussiennes au centre de chaque profil, et les courbes en tirets les approximations Lorentziennes dans les ailes. Noter que l'axe des ordonnées est en échelle logarithmique.

convolution d'une Gaussienne et d'une Lorentzienne. Le coefficient d'absorption est alors, en négligeant le facteur lié à l'émission stimulée,

$$\kappa_\nu = n_l \frac{e^2}{4\epsilon_0 m_e c} f_{ul} \frac{1}{\sqrt{\pi} \Delta\nu_D} H(a, u) = \kappa_{\nu,0} H(a, u) \quad (4.40)$$

qui fait apparaître la **fonction de Voigt**

$$H(a, u) = \frac{a}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-y^2}}{a^2 + (u - y)^2} dy \quad (4.41)$$

où l'on a posé, respectivement,

$$a = \frac{\delta}{\Delta\nu_D} \quad u = \frac{\nu - \nu_0}{\Delta\nu_D} \quad y = \frac{\nu'}{\Delta\nu_D} \quad (4.42)$$

Exercice 45 : Démontrer la forme (4.41).

L'allure du profil est dictée par la valeur du **paramètre a , rapport de la largeur naturelle et collisionnelle à la largeur Doppler**. Dans la pratique, a est toujours très petit devant 1 ($a \approx 10^{-3}$ pour les raies permises, et $a \ll 1$ pour les raies interdites¹⁴). La fonction de Voigt est donc la convolution d'une Gaussienne avec une Lorentzienne beaucoup plus piquée.

14. Leur largeur naturelle est très faible puisque le temps de vie sur le niveau excité est long, et de plus ces raies se forment dans des milieux très dilués de sorte que l'amortissement par collision est lui aussi très faible.

Comportements asymptotiques

Le cœur du profil de Voigt est dominé par la partie Gaussienne, et ses ailes par la partie Lorentzienne,

$$H(a, u) \simeq e^{-u^2} \quad \text{pour } u \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad H(a, u) \simeq \frac{a}{\sqrt{\pi}u^2} \quad \text{pour } u \rightarrow \pm\infty \quad (4.43)$$

On représente ces deux limites, respectivement en pointillés et en tirets, sur la Fig. 4.4.

Exercice 46 : Démontrer les limites asymptotiques (4.43) du profil de Voigt.

4.3.5 Du profil de raie au profil de raie...

Introduction

L'étude des raies d'absorption (profils, intensité) dans les spectres de sources astrophysiques brillantes permet d'obtenir des **diagnostics puissants sur les conditions physiques du milieu absorbant** (densité de colonne, température, état d'ionisation, degré d'excitation, rapports d'abondances, ...). Nous allons montrer comment l'on s'y prend, dans un cadre extrêmement simplifié, qui est celui d'un **milieu homogène purement absorbant dans une raie** (c'est-à-dire non émissif et n'absorbant pas le continu), placé en avant-plan d'une source ponctuelle (c'est-à-dire non résolue spatialement) de rayonnement continu (Fig. 4.5). Ce modèle peut s'appliquer notamment aux **nuages interstellaires devant les étoiles lointaines**, et aux **nuages intergalactiques devant les quasars**. Il a également été utilisé pour décrire les atmosphères stellaires, avant le développement de modèles plus sophistiqués.

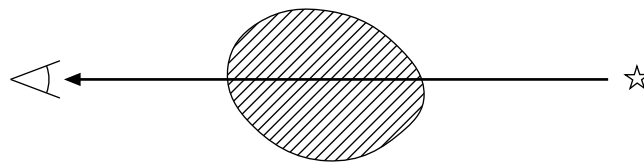


FIGURE 4.5 – Modèle de la couche absorbante.

Spectre normalisé au continu

Dans le modèle simple considéré ici, la solution de l'équation du transfert est

$$I_\nu = I_{\nu,c} e^{-\tau_\nu} \quad (4.44)$$

où $I_{\nu,c}$ désigne le **continuum**, c'est-à-dire l'intensité qu'on observerait en l'absence de nuage absorbant sur la ligne de visée. Au niveau d'une raie, τ_ν varie rapidement avec la fréquence : c'est le profil de la raie. Le **spectre normalisé** (indiqué à droite de la Fig. 4.6) est alors

$$\mathcal{I}_\nu = \frac{I_\nu}{I_{\nu,c}} = e^{-\tau_\nu} \quad (4.45)$$

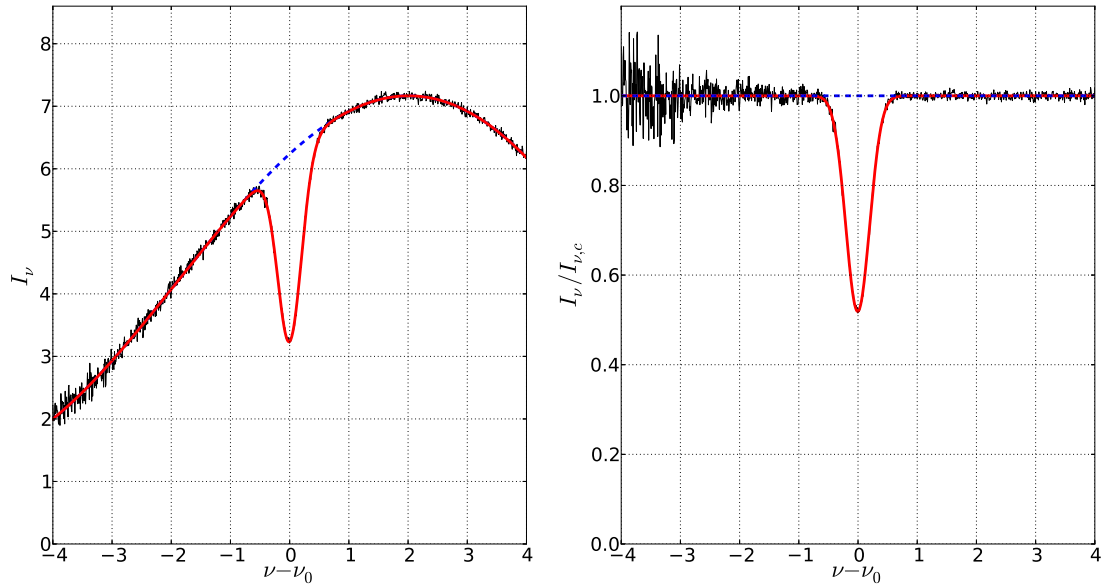


FIGURE 4.6 – Raie d’absorption devant une source de rayonnement continu (à gauche) et spectre normalisé $I_\nu/I_{\nu,c}$ (à droite). Sur chaque figure, le signal complet (incluant du bruit de mesure) est tracé en traits noirs, le signal débruité en traits rouges, et le continu sous-jacent en tirets bleus. L’axe des fréquences est centré sur la raie, et les unités de ν et I_ν sont arbitraires.

Il est important de voir que le profil observé sur cette raie n’est pas $\phi(\nu)$, mais une forme en $e^{-\tau_0\phi(\nu)}$. Dans le cas d’un profil de Voigt (on suppose qu’il n’y a qu’une seule composante en vitesse dans le spectre observé), l’intensité normalisée au continu est ainsi donnée par

$$\mathcal{I}_\nu = e^{-\tau_{\nu,0}H(a,u)} \quad (4.46)$$

où l’épaisseur optique au centre de la raie est

$$\tau_{\nu,0} = \kappa_{\nu,0}L = N_l \frac{e^2}{4\sqrt{\pi}\epsilon_0 m_e c \Delta\nu_D} f_{ul} = 1.5 \cdot 10^{-6} f_{ul} \left(\frac{N_l}{\text{m}^{-2}} \right) \left(\frac{\Delta\nu_D}{1 \text{ Hz}} \right)^{-1} \quad (4.47)$$

en introduisant la densité de colonne $N_l = n_l L$ de l’espèce responsable de l’absorption (correspondant à la population du niveau inférieur l de la transition mise en jeu).

La Fig. 4.7 montre les **profils de raies d’absorption obtenus** pour $a = 10^{-3}$ et différentes valeurs de l’épaisseur optique au centre de la raie, c’est-à-dire **différentes densités de colonne** de l’absorbeur, à dispersion de vitesse donnée. Aux faibles épaisseurs optiques, l’élargissement naturel n’est pas perceptible, et le cœur Doppler de la raie domine. Celui-ci **sature** lorsque $\tau_{\nu,0}$ augmente, puis, lorsqu’il est très saturé, apparaissent alors de **grandes ailes Lorentziennes**, qui seront en général résolues. Dans ce cas, leur ajustement fournit alors directement la densité de colonne N_l .

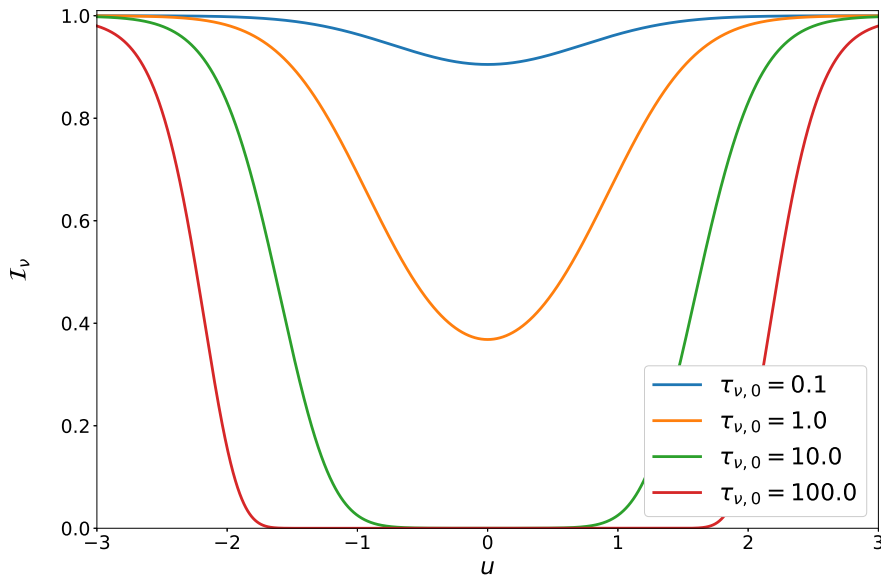


FIGURE 4.7 – **Profils de raies en absorption.** Ils sont montrés en fonction de $u = (\nu - \nu_0)/\Delta\nu_D$, pour $a = 10^{-3}$ et différentes valeurs de $\tau_{\nu,0}$: 0.1 (bleu), 1 (vert), 10 (rouge) et 100 (cyan).

4.4 Quelques exemples de raies astrophysiques

4.4.1 La raie à 21 cm de l'hydrogène atomique neutre

La raie de transition hyperfine à 21 cm de longueur d'onde ($\nu_0 = 1420.405751$ MHz) de l'hydrogène atomique neutre (HI) est un traceur puissant de **l'espèce la plus abondante dans l'Univers**. Elle se forme lorsque les **spins** du proton et de l'électron passent d'un état **parallèle** ($g_u = 3$) à un état **antiparallèle** ($g_l = 1$)¹⁵. C'est une transition fortement interdite ($A_{ul} = 2.85 \cdot 10^{-15} \text{ s}^{-1}$) mais la faible densité du milieu conjuguée aux grandes lignes de visée la rend parfaitement visible. Un exemple est présenté sur la Fig. 4.8, issue du relevé *THINGS, The HI Nearby Galaxy Survey* [25]. On y voit, à gauche, l'intensité intégrée dans la raie à 21 cm, et au milieu l'image en optique issue du *Digital Sky Survey*. On voit notamment que le gaz HI est notablement plus étendu que la population stellaire. À droite, on montre le spectre intégré sur toute l'étendue de la galaxie. Il présente une forme en **double pic caractéristique d'un système en rotation**. Vous verrez en TD comment calculer, à partir de tels spectres, la quantité de gaz d'hydrogène présente dans une telle galaxie.

4.4.2 Les raies rotationnelles du monoxyde de carbone

La molécule de CO

CO est la molécule interstellaire la plus abondante après H_2 . Elle possède un **moment dipolaire électrique permanent** non nul, ce qui autorise des transitions dipolaires électriques, plus rapides que pour H_2 . Les configurations électroniques de C et O impliquent que la sous-couche $2p$ de la molécule est pleine, de sorte que le moment cinétique et le spin électroniques sont nuls. La **configuration électronique fondamentale** est donc $^1\Sigma_0^+$. La liaison chimique entre les atomes étant forte (l'énergie de liaison est 11.1 eV), la distance internucléaire est faible et la constante de raideur équivalente grande.

15. Le nombre d'états pour un nombre quantique hyperfin F est $2F + 1$, or $F(l) = 0$ et $F(u) = 1$.

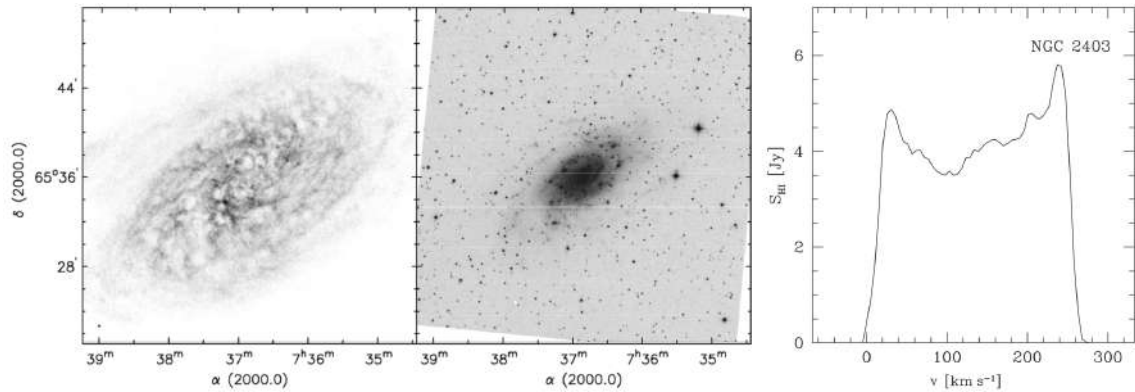


FIGURE 4.8 – Raie à 21 cm de NGC 2403. Intensité intégrée dans la raie (à gauche), image optique issue du DSS (au milieu) et spectre intégré de la raie (à droite) [25].

La masse réduite plus importante que pour H_2 implique un moment d'inertie plus grand, et donc que **les niveaux rotationnels J sont plus serrés**. On a en effet, pour un nombre quantique rotationnel J une énergie E_J et une multiplicité g_J données par

$$E_J = BJ(J + 1) \quad g_J = 2J + 1 \quad (4.48)$$

où la constante de rotation est $B = 0.24 \text{ meV}$, correspondant à une température de 2.77 K.

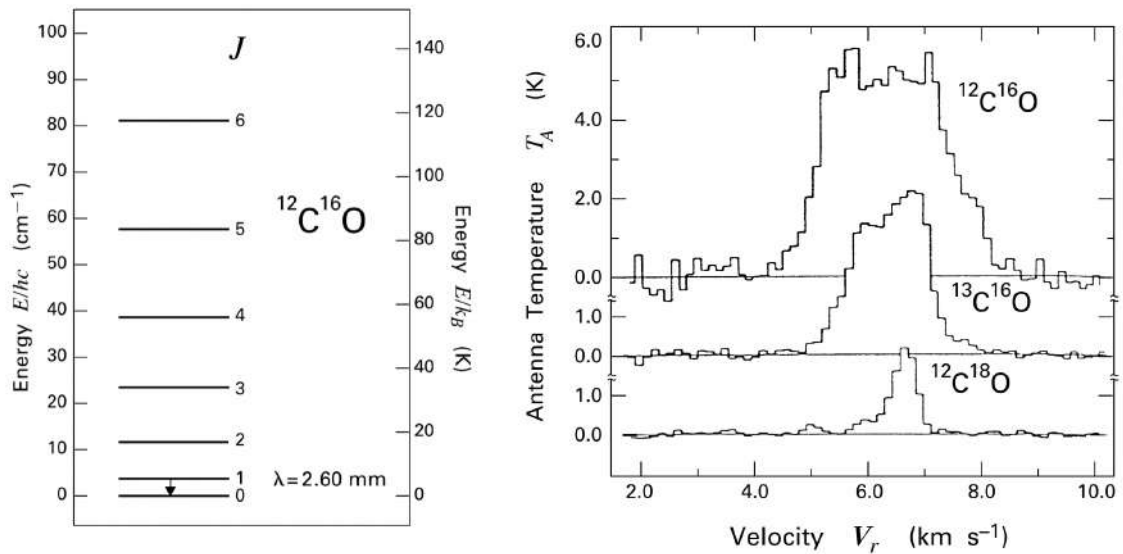


FIGURE 4.9 – La molécule CO. Niveaux rotationnels (à gauche) et profils de raies $J = 1 \rightarrow 0$ d'isotopologues de CO observés en direction du complexe moléculaire Taurus-Auriga. Figures issues de [26].

Transitions rotationnelles

Du fait de ce faible écart en énergie, les niveaux rotationnels $J > 0$ peuvent donc être facilement excités, même uniquement par les photons du CMB. De plus, leur désexcitation peut se faire dans des

transitions dipolaires électriques, plus rapides, pour lesquelles on a $\Delta J = \pm 1$. Les premières de ces transitions sont¹⁶

$$J = 1 \rightarrow 0 \text{ à } 115 \text{ GHz} \quad J = 2 \rightarrow 1 \text{ à } 230 \text{ GHz} \quad J = 3 \rightarrow 2 \text{ à } 345 \text{ GHz} \quad (4.49)$$

Ce sont donc des raies dans le millimétrique et le submillimétrique, observables depuis le sol. Le coefficient de désexcitation collisionnelle de la transition $J = 1 \rightarrow 0$ vaut $k_{10} \approx 6 \cdot 10^{-11} \text{ cm}^3 \cdot \text{s}^{-1}$, de sorte que la **densité critique** est de l'ordre de 10^3 cm^{-3} , ce qui implique que dans le gaz moléculaire diffus, l'excitation est collisionnelle, mais la désexcitation radiative.

L'émission CO comme traceur du gaz moléculaire

La molécule CO se forme dans les régions où l'hydrogène est déjà sous forme moléculaire, il est donc envisageable d'utiliser les raies rotationnelles de CO comme **traceur du gaz moléculaire**, depuis la découverte de cette émission dans Orion en 1970. Pour formaliser cette relation, on introduit le **facteur de conversion** X_{CO} entre l'intensité intégrée dans la raie de CO ($J = 1 \rightarrow 0$) et la densité de colonne de l'hydrogène moléculaire H_2 ,

$$X_{\text{CO}} = \frac{N(\text{H}_2)}{\int T_b(J = 1 \rightarrow 0) dv} \quad (4.50)$$

Observationnellement, pour déterminer X_{CO} , il faut une estimation indépendante de $N(\text{H}_2)$, qu'on obtient via l'émission FIR de la poussière ou le flux γ associé à la désintégration des pions issus de l'interaction entre le MIS et les rayons cosmiques. Ainsi, on trouve typiquement

$$X_{\text{CO}} \approx 1.5 - 2.0 \cdot 10^{20} \text{ cm}^{-2} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{km}^{-1} \cdot \text{s} \quad (4.51)$$

On cartographie ainsi par exemple la distribution du gaz moléculaire dans notre Galaxie, qui est concentrée dans le plan Galactique, comme le montre la Fig. 4.10.

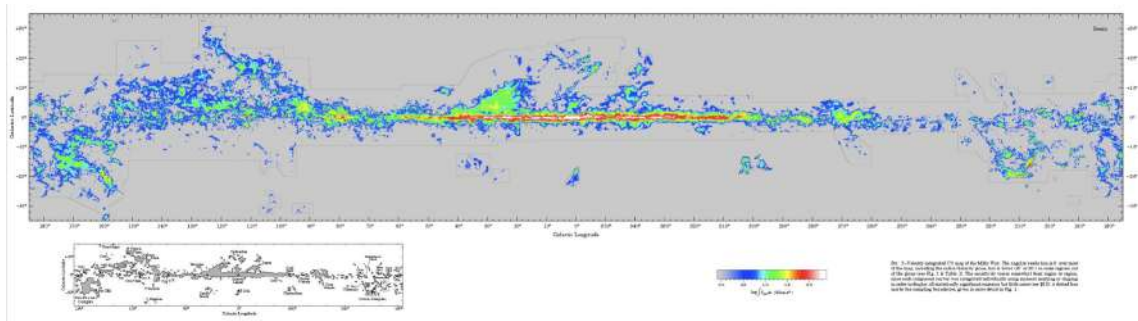


FIGURE 4.10 – **Emission CO ($J = 1 \rightarrow 0$) au voisinage du plan Galactique.** Figure issue de [27].

16. Ces valeurs numériques s'appliquent pour l'isotopologue principal $^{12}\text{C}^{16}\text{O}$.

Chapitre 5

Les étoiles

Les **étoiles** constituent peut-être l'élément central de l'astrophysique. L'étude de leur structure et de leur évolution forme le domaine de la **physique stellaire**, dont les thématiques s'étendent d'une part à l'évolution des galaxies, au travers de la discussion des **populations stellaires** et de la **composition chimique** du gaz, et d'autre part à la formation des **exoplanètes** et à l'apparition possible de formes de vie. Enfin, les étoiles sont de formidables laboratoires pour la **physique fondamentale**, permettant d'accéder à des conditions de température et de densité difficiles à explorer autrement.

5.1 Caractérisation des étoiles

En regardant attentivement les étoiles, on constate qu'elles n'ont pas toute le même éclat, ni la même couleur (Fig. 5.1), cela traduit des différences en termes de **masse** ou de **stade évolutif**. Pour les expliquer au travers de la théorie de l'évolution stellaire, il convient de commencer par classifier les étoiles, et donc de mesurer leurs propriétés.



FIGURE 5.1 – **La constellation d'Orion.** On distingue notamment Bételgeuse (supergéante rouge, M1-2 Ia-Iab) en haut à gauche et Rigel (supergéante bleue, B8 Ia) en bas à droite. (Crédit : Carrotto-mato, Fotolia).

5.1.1 Mesure des distances stellaires

Étoiles proches : la méthode des parallaxes

Pour les étoiles les plus proches, on est en mesure d'estimer leur distance au moyen de la **méthode des parallaxes**, illustrée sur la Fig. 5.2., et fondée sur le fait que la position de cette étoile semble changer au cours de l'année, du fait de la révolution de la Terre autour du soleil. Par définition, la **parallaxe annuelle** δ d'une étoile est l'angle sous lequel on verrait le demi grand-axe de l'orbite terrestre, égal à 1 unité astronomique¹ depuis cette étoile. Cela permet de définir une unité pratique de distance, le **parsec**, qui est la distance D_* telle que la parallaxe annuelle vaut 1 seconde d'arc². Ainsi, $1 \text{ pc} = 3.086 \cdot 10^{16} \text{ m}$. On notera que les étoiles les plus proches de nous, hormis le Soleil, sont à des distances typiques de quelques parsecs³. On peut aussi utiliser l'**année-lumière**, distance parcourue par la lumière en une année, qui vaut $1 \text{ a.l.} = 9.46 \cdot 10^{15} \text{ m} = 0.307 \text{ pc}$.

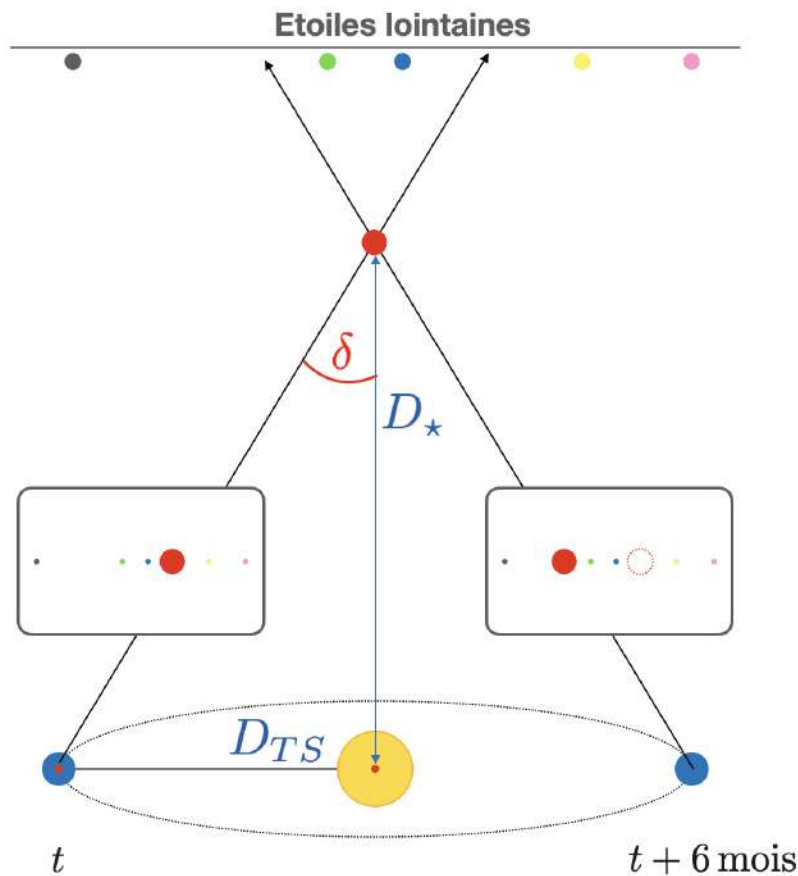


FIGURE 5.2 – Parallaxes stellaires.

Exercice 47 : Estimer la distance maximale accessible par le biais de cette méthode., sachant que la précision de la position des étoiles les plus brillantes obtenue avec Gaia est de l'ordre de 0.5 mas.

1. $1 \text{ UA} = 149.6 \cdot 10^9 \text{ m}$.
2. $1'' = (1/3600)^\circ = 4.8 \cdot 10^{-6} \text{ rad}$.
3. La plus proche, Proxima Centauri, est à 1.3 pc.

Chandelles standard

Certaines étoiles ont des propriétés qui permettent d'en connaître la **luminosité intrinsèque** L (ou encore la **magnitude absolue** M (voir la section 2.2.2)). En mesurant le flux F reçu sur Terre, on en déduit la distance D_* via la relation

$$D_* = \sqrt{\frac{L}{4\pi F}} \quad (5.1)$$

On parle alors de **chandelles standard**, qui permettent de construire progressivement une **échelle cosmique des distances**. Parmi ces objets, on a notamment

- Les étoiles variables **RR Lyrae**, caractérisée par une relation entre leur **période** et leur **luminosité intrinsèque**. Elles permettent de mesurer des distances jusqu'à environ 2 Mpc.
- Les étoiles variables **Céphéides**, caractérisée par une relation entre leur **période** et leur **luminosité intrinsèque**. Elles permettent de mesurer des distances jusqu'à environ 30 Mpc.
- Les **novæ**, dont la magnitude absolue en bande V est $M_V = -6.5$, qui permettent de mesurer des distances jusqu'à environ 40 Mpc.
- Les **supernovæ de type Ia**, dont la magnitude absolue en bande V est $M_V = -19.7$, qui permettent de mesurer des distances jusqu'à environ 3 Gpc.

5.1.2 Températures et couleurs

Température effective

Comme on l'a vu sur le cas du Soleil (Fig. 1.2), les spectres stellaires ont une forme proche de celle d'un corps noir, uniquement modifié par la présence de raies d'absorption. Il est donc naturel de définir une **température effective** T_{eff} comme en (3.1.4) par

$$T_{\text{eff}} = \left(\frac{L}{4\pi R^2 \sigma} \right)^{1/4} \quad (5.2)$$

où L et R sont respectivement la luminosité et le rayon stellaire. Notons que ce rayon est celui de la **photosphère**, qui est la zone de l'étoile d'où les photons s'échappent quasi-librement. Si l'on mesure la magnitude apparente m d'une étoile et qu'on connaît sa distance D_* , on peut en déduire sa luminosité, mais la détermination de son rayon est bien plus délicate, de sorte que l'équation ci-dessus ne peut que rarement être utilisée pour déterminer T_{eff} . Pour une même température effective, on a possiblement des étoiles géantes très lumineuses ou des étoiles peu lumineuses beaucoup plus compactes, de sorte que le rapport L/R^2 soit le même. Pour les distinguer, on a introduit des **classes de luminosité** numérotées de I à VII pour des objets de moins en moins brillants (voir plus loin).

Indice de couleur

La température de l'étoile se traduit aussi par sa **couleur**, qu'on quantifie au travers d'un **indice de couleur**, différence entre les magnitudes observées au travers de différents **filtres**.

$$X - Y = m_X - m_Y = -2.5 \log \left(\frac{F_X}{F_Y} \right) \quad (5.3)$$

où F_X et F_Y sont les flux observés dans les bandes X et Y, respectivement. On utilise par exemple les indices de couleur $U - B$ et $B - V$, où U, B, V désignent des bandes dans l'UV (364 nm), le bleu (442 nm) et le jaune (540 nm)⁴. Il existe une **relation univoque entre ces indices de couleur et la température effective** (Fig. 5.3), ce qui permet de la déterminer.

4. Par exemple, dans le cas du Soleil, on a $U - B = 0.13 \pm 0.02$ et $B - V = 0.63 \pm 0.02$, ce qui montre que le Soleil rayonne davantage aux longueurs d'onde plus grandes.

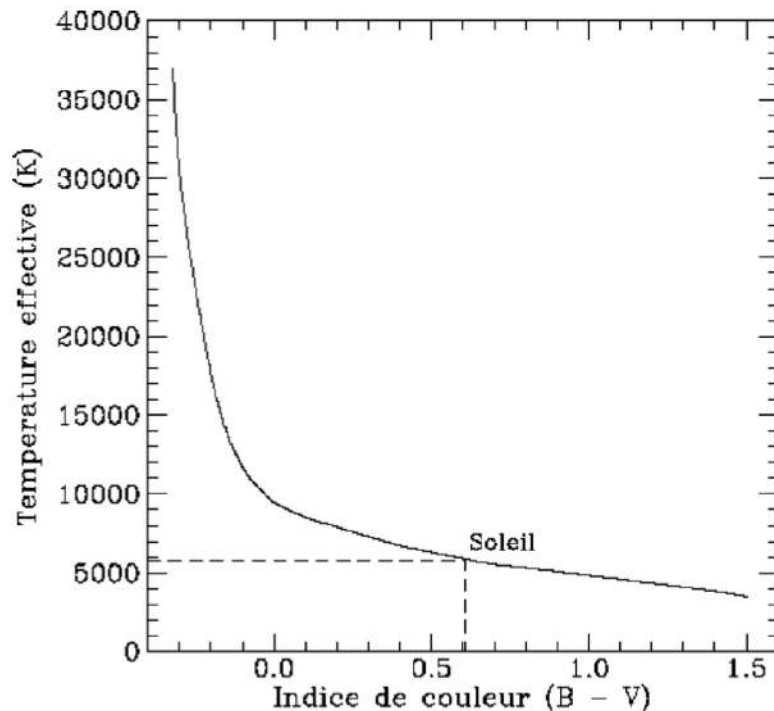


FIGURE 5.3 – Relation indice de couleur - température effective. Données issues de [29].

5.1.3 Composition chimique

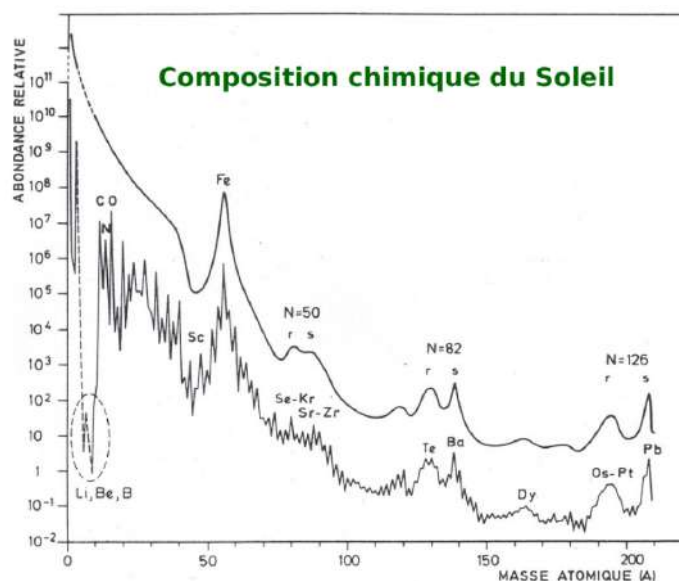
Au travers de la **spectroscopie haute résolution** et de la comparaison à des modèles stellaires, on peut obtenir une estimation précise de la température effective, mais également de la **composition chimique** de l'étoile, tout du moins de ses couches les plus externes (Fig. 5.4). Ces analyses montrent que tous les éléments chimiques présents sur Terre le sont également dans les étoiles, et antérieurement dans le milieu interstellaire à partir duquel elles se forment.

Processus de nucléosynthèse

Ces éléments proviennent de différents canaux de **nucléosynthèse**, c'est-à-dire de formation de noyaux atomiques nouveaux à partir d'éléments existants :

- La **nucléosynthèse primordiale**, qui a formé les éléments les plus légers dans l'Univers jeune. Avant la formation des premières étoiles, l'Univers était ainsi composé d'hydrogène (dont du deutérium), d'hélium ^3He et ^4He (7 à 8%) et de lithium ^7Li ($< 10^{-9}$)
- La **nucléosynthèse stellaire**, qui produit des éléments plus lourds (carbone et oxygène en particulier), par **fusion thermonucléaire** d'éléments légers au cœur des étoiles. L'éjection de masse par les **vents stellaires** et les **supernovæ** relargue ces éléments dans le milieu interstellaire.
- La **nucléosynthèse explosive**, qui produit les éléments les plus lourds comme l'uranium au cours des événements violents comme les fusions d'étoiles à neutrons ou les explosions de supernovæ.
- La **spallation**, qui est la production de noyaux légers comme le béryllium ou le bore comme fragments de noyaux plus lourds (carbone et oxygène) suite à l'impact de particules très énergétiques (les rayons cosmiques).

L'origine des divers éléments est représentée schématiquement sur la Fig. 5.5.



Hydrogène	92.1 %
Hélium	7.8%
Oxygène	0.061 %
Carbone	0.030 %
Azote	0.0084 %
Néon	0.0076 %
Fer	0.0037 %
Silicium	0.0031 %
Magnésium	0.0024 %
Sulfure	0.0015 %
Autres	0.0015 %

FIGURE 5.4 – **Composition chimique du Soleil.** Les chiffres de la table de droite sont les abondances en nombre d'atomes et non les fractions de masse [30].

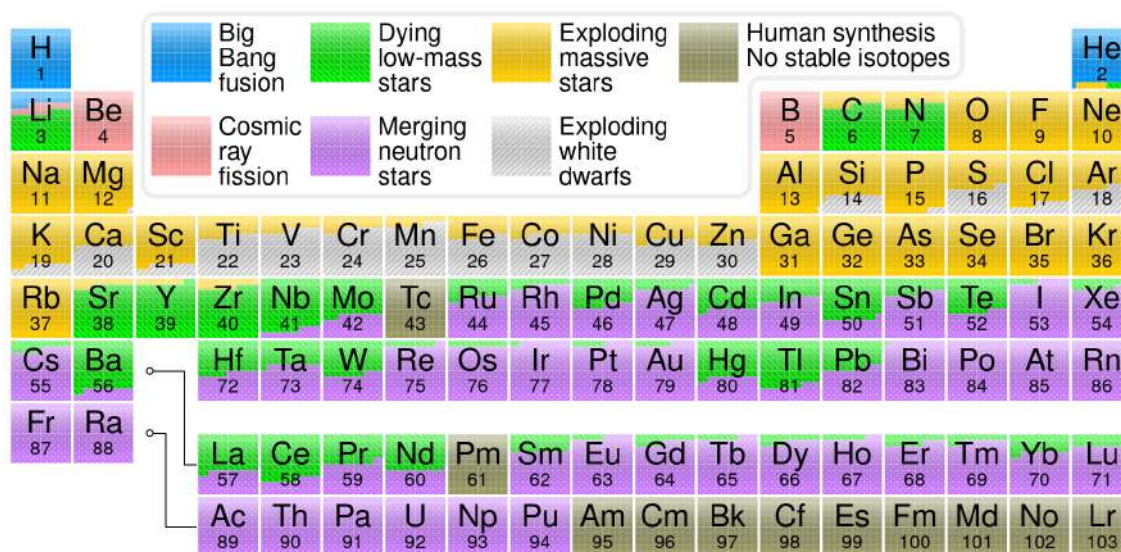


FIGURE 5.5 – **Les différents canaux de la nucléosynthèse.** [Crédit : Cmglee / Wikimedia Commons.]

Fractions de masse, abondances et métallicité

On définit les **fractions de masse** des éléments comme le rapport de la masse qu'ils représentent à la masse totale. Par convention, on regroupe celle de tous les **isotopes** de l'hydrogène sous la notation X , celle de tous les isotopes de l'hélium sous la notation Y , et celle de tous les autres éléments sous la notation Z , qu'on appelle **métallicité**. Ainsi

$$X = \frac{m(\text{H})}{M} \quad Y = \frac{m(\text{He})}{M} \quad Z = 1 - X - Y \quad (5.4)$$

Dans le cas du Soleil, on a, initialement $X = X_{\odot} \approx 0.7$, $Y = Y_{\odot} \approx 0.28$, $Z = Z_{\odot} \approx 0.02$. Notons qu'avec l'évolution stellaire, ces fractions de masse évoluent sous l'effet des réactions nucléaires et des processus de transport. Elles peuvent également dépendre de la position r au sein de l'étoile, et la spectroscopie ne donne accès qu'aux valeurs actuelles à la surface. On définit par ailleurs le **rapport d'abondance à l'hydrogène**, souvent lui-même rapporté à la valeur solaire, qu'on note

$$[M/H] = \log(Z/X) - \log(Z_{\odot}/X_{\odot}) \quad (5.5)$$

où M désigne les **métaux**, c'est-à-dire tous les éléments autres de l'hydrogène et l'hélium.

Populations stellaires

L'enrichissement en métaux du MIS par le biais de la nucléosynthèse stellaire et de l'éjection de matière fait que, d'une génération à l'autre, les étoiles s'enrichissent elles-aussi en éléments lourds. On distingue ainsi trois **populations stellaires** dans notre Galaxie :

- Les étoiles de **population I** : étoiles jeunes du disque Galactique, de composition chimique riche en métaux ($Z \approx 0.02$) semblable au Soleil.
- Les étoiles de **population II** : étoiles plus vieilles, présentes dans le **halo** et les **amas globulaires**, pauvres en métaux ($Z \approx 0.001$).
- Les étoiles de **population III** : étoiles de première génération, sans métaux ($Z \approx 0$).

5.1.4 Classification spectrale

La formation des raies en absorption dans un spectre stellaire est due au passage des photons issus de la photosphère au travers de l'atmosphère stellaire, plus froide. La présence de certaines raies, leurs intensités, leurs rapports et leurs formes dépendent donc des conditions physiques photosphériques (notamment de la température) et de la composition chimique de l'atmosphère.

Exercice 48 : *Expliquer pourquoi on observe une raie en absorption si le milieu traversé est plus froid que le fond, et une raie en émission dans le cas contraire.*

Classification en température

On peut ainsi procéder à une **classification spectrale** des étoiles. Celle en vigueur descend du travail colossal des **calculatrices de Harvard**, notamment Williamina Fleming⁵, Antonia Maury⁶ et Annie Jump Cannon⁷. Par ordre de température effective décroissante, on trouve les types O, B, A, F, G, K et M⁸. La Fig. 5.6 présente les températures effectives typiques de ces étoiles et les raies d'absorption qui les caractérisent. De **sous-classes** sont constituées en divisant chacun de ces types, et sont notées en insérant un chiffre de 0 à 9 après le type spectral. On passe ainsi de B9 à A0. Le Soleil est une étoile de type G2, de température effective $T_{\text{eff}} = 5770 \text{ K}$.

5. Dundee, 15 mai 1857 - Boston, 21 mai 1922
 6. Cold Spring, 21 mars 1866 - Dobbs Ferry, 8 janvier 1952
 7. Dover, 11 décembre 1863 - Cambridge, 13 avril 1941
 8. Plusieurs moyens mnémotechniques existent pour se rappeler cet ordre, comme "Oh Be A Fine Girl, Kiss Me", ou le plus acceptable "Only Boys Accepting Feminism Get Kissed Meaningfully" ...

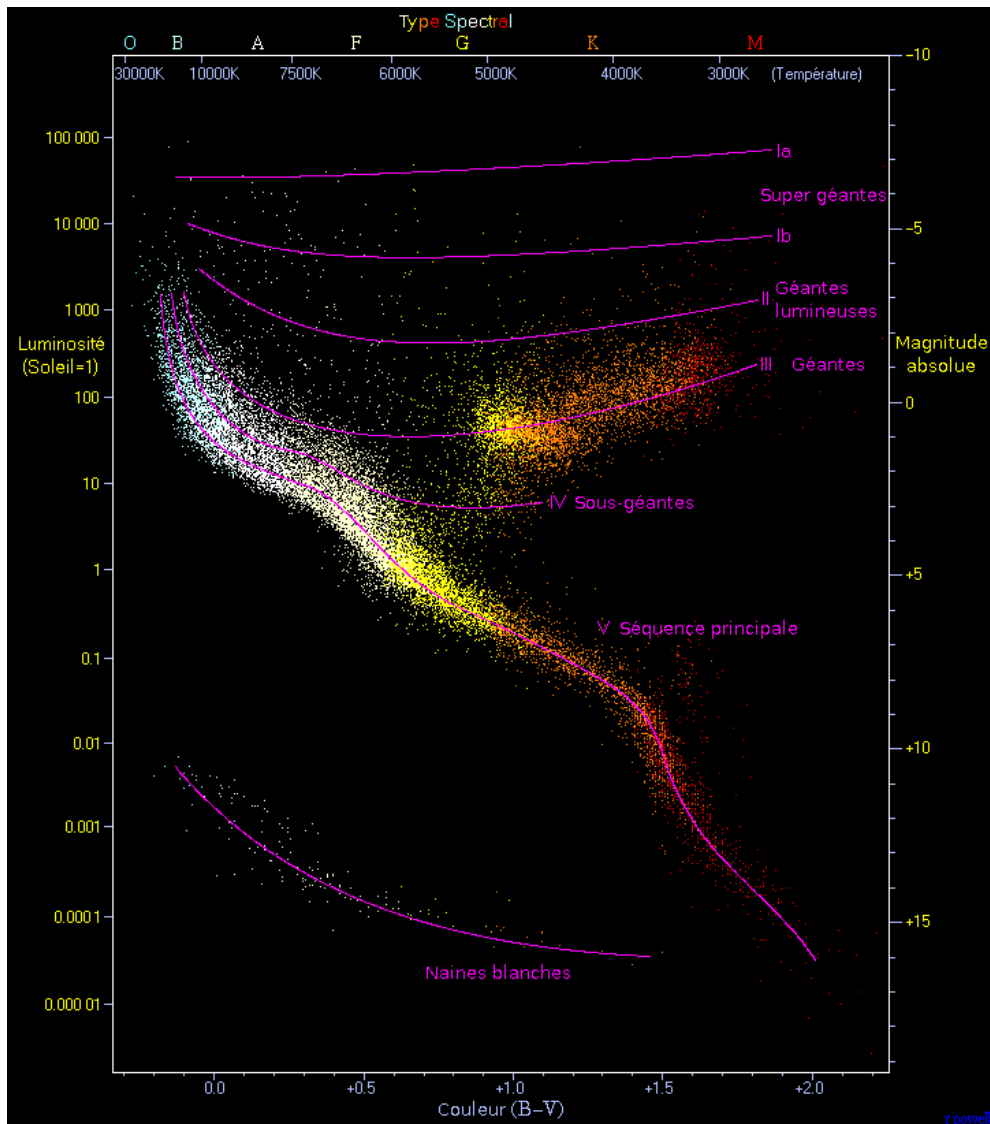


FIGURE 5.7 – **Diagramme de Hertzsprung-Russell.** Les classes de luminosité sont indiquées, des super-géantes aux naines blanches. Les sous-naines n'apparaissent pas dans ce diagramme particulier. [Crédit : R. Powell / Wikimedia Commons.]

comprend l'intérêt qu'il y a à placer les étoiles dans ce diagramme pour en suivre l'évolution¹¹. De tels diagrammes sont essentiels pour décrire et prédire cette évolution, ce qui constitue l'un des objectifs premiers de la physique stellaire.

5.1.5 Détermination des masses stellaires

La **plage de masse** des objets stellaires s'étend de $\sim 0.08 M_{\odot}$ à $\sim 120 M_{\odot}$. En deçà, et jusqu'à environ $\sim 0.01 M_{\odot}$, on trouve le domaine des **naines brunes**, objets trop peu massifs pour que les réactions thermonucléaires de fusion de l'hydrogène puissent avoir lieu dans leur cœur. La détermination

11. Y compris leur évolution avant la séquence principale, qu'on discutera dans le chapitre sur la formation stellaire.

de la masse d'une étoile repose le plus généralement¹² sur les **lois de Kepler** dans des systèmes multiples, sachant qu'on estime que plus de la moitié des étoiles appartiennent à de tels systèmes. On va étudier plus particulièrement le cas des **binaires**, qu'on peut classifier selon la méthode permettant de justement déterminer leur caractère binaire :

- Les **binaires visuelles**, dont on voit le mouvement propre sur le ciel, et dont on peut donc mesurer les **paramètres orbitaux** (Fig. 5.8).
- Les **binaires à éclipse**, telles que l'un des membres du système occulte périodiquement une fraction du disque stellaire de l'autre (Fig. 5.9).
- Les **binaires spectroscopiques**, dont on mesure le mouvement radial périodique lors de leur orbite autour du centre de masse (Fig. 5.10).

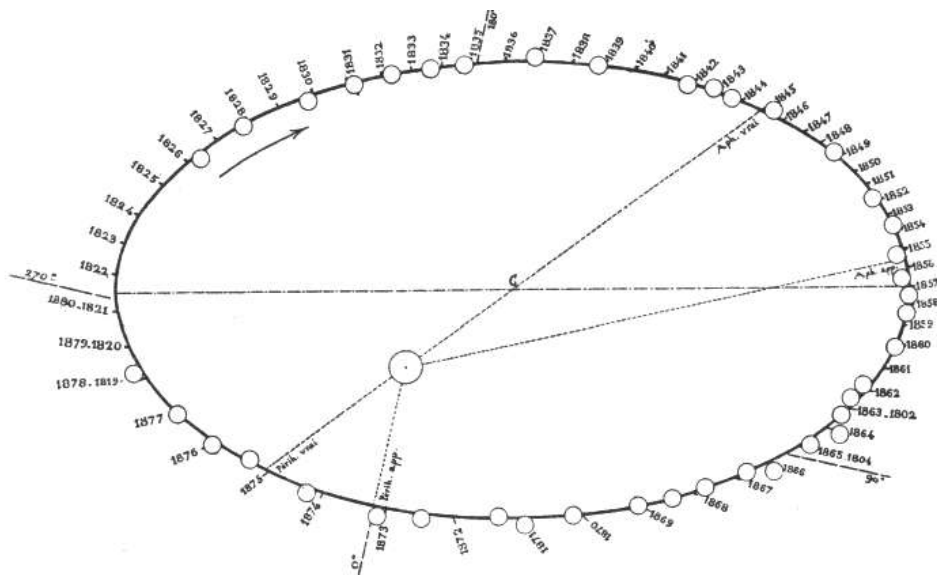


Fig. 73. — Orbite apparente de l'étoile double ξ Grande Oursé.

FIGURE 5.8 – **Exemple de binaire visuelle.** Il s'agit de ξ Ursæ Majoris, observée par Camille Flammarion (1882).

Binaires visuelles

Dans un système binaire (Fig. 5.11), on notera *A* la **composante primaire** et *B* la **composante secondaire**, étant entendu que cela implique que leurs masses vérifient $M_A > M_B$. D'après les lois de Kepler, chaque composante parcourt une **orbite elliptique** autour¹³ du **centre de masse** *G*. On note a_A et a_B les demi grands axes des orbites de *A* et *B*, respectivement. Si l'on connaît ces valeurs, on peut en déduire le rapport des masses

$$\frac{M_A}{M_B} = \frac{a_B}{a_A} \quad (5.6)$$

De plus, le mouvement relatif de *B* par rapport à *A* est identique à celui d'un **mobile fictif** de masse égale à la **masse réduite du système** $\mu = M_A M_B / (M_A + M_B)$ dans un champ de force gravitationnel identique à celui qui s'exerce entre les deux composantes du système. La résolution du problème de

12. Une autre méthode de détermination des masses stellaires repose sur l'**astérosismologie**, qui est l'étude des oscillations stellaires. On n'en parlera pas dans ce cours.

13. Plus précisément, *G* est l'un des foyers de l'ellipse.

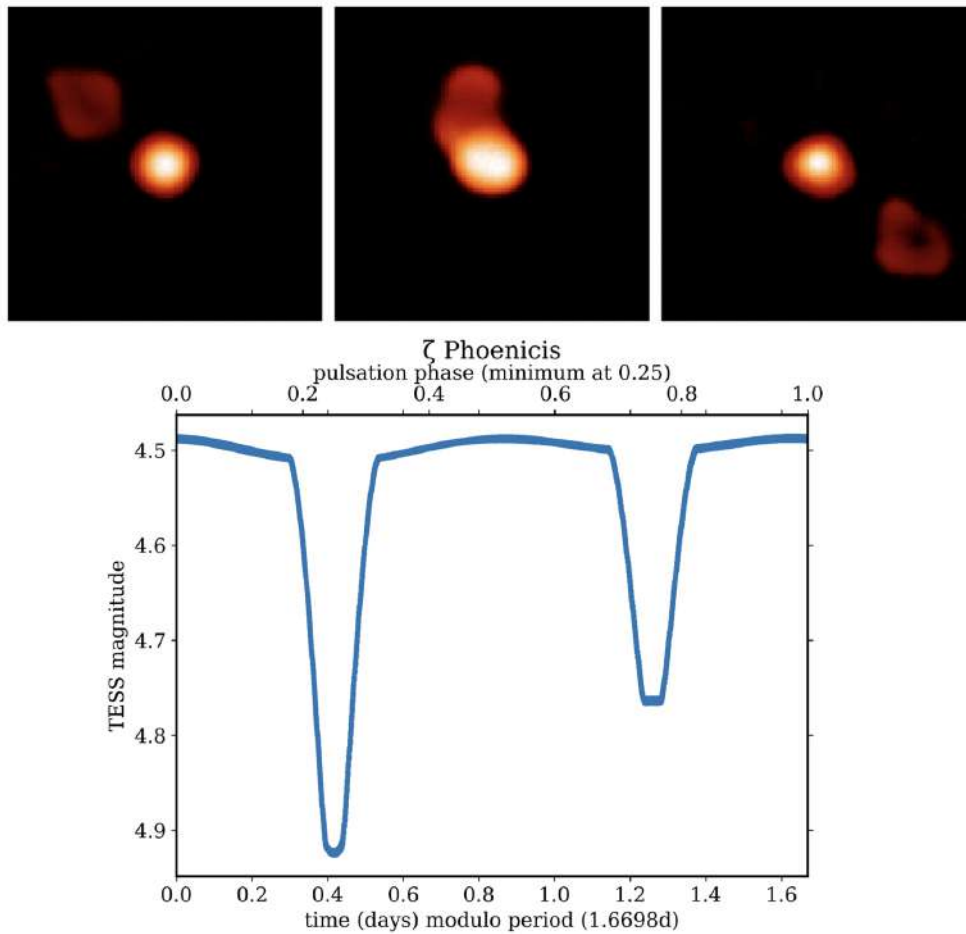


FIGURE 5.9 – **Exemple de binaire à éclipse.** Les images présentent l'observation de l'éclipse d'Algol B (la plus lumineuse) par Algol A [31]. La figure du bas montre la courbe de lumière (NASA/TESS).

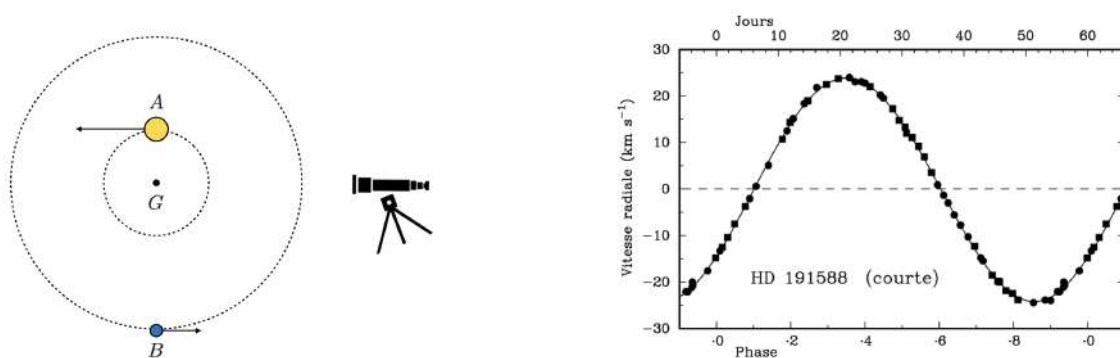


FIGURE 5.10 – **Exemple de binaire spectroscopique.** Le schéma de gauche montre le principe de la détection, la figure de droite montre la vitesse radiale en fonction du temps pour l'étoile HD191588 [32].

Kepler ainsi posé, et l'application notamment de la **troisième loi de Kepler** implique que la **période**

du mouvement orbital P est reliée au demi grand axe $a = a_A + a_B$ du mouvement relatif par

$$\frac{P^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G(M_A + M_B)} \quad (5.7)$$

De cette manière, la connaissance de la somme et du rapport des masses permet de déterminer les masses individuelles des deux composantes. Il faut noter cependant que :

- la détermination des orbites réelles à partir des orbites apparentes est sujette à celle de l'**angle d'inclinaison** i de l'orbite sur le plan du ciel ;
- les mesures faites sont angulaires et il faut donc avoir une estimation de la distance du système (via sa parallaxe) pour obtenir les valeurs des demi grands axes.

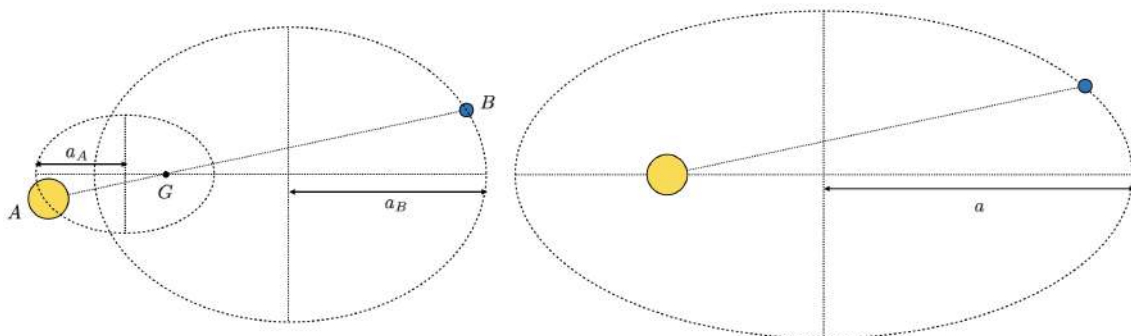


FIGURE 5.11 – **Éléments orbitaux d'un système binaire.** Le schéma de gauche représente les orbites de chaque composante autour du centre de masse G , celui de droite le mouvement relatif du secondaire B par rapport au primaire A .

Binaires spectroscopiques

Dans ce cas de figure, on n'a pas accès au mouvement propre des étoiles dans le ciel, mais on peut mesurer leur vitesse radiale par **effet Doppler**. En prenant le cas simple d'orbites circulaires dans un plan incliné d'un angle i sur le plan du ciel, les vitesses radiales v_A et v_B présentent des variations temporelles sinusoïdales, dont les amplitudes sont respectivement $V_A \sin i$ et $V_B \sin i$, où V_A et V_B sont les modules des vitesses circulaires orbitales des composantes. Le rapport des amplitudes donne alors le rapport des masses

$$\frac{M_A}{M_B} = \frac{V_B}{V_A} \quad (5.8)$$

et on peut obtenir la somme des masses en utilisant là encore la troisième loi de Kepler

$$M_A + M_B = \frac{P(V_A + V_B)^3}{2\pi G} \quad (5.9)$$

On peut donc là encore déterminer les masses individuelles des deux composantes. Une approche similaire est utilisée pour la détection des **exoplanètes** avec la **méthode des vitesses radiales**, mais on ne dispose alors pas de la vitesse de la planète B , uniquement celle de l'étoile-hôte A . L'amplitude K de la vitesse radiale de l'étoile est donnée par la relation

$$K^3 = \frac{2\pi G}{P} f(M_A, M_B) \quad (5.10)$$

où $f(M_A, M_B) = (M_B \sin i)^3 / (M_A + M_B)^2$ est la **fonction de masse**. Si l'on peut obtenir une estimation de l'angle i et qu'on connaît la masse de l'étoile, on en déduit celle de la planète.

Exercice 49 : Établir la relation (5.9).

5.1.6 Détermination des rayons stellaires

Le **rayon stellaire** est par définition celui de la **photosphère**, qui est la région de l'étoile dont s'échappent les photons, et qui peut avoir des épaisseurs sensiblement différentes d'une étoile à l'autre ¹⁴. Les rayons stellaires varient de $\sim 10^{-3} R_{\odot}$ à $\sim 10^3 R_{\odot}$, sachant que le rayon solaire est $1 R_{\odot} \approx 7 \cdot 10^8$ m.

La **mesure directe** du rayon stellaire n'est possible que pour les étoiles suffisamment proches et grandes pour que leur taille apparente soit supérieure à la résolution angulaire de l'instrument. On peut utiliser l'**interférométrie** pour améliorer cette résolution. En combinant ces mesures angulaires avec une estimation de parallaxe du système, on obtient le diamètre physique de l'étoile. À titre d'exemple, les observations de l'interféromètre optique CHARA combinées aux parallaxes *Hipparcos* ont permis de déterminer que les composantes du système 16 Cyg AB ont pour diamètres $1.22 \pm 0.02 R_{\odot}$ (A) et $1.12 \pm 0.02 R_{\odot}$ (B).

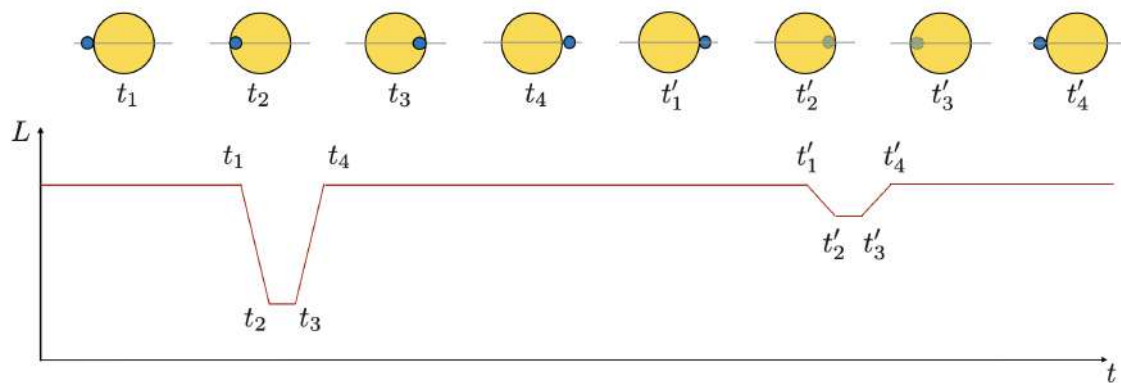


FIGURE 5.12 – Détermination de rayons stellaires.

Les mesures indirectes de rayons stellaires sont possibles pour les **binaires à éclipse**. Dans le cas le plus simple d'un système vu exactement par la tranche et où les orbites sont circulaires, on observe des variations périodiques du flux F reçu, formant la **courbe de lumière**. Ces variations ont la forme représentée sur la Fig. 5.12 et sont dues au passage de la composante secondaire, la moins brillante, devant et derrière la composante primaire plus brillante. Les points particuliers t_1 , t_2 , t_3 et t_4 lors du **transit** sont appelés **premier**, **deuxième**, **troisième** et **quatrième contact**. Les mêmes termes sont utilisés pour les points t'_1 , t'_2 , t'_3 et t'_4 lors de l'**antitransit**. En notant $T = t_4 - t_1$ et $\tau = t_3 - t_2$, on a directement le rapport des rayons

$$\frac{R_B}{R_A} = \frac{T - \tau}{T + \tau} \quad (5.11)$$

On peut aussi, en supposant le demi grand axe a connu, obtenir les rayons de chaque composante

$$R_A = \frac{\pi T + \tau}{2 P} a \quad R_B = \frac{\pi T - \tau}{2 P} a \quad (5.12)$$

où P est la période orbitale. Notons qu'une méthode exactement similaire, la **méthode des transits**, permet régulièrement la détection d'**exoplanètes** par la diminution du flux lumineux reçu de leur étoile-hôte lorsqu'elles en occultent une partie du disque.

Exercice 50 : Démontrer les relations (5.11) et (5.12). On se placera dans le cas le plus simple.

14. De moins de 1% de la taille de l'étoile pour les naines à quelques dixièmes de cette taille pour les géantes. La photosphère solaire a une épaisseur d'environ 400 km.

5.2 La structure stellaire

5.2.1 Les équations générales de la structure stellaire

La structure d'une étoile ainsi que son évolution sont déterminées par la résolution d'un ensemble d'équations différentielles non-linéaires couplées, formant les **équations générales de la structure interne**. Elles se fondent sur la modélisation d'une étoile en tant que **plasma fluide** tridimensionnel soumis à sa propre **gravité** et aux différentes forces de **pression**, au cœur duquel l'énergie est produite par les réactions de **fusion thermonucléaire**, puis **transportée** vers l'extérieur de différentes manières (**conduction**, **convection** et **rayonnement**). Dans sa version standard, cette modélisation suppose un objet à symétrie sphérique¹⁵, qu'on pourra donc traiter en une seule dimension. On aura alors à choisir entre une **description Eulerienne**, où la variable sera la distance r au centre, et une **description Lagrangienne**, où la variable sera la masse $m(r)$ interne au rayon r . Les équations qu'il conviendra alors de résoudre doivent traduire les phénomènes physiques suivants :

- la conservation de la masse
- la conservation de la quantité de mouvement
- la conservation de l'énergie
- le transport de l'énergie du centre vers l'extérieur¹⁶
- la transformation chimique du plasma au cours du temps

5.2.2 Des temps caractéristiques

Il est utile d'aborder le problème en discutant de quelques **temps caractéristiques d'évolution**, suivant les ingrédients physiques pris en compte.

Un temps dynamique : le temps de chute libre

Prenons une étoile de masse M et de rayon R , et imaginons que seule l'auto-gravité de l'étoile joue un rôle, c'est-à-dire qu'on néglige les forces de pression et la production d'énergie par les réactions nucléaires. L'équation d'évolution d'une particule fluide située au rayon r est alors simplement

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -G \frac{m(r)}{r^2} \quad (5.13)$$

dont on tire un **temps dynamique**, le **temps de chute libre**, qui vaut, en ordre de grandeur¹⁷

$$\tau_{\text{dyn}} \sim \sqrt{\frac{R^3}{GM}} \quad (5.14)$$

Pour le Soleil, ce temps est de seulement 27 minutes (!) mais pour un objet interstellaire précurseur d'une étoile comme on en discutera plus tard, ce temps peut être notablement plus long.

Exercice 51 : Établir l'expression du temps de chute libre.

15. Ceci exclut de fait les questions liées à la rotation stellaire, au champ magnétique, ou encore à la présence d'un compagnon exerçant des forces de marée.

16. Rappelons que les étoiles brillent, c'est donc qu'elles perdent de l'énergie à leur surface...

17. En faisant le calcul, on trouve que le temps de chute libre est affecté d'un facteur $\pi/(2\sqrt{2})$.

Un temps thermique : le temps de Kelvin-Helmholtz

D'où provient *in fine* la luminosité stellaire L ? Autrement dit, à quelle source d'énergie cette luminosité est-elle puisée? On pourrait imaginer qu'il s'agisse de l'énergie potentielle gravitationnelle¹⁸

$$E_g = -\frac{3}{5} \frac{GM^2}{R} < 0 \quad (5.15)$$

On peut voir en effet $-E_g$ comme l'énergie qu'il faudrait fournir à l'étoile pour la disperser à l'infini, et inversement, cette énergie est celle perdue par le système de particules depuis la formation de l'étoile. On a alors un temps caractéristique, le **temps de Kelvin-Helmholtz**

$$\tau_{\text{KH}} \sim \frac{GM^2}{RL} \quad (5.16)$$

Pour le Soleil, cette échelle de temps de contraction gravitationnelle est de $3.1 \cdot 10^7$ an, beaucoup plus courte que l'âge de la Terre¹⁹. Le Soleil puise donc sa luminosité à une autre source.

Exercice 52 : *Établir l'expression de l'énergie potentielle gravitationnelle et vérifier l'ordre de grandeur donné pour le temps de Kelvin-Helmholtz dans le cas du Soleil. On rappelle que $1 L_{\odot} \approx 3.8 \cdot 10^{26}$ W.*

Un temps nucléaire

On sait maintenant que cette source est la fusion thermonucléaire de noyaux, en particulier celle de quatre noyaux d'hydrogène en un noyau d'hélium



qui libère $\Delta E = 26.736$ MeV, soit à peu près $0.007 m_p c^2$ par nucléon²⁰. Par kilogramme d'hydrogène, on en tire ainsi une énergie $E_{\text{H}} \approx 6.35 \cdot 10^{14}$ J \cdot kg⁻¹. En tenant compte d'une fraction en masse $X \approx 0.7$ d'hydrogène et du fait que les réactions ne peuvent avoir lieu que dans le cœur de l'étoile, soit une fraction en volume $f \approx 0.15$, on en tire un **temps nucléaire**

$$\tau_{\text{nuc,H}} = \frac{f X M E_{\text{H}}}{L} \quad (5.18)$$

Pour le Soleil, on trouve un temps de l'ordre de $1.1 \cdot 10^{10}$ an, bien plus raisonnable. C'est ce temps qui caractérise la phase la plus longue de la vie d'une étoile typique, celle de la **séquence principale**²¹.

Exercice 53 : *Établir l'ordre de grandeur de ce temps nucléaire pour le Soleil.*

En conclusion, on a $\tau_{\text{dyn}} \ll \tau_{\text{KH}} \ll \tau_{\text{nuc,H}}$ et on pourra donc supposer l'**équilibre hydrostatique** et l'**équilibre de pression** (établis sur les deux premières échelles de temps) et calculer l'évolution chimique de l'étoile entre t et $t + dt$, sous l'effet des réactions thermonucléaires et des processus de transport.

18. Cette expression suppose un astre homogène, ce qui n'est pas exact, mais la forme est correcte au facteur numérique près.

19. Estimé à partir de la datation de roches.

20. C'est la réaction la plus "rentable" énergétiquement, et plus une réaction nucléaire met en jeu des noyaux lourds, moins elle produit d'énergie.

21. Les autres temps caractéristiques peuvent apparaître dans les phases très primordiales d'effondrement d'un cœur pré-stellaire (τ_{dyn}), d'évolution pré-séquence principale (τ_{KH}), ou bien plus tard dans l'effondrement du cœur stellaire lors d'une supernova de type II (τ_{dyn}).

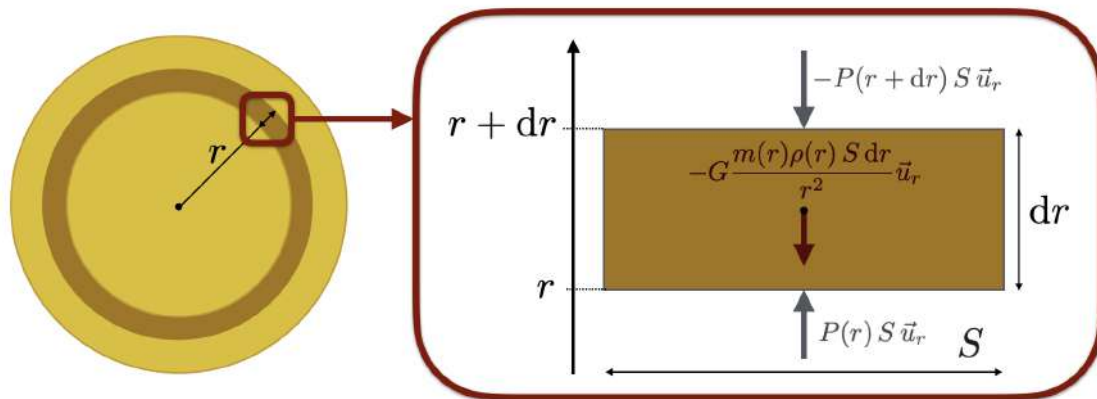


FIGURE 5.13 – **Équilibre hydrostatique.** Le schéma de gauche représente la coquille sphérique entre r et $r + dr$, celui de droite montre le détail d'un petit volume $dV = dS dr$ de cette coquille pour établir l'équation d'équilibre hydrostatique.

5.2.3 Équilibre hydrostatique

On considère, sur la Fig. 5.13, une coquille sphérique, en équilibre, entre les rayons r et $r + dr$, à un instant donné t de l'évolution stellaire. Cette coquille contient une masse dm qui est donnée par

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r) \quad (5.19)$$

où ρ est la masse volumique (parfois abusivement appelée "densité")²² et où l'on rappelle qu'on se place en symétrie sphérique. Cette équation traduit la **conservation de la masse**. Pour écrire l'équilibre de cette coquille, on note ensuite que le champ gravitationnel qui s'y applique est $\vec{g} = -g\vec{e}_r = -\vec{\nabla}\Phi$, où le potentiel gravitationnel Φ obéit à l'équation de Poisson $\Delta\Phi = 4\pi G\rho$. Ici on peut le calculer via le **théorème de Gauss** et on trouve

$$g = \frac{d\Phi}{dr} = \frac{Gm(r)}{r^2} \quad (5.20)$$

On écrit enfin l'équation d'**équilibre hydrostatique**, traduisant la **conservation de la quantité de mouvement**, en considérant un petit volume $dV = dS dr$ de section dS entre les rayons r et $r + dr$. On écrit que celui-ci est en équilibre sous l'effet de la force de gravité et des forces de pression. Pour ces dernières, seules celles exercées sur les surfaces dS en r et en $r + dr$ doivent être prises en compte, les autres (sur les surfaces latérales) s'annulent. On a alors, en écrivant l'équilibre via la relation fondamentale de la dynamique projetée sur \vec{e}_r ,

$$0 = -\rho g dV + P(r)dS - P(r + dr)dS \quad (5.21)$$

22. La masse volumique moyenne du Soleil est de l'ordre de $\bar{\rho} \approx 1.4 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, mais la distribution de densité est en réalité fortement **stratifiée**, avec une densité centrale environ cent fois plus élevée.

ce qui donne l'équation de l'équilibre hydrostatique recherchée

$$\frac{dP}{dr} = -\rho g \quad (5.22)$$

On en tire que P croît vers l'intérieur de l'étoile, ce qui traduit la **stratification** du milieu. Au centre du Soleil, la pression atteint environ $P_c \approx 2.3 \cdot 10^{16}$ Pa. La stratification est illustrée par la Fig. 5.14.

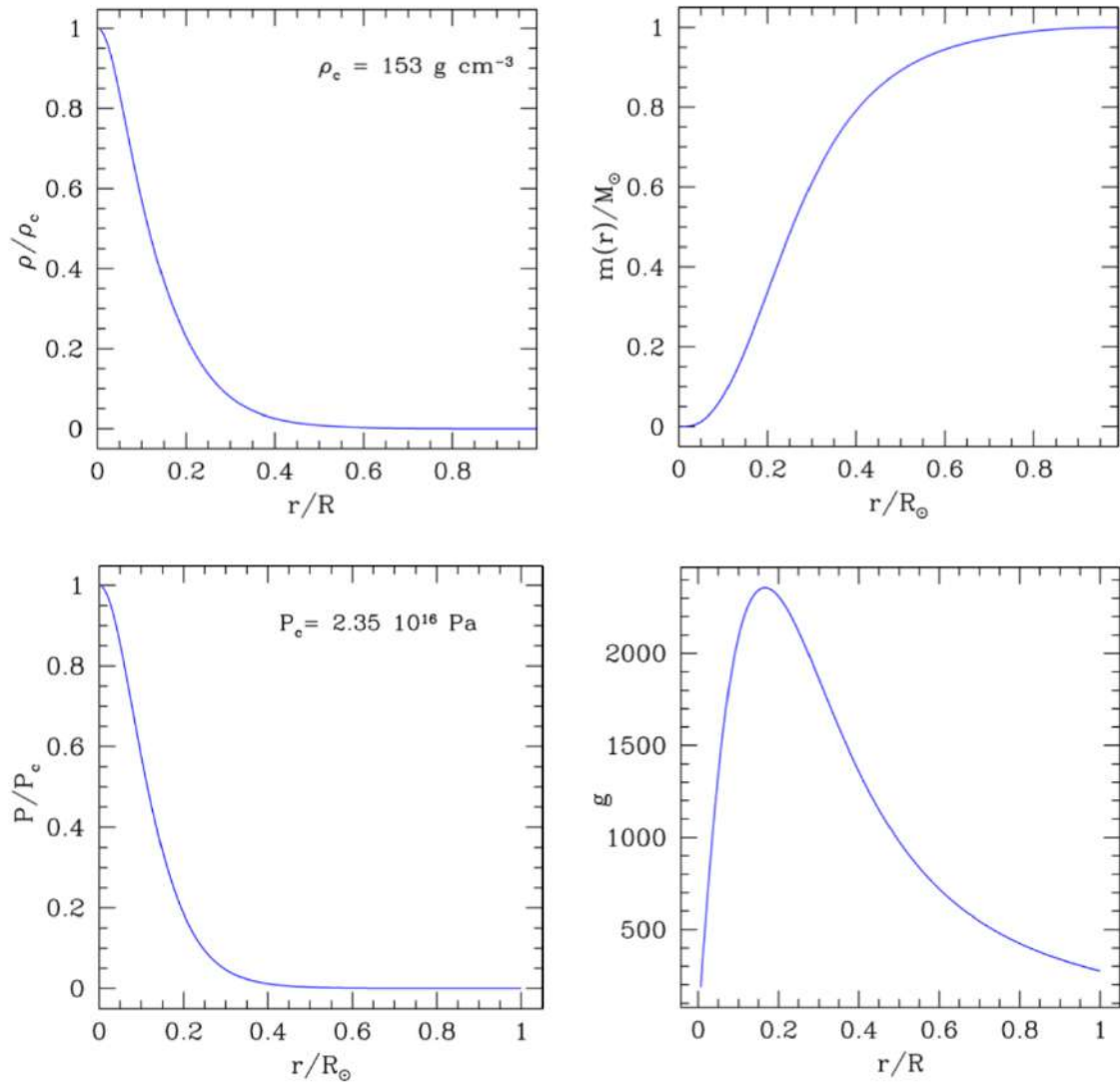


FIGURE 5.14 – **Stratification stellaire.** Les différentes courbes montrent, pour un modèle du Soleil et en fonction du rayon normalisé r/R_\odot , la densité ρ , la masse interne m , la pression P et le champ de gravité g (Crédit : R.-M. Ouazzani & J. Marques).

5.2.4 Équation d'état

La pression P , la densité ρ et la température T (dont on n'a pas encore parlé) doivent obéir à une **équation d'état** qui décrit l'**état thermodynamique** du plasma stellaire²³. Elle dépend de la composition chimique du plasma, et il est la plupart du temps tout à fait raisonnable de supposer qu'on a un **gaz parfait** d'électrons, d'ions divers et de photons. On a alors

$$P = \frac{\rho k_B T}{\mu m_u} \quad (5.23)$$

où μ désigne le **poinds moléculaire moyen**, c'est-à-dire la masse moyenne des particules, exprimée en **unité de masse atomique** $m_u \approx 1.66 \cdot 10^{-27}$ kg, pondérée par l'abondance de chacune d'entre elles. À titre d'exemple, pour un gaz neutre avec des atomes de **masse atomique** A_j présents en proportion X_j (les fractions de masse), on a

$$\mu = \frac{1}{\sum_j \frac{X_j}{A_j}} \quad (5.24)$$

Pour un gaz au moins partiellement ionisé, il faudra tenir compte de la présence d'électrons libres dans le bilan du nombre de particules.

5.2.5 Transport radiatif de l'énergie

Conservation de l'énergie

Entre les rayons r et $r + dr$, la luminosité de l'étoile varie potentiellement de dL , en particulier sous l'effet des réactions thermonucléaires²⁴. Si l'on note ϵ le taux de production d'énergie par unité de masse et unité de temps, on peut écrire la **conservation de l'énergie** comme

$$\frac{dL}{dr} = 4\pi r^2 \rho \epsilon \quad (5.25)$$

En pratique, ϵ n'est important que dans le cœur, où se produisent les réactions de fusion. Dès lors qu'on est à environ $r \approx 0.2R$, la luminosité $L(r)$ a atteint sa valeur maximale. Si l'étoile tire ainsi son énergie de la fusion thermonucléaire, elle l'évacue principalement par radiation²⁵. Il faut donc discuter de ce **transport radiatif** du centre vers l'extérieur des étoiles.

Intensité spécifique et moments

L'intérieur des étoiles est caractérisé par une grande profondeur optique τ_ν , et la fonction source tend donc vers la fonction de Planck à la température locale, $S_\nu \rightarrow B_\nu(T)$. Dans ces régions, le libre parcours moyen des photons l_p est faible, et ceux-ci diffusent suivant une marche aléatoire. D'autre part, le libre parcours moyen étant faible, la courbure peut être ignorée et on se place donc en géométrie plane, en utilisant l'équation du transfert sous sa forme (2.52), avec $\mu = \cos \theta$. On peut alors montrer que l'intensité spécifique du rayonnement dirigé vers l'extérieur ($\mu > 0$) au niveau de la profondeur

23. Notons que la température thermodynamique n'a de sens que si le nombre de collisions au sein du plasma est suffisamment élevé, on dit alors que le plasma est **thermalisé**. Le **libre parcours moyen** des photons dans un intérieur stellaire est de l'ordre de $l_p \sim 0.5$ cm, ce qui assure qu'on est localement à l'équilibre thermodynamique (ETL) sur toutes les échelles de hauteur significatives.

24. On doit aussi tenir compte des pertes sous forme de neutrinos et des variations structurelles de l'étoile comme les dilatations et contractions gravitationnelles.

25. On verra plus bas que dans certaines conditions, le transport de l'énergie se fait par convection.

optique τ_ν a pour expression ²⁶

$$I_\nu(\tau_\nu, \mu) = \sum_{n \geq 0} \mu^n \frac{\partial^n B_\nu}{\partial \tau_\nu^n}(\tau_\nu) \quad (5.26)$$

Exercice 54 : Démontrer la relation (5.26), en effectuant un développement de Taylor de la fonction source au voisinage de τ_ν .

On peut alors calculer les **moments de l'intensité spécifique**, à savoir l'intensité moyenne J_ν , la densité spectrale de flux F_ν , et la densité spectrale de pression de radiation p_ν . On montre qu'on a

$$J_\nu(\tau_\nu) = B_\nu(\tau_\nu) + \frac{1}{3} \frac{\partial^2 B_\nu}{\partial \tau_\nu^2}(\tau_\nu) + \dots \quad (5.27)$$

$$F_\nu(\tau_\nu) = \frac{4\pi}{3} \frac{\partial B_\nu}{\partial \tau_\nu}(\tau_\nu) + \frac{4\pi}{5} \frac{\partial^3 B_\nu}{\partial \tau_\nu^3}(\tau_\nu) + \dots \quad (5.28)$$

$$p_\nu = \frac{4\pi}{3c} B_\nu(\tau_\nu) + \frac{4\pi}{5c} \frac{\partial^2 B_\nu}{\partial \tau_\nu^2}(\tau_\nu) + \dots \quad (5.29)$$

Exercice 55 : Démontrer les relations (5.27) à (5.29).

La convergence de ces séries est extrêmement rapide. En effet, en ordre de grandeur, on a

$$B_\nu^{(n)} = \frac{\partial^n B_\nu}{\partial \tau_\nu^n} \sim \frac{B_\nu}{\tau_\nu^n} \quad \text{donc} \quad \frac{B_\nu^{(n+2)}}{B_\nu^{(n)}} \sim \frac{1}{\tau_\nu^2} \sim \left(\frac{l_p}{l}\right)^2 \quad (5.30)$$

où l est la longueur caractéristique sur laquelle changent significativement les propriétés du système étudié. Dans les atmosphères stellaires, on prendra **l'échelle de hauteur de pression** H_P , typiquement 10^2 à 10^3 km pour le Soleil, de la surface vers l'intérieur. Comme le libre parcours moyen est de l'ordre du cm ou moins, on a au plus l_p/l de l'ordre de 10^{-7} , et donc chaque terme est d'ordre $\mathcal{O}(10^{-14})$ par rapport au terme précédent. On peut donc ne garder que les premiers termes.

$$J_\nu \simeq B_\nu \quad F_\nu \simeq \frac{4\pi}{3} \frac{\partial B_\nu}{\partial \tau_\nu} \quad p_\nu \simeq \frac{4\pi}{3c} B_\nu \quad (5.31)$$

On note que le flux à l'ordre zéro est nul, et que c'est l'asymétrie créée par le gradient de B_ν et donc le gradient de T qui le rend non nul. **L'anisotropie, même très faible, est essentielle pour qu'il y ait un flux lumineux sortant de l'étoile !**

Luminosité stellaire, moyenne de Rosseland

La densité spectrale de flux écrite en (5.31) permet de déterminer une équation fondamentale de la physique stellaire, donnant la **luminosité bolométrique** $L(r)$ au rayon r , en fonction du gradient de température. On montre en effet que

²⁶ Le résultat pour $\mu < 0$ ne diffère que par des termes en $\mathcal{O}(e^{-\tau_\nu/|\mu|})$, donc on peut utiliser la formule ci-dessus pour toutes les valeurs de μ à suffisamment grande profondeur optique.

$$L(r) = -\frac{64\pi\sigma}{3} \frac{1}{\kappa_R} r^2 T^3 \frac{dT}{dr} \quad (5.32)$$

Dans cette équation, la quantité κ_R est l'**opacité moyenne de Rosseland** définie par

$$\frac{1}{\kappa_R} = \frac{\int_0^\infty \frac{1}{\kappa_\nu} \frac{\partial B_\nu}{\partial T} d\nu}{\int_0^\infty \frac{\partial B_\nu}{\partial T} d\nu} \quad (5.33)$$

Sans surprise, les plages spectrales qui déterminent la valeur de κ_R , et donc la luminosité sortante, sont celles qui présentent une **faible opacité** au rayonnement²⁷. Cette équation (5.32) peut aussi s'écrire en termes de **flux radiatif** bolométrique

$$F_{\text{rad}} = \frac{L(r)}{4\pi r^2} = -\frac{16\sigma T^3}{3\kappa_R} \frac{dT}{dr} = -\frac{4acT^3}{3\kappa_R} \frac{dT}{dr} \quad \text{avec} \quad a = \frac{4\sigma}{c} \quad (5.35)$$

ce qui montre qu'on a une **équation de diffusion** type **loi de Fourier** avec une **conductivité radiative**

$$\lambda_{\text{rad}} = \frac{4acT^3}{3\kappa_R} \quad (5.36)$$

Exercice 56 : Démontrer la relation (5.32).

Application : relation masse-luminosité des étoiles

L'expression (5.32) reliant la luminosité au gradient de température peut être utilisée en ordre de grandeur pour obtenir une relation entre la masse et la luminosité d'une étoile, à savoir $L_\star \propto M_\star^3$.

Exercice 57 : Obtenir cette relation masse-luminosité. On considérera l'étoile comme une sphère de gaz parfait d'hydrogène atomique, en équilibre hydrostatique. En déduire que le temps de vie sur la séquence principale est $t_\star \propto M_\star^{-2}$.

Exemple : Puisque le Soleil a une durée de vie sur la séquence principale de 10^{10} ans, une étoile de $10 M_\odot$ y passe environ 10^8 ans, et une étoile de $0.2 M_\odot$ environ 2.5×10^{11} ans (supérieur à l'âge de l'Univers). En fait, l'opacité χ_\star dépend aussi légèrement de la masse de l'étoile, $\chi_\star \propto M_\star^{-0.3}$, donc $L_\star \propto M_\star^{3.3}$ et $t_\star \propto M_\star^{-2.3}$, ce qui change les durées de vie en $t_\star \simeq 5 \cdot 10^7$ ans pour $M = 10 M_\odot$ et $t_\star \simeq 4 \cdot 10^{11}$ ans pour $M = 0.2 M_\odot$.

Les opacités

Le calcul des coefficient d'absorption monochromatiques κ_ν est indispensable à celui de l'opacité moyenne de Rosseland κ_R , qui gouverne le transport radiatif dans les étoiles. Il faut donc discuter des processus qui déterminent ces coefficients, sachant que les températures mises en jeu dans les étoiles

27. On fait également remarquer que le coefficient d'absorption κ_R est de l'ordre de l'inverse du libre parcours moyen l_p des photons. On peut donc écrire, en introduisant la densité numérique n des centres absorbeurs et la section efficace s_e , puis la masse volumique ρ et la masse des particules m ,

$$\kappa_R \sim \frac{1}{l_p} \simeq n s_e = \frac{\rho}{m} s_e = \chi \rho \quad (5.34)$$

avec $\chi = s_e/m$ un coefficient indépendant de la densité. C'est d'ailleurs souvent celui-ci qui est donné dans la littérature, ce qui explique qu'on trouvera souvent les opacités exprimées en $\text{cm}^2 \text{g}^{-1}$.

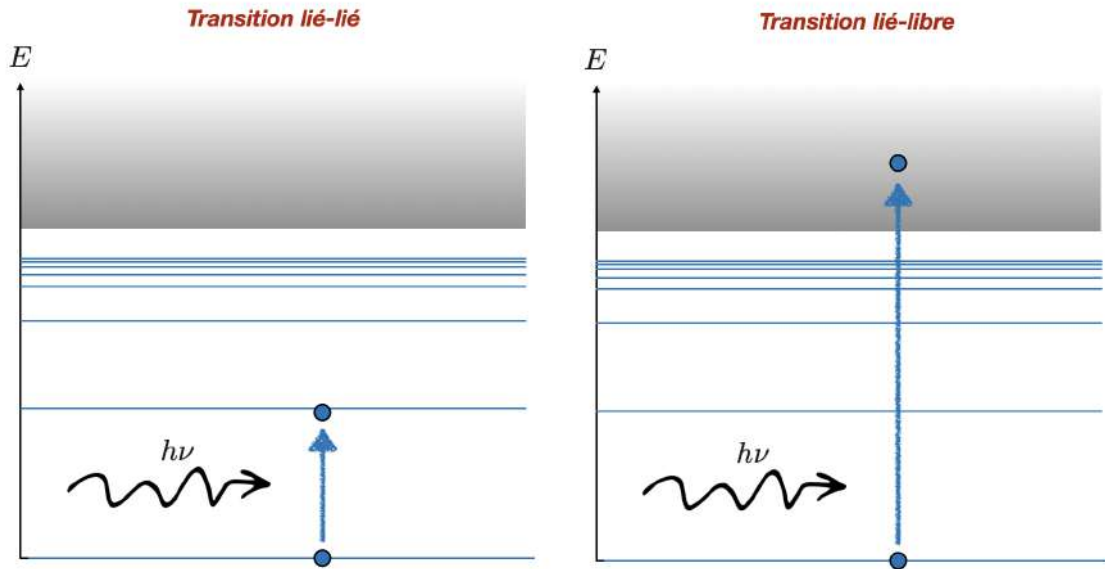


FIGURE 5.15 – **Transitions lié-lié et lié-libre.** Le schéma de gauche montre le principe des transitions lié-lié par absorption d'un photon, celui de droite le principe des transitions lié-libre vers le continuum.

ne permettent que des transitions électroniques et non nucléaires²⁸. Il y a quatre types de processus à prendre en compte :

- Les **transitions lié-lié**, au cours desquelles un photon est absorbé et fait monter un électron sur un niveau lié d'énergie plus élevée (Fig. 5.15, gauche). Ce processus est important dans les atmosphères froides ($T < 10^6$ K). Le calcul de ces opacités est très lourd, puisqu'il faut faire une somme sur tous les éléments k , tous leurs degrés d'ionisation i , et tous les niveaux $j_1 \rightarrow j_2$ impliqués dans la transition, soit

$$\kappa_\nu = \sum_{k,i,j_1,j_2} n_{k,i,j_1} s_{k,i,j_1,j_2}(\nu) \quad (5.37)$$

où $s_{k,i,j_1,j_2}(\nu)$ est la section efficace de transition et n_{k,i,j_1} la densité des absorbeurs.

- Les **transitions lié-libre**, pour lesquelles l'énergie du photon est suffisante pour **photo-ioniser** l'atome ou l'ion en lui arrachant un électron (Fig. 5.15, droite). Pour ce processus, la section efficace est maximale au seuil d'ionisation $\nu_0 = \chi/h$ et elle décroît ensuite typiquement en ν^{-3} . La possibilité d'arracher des électrons de couches internes produit des profils en "dents de scie" (Fig. 5.16). Là encore, il faut sommer sur toutes les espèces présentes et tous leurs niveaux pour obtenir le coefficient d'absorption κ_ν . Ces processus sont eux aussi importants essentiellement à basse température.
- Les **transitions libre-libre**, aussi appelées **Bremsstrahlung inverse**, au cours desquelles un électron libre absorbe un photon pour gagner de l'énergie, au voisinage d'un ion. Il s'agit en quelque sorte de collisions **inélastiques** entre un électron et un photon. Ces transitions contribuent significativement dans les régions profondes ($T > 10^6$ K) où la plupart des espèces sont ionisées, de sorte que la densité électronique est importante.
- Les **diffusions électroniques**, qui sont des collisions **élastiques** entre un électron libre et un photon, sans perte d'énergie mais avec un changement de direction qui contribue à l'opacité. Dans la limite non-relativiste, cette diffusion est appelée **diffusion Thomson** (voir 2.3.3) et sa

²⁸. Pour que les photons puissent briser des noyaux, il faut des énergies de l'ordre du MeV, uniquement disponibles lors d'événements comme les supernovæ.

section efficace est indépendante de la longueur d'onde

$$\sigma_T = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e c^2} \right)^2 \approx 6.65 \cdot 10^{-29} \text{ m}^2 \quad (5.38)$$

Dans le domaine relativiste, on parlera de **diffusion Compton**, dont la section efficace dépend quant à elle de la fréquence du photon.

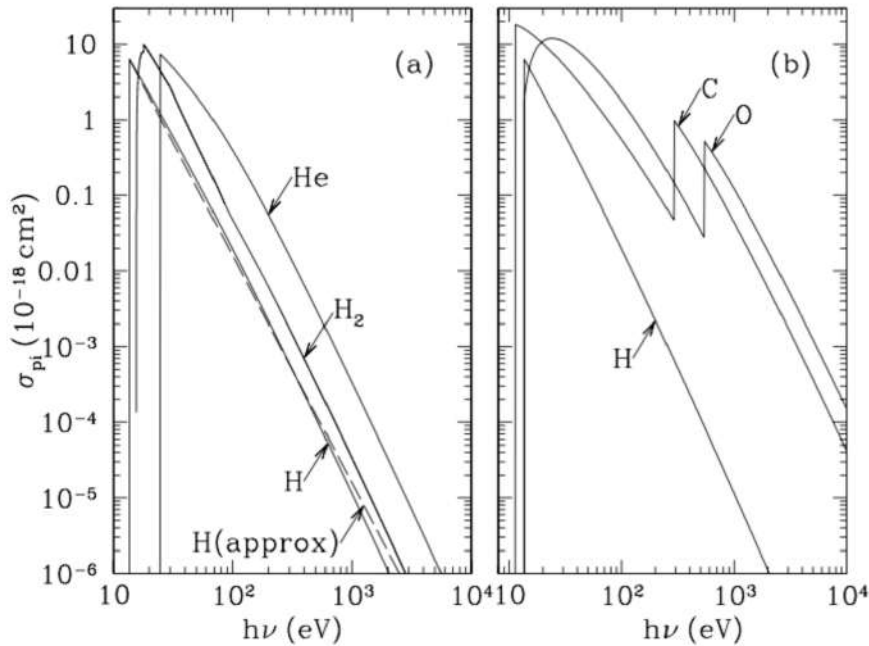


FIGURE 5.16 – Sections efficaces de photo-ionisation de différentes espèces. Figure issue de [3].

Si le calcul des opacités est une véritable industrie de la physique stellaire, fournissant des **tables d'opacité** utilisées dans les codes d'évolution, on modélise parfois en première approximation les coefficients d'absorption par une **loi de Kramers**

$$\kappa_\nu = \kappa_0 \rho T^{-s} \quad (5.39)$$

avec par exemple $s \approx 3.5$ dans le cas des transitions lié-libre et libre-libre.

5.2.6 Évolution temporelle de la composition chimique

Effets des réactions nucléaires

Dans les régions centrales des étoiles, lorsque la température est assez élevée, les réactions nucléaires convertissent des éléments chimiques en d'autres éléments plus lourds, ce qui **modifie la composition chimique sur des échelles de temps nucléaires** (comme $\tau_{\text{nuc,H}}$). Ces transformations libèrent une énergie qui vient compenser les pertes par rayonnement à la surface de l'étoile. On définit le **taux de réaction** r_{ab} comme le nombre de réactions $a \rightarrow b$ transformant a en b , par unité de volume et par unité de temps. On a alors la variation temporelle de la densité volumique n_b de particules de type b par

$$\frac{\partial n_b}{\partial t} = \sum_a (r_{ab} - r_{ba}) \quad (5.40)$$

En notant e_{ab} l'énergie libérée par une réaction $a \rightarrow b$, on a le taux de production d'énergie par unité de masse et de temps comme

$$\epsilon = \frac{1}{\rho} \sum_{(a,b)} r_{ab} e_{ab} \quad (5.41)$$

C'est ce taux qui apparaît dans l'équation (5.25).

Effets de la diffusion et de la convection

En présence de gradients, des phénomènes de diffusion peuvent se mettre en place. Si la densité n_i d'une espèce varie d'un point à l'autre, on pourra ainsi avoir de la **diffusion particulaire**, caractérisée par la **loi de Fick** donnant le vecteur **flux de particules**²⁹ de l'espèce i en fonction du gradient de la densité,

$$\vec{J}_i = -D \vec{\nabla} n_i \quad (5.42)$$

où D est le **coefficient de diffusion**. En présence d'un gradient de température ou d'un gradient de pression, on pourra aussi avoir de la diffusion, les atomes les plus lourds migrant vers les zones de température ou de pression plus élevées. Dans les **zones convectives**, le milieu est efficacement mélangé par les mouvements turbulents induits par la convection, et ce sur des échelles de temps très courtes par rapport aux réactions nucléaires. Dans les modèles, on pourra donc supposer que **la composition chimique est instantanément redistribuée dans l'ensemble de la zone convective**.

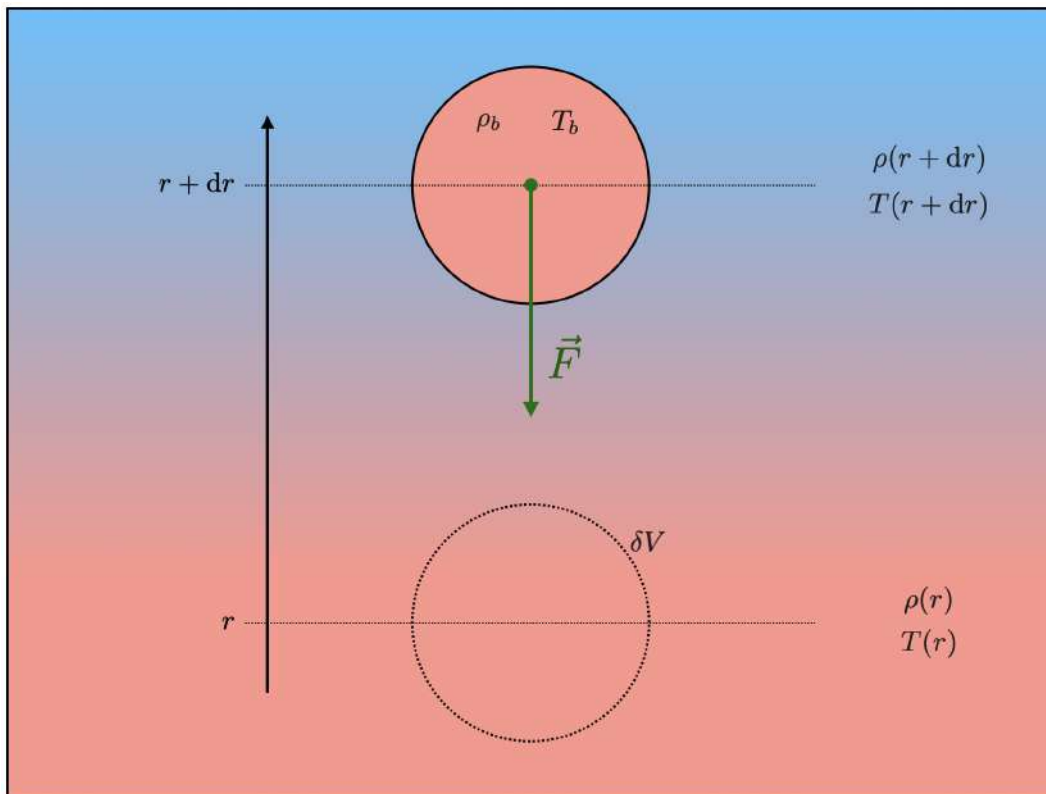


FIGURE 5.17 – **Stabilité vis-à-vis de la convection.**

29. Son module donne le nombre de particules traversant une surface unité par unité de temps.

5.2.7 Convection

Critère de stabilité vis-à-vis de la convection

Quelle est la condition pour que le transport de l'énergie du centre de l'étoile vers l'extérieur se fasse via la **convection** plutôt que par la **radiation** ? Pour le déterminer, il faut voir que les mouvements convectifs trouvent leur origine dans une **instabilité due à la poussée d'Archimède**. Imaginons qu'une bulle de fluide b , située initialement au rayon r , et donc de densité $\rho(r)$ et de température $T(r)$, soit déplacée **adiabatiquement**³⁰ jusqu'au rayon $r + dr$, avec $dr > 0$ (Fig. 5.17). Elle est alors en contact avec un environnement à la densité $\rho(r + dr)$ et à la température $T(r + dr)$. L'**équilibre de pression** s'établit rapidement entre la bulle et son environnement, de sorte que la température et la densité de la bulle prennent des valeurs T_b et ρ_b telles que $\rho_b T_b = \rho(r + dr)T(r + dr)$, mais *a priori* différentes de celles de l'environnement, c'est-à-dire que $\rho_b \neq \rho(r + dr)$ et $T_b \neq T(r + dr)$. La force qui s'exerce sur la bulle de volume δV est alors la somme de son poids et de la poussée d'Archimède

$$\vec{F} = -\delta V [\rho_b - \rho(r + dr)] g \vec{e}_r \quad (5.43)$$

Deux cas se présentent donc :

- Si $\rho_b > \rho(r + dr)$, la force \vec{F} est dirigée vers le bas et la bulle va retourner vers sa position initiale. On a **stabilité** et il n'y aura pas de mouvement de convection.
- Si $\rho_b < \rho(r + dr)$, la force \vec{F} est dirigée vers le haut et la bulle va continuer à monter. On a **instabilité** vis-à-vis de la convection.

Le changement de densité de la bulle, lors de son déplacement de dr peut s'écrire sous la forme

$$d\rho_{\text{ad}} = \rho_b - \rho(r) = \left(\frac{\partial \rho}{\partial r} \right)_{\text{ad}} dr \quad (5.44)$$

où l'indice "ad" signifie que cette variation est adiabatique. La variation de densité de l'environnement, elle, s'écrit, toujours entre r et $r + dr$,

$$d\rho = \rho(r + dr) - \rho(r) = \left(\frac{\partial \rho}{\partial r} \right) dr \quad (5.45)$$

Comme $d\rho_{\text{ad}}$ et $d\rho$ sont négatives³¹ pour $dr > 0$, on en tire qu'il y a **stabilité** si

$$\left| \frac{\partial \rho}{\partial r} \right|_{\text{ad}} < \left| \frac{\partial \rho}{\partial r} \right| \quad (5.46)$$

Du fait de l'équilibre de pression atteint rapidement, cette condition peut aussi s'écrire comme

$$\left| \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{\text{ad}} > \left| \frac{\partial T}{\partial r} \right| \quad (5.47)$$

Exercice 58 : Montrer que la condition (5.47) découle effectivement de (5.46) et de l'équilibre de pression $\rho_b T_b = \rho(r + dr)T(r + dr)$.

Cette dernière condition est souvent réécrite en introduisant une grandeur positive appelée abusivement **gradient de température**, et notée ∇ , qui intervient dans la dérivée de T par rapport au rayon en introduisant l'**échelle de hauteur de la pression** H_P

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{T}{H_P} \nabla \quad H_P = -\left(\frac{d \ln P}{dr} \right)^{-1} \quad \nabla = \frac{d \ln T}{d \ln P} > 0 \quad (5.48)$$

30. C'est-à-dire sans échanger d'énergie avec son environnement.

31. Du fait de la stratification en densité.

On a alors **stabilité vis-à-vis de la convection** si le gradient de température dans l'étoile est inférieur au gradient adiabatique, condition qui forme le **critère de Schwarzschild**,

$$\nabla < \nabla_{\text{ad}} \quad (5.49)$$

On peut l'exprimer en introduisant l'exposant adiabatique $\gamma = C_p/C_v$ et montrer qu'il y a stabilité si

$$\nabla < 1 - \frac{1}{\gamma} \quad (5.50)$$

Exercice 59 : Démontrer la relation (5.50).

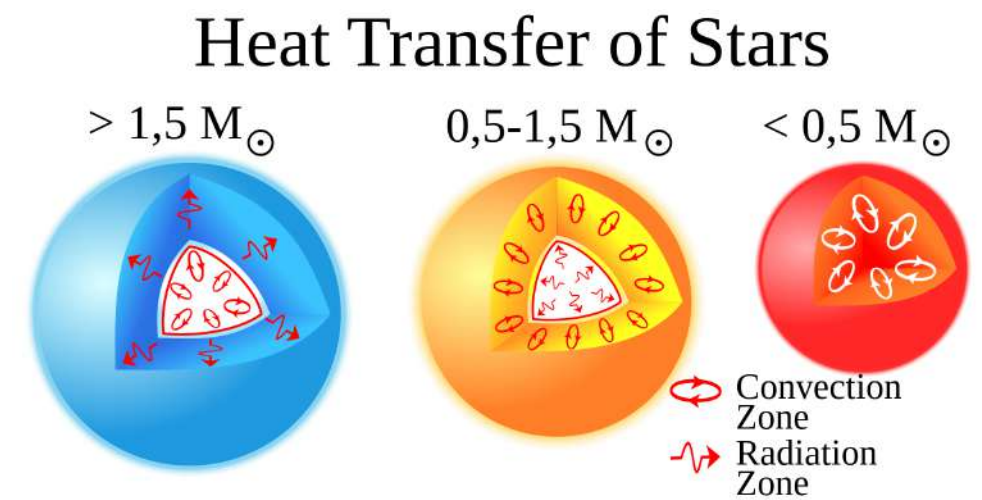


FIGURE 5.18 – Zones radiatives et convectives dans les étoiles. (Crédit : Wikipedia).

Zones radiatives et zone convectives dans les étoiles de différentes masses

La stratification en température et la variété des sources d'énergie nucléaire et des sources d'opacité font que **la structure interne des étoiles dépend fortement de leur masse**. Les étoiles comme le Soleil (à savoir les **étoiles de faible masse**, $M \lesssim 1.5 M_{\odot}$) ont des températures dans leurs enveloppes extérieures qui sont suffisamment basses pour que l'hydrogène ne soit pas ionisé. Ainsi, les photons de haute énergie provenant de l'intérieur de l'étoile sont facilement absorbés. On a donc une enveloppe opaque au rayonnement, ce qui provoque l'apparition de convection. Dans les **étoiles massives** ($M \gtrsim 1.5 M_{\odot}$), la température est suffisamment élevée pour que l'hydrogène reste ionisé, et le rayonnement n'est donc pas si facilement absorbé. Elles ont des enveloppes radiatives. D'autre part, si le mécanisme de production d'énergie est très sensible à la température, le gradient de température peut devenir très important, ce qui amène la convection d'après le critère de Schwarzschild. Les étoiles de faible masse brûlent l'hydrogène selon la **chaîne p-p** (Fig. 5.22), dont l'efficacité varie en T^{4-5} , ce qui peut être géré par le transport radiatif. Les parties internes de ces étoiles sont donc radiatives. Pour les étoiles plus massives, c'est le **cycle CNO** (Fig. 5.23) qui domine, dont la dépendance en température est beaucoup plus forte ($\propto T^{16-17}$), elles ont un cœur convectif. En résumé³² (Fig. 5.18) :

- Les étoiles de faible masse ont des **cœurs radiatifs** et des **enveloppes convectives**
- Les étoiles massives ont des **cœurs convectifs** et des **enveloppes radiatives**.

32. Notons que les étoiles très peu massives ($\lesssim 0.5 M_{\odot}$) sont quasiment entièrement convectives. Notons aussi qu'il existe toujours une zone radiative au niveau de la photosphère.

5.3 Nucléosynthèse stellaire

5.3.1 Caractéristiques des noyaux atomiques

Les **noyaux atomiques** sont constitués de deux types de **nucléons** : les **protons** (charge électrique $+e = 1.60218 \cdot 10^{-19}$ C, masse au repos $m_p = 1.67262 \cdot 10^{-27}$ kg) et les **neutrons** (charge électrique nulle, masse au repos $m_n = 1.67493 \cdot 10^{-27}$ kg $\approx m_p$). Les **atomes** ont une charge électrique nulle, du fait de l'égalité entre le nombre de protons dans le noyau et le nombre d'électrons (charge électrique $-e$, masse au repos $m_e = 9.1094 \cdot 10^{-31}$ kg) autour. C'est ce nombre Z , le **numéro atomique**, qui identifie un atome ou son noyau. Comme $m_p \approx m_n$, la masse du noyau est déterminée par le nombre de nucléons, A , appelé **nombre de masse**. On note un noyau ${}^A_Z X$, ou encore ${}^A_Z X$, où X identifie l'élément chimique. Le volume occupé par un nucléon est sensiblement le même quel que soit le noyau, de sorte que le "rayon" d'un noyau est approximativement

$$r \approx r_0 A^{1/3} \quad \text{avec } r_0 \approx 1.3 \cdot 10^{-15} \text{ m} \quad (5.51)$$

Les nucléons sont sensibles à la **force nucléaire forte** qui maintient la cohésion des noyaux. Elle est **attractive à grande distance** et **répulsive à courte distance**, comme le montre la Fig. 5.20. Les électrons et les **neutrinos**, également sans charge électrique, qu'on regroupe sous le terme de **leptons**, ne sont pas sensibles à cette force.

Chaque particule x a une **antiparticule** \bar{x} qui lui est identique en tous points mais de charge électrique opposée, et lorsqu'elles se rencontrent elles s'annihilent en produisant des photons. Neutrons et protons peuvent se transformer les uns dans les autres, en respectant des **règles de conservation** :

- Conservation de la charge électrique
- Conservation du nombre de nucléons³³
- Conservation du nombre de leptons³⁴
- Conservation de l'énergie
- Conservation de la quantité de mouvement
- Conservation du moment cinétique

5.3.2 Énergie de liaison

La masse m_X d'un noyau ${}^A_Z X$ est inférieure à la somme des masses de ses constituants, la différence Δm_X étant appelée **excès de masse**, et reliée directement à l'**énergie de liaison** B_X qu'il faut fournir pour séparer le noyau en ses nucléons constituants, tous étant au repos³⁵

$$B_X = \Delta m_X c^2 = [Zm_p + (A - Z)m_n - m_X] c^2 \quad (5.52)$$

On peut alors écrire l'énergie Q libérée lors d'une réaction nucléaire $X + Y \rightarrow X' + Y'$ comme

$$Q = B_{X'} + B_{Y'} - B_X - B_Y \quad (5.53)$$

La réaction produit effectivement de l'énergie si $Q > 0$ c'est-à-dire si l'énergie de liaison augmente lors de la réaction. Comme le nombre de nucléons est conservé, c'est équivalent à l'**augmentation de l'énergie de liaison par nucléon** B/A représentée sur la Fig. 5.19.

On voit que celle-ci augmente jusqu'au fer ($Z = 26$, $A = 56$) puis décroît. La production d'énergie nucléaire se fait donc par **fusion** d'éléments plus légers que le fer, ou par **fission** d'éléments plus lourds. Il est possible de comprendre la forme de cette courbe au moyen du modèle nucléaire de la **goutte liquide**³⁶. Dans ce modèle, l'énergie de liaison d'un noyau ${}^A_Z X$ prend la forme semi-empirique de **Bethe-Weizsäcker**

$$B = a_V A - a_S A^{2/3} - a_C \frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_{S_y} \frac{(A - 2Z)^2}{A} \quad (5.54)$$

33. Les antinucléons comptent pour -1 .

34. Les antileptons comptent pour -1 .

35. C'est donc aussi l'énergie libérée par la formation du noyau à partir de ses constituants.

36. Ce modèle tient son nom du fait que le noyau se comporte presque comme une goutte liquide chargée électriquement.

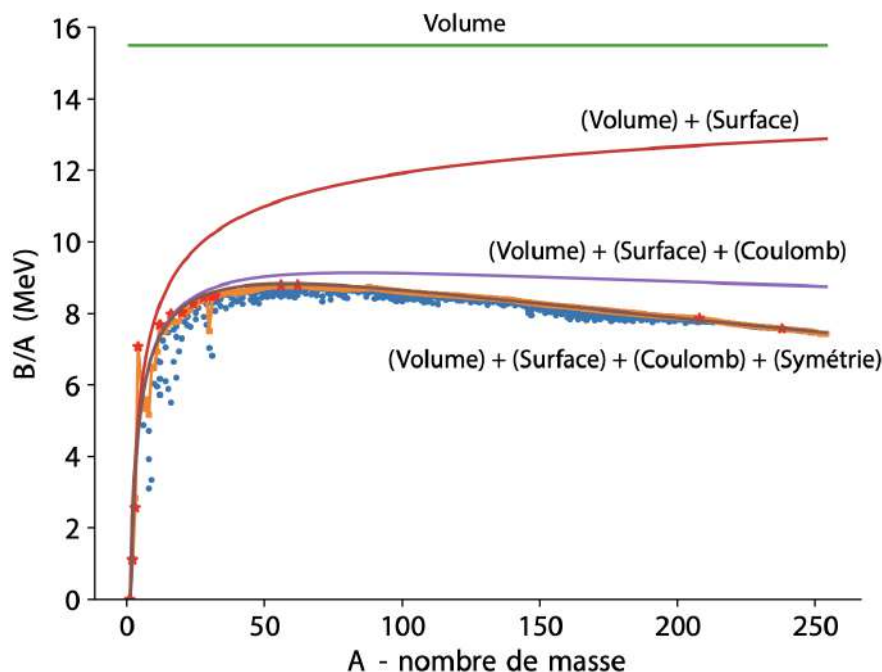


FIGURE 5.19 – **Énergie de liaison nucléaire.** L'énergie de liaison est représentée par nucléon. Les noyaux stables sont représentés en orange, les instables en bleu. Les différentes courbes correspondent aux approximations tenant compte de termes de volume, de surface, Coulombien et de symétrie (*Crédit : R.-M. Ouazzani & J. Marques*).

où les différents termes correspondent respectivement à l'**interaction entre plus proches voisins** ($a_V A$), à une **correction de surface** due au fait que les nucléons en surface du noyau ont moins de voisins que ceux du cœur ($a_S A^{2/3}$), à une **répulsion Coulombienne** ($a_C Z^2/A^{1/3}$) et à un terme favorisant la **symétrie** entre protons et neutrons³⁷. Le désaccord observé, notamment pour les noyaux les plus légers, oblige à introduire un modèle plus complexe, le **modèle en couches**, dû à Maria Göppert Mayer³⁸, qui traite chaque nucléon comme une particule quantique dans un potentiel effectif créé par l'ensemble des autres nucléons. Son énergie est donc quantifiée, et les niveaux ne sont pas régulièrement espacés. Lorsqu'un noyau a un nombre³⁹ de protons ou de neutrons (2, 8, 20, 28, 50, 82, ...) tel que les niveaux sont remplis jusqu'à un intervalle d'énergie plus important que les autres, ce noyau est **particulièrement stable**. C'est le cas en particulier de ${}^4\text{He}$, dont l'énergie de liaison par nucléon est notablement supérieure à ce que laisserait penser la formule de Bethe-Weizsäcker.

5.3.3 Taux de réactions nucléaires

Barrière Coulombienne

Considérons la réaction nucléaire $X + Y \rightarrow X' + Y'$. Les noyaux X et Y sont chargés positivement, et leur fusion n'est possible que s'ils surmontent la barrière Coulombienne E_0 qu'on doit à l'interaction

37. Un ajustement des données de B/A par ce modèle donne $a_V = 15.5 \text{ eV}$, $a_S = 16.6 \text{ eV}$, $a_C = 0.71 \text{ eV}$ et $a_{S_y} = 22.7 \text{ eV}$.

38. Kattowitz, 28 juin 1906 - San Diego, 20 février 1972.

39. On parle de **nombre magiques**.

répulsive dominante à grande distance⁴⁰, comme le montre la Fig. 5.20. Il faut donc *a priori* que l'énergie cinétique E du projectile Y soit supérieure à E_0 . On peut estimer cette barrière en écrivant l'énergie Coulombienne pour les deux noyaux "accolés", soit

$$E_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Z_X Z_Y e^2}{r_0 (A_X^{1/3} + A_Y^{1/3})} \approx 1.1 \frac{Z_X Z_Y}{A_X^{1/3} + A_Y^{1/3}} \text{ MeV} \quad (5.55)$$

Exercice 60 : Obtenir l'estimation numérique de la relation (5.55).

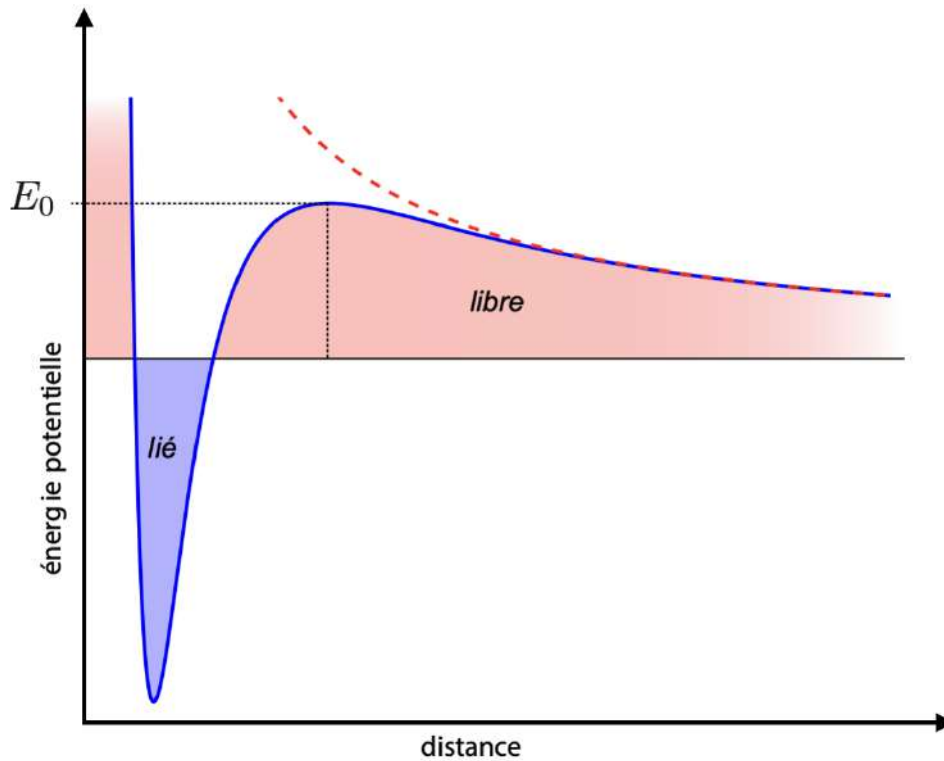


FIGURE 5.20 – **Énergie potentielle nucléaire.** La contribution de l'interaction nucléaire forte domine à courte portée (répulsive à très courte distance, attractive à plus grande distance) et la répulsion Coulombienne domine à grande distance (Crédit : R.-M. Ouazzani & J. Marques).

Calcul du taux de réactions

Pour calculer le taux de réactions, c'est-à-dire le nombre de réactions $X + Y \rightarrow X' + Y'$ par unité de temps et par unité de volume, on considère un noyau X supposé immobile, soumis au bombardement de noyaux Y d'énergie cinétique E . La **section efficace** de la réaction, qui représente la "surface effective" présentée par X dans son interaction avec Y , est notée σ_{X+Y} , et elle dépend de E . On peut d'ailleurs justifier cette dépendance⁴¹ en disant que la taille d'une particule est donnée par sa **longueur d'onde de Broglie**

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} = \frac{h}{\sqrt{2mE}} \quad (5.56)$$

40. L'interaction électrostatique a un potentiel en $1/r$, à beaucoup plus grande portée que l'interaction nucléaire forte, dont le potentiel est en $-(e^{-r/a})/r$ (**potentiel de Yukawa**).

41. Il faudrait en toute rigueur travailler dans le référentiel du centre de masse et prendre, au lieu de la masse m de la particule Y , la masse réduite μ des deux particules.

La section efficace est alors $\sigma_{X+Y} = \pi\lambda^2 = b/E$, où $b = \pi h^2/(2m)$ est une constante. Pendant dt , le nombre de collisions entre la cible X et les projectiles Y d'énergie E à dE près est égal à la densité des projectiles multipliée par la probabilité qu'ils aient cette énergie, et par le volume du cylindre dans lequel elles devaient se trouver, soit

$$n_Y \sigma_{X+Y} v dt f_E(E) dE = n_Y \times \frac{b}{E} \times \sqrt{\frac{2E}{m}} dt \times \frac{2}{\sqrt{\pi}(k_B T)^{3/2}} \sqrt{E} \exp\left(-\frac{E}{k_B T}\right) dE \quad (5.57)$$

où $f_E(E)$ est la **distribution de Maxwell-Boltzmann en énergie**.

Exercice 61 : Démontrer l'expression de la distribution de Maxwell-Boltzmann en énergie à partir de celle du module de la vitesse.

Pour obtenir le taux de réaction, on multiplie par le nombre de cibles par unité de volume, on intègre sur l'énergie **en se limitant à celles permettant de surmonter la barrière Coulombienne**, et on divise par dt , ce qui donne

$$r_{X+Y} = n_X n_Y b \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi m}(k_B T)^{3/2}} \int_{E_0}^{\infty} \exp\left(-\frac{E}{k_B T}\right) dE = \frac{2\sqrt{2} n_X n_Y b}{\sqrt{\pi m k_B T}} \exp\left(-\frac{E_0}{k_B T}\right) \quad (5.58)$$

Ce taux de réaction est extrêmement faible, du fait du facteur exponentiel. En effet, prenant une barrière $E_0 = 1 \text{ MeV}$ et les conditions au centre du Soleil, soit notamment $T \approx 1.4 \cdot 10^7 \text{ K}$, on a $E_0/(k_B T) \approx 829$. Ce taux est si faible parce que la probabilité $P(E_c > E_0)$ qu'un noyau Y ait une énergie cinétique suffisante est infime. Avec ces conditions, on a en effet

$$P(E_c > E_0) = \int_{E_0}^{\infty} f_E(E) dE = \int_{E_0}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{\pi}(k_B T)^{3/2}} \sqrt{E} \exp\left(-\frac{E}{k_B T}\right) dE \approx 2 \cdot 10^{-297862} \quad (5.59)$$

Dans ce modèle, les réactions nucléaires semblent **grossièrement inefficaces**.

Exercice 62 : Obtenir l'estimation numérique de $P(E_c > E_0)$ donnée ici.

Pic de Gamow

La solution du problème réside dans la mécanique quantique, et plus spécifiquement l'**effet tunnel**. Dans ce cadre, on sait qu'une particule Y d'énergie E peut traverser une barrière de potentiel E_0 , avec une probabilité dépendant de l'énergie⁴²

$$P_t(E) = \exp\left(-\frac{a}{\sqrt{E}}\right) \quad (5.60)$$

Cette probabilité est nulle à basse énergie, et augmente avec E , jusqu'à atteindre asymptotiquement $P_t = 1$ lorsque $E \rightarrow \infty$. Ce comportement est contraire à celui de la distribution de Maxwell-Boltzmann, de sorte que s'il y a très peu de particules de haute énergie, celles-ci sont de plus en plus susceptibles de traverser la barrière. On a donc un taux de réaction qui s'écrit⁴³

$$r_{X+Y} = n_X n_Y b \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi m}(k_B T)^{3/2}} \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{E}{k_B T}\right) \exp\left(-\frac{a}{\sqrt{E}}\right) dE \quad (5.61)$$

On voit que l'intégrande est le produit d'une exponentielle croissant avec l'énergie (P_t) et d'une autre décroissant avec l'énergie (f_E). La probabilité résultante possède alors un maximum, appelé **pic de**

42. Cette forme est correcte pour une **barrière épaisse**, en toute rigueur.

43. On intègre maintenant sur toutes les énergies E . Dans l'écriture (5.58), on avait formellement $P_t(E) = 0$ pour $E < E_0$ et $P_t(E) = 1$ pour $E > E_0$.

Gamow, représenté sur la Fig. 5.21. Sa position donne l'énergie typique des particules participant à la réaction de fusion nucléaire. Elle est sensiblement supérieure à l'énergie thermique : les réactions nucléaires sont tout de même **peu probables**. Le taux de réaction dépend quant à lui fortement de la température. Notons que si la réaction libère une énergie Q , le taux de production d'énergie nucléaire par unité de masse et de temps est alors

$$\epsilon = \frac{Q r_{X+Y}}{\rho} \quad (5.62)$$

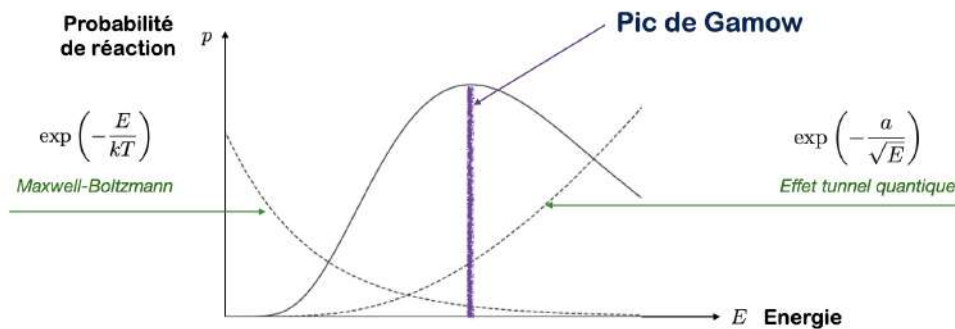


FIGURE 5.21 – **Pic de Gamow**. La probabilité de réaction est le produit de la probabilité de traverser la barrière de potentiel par effet tunnel et de la probabilité de Maxwell-Boltzmann en énergie.

Exercice 63 : Déterminer l'expression de l'énergie pour laquelle la probabilité de réaction est maximale, en fonction de a et $k_B T$.

Fusion de l'hydrogène

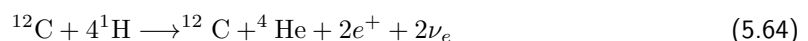
La phase la plus longue de la vie d'une étoile typique est celle de la **séquence principale**, au cours de laquelle elle procède à la fusion de l'hydrogène en hélium. Cette phase est importante car l'hydrogène est l'élément le plus léger et le plus abondant dans l'étoile, et la barrière Coulombienne est assez basse, de sorte que la température d'ignition des réactions est relativement faible. Les réactions de fusion de l'hydrogène peuvent se faire au travers de différents processus.

Les **chaînes proton-proton** (ou $p-p$) ont pour bilan global



et dominant aux températures inférieures à $\sim 2 \cdot 10^7$ K. Elles se déclinent en différentes variantes (I, II, III) selon les étapes intermédiaires, avec des **rapports de branchement** qui dépendent de la température. La Fig. 5.22 montre ces différents branchements pour le cas du Soleil. Le taux de production d'énergie pour ces processus est typiquement $\epsilon(\rho, T) \propto \rho T^\alpha$ avec $\alpha = 4 - 5$.

Les **cycles CNO** utilisent les éléments C, N et O comme intermédiaires pour produire l'hélium à partir d'hydrogène, selon le bilan global



Ils dominent aux températures supérieures à $\sim 2 \cdot 10^7$ K et se déclinent là aussi en différentes variantes, dont la principale est représentée sur la Fig. 5.23. Là aussi, le taux de production d'énergie pour ces processus est typiquement $\epsilon(\rho, T) \propto \rho T^\alpha$ avec $\alpha = 16 - 17$. Les barrières de Coulomb pour les réactions du cycle CNO sont plus élevées que pour les chaînes $p-p$, de sorte que la température d'ignition est elle

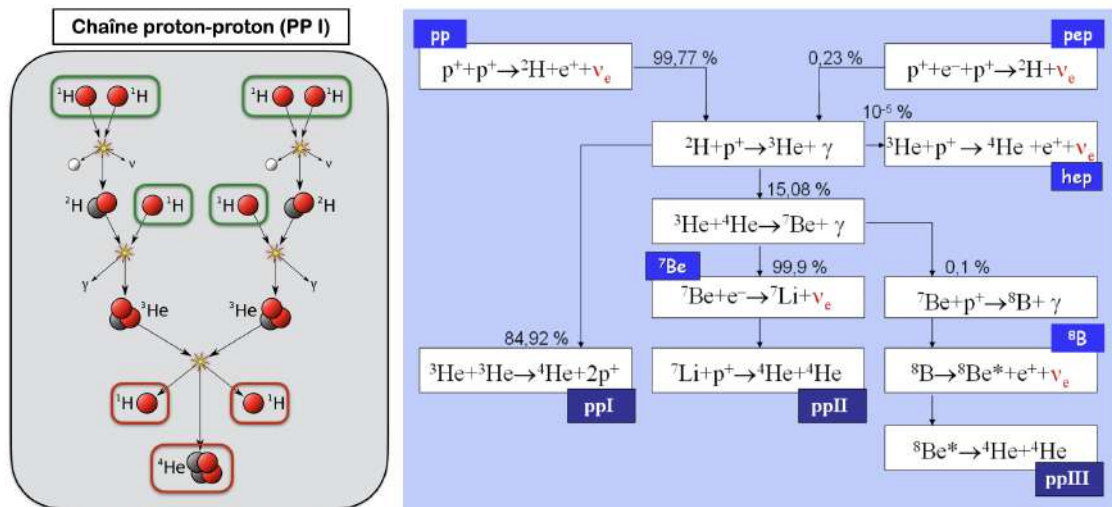


FIGURE 5.22 – **Chaîne proton-proton**. Le schéma de gauche représente la chaîne p - p principale (PP I) et le diagramme de droite donne les différentes variantes avec les rapports de branchement (Crédit : Wikipedia).

aussi plus élevée. Les étoiles comme le Soleil tirent la majeure partie⁴⁴ de leur énergie des chaînes p - p , tandis que les étoiles massives, de températures centrales plus élevées, reposent sur le cycle CNO.

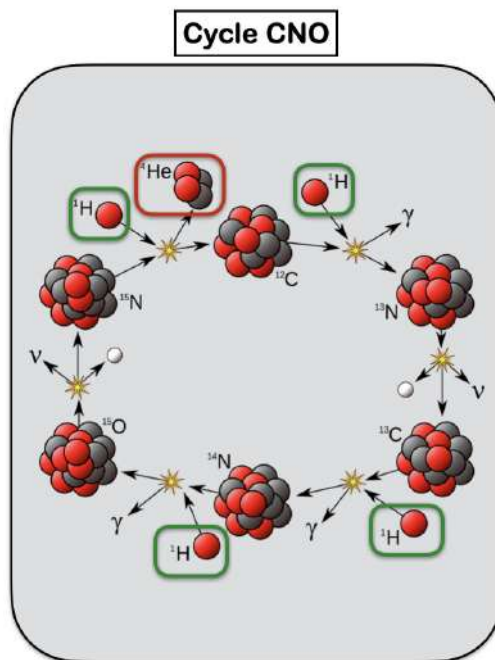


FIGURE 5.23 – **Cycle CNO**. Le cycle représenté est la principale variante, CNO I (Crédit : Wikipedia).

44. Dans le cas du Soleil, on estime cette part à 99%, mais les neutrinos solaires émis par le cycle CNO ont été récemment identifiés, ce qui devrait permettre de mieux connaître la métallicité du Soleil [33].

Stabilité de l'équilibre

Peut-on comprendre pourquoi la fusion de l'hydrogène permet cette phase de stabilité longue de l'équilibre de l'étoile? Imaginons que l'étoile se contracte, comme sur le schéma de la Fig. 5.24. Sa température centrale, qu'on peut estimer grossièrement en combinant l'équilibre hydrostatique et la loi des gaz parfaits, est

$$T \sim \frac{GMm_{\text{H}}}{k_B R} \quad (5.65)$$

Elle augmente donc, ce qui provoque l'augmentation du taux de production d'énergie $\epsilon \propto T^\alpha$, et la dilatation de l'étoile. On a donc une situation stable tant que le combustible nucléaire est disponible.

Exercice 64 : *Établir l'expression de l'ordre de grandeur de la température T donné ici.*

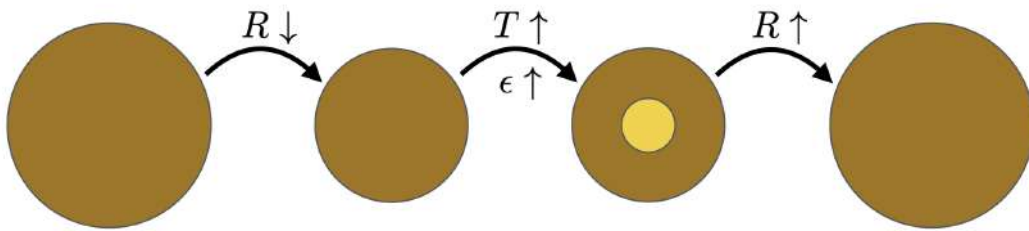


FIGURE 5.24 – Stabilité de l'équilibre.

5.4 Évolution après la séquence principale

On décrit dans cette section l'évolution d'une étoile de type solaire, après la fin de la séquence principale de fusion de l'hydrogène. L'évolution des étoiles massives donne lieu à une évolution vers des objets encore plus denses, les **étoiles à neutrons** et les **trous noirs**, formés au cours d'événements cataclysmiques, les **supernovæ à effondrement de cœur**.

5.4.1 Stade géante rouge

Lorsque l'essentiel de l'hydrogène du cœur a été converti en hélium, le cœur se retrouve sans support contre la gravité, et **se contracte**, augmentant sa température ($T \propto M/R$). Autour du cœur, la température augmente également, ce qui initie la **fusion de l'hydrogène dans une couche**. L'hélium créé dans cette couche, plus lourd, est incorporé au cœur, augmentant la masse de celui-ci. La chaleur dégagée par le cœur augmente la pression de radiation (en T^4) ce qui provoque l'expansion des couches externes et leur refroidissement. L'étoile devient une **géante rouge** (Fig. 5.25). C'est ce qui attend notre Soleil dans environ 4.5 milliards d'années. Son enveloppe englobera alors l'orbite de la Terre.

5.4.2 Flash de l'hélium

La fusion de l'hélium en béryllium par la réaction ${}^4\text{He} + {}^4\text{He} \rightarrow {}^8\text{Be}$ n'est pas efficace car le béryllium possède une énergie de liaison plus faible que l'hélium et est donc presque tout de suite détruit (sur une échelle de temps de 10^{-16} s). Une petite partie de ce béryllium peut néanmoins réagir avec un troisième noyau d'hélium, pour aboutir au carbone selon la **réaction triple- α**



dont la température d'ignition est de l'ordre de 10^8 K et le taux de production d'énergie est $\epsilon \propto \rho^2 T^\alpha$ avec $\alpha \sim 19$. Ce processus est initié très brutalement, c'est le **flash de l'hélium**, qui produit donc

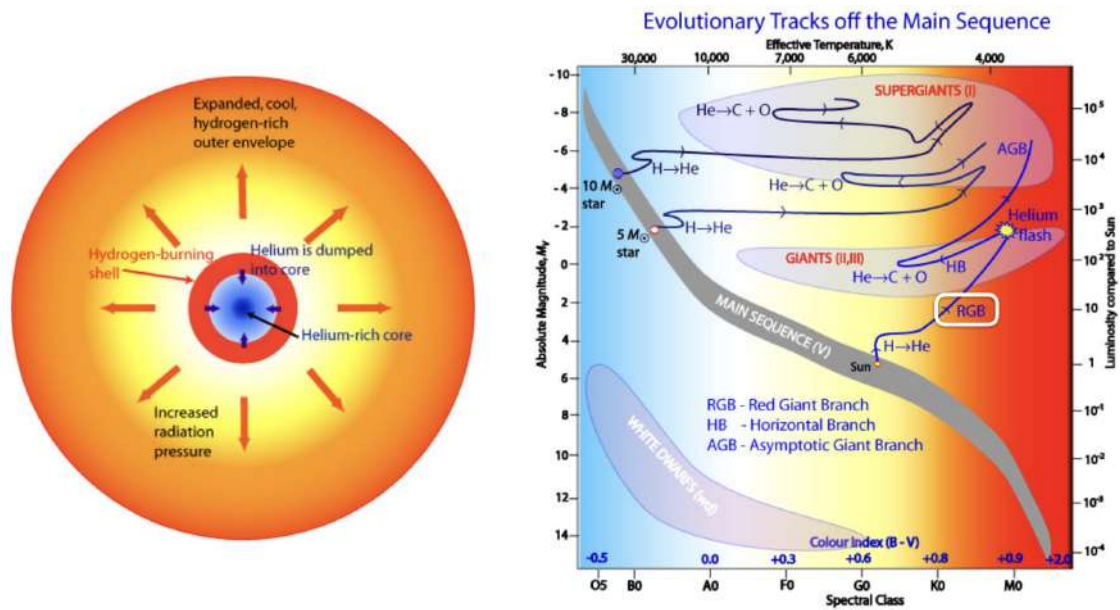


FIGURE 5.25 – **Stade "Géante Rouge"**. Le schéma de gauche montre la structure d'une telle étoile (Source : <https://shorturl.at/bvKQX>), celui de droite l'évolution dans le diagramme HR (stade marqué "RGB") (Crédit : R. Hollow / CSIRO / C. Cain).

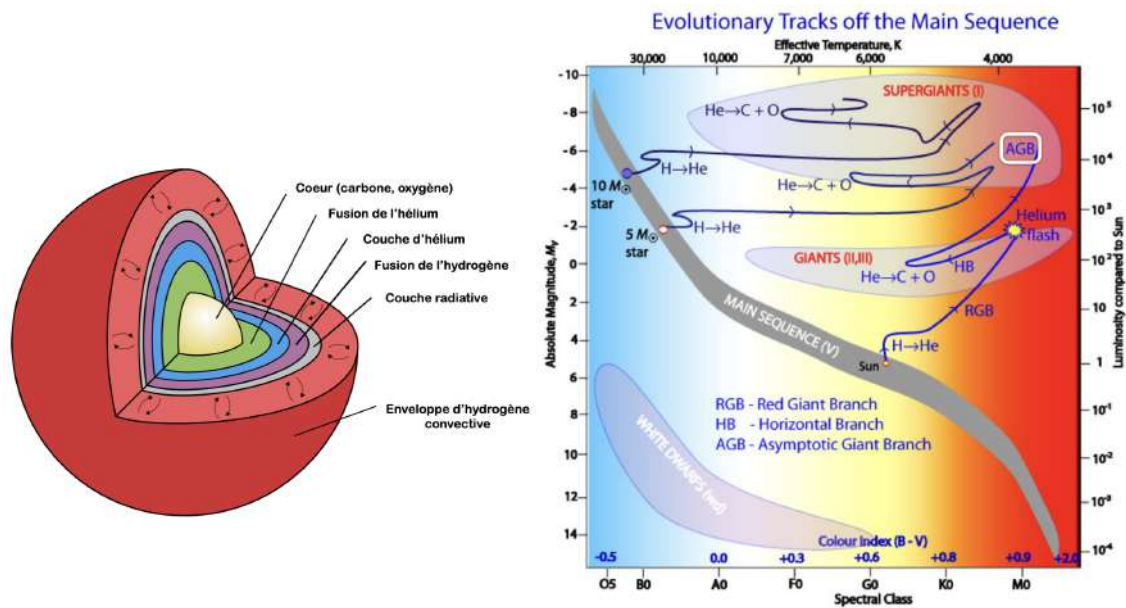


FIGURE 5.26 – **Stade AGB**. Le schéma de gauche montre la structure d'une telle étoile (Crédit : M. V. Persson), celui de droite l'évolution dans le diagramme HR (stade marqué "AGB") (Crédit : R. Hollow / CSIRO / C. Cain).

du carbone, mais aussi de l'oxygène par réaction du carbone avec un quatrième noyau d'hélium. Cet apport d'énergie provoque une augmentation de la température, à luminosité à peu près constante, l'étoile évolue le long de la **branche horizontale** (HB). Cette phase devrait durer environ 10^8 an pour

le Soleil.

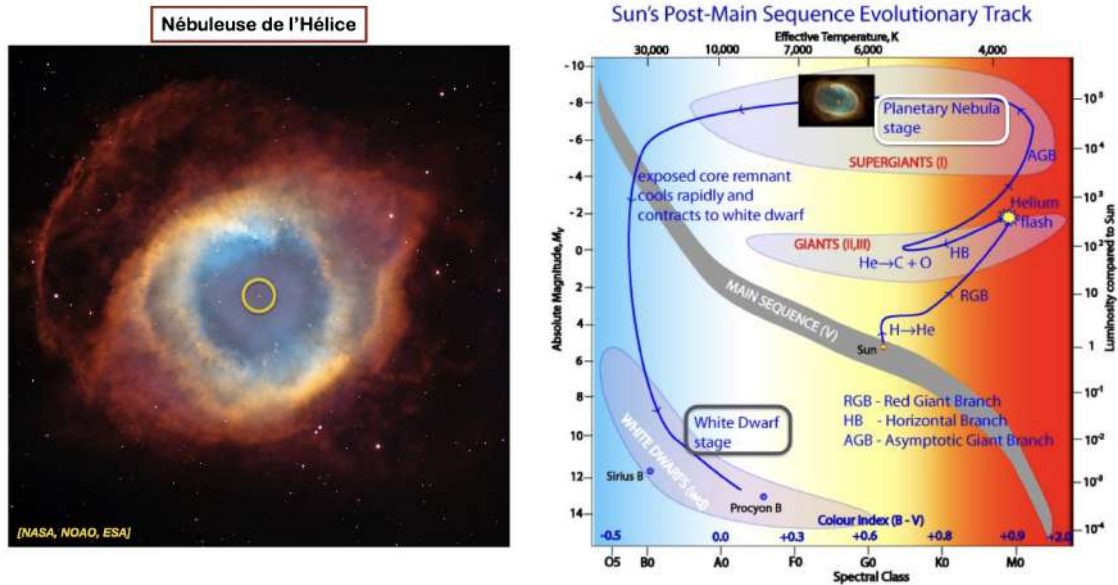


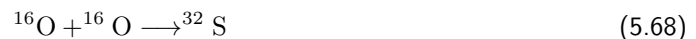
FIGURE 5.27 – **Évolution post-AGB.** L'image de gauche montre une nébuleuse planétaire, et indique la naine blanche centrale qui est le cœur de l'étoile progénitrice (Crédit : NASA / NOAO / ESA), le schéma de droite montre l'évolution dans le diagramme HR (Crédit : R. Hollow / CSIRO / C. Cain).

5.4.3 Phases ultérieures

L'étoile a désormais un cœur constitué de carbone et d'oxygène, entouré d'une coquille où l'hélium fusionne, et plus extérieure encore, une couche où l'hydrogène fusionne encore en hélium. La structure de l'étoile se modifie et elle monte dans le diagramme HR sur la **branche asymptotique aux géantes** (AGB), indiquée sur la Fig. 5.26. Les étapes de fusion suivantes impliquent la fusion du carbone lorsque la température atteint $\sim 6 \cdot 10^8$ K, selon



le noyau de magnésium se formant dans un état excité, il se désintègre en produisant notamment du ^{20}Ne , du ^{23}Na , des protons et des particules α , à savoir des noyaux d'hélium 4. Le taux de production d'énergie associé varie très fortement avec la température, en $\epsilon \propto T^{27}$. À $T \sim 1.9 \cdot 10^9$ K, la fusion de l'oxygène commence



le soufre se désintégrant lui aussi en ^{28}Si et en ^{31}P , notamment. Le taux de production d'énergie associé varie encore plus fortement avec la température $\epsilon \propto T^{33}$. Le centre de l'étoile est maintenant un endroit où beaucoup de réactions (photo-dissociations, fusions, désintégrations, etc.) se passent dans tous les sens, créant et détruisant des éléments de plus en plus lourds. Les noyaux qui survivent sont les noyaux les plus stables, notamment ^{56}Fe . Le taux de production d'énergie de toutes ces réactions est extrêmement sensible à la température, $\epsilon \propto T^{47}$. Le fer étant l'élément le plus stable, c'est la fin de la possibilité de produire de l'énergie par fusion nucléaire. La température très élevée du cœur souffle les couches externes de l'étoile, et le cœur, essentiellement constitué de carbone et d'oxygène, est mis à nu, formant une **naine blanche**. Sa radiation intense ionise le gaz des couches éjectées, qui apparaissent sous la forme de **nébuleuses planétaires** dans le visible, via les **raies de recombinaison** de ces espèces ionisées qui leur donnent ces magnifiques couleurs (Fig. 5.27).

Chapitre 6

Les stades ultimes de l'évolution stellaire

Lorsqu'une étoile a épuisé le combustible nucléaire qui lui permettait de maintenir son équilibre contre sa propre gravité, elle voit son cœur se contracter pour former un **objet compact**, stade ultime¹ de l'évolution stellaire. Le type d'objet compact formé dépend fondamentalement de la masse de l'étoile progénitrice², qui détermine le processus qui pourra s'opposer à la gravité :

- Pour les étoiles de masse comprise entre $\sim 0.1 M_{\odot}$ et $\sim 9 M_{\odot}$, la **pression de dégénérescence des électrons** fournit un support à même d'assurer l'équilibre des **naines blanches**.
- Pour les étoiles de masse comprise entre $\sim 9 M_{\odot}$ et $\sim 30 M_{\odot}$, on a **neutronisation** de la matière, les électrons fusionnant avec les noyaux. C'est alors l'interaction forte entre nucléons qui assure l'équilibre des **étoiles à neutrons**.
- Pour les étoiles de masse supérieure à $\sim 30 M_{\odot}$, rien ne peut arrêter l'**effondrement gravitationnel**, et l'objet compact qui se forme est un **trou noir**, une **singularité de l'espace-temps** cachée derrière un **horizon des événements**.

Dans ce court chapitre, on fait un rapide tour d'horizon de ces objets compacts, avant de les aborder plus en détail, type par type, dans les chapitres suivants.

6.1 La compacité

Le **paramètre de compacité**, appelé aussi **paramètre de relativité** d'un astre sphérique de masse M et de rayon R est le nombre sans dimension

$$\Xi = \frac{GM}{Rc^2} \quad (6.1)$$

S'il vaut $7 \cdot 10^{-10}$ pour la Terre et $2 \cdot 10^{-6}$ pour le Soleil, il est nettement plus élevé pour les astres qu'on appelle **objets compacts**, qu'il s'agisse des **naines blanches** ($\Xi \sim 10^{-4} - 10^{-3}$), des **étoiles à neutrons** ($\Xi \sim 0.2 - 0.4$) ou des **trous noirs** ($\Xi = 1$ par définition). Ce paramètre caractérise le rapport de l'énergie potentielle gravitationnelle à l'énergie de masse,

$$\frac{|E_g|}{Mc^2} \sim \frac{GM^2}{RMc^2} = \Xi \quad (6.2)$$

Le potentiel gravitationnel à la surface de l'astre est d'ailleurs $\Phi(R) = -\Xi c^2$. L'**approximation Newtonienne** de la gravitation n'étant valable que si $|\Phi|/c^2 \ll 1$, ces astres doivent le plus souvent être

1. On pourra estimer le temps de Kelvin-Helmholtz d'une naine blanche par exemple, connaissant sa température effective, son rayon et sa masse. On trouvera une durée bien supérieure à l'âge de l'Univers, ce qui justifie qu'on parle là d'étape finale.

2. Il faut noter que la métallicité, la rotation, la magnétisation, ou encore la présence d'un compagnon, peuvent altérer ces scénarios.

traités dans le cadre de la **relativité générale**. Le paramètre de compacité apparaît également dans l'expression de la **vitesse de libération** $v_\ell = \sqrt{2\Xi}c$ et dans l'appréciation de la proximité du rayon d'un astre à son **rayon de Schwarzschild**, qu'on définira dans le chapitre sur les trous noirs.

6.2 Intérêts de l'étude des objets compacts

Les objets compacts ont en commun un certain nombre de propriétés qui rendent leur étude importante pour plusieurs domaines de l'astrophysique, de la cosmologie, et de la physique fondamentale.

6.2.1 Objets compacts et astrophysique des hautes énergies

L'énergie gravitationnelle des objets compacts, qui représente donc une fraction importante de leur énergie de masse, peut-être extraite de deux manières, l'**effondrement gravitationnel** et l'**accrétion**, plaçant ces objets comme sources essentielles de l'**astrophysique des hautes énergies**.

Ainsi, l'énergie gravitationnelle libérée lors de l'effondrement d'un astre de rayon R_* vers un astre compact de rayon R s'écrit

$$\Delta E_g = E_g(R) - E_g(R_*) \approx E_g(R) \sim -\Xi M c^2 \quad (6.3)$$

Prenant l'exemple d'une étoile à neutrons ($\Xi = 0.2$) de masse $M = 1.4 M_\odot$, l'énergie libérée est de l'ordre de 10^{46} J, équivalente à l'**énergie rayonnée pendant toute la Galaxie pendant 30 ans**.

Exercice 65 : Vérifier que cette comparaison est effectivement du bon ordre de grandeur. On utilisera le fait que la luminosité Galactique est de l'ordre de $3 \cdot 10^{10} L_\odot$.

Alternativement, l'énergie cinétique acquise par une particule de masse m accrétée sur la surface de l'astre compact est³

$$\Delta E_c = -\Phi(R)m = \Xi m c^2 \quad (6.4)$$

L'accrétion sur une étoile à neutron peut donc extraire quelques 20% de l'énergie de masse d'une particule, **bien supérieure à ce qu'on peut tirer de la fusion thermonucléaire**⁴. Notons que ces énergies ne sont pas nécessairement rayonnées sous forme électromagnétiques (rayons X et γ), mais peuvent être emportées par les **neutrinos** ou les **ondes gravitationnelles**, ou encore se présenter sous forme **mécanique**, provoquant une **éjection de matière**, parfois à des vitesses relativistes. De plus, l'énergie potentielle gravitationnelle n'est pas la seule source d'énergie : les objets compacts comme les étoiles à neutrons présentent une **rotation rapide**, avec une énergie cinétique de rotation équivalente à l'énergie gravitationnelle. Il existe des mécanismes efficaces pour l'extraire, qui font généralement intervenir le **champ magnétique**, comme illustré par exemple par le phénomène de **pulsar** pour les étoiles à neutrons.

6.2.2 Objets compacts et physique fondamentale

Comme on le verra, la **densité moyenne** $\bar{\rho}$ des objets compacts stellaires (naines blanches et étoiles à neutrons) est **extrêmement élevée** ($10^6 - 10^7 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$ pour les naines blanches, $10^{15} \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$ pour les étoiles à neutrons), de sorte que la description des états de la matière nécessite des développements particuliers. On connaît en effet très mal l'**équation d'état** de la matière dans ces régimes.⁵ Réciproquement, ces astres offrent des conditions idéales pour tester le comportement de la matière à très haute densité, mais aussi comme laboratoires de physique fondamentale. On peut citer les tests de **gravité en champ fort**, les théories sur le **graviton**, la physique des **neutrinos**, ou encore l'**invariance de Lorentz**.

3. Cette formule n'est pas rigoureusement vraie pour les trous noirs, dont le rayon R n'est pas défini.

4. On rappelle que la fusion de l'hydrogène libère 0.7% de l'énergie de masse par nucléon. Pour les naines blanches, on a à peu près le même "rendement".

5. En tous cas pour les étoiles à neutrons, le cas des naines blanches est mieux connu.

De plus, les **champs magnétiques** associés à ces objets compacts peuvent atteindre des intensités complètement inaccessibles en laboratoire.

Les objets compacts, et en particulier les **systèmes binaires d'objets compacts** sont également les sources les plus prometteuses d'**ondes gravitationnelles**. La première détection directe d'ondes gravitationnelles a eu lieu en 2015 grâce aux interféromètres LIGO, et concerne la **coalescence de deux trous noirs** d'une trentaine de masses solaires. Plusieurs autres détections ont suivi, notamment celle d'une **coalescence de deux étoiles à neutrons** en août 2017, avec la détection de plusieurs **contreparties électromagnétiques** (Fig. 6.1). Les futurs instruments, et notamment le projet d'**interféromètre spatial LISA**, devraient permettre de détecter les ondes gravitationnelles associées aux **trous noirs supermassifs** au centre des galaxies.

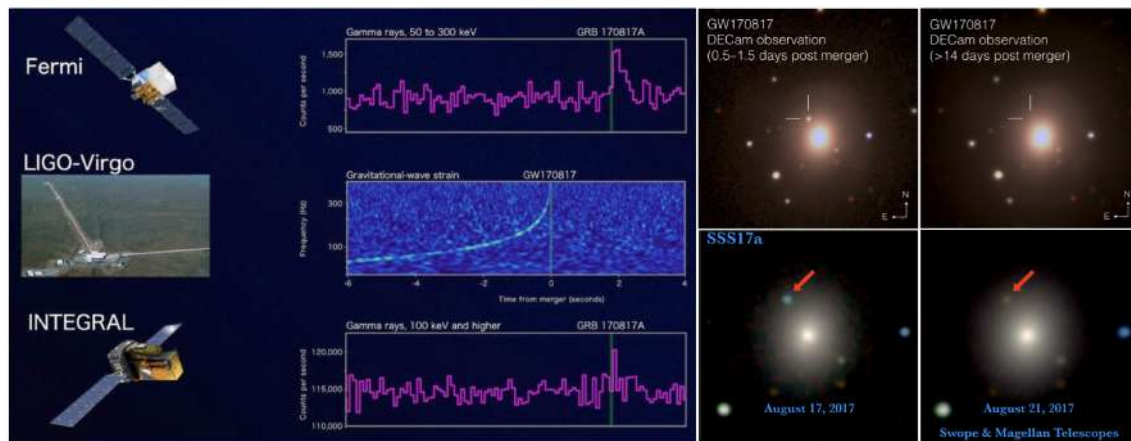


FIGURE 6.1 – Évènement de coalescence de deux étoiles à neutrons. La figure de gauche montre les détections d'ondes gravitationnelles associées à l'évènement détectées avec LIGO-Virgo, les sursauts en rayons γ vus par les satellites Fermi et INTEGRAL (Crédit : NASA / GSFC / Caltech / MIT / LIGO / ESA). Les images de droite montrent la position de la source et soulignent sa variation de brillance à différents instants, en optique et en infrarouge proche (Crédit : Soares-Santos et al. and DES Collaboration / 1M2H / UC Santa Cruz and Carnegie Observatories / R. Foley).

6.2.3 Objets compacts et cosmologie

Les liens entre objets compacts et cosmologie se manifestent de différentes manières. D'abord, les objets compacts étant associés aux phénomènes les plus énergétiques de l'Univers, ils permettent d'en sonder la composition, via l'analyse de la lumière qui nous en parvient. De plus, s'ils sont accréteurs, ces "phares" peuvent être très brillants sur de longues périodes. C'est le cas des **quasars**, aussi appelés **noyaux actifs de galaxies (AGN)**, des trous noirs supermassifs au centre de galaxies lointaines qui peuvent servir de sondes cosmologiques. La symbiose avec leur galaxie-hôte est au cœur des problématiques de formation et d'évolution des galaxies sur des échelles cosmologiques. Les **supernovæ de type Ia**, aussi dites **supernovæ thermonucléaires** sont d'excellentes **chandelles standard** qui ont permis de mettre en évidence l'accélération de l'expansion de l'Univers. Enfin, la coalescence d'un système binaire de deux objets compacts est quant à elle une **sirène standard** qui permet d'entrevoir une mesure indépendante de la **constante de Hubble**, pour peu qu'on dispose de contreparties électromagnétiques au signal gravitationnel, comme ce fut le cas dans l'évènement d'août 2017 (Fig. 6.1).

6.3 Les populations d'objets compacts

Avant d'aborder la structure et les propriétés des différents objets compacts, il n'est pas inutile de faire une brève revue observationnelle des diverses populations de ces objets.

6.3.1 Naines blanches et variables cataclysmiques

On estime⁶ qu'un quart des étoiles de notre Galaxie sont des naines blanches, soit environ 50 milliards. Elles sont observables par leur rayonnement thermique ($T_{\text{eff}} \sim 10^5$ K) bien que leur luminosité soit faible du fait de leur rayon très réduit ($\sim 3000 - 30000$ km). On en a identifié environ 10^4 , ce qui permet déjà une analyse statistique, notamment en ce qui concerne leurs masses.

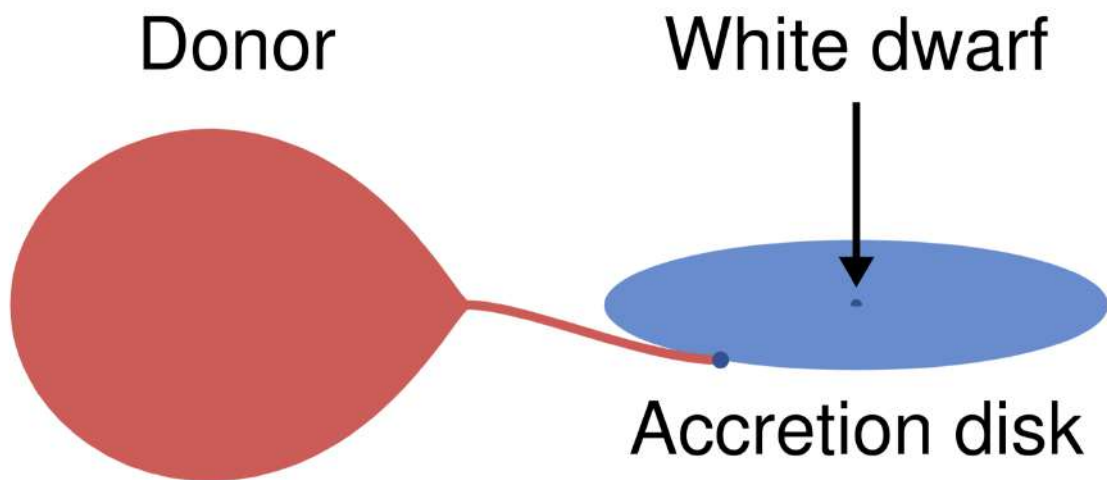


FIGURE 6.2 – Schéma d'une variable cataclysmique [Crédit : Philipp D. Hall]

Environ 1/3 de ces étoiles font partie d'un système binaire⁷ ce qui permet dans certaines conditions d'assister à un **transfert de masse** du compagnon vers la naine blanche. Cette **accrétion** en fait des sources brillantes en UV et en rayons X mous, avec parfois des épisodes brutaux traduisant des **explosions thermonucléaires** à la surface de la naine blanche, un phénomène qu'on appelle **nova**. Ces systèmes sont appelés **variables cataclysmiques** et on en connaît environ 2000. Le compagnon est en général une étoile de la séquence principale ou une géante rouge. Si l'accrétion se poursuit, la naine blanche peut voir sa masse dépasser la **masse de Chandrasekhar** et ainsi exploser en une **supernova de type Ia**. Un cas particulier est celui des systèmes où les deux étoiles sont des naines blanches⁸, qui peuvent être sources d'ondes gravitationnelles et également créer les conditions d'une supernova de type Ia suite à leur **coalescence**.

6. À partir de la **fonction de masse initiale** des étoiles, de leur durée de vie, et de la masse maximale des étoiles dont le destin est de finir en naine blanche.

7. Un exemple est le système constitué de Sirius A (étoile de la séquence principale de type A1V) et Sirius B (naine blanche), représenté sur la Fig. 7.1.

8. On parle dans ce cas de "**double degenerate**", alors que les variables cataclysmiques classiques sont "**single degenerate**". La dégénérescence en question est celle des électrons qui caractérise l'état de la matière dans une naine blanche.

6.3.2 Étoiles à neutrons et pulsars

Les objets isolés

Les **supernovæ de type II**, à effondrement gravitationnel, mènent à la formation d'étoiles à neutrons et de trous noirs. On en compte environ une par siècle dans notre Galaxie, ce qui suggère une population d'étoiles à neutrons de l'ordre de 10^8 . Le rayonnement thermique des étoiles à neutrons est très peu intense et se situe essentiellement dans les X, elles sont donc très difficiles à détecter par ce biais. On en connaît pourtant près de 2000, via le phénomène de **pulsar**, lié au fort champ magnétique et à la rotation rapide de ces objets. On observe des pics d'émission qui se répètent très régulièrement, essentiellement en radio mais pouvant aller jusqu'aux rayons γ (Fig. 6.3). Cette émission, véritable "phare cosmique", est généralement puisée dans l'énergie cinétique de rotation, mais parfois dans l'énergie magnétique pour les objets où le champ \vec{B} est très intense⁹.

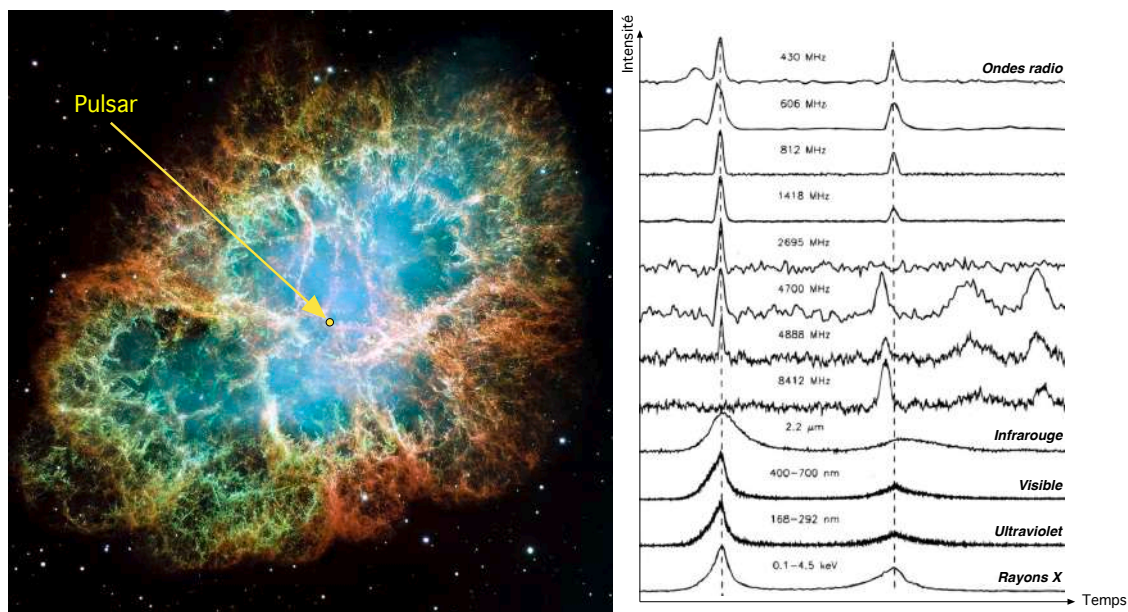


FIGURE 6.3 – **Phénomène de pulsar**. Sur l'image de gauche, la nébuleuse du Crabe observée en optique par le télescope spatial Hubble (Crédit : NASA/STScI). Les "pulses" d'émission issus du pulsar qui se trouve au centre de la nébuleuse sont représentés en fonction du temps sur les courbes à droite, pour différentes fréquences, des ondes radio en haut aux rayons X en bas. La durée totale représentée sur chaque courbe correspond à une période unique de rotation du pulsar, à savoir 33,736 ms. (Figure adaptée de D. A. Moffett & T. H. Hankins, *The Astrophysical Journal*, 468, 779, 1996 [<https://arxiv.org/abs/astro-ph/9604163>]).

Les systèmes binaires

S'il est difficile de mesurer les propriétés essentielles (la masse en particulier) des étoiles à neutrons isolées¹⁰, il est possible de les mesurer dans les **systèmes binaires**. On estime qu'environ 5% des pulsars feraient partie d'un tel système, une faible fraction due sans doute à la difficulté de maintenir un système lié après une explosion de supernova. Là encore, l'objet compact peut accréter de la matière de son compagnon, mais l'émission est alors dans le domaine des rayons X et le phénomène est appelé

9. On parle alors de **magnetar**.

10. Cette mesure est cependant essentielle, car la masse maximum des étoiles à neutrons est une contrainte forte sur les **équations d'état** de la matière à ces densités.

binaire X¹¹. On classe ces systèmes en **binaires X de faible masse (LMXB)** lorsque le compagnon est de masse inférieure à celle de l'objet compact (typiquement $M \lesssim 1 M_{\odot}$) et en **binaires X de grande masse (HMXB)** lorsque le compagnon est de masse supérieure à celle de l'objet compact. Ces sources peuvent donner lieu à des **sursauts X** lorsque l'accrétion est **épisodique**, à la manière du phénomène de nova dans les systèmes comportant une naine blanche. Notons enfin que cette accrétion peut accélérer le pulsar par transfert de moment cinétique, le faisant passer dans la population des **pulsars millisecondes**.

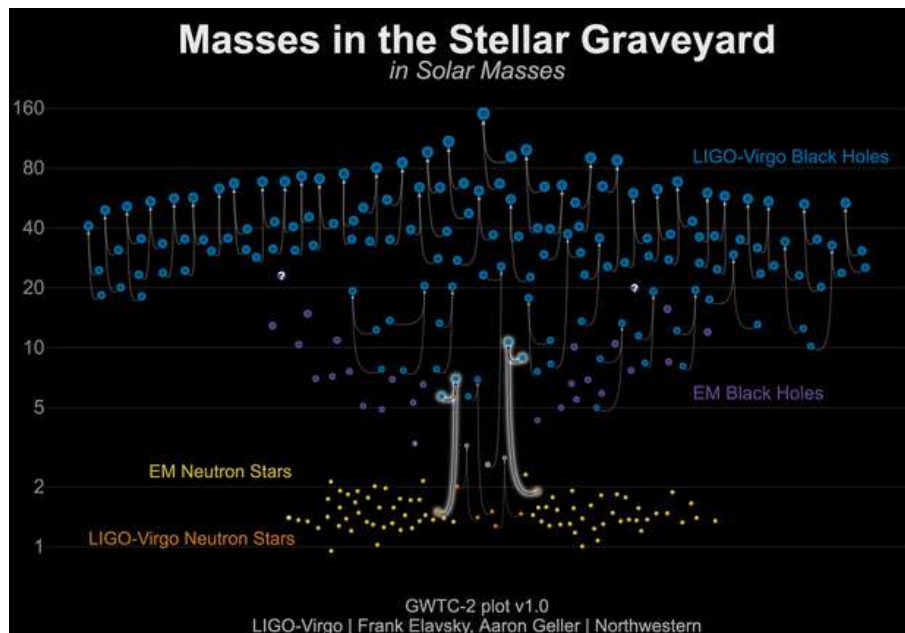


FIGURE 6.4 – Événements de coalescence détectés avec LIGO-Virgo. Ce graphique montre les masses de toutes les binaires compactes détectées par LIGO/Virgo, trous noirs (en bleu) et étoiles à neutrons (en orange). Les trous noirs et les étoiles à neutrons détectés en ondes électromagnétiques sont représentés en violet et en jaune, respectivement.

Un cas particulier est celui de **deux étoiles à neutrons**, qui doit être traité comme un problème à deux corps en relativité générale, permettant de bien contraindre les masses des objets. Ces systèmes sont des sources attendues d'**ondes gravitationnelles**, et leur **coalescence** est également liée aux **sursauts gamma courts**. Cette **contrepartie lumineuse** a été observée lors de l'événement LIGO GW170817 en août 2017 (Fig. 6.1). Si dans la plupart des cas, une seule des étoiles à neutrons apparaît comme un pulsar (on parle de **pulsar binaire**), il existe au moins un cas de **pulsar double** (PSR J0737-3039) où les deux membres sont des pulsars. Le pulsar binaire le plus célèbre est PSR 1913+16, qui a permis à Hulse et Taylor de **détecter indirectement l'émission d'ondes gravitationnelles** par la mesure de la diminution de la période orbitale du système¹².

Un autre cas est celui d'un **système composé d'une étoile à neutron et d'une naine blanche**, un peu moins relativiste mais plus fréquent. L'un de ces systèmes, PSR J1614-2230, a récemment permis de mesurer la masse de l'étoile à neutrons grâce à l'**effet Shapiro**, prédit par la relativité générale, qui se traduit par un décalage des temps d'arrivée des pulses en fonction de la position sur l'orbite. Avec

11. Notons qu'un tel phénomène peut aussi avoir lieu si l'objet compact est un trou noir stellaire. L'identification de l'objet compact peut reposer sur le fait qu'on détecte un pulsar ou sur une mesure de masse trop élevée pour qu'il s'agisse d'une étoile à neutrons - ce critère étant assez flou car la masse maximum d'une telle étoile est encore mal connue.

12. Cette mesure est phénoménale de précision : la période orbitale $P = 77.5$ h, connue à la ns près, diminue de $\dot{P} = -76.5 \mu\text{s} \cdot \text{an}^{-1}$, soit une diminution du demi grand axe de $\dot{a} = -3.5 \text{ m} \cdot \text{an}^{-1}$, alors que $a = 13 \text{ mUA}$. Les masses sont $M_1 = 1.4414 \pm 2 \cdot 10^{-4} M_{\odot}$ et $M_2 = 1.3867 \pm 2 \cdot 10^{-4} M_{\odot}$. Le système coalescera dans $\sim 300 \text{ Myr}$.

$M = 1.97 \pm 0.04 M_{\odot}$, cette étoile à neutrons est la plus massive connue, ce qui **élimine un certain nombre d'équations d'état** de la matière ultra-dense.

Enfin, les **systèmes composés d'une étoile à neutrons et d'un trou noir** sont encore hypothétiques, bien que certains candidats existent dans les données des évènements d'ondes gravitationnelles de LIGO/VIRGO. La raison en est que ces systèmes sont intrinsèquement plus rares, bien que la limite de détection des évènements de coalescence soit nettement repoussée. On montre sur la Fig. 6.4 un schéma résumant les évènements confirmés de coalescence observés avec LIGO-Virgo.

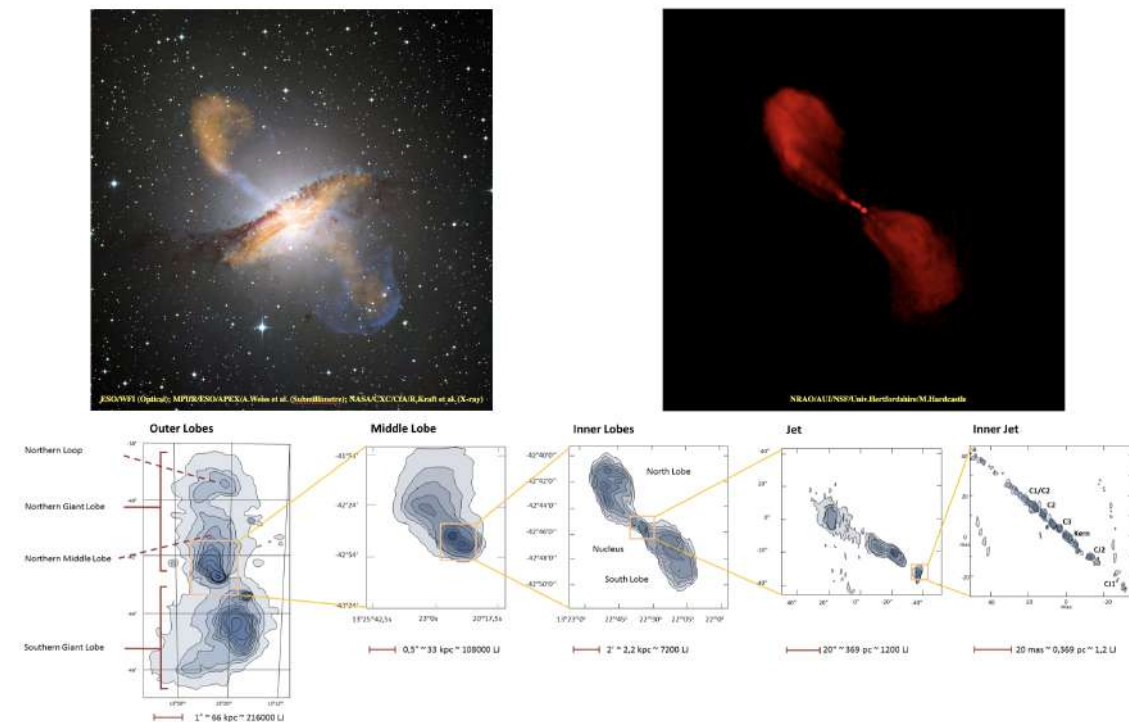


FIGURE 6.5 – **Centaurus A**. Les images en haut montrent l'émission en optique, submillimétrique et X (à gauche) et dans le continuum radio (à droite). Les cartes en bas montrent la structure de l'émission radio, de mieux en mieux résolue spatialement, focalisée sur la source du jet (Crédit : *Wikimedia Commons*).

6.3.3 Trous noirs

D'abord envisagés uniquement comme une possibilité théorique, les trous noirs font désormais partie intégrante du bestiaire astrophysique. On en distingue essentiellement deux populations¹³ :

- Les **trous noirs stellaires**, de masses typiques $\sim 10 M_{\odot}$, formé par effondrement du cœur d'une étoile massive (sans doute $\gtrsim 30 M_{\odot}$, bien que cette valeur soit incertaine).
- Les **trous noirs supermassifs** au cœur de la majorité des galaxies, si ce n'est toutes. Leurs masses s'étagent de $\sim 10^5 M_{\odot}$ à plusieurs $10^9 M_{\odot}$.

Comme il n'y a pas de masse limite aux trous noirs, ni supérieure, ni inférieure, l'absence apparente de **trous noirs de masse intermédiaire** pose question. Il existe plusieurs candidats pour de tels objets, encore non confirmés, mais les évènements de coalescence tels que ceux résumés sur la Fig. 6.4 suggèrent un mécanisme de formation à partir de trous noirs stellaires.

13. Il existe, dans des modèles de cosmologie primordiale, des **micro trous noirs** de masse très faible ($M < 10^{-18} M_{\odot}$) qui s'évaporent rapidement via le **rayonnement de Hawking**. Les plus massifs d'entre eux sont parfois invoqués pour résoudre le problème de la **matière noire**.

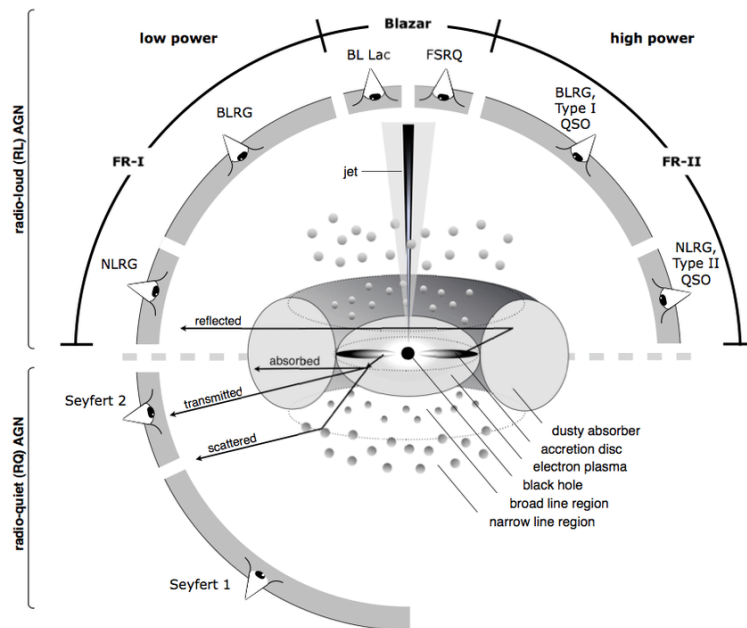


FIGURE 6.6 – **Modèle unifié des AGN.** [Crédit : Beckmann & Shrader (2012)]

Les trous noirs stellaires

L'existence d'une **masse maximale des étoiles à neutrons** suggère que les trous noirs stellaires se forment lorsque l'effondrement du cœur au cours d'une supernova de type II produit un objet trop massif pour pouvoir être stabilisé par l'interaction forte des neutrons. Rien ne peut s'opposer à la gravité et l'objet devient un trou noir. Notons que ce processus peut avoir lieu en deux temps, avec la formation d'une étoile à neutrons de masse légèrement inférieure à la masse maximale, qu'elle dépasse ensuite par accrétion¹⁴.

Les trous noirs isolés ne peuvent être observés directement, ils doivent être mis en évidence par le rayonnement du disque formé par l'accrétion de la matière d'un compagnon. Ce rayonnement est attendu dans le domaine des X, c'est pourquoi les candidats trous noirs sont recherchés parmi les binaires X accrétantes. En mesurant la variabilité de cette émission, on peut contraindre la compacité de l'objet, car les échelles de temps τ courtes ne sont compatibles qu'avec des tailles $R \leq c\tau$ du fait de la finitude de la vitesse de la lumière. Il faut alors déterminer la masse M de l'objet, via la troisième loi de Kepler et juger si cette masse est suffisamment élevée (typiquement $M \gtrsim 5 M_{\odot}$) pour exclure une étoile à neutrons.

Pour assurer définitivement que l'objet est un trou noir, il faut mettre en évidence son **horizon des évènements**, ce qu'on ne peut faire qu'indirectement :

- Les **sursauts X** étant interprétés comme résultat d'explosions thermonucléaires à la surface de l'objet compact dans une binaire X, leur absence signifie l'absence de surface visible, et signale donc probablement un trou noir.
- Dans les phases de **quiescence**, c'est-à-dire en dehors des sursauts, les binaires X où l'objet compact est une étoile à neutrons présentent une luminosité X plus importante, associée au rayonnement de la surface de l'objet. Dans les systèmes où l'objet compact est un trou noir, la luminosité est systématiquement plus faible.

À ces approches, il faut désormais ajouter l'analyse des **événements de coalescence** observés via la détection d'**ondes gravitationnelles**, qui permet d'obtenir des contraintes très fortes sur les masses

14. La coalescence de deux étoiles à neutrons peut également provoquer la formation d'un trou noir.

des objets mis en jeu (Fig. 6.4), démontrant sans aucun doute l'existence des trous noirs.

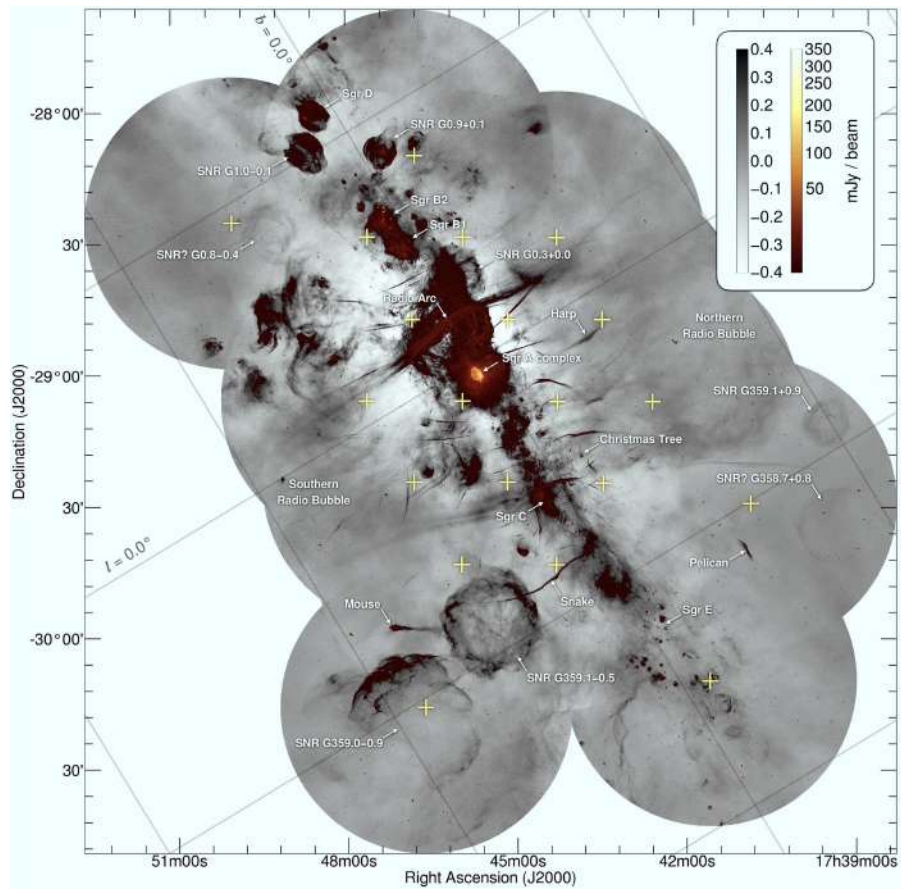


FIGURE 6.7 – **Le centre Galactique.** Image obtenue en radio par l'interféromètre MeerKAT. Le trou noir central se trouve dans la région "Sgr A complex". [Crédit : Heywood et al. (2022)]

Les trous noirs supermassifs

Dans les années 1940-1950, on identifie une population de galaxies dont le noyau est très brillant (on parle de **noyaux actifs de galaxies (AGN)**) et on découvre les premières **radio-galaxies** comme Centaurus A (Fig. 6.5). Dans la décennie suivante, la découverte des **quasars**, sources ponctuelles mais au spectre étrange, amène une révolution lorsqu'il est compris qu'il s'agit de sources à des distances cosmologiques, et donc extrêmement brillantes. Leur source d'énergie semble ne pouvoir être que l'énergie gravitationnelle, ce qui suggère la présence d'un **trou noir supermassif** en leur centre, autour duquel un disque d'accrétion pourrait se former et produire le rayonnement observé. On comprend alors qu'un **jet relativiste** de matière est lancé depuis le noyau galactique et forme les **lobes des radio-galaxies**. Un **modèle unifié** permet aujourd'hui d'interpréter l'ensemble des diverses populations identifiées précédemment¹⁵ en fonction de l'évolution de l'objet, notamment de son activité d'accrétion, et de l'orientation du jet et du disque par rapport à l'observateur (Fig. 6.6).

On pense que toutes les galaxies abritent un trou noir supermassif en leur centre, plus ou moins actif. Dans le cas de notre Galaxie, c'est la source Sgr A*, qui semble peu active, mais qui a pu être

15. AGN, galaxies de Seyfert, quasars, blazars, radio-galaxies FRI et FR II, ...

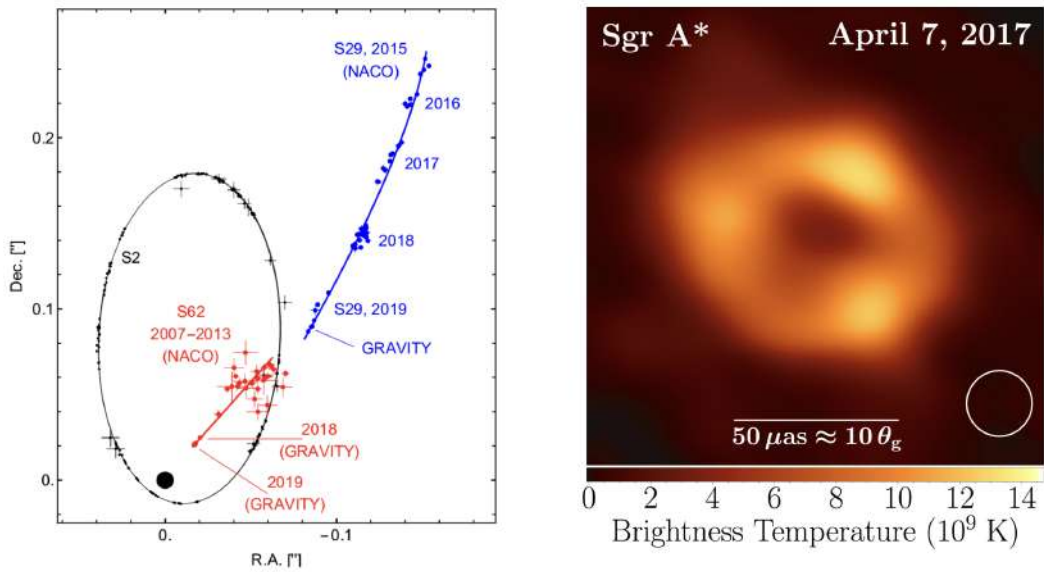


FIGURE 6.8 – **Sagittarius A***. Le schéma de gauche représente le relevé des positions de quelques étoiles au cours du temps, et la reconstruction de leurs orbites autour du trou noir. L'image de droite, obtenue par interférométrie radio à très longue base, montre le disque d'accrétion autour du trou noir, avec un effet de silhouette prédit par la relativité générale.

caractérisée indirectement au travers de la mesure des orbites d'étoiles proches¹⁶, reconstruites à l'aide d'observations interférométriques en optique (Fig. 6.8, gauche), puis directement tout récemment grâce à l'imagerie en interférométrie radio à très longue base avec l'Event Horizon Telescope. (Fig. 6.8, droite). L'image obtenue montre l'effet de **silhouette** provoqué par la combinaison de la présence d'un disque d'accrétion, l'horizon des évènements, et la courbure des rayons lumineux. La masse de l'objet déduite de ces dernières observations est estimée à $M = (4.152 \pm 0.014) 10^6 M_{\odot}$.

Si les trous noirs supermassifs semblent présents dans chaque galaxie, leur processus de formation est encore mal compris. Il est probablement lié à la **croissance cosmologique des structures** de l'Univers à grande échelle, comme en atteste la corrélation entre la masse du trou noir et celle du bulbe de la galaxie hôte. Sur le processus de formation, trois scénarii sont envisagés :

- L'effondrement direct d'un nuage de gaz dense au centre de la galaxie lors de sa formation.
- L'effondrement d'un cœur de gaz dense formé par la collision de nombreuses étoiles centrales.
- La coalescence de nombreux trous noirs stellaires formés à partir d'étoiles de population III, plus massives que les étoiles actuelles.

16. Le passage au périastre de l'étoile S2, en mai 2018, a permis à VLT/GRAVITY de mesurer le **redshift gravitationnel** induit sur le spectre de l'étoile par le champ de gravitation intense du trou noir.

Chapitre 7

Les naines blanches

Les naines blanches sont le stade ultime de la vie des étoiles de faible masse, après la fin des réactions thermonucléaires. Formées d'un gaz de **noyaux atomiques**¹ et d'un gaz d'**électrons**, ces étoiles ont une masse $M \sim 0.5 M_{\odot}$ et une température interne $T_c \sim 10^7$ K de l'ordre de celles du Soleil, mais un rayon voisin de celui de la Terre ($R \sim 5000$ km). Le gaz d'électrons des naines blanches est un système de **fermions dégénérés**, c'est-à-dire dont le caractère quantique se manifeste au travers du **principe d'exclusion de Pauli**, qui fournit à l'étoile le support nécessaire pour contrebalancer la gravité.

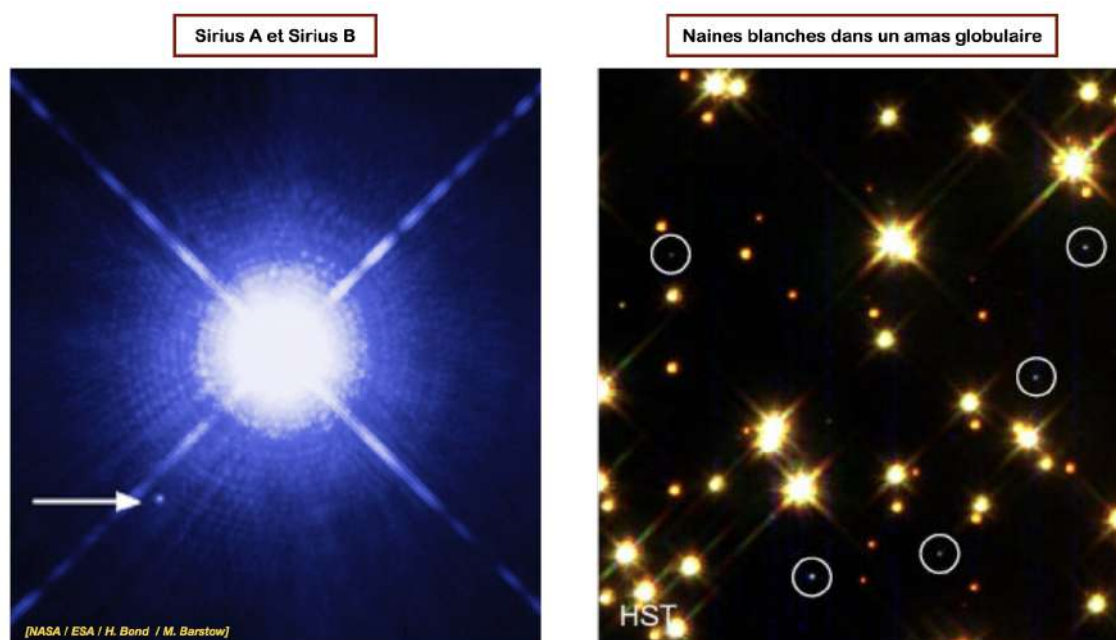


FIGURE 7.1 – **Exemples de naines blanches.** L'image de gauche présente le système binaire Sirius A & B (indiquée par la flèche), l'image de droite présente des détections de naines blanches (entourées) dans un amas globulaire avec le HST.

1. C et O le plus souvent, issus de la fusion de l'hélium, parfois aussi Ne et Mg si la fusion du carbone a eu lieu.

7.1 Un bref historique de l'étude des naines blanches

Les premières naines blanches identifiées sont 40 Eridani, présente dans le diagramme HR publié par Russell en 1915, et Sirius B. Pour cette dernière (à gauche sur la Fig. 7.1), la mesure de la période et des demi grands axes du système² a permis en 1910 de déterminer la masse du compagnon, $M = 0.94 M_{\odot}$. Son spectre est mesuré par Adams en 1914, qui en déduit une température effective $T_{\text{eff}} = 8000 \text{ K}$ et de là un rayon $R = 18000 \text{ km}$ très inférieur aux rayons stellaires. Eddington réalise alors en 1926 que la densité est trop importante pour que l'étoile soit supportée par la pression d'un gaz parfait classique, et la même année, Dirac introduit la **statistique de Fermi-Dirac** des électrons, dont Fowler réalise qu'elle peut fournir une **pression de dégénérescence** à même de soutenir l'étoile contre son auto-gravité. En 1930, Chandrasekhar introduit les **corrections relativistes** qui l'amènent à postuler l'existence d'une **masse maximale** des naines blanches, aujourd'hui appelée **masse de Chandrasekhar**. En 1949, Kaplan introduit les corrections de **relativité générale**³. Les années suivantes verront l'introduction d'améliorations de l'équation d'état (température non nulle, interaction électrons-ions) ainsi que la prise en compte de la **rotation** et du **champ magnétique**.

7.2 Équation d'état de la matière

7.2.1 Quelques ordres de grandeur

Commençons par évaluer la **masse volumique moyenne** d'une naine blanche, dont on suppose pour simplifier qu'elle est constituée d'électrons et de noyaux de ^{12}C uniquement. Prenant comme ordre de grandeur une masse $M = 1 M_{\odot} \approx 2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$ et comme rayon $R = 5000 \text{ km}$, on obtient

$$\bar{\rho} = \frac{3M}{4\pi R^3} \approx 4 \cdot 10^9 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} \quad (7.1)$$

Cela revient à concentrer quatre tonnes dans un morceau de sucre et est environ $2 \cdot 10^6$ fois plus dense que le Soleil⁴. On peut d'ailleurs évaluer les **distances moyennes** entre électrons et entre noyaux, ce qui sera utile par la suite. On commence par évaluer le nombre N_n de noyaux et celui N_e d'électrons en écrivant la neutralité électrique ($N_e = ZN_n$) et en exprimant la masse de l'étoile comme

$$M = N_n[Zm_p + (A - Z)m_n] + N_e m_e = N_n[Zm_p + (A - Z)m_n + Zm_e] \quad (7.2)$$

Comme $Z \approx A/2$ et $m_p \approx m_n \gg m_e$, on a

$$N_n \approx \frac{M}{Am_p} \approx 10^{56} \quad N_e = ZN_n \approx 6 \cdot 10^{56} \quad (7.3)$$

Les densités (nombre de particules par unité de volume) correspondantes sont

$$n_n = \frac{3N_n}{4\pi R^3} \approx 2 \cdot 10^{35} \text{ m}^{-3} \quad n_e = \frac{3N_e}{4\pi R^3} = Zn_n \approx 1.2 \cdot 10^{36} \text{ m}^{-3} \quad (7.4)$$

Enfin, les distances moyennes entre particules identiques sont

$$a_n \sim n_n^{-1/3} \sim 1.7 \cdot 10^{-12} \text{ m} \quad a_e \sim n_e^{-1/3} \sim 0.9 \cdot 10^{-12} \text{ m} \quad (7.5)$$

Ces distances sont de l'ordre de 100 fois plus petites qu'un atome. Les particules sont donc bien plus confinées que dans les étoiles ordinaires, mais cependant bien moins que dans la matière nucléaire, puisqu'on rappelle qu'un noyau atomique a une taille de l'ordre de 10^{-15} m . Clairement, la matière ne saurait être décrite comme un gaz parfait classique dans ces conditions. Il est nécessaire de recourir à une description en termes de **statistiques quantiques**.

Exercice 66 : Vérifier numériquement les ordres de grandeur donnés dans cette section.

2. Connue comme binaire depuis 1844 (Bessel).
3. Bien que la compacité relativement faible de ces objets autorise un traitement Newtonien, ce qu'on fera ici.
4. Soit environ $2 \cdot 10^4$ fois plus dense que la masse volumique centrale du Soleil.

7.2.2 La statistique de Fermi-Dirac

Les électrons de la naine blanche doivent être décrits au moyen de la **statistique de Fermi-Dirac**, qui donne le **nombre d'occupation moyen** d'un état individuel $|\lambda\rangle$ par

$$\overline{N}_\lambda = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_\lambda - \mu)} + 1} \quad (7.6)$$

Dans cette expression, $\beta = 1/(k_B T)$, ε_λ est l'**énergie de l'état** $|\lambda\rangle$ et μ le **potentiel chimique**. On note ε_0 l'énergie du **niveau fondamental** d'une particule. On voit que le nombre d'occupation moyen est **au plus égal à un, et décroît lorsque l'énergie augmente**. La courbe représentant ce nombre en fonction de l'énergie (Fig. 7.2) est symétrique par rapport à $(\mu, 1/2)$:

$$N_{\text{FD}}(x) = \frac{1}{e^{\beta(x-\mu)} + 1} \Rightarrow N_{\text{FD}}(\mu + \delta) = 1 - N_{\text{FD}}(\mu - \delta) \quad (7.7)$$

Elle tend vers 1 lorsque $\varepsilon_\lambda \rightarrow -\infty$ et vers 0 aux hautes énergies $\varepsilon_\lambda \rightarrow +\infty$. D'autre part, comme $N'_{\text{FD}}(\mu) = -\beta/4$, la température fixe la rapidité de transition d'une asymptote à l'autre, qui est d'autant plus grande que T est faible (β grand). **À la limite $T \rightarrow 0$, la courbe tend vers une fonction de type Heaviside** $N_{\text{FD}}(x) \rightarrow \theta(\mu - x)$. On peut montrer inversement qu'à haute température, les effets quantiques dus à la nature des particules (**principe d'exclusion de Pauli** ici) n'interviennent plus. Le système se comporte alors comme un gaz parfait classique, non-dégénéré.

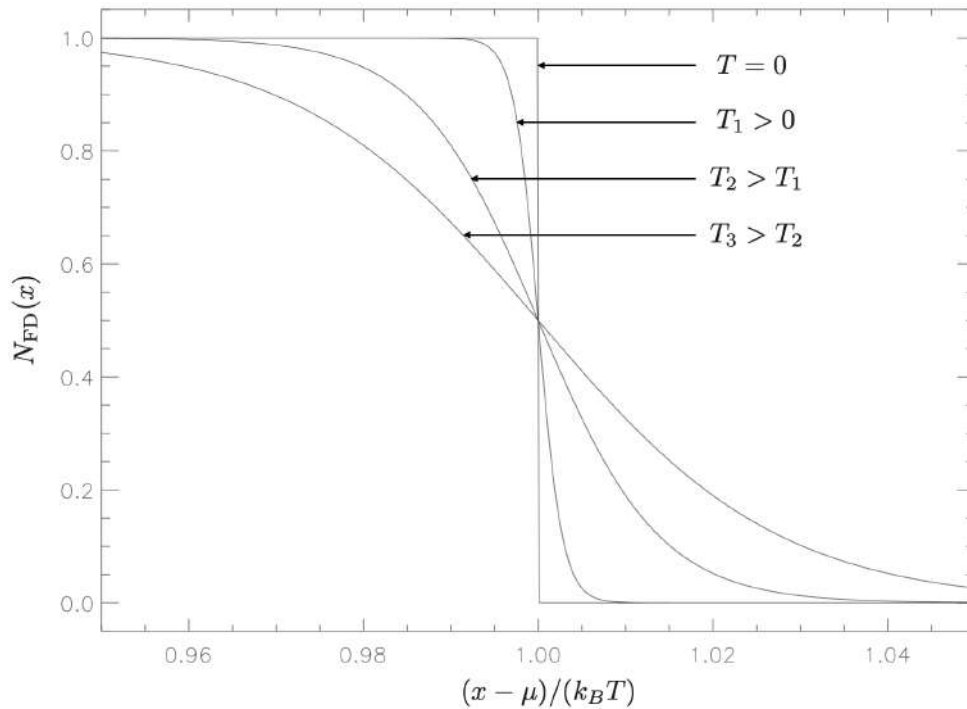


FIGURE 7.2 – **Distribution de Fermi-Dirac**. La distribution $N_{\text{FD}}(x)$ est représentée en fonction de $(x - \mu)/(k_B T)$ pour différentes valeurs de la température, y compris $T = 0$.

7.2.3 Densité d'états

Pour continuer le calcul, il nous faut la **densité d'états** $f(\varepsilon)$, telle que $f(\varepsilon)d\varepsilon$ est le nombre d'états microscopiques dont l'énergie est comprise entre ε et $\varepsilon + d\varepsilon$. Pour la calculer, on considère une particule

de masse m et de spin s enfermée dans une boîte de volume $V = L_x L_y L_z$. La résolution de l'**équation de Schrödinger** dépendante du temps

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi, \quad (7.8)$$

portant sur la **fonction d'onde** spatiale $\psi(\vec{r}, t)$ de la particule, montre que celle-ci peut s'écrire sur la base des ondes planes de la forme

$$\psi(\vec{r}, t) = A \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r}) \exp\left(-\frac{i\varepsilon t}{\hbar}\right) \quad (7.9)$$

avec ε l'énergie de la particule. Dans cette équation, le **vecteur d'onde** \vec{k} est relié à la **quantité de mouvement** par $\vec{p} = \hbar \vec{k}$. Les conditions aux limites périodiques sur les parois de la boîte spécifient les valeurs possibles de ce vecteur, où n_x, n_y, n_z sont trois entiers relatifs :

$$k_x L_x = 2\pi n_x \quad k_y L_y = 2\pi n_y \quad k_z L_z = 2\pi n_z \quad (7.10)$$

Le vecteur d'onde prend alors des valeurs discrètes sur un **réseau parallélépipédique**

$$\vec{k} = 2\pi \left(\frac{n_x}{L_x} \vec{u}_x + \frac{n_y}{L_y} \vec{u}_y + \frac{n_z}{L_z} \vec{u}_z \right). \quad (7.11)$$

Les niveaux énergétiques sont également discrets, mais l'**écart entre deux niveaux pour une boîte macroscopique est extrêmement faible**⁵, ce qui fait qu'on a en pratique affaire à un continuum de niveaux. Il est alors permis de parler de densité d'états $f_{\vec{r}}(\varepsilon)$, définie en notant $f_{\vec{r}}(\varepsilon)d\varepsilon$ le nombre d'états microscopiques (spatiaux) dont l'énergie est comprise entre ε et $\varepsilon + d\varepsilon$. Cette densité d'états s'identifie à la **dérivée de la fonction** $W_{\vec{r}}(\varepsilon)$ **désignant le nombre d'états microscopiques (spatiaux) dont l'énergie est inférieure ou égale à ε** , qu'on peut calculer de façon géométrique, dans l'espace des \vec{k} . On obtient en effet $W_{\vec{r}}(\varepsilon)$ en comptant le nombre de points du réseau compatibles avec la contrainte que l'énergie est inférieure ou égale à ε . Or il y a un lien direct entre l'énergie ε et le nombre d'onde $k = \|\vec{k}\|$, ce lien étant différent suivant qu'on est dans le cas **non-relativiste** ou le cas **relativiste**. Dans les deux cas, l'énergie augmente avec le nombre d'onde, donc les points du réseau compatibles avec la contrainte sur l'énergie sont ceux intérieurs à une sphère de rayon $k(\varepsilon)$, lui-même fonction de ε . Par conséquent, $W_{\vec{r}}(\varepsilon)$ est le rapport du volume de la boule de rayon $k(\varepsilon)$ au volume d'une brique élémentaire autour d'un point du réseau, soit

$$W_{\vec{r}}(\varepsilon) = \frac{\frac{4}{3}\pi k(\varepsilon)^3}{(2\pi)^3} = \frac{V k(\varepsilon)^3}{6\pi^2 L_x L_y L_z} \quad (7.12)$$

En tenant compte des états de spin, on a alors la densité d'états sous la forme

$$f(\varepsilon) = (2s + 1) \frac{dW_{\vec{r}}}{d\varepsilon} \quad (7.13)$$

On montre alors, en prenant garde aux différentes expressions de l'énergie en fonction du nombre d'onde selon qu'on est dans un **cas non-relativiste** ou dans un **cas relativiste**⁶ que la **densité cumulative**

5. Cf. Diu et al. "Physique Statistique" (chapitre I, note 18) : pour un électron dans une boîte cubique de côté 1 cm, cet écart est inférieur à 10^{-6} eV.

6. On rappelle qu'on a, respectivement, dans le cas non-relativiste et dans le cas relativiste

$$\varepsilon = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \quad \varepsilon = \sqrt{\hbar^2 c^2 k^2 + m^2 c^4} \quad (7.14)$$

d'états $W(\varepsilon) = (2s + 1)W_{\vec{r}}(\varepsilon)$ s'écrit

$$W(\varepsilon) = \frac{\sqrt{2}(2s + 1)}{3\pi^2\hbar^3} V m^{3/2} \varepsilon^{3/2} \quad (\text{cas non-relativiste}) \quad (7.15)$$

$$W(\varepsilon) = \frac{(2s + 1)V}{6\pi^2\hbar^3 c^3} (\varepsilon^2 - m^2 c^4)^{3/2} \quad (\text{cas relativiste}) \quad (7.16)$$

Et on en tire les expressions correspondantes de la densité d'état

$$f(\varepsilon) = \frac{2s + 1}{\sqrt{2}\pi^2\hbar^3} V m^{3/2} \varepsilon^{1/2} \quad (\text{cas non-relativiste}) \quad (7.17)$$

$$f(\varepsilon) = \frac{(2s + 1)V}{2\pi^2\hbar^3 c^3} (\varepsilon^2 - m^2 c^4)^{1/2} \varepsilon \quad (\text{cas relativiste}) \quad (7.18)$$

Exercice 67 : Établir les expressions (7.15) à (7.18).

7.2.4 Impulsion et température de Fermi d'un gaz de fermions

On peut alors utiliser cette densité d'états, combinée à la statistique de Fermi-Dirac, pour calculer les propriétés d'un gaz de N fermions dans un volume V , à une température T . Le nombre de particules est bien évidemment égal à la somme des nombres de particules dans chaque état individuel $|\lambda\rangle$

$$N = \sum_{|\lambda\rangle} N_{\lambda} \quad (7.19)$$

Pour un système suffisamment grand, **les fluctuations sont négligeables**⁷ et on peut assimiler les grandeurs à leurs moyennes, de sorte qu'il est légitime d'écrire

$$N = \sum_{|\lambda\rangle} \overline{N_{\lambda}} = \sum_{|\lambda\rangle} \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_{\lambda} - \mu)} + 1} \quad (7.20)$$

Le **quasi-continuum** de niveaux d'énergie autorise comme on l'a vu à introduire une densité d'états $f(\varepsilon)$ et à transformer la somme discrète sur les niveaux en une intégrale sur l'énergie

$$N = \int_{\varepsilon_0}^{\infty} \frac{f(\varepsilon) d\varepsilon}{e^{\beta(\varepsilon - \mu)} + 1}. \quad (7.21)$$

N et T (donc β) sont fixées et la densité d'états d'une particule est connue. Cette équation porte donc en réalité sur le potentiel chimique μ , qui est donc une **fonction implicite de T et N** . En passant à la limite $T \rightarrow 0$, soit $\beta \rightarrow +\infty$, on a

$$\mu(T, N) \rightarrow \mu_0(N) \quad \text{et} \quad \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon - \mu)} + 1} \rightarrow \theta(\mu_0 - \varepsilon) \quad (7.22)$$

avec θ la fonction de Heaviside. On a donc simplement

$$N = \int_{\varepsilon_0}^{\mu_0} f(\varepsilon) d\varepsilon = W(\mu_0) - W(\varepsilon_0). \quad (7.23)$$

7. Pour être précis, on utilise l'équivalence des descriptions dans la **limite thermodynamique** et on travaille en fait en **grand-canonique**, où le potentiel chimique est fixé et le nombre de particules peut varier (Cf. Diu et al. "Physique Statistique", chapitre VI).

On pourra alors reprendre les expressions de W trouvées dans les cas non-relativiste et relativiste, mais définissons auparavant **l'impulsion et la température de Fermi**. À température nulle, chaque état individuel est occupé par un et un seul fermion, depuis le fondamental (ε_0) jusqu'au niveau de plus haute énergie ($\varepsilon_F = \mu_0$), qu'on appelle **niveau de Fermi**. Suivant le nombre N de particules en jeu, l'écart en énergie $\Delta = \mu_0(N) - \varepsilon_0$ est plus ou moins important. L'**impulsion de Fermi** est celle des particules qui se trouvent au niveau de Fermi, et son expression dépend de la relation entre l'énergie et le nombre d'onde. Quant à la **température de Fermi**, elle est définie par la relation $k_B T_F = \Delta$ et on peut montrer⁸ que l'on peut faire une **approximation de température nulle** dès lors que $T \ll T_F$. Inversement, lorsque $T \gg T_F$, le gaz est **non dégénéré** et peut être décrit par un modèle de **gaz parfait classique**. L'expression de p_F est la même dans les cas **non-relativiste** et **relativiste**⁹, à savoir

$$p_F = \hbar \left[\frac{6\pi^2}{2s+1} \frac{N}{V} \right]^{1/3} \quad (7.24)$$

Exercice 68 : Établir l'expression (7.24) de l'impulsion de Fermi.

Les expressions de T_F sont en revanche distinctes¹⁰, avec

$$T_F = \frac{\hbar^2}{2mk_B} \left[\frac{6\pi^2}{2s+1} \frac{N}{V} \right]^{2/3} \quad (\text{cas non-relativiste}) \quad (7.26)$$

$$T_F = \frac{mc^2}{k_B} \left[\sqrt{1 + \frac{\hbar^2}{m^2 c^2} \left(\frac{6\pi^2}{2s+1} \frac{N}{V} \right)^{2/3}} - 1 \right] \quad (\text{cas relativiste}) \quad (7.27)$$

Exercice 69 : Établir les expressions (7.26) et (7.27) de la température de Fermi.

Quel est l'état des particules constituant la naine blanche ? Pour le savoir, on calcule l'impulsion de Fermi, sachant qu'**une particule de masse m est relativiste si son impulsion est $p \gtrsim mc$** .

— Pour les **électrons**, on a

$$p_F = \hbar \left(\frac{6\pi^2}{2s+1} \frac{N_e}{V} \right)^{1/3} = \hbar (3\pi^2 n_e)^{1/3} \sim 3.5 \cdot 10^{-22} \text{ kg.m.s}^{-1} \quad (7.28)$$

Comme $m_e c \approx 2.7 \cdot 10^{-22} \text{ kg.m.s}^{-1}$, les électrons au niveau de Fermi sont donc relativistes. La température de Fermi est alors $T_F \approx 3.8 \cdot 10^9 \text{ K}$, bien supérieure à la température $T_c \sim 10^7 \text{ K}$ de la naine blanche, et l'approximation de température nulle est justifiée.

— Pour les **noyaux** qui sont des **fermions**, on n'a pas le spin s , mais on peut néanmoins donner un ordre de grandeur de l'impulsion de Fermi

$$p_F = \hbar \left(\frac{6\pi^2}{2s+1} n_n \right)^{1/3} \sim \hbar n_n^{1/3} \sim 6 \cdot 10^{-23} \text{ kg.m.s}^{-1} \quad (7.29)$$

8. Cf. Diu et al. "Physique Statistique" chapitre VI.

9. On n'oubliera pas que le fondamental est $\varepsilon_0 = 0$ dans le cas classique, et $\varepsilon_0 = mc^2$ dans le cas relativiste.

10. On peut vérifier que l'on retrouve la limite non-relativiste à partir de l'expression relativiste lorsque $c \rightarrow \infty$

$$T_F \simeq \frac{mc^2}{k_B} \times \frac{\hbar^2}{2m^2 c^2} \left(\frac{6\pi^2}{2s+1} \frac{N}{V} \right)^{2/3} = \frac{\hbar^2}{2mk_B} \left(\frac{6\pi^2}{2s+1} \frac{N}{V} \right)^{2/3} \quad (7.25)$$

mais $Am_{pc} \approx 6 \cdot 10^{-18} \text{ kg.m.s}^{-1} \gg p_F$ de sorte que les noyaux ne sont pas relativistes. Leur température de Fermi est donc $T_F \sim 6 \cdot 10^3 \text{ K} \ll T$ et ils peuvent être décrits par un modèle de **gaz parfait classique et non-relativiste**. On peut montrer que la même conclusion s'applique au gaz de noyaux qui seraient des **bosons**.

7.2.5 Pression de dégénérescence des électrons

Le calcul de la pression électronique est identique à celui de la pression cinétique d'un gaz parfait. Imaginons un gaz d'électrons dégénérés enfermés dans une enceinte de volume V . L'impulsion fournie pendant dt à une section dS de la paroi par les électrons d'énergie ε à $d\varepsilon$ près et de direction (θ, ϕ) à $d\Omega$ près est (Fig. 7.3)

$$\delta p = n_e(\varepsilon) \times v(\varepsilon) \cos \theta dt dS \times 2p(\varepsilon) \cos \theta \times \frac{d\Omega}{4\pi} \quad (7.30)$$

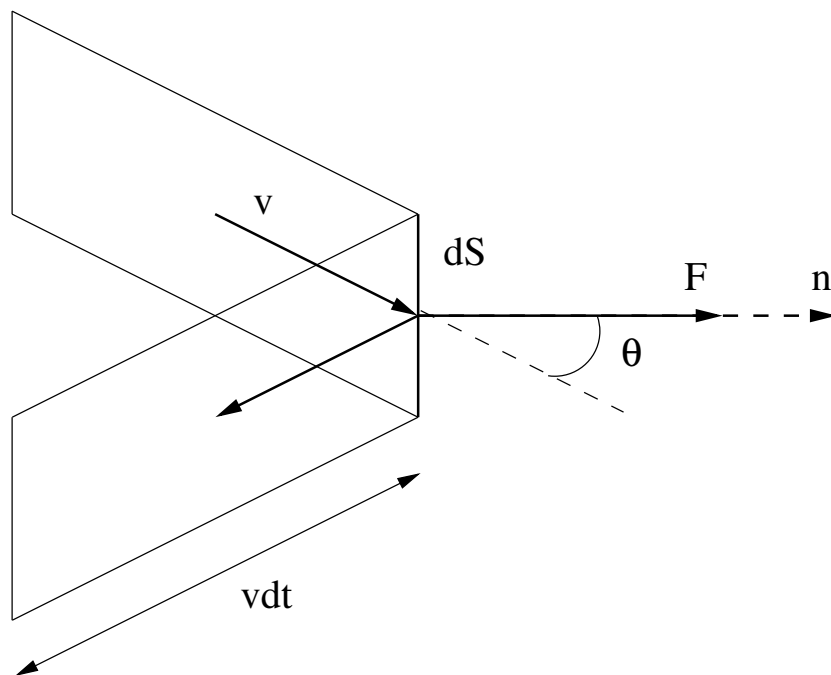


FIGURE 7.3 – Calcul de la pression de dégénérescence des électrons.

Dans cette expression, on détaille les différents facteurs :

- $n_e(\varepsilon) = (1/V) f(\varepsilon) N_{\text{FD}}(\varepsilon) d\varepsilon$ est le nombre d'électrons d'énergie ε à $d\varepsilon$ près par unité de volume
- $v(\varepsilon) \cos \theta dt dS$ est le volume du cylindre dans lequel se trouvaient les électrons d'énergie et de direction adéquates pendant l'intervalle de temps dt antérieur
- $2p(\varepsilon) \cos \theta$ est l'impulsion fournie à la paroi par chacun de ces électrons
- $d\Omega/(4\pi)$ est la fraction d'angle solide correspondant aux seuls électrons ayant une impulsion de direction (θ, ϕ)

En intégrant sur la direction¹¹ et sur l'énergie, on obtient la **pression de dégénérescence des électrons**

$$P_e = \frac{1}{3V} \int_{\varepsilon_0}^{\infty} d\varepsilon f(\varepsilon) N_{\text{FD}}(\varepsilon) v(\varepsilon) p(\varepsilon) \quad (7.31)$$

11. Attention, θ est limité à $[0, \pi/2]$ pour que l'électron heurte la paroi.

Exercice 70 : Établir l'expression de l'intégrale de pression (7.31).

Pour aller plus loin, on se place à température nulle

$$P_e = \frac{1}{3V} \int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon_F} p(\varepsilon)v(\varepsilon)f(\varepsilon)d\varepsilon. \quad (7.32)$$

Un développement sans difficulté mais sans grand intérêt¹² mène alors à l'expression suivante

$$P_e = \frac{m_e^4 c^5}{3\pi^2 \hbar^3} F\left(\frac{p_F}{m_e c}\right) \quad (7.33)$$

Exercice 71 : Établir l'expression de la pression (7.33).

La fonction F apparaissant dans cette expression s'écrit

$$F(x) = \int_0^x \frac{u^4}{\sqrt{1+u^2}} du = \frac{1}{8} \left[x(2x^2 - 3)\sqrt{1+x^2} + 3 \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \right]. \quad (7.34)$$

et a pour comportements asymptotiques, dans les limites $x \ll 1$ et $x \gg 1$

$$F(x) \sim \frac{x^5}{5} \quad (x \ll 1, \text{ cas non-relativiste}) \quad (7.35)$$

$$F(x) \sim \frac{x^4}{4} \quad (x \gg 1, \text{ cas ultra-relativiste}) \quad (7.36)$$

Comme p_F varie selon $n^{1/3}$, le régime non-relativiste correspond aux **basses densités**, le régime ultra-relativiste aux **densités élevées**. On peut regrouper ces comportements sous une forme $x^{3\alpha}/(3\alpha)$ qui permet de faire les calculs en commun pour les deux limites **non-relativiste** ($\alpha = 5/3$) et **ultra-relativiste** ($\alpha = 4/3$). En introduisant la **fraction électronique** $Y_e = Z/A$ telle que la densité électronique peut s'écrire comme

$$n_e = \frac{N_e}{V} = \frac{ZN_n}{V} = \frac{ZM}{Am_p V} = Y_e \frac{\rho}{m_p} \quad (7.37)$$

on montre que la pression de dégénérescence des électrons se met, dans ces deux régimes asymptotiques, sous la forme d'une **équation d'état polytropique**

$$P_e \approx K_\alpha \rho^\alpha \quad K_\alpha = \frac{1}{3\alpha} (3\pi^2 \hbar^3)^{\alpha-1} m_e^{4-3\alpha} c^{5-3\alpha} \left(\frac{Y_e}{m_p}\right)^\alpha \quad (7.38)$$

La pression de dégénérescence des électrons est représentée sur la Fig. 7.4, avec ses comportements asymptotiques à basse et haute densité.

Exercice 72 : Établir les formes polytropiques de la pression de dégénérescence des électrons.

12. Il faut faire un changement de variable en prenant comme variable d'intégration $u = p/(m_e c)$, où l'impulsion est $p = \gamma m_e v$ avec le **facteur de Lorentz** $\gamma = [1 - (v/c)^2]^{-1/2}$, et remplacer le facteur de spin par sa valeur $2s + 1 = 2$.

Numériquement, on a

$$P_e \approx 3.17 \cdot 10^{21} \left(\frac{Y_e}{0.5} \right)^{5/3} \left(\frac{\rho}{10^9 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}} \right)^{5/3} \text{ Pa} \quad (\text{cas basse densité, non-relativiste}) \quad (7.39)$$

$$P_e \approx 4.93 \cdot 10^{21} \left(\frac{Y_e}{0.5} \right)^{4/3} \left(\frac{\rho}{10^9 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}} \right)^{4/3} \text{ Pa} \quad (\text{cas haute densité, ultra-relativiste}) \quad (7.40)$$

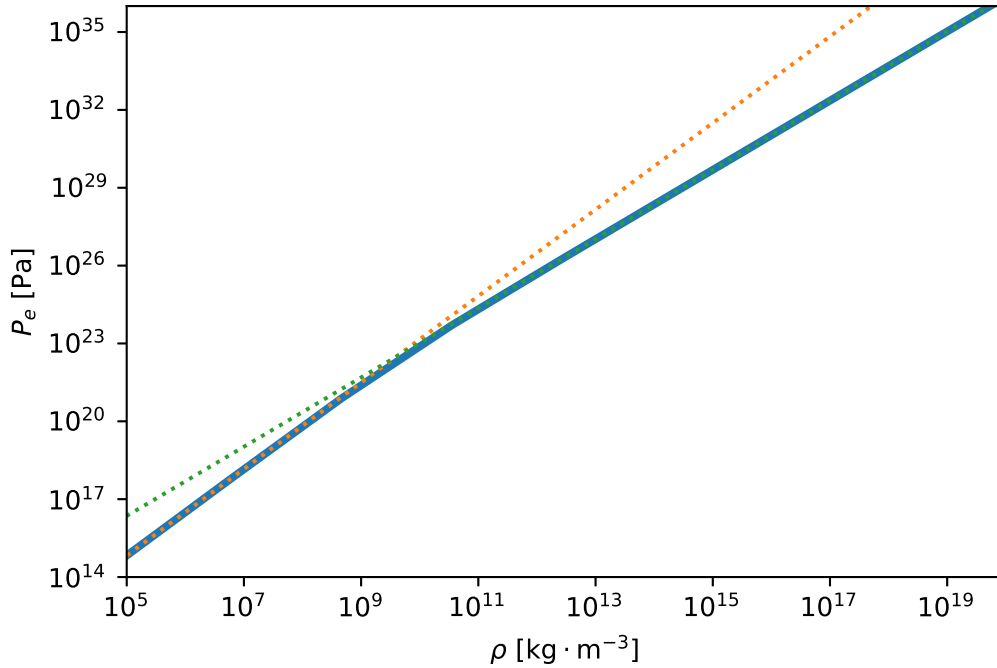


FIGURE 7.4 – **Pression de dégénérescence des électrons.** Le trait plein correspond à l'expression complète (7.33), et les traits pointillés aux comportements asymptotiques basse densité non-relativiste (orange) et haute densité ultra-relativiste (vert).

7.2.6 Les autres pressions disponibles

La pression de dégénérescence des électrons n'est pas la seule source de pression possible dans l'étoile, il faut aussi tenir compte des noyaux et de la radiation. La **pression des noyaux** se calcule comme pour un gaz parfait classique, soit

$$P_n = n_n k_B T \simeq 2 \cdot 10^{35} \times 1.38 \cdot 10^{-23} \times 10^7 \simeq 2.8 \cdot 10^{19} \text{ Pa}. \quad (7.41)$$

La dernière composante de la pression est la **pression de radiation**, donnée par

$$P_r = \frac{4\sigma}{3c} T^4 \simeq 1.33 \frac{5.67 \cdot 10^{-8}}{3 \cdot 10^8} \times 10^{28} \simeq 2.5 \cdot 10^{12} \text{ Pa}. \quad (7.42)$$

On constate donc que $P_e \gg P_n \gg P_r$, de sorte que la pression totale est entièrement dominée par la pression du gaz dégénéré d'électrons, et que l'équation d'état, polytropique, ne dépend pas de T ,

$$P \simeq P_e = K_\alpha \rho^\alpha \quad (7.43)$$

Cette équation d'état est une excellente approximation pour décrire la **structure** de l'étoile, comme on le verra juste après, même si des modèles plus réalistes existent, tenant compte notamment de la **température non-nulle** et des **interactions entre particules**¹³.

7.3 Structure des naines blanches

7.3.1 Équations de structure

Dans la limite de température nulle qu'on considère ici, et qui est une bonne approximation, la pression ne dépend que de la masse volumique, $P = f(\rho)$, ce qui correspond à un comportement **barotropique**¹⁴. Les équations de conservation de la masse et d'équilibre hydrostatique écrites pour les étoiles de la séquence principale restent valables

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r) \quad \frac{dP}{dr} = f'[\rho(r)] \frac{d\rho}{dr} = -G \frac{m(r)\rho(r)}{r^2} \quad (7.44)$$

mais on a là un système fermé de deux équations à deux inconnues $m(r)$ et $\rho(r)$. On peut alors éliminer la première et obtenir une seule équation de structure

$$\frac{1}{r^2 \rho} \frac{d}{dr} \left[\frac{r^2 f'(\rho)}{\rho} \frac{d\rho}{dr} \right] = -4\pi G \quad (7.45)$$

Cette équation doit être résolue en se donnant **deux conditions aux limites**, qui sont naturellement la valeur de la densité au centre $\rho(0) = \rho_c$ et la nullité du gradient de densité au centre¹⁵. Cette résolution doit cependant se faire de manière numérique le plus souvent. Le rayon R est alors celui pour lequel $\rho(R) = 0$ et la masse M est obtenue par intégration de l'équation de conservation de la masse entre $r = 0$ et $r = R$. Ces deux quantités, R et M , sont alors fonction de la densité au centre¹⁶.

Exercice 73 : Établir l'équation (7.45).

7.3.2 Les modèles polytropiques : équation de Lane-Emden

Les cas limite non-relativiste et ultra-relativiste invitent à considérer le cas particulier des **polytropes**, pour lesquels $P = f(\rho) = K_\alpha \rho^\alpha$. L'équation (7.45) devient alors l'**équation de Lane-Emden**

$$\frac{1}{u^2} \frac{d}{du} \left(u^2 \frac{d\psi_\alpha}{du} \right) = -\psi_\alpha^n \quad \text{avec} \quad n = \frac{1}{\alpha - 1} \quad (7.46)$$

en ayant introduit une variable radiale adimensionnée

$$u = \frac{r}{r_\alpha} \quad r_\alpha = \sqrt{\frac{\alpha K_\alpha \rho_c^{\alpha-2}}{4\pi G(\alpha - 1)}} \quad (7.47)$$

13. Interaction Coulombienne électrons-ions qui réduit la pression, bien entendu, mais aussi les **réactions** β du type ${}^A_Z X + e^- \rightarrow {}^A_{Z-1} Y + \nu_e$, qui ne sont plus efficacement équilibrées du fait de la difficulté à produire un électrons quand tous les niveaux sont occupés. Notons que ce phénomène de **neutronisation** est celui à l'œuvre dans la formation des étoiles à neutrons lors de l'effondrement d'une étoile massive.

14. Les polytropes sont un cas particulier des fluides barotropes.

15. Cette condition est fondée sur l'hypothèse de symétrie sphérique. Il ne peut pas exister un gradient non nul au centre, qui imposerait une direction privilégiée brisant la symétrie sphérique.

16. ... et de $f(\rho)$, c'est-à-dire de l'équation d'état, bien entendu.

et une fonction elle aussi adimensionnée de la masse volumique

$$\psi_\alpha = \left(\frac{\rho}{\rho_c}\right)^{\alpha-1} \quad (7.48)$$

Les conditions aux limites devenant $\psi_\alpha(0) = 1$ et $\psi'_\alpha(0) = 0$.

Exercice 74 : Établir l'équation de Lane-Emden (7.46)

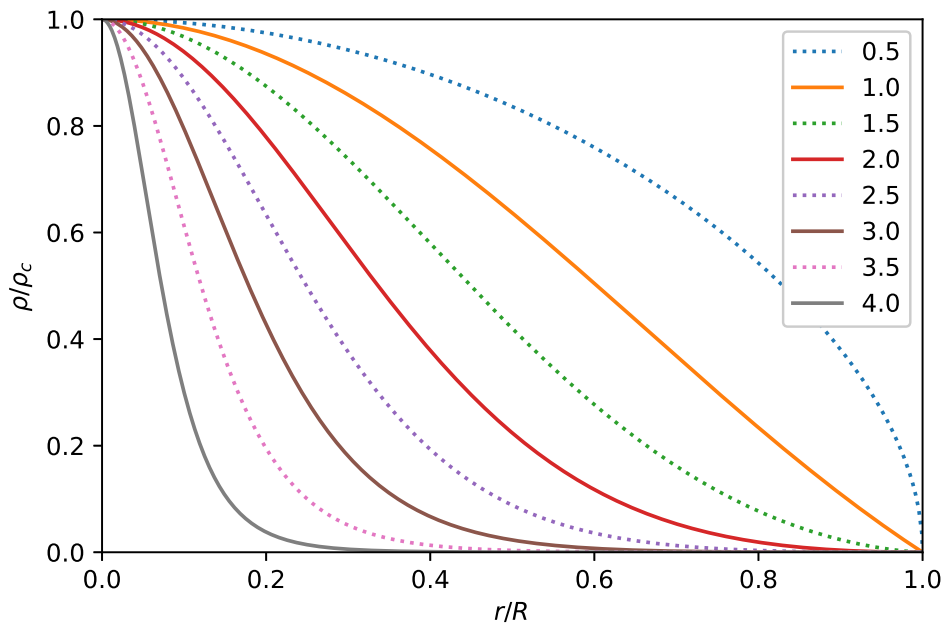


FIGURE 7.5 – **Solutions de l'équation de Lane-Emden.** Les solutions sont représentées sous la forme de la densité normalisée ρ/ρ_c en fonction du rayon normalisé r/R . Les différentes courbes correspondent à différentes valeurs de $n = 1/(\alpha - 1)$.

Les solutions de cette équation sont obtenues numériquement (Fig. 7.5) en fonction du paramètre α , et tabulées. Pour $\alpha > 1.2$ (soit $n < 5$), la fonction $\psi_\alpha(u)$ admet un premier zéro noté x_α , ce qui permet de calculer le **rayon R_α de l'étoile**

$$R_\alpha = r_\alpha x_\alpha = x_\alpha \left[\frac{\alpha K_\alpha \rho_c^{\alpha-2}}{4\pi G(\alpha-1)} \right]^{1/2} \quad (7.49)$$

et, de là, on peut également calculer la **masse de l'étoile**

$$M_\alpha = \int_0^{R_\alpha} \rho(r) 4\pi r^2 dr = -4\pi r_\alpha^3 \rho_c x_\alpha^2 \psi'_\alpha(x_\alpha) \quad (7.50)$$

En éliminant ρ_c et r_α dans cette expression de la masse, à l'aide de leur relation avec R_α , on peut en déduire la **relation masse-rayon** des polytropes

$$M_\alpha = -\psi'_\alpha(x_\alpha) \left[\frac{G(\alpha-1)}{\alpha K_\alpha} (4\pi)^{\alpha-1} x_\alpha^{-\alpha} \right]^{\frac{1}{\alpha-2}} R_\alpha^{(3\alpha-4)/(\alpha-2)} \quad (7.51)$$

Exercice 75 : Établir la relation masse-rayon pour les polytropes (7.51).

7.3.3 La masse de Chandrasekhar

La relation masse-rayon obtenue ci-dessus peut être écrite pour les naines blanches en se plaçant dans un cas limite **non-relativiste** ou **ultra-relativiste**. Le premier cas correspond à $\alpha = 5/3$ et donne

$$M \propto R^{-3} \quad (7.52)$$

Contrairement aux étoiles de la séquence principale, **les naines blanches sont d'autant plus petites qu'elles sont plus massives**. Le cas **ultra-relativiste** correspond à $\alpha = 4/3$ et fait disparaître la dépendance de la masse en fonction du rayon. Une seule masse semble possible dans cette limite, c'est la **masse de Chandrasekhar**

$$M_c = -\frac{\sqrt{3\pi}}{2} \left(\frac{\hbar c}{G}\right)^{3/2} \left(\frac{Y_e}{m_p}\right)^2 x_{4/3}^2 \psi'_{4/3}(x_{4/3}) \approx 1.457 M_\odot \quad (7.53)$$

Exercice 76 : Établir l'expression de la masse de Chandrasekhar (7.53).

Pour obtenir cette valeur numérique, on a pris $Y_e = 0.5$ et on trouve dans les tables de solutions de l'équation de Lane-Emden que $x_{4/3} = 6.897$ et $\psi'_{4/3}(x_{4/3}) = -0.0424279$. En traçant la relation masse-rayon complète à partir de l'expression (7.33)-(7.34) de la pression des électrons, représentée sur la Fig. 7.6, on voit que la masse de Chandrasekhar représente la **masse maximale** possible pour une naine blanche. En effet, lorsque la masse augmente, la densité centrale augmente et les électrons deviennent de plus en plus relativistes, l'indice polytropique passant continûment de $\alpha = 5/3$ à $\alpha = 4/3$.

Des arguments simples permettent de comprendre l'origine de cette masse maximale. On peut par exemple considérer l'**équilibre entre pression et gravité**, en écrivant qu'en ordre de grandeur

$$F_p \propto \frac{dP}{dr} \propto \frac{P}{R} \propto \frac{K_\alpha \rho^\alpha}{R} \propto \frac{K_\alpha M^\alpha}{R^{3\alpha+1}} \quad F_g \propto \frac{GM\rho}{R^2} \propto \frac{GM^2}{R^5} \quad (7.54)$$

où F_p et F_g représentent l'ordre de grandeur des forces de pression et d'auto-gravité, respectivement. Pour une naine blanche de faible densité, où les électrons sont non-relativistes, $\alpha = 5/3$ et on a

$$F_p \propto \frac{K_{5/3} M^{5/3}}{R^6} \quad F_g \propto \frac{GM^2}{R^5} \quad (7.55)$$

À masse donnée, si l'étoile se contracte (R diminue), les forces de pression augmentent plus vite que la gravité et viennent rétablir l'équilibre. De même, si l'étoile se dilate, la gravité reprend le dessus pour revenir à l'équilibre. **L'équilibre hydrostatique de la naine blanche est donc stable**. Lorsque la naine blanche est de grande masse, sa densité augmente et l'indice polytropique tend vers $\alpha = 4/3$. On a alors

$$F_p \propto \frac{K_{4/3} M^{4/3}}{R^5} \quad F_g \propto \frac{GM^2}{R^5} \quad (7.56)$$

La dépendance en R est identique pour ces deux forces de sens opposés, de sorte que la force totale dépend fondamentalement du rapport des deux. Son expression, projetée sur une direction radiale dirigée vers l'extérieur, est

$$F_t \propto \frac{K_{4/3} M^{4/3}}{R^5} - \beta \frac{GM^2}{R^5} = \frac{K_{4/3} M^{4/3}}{R^5} \left[1 - \left(\frac{M}{M_0}\right)^{2/3} \right] \quad (7.57)$$

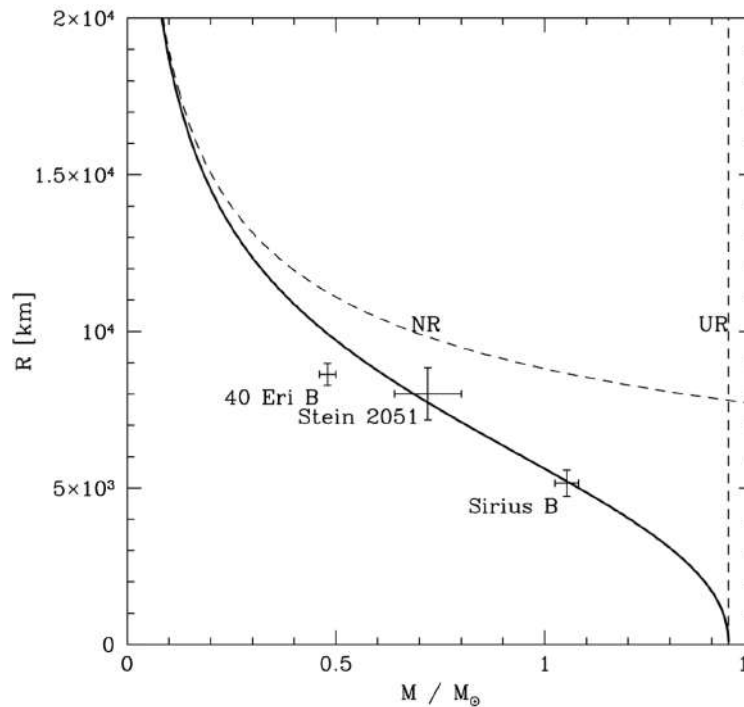


FIGURE 7.6 – **Relation masse-rayon des naines blanches.** La courbe en trait plein correspond à la relation barotrope (7.33)-(7.34), les tirets correspondent aux comportements polytropiques $\alpha = 5/3$ (non-relativiste) et $\alpha = 4/3$ (ultra-relativiste). Les croix correspondent aux mesures observationnelles sur des naines blanches particulières. [Crédit : F. Daigne].

où β est un facteur numérique de normalisation et où apparaît une **masse critique**

$$M_0 = \left(\frac{K_{4/3}}{\beta G} \right)^{3/2} \quad (7.58)$$

Si la naine blanche a une masse $M < M_0$, la force pressante l'emporte, l'étoile se dilate, sa masse volumique diminue, les électrons deviennent moins relativistes, et on retrouve la solution précédente. En revanche si $M > M_0$, la force de gravité l'emporte et l'étoile s'effondre, sans possibilité d'équilibre. La masse M_0 s'identifie à la masse de Chandrasekhar, qui est donc la **masse maximum d'un astre sphérique auto-gravitant supporté par la pression du gaz dégénéré d'électrons**.

7.4 Observations des naines blanches

7.4.1 Rayonnement thermique et classification spectrale

Bien que peu lumineuses du fait de leur petite taille, les naines blanches sont assez chaudes pour émettre un rayonnement détectable. Leur spectre se forme de façon semblable à celui des étoiles de la séquence principale, avec des **raies d'absorption "atmosphériques" potentiellement superposées au continuum de corps noir**. Les conditions sont cependant plus extrêmes, notamment en ce qui concerne la **gravité de surface**, bien plus élevée.¹⁷ La **classification spectrale** des naines blanches fait ressortir différents types ("DA", "DC", "DB", "DO", "DZ", "DQ", "DX")¹⁸, dont le plus répandu

17. De plus, le champ magnétique intense peut provoquer un **effet Zeeman** de levée de dégénérescence entre raies.

18. "D" signifie *dwarf*.

(environ 80% des naines blanches) est le type "DA", caractérisé par la présence de **raies de Balmer**¹⁹. À partir de l'analyse de la forme des raies, telles celles montrées sur la Fig. 7.7, on peut contraindre simultanément la **gravité de surface** g et la **température effective** T_{eff} .

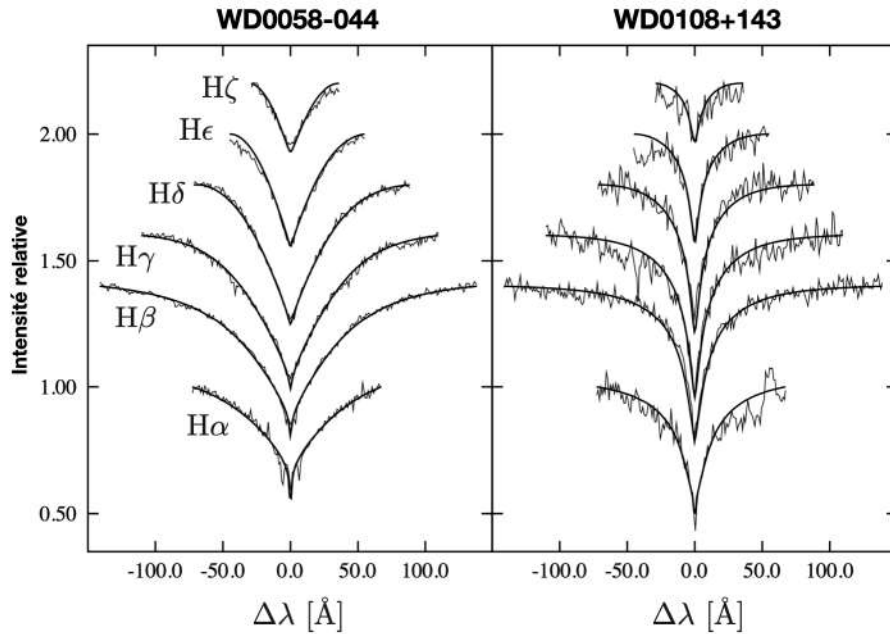


FIGURE 7.7 – **Raies de Balmer de naines blanches.** Chaque figure correspond à une naine blanche, et représente les raies de Balmer Hα à Hζ (décalées en ordonnées pour une meilleure visibilité) observées dans le spectre de ces étoiles, avec des ajustements (traits épais) permettant de contraindre simultanément la gravité de surface et la température effective. Figure adaptée de [34].

7.4.2 Relation masse-rayon observationnelle

Il est possible dans certains cas d'utiliser l'**effet Einstein** de décalage gravitationnel des raies pour remonter au rapport M/R de la naine blanche, car

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} \approx \Xi = \frac{G M}{c^2 R} \quad (7.59)$$

À partir de là, il est possible de déterminer indépendamment la masse et le rayon si on connaît par exemple la distance D_* de l'étoile par parallaxe. On en tire en effet la luminosité intrinsèque L , et connaissant la température effective T_{eff} à partir des contraintes sur les raies, on obtient le rayon R et donc la masse M . À défaut de décalage gravitationnel, on peut obtenir la masse dans le cas d'un système binaire à partir des **lois de Kepler**, ou via l'**astérosismologie**, deux méthodes également utilisées pour les étoiles de la séquence principale et les géantes. Une fois ces données obtenues, on peut les comparer aux modèles théoriques, mais la précision des données est souvent insuffisante pour contraindre finement l'équation d'état²⁰.

19. Raies électroniques de l'hydrogène correspondant aux transitions $n = 2 \rightarrow 3$ (Hα), $n = 2 \rightarrow 4$ (Hβ), etc.

20. On peut cependant obtenir des statistiques sur la distribution des masses, avec une moyenne aux alentours de $0.6 M_{\odot}$ et une dispersion assez faible $\pm 0.2 M_{\odot}$.

7.4.3 Le refroidissement des naines blanches

L'étoile émet un rayonnement, elle perd donc de l'énergie et se refroidit. Cependant, la pression soutenant l'étoile (P_e) ne dépend pas de la température, qui est déjà inférieure à la température de Fermi. **Le refroidissement n'a donc pas d'effet sur l'équilibre de l'étoile.** La naine blanche va simplement devenir **de moins en moins lumineuse** (puisque $L \propto T^4$). Le calcul du refroidissement est assez complexe car il doit tenir compte de nombreux effets subtils, ainsi que de l'existence d'une fine couche non dégénérée à la surface de l'étoile. Le refroidissement est **relativement rapide sur les deux premiers milliards d'années, mais beaucoup plus lent ensuite, avec un temps caractéristique supérieur à la dizaine de milliards d'années.** On peut tirer de ces modèles une **datation de la Galaxie** : comme on n'observe pas de naines blanches de luminosité inférieure à $L_{\min} \approx 5.6 \cdot 10^{-5} L_{\odot}$, c'est que la Galaxie n'a pas laissé le temps à ces étoiles de se refroidir plus. Les modèles de refroidissement indiquent alors un âge de l'ordre de $t_{\text{Gal}} \approx 9.3 \cdot 10^9$ an (Fig. 7.8). Théoriquement, au bout d'un temps très long, les naines blanches doivent finir en **naines noires**.

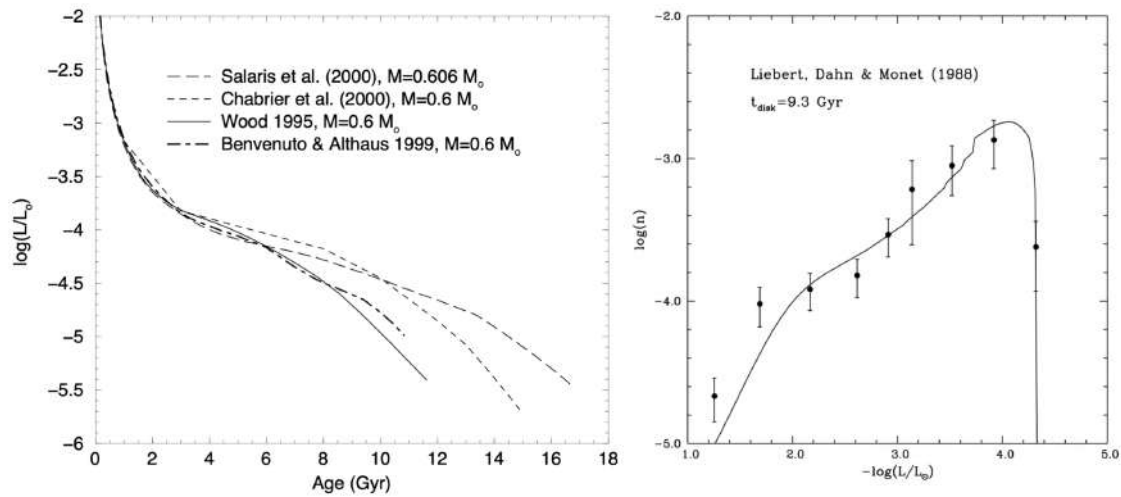


FIGURE 7.8 – **Refroidissement des naines blanches.** La figure de gauche montre la luminosité d'une naine blanche en fonction du temps, pour différents modèles de refroidissement (Figure issue de [35]). La figure de droite montre la fonction de luminosité des naines blanches, avec une coupure à basse luminosité correspondant à l'âge du disque de la Galaxie (Figure issue de [36]).

Les étoiles à neutrons

8.1 Introduction

8.1.1 Ordres de grandeur

Les étoiles à neutrons sont le stade final des étoiles dont la masse initiale est comprise entre $\sim 9M_{\odot}$ et une masse maximale encore mal déterminée ($\sim 30 \text{ } \mathit{M}_{\odot}$?). L'existence théorique de ces étoiles s'est fondée sur l'existence d'une masse maximale des naines blanches, interrogeant nécessairement quant au destin des étoiles de grande masse¹. Les étoiles à neutrons ont une compacité $\Xi \sim 0.2$, bien plus grande que celles des naines blanches, car elles sont beaucoup plus petites $R \sim 10 \text{ km}$ pour une masse comparable $M \sim 1.4M_{\odot}$, la densité correspondante dépassant la **densité nucléaire** $\rho > \rho_{\text{nuc}} = 2.6 \cdot 10^{17} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. La force qui s'oppose à la gravité propre de l'astre est alors l'**interaction forte entre les nucléons**, répulsive en dessous du fermi, mais l'**équation d'état de la matière** à ces densités présente encore des incertitudes.

Exercice 77 : *Établir les ordres de grandeur de la compacité et de la masse volumique à partir de ceux de la masse et du rayon. Estimer la distance moyenne entre particules.*

8.1.2 Un bref historique

L'existence d'étoiles à neutrons est proposée par W. Baade et F. Zwicky en 1934, deux ans après la découverte du neutron par J. Chadwick, suite à leur observation que certaines **novæ** étaient d'origine extragalactique, et donc beaucoup plus brillantes que les novæ connues. Ils proposent que le réservoir d'énergie immense à l'origine de ces **supernovæ** est l'effondrement gravitationnel du cœur d'une étoile massive en une étoiles à neutrons². En 1939, le premier calcul de la structure d'une telle étoile est effectué dans le cadre de la relativité générale par J. R. Oppenheimer et G. M. Volkoff, en supposant que la pression est fournie par la dégénérescence des neutrons, à l'instar de celle des électrons dans une naine blanche. La très petite taille des étoiles à neutrons les rend très peu lumineuses,³ de sorte que la confirmation de leur existence ne peut reposer sur la détection de leur rayonnement thermique⁴, mais sur celle d'un phénomène de **pulsar**, découvert par J. B. Burnell et A. Hewish en 1967. L'observation de

1. Chandrasekhar lui-même, commentant son résultat, écrit en 1934 : "A star of large mass cannot pass into the white-dwarf stage and one is left speculating on other possibilities."

2. " ... with all reserve we advance the view that a supernova represents the transition of an ordinary star into a neutron star, consisting mainly of neutrons. Such a star may possess a very small radius and an extremely high density."

3. On rappelle que la luminosité est $L = 4\pi R^2 \sigma T_{\text{eff}}^4$, et la température effective des étoiles à neutrons est typiquement de 10^6 K , beaucoup trop faible pour compenser la petitesse du rayon R .

4. La première détection directe a eu lieu en 1996 seulement, dans le domaine des X, correspondant à la température de surface $\sim 10^6 \text{ K}$.

"pulses" radio à intervalles très réguliers⁵ et très courts⁶ ne semble être explicable que s'ils sont associés à la rotation très rapide d'un objet de densité nucléaire doté d'un fort champ magnétique,⁷ estimé à $\sim 10^{12} \text{ G} = 10^8 \text{ T}$. La même année, F. Pacini avait suggéré que l'énergie alimentant la nébuleuse du Crabe⁸ (Fig. 6.3) soit précisément une **étoile à neutrons en rotation rapide**, une idée que développe T. Gold l'année suivante en établissant un premier modèle selon lequel l'énergie rayonnée par le pulsar est tirée du freinage de la rotation de l'astre. Les années suivantes voient la détection de pulsars dans les autres domaines de longueur d'onde, en X notamment. La découverte d'un **pulsar binaire**, système de deux étoiles à neutrons dans lequel l'un des deux compagnons est détecté comme pulsar, permet en 1975 à R. A. Hulse et J. H. Taylor de mesurer la variation de la période orbitale⁹ et de montrer qu'elle est parfaitement expliquée dans le cadre de la relativité générale par l'émission d'**ondes gravitationnelles**. Les étoiles à neutrons sont impliquées également dans la détection directe de ces ondes, notamment lors de l'évènement GW170817 de coalescence entre deux étoiles à neutrons, qui a donné lieu à des contreparties électromagnétiques (Fig. 6.1).

8.2 Équation d'état

8.2.1 L'approche d'Oppenheimer et Volkoff

Le premier calcul de la structure d'une étoile à neutrons, dû à Oppenheimer et Volkoff, faisait l'hypothèse d'une étoile constituée d'un gaz parfait de neutrons à température nulle, l'équilibre étant assuré par la pression de dégénérescence de ces fermions. Hormis la nécessité de se placer en relativité générale du fait de la compacité élevée, le calcul est donc semblable à celui fait pour les naines blanches. Une amélioration possible consiste à tenir compte de la présence de protons et d'électrons (également traité comme des gaz parfaits dégénérés) en supposant l'équilibre de désintégration $n \rightleftharpoons p + e^-$. On peut alors écrire la conservation de la matière $n_e + n_p = n_n$, la neutralité électrique $n_e = n_p$, et l'égalité des potentiels chimiques traduisant l'équilibre $\mu_e + \mu_p = \mu_n$. Cette dernière équation peut s'écrire en fonction des densités n_e , n_p et n_n des électrons, protons et neutrons en utilisant le fait qu'à $T = 0$ les potentiels chimiques sont précisément les niveaux de Fermi, soit

$$\mu_x = m_x c^2 \sqrt{1 + \left(\frac{p_{F,x}}{m_x c} \right)^2} = m_x c^2 \sqrt{1 + \frac{\hbar^2}{m_x^2 c^2} (3\pi^2 n_x)^{2/3}} \quad (8.1)$$

où x représente soit les électrons, soit les protons, soit les neutrons. Avec trois équations pour trois inconnues, on peut écrire chaque densité en fonction de la densité totale n , et la pression peut être obtenue comme somme des pressions de dégénérescence de chacune des espèces, comme en (7.33). Cette approche donne cependant des étoiles à neutrons trop peu massives¹⁰ par rapport aux observations. Elle doit donc être abandonnée au profit d'équations d'état plus réalistes.

8.2.2 Interaction forte

Un calcul plus réaliste consiste à assimiler la matière à un fluide de neutrons libres interagissant par le biais de la force nucléaire forte¹¹, en abandonnant l'hypothèse d'un gaz parfait que les densités

5. La régularité du signal fit un temps penser à une origine artificielle, la source étant baptisée initialement "LGM-1" pour *Little Green Men*.

6. La période du pulsar détecté par Bell et Hewish est $P = 1.337301 \text{ s}$. D'autres pulsars, appelés **pulsars millisecondes** sont encore plus rapides, on pense qu'ils sont réaccélérés par l'accrétion de matière d'un compagnon. C'est autour d'un de ces pulsars millisecondes qu'a été détectée la première **planète extrasolaire** en 1992.

7. À comparer aux plus forts champs magnétiques que l'on peut créer en laboratoire : de l'ordre de 100 T pour un champ pulsé non-destructif (LANL, 2012) et 2800 T pour un champ obtenu de façon destructive (Russie, 1998).

8. Reste de la supernova historique observée par les astronomes chinois en 1054.

9. Elle décroît de $76.5 \mu\text{s}$ par an.

10. On trouve une masse maximale de l'ordre de $0.7 M_\odot$, exclue par les observations.

11. À plus basse densité, on considère un réseau cristallin de noyaux riches en neutrons en interaction avec un fluide de neutrons libres et d'électrons, les noyaux se désintégrant progressivement au fur et à mesure que la densité augmente.

où le **tenseur de Ricci** $R_{\mu\nu}$ et le **scalaire de courbure** $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ ne dépendent que de la **métrique** $g_{\mu\nu}$ de l'espace¹² et $T_{\mu\nu}$ est le **tenseur énergie-impulsion** caractérisant le contenu en masse-énergie du système. En statique et à symétrie sphérique, la solution de ces équations à l'extérieur d'un astre de masse M et de rayon R est due à K. Schwarzschild¹³

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{rc^2} \right) c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2GM}{rc^2}} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (8.5)$$

Les coordonnées (t, r, θ, ϕ) sont celles mesurées par un observateur à l'infini, qui mesurerait également, par exemple via la troisième loi de Kepler, la masse gravitationnelle M de l'astre central. À l'intérieur de celui-ci, la solution de Schwarzschild ne saurait être applicable, mais les équations d'Einstein en symétrie sphérique peuvent être mises sous une forme qui utilise les mêmes coordonnées¹⁴, appelée **système de Tolman-Oppenheimer-Volkoff (T.O.V.)**

$$\left\| \begin{aligned} \frac{dm}{dr} &= 4\pi r^2 \rho & \frac{d\Phi}{dr} &= G \left(\frac{m}{r^2} + \frac{4\pi Pr}{c^2} \right) \left(1 - \frac{2Gm}{rc^2} \right)^{-1} & \frac{dP}{dr} &= - \left(\rho + \frac{P}{c^2} \right) \frac{d\Phi}{dr} \end{aligned} \right. \quad (8.6)$$

où $m(r)$ est la généralisation relativiste de la masse intérieure au rayon r , $\rho(r)$ la masse volumique¹⁵, $\Phi(r)$ le potentiel gravitationnel et $P(r)$ la pression. On remarque que ce système admet la limite Newtonienne connue lorsque $c \rightarrow \infty$

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho \quad \frac{d\Phi}{dr} = \frac{Gm}{r^2} \quad \frac{dP}{dr} = -\rho \frac{d\Phi}{dr} \quad (8.7)$$

Les conditions aux limites requises pour résoudre le système sont la donnée de la densité centrale $\rho(0) = \rho_c$, la nullité de la masse interne au centre $m(0) = 0$ et le raccordement à la solution de Schwarzschild à la surface¹⁶

8.3.2 Solution relativiste - masse maximale

On suppose pour simplifier que l'étoile est homogène, $\rho(r) = \rho_0$. On peut alors intégrer directement la première équation du système T.O.V. $m(r) = 4\pi\rho_0 r^3/3$ et reporter cette expression dans les deux autres équations. On les combine alors en posant $P_0 = \rho_0 c^2$ et $\alpha = 4\pi G/c^4$, ce qui donne

$$\frac{dP}{dr} = -\alpha r (P_0 + P) \left(\frac{P_0}{3} + P \right) \left(1 - \frac{2}{3} \alpha P_0 r^2 \right)^{-1} \quad (8.8)$$

Exercice 79 : *Obtenir l'équation différentielle (8.8).*

Cette équation différentielle peut être résolue analytiquement en séparant les variables pression et rayon, ce qui donne le profil de pression dans l'étoile, après quelques manipulations sans grande difficulté,

$$P(r) = P_0 \frac{A(r) - A(R)}{3A(R) - A(r)} \quad A(r) = \sqrt{1 - \frac{2Gm(r)}{rc^2}} = \sqrt{1 - 2\Xi \left(\frac{r}{R} \right)^2} \quad (8.9)$$

Exercice 80 : *Obtenir la solution (8.9).*

12. Celle-ci est définie par l'écriture de l'intervalle $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ dans le système de coordonnées choisi, cet intervalle étant un invariant relativiste.

13. Il publie cette solution quelques mois seulement après la publication des équations du champ d'Einstein.

14. et dont les solutions peuvent donc être raccordées à celle de Schwarzschild à l'extérieur de l'astre.

15. Cette masse volumique totale comprend la contribution de l'énergie interne u , soit $\rho = m_n n_n + u/c^2$.

16. Le rayon R étant défini par $m(R) = M$, équivalent à $P(R) = 0$.

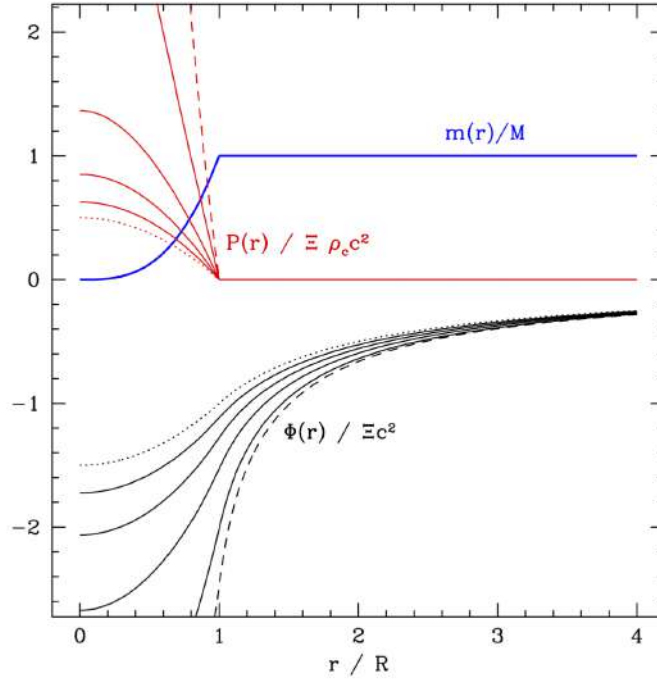


FIGURE 8.2 – **Profils de masse, de pression et de potentiel gravitationnel d'une étoile à neutrons.** Les différentes courbes correspondent à différentes compacités. La solution Newtonienne est en pointillés et la solution relativiste critique $\Xi = 4/9$ est en tirets. [Crédit : F. Daigne]

La pression est nulle en $r = R$, comme il se doit, mais un comportement remarquable se produit pour la pression centrale

$$P_c = P_0 \frac{1 - \sqrt{1 - 2\Xi}}{3\sqrt{1 - 2\Xi} - 1} \quad (8.10)$$

qui diverge ($P_c \rightarrow \infty$) lorsque la compacité atteint $\Xi \rightarrow 4/9$. On a donc un rapport masse-rayon maximal au delà duquel la pression centrale ne peut supporter l'auto-gravité de l'étoile

$$\frac{M}{R} < \frac{4c^2}{9G} \simeq \frac{4 \times (3 \cdot 10^8)^2}{9 \times (2/3) \cdot 10^{-10}} = 6 \cdot 10^{26} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \quad (8.11)$$

Avec $R = 10 \text{ km}$, on a donc une limite supérieure à la masse possible d'une étoile à neutrons $M < 6 \cdot 10^{30} \text{ kg} = 3 M_\odot$. Il y a effectivement une **masse maximale** possible pour une étoile à neutrons, qui est de cet ordre de grandeur. Les objets dont la *compacité* M/R dépasse cette limite sont amenés à s'effondrer entièrement pour devenir des **trous noirs**. Pour des équations d'état plus réalistes, c'est-à-dire par exemple polytropiques, la densité n'est plus uniforme, mais on peut toujours intégrer le système T.O.V. numériquement et observer l'existence d'une masse maximale, qui dépend¹⁷ de l'équation d'état, comme le montre la Fig. 8.3. L'observation d'étoiles à neutrons de grande masse permet ainsi de contraindre les équations d'états possibles pour la matière ultra-dense¹⁸.

17. On a des valeurs qui s'étalent de $1.6 M_\odot$ à $3.1 M_\odot$.

18. Par exemple, pour les équations d'états obtenues en supposant un gaz parfait de neutrons dégénérés ou un gaz parfait de protons, de neutrons et d'électrons, on trouve une masse maximale de l'ordre de $0.7 M_\odot$, exclue par les observations.

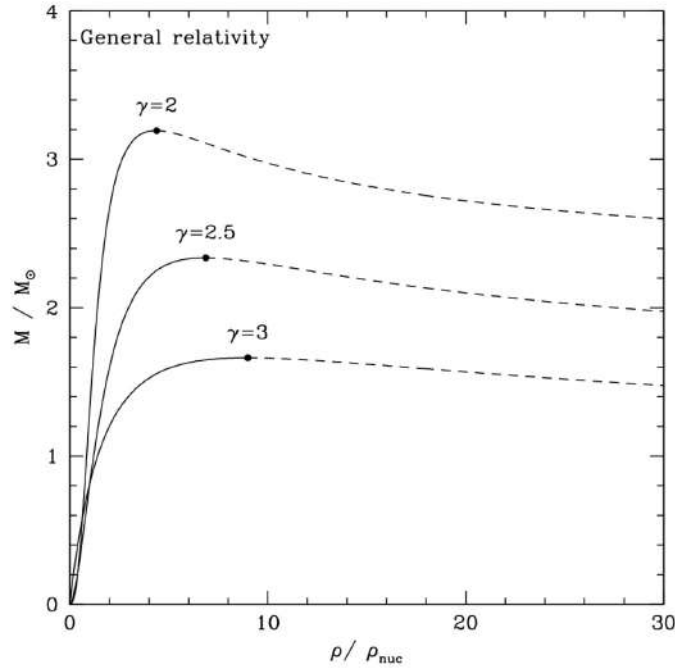


FIGURE 8.3 – **Masse maximale d'une étoile à neutrons.** Les différentes courbes correspondent à différents indices polytropiques, et représentent la masse de l'étoile en fonction de la densité centrale. [Crédit : F. Daigne]

8.4 Observation des étoiles à neutrons

8.4.1 Le phénomène de pulsar

Si les étoiles à neutrons sont bien souvent trop petites pour être détectées par leur rayonnement thermique, on en connaît pourtant environ 2000 actuellement, dans notre galaxie et les nuages de Magellan, du fait de la détection de leur émission de **pulsar**, qui se présente comme la répétition d'un sursaut très bref d'émission radio¹⁹, avec une période P extrêmement stable. Les pulses eux-mêmes présentent des variations de profil, mais le **profil moyen** calculé sur un grand nombre ($\gtrsim 100$) de pulses est lui aussi très stable et caractéristique de chaque pulsar. La distribution des périodes est **bimodale**²⁰, l'essentiel des pulsars présentant une période de ~ 30 ms à ~ 3 s et d'autres, les **pulsars millisecondes** présentant des périodes de ~ 1 ms à ~ 100 ms. La stabilité de l'émission permet souvent la mesure de la dérive de la période \dot{P} , le plus souvent positive²¹, les pulsars ralentissent.

L'association du phénomène de pulsar aux étoiles à neutron se fonde sur un argument mécanique simple, montrant qu'un astre en rotation de masse M et de rayon R ne saurait avoir une période de rotation arbitrairement petite, faute de quoi les forces centrifuges deviendraient plus importantes que la gravité et l'étoile perdrait alors de la matière. Considérant un élément de masse μ à la surface de l'astre au niveau de l'équateur, on doit avoir

$$\mu\Omega^2 R \leq \frac{G\mu M}{R^2} \quad (8.12)$$

19. On observe aussi des pulses dans les autres domaines de longueur d'onde venant de ces sources.

20. Cela signifie que la distribution de probabilité présente deux maxima.

21. Les valeurs vont typiquement de la picoseconde par an à la microseconde par an.

ce qui impose une limite inférieure à la période

$$P \geq 2\pi \sqrt{\frac{R^3}{GM}} \quad (8.13)$$

Inversement, si l'on observe un signal périodique de période P qu'on attribue à la rotation, on en déduit une limite inférieure à la densité moyenne de l'étoile

$$\bar{\rho} \geq \frac{3\pi}{GP^2} \quad (8.14)$$

Exercice 81 : *Obtenir la condition (8.14).*

Numériquement, pour le pulsar du Crabe ($P = 0,033\text{s}$), on trouve $\bar{\rho} \geq 1,5 \cdot 10^{14} \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$, ce qui est trop grand pour qu'on puisse penser à une naine blanche. L'hypothèse d'une étoile à neutrons en rotation est bien plus plausible²². D'autres hypothèses ont été envisagées (oscillations radiales de naines blanches ou d'étoiles à neutrons, phénomène orbital), mais elles ne résistent pas à un examen plus poussé²³.

8.4.2 Modélisation de l'émission d'un pulsar

L'explication du phénomène de pulsar nécessite un modèle d'émission pour une étoile à neutrons magnétisée en rotation, l'apparition de pulses étant interprétée comme un effet de **phare**, le rayonnement étant très collimaté, orienté le long des pôles magnétiques et balayant périodiquement la ligne de visée vers la Terre du fait d'un désalignement de l'axe magnétique par rapport à l'axe de rotation. On a alors la situation schématisée²⁴ sur la Fig. 8.4.

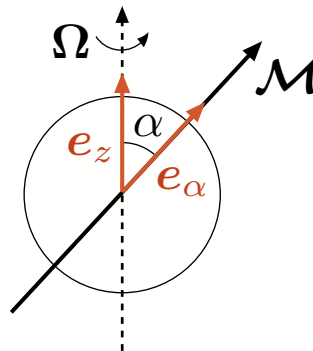


FIGURE 8.4 – **Modélisation d'un pulsar.** Le moment magnétique dipolaire \vec{M} fait un angle α avec le vecteur rotation $\vec{\Omega}$.

Dans ce modèle, le champ magnétique est de type **dipolaire** et la **puissance rayonnée** du fait de

22. Il faut voir que cette limite inférieure est très conservatrice car une étoile en rotation rapide est nettement aplatie aux pôles et élargie à l'équateur, de sorte que la force centrifuge y est plus élevée et la gravitation plus faible. Autrement dit, avec une densité moyenne donnée, l'étoile doit tourner plus lentement que prévu par ce calcul simpliste pour rester stable, et inversement, si elle tourne aussi vite, c'est qu'elle doit être plus dense.

23. Les oscillations radiales des naines blanches sont trop lentes, celles des étoiles à neutrons trop rapides, et un système binaire ayant des périodes si courtes coalescerait très vite.

24. La situation est certainement bien plus complexe : la rotation influence la structure de l'étoile, le champ magnétique modifie l'environnement du pulsar, etc.

la rotation du dipôle magnétique $\vec{\mathcal{M}}$ est analogue à la **formule de Larmor**²⁵

$$\mathcal{P}_{\text{rad}} = \frac{\mu_0}{6\pi c^3} \left| \frac{d^2 \vec{\mathcal{M}}_{\perp}}{dt^2} \right|^2 \quad (8.16)$$

où μ_0 est la perméabilité magnétique du vide, et $\vec{\mathcal{M}}_{\perp}$ est la composante de $\vec{\mathcal{M}}$ perpendiculaire à l'axe de rotation. Il est commode de faire apparaître le champ magnétique de surface au pôle magnétique \vec{B} , dont on peut calculer la valeur en fonction du moment magnétique en assimilant l'étoile à une sphère de rayon R uniformément magnétisée. On a alors

$$\vec{\mathcal{M}} = \frac{2\pi}{\mu_0} BR^3 \vec{e}_{\alpha}, \quad (8.17)$$

Partant de l'équation d'évolution du moment magnétique sous la forme vectorielle

$$\frac{d\vec{\mathcal{M}}}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \vec{\mathcal{M}} \quad (8.18)$$

on en tire la puissance rayonnée en fonction de B , R , α et de la période P de rotation,

$$\mathcal{P}_{\text{rad}} = \frac{(2\pi)^5}{3\mu_0 c^3} \frac{(BR^3 \sin \alpha)^2}{P^4} \quad (8.19)$$

Exercice 82 : Établir l'expression (8.19) de la puissance rayonnée.

8.4.3 Ralentissement du pulsar

Ce rayonnement puise son énergie dans le réservoir d'**énergie cinétique de rotation** du pulsar. En effet, la structure de l'étoile est extrêmement rigide, elle ne saurait se contracter et tirer cette puissance de l'énergie potentielle gravitationnelle. La régularité du phénomène exclut quant à elle une accréation de masse. Cette énergie cinétique de rotation est donnée par²⁶

$$E_r = \frac{1}{2} I \Omega^2 = \frac{1}{5} M R^2 \left(\frac{2\pi}{P} \right)^2 \quad (8.21)$$

La dérivée par rapport au temps de cette énergie doit être égale à l'opposé de la puissance rayonnée, ce qui permet d'écrire celle-ci en faisant apparaître la dérive²⁷ \dot{P} de la période

$$\mathcal{P}_{\text{rad}} = \frac{8\pi^2 M R^2 \dot{P}}{5 P^3} \quad (8.22)$$

Exercice 83 : Établir l'expression (8.22).

On peut estimer numériquement cette puissance, par exemple dans le cas du pulsar du Crabe ($P = 33$ ms, $\dot{P} = 10^{-12.4}$, $M = 1.5 M_{\odot}$, $R = 10$ km) et on trouve $\mathcal{P}_{\text{rad}} \approx 1.3 \cdot 10^5 L_{\odot}$. L'essentiel de cette puissance ne se retrouve pas dans les pulses radio (ou même sur l'ensemble du spectre

25. On rappelle que cette formule donne la puissance rayonnée par une particule chargée accélérée, selon

$$\mathcal{P}_{\text{rad}} = \frac{q^2 a^2}{6\pi \epsilon_0 c^3} \quad (8.15)$$

où q est la charge la particule et a son accélération.

26. On rappelle que le moment d'inertie d'une sphère homogène de masse M et de rayon R est

$$I = \frac{2}{5} M R^2 \quad (8.20)$$

27. La dérive positive traduit le fait que le rayonnement dipolaire extrait effectivement de l'énergie de rotation.

électromagnétique) observés en direction du pulsar, mais est transportée à plus grande distance, sous forme mécanique (on parle de **vent de pulsar**) et électromagnétique, pour ensuite alimenter le reste de supernova²⁸. La comparaison des expressions (8.19) et (8.22) de la puissance rayonnée permet de mettre en évidence la **loi de ralentissement** du pulsar

$$P\dot{P} = \frac{5(2\pi)^3 R^4}{6\mu_0 c^3 M} (B \sin \alpha)^2 \quad (8.23)$$

où le membre de droite peut être assimilé à une constante a si l'on suppose que la structure de l'étoile ne change pas. On peut alors intégrer directement la loi $P(t)$

$$P^2 - P_0^2 = 2a(t - t_0) \quad (8.24)$$

Si l'on suppose que la période initiale est $P_0 \ll P$, on a alors $P^2 = 2a(t - t_0)$ et l'âge du pulsar est simplement donné par

$$\tau_c = t - t_0 = \frac{P^2}{2a} = \frac{P}{2\dot{P}} \quad (8.25)$$

Numériquement, pour le pulsar du Crabe, on trouve $\tau_c \approx 1300$ ans, ce qui est le bon ordre de grandeur de l'âge réel puisque l'objet est associé à la supernova de 1054.

8.4.4 Champ magnétique du pulsar

À partir de P et \dot{P} , on a donc aussi une estimation (plus exactement une limite inférieure, du fait de l'indétermination sur l'angle α) du champ magnétique à la surface de l'étoile

$$B \geq \sqrt{\frac{6\mu_0 c^3 P \dot{P} M}{5(2\pi)^3 R^4}} = B_{\min} \quad (8.26)$$

Numériquement, on trouve, avec les valeurs données plus haut pour le pulsar du Crabe, $B_{\min} \approx 4 \cdot 10^8$ T.

Exercice 84 : Établir la limite inférieure (8.26) et vérifier l'estimation numérique

8.4.5 Le diagramme période-dérive

Les relations (8.22), (8.23) et (8.26) montrent qu'à masse et rayon donnés, la puissance rayonnée \mathcal{P}_{rad} , l'âge caractéristique τ_c et le champ magnétique minimal B_{\min} sont des fonctions de P et \dot{P}

$$\tau_c \propto \frac{P}{\dot{P}} \quad \mathcal{P}_{\text{rad}} \propto \frac{\dot{P}}{P^3} \quad B_{\min} \propto \sqrt{P\dot{P}} \quad (8.27)$$

de sorte qu'il est usuel de représenter les populations de pulsars dans un **diagramme période-dérive** ($\log P, \log \dot{P}$) tel que celui de la Fig. 8.5, où les lieux de même âge caractéristique sont des droites de pente 1, les lieux d'égale puissance radiative sont des droites de pente 3 et les lieux d'égal champ minimal sont des droites de pente -1. Ce diagramme permet de suivre l'évolution d'un pulsar, à la manière du diagramme de Hertzsprung-Russell pour les étoiles ordinaires.

8.4.6 Propagation de l'émission des pulsars

Dispersion des pulses

Les pulses radio émis par les pulsars sont de relativement **basse fréquence**, de sorte qu'ils sont sujets à un phénomène de **dispersion** lors de leur propagation dans le milieu interstellaire, qu'on assimile à un

²⁸. On observe ainsi le rayonnement synchrotron des électrons relativistes du vent de pulsar en interaction avec le champ magnétique du reste de supernova. La luminosité synchrotron de la nébuleuse du Crabe est de l'ordre de \mathcal{P}_{rad} .

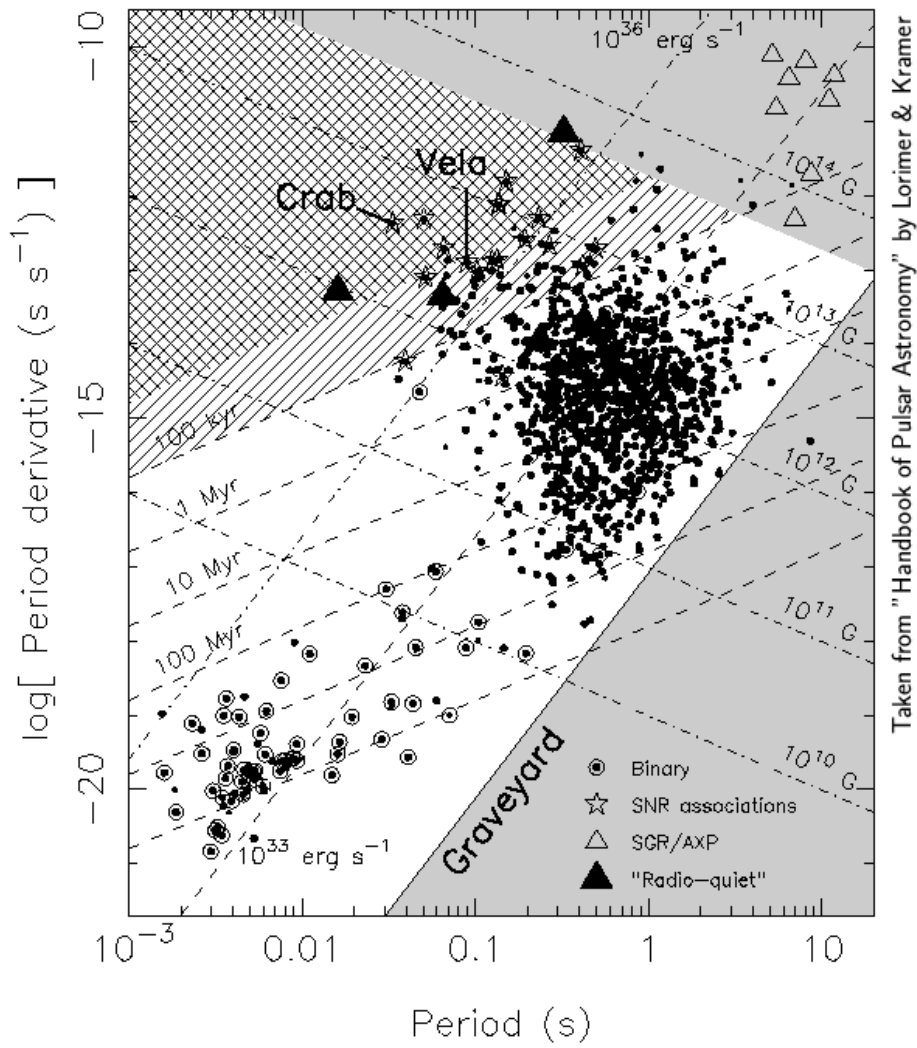


FIGURE 8.5 – Diagramme période-dérive des pulsars.

plasma fortement ionisé baigné dans un champ magnétique \vec{B} . Pour fixer les idées, on considère que le plasma est constitué de protons et d'électrons uniquement, et qu'il est globalement neutre électriquement ($n_p = n_e = n$), et on suppose que le milieu est homogène²⁹ (Fig. 8.6).

On considère d'abord que le plasma n'est pas magnétisé $\vec{B} = \vec{0}$ et la propagation dans ce milieu d'une **onde électromagnétique plane, progressive et monochromatique** de pulsation ω . On note $\vec{\mathcal{E}}$ et $\vec{\mathcal{B}}$ les champs électrique et magnétique associés à cette onde, de vecteur d'onde $\vec{k} = k\vec{e}_z$. Pour les représentations complexes de ces champs, on utilise la convention en $e^{-i\omega t}$, c'est-à-dire qu'on écrit

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) = \text{Re}[\underline{\vec{\mathcal{E}}}(\vec{r}, t)] = \text{Re}[\underline{\vec{\mathcal{E}}}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}] \quad \vec{\mathcal{B}}(\vec{r}, t) = \text{Re}[\underline{\vec{\mathcal{B}}}(\vec{r}, t)] = \text{Re}[\underline{\vec{\mathcal{B}}}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}] \quad (8.28)$$

où $\underline{\vec{\mathcal{E}}}_0$ et $\underline{\vec{\mathcal{B}}}_0$ sont des vecteurs complexes constants³⁰. En négligeant la composante magnétique de la

29. Pour des raisons de lisibilité, le milieu interstellaire n'est représenté que partiellement sur ce schéma, mais en réalité il emplit tout l'espace entre la source et l'observateur.

30. La notation $\text{Re}[X]$ désigne la partie réelle de X .

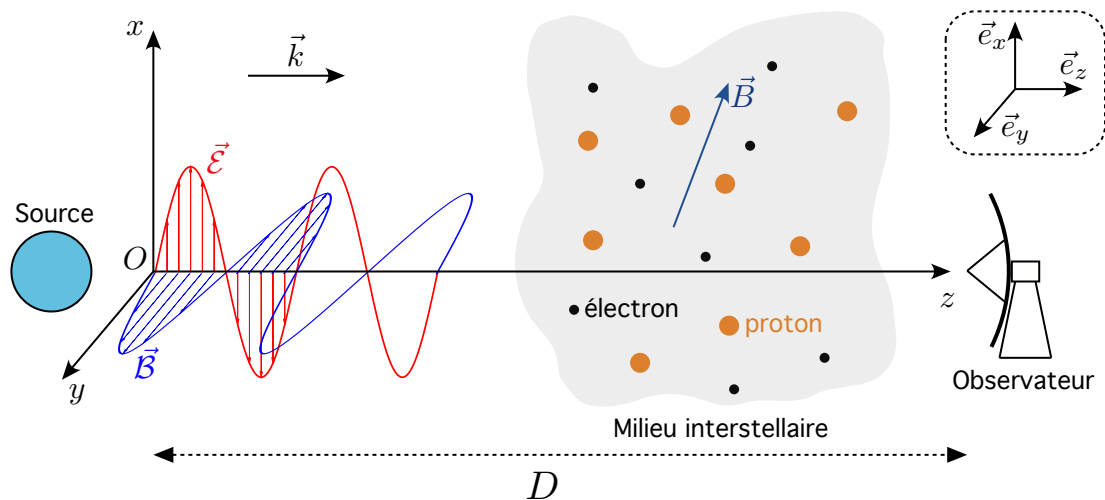


FIGURE 8.6 – Propagation d'une onde électromagnétique dans un plasma inter stellaire.

force de Lorentz, les **équations du mouvement** non relativiste d'un électron et d'un proton s'écrivent

$$m_e \frac{d\vec{v}_e}{dt} = -e\vec{\mathcal{E}} \quad m_p \frac{d\vec{v}_p}{dt} = e\vec{\mathcal{E}} \quad (8.29)$$

ce qui montre que les protons sont bien moins mobiles que les électrons, de sorte que le **vecteur densité volumique de courant** se résume à celui porté par les électrons

$$\vec{j} = n_p e \vec{v}_p - n_e e \vec{v}_e = ne (\vec{v}_p - \vec{v}_e) \approx -n_e e \vec{v}_e \quad (8.30)$$

On écrit ensuite les **équations de Maxwell** dans le cadre de la neutralité électrique globale

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathcal{E}} = \frac{\rho_e}{\epsilon_0} = 0 \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathcal{B}} = 0 \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{\mathcal{E}} = -\frac{\partial \vec{\mathcal{B}}}{\partial t} \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{\mathcal{B}} = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{\mathcal{E}}}{\partial t} \quad (8.31)$$

Prenant la dérivée temporelle de l'équation de Maxwell-Ampère et utilisant Maxwell-Faraday pour transformer le membre de gauche, on obtient, après quelques manipulations sans difficulté, une équation portant sur la dérivée du vecteur densité de courant

$$\frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = \frac{1}{\mu_0} \left[\Delta \vec{\mathcal{E}} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{\mathcal{E}}}{\partial t^2} \right] \quad (8.32)$$

Exercice 85 : Obtenir l'équation (8.32).

Or on a aussi, d'après l'équation du mouvement,

$$\frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = -ne \frac{d\vec{v}_e}{dt} = \frac{ne^2}{m_e} \vec{\mathcal{E}} \quad (8.33)$$

ce qui donne une **équation d'onde** pour le vecteur champ électrique

$$\Delta \vec{\mathcal{E}} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{\mathcal{E}}}{\partial t^2} - \frac{\mu_0 ne^2}{m_e} \vec{\mathcal{E}} = \vec{0} \quad (8.34)$$

La forme harmonique pour le champ électrique permet alors d'établir la **relation de dispersion**

$$k^2 c^2 = \omega^2 - \omega_p^2 \quad (8.35)$$

faisant apparaître la notion importante de **pulsation plasma**

$$\omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{m_e \epsilon_0}} \quad (8.36)$$

Exercice 86 : *Obtenir la relation de dispersion (8.35)-(8.36).*

Il est clair que si $\omega > \omega_p$ alors $k^2 > 0$ et k réel, on a une solution harmonique, **l'onde peut se propager**, tandis que si $\omega < \omega_p$ alors $k^2 < 0$ et k imaginaire, on a une solution exponentielle décroissante, **l'onde est atténuée et ne peut se propager**. Dans le premier cas, on peut montrer qu'on a une **structure d'onde plane**, le trièdre $(\vec{k}, \vec{\mathcal{E}}, \vec{\mathcal{B}})$ étant trirectangle direct. Il est également possible de vérifier *a posteriori* l'hypothèse d'une composante magnétique négligeable de la force de Lorentz. La **vitesse de phase** et la **vitesse de groupe** sont données par

$$v_\phi = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}} \quad v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{c^2}{v_\phi} = c\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} \quad (8.37)$$

Pour fixer les idées, on prend une densité électronique moyenne $n_e = 0.03 \text{ cm}^{-3} = 3 \cdot 10^4 \text{ m}^{-3}$ dans le milieu interstellaire, ce qui donne une fréquence plasma $\nu_p = \omega_p/(2\pi) \approx 1.5 \text{ kHz}$. Cela explique pourquoi une **si faible fraction de l'énergie rayonnée par le pulsar est observée directement**, puisque la fréquence caractéristique est de l'ordre de $1/P$ soit 30 Hz dans le cas du pulsar du Crabe.

Les pulses radio doivent être traités comme un **paquet d'onde**, dont l'énergie se propage à la vitesse de groupe. Pour une source à la distance D , le temps mis par un pulse pour nous parvenir est donc

$$\Delta t = \int_0^D \frac{dz}{v_g} \quad (8.38)$$

En insérant l'expression de la vitesse de groupe et en remarquant que la fréquence d'observation des pulses est très grande devant la fréquence plasma, on peut obtenir approximativement

$$\Delta t(\nu) \approx \frac{D}{c} + \frac{e^2}{8\pi^2 m_e \epsilon_0 c \nu^2} \int_0^D ndz = \frac{D}{c} + \frac{A_t}{\nu^2} \int_0^D ndz \quad (8.39)$$

ce qui montre que **l'arrivée du pulse est plus tardive à plus basse fréquence**³¹, on a **dispersion des pulses**, comme le montre la Fig. 8.7.

Exercice 87 : *Obtenir l'expression (8.39)*

De la mesure des temps Δt_1 et Δt_2 à deux fréquences ν_1 et ν_2 , on a la **mesure de dispersion**

$$\mathcal{D}_0 = \int_0^D ndz = \frac{\Delta t_1 - \Delta t_2}{A_t \left(\frac{1}{\nu_1^2} - \frac{1}{\nu_2^2} \right)} \quad (8.40)$$

31. La constante introduite ici vaut $A_t \approx 1,3 \times 10^{-7} \text{ Hz} \cdot \text{m}^2$.

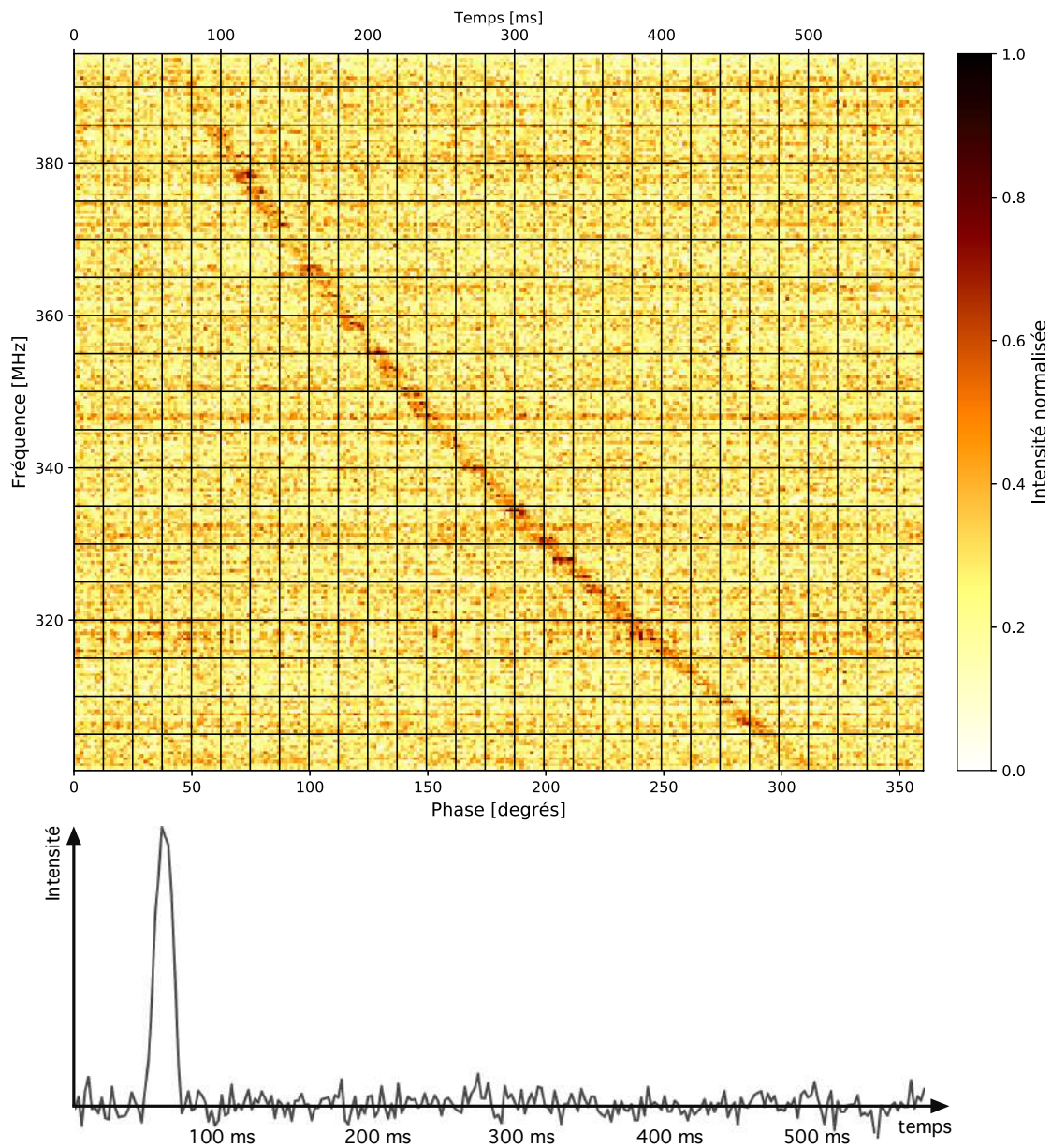


FIGURE 8.7 – **Diagramme temps-fréquence du pulsar J1800+5034.** Sur le panneau supérieur, on représente en échelle de couleur l'intensité du signal radio reçu (normalisée à sa valeur maximale), en fonction du temps (axe des abscisses), et pour différentes fréquences (axe des ordonnées). On notera la présence de deux axes des abscisses, l'un en temps (axe supérieur) et l'autre en phase (axe inférieur), laquelle repère la rotation sur lui-même du pulsar. La période de rotation de l'objet est $P = 578,368$ ms. Le quadrillage superposé à l'image a un pas de 20 ms en temps et 5 MHz en fréquence. Sur le panneau inférieur, les pulses observés à des fréquences différentes ont été "dé-dispersés" puis moyennés. On observe ainsi "le" profil du pulse en fonction du temps. Ces données sont issues de "Essential Radio Astronomy" (J. J. Condon & S. M. Ransom, 2016, [<https://science.nrao.edu/opportunities/courses/era>]).

On lit par exemple sur le **diagramme temps-fréquence** (Fig. 8.7) que $\Delta t_1 = 380$ ms pour $\nu_1 = 320$ MHz et $\Delta t_2 = 160$ ms pour $\nu_2 = 365$ MHz, d'où on tire $\mathcal{D}_0 \approx 25$ pc \cdot cm $^{-3}$, en utilisant l'unité habituelle pour cette grandeur (pc \cdot cm $^{-3}$). En faisant l'hypothèse d'un milieu de densité électronique uniforme, on a une **estimation grossière de la distance**³²

$$D \approx \frac{\mathcal{D}_0}{n} \approx 830 \text{ pc} \quad (8.41)$$

En réalité, on fait plutôt l'inverse : on dispose de mesures de distances par parallaxe et on déduit la distribution spatiale des électrons à partir des mesures de dispersion.

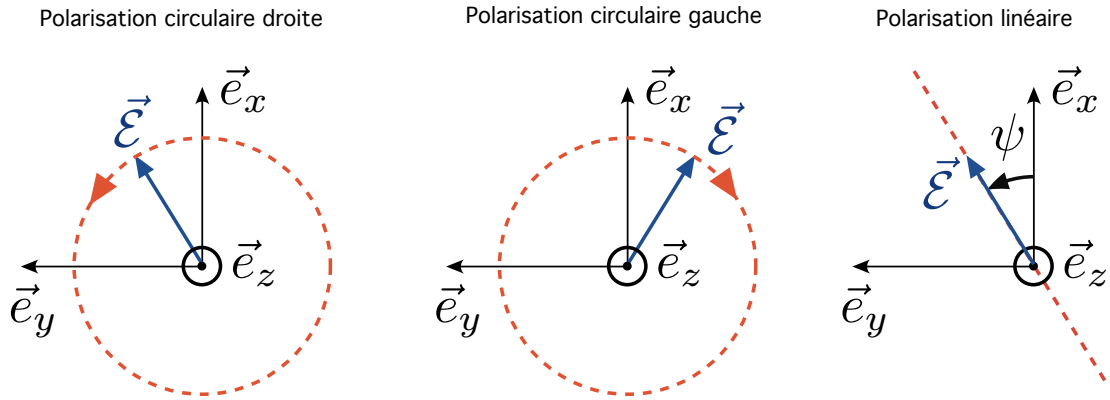


FIGURE 8.8 – États de polarisation d'une onde. Les figures de gauche et centrale montrent la définition des **polarisations circulaires droite et gauche**, représentées dans le même système d'axes que la Fig. 8.6, vues depuis la position de l'observateur. Les cercles en tirets montrent la trajectoire de l'extrémité du vecteur champ électrique $\vec{\mathcal{E}}$ au cours du temps, en un point fixe de l'espace, le sens de parcours étant indiqué par les flèches. La figure de droite donne la définition de l'**angle de polarisation ψ pour une polarisation linéaire**, dans le même système d'axes. Les tirets représentent le plan d'oscillation du champ électrique $\vec{\mathcal{E}}$.

Mesure de rotation

On considère maintenant que le plasma interstellaire de la Fig. 8.6 est **magnétisé**, et on décompose le champ magnétique \vec{B} qui y règne, à ne pas confondre avec le champ magnétique \vec{B} de l'onde, en une **composante \vec{B}_\perp perpendiculaire à la ligne de visée**, c'est-à-dire à la direction \vec{e}_z de propagation de l'onde, et une **composante $\vec{B}_\parallel = B_z \vec{e}_z$ qui lui est parallèle**. On rappelle par ailleurs qu'une onde électromagnétique polarisée circulairement est dite **gauche** ou **droite** suivant que le vecteur champ électrique $\vec{\mathcal{E}}$ en un point donné de l'espace tourne dans le sens des aiguilles d'une montre ou inversement, du point de vue de l'observateur. Le sens de rotation est donc celui représenté sur la Fig. 8.8. Les vecteurs portant ces polarisations circulaires droite (" + ") et gauche (" - ") peuvent être représentés en notation complexe par

$$\vec{e}_+ = \vec{e}_x + i\vec{e}_y \quad \vec{e}_- = \vec{e}_x - i\vec{e}_y \quad (8.42)$$

L'émission radio des pulsars, elle, est **fortement polarisée linéairement**. En supposant qu'au niveau de la source ($z = 0$) cette polarisation est parallèle à \vec{e}_x , on peut écrire le champ électrique $\vec{\mathcal{E}}$ comme

$$\vec{\mathcal{E}}(z = 0, t) = \text{Re} \left[\mathcal{E}_0 e^{-i\omega t} \left(\frac{\vec{e}_+ + \vec{e}_-}{2} \right) \right] \quad (8.43)$$

32. La littérature donne plutôt entre 1.4 kpc et 1.9 kpc pour ce pulsar.

ce qui correspond à un **angle de polarisation** $\psi = 0$, tel que défini sur la Fig. 8.8 (à droite).

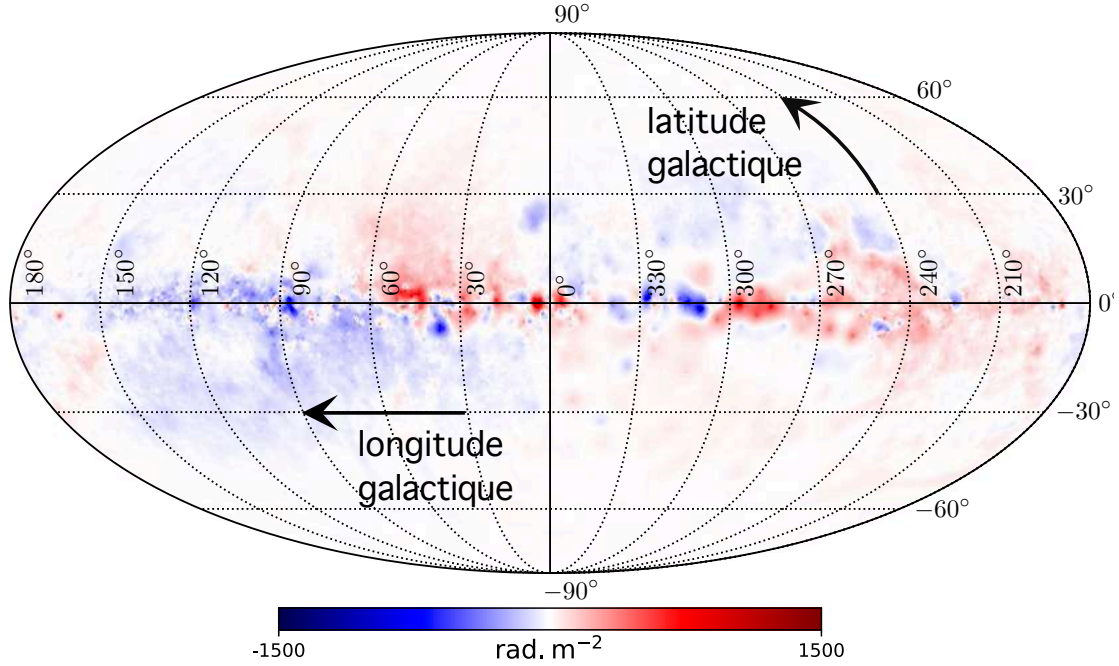


FIGURE 8.9 – **Carte de mesures de rotation sur l'ensemble du ciel.** Figure adaptée de N. Oppermann *et al.*, *Astronomy & Astrophysics*, 542, 93, 2012, [<https://arxiv.org/abs/1111.6186>]

En l'absence de champ magnétique \vec{B} , la relation de dispersion obtenue plus haut donne un nombre d'onde $k(\omega)$ indépendant de l'état de polarisation circulaire, de sorte qu'à la position z , on a

$$\vec{\mathcal{E}}(z, t) = \text{Re} \left[\mathcal{E}_0 e^{i[k(\omega)z - \omega t]} \left(\frac{\vec{e}_+ + \vec{e}_-}{2} \right) \right] \quad (8.44)$$

ce qui traduit une **polarisation toujours rectiligne, dont l'angle de polarisation est inchangé**, $\psi(z) = \psi(0) = 0$. En présence d'un champ magnétique, et plus spécifiquement d'une composante \vec{B}_{\parallel} le long de la ligne de visée, cette **relation de dispersion est modifiée et dépend alors de l'état de polarisation circulaire de l'onde**. On a les expressions suivantes des nombres d'onde, respectivement pour les polarisations circulaires droite (k_+) et gauche (k_-),

$$k_+^2(\omega) = \frac{1}{c^2} \left(\omega^2 - \frac{\omega \omega_p^2}{\omega - \omega_c} \right) \quad k_-^2(\omega) = \frac{1}{c^2} \left(\omega^2 - \frac{\omega \omega_p^2}{\omega + \omega_c} \right) \quad (8.45)$$

où $\omega_c = eB_z/m_e$ est la **pulsation cyclotron**. On peut montrer qu'alors le champ électrique à la position z sur la ligne de visée s'écrit

$$\vec{\mathcal{E}}(z, t) = \text{Re} \left[\mathcal{E}_0 e^{i(kz - \omega t)} \{ \cos[\psi(z)] \vec{e}_x + \sin[\psi(z)] \vec{e}_y \} \right] \quad (8.46)$$

ce qui montre que **la polarisation est toujours linéaire, mais qu'elle a tourné**, le champ électrique étant porté par le vecteur $\vec{u}(z) = \cos[\psi(z)] \vec{e}_x + \sin[\psi(z)] \vec{e}_y$, où l'angle de polarisation est

$$\psi(z) = \Delta k z = \left(\frac{\omega_p^2 \omega_c}{2c\omega^2} \right) z = \left(\frac{e^3 n_e B_z}{2\omega^2 c \epsilon_0 m_e^2} \right) z \quad (8.47)$$

Ce phénomène est appelé **rotation Faraday**.

Exercice 88 : Démontrer les relations (8.46)-(8.47). On supposera que $\omega \gg \omega_p$ et $\omega \gg \omega_c$.

Pour un milieu hétérogène, n_e et B_z sont susceptibles de varier sur la ligne de visée. On généralise alors ce résultat en écrivant que l'angle de polarisation observé dépend de la longueur d'onde selon

$$\psi(D) = \mathcal{F}_0 \lambda^2 \quad \mathcal{F}_0 = \frac{e^3}{8\pi^2 c^3 \epsilon_0 m_e^2} \int_0^D n_e B_z dz \quad (8.48)$$

où l'on a introduit la quantité \mathcal{F}_0 appelée **mesure de rotation**, exprimée usuellement en $\text{rad} \cdot \text{m}^{-2}$. On la détermine en mesurant l'angle de polarisation à différentes fréquences. Son signe donne celui de la projection (moyenne) du champ magnétique sur la ligne de visée (positive si le champ pointe vers l'observateur, négative dans le cas contraire, Fig. 8.9). On peut alors estimer le **champ magnétique le long de la ligne de visée** comme moyenne pondérée par n_e , soit

$$\langle B_z \rangle = \frac{\int_0^D n_e B_z dz}{\int_0^D n_e dz} = \frac{8\pi^2 c^3 \epsilon_0 m_e^2}{e^3} \frac{\mathcal{F}_0}{\mathcal{D}_0} \quad (8.49)$$

Chapitre 9

Les trous noirs

Lorsqu'une étoile est suffisamment massive, même l'interaction forte des neutrons ne peut s'opposer à sa propre gravité lorsque le combustible nucléaire est épuisé. L'étoile s'effondre en **trou noir stellaire**. Avec les **trous noirs supermassifs** au centre des galaxies, ils forment une population d'objets célestes aux propriétés très particulières, qu'il convient de traiter dans le cadre de la **relativité générale**¹.

9.1 Historique

9.1.1 Une approche Newtonienne

À la fin du XVIII^e siècle, J. Michell (1783) et P.-S. de Laplace (1796) ont l'intuition d'un corps céleste dont la lumière ne pourrait s'échapper. Ils se fondent sur une approche corpusculaire de la lumière et sur la mécanique Newtonienne. Considérant un corps sphérique de masse M et de rayon R , et une particule de masse m à sa surface, on calcule la **vitesse de libération** v_ℓ de cette dernière en écrivant que l'énergie mécanique est nulle, cas limite entre un système lié ($E_m < 0$) et un système libre ($E_m > 0$), ce qui donne

$$v_\ell = \sqrt{\frac{2GM}{R}} \quad (9.1)$$

Si l'on concentre la masse M dans un rayon R suffisamment petit, cette vitesse de libération atteint la valeur de la vitesse de la lumière, $v_\ell = c$. Autrement dit, si l'on définit un **rayon gravitationnel**

$$R_g = \frac{2GM}{c^2} \quad (9.2)$$

cet astre ne saurait émettre de la lumière qu'on puisse observer² si son rayon est $R < R_g$. Il convient de remarquer que cette condition n'implique pas nécessairement un rayon nul et une densité infinie, mais simplement que sa densité moyenne doit être supérieure à une densité ρ_g

$$\rho > \rho_g = \frac{3M}{4\pi R_g^3} = \frac{3c^6}{32\pi G^3 M^2} \approx 1.9 \cdot 10^{19} \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{-2} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} \quad (9.3)$$

ce qui montre que la densité des trous noirs stellaires est effectivement très grande, mais que celle des trous noirs supermassifs peut être assez faible³.

1. Nous n'entrerons pas dans les détails de la théorie relativiste de la gravitation, qui occuperait un cours entier.
2. Michell a néanmoins l'intuition des effets gravitationnels que ces astres pourraient engendrer dans leur voisinage : "S'il arrivait que quelque autre corps lumineux tourne autour d'eux, des mouvements de ces corps tournants, nous pourrions peut-être encore déduire l'existence du corps central avec quelque degré de probabilité."
3. "Un astre lumineux, de la même densité que la Terre, et dont le diamètre serait 250 fois plus grand que le Soleil, ne permettrait, en vertu de son attraction, à aucun de ses rayons de parvenir jusqu'à nous." (Laplace)

9.1.2 Les trous noirs en relativité générale

Quelques mois après la publication d'Einstein introduisant la relativité générale (1915), K. Schwarzschild obtient des solutions des **équations du champ** dans le vide, statiques et en symétrie sphérique. C'est la **métrique de Schwarzschild** déjà mentionnée au chapitre précédent, pour laquelle l'**intervalle invariant relativiste** s'écrit

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{R_S}{r}\right) c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{R_S}{r}} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (9.4)$$

où l'on a introduit le **rayon de Schwarzschild** qui a la même expression que le rayon gravitationnel

$$R_S = \frac{2GM}{c^2} \quad (9.5)$$

Cette solution à un paramètre, la masse M de l'objet central, s'applique à l'*extérieur* de tout astre sphérique statique, mais elle permet de décrire l'**espace-temps d'un trou noir relativiste statique** et sans charge électrique, *pour tout* $r > 0$, toute la masse M étant concentrée en $r = 0$. Cette **singularité** à l'origine des coordonnées⁴ posait problème à Einstein, qui n'y croyait pas, malgré le calcul de l'effondrement gravitationnel d'une étoile massive par J. R. Oppenheimer et H. Snyder (1939). Les années 1950-1960 voient alors un "âge d'or de la relativité", avec la démonstration par D. Finkelstein (1958) que le rayon de Schwarzschild correspond à un **horizon des événements** englobant une région à tout jamais inaccessible à un observateur extérieur⁵, et l'obtention de solutions des équations du champ pour un **trou noir en rotation** par R. Kerr (1963) et pour un **trou noir en rotation et chargé électriquement**⁶ par T. Newman (1965). Du point de vue observationnel, la découverte des sources X dans les années 1960 a permis d'avancer l'idée que certaines de ces sources puissent être associées à des trous noirs, via l'émission des disques d'accrétion autour de ces objets. La source Cygnus X-1 (1970) fournit le premier **candidat trou noir** sérieux, la masse de l'objet central étant d'au moins $6 M_\odot$. L'étude des trous noirs se fera alors essentiellement indirectement au travers de ces émissions en X, jusqu'à l'avènement des détections d'**ondes gravitationnelles** associées aux événements de coalescence de trous noirs (2015), et à l'**imagerie directe** par interférométrie radio à très longue base (2019).

9.2 L'espace-temps des trous noirs

Dans cette section, on s'intéressera essentiellement au trou noir de Schwarzschild, statique et sans charge. Le trou noir de Kerr sera abordé dans une section spécifique.

9.2.1 Observateurs statiques, limite statique et horizon des événements

Pour un observateur A situé à l'infini ($r \rightarrow \infty$), la métrique de Schwarzschild se réduit à la **métrique de Minkowski** d'un espace-temps plat, celui de la **relativité restreinte**

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (9.6)$$

Si cet observateur est statique ($dr = d\theta = d\phi = 0$), on a alors $ds^2 = -c^2 d\tau^2 = -c^2 dt^2$ en introduisant le **temps propre** τ de l'observateur., de sorte que dans ce cas $t = \tau$. Les coordonnées (t, r, θ, ϕ) sont

4. La singularité de la métrique de Schwarzschild en $r = R_S$ n'est due qu'au choix des coordonnées (t, r, θ, ϕ) , et il existe d'autres systèmes de coordonnées (Painlevé-Gullstrand ou Eddington-Finkelstein) où elle disparaît, la métrique y étant parfaitement régulière. On parle de **singularité des coordonnées**.

5. Cet horizon masque la singularité, et R. Penrose (1969) en tire l'hypothèse de **censure cosmique** selon laquelle toute singularité de l'espace-temps doit être cachée derrière un horizon.

6. Le **théorème de calvitie** démontré en 1967 par W. Israël stipule qu'un trou noir n'est caractérisé que par trois quantités : sa masse M , son moment cinétique J et sa charge électrique Q .

donc la combinaison de la coordonnée de temps mesurée par un observateur statique à l'infini et des coordonnées sphériques usuelles. Si l'on considère maintenant un autre observateur B , statique mais à une distance finie $r > R_S$, on peut écrire l'**invariance de l'intervalle** pour les deux observateurs

$$-c^2 dt_A^2 = - \left(1 - \frac{R_S}{r}\right) c^2 dt_B^2 \quad (9.7)$$

ce qui montre qu'on a une **dilatation gravitationnelle des temps**⁷

$$\frac{dt_B}{dt_A} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{R_S}{r}}} \quad (9.8)$$

Autrement dit, le temps de B semble s'écouler plus lentement lorsqu'il est mesuré par A . Pour la même raison, un signal lumineux émis en r voit sa longueur d'onde **décalée vers le rouge** pour l'observateur statique à l'infini (**effet Einstein**). Si l'on note λ la longueur d'onde du signal émis en B telle que mesurée par A et λ_0 la longueur d'onde de ce signal en l'absence de champ gravitationnel, on a

$$\frac{\lambda}{\lambda_0} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{R_S}{r}}} = 1 + z \quad (9.9)$$

où z est le **redshift**. Le rayon de Schwarzschild $r = R_S$ définit également une **limite statique** à l'intérieur de laquelle l'immobilité d'un observateur est impossible⁸. L'interversion des signes des coefficients de la métrique entre r et t lorsqu'on passe de $r > R_S$ à $r < R_S$ montre qu'à l'écoulement du temps $dt > 0$ à l'extérieur du rayon de Schwarzschild correspond un seul sens d'évolution de r à l'intérieur de ce rayon⁹, à savoir $dr < 0$. Toute la matière en $r < R_S$ finit par tomber en $r = 0$. Notons qu'en $r = R_S$, l'intervalle de temps dt_B devient infini, tout comme le redshift, et il n'y a donc pas moyen de relier causalement l'intérieur et l'extérieur de cette région, on a un **horizon des évènements** déconnectant deux régions de l'espace-temps.

9.2.2 Mouvement d'une particule matérielle dans l'espace-temps du trou noir

De l'équation des géodésiques au potentiel effectif

En relativité générale, les équations du mouvement d'une particule de masse m s'écrivent sous la forme de l'**équation des géodésiques**¹⁰

$$\frac{\partial L}{\partial x^\mu} = \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} \right) \quad (9.11)$$

où $x^\mu(\tau) = (t, r, \theta, \phi)$ représente la trajectoire de la particule dans l'espace-temps, paramétrée par son temps propre τ , et L est le **Lagrangien** pour la métrique $g_{\mu\nu}$

$$L = \sqrt{-g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu} \quad \dot{x}^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = u^\mu \quad (9.12)$$

7. La solution avec un signe "-" est écartée par **causalité**, le temps s'écoulant toujours dans le même sens à l'extérieur de l'horizon.

8. Pour $r < R_S$, un observateur ne peut demeurer statique puisqu'on aurait alors une contradiction entre les deux écritures de l'intervalle, avec les coordonnées de Schwarzschild et en utilisant le temps propre,

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{R_S}{r}\right) c^2 dt^2 > 0 \quad ds^2 = -c^2 d\tau^2 < 0 \quad (9.10)$$

9. Ce sens, plutôt que $dr > 0$, découle de la continuité du **cône de lumière** en R_S , nous ne nous y attarderons pas.

10. On retrouve ici une **formulation Lagrangienne** de la mécanique.

en faisant apparaître la **quadrivitesse** u^μ . Dans le cas de la métrique de Schwarzschild, on a donc

$$L = \sqrt{\left(1 - \frac{R_S}{r}\right) c^2 \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 - \frac{1}{1 - \frac{R_S}{r}} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 - r^2 \left[\left(\frac{d\theta}{d\tau}\right)^2 + \sin^2 \theta \left(\frac{d\phi}{d\tau}\right)^2 \right]} \quad (9.13)$$

L'application de l'équation des géodésiques à cette forme de Lagrangien donne quatre équations (une pour chaque coordonnée). Trois d'entre elles permettent de montrer que :

- Comme dans le cas Newtonien¹¹, les mouvements sont **plans**, et on peut orienter le système de coordonnées de telle manière que $\theta = \pi/2$ pour l'ensemble de la trajectoire ($u^\theta = 0$).
- Il existe **deux intégrales premières du mouvement**, qu'on peut identifier, en passant à la limite Newtonienne, comme l'**énergie par unité de masse** \mathcal{E} et le **moment cinétique par unité de masse** \mathcal{L} . Leurs expressions en relativité générale sont données par

$$\mathcal{E} = c^2 \left(1 - \frac{R_S}{r}\right) \frac{dt}{d\tau} \quad \mathcal{L} = r^2 \frac{d\phi}{d\tau}. \quad (9.14)$$

La dernière des quatre équations peut alors se mettre sous une forme unidimensionnelle

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + \Phi(r) = \mathcal{A} \quad (9.15)$$

où $\Phi(r)$ est un **potentiel effectif** et \mathcal{A} est une constante, avec

$$\Phi(r) = -\frac{c^2 R_S}{2r} + \frac{\mathcal{L}^2}{2r^2} - \frac{\mathcal{L}^2 R_S}{2r^3} \quad \mathcal{A} = \frac{1}{2} \left(\frac{\mathcal{E}^2}{c^2} - c^2\right) \quad (9.16)$$

Exercice 89 : Obtenir l'expression (9.15) directement à partir de l'expression de l'intervalle ds^2 en se plaçant dans le cas $\theta = \pi/2$ et faisant apparaître les intégrales premières du mouvement.

On remarque que l'expression de $\Phi(r)$ contient trois termes, dont **deux sont connus dans l'approximation Newtonienne**. En effet, en explicitant le rayon de Schwarzschild, on a

$$\Phi(r) = -\frac{GM}{r} + \frac{\mathcal{L}^2}{2r^2} - \frac{GM\mathcal{L}^2}{c^2 r^3} \quad (9.17)$$

Le premier terme est le **terme gravitationnel** classique, le deuxième le **terme centrifuge**¹², et le troisième est un **effet attractif relativiste** (qui tend vers 0 lorsque $c \rightarrow \infty$). On note Φ_N le **potentiel effectif Newtonien** formé des deux premiers termes

$$\Phi_N(r) = -\frac{c^2 R_S}{2r} + \frac{\mathcal{L}^2}{2r^2}. \quad (9.21)$$

11. On rappelle que cette propriété classique du problème de Kepler a pour origine le caractère de **force centrale** de la gravité, qui assure la **conservation du moment cinétique**.

12. On rappelle que le cas Newtonien part de la conservation de l'énergie

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} = \frac{1}{2}m \left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 \right] - \frac{GMm}{r} = C^{te} \quad (9.18)$$

et de celle du moment cinétique

$$m\mathcal{L} = mr^2 \left(\frac{d\phi}{dt}\right) \quad (9.19)$$

pour obtenir l'équation du mouvement en faisant apparaître un potentiel effectif Newtonien

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 - \frac{GM}{r} + \frac{\mathcal{L}^2}{2r^2} = C^{te} \quad (9.20)$$

Le cas de la chute libre

On prend le cas d'un point matériel lâché sans vitesse initiale depuis un point $r = r_0 > R_S$. Le moment cinétique est alors nul, $\mathcal{L} = 0$ et on a, par conservation de \mathcal{A}

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 = \frac{c^2 R_S}{2} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right) \quad (9.22)$$

ce qui montre que $r \leq r_0$ et donc $dr \leq 0$, on a une **chute libre vers le trou noir**. En séparant les variables, on peut résoudre l'équation du mouvement

$$c\tau = r_0 \sqrt{\frac{r_0}{R_S}} \left[\frac{\pi}{2} - \arcsin \sqrt{\frac{r}{r_0}} + \sqrt{\frac{r}{r_0}} \sqrt{1 - \frac{r}{r_0}} \right] \quad (9.23)$$

Exercice 90 : Établir l'équation du mouvement (9.23). On prendra $\tau = 0$ initialement et on posera le changement de variable $r = r_0 \sin^2 u$.

La particule atteint la singularité centrale en un **temps fini**, mais ne subit rien de particulier en $r = R_S$. En revanche, si on considère l'évolution de r en fonction de t , il faut résoudre l'équation

$$\frac{dr}{dt} = -c \sqrt{\frac{R_S}{r} - \frac{R_S}{r_0}} \sqrt{1 - \frac{R_S}{r}} \quad (9.24)$$

et on constate que cette dérivée tend vers 0 lorsque $r \rightarrow R_S$. Pour l'observateur situé à l'infini, **la particule semble s'approcher asymptotiquement de l'horizon**¹³ et se figer dans son mouvement, comme le montre le panneau de droite de la Fig. 9.1.

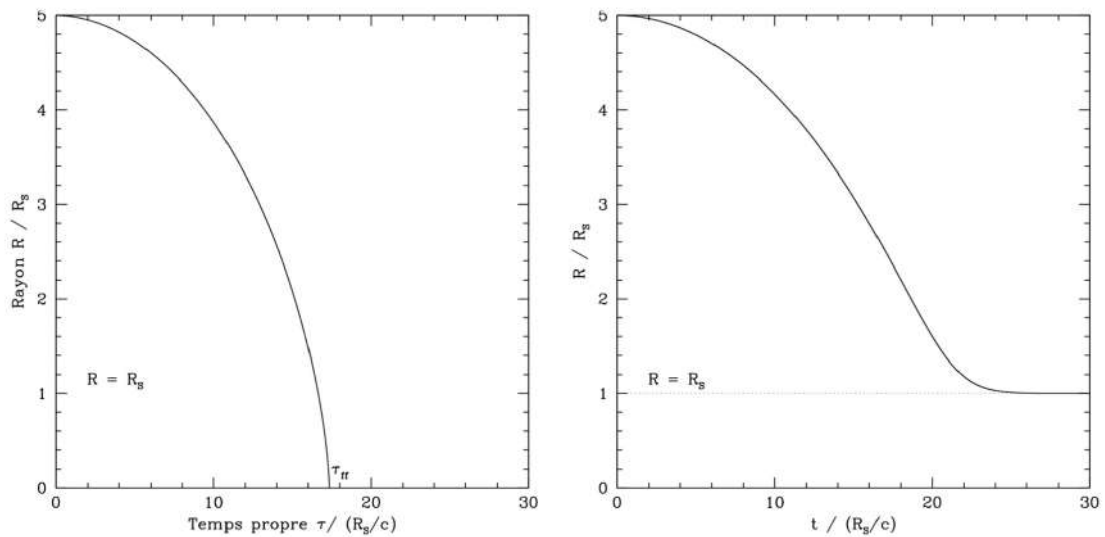


FIGURE 9.1 – **Chute libre sans vitesse initiale sur un trou noir de Schwarzschild.** La figure de gauche montre la position r en fonction du temps propre de la particule, celle de droite en fonction du temps t mesuré par un observateur statique à l'infini. [Crédit : F. Daigne]

Si l'on considère un mouvement radial ($\mathcal{L} = 0$) depuis $r_0 > R_S$ avec une vitesse initiale dirigée vers l'extérieur, il est possible que **la particule s'échappe à l'infini** à condition que $\mathcal{A} \geq 0$, soit

$$|\mathcal{E}| \geq c^2 \quad (9.25)$$

13. C'est un effet purement relativiste, la particule traverse bien l'horizon !

Dans le cas contraire, la particule atteindra un rayon maximal r_{\max} avant de retomber inexorablement vers le trou noir. Ce rayon est donné par

$$r_{\max} = \frac{R_S}{1 - \frac{\mathcal{E}^2}{c^4}} \quad (9.26)$$

Exercice 91 : Établir l'expression de r_{\max} .

Orbites circulaires d'une particule matérielle autour d'un trou noir de Schwarzschild

L'étude des orbites d'une particule matérielle autour d'un trou noir de Schwarzschild repose sur l'analyse de la forme du potentiel effectif. Il est commode de poser des quantités adimensionnées¹⁴

$$\alpha = \frac{\mathcal{L}}{cR_S} \quad x = \frac{r}{R_S} \quad V = \frac{2\Phi}{c^2} \quad (9.27)$$

de sorte que le potentiel effectif adimensionné V s'écrive

$$V(x) = -\frac{1}{x} + \frac{\alpha^2}{x^2} - \frac{\alpha^2}{x^3} \quad (9.28)$$

L'allure de ce potentiel dépend de manière essentielle du paramètre de moment cinétique α , comme le montre la Fig. 9.2, qui indique aussi le potentiel Newtonien correspondant, c'est-à-dire sans le terme en x^{-3} . On peut discuter analytiquement cette allure en cherchant les solutions en **orbites circulaires**, à savoir celles pour lesquelles $\Phi'(r) = 0$, ou de manière équivalente, $V'(x) = 0$. On montre que :

- Il n'y a **pas de solution** si $\alpha < \sqrt{3}$ ($\mathcal{L} < \sqrt{3}cR_S$);
- Il y a une **unique solution** x_0 si $\alpha = \sqrt{3}$ ($\mathcal{L} = \sqrt{3}cR_S$);
- Il y a **deux solutions** x_{inner} et x_{outer} si $\alpha > \sqrt{3}$ ($\mathcal{L} > \sqrt{3}cR_S$)

Les expressions des solutions dans les deux derniers cas sont

$$x_0 = \alpha^2 = 3 \quad x_{\text{inner}} = \alpha^2 \left[1 - \sqrt{1 - \frac{3}{\alpha^2}} \right] \quad x_{\text{outer}} = \alpha^2 \left[1 + \sqrt{1 - \frac{3}{\alpha^2}} \right] \quad (9.29)$$

qui correspondent aux rayons réels

$$r_0 = 3R_S \quad r_{\text{inner}} = \frac{\mathcal{L}^2}{c^2 R_S} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{3c^2 R_S^2}{\mathcal{L}^2}} \right] \quad r_{\text{outer}} = \frac{\mathcal{L}^2}{c^2 R_S} \left[1 + \sqrt{1 - \frac{3c^2 R_S^2}{\mathcal{L}^2}} \right] \quad (9.30)$$

Exercice 92 : Vérifier la forme du potentiel effectif en fonction de α et établir les expressions des solutions x_0 , x_{inner} et x_{outer} .

On note que le terme relativiste modifie radicalement le comportement par rapport au cas Newtonien, pour lequel il existe toujours une unique orbite circulaire, au rayon adimensionné $x_N = 2\alpha^2$, soit

$$r_N = \frac{2\mathcal{L}^2}{c^2 R_S} = \frac{\mathcal{L}^2}{GM} \quad (9.31)$$

qui est un résultat bien connu, puisque c'est la **troisième loi de Kepler**¹⁵.

14. On peut se restreindre à $\alpha \geq 0$ puisque $\alpha < 0$ est équivalent à $\mathcal{L} < 0$ et que le changement $\mathcal{L} \rightarrow -\mathcal{L}$ revient simplement à changer le sens de parcours de l'orbite.

15. Dans le cas d'une trajectoire circulaire, on a $\mathcal{L} = r_N v = 2\pi r_N^2 / P$ où P est la période du mouvement. La relation écrite ici donne donc $GM = 4\pi^2 r_N^3 / P^2$, comme attendu.

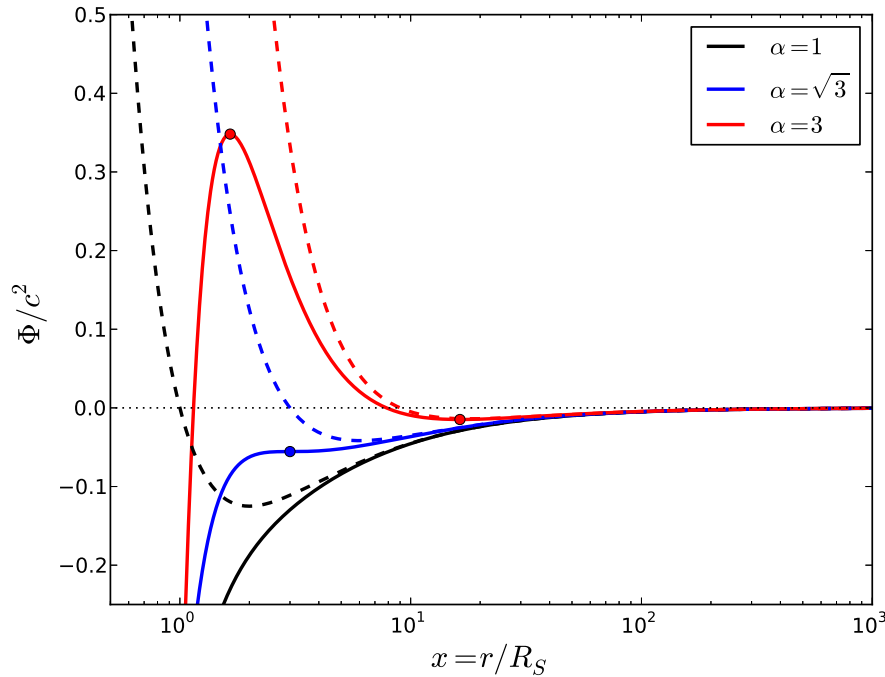


FIGURE 9.2 – **Allure du potentiel effectif autour d'un trou noir de Schwarzschild.** Le potentiel adimensionné Φ/c^2 est représenté en fonction de la distance radiale adimensionnée $x = r/R_S$ dans le cas relativiste (traits pleins) et Newtonien (tirets), pour trois valeurs du paramètre α : $\alpha = 1$ (noir), $\alpha = \sqrt{3}$ (bleu), et $\alpha = 3$ (rouge). Le point bleu et les points rouges donnent les positions d'équilibre dans ces deux derniers cas.

Exercice 93 : *Établir l'expression de x_N et r_N dans le cas Newtonien*

Cette solution Newtonienne est la limite classique ($c \rightarrow \infty$) de la solution relativiste r_{outer} (ce qui se voit d'ailleurs sur la Fig. 9.2). En effet on peut écrire celle-ci sous la forme

$$r_{\text{outer}} = \frac{\mathcal{L}^2}{c^2 R_S} \left[1 + \sqrt{1 - \frac{3c^2 R_S^2}{\mathcal{L}^2}} \right] = \frac{r_N}{2} \left[1 + \sqrt{1 - \frac{6R_S}{r_N}} \right] \quad (9.32)$$

qui démontre le résultat cherché lorsque $c \rightarrow \infty$ et donc $R_S \rightarrow 0$ (r_N est indépendant de c). La Fig. 9.3 montre ces solutions en fonction du paramètre α .

La **stabilité** de ces orbites se lit directement¹⁶ sur la Fig. 9.2 : r_{inner} est instable et r_{outer} est stable. L'orbite circulaire unique r_0 est en limite de stabilité puisque c'est aussi un **point d'inflexion**. Il s'agit de la **dernière orbite circulaire stable**, qui joue un rôle majeur dans la théorie de l'accrétion autour d'un trou noir puisque le bord interne du disque ne peut pas s'approcher plus près. On peut en déduire notamment l'efficacité maximale de production d'énergie par accrétion¹⁷.

16. On rappelle que les positions d'équilibre stables sont les minima de l'énergie potentielle et les positions d'équilibre instables en sont les maxima.

17. Pour un trou noir de Schwarzschild, cette efficacité maximale est de l'ordre de 5.7%, mais elle peut monter à 42.3% pour un trou noir de Kerr en rotation maximale.

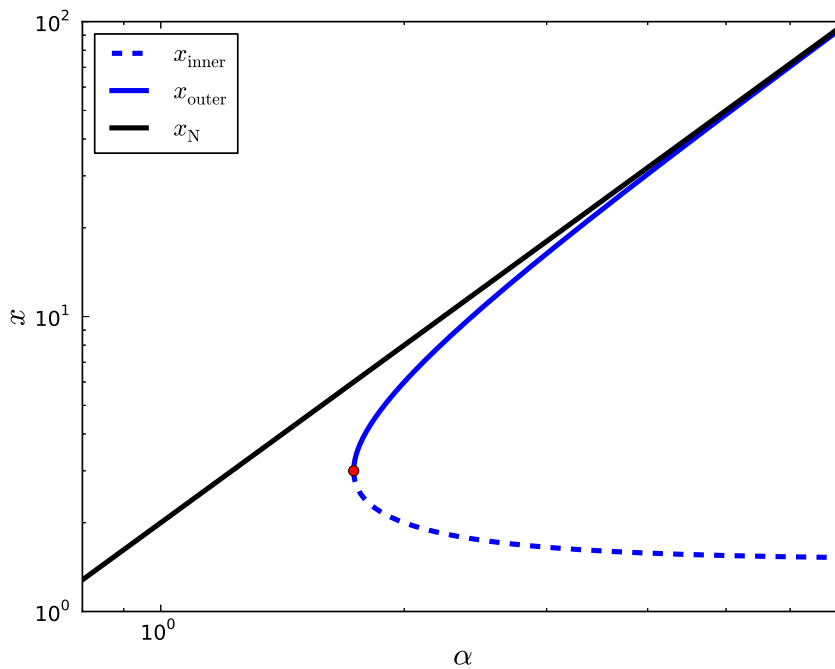


FIGURE 9.3 – **Solutions d’orbites circulaires autour d’un trou noir de Schwarzschild.** Les solutions relativistes x_{inner} (tirets bleus), x_{outer} (courbe pleine bleue) et Newtonienne x_N (courbe pleine noire) sont représentées en fonction du paramètre α . Le point rouge représente le cas où les orbites stable x_{outer} et instable x_{inner} se rejoignent, pour $\alpha = \sqrt{3}$.

Orbites générales d’une particule matérielle autour d’un trou noir de Schwarzschild

Bien entendu, il ne suffit pas de résoudre le cas des orbites circulaires, il faut traiter des orbites générales, qui dépendent de la position initiale (r_0, ϕ_0) , de l’énergie par unité de masse \mathcal{E} et du moment cinétique par unité de masse \mathcal{L} . On a alors trois cas possibles :

- La particule **tombe dans le trou noir**, éventuellement après le passage à l’**apoastre**.
- La particule **orbite autour du trou noir** en passant alternativement par des **apoastes** et **périastes** qui se décalent d’une orbite à l’autre¹⁸.
- La particule **part à l’infini**, éventuellement après un passage au périastre.

Différents exemples de telles trajectoires sont données sur la Fig. 9.4, pour un cas où $\alpha = 1.86 > \sqrt{3}$. Six exemples sont montrés, différant par leur valeur de l’énergie par unité de masse \mathcal{E} , par leur rayon initial r_0 et par l’orientation de leur vitesse initiale. Les trajectoires (1), (2), (4) et (5) terminent à l’intérieur de l’horizon des évènements, la trajectoire (3) est bornée, mais non fermée¹⁹, et la trajectoire (6) part à l’infini.

18. C’est le même phénomène de **précession** qui s’applique en champ faible à l’orbite de Mercure et a permis une des premières confirmations observationnelles de la relativité générale. En effet, les effets relativistes se font sentir sur l’orbite de la planète Mercure, qui précède lentement au cours du temps. Son périhélie avance au rythme de 574,8 secondes d’arc par siècle. Une grande partie de cette avance est liée à l’influence des autres planètes, mais toutes corrections faites, il manque encore 43 secondes d’arc par siècle. La correction de relativité générale permet d’expliquer cet écart restant.

19. On observe le phénomène d’avance du périastre (en bas à gauche de la Fig. 9.4).

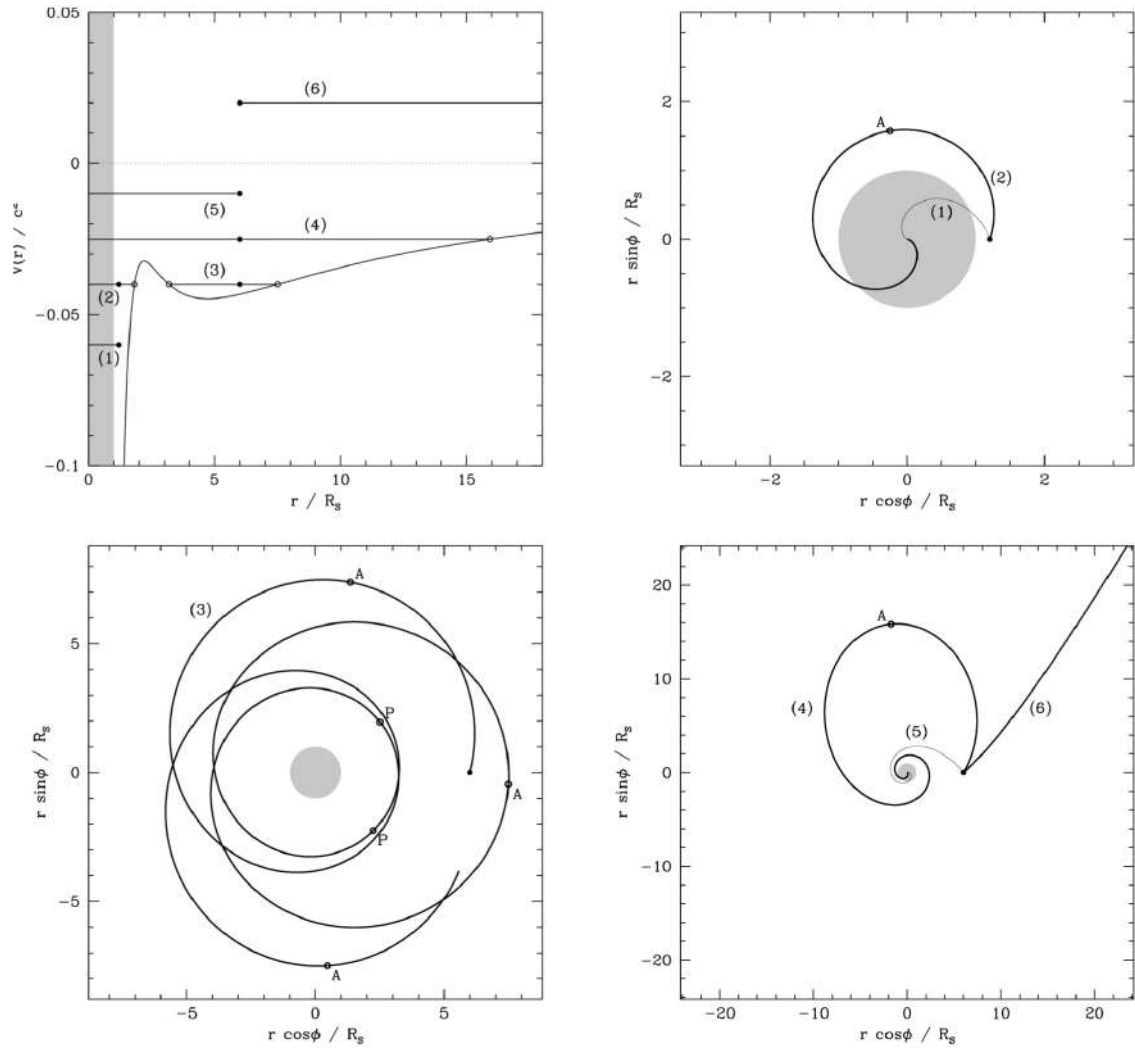


FIGURE 9.4 – **Trajectoires autour d'un trou noir de Schwarzschild.** La figure en haut à gauche montre le potentiel effectif V en fonction du rayon normalisé r/R_S . La région interne à l'horizon est présentée en grisé, et six exemples de trajectoires issues de $(r = r_0, \phi = 0)$, notées (1) à (6). Les traits horizontaux traduisent la conservation de l'énergie, les points noirs le rayon initial r_0 et les cercles les passages éventuels à l'apoastré ou au périastré. Les trois autres figures représentent les trajectoires correspondantes. [Crédit : F. Daigne]

Le cas des photons

Pour des particules sans masse, comme les photons, le temps propre n'a pas de sens car $ds^2 = 0$. On utilise donc une autre paramétrisation (sans dimension) des trajectoires $x^\mu(\lambda)$ et les équations des géodésiques s'écrivent alors sous la forme suivante, où A et B sont des constantes,

$$r^2 \frac{d\phi}{d\lambda} = A \quad \left(1 - \frac{R_S}{r}\right) \frac{dt}{d\lambda} = B \quad \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 = B^2 c^2 - \frac{A^2}{r^2} \left(1 - \frac{R_S}{r}\right) \quad (9.33)$$

En introduisant le **paramètre d'impact** $b = A/(Bc)$ et une coordonnée de temps $\tilde{t} = B\lambda$, on peut réécrire ces équations sous la forme suivante

$$r^2 \frac{d\phi}{d\tilde{t}} = bc \quad \left(1 - \frac{R_S}{r}\right) \frac{dt}{d\tilde{t}} = 1 \quad \left(\frac{dr}{d\tilde{t}}\right)^2 + \Phi_\gamma(r) = c^2 \quad (9.34)$$

en faisant apparaître un **potentiel effectif pour les photons**

$$\Phi_\gamma(r) = \left(\frac{bc}{r}\right)^2 \left(1 - \frac{R_S}{r}\right) \quad (9.35)$$

À grande distance $r \gg R_S$, le temps \tilde{t} s'identifie au temps t mesuré par l'observateur statique à l'infini, et ce système devient

$$\frac{d\phi}{dt} \approx \frac{bc}{r^2} \quad \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 \approx c^2 \left(1 - \frac{b^2}{r^2}\right) \quad (9.36)$$

de sorte que les trajectoires $r(\phi)$ sont des droites passant à la distance b du trou noir (d'où le nom de paramètre d'impact) et faisant un angle ϕ_0 (ou $\phi_0 + \pi$) avec l'axe des abscisses

$$r(\phi) = \pm \frac{b}{\cos(\phi - \phi_0)} \quad (9.37)$$

À grande distance du trou noir, **les trajectoires des photons sont rectilignes**, comme on s'y attend.

Exercice 94 : Montrer que les équations paramétriques (9.36) donnent bien des solutions rectilignes.

Dans le cas général, il y a **déviations de la lumière**, comme le montre la Fig. 9.5, et on peut calculer l'**angle de déviation**, qui dépend du paramètre d'impact

$$\Delta\phi = \int \frac{dr}{r \sqrt{\left(\frac{r}{b}\right)^2 + \frac{R_S}{r} - 1}} \quad (9.38)$$

où l'intégration est effectuée sur l'ensemble de la trajectoire. Pour des trajectoires passant à suffisamment grande distance, on peut faire un développement limité sous l'intégrale, donnant l'expression de l'angle de déviation d'une **lentille gravitationnelle**

$$\Delta\phi = \frac{4GM}{bc^2} \quad (9.39)$$

Le potentiel effectif Φ_γ permet de discuter quelques propriétés des trajectoires des photons. Comme il n'a qu'un seul extrémum, qui est un maximum, en $r = (3/2)R_S$, ce rayon correspond à la **seule orbite circulaire (instable) pour les photons**. On peut imaginer qu'un observateur téméraire situé à cette distance et qui regarderait perpendiculairement à la direction du trou noir verrait l'arrière de sa propre tête... De plus, la valeur maximale du potentiel est

$$\Phi_{\gamma,\max} = \Phi_\gamma\left(\frac{3R_S}{2}\right) = \frac{4}{27} \left(\frac{bc}{R_S}\right)^2 \quad (9.40)$$

ce qui permet d'écrire

$$\left(\frac{dr}{d\tilde{t}}\right)^2 = c^2 \left[1 - \frac{\Phi_\gamma(r)}{c^2}\right] \geq c^2 \left[1 - \frac{4}{27} \left(\frac{b}{R_S}\right)^2\right] \quad (9.41)$$

On en déduit que si le paramètre d'impact b est inférieur à une valeur critique $b_c = (3\sqrt{3}/2)R_S$, la trajectoire n'est pas bornée : suivant la direction initiale, un photon est capturé par le trou noir ou s'échappe à l'infini. Dans le cas contraire $b > b_c$, suivant la position initiale, le photon est capturé par le trou noir, éventuellement après un passage à l'apoastre, ou part à l'infini, éventuellement après un passage au périastre.

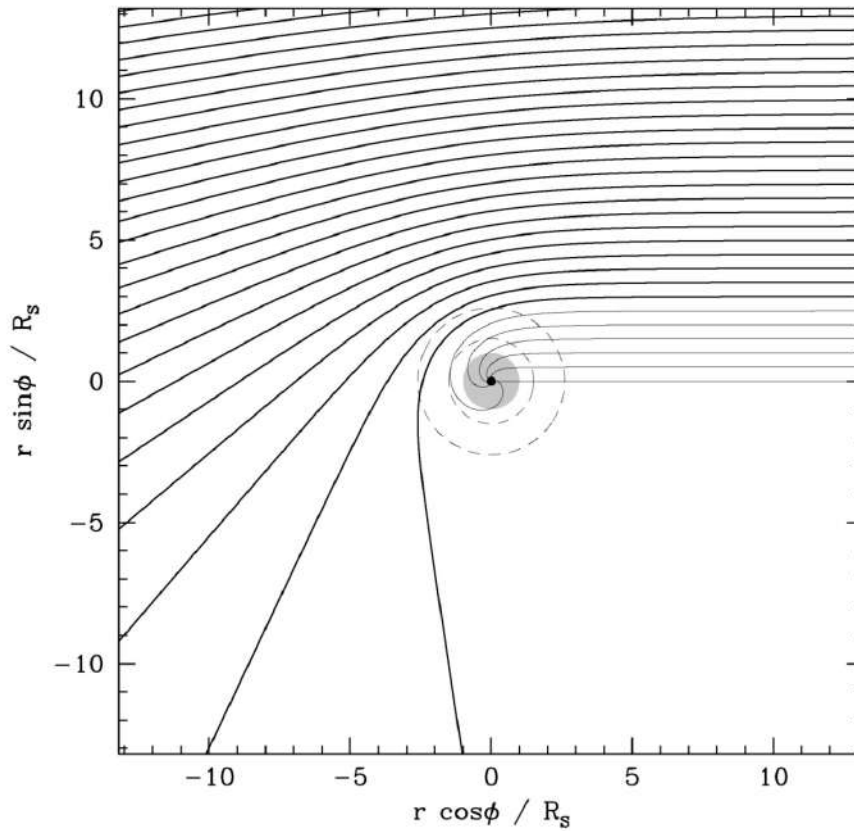


FIGURE 9.5 – **Trajectoires de photons au voisinage d'un trou noir de Schwarzschild.** Les photons arrivent de la droite avec des paramètres d'impact variés. Les trajectoires en gris indiquent les photons finalement capturés par le trou noir. La région cachée par l'horizon des événements est en gris, et les deux cercles indiquent la sphère des photons à $r = (3/2)R_S$ et le paramètre d'impact critique $b_c = (3\sqrt{3}/2)R_S$. [Crédit : F. Daigne]

9.2.3 Le trou noir de Kerr

Le trou noir de Kerr, à la différence de celui de Schwarzschild, est en rotation, il doit donc être traité en **symétrie axiale** et dispose d'un paramètre supplémentaire qui est son **moment cinétique** J . Il présente également une singularité en $r = 0$, cachée par un horizon des événements dont le rayon est

$$R_H = \frac{GM}{c^2} \left[1 + \sqrt{1 - \left(\frac{Jc}{GM^2} \right)^2} \right] \quad (9.42)$$

Sans surprise, on retrouve le rayon de Schwarzschild lorsque $J = 0$. À la différence du trou noir de Schwarzschild, la limite statique d'un trou noir de Kerr n'est pas confondue avec son horizon, mais se situe un peu plus loin, définissant une région intermédiaire appelée **ergorégion**²⁰, à l'intérieur de laquelle une particule matérielle ne peut rester immobile par rapport aux étoiles lointaines, et est contrainte de tourner dans le même sens que le trou noir. En d'autres termes, **le trou noir entraîne l'espace-temps qui l'entoure**²¹.

20. La limite statique est alors appelée **ergosphère**, un nom un peu trompeur, puisque cette région n'est pas sphérique.

21. Cette propriété est à l'origine d'un mécanisme possible d'extraction de l'énergie de rotation du trou noir pouvant expliquer le lancement de jets relativistes dans les AGN.

9.3 Rayonnement de Hawking

9.3.1 Évaporation d'un trou noir

Classiquement, rien ne peut sortir d'un trou noir, pas même les photons, de sorte qu'il ne rayonne pas. La mécanique quantique modifie cet état de fait en permettant d'extraire de l'énergie de masse par la création d'une **paire virtuelle particule-antiparticule** au voisinage de l'horizon. Une telle paire peut en effet apparaître en "empruntant" au vide une énergie au moins égale à l'énergie de masse $\Delta E = 2mc^2$ (une particule et son antiparticule ont la même masse). Cette **fluctuation quantique du vide** est autorisée par effet tunnel, et la **durée de vie** de cette paire virtuelle est donnée par la relation d'**incertitude de Heisenberg** sous la forme $\Delta E \Delta t \sim \hbar$ d'où

$$\Delta t \sim \frac{\hbar}{\Delta E} = \frac{\hbar}{2mc^2} \quad (9.43)$$

En supposant que ces particules sont relativistes, on peut estimer leur séparation au bout du temps Δt , qui est de l'ordre de leur **longueur d'onde Compton**

$$\Delta x \sim c\Delta t \sim \frac{\hbar c}{\Delta E} \sim \frac{\hbar}{2mc} \quad (9.44)$$

Si cette distance est comparable à la taille caractéristique du trou noir, c'est-à-dire le rayon de l'horizon $\Delta x \sim R_S$, la probabilité qu'une des deux particules échappe à son emprise devient non négligeable. L'une des particules passe derrière l'horizon et **l'autre devient réelle, extrayant ainsi de la masse-énergie du trou noir**. Comme Hawking l'a montré en 1974, on peut y associer un rayonnement, dont l'énergie caractéristique est donc²²

$$\Delta E \sim \frac{\hbar c}{R_S} = \frac{\hbar c^3}{2GM} \quad (9.45)$$

ce qui correspond à une température caractéristique

$$T \sim \frac{\Delta E}{k_B} \sim \frac{\hbar c^3}{2k_B GM} \quad (9.46)$$

dont on va voir qu'elle est, à un facteur numérique près, la **température de Hawking**

9.3.2 Thermodynamique des trous noirs

Ce rayonnement est l'une des conséquences de la théorie de la **thermodynamique des trous noirs** développée par Hawking, fondée sur une **analogie entre l'entropie et l'aire d'un trou noir**²³. On définit cette dernière comme la surface de l'horizon des événements, soit, pour un trou noir de Schwarzschild

$$A = 4\pi R_S^2 = \frac{16\pi G^2 M^2}{c^4} \quad (9.47)$$

L'**entropie d'un trou noir** S_{BH} est proportionnelle à son aire A , soit²⁴

$$S_{\text{BH}} = \frac{1}{4} k_B \frac{A}{l_P^2} = \frac{k_B c^3}{4\hbar G} A \quad (9.48)$$

22. Remarquons que ce sont les particules de masse suffisamment faible qui peuvent ainsi s'échapper, puisque Δx augmente lorsque ΔE (et donc m) diminue. On constate sans surprise que plus le trou noir est massif, plus cette condition est restrictive.

23. Cette idée est due à J. Bekenstein.

24. Le coefficient numérique $1/4$ a été déterminé par Hawking.

où l_P est la **longueur de Planck**, construite à partir des constantes fondamentales \hbar , G et c , à l'instar des autres **grandeurs de Planck**²⁵

$$l_P = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} \approx 1.62 \cdot 10^{-35} \text{ m} \quad (9.51)$$

Exercice 95 : Construire les grandeurs de Planck à partir des constantes \hbar , G et c .

À partir de cette définition et de l'énergie de masse $E_{\text{BH}} = Mc^2$, on peut définir une température en écrivant la relation connue en physique statistique

$$\frac{1}{T} = \frac{dS}{dE} \quad (9.52)$$

Appliquée à E_{BH} et S_{BH} , cette relation définit la **température de Hawking**²⁶

$$T_H = \frac{\hbar c^3}{8\pi k_B G M} \quad (9.53)$$

Exercice 96 : Démontrer la relation (9.53).

Numériquement, la température de Hawking est extrêmement faible pour les trous noirs stellaires et les trous noirs supermassifs

$$T_H \approx 6 \cdot 10^{-8} \left(\frac{M_\odot}{M} \right) \text{ K} \quad (9.54)$$

Seuls les micro trous noirs hypothétiques auraient une température de Hawking élevée. Prenant par exemple $M = 10^{14} \text{ g} = 5 \cdot 10^{-20} M_\odot$, on trouve $T_H \approx 1.2 \cdot 10^{12} \text{ K}$. Le trou noir rayonnant comme un corps noir sphérique de rayon R_S et à la température T_H , on peut en déduire sa **luminosité**

$$L = 4\pi R_S^2 \sigma T_H^4 = \frac{\hbar c^6}{15360\pi (GM)^2} \quad (9.55)$$

Exercice 97 : Obtenir la luminosité (9.55). On rappelle que l'expression de σ est donnée en (3.13).

On peut en déduire une équation d'évolution pour la masse M , puisque cette luminosité est associée à une diminution de la masse-énergie du trou noir

$$\frac{dE_{\text{BH}}}{dt} = -L \quad (9.56)$$

de sorte qu'en intégrant et en faisant apparaître la masse de Planck et le temps de Planck, on a la loi d'évolution d'un trou noir de masse initiale M_0 comme

$$M = M_0 \left(1 - \frac{t}{\tau} \right)^{1/3} \quad (9.57)$$

25. On définit aussi la **masse de Planck** m_P , l'**énergie de Planck** e_P et le **temps de Planck** t_P

$$m_P = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} \quad e_P = \sqrt{\frac{\hbar c^5}{G}} \quad t_P = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^5}} \quad (9.49)$$

dont les valeurs numériques sont approximativement

$$m_P \approx 2.18 \cdot 10^{-8} \text{ kg} \quad e_P \approx 1.96 \cdot 10^9 \text{ J} \quad t_P \approx 5.39 \cdot 10^{-44} \text{ s} \quad (9.50)$$

26. L'existence de cette température est un effet quantique, car dans la limite classique $\hbar \rightarrow 0$, on a $T_H \rightarrow 0$.

avec un **temps caractéristique**

$$\tau = 5120\pi t_P \left(\frac{M_0}{m_p}\right)^3 \approx 6.7 \cdot 10^{74} \left(\frac{M_0}{M_\odot}\right)^3 \text{ s} \approx 2.1 \cdot 10^{58} \left(\frac{M_0}{M_\odot}\right)^3 \text{ milliards d'années} \quad (9.58)$$

Exercice 98 : Démontrer la loi d'évolution de la masse (9.57) avec le temps caractéristique (9.58).

La seule évaporation qu'on peut donc espérer observer est celle des **micro trous noirs primordiaux**²⁷, dont l'existence n'est pas prouvée. Remarquons à ce propos que l'évaporation du trou noir n'est possible que si la température de l'environnement thermique du trou noir est inférieure à T_H , qui est elle-même très faible, sauf justement pour les micro trous noirs. En particulier, il faut que T_H soit supérieure à la température du fond diffus cosmologique, actuellement de 2.7 K. D'autre part, un trou noir qui s'évapore devient de plus en plus chaud ($T_H \propto 1/M$). Il faut noter que les derniers instants d'un trou noir sont difficiles à décrire, car les effets de **gravité quantique** interviennent lorsque le rayon du trou noir devient de l'ordre de sa longueur d'onde Compton,

$$\frac{\hbar}{Mc} \sim \frac{2GM}{c^2} \quad (9.59)$$

ce qui correspond à $M \sim m_P$. Le traitement correct des ultimes instants d'un trou noir en évaporation requiert donc une physique encore très incertaine.

27. Pour le micro trou noir mentionné plus haut, on a $\tau \simeq 2.6$ milliards d'années.

Chapitre 10

Le milieu interstellaire

10.1 Introduction

10.1.1 Un système physique complexe

Le **milieu interstellaire** (MIS)¹ désigne, par définition, l'ensemble des régions de l'espace situées entre les étoiles, à l'intérieur d'une galaxie. On peut le distinguer des environnements **circumstellaires** où les processus physiques sont dominés par l'influence d'une étoile centrale, et des environnements **intergalactiques** qui sont constitués d'un plasma très chaud et très diffus, en interaction avec les structures de la matière noire à grande échelle. Tous ces milieux présentent néanmoins des caractéristiques communes, et sont régis par les mêmes processus physiques.

Composé d'un mélange de **gaz** et de **poussières**, le MIS est parcouru par des particules de haute énergie que sont les **rayons cosmiques**, baigné de **rayonnements électromagnétiques** d'origines diverses couvrant l'ensemble du spectre, agité par la **turbulence** et les **chocs**, et traversé par un **champ magnétique** omniprésent. Il est le siège de la **formation des étoiles** et des systèmes planétaires, à la fin d'un processus complexe où gravité, turbulence, et champs magnétiques jouent un rôle essentiel. Il est aussi le lieu où **ces étoiles réinjectent matière et énergie** tout au long de leur vie, parfois de manière cataclysmique, en enrichissant le MIS en **éléments chimiques** nouveaux, qui se combinent pour former des **molécules** d'une surprenante complexité pour un environnement aussi hostile.

S'il est très peu massif, représentant $\sim 10\%$ de la masse baryonique de la Galaxie² et $\sim 1\%$ de sa masse totale, laquelle est dominée par la matière noire, le MIS joue un rôle majeur dans la formation et l'évolution des étoiles, au cœur d'un véritable **écosystème Galactique** (Fig. 10.1). En effet, il est observé que les étoiles naissent au sein des régions les plus denses et froides du MIS, les **nuages moléculaires**, et que ces mêmes étoiles rétroagissent³ constamment sur le MIS environnant. Pour les astrophysiciens, le MIS apparaît également comme le pinnacle des **systèmes physiques complexes**, car les processus qui le régissent, en interaction parfois fortement non-linéaire, couvrent l'ensemble des domaines de la physique, de la mécanique à l'électromagnétisme, en passant par la thermodynamique et les processus quantiques. Enfin, le MIS est un laboratoire de la physique dans des conditions extrêmes, puisque la **densité des particules** qu'on y trouve varie typiquement de $\sim 4 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^{-3}$ dans les régions les plus diffuses, à $\sim 10^6 \text{ cm}^{-3}$ dans les régions les plus denses⁴, et que les **températures** peuvent atteindre des valeurs extrêmes, de $\sim 10 \text{ K}$ à $10^6\text{-}10^7 \text{ K}$. En résumé, le MIS est donc tout à la fois le rêve et le cauchemar des astrophysiciens.

1. En anglais *interstellar medium (ISM)*.
2. Par convention, "la Galaxie", avec une majuscule, désigne notre galaxie.
3. En anglais, on parle de *feedback*.
4. Remarquons que cette densité de particules est encore environ un million de fois plus faible que celle des vides les plus poussés réalisés en laboratoire.

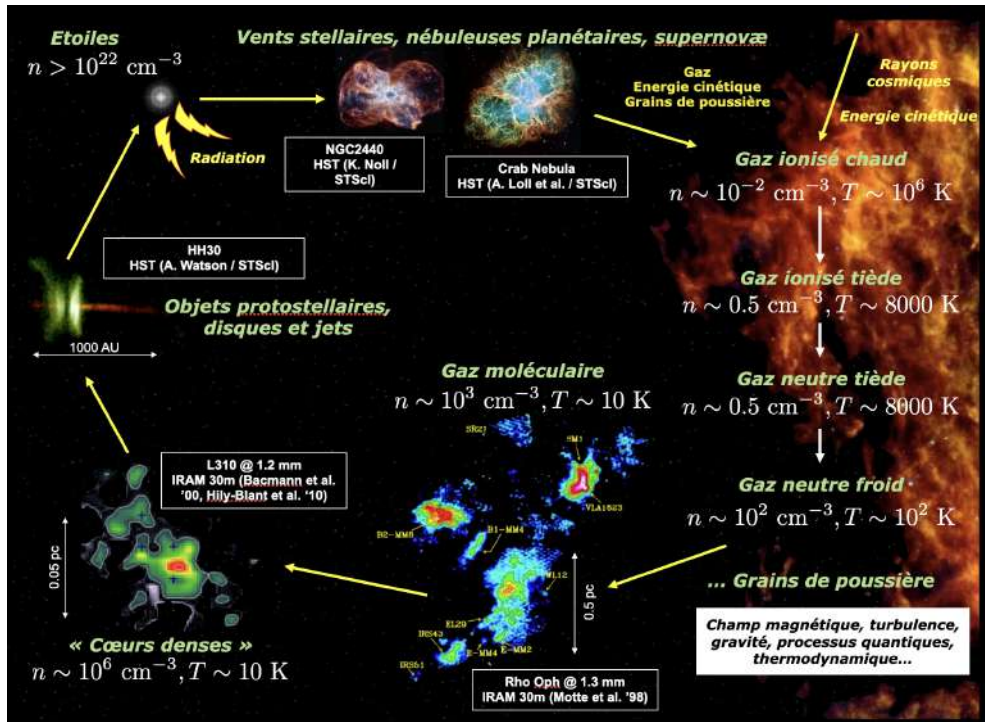


FIGURE 10.1 – Le cycle de la matière interstellaire.

10.1.2 Des questions fondamentales, parfois encore ouvertes

Si l'on se penche un peu plus précisément sur la connection entre physique du milieu interstellaire et formation des étoiles, on devra s'interroger sur les processus capables de mener du gaz interstellaire diffus (densité de protons⁵ $n_H \sim 10 \text{ cm}^{-3}$) aux densités des objets stellaires ($n_H \sim 10^{23} \text{ cm}^{-3}$), soit **22 ordres de grandeur en densité**. On évoquera alors la question du **taux de formation stellaire** (SFR), qui représente la masse de nouvelles étoiles formées par unité de temps,

$$\dot{M}_* \equiv \frac{dM_*}{dt} \quad (10.2)$$

qu'on estime à environ $\dot{M}_* \approx 1 M_\odot \cdot \text{an}^{-1}$ dans notre Galaxie, soit deux ordres de grandeur inférieur à celui auquel on s'attendrait si l'on laissait le gaz disponible s'effondrer sur lui-même sous l'effet de sa propre gravité. Cette **régulation de la formation stellaire**, au travers de l'action de la turbulence, du champ magnétique, et des processus de rétroaction, est encore mal comprise. Tout le gaz disponible M_H n'étant pas incorporé dans des étoiles, il se pose la question de savoir ce qui détermine l'**efficacité de la formation stellaire** (SFE)

$$\eta \equiv \frac{M_*}{M_H} \quad (10.3)$$

Dans le même thème, on cherche à comprendre ce qui gouverne la **fonction de masse initiale** des étoiles (IMF), c'est-à-dire la distribution en masse des nouvelles étoiles (Fig. 10.2), définie par

$$\xi(M_*) \equiv \frac{dN}{d \log M_*} = M_* \frac{dN}{dM_*} \quad (10.4)$$

5. La densité de protons, parfois appelée densité totale du gaz, est la somme des densités des différentes formes de l'hydrogène, affectées des coefficients "stœchiométriques"

$$n_H = n(\text{H}) + n(\text{H}^+) + n(\text{H}^-) + 2n(\text{H}_2) \quad (10.1)$$

où dN est le nombre d'étoiles formées dont la masse est comprise en M_* et $M_* + dM_*$, étant entendu que cette masse initiale est un paramètre déterminant pour l'ensemble de la vie des étoiles. On ne sait pas encore précisément, en particulier, si cette fonction est "universelle" ou bien si elle dépend des conditions environnementales.

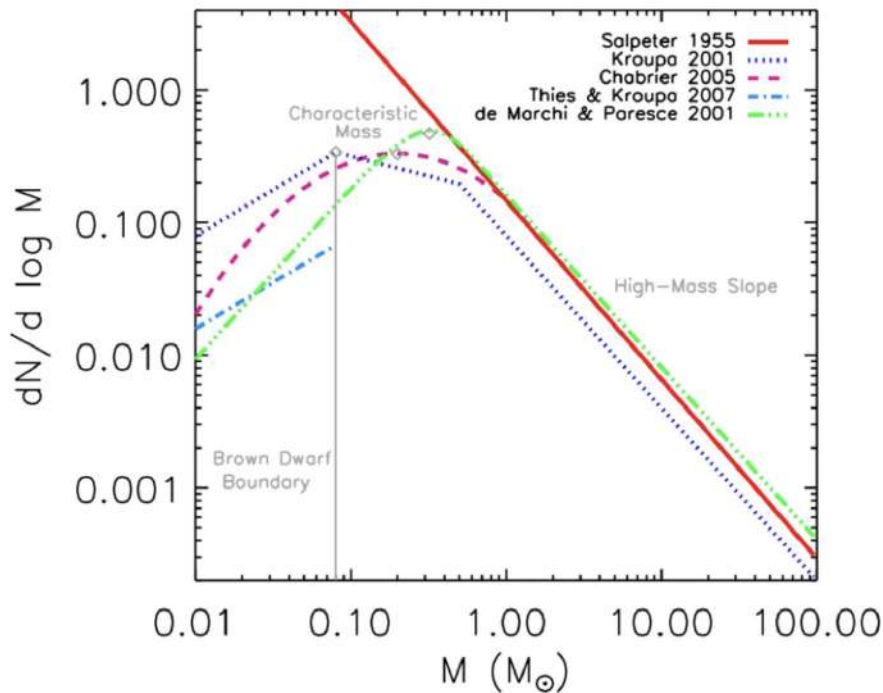


FIGURE 10.2 – Fonction de masse initiale des étoiles [37].

On ne comprend pas encore bien non plus comment est régie la structuration du milieu interstellaire, dont on observe qu'il existe sous plusieurs **phases thermodynamiques** distinctes, et comment le gaz évolue dynamiquement d'une phase à l'autre. Dit plus généralement, on cherche à comprendre comment interagissent les processus physiques qui déterminent la structure, la dynamique, et l'évolution du milieu interstellaire, sa composition chimique et ses conditions physiques (densité, température, fraction d'ionisation), étant entendu qu'il convient également de comprendre comment on peut, d'abord, déterminer ces conditions physiques à partir des observations.

La physique du MIS joue également un rôle dans la formation des systèmes planétaires, qui naissent en même temps que les **objets stellaires jeunes** (*Young Stellar Objects*, YSO), au sein de **disques protoplanétaires** (*Proto-Planetary Disks*, PPD). La composition chimique de ces nouvelles planètes est potentiellement héritée de celle du nuage interstellaire parent, mais elle est peut-être, au contraire, fortement altérée. C'est la question de **l'héritage chimique** au cours de la formation stellaire. Ce processus de contraction fantastique nécessitant l'évacuation d'une grande quantité de moment cinétique, on observe la formation de **jets protostellaires** et de **flots** (*outflows* en anglais), qui impactent le milieu environnant. D'autres processus de rétroaction sont d'ailleurs à l'œuvre, **vents stellaires** des étoiles jeunes comme évoluées, **rémanents de supernovæ** (*supernovæ remnants*, SNR), formation de **régions HII** autour des jeunes étoiles massives, qui peuvent potentiellement expliquer la formation de nouvelles étoiles par compression des régions voisines (*triggered star formation*) ou au contraire supprimer cette possibilité en dispersant le gaz accumulé (*negative feedback*).

Enfin, la physique du MIS participe à **l'évolution des galaxies**. Ainsi, la variabilité de l'efficacité de formation stellaire prend, à l'échelle des galaxies, la forme de la **loi de Kennicutt-Schmidt** (Fig. 10.3)

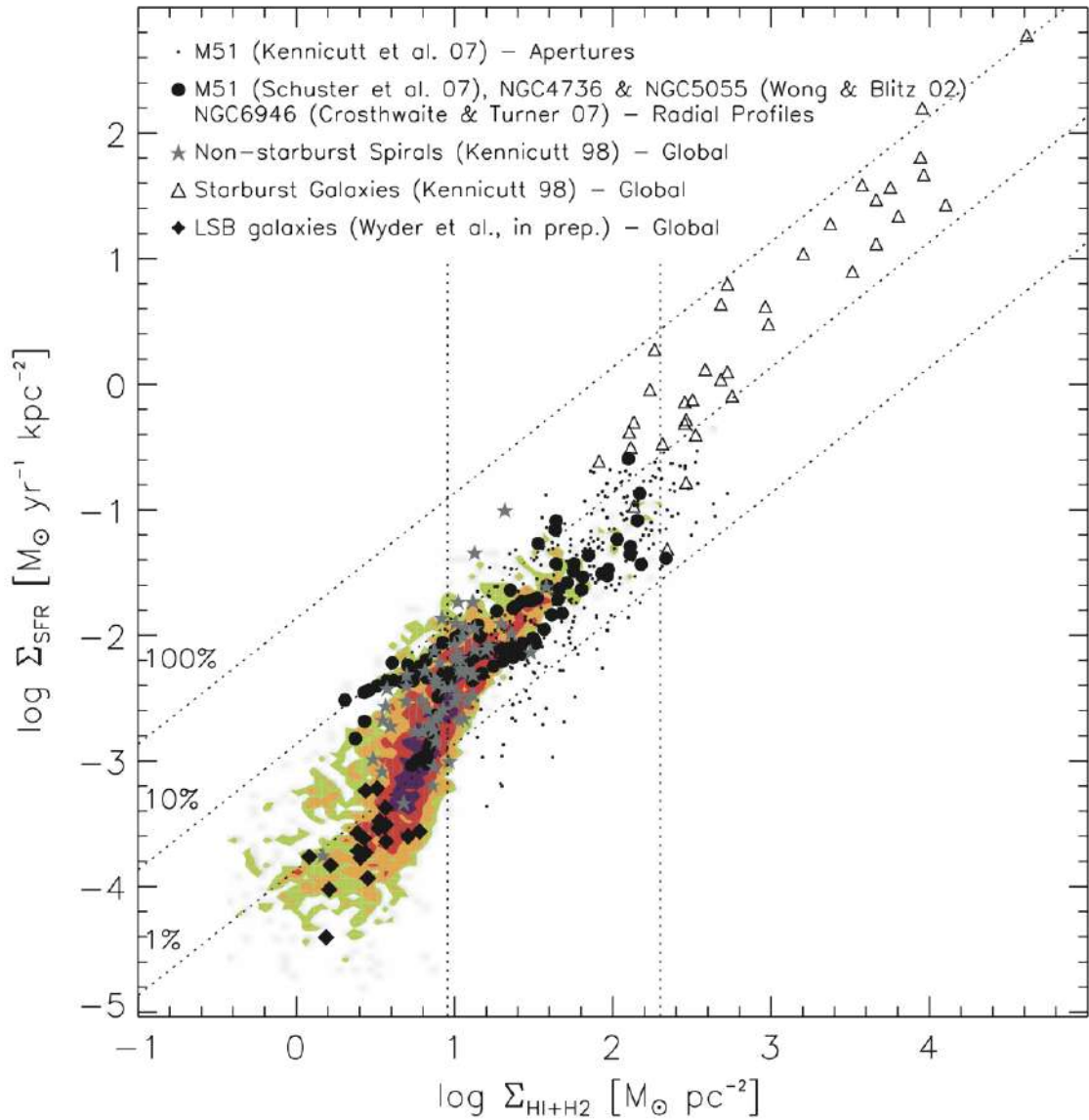


FIGURE 10.3 – **Relation de Kennicutt-Schmidt** entre la densité surfacique du gaz atomique et moléculaire et le taux surfacique de formation stellaire [38].

reliant le taux de formation stellaire par unité de surface à la densité surfacique du gaz, $\Sigma_{\text{SFR}} \propto \Sigma_{\text{H}}^{\alpha}$, avec un exposant α de l'ordre de 1.5, mais qui tend à diminuer ($\alpha \sim 1$) dans les galaxies les plus massives. Aux échelles cosmologiques (Fig. 10.4), on observe une évolution du taux de formation stellaire en fonction du redshift, avec un maximum aux alentours de $z \sim 2-3$ (*cosmic noon*), une augmentation de la densité stellaire $\rho_*(z)$ et de la métallicité $Z(z)$ aux redshifts les plus bas, toutes tendances qu'on interprète comme étant dues à **l'incorporation des baryons** du gaz interstellaire dans les étoiles, à la **nucléosynthèse stellaire**, et à la **réinjection** de ces éléments dans le milieu interstellaire via les vents et les supernovæ. Les **poussières** jouant un rôle important dans le refroidissement du gaz nécessaire à la formation des étoiles, cela pose la question des processus à l'œuvre dans des environnements à très faible métallicité, pour former les **premières étoiles (population III)**.

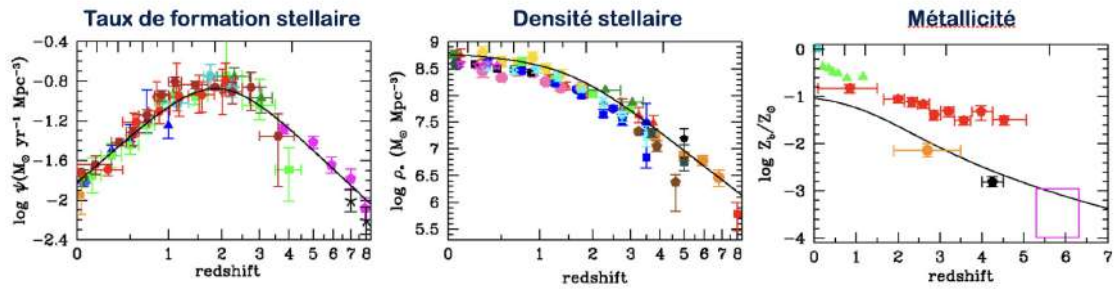


FIGURE 10.4 – Evolution du taux de formation stellaire, de la densité des étoiles et de la métallicité avec le redshift [39].

10.2 Structure et composition du MIS

10.2.1 Un tour de la Galaxie

Notre Galaxie (Fig. 10.5) est une **spirale barrée**, dont le **disque stellaire** fait approximativement 15 kpc de rayon. Le système solaire se trouve à environ 8.5 kpc du centre Galactique, au sein du bras d'Orion. Dans celui-ci et dans les autres bras (Persée, Règle-Cygne, Centaure et Sagittaire), on observe des étoiles jeunes et massives de type spectral O et B, souvent formées en **amas**, et qui produisent des **régions HII**. On y observe également des **nuages sombres** (*dark clouds*) où la poussière éteint le rayonnement des étoiles d'arrière-plan. Dans le disque, la distribution verticale des étoiles suit approximativement une loi exponentielle, avec une **échelle de hauteur** de l'ordre de 250 pc. Au centre de la galaxie, un **bulbe** approximativement sphérique, de rayon 2 kpc, contient très peu de gaz ou de poussière, et donc principalement de vieilles étoiles, avec une densité pas si différente néanmoins de celle du voisinage solaire ($\sim 1 M_{\odot} \cdot \text{pc}^{-3}$). Un **halo sphérique**, de rayon 30 à 40 kpc, est principalement constitué d'**amas globulaires**. Là encore, il y a très peu de poussière et de gaz, et le halo est principalement composé de vieilles étoiles de faible métallicité. Enfin, un **halo sphérique de matière noire** d'un rayon de 100 à 200 kpc englobe le tout.

Au voisinage du Soleil, la densité du gaz est très faible, de l'ordre de $5 \cdot 10^{-2} \text{ cm}^{-3}$, et la température est très élevée ($\sim 10^6 \text{ K}$), ce qui correspond aux conditions du **gaz coronal** ou **HIM** pour *Hot Ionized Medium*. On a de bonnes raisons de penser que cette **bulle locale**, de forme approximativement ellipsoïdale, grossièrement centrée sur le Soleil et de rayon $\sim 150\text{-}200 \text{ pc}$, a pour origine des restes de plusieurs supernovæ ayant explosé il y a 10 à 15 Myr [40].

10.2.2 Bilans de masse

Si la masse totale de la Galaxie, jusqu'aux confins du halo de matière noire, est estimée à environ $1.5 \cdot 10^{12} M_{\odot}$ [41], celle à l'intérieur d'un rayon de 15 kpc autour du centre Galactique est d'environ $10^{11} M_{\odot}$, répartie également entre les étoiles ($\sim 5 \cdot 10^{10} M_{\odot}$) et la matière noire ($\sim 5 \cdot 10^{10} M_{\odot}$). Dans ce même volume, **la masse de gaz est estimée à environ $\sim 6.7 \cdot 10^9 M_{\odot}$, dont 73% d'hydrogène et 27% d'hélium**, les autres éléments contribuant de manière négligeable au bilan de masse. L'hydrogène est présent sous différentes formes : **60% sous forme atomique neutre HI, 23% sous forme ionisée HII et 17% sous forme moléculaire H₂**, ces pourcentages étant entendus en masse.

Le MIS Galactique est l'un des éléments d'un **système dynamique** plus vaste, et il échange de la masse avec les autres éléments de ce système que sont le milieu intergalactique, les étoiles, et les vestiges stellaires (naines blanches, étoiles à neutrons, trous noirs). On estime ainsi l'influx de masse⁶ du milieu intergalactique vers le milieu interstellaire Galactique à environ $0.5 M_{\odot} \cdot \text{an}^{-1}$. Dans le même

6. Dû à la chute dans le puits de potentiel de la matière noire

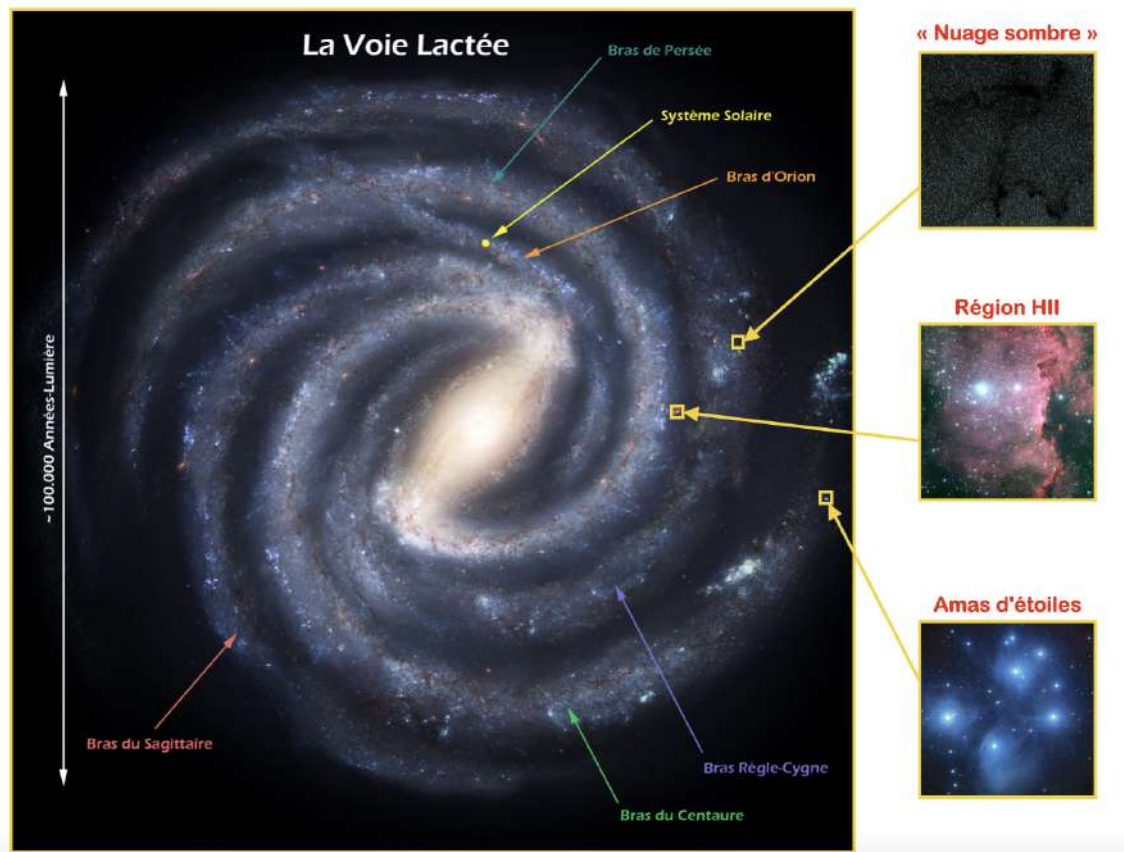
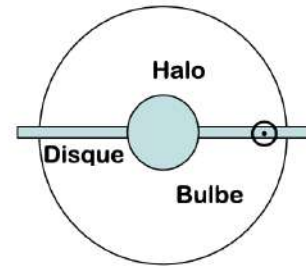
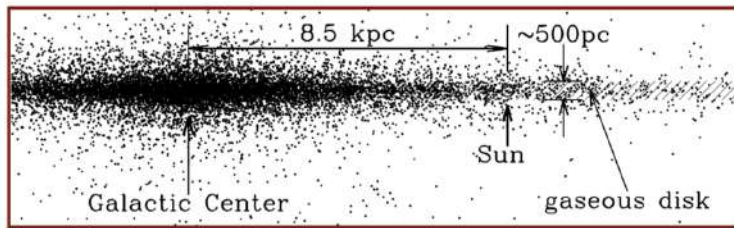


FIGURE 10.5 – Structure de la Galaxie

temps, $1.3 M_{\odot} \cdot \text{an}^{-1}$ sont convertis en étoiles à partir du MIS, c'est le fameux **taux de formation stellaire** déjà mentionné. Au travers des épisodes de perte de masse (vents, nébuleuses planétaires, novæ et supernovæ), $0.5 M_{\odot} \cdot \text{an}^{-1}$ sont retournées au MIS. Enfin, $0.2 M_{\odot} \cdot \text{an}^{-1}$ sont bloqués *ad vitam æternam* dans les vestiges stellaires.

10.2.3 Les composantes de la physique interstellaire

Les différents acteurs de l'écosystème interstellaire, qu'on présentera plus en détail dans la suite, sont :

- **Le gaz**, constitués d'ions, d'atomes et molécules présentant le plus souvent des distributions de vitesses thermiques (distribution de Maxwell-Boltzmann), étant entendu que la température peut varier d'un point à un autre.

- **Les poussières**, des particules solides mélangées au gaz, de formes complexes, dont la taille varie typiquement de $\sim 1 \text{ nm}$ à $\sim 0.1 \mu\text{m}$, et constitués majoritairement d'éléments lourds (carbone, silicium, magnésium, fer, oxygène). On distingue les grains carbonés et les silicates.
- **Les rayons cosmiques**, des particules de haute énergie, essentiellement des électrons, des protons et des noyaux atomiques, accélérés à des vitesses relativistes.
- **Le rayonnement électromagnétique**, qui a plusieurs origines : rayonnement stellaire dans le visible et l'UV, émission thermique des poussières dans l'infrarouge, raies spectrales atomiques et moléculaires, rayonnement *free-free* (autrement appelé *Bremsstrahlung*), rayonnement synchrotron, rayonnements X et γ associés aux objets compacts, et, baignant le tout, le fond diffus cosmologique (CMB).
- **Le champ magnétique**, dont l'origine est liée à un effet dynamo du fluide ionisé en mouvement que constitue le MIS Galactique. Il canalise la propagation des rayons cosmiques et participe à leur accélération. Il joue également un rôle dynamique dans la formation des structures du MIS et la régulation de la formation stellaire.
- **Le champ gravitationnel**, essentiellement dû aux étoiles, il peut être localement dominé par l'auto-gravité de la masse de gaz dans les régions les plus denses.
- **La turbulence**, entretenue par la rotation différentielle de la Galaxie et par les explosions de supernovæ, elle joue un rôle dans la formation des structures du MIS et régule en partie la formation stellaire.

10.2.4 Densités et bilan d'énergie du MIS

À ces différents acteurs sont associées diverses formes d'énergie dont il est possible d'estimer la densité volumique, au moins pour le MIS local : énergie thermique, énergie cinétique turbulente, énergie radiative des étoiles, énergie radiative des poussières, CMB, énergie magnétique, énergie des rayons cosmiques, énergie gravitationnelle. On constate que **toutes ces densités d'énergie sont du même ordre de grandeur, entre $0.3 \text{ eV} \cdot \text{cm}^{-3}$ et $1.4 \text{ eV} \cdot \text{cm}^{-3}$** . On est donc dans une situation proche de **l'équipartition**. Il est probable que certaines "identités" soient fortuites, mais d'autres témoignent de forts **couplages** entre processus physiques.

Par conséquent, il est souvent difficile de négliger un processus devant les autres, rendant la physique du MIS extrêmement complexe à résoudre. C'est d'autant plus vrai que **le MIS est loin d'être à l'équilibre thermodynamique** : de même qu'il échange de la masse avec son environnement, il échange aussi de l'énergie. Il en reçoit essentiellement de la part des étoiles (rayonnement UV et énergie cinétique des ejecta de supernovæ), la convertit sous les diverses formes mentionnées à l'instant, et il la perd *in fine* en rayonnant vers le milieu extragalactique.

10.3 Le gaz interstellaire

10.3.1 Un milieu multiphasique et dynamique

Le gaz interstellaire se présente sous différentes phases (Fig. 10.6), caractérisées par des valeurs notablement différentes de la densité du gaz n_{H} , de la température T , ou encore de la fraction d'ionisation $x_e = n_e/n_{\text{H}}$. On distingue ainsi :

- **Le gaz coronal ou HIM (Hot Ionized Medium)** : très chaud ($T \sim 10^6 \text{ K}$ à 10^7 K) et diffus ($n_{\text{H}} \sim 4 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^{-3}$), il remplit une grande fraction du volume du MIS ($f_V \sim 0.5$), mais n'en représente que 2% en masse. Il est issu des restes d'explosions de supernovæ.
- **Le gaz HII photo-ionisé ou WIM (Warm Ionized Medium)** : lui aussi très chaud ($T \sim 10^4 \text{ K}$), il peut présenter des densités variables ($n_{\text{H}} \sim 0.3 \text{ cm}^{-3}$ à 10^4 cm^{-3}) car il est associé aux régions HII dont l'évolution démarre de régions denses des nuages moléculaires. De ce fait, il représente 18% en masse du gaz, malgré sa faible fraction volumique $f_V \sim 0.1$.
- **Le gaz atomique chaud ou WNM (Warm Neutral Medium)** : légèrement moins chaud ($T \sim 5000 \text{ K}$), sa densité est typiquement $\sim 0.6 \text{ cm}^{-3}$. Il représente 40% en volume ($f_V \sim 0.4$) et

		Phase	Masse	T (K)	n_H (cm^{-3})
Milieu ionisé $x_e = n_e/n_H > 0.1$		Coronal gas (HIM) $f_V \approx 0.5?$ $\langle n_H \rangle f_V \approx 0.002 \text{ cm}^{-3}$	2%	$\gtrsim 10^{5.5}$	~ 0.004
		HII gas $f_V \approx 0.1$ $\langle n_H \rangle f_V \approx 0.02 \text{ cm}^{-3}$	18%	10^4	$0.3 - 10^4$
Milieu neutre $x_e = n_e/n_H < 0.1$	Atomique	Warm HI (WNM) $f_V \approx 0.4$ $n_H f_V \approx 0.2 \text{ cm}^{-3}$	25%	~ 5000	0.6
		Cool HI (CNM) $f_V \approx 0.01$ $n_H f_V \approx 0.3 \text{ cm}^{-3}$	25%	~ 100	30
	Moléculaire	Diffuse H_2 $f_V \approx 0.001$ $n_H f_V \approx 0.1 \text{ cm}^{-3}$		$\sim 50 \text{ K}$	~ 100
		Dense H_2 $f_V \approx 10^{-4}$ $\langle n_H \rangle f_V \approx 0.2 \text{ cm}^{-3}$	30%	$10 - 50$	$10^3 - 10^6$
		Cool stellar outflows		$50 - 10^3$	$1 - 10^6$

Equilibre de pression

Auto-gravitant

FIGURE 10.6 – Les différentes phases thermodynamiques du gaz interstellaire. Adapté de [3].

30% en masse du gaz.

- **Le gaz atomique froid ou CNM (Cold Neutral Medium)** : nettement plus froid ($T \sim 100 \text{ K}$) et dense ($n_H \sim 30 \text{ cm}^{-3}$), il se forme par instabilité thermique du WNM pour certaines conditions de pression. Il occupe seulement 1% du volume du MIS, mais représente 20% de la masse du gaz.
- **Le gaz moléculaire diffus** : de température et de densité proches de celles du CNM ($T \sim 50 \text{ K}$ et $n_H \sim 100 \text{ cm}^{-3}$), il se caractérise par la prépondérance de la forme moléculaire de l'hydrogène. Il occupe 0.1% du volume du MIS.
- **Le gaz moléculaire dense** : légèrement plus froid ($T \sim 10 \text{ K}$ à 150 K) et potentiellement nettement plus dense ($n_H \sim 10^3 \text{ cm}^{-3}$ à 10^6 cm^{-3}), il forme des structures auto-gravitantes occupant un volume très faible ($f_V \sim 10^{-4}$) dans lesquelles naissent les étoiles.

On notera que le HIM, les deux milieux atomiques (WNM, CNM) et le milieu moléculaire diffus sont en **équilibre de pression**, avec $P/k_B = n_H T \sim 3000 \text{ K} \cdot \text{cm}^{-3}$. Il faut également être conscient qu'on observe en réalité un continuum de conditions physiques, et non une séparation aussi claire que cette description pourrait le laisser entendre, et que le gaz transite d'une phase à l'autre de manière dynamique, sous l'effet de processus divers de **chauffage** (ondes de choc des supernovæ, effet photoélectrique sur H et He ou sur les grains), de **refroidissement** (expansion adiabatique, rayonnement *free-free*, raies atomiques et moléculaires) et **d'ionisation** (collisionnelle, par les photons UV des étoiles ou les rayons cosmiques).

Enfin, chaque phase est observée par le biais de **traceurs** spécifiques :

- Emission UV, X et synchrotron radio pour le gaz coronal ;
- Emission continuum radio et raies de recombinaison optique de l'hydrogène pour le WIM ;
- Absorption et émission du HI à 21 cm, émission infrarouge de la poussière, raies de structure fine (CII, OI) et raies d'absorption UV/visibles des métaux pour le gaz atomique ;
- Emission du monoxyde de carbone et d'autres molécules (raies rotationnelles millimétriques) et de la poussière dans l'infrarouge lointain, raies d'absorption électronique de H₂ pour les phases moléculaires.

10.3.2 Composition chimique

Eléments chimiques

Du point de vue des éléments chimiques qui composent le gaz, si 99% des atomes présents sont H ou He (avec un rapport en nombre $x_{\text{He}} = N_{\text{He}}/N_{\text{H}} \approx 0.1$), et donc issus de la nucléosynthèse primordiale en compagnie de traces de deuterium et de lithium (34 ppm et $2 \cdot 10^{-3}$ ppm par rapport à H, respectivement), les autres éléments présents dans le MIS sont issus de la **nucléosynthèse stellaire**, aussi appelée **astration**. Les plus abondants sont O (537 ppm), C (295 ppm), Fe (93 ppm), N (74 ppm), Mg (44 ppm) et Si (36 ppm). Les vents stellaires et les explosions de supernovæ permettent cet enrichissement du MIS, quantifié par la notion de **metallicité**, définie comme

$$Z = \sum_{i>\text{He}} \frac{m_i}{M} = 1 - X - Y \quad (10.5)$$

où m_i est la masse de l'élément i présent dans un système de masse totale M . X et Y représentent les fractions en masse de l'hydrogène et de l'hélium. On prend souvent la métallicité solaire $Z_{\odot} = 0.0134$ comme référence, et on constate par exemple que la **metallicité augmente vers le centre Galactique**, avec typiquement un gain de 0.1 par kpc, ce qu'on interprète comme l'effet d'une formation stellaire plus intense dans les régions centrales de la Galaxie.

Molécules

Les éléments, loin de rester isolés, forment des **édifices moléculaires** parfois complexes. On a détecté **plus de 200 molécules** dans le milieu interstellaire ou les environnements circumstellaires (Fig. 10.7), via leurs signatures spectrales, qu'il s'agisse de transitions électroniques dans le visible ou l'UV ou de transitions rovibrationnelles dans les domaines infrarouge et radio. On détecte notamment des **espèces isotopologues**, dans lesquelles un atome est celui d'un isotope minoritaire, telles ¹³C¹⁶O. L'intérêt de ces isotopologues est que ces espèces minoritaires peuvent présenter des raies optiquement minces, permettant une mesure de la densité de colonne, là où l'espèce majoritaire est saturée. Il faut prendre garde que le rapport des abondances des espèces moléculaires peut ne pas refléter le rapport isotopique élémentaire, en raison de processus chimiques favorisant tel ou tel isotope, notamment à basse température. On parle de **fractionation isotopique**. Un cas particulier important est celui des espèces deutérées, où D remplace H, comme DCN ou NH₂D⁺, auquel cas on parle de **deutération**. Notons enfin que certaines espèces détectées dans les environnements d'étoiles évoluées, telles le carbure de silicium (SiC), sont très probablement les précurseurs d'édifices plus gros, les grains de poussière.

10.3.3 Un exemple de phase ionisée, les régions HII

Les **régions HII** se forment autour des étoiles chaudes de type spectral O et B, qui fournissent un flux important de photons au-delà de la limite de Lyman, soit $E > 13.6 \text{ eV}$, ionisant donc une grande partie du gaz environnant. Ces régions sont tracées notamment dans le domaine optique par des **raies de recombinaison en émission** (la raie H α leur donne leur couleur rouge) et elles sont ainsi utilisées,

Composés hydrogénés
 H_2 HD H_3^+ H_2D^+

Chaînes et cycles carbonés

CH	CH^+	C_2	CH_2	CCH	C_3
CH_3	C_2H_2	$l-C_3H$	$c-C_3H$	CH_4	$C_4 ?$
$c-C_3H_2$	$l-C_3H_2$	C_4H	C_5	C_2H_4	C_5H
$l-H_2C_4$	HC_4H	CH_3CCH	C_6H	C_6H_2	HC_6H
C_7H	CH_3C_4H	C_8H	C_6H_6		

Composés contenant de l'hydrogène, de l'oxygène et du carbone

OH	CO	CO^+	H_2O	HCO
HCO^+	HOC^+	C_2O	CO_2	H_3O^+
$HOCO^+$	H_2CO	C_3O	$HCOOH$	CH_2CO
H_2COH^+	CH_3OH	CH_2CHO	HC_2CHO	C_5O
CH_3CHO	$c-C_2H_4O$	CH_3OCHO	CH_2OHCHO	CH_3COOH
CH_2CHOH	$(CH_3)_2O$	CH_3CH_2OH	$(CH_3)_2CO$	$HOCH_2CH_2OH$
$C_2H_5OCH_3$				

Composés contenant de l'hydrogène, de l'azote et du carbone

NH	CN	NH_2	HCN	HNC	N_2H^+
NH_3	$HCNH^+$	H_2CN	$HCCN$	C_3N	CH_2CN
CH_2NH	HC_3N	HC_2NC	NH_2CN	C_3NH	CH_3CN
CH_3NC	HC_3NH^+	C_5N	CH_3NH_2	C_2H_3CN	HC_5N
CH_3C_3N	C_2H_5CN	HC_7N	$CH_3C_5N ?$	HC_9N	$HC_{11}N$

Composés contenant de l'hydrogène, de l'oxygène, de l'azote et du carbone
 NO HNO N_2O $HNCO$ NH_2CHO

Composés soufrés, silicés et autres espèces

SH	CS	SO	SO^+	NS	SiH	SiC
SiN	SiO	SiS	HCl	$NaCl$	$AlCl$	KCl
HF	AlF	CP	PN	H_2S	C_2S	SO_2
OCS	HCS^+	$c-SiC_2$	$SiCN$	$NaCN$	$MgCN$	$MgNC$
H_2CS	$HNCS$	C_3S	$c-SiC_3$	SiH_4	SiC_4	CH_3SH
C_5S	FeO	$AlNC$				

Espèces deutérées

HDO	CCD	DCO^+	DCN	DNC	N_2D^+
NH_2D	ND_2H	ND_3	$HDCO$	D_2CO	HDS
DC_3N	DC_5N	C_4D	CH_2DCCH	CH_2DCN	D_2S
CH_2DOH	CD_2HOH	CH_3OD	$c-C_3HD$	$HDCS$	

Les caractères italiques (H_2) indiquent une détection via des transitions électroniques (UV-visible).

Les ions moléculaires sont en caractères gras (H_3^+).

Les espèces détectées uniquement dans les enveloppes circumstellaires et les nébuleuses (proto)planétaires sont en rouge, celles détectées à la fois dans le milieu interstellaire et dans les étoiles en vert.

Les molécules détectées dans des galaxies extérieures sont soulignées.

On détecte aussi des molécules avec des isotopes mineurs comme ^{13}C , ^{18}O , ^{17}O , ^{15}N , ^{29}Si , ^{34}S , ^{33}S , etc.

FIGURE 10.7 – Quelques unes des molécules détectées dans le milieu interstellaire.

via l'observation de ces raies, pour **caractériser la formation stellaire dans les galaxies extérieures** (Fig. 10.8). L'une des propriétés importantes de ces régions est que leur température est sensiblement la même d'un objet à l'autre, avec $T \sim 7 \cdot 10^3 - 10^4$ K, les variations étant dues essentiellement au type d'étoile responsable de l'ionisation et à la métallicité du gaz.



FIGURE 10.8 – **Exemples de régions HII.** La nébuluse Triffide (M20) et la nébuluse d'Orion (M42).

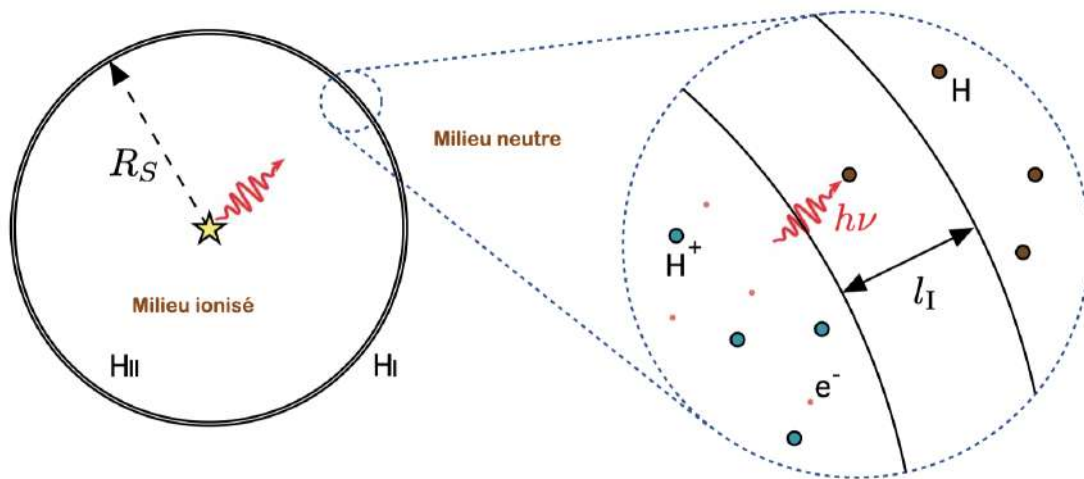


FIGURE 10.9 – **Modèle de la sphère de Strömgren.**

Modèle de la sphère de Strömgren

Le modèle standard pour décrire une région HII est celui de la **sphère de Strömgren** (Fig. 10.9). C'est un modèle statique, à symétrie sphérique, faisant les hypothèses d'une densité n_H du gaz environnant uniforme et d'une ionisation complète ($x_e = 1$). La taille de la région, appelée **rayon de Strömgren**

R_S , est déterminée par l'équilibre d'ionisation-recombinaison dans la zone interne, en introduisant le **taux de production des photons Lyman** Q_0 , typiquement de l'ordre de 10^{49} s^{-1} ,

$$Q_0 = \frac{4}{3}\pi R_S^3 \alpha_B n_e n(\text{H}^+) = \frac{4}{3}\pi R_S^3 \alpha_B n_{\text{H}}^2 \quad (10.6)$$

faisant intervenir un coefficient de recombinaison de l'hydrogène α_B , de l'ordre de quelques $10^{-13} \text{ cm}^3 \cdot \text{s}^{-1}$. Le rayon de Strömngren qu'on en tire prend la forme

$$R_S \approx 9.77 \cdot 10^{18} \left(\frac{Q_0}{10^{49} \text{ s}^{-1}} \right)^{1/3} \left(\frac{n_{\text{H}}}{100 \text{ cm}^{-3}} \right)^{-2/3} \left(\frac{T}{10^4 \text{ K}} \right)^{0.28} \text{ cm} \quad (10.7)$$

et a donc pour ordre de grandeur quelques parsecs. **La frontière entre la région HII et le gaz neutre qui l'entoure est bien marquée**, car le libre parcours moyen d'un photon Lyman dans la région neutre est beaucoup plus petit⁷

$$l_{\text{HI}} \sim \frac{1}{\sigma_{\text{pi}} n_{\text{H}}} \sim 3.4 \cdot 10^{15} \left(\frac{n_{\text{H}}}{100 \text{ cm}^{-3}} \right)^{-1} \text{ cm} \ll R_S \quad (10.8)$$

Exercice 99 : Estimer le flux de photons Lyman Q_0 pour différentes étoiles, en faisant l'hypothèse d'une émission de corps noir à la température T_* .

Exercice 100 : Vérifier l'expression (10.7), en allant chercher l'expression de $\alpha_B(T)$ dans [3].

Notons qu'il est possible de tenir compte de l'hélium, en notant que le taux de recombinaison $\text{He}^+ + e^- \rightarrow \text{He}$ est environ le double de celui de l'hydrogène, que le taux de production pertinent, Q_1 , est celui des photons d'énergie $h\nu > 24.6 \text{ eV}$ (potentiel d'ionisation de He dans son état fondamental), et du rapport des abondances $n(\text{He})/n(\text{H}) \approx 0.1$. En fonction du type spectral, on trouve que la zone HeII est interne à la région HII, avec un rayon au maximum égal à celui de la zone HII.

Échelles de temps

Le modèle statique ci-dessus peut-être obtenu en écrivant l'égalité de deux **temps caractéristiques**, celui d'ionisation τ_i et celui de recombinaison τ_r , avec

$$\tau_i = \frac{4\pi R_S^3 n_{\text{H}}}{3Q_0} \quad \tau_r = \frac{1}{\alpha_B n_{\text{H}}} \quad (10.9)$$

qui sont tous deux de l'ordre de 10^3 an pour une densité $n_{\text{H}} = 100 \text{ cm}^{-3}$. Il existe cependant un autre temps caractéristique, celui de l'établissement de l'**équilibre de pression**⁸. Ce temps τ_p est lié à la vitesse du son c_s dans le gaz,

$$\tau_p = \frac{R_S}{c_s} \approx 2.4 \cdot 10^5 \left(\frac{Q_0}{10^{49} \text{ s}^{-1}} \right)^{1/3} \left(\frac{n_{\text{H}}}{100 \text{ cm}^{-3}} \right)^{-2/3} \text{ an} \quad (10.10)$$

et est donc sensiblement plus grand que $\tau_i = \tau_r$. Il en résulte que, si l'équilibre d'ionisation est établi rapidement, un déséquilibre de pression est possible, ce qui amène potentiellement le développement d'**ondes de choc**.

Nébuleuses planétaires vs. régions HII

Les **nébuleuses planétaires** (*Planetary Nebulae*, PN) sont constituées du gaz en expansion rapide ($v_w \sim 20 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$) expulsé par une étoile en fin de vie sur la branche asymptotique des géantes (AGB).

7. Ce calcul se fonde sur la valeur de la **section efficace de photo-ionisation** σ_{pi} de H pour $h\nu = 18 \text{ eV}$, qui est l'ordre de grandeur de l'énergie moyenne des photons Lyman autour des étoiles O et B.

8. En effet, le doublement du nombre de particules par l'ionisation et l'augmentation de la température entre le gaz neutre initial et celui de la région photo-ionisée provoquent une augmentation nette de la pression dans la région HII par rapport au gaz neutre environnant.

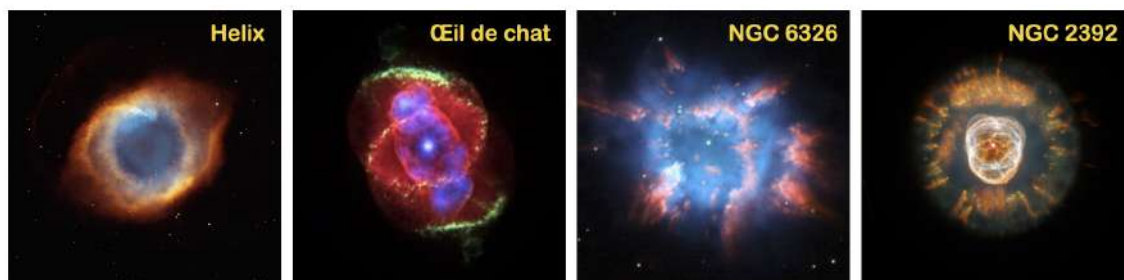


FIGURE 10.10 – Quelques nébuleuses planétaires.

La **naine blanche** centrale, très chaude ($T > 10^5$ K) ionise ce gaz⁹, qui se refroidit via des raies de recombinaison optiques qui leur donnent leurs magnifiques couleurs¹⁰. La première nébuleuse planétaire répertoriée est celle de l'Haltère, découverte par Messier en 1764, et on en connaît environ 1500 dans notre Galaxie (Fig. 10.10). Elles présentent souvent des morphologies complexes, qu'on pense être associées à la présence d'un compagnon stellaire brisant la symétrie sphérique.

Physiquement, la différence fondamentale entre ces nébuleuses planétaires et les régions HII, hormis leur origine, réside dans la différence de température de l'objet central, et donc dans la **dureté du spectre électromagnétique**, nettement plus importante¹¹ dans le cas des PN. De ce fait, l'hélium y est entièrement ionisé (HeIII) et d'autres éléments le sont plus fortement que dans les régions HII (OIV, NeIV, NeV). De plus, le chauffage photoélectrique est plus important, ce qui amène à des **températures d'équilibre plus élevées**, $T_{eq} \sim 16000$ K.

10.3.4 Origine des phases du gaz atomique

Les phases froide (CNM) et chaude (WNM) du gaz atomique ont pour origine un phénomène d'**instabilité thermique**. Pour le décrire, il faut discuter de la détermination de la température du gaz HI, qui repose sur la description des processus de chauffage et de refroidissement du gaz.

Processus de chauffage

Le processus dominant le chauffage du gaz HI est l'effet photoélectrique sur les grains : l'arrachement d'un électron par un photon UV confère à ce photo-électron une énergie cinétique **suprathermique**, qu'il va céder au gaz par collisions élastiques, et donc le chauffer.

L'énergie nécessaire pour extraire un électron d'un grain de poussière, appelée **travail de sortie** ou **travail d'extraction** (*work function* en anglais), est de l'ordre de $W \sim 5$ eV, mais les efficacités d'arrachement sont faibles proche du seuil, donc les photons responsables du chauffage par ce biais sont essentiellement ceux d'énergie 8 à 13.6 eV. L'énergie cinétique disponible E_{pe} est ainsi $E_c \sim 3 - 8.6$ eV correspondant à une température $3.5 \cdot 10^4$ K à 10^5 K, ce qui montre bien qu'on a une source de chauffage du gaz. Le **taux de chauffage volumique** s'écrit [3]

$$\Gamma_{pe} = 1.4 \cdot 10^{-25} \frac{n_H}{10 \text{ cm}^{-3}} \frac{n_{FUV}}{3 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^{-3}} \frac{\langle \sigma_{abs} \rangle}{10^{-21} \text{ cm}^{-2}} \frac{\langle Y \rangle}{0.1} \frac{\langle E_{pe} \rangle - \langle E_c \rangle}{1 \text{ eV}} \text{ erg} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{cm}^{-3} \quad (10.11)$$

où n_{FUV} est la densité des photons dans le domaine [8 – 13.6 eV], $\langle \sigma_{abs} \rangle$ est la section efficace d'absorption par les grains, moyennée dans ce domaine spectral et rapportée à un atome d'hydrogène,

9. À la différence des régions HII, le gaz ionisé a donc pour origine l'étoile progénitrice elle-même, et non le MIS environnant. Le vent stellaire de l'AGB emporte environ $\dot{M}_w \sim 10^{-4} M_\odot \cdot \text{an}^{-1}$ pendant la courte durée de vie de l'objet ($\sim 2 \cdot 10^3$ an).

10. Typiquement, les couleurs rouges sont dues à H α (656.28 nm), OI (630 nm), NII (658.4 nm), les couleurs bleues à OIII (500.7 nm).

11. C'est-à-dire plus riche en rayonnement UV lointain et extrême.

$\langle Y \rangle$ est le **rendement photo-électrique** moyen sur ce même domaine, c'est-à-dire la probabilité qu'une absorption de photon provoque l'arrachement d'un électron, et $\langle E_c \rangle$ est l'énergie cinétique moyenne des électrons du plasma capturés par les grains.

Le calcul de ce taux nécessite l'estimation du rendement Y , qui dépend de la charge électrique des grains, mais globalement, on peut mettre cette expression sous la forme

$$\Gamma_{pe} = n_H G_0 g \left(\frac{G_0}{n_e}, T_e \right) \quad (10.12)$$

où la fonction g dépend¹² des paramètres G_0/n_e , rapport de l'intensité du champ de rayonnement¹³ à la densité électronique, et de la température des électrons dans le gaz, deux paramètres qui déterminent la charge Q des grains. Typiquement, on a donc un taux de chauffage $\Gamma_{pe}/n_H \sim 10^{-26} \text{ erg} \cdot \text{s}^{-1}$ et le point important est que **le taux de chauffage est proportionnel à la densité du gaz**

$$\Gamma_{pe} \propto n_H \quad (10.13)$$

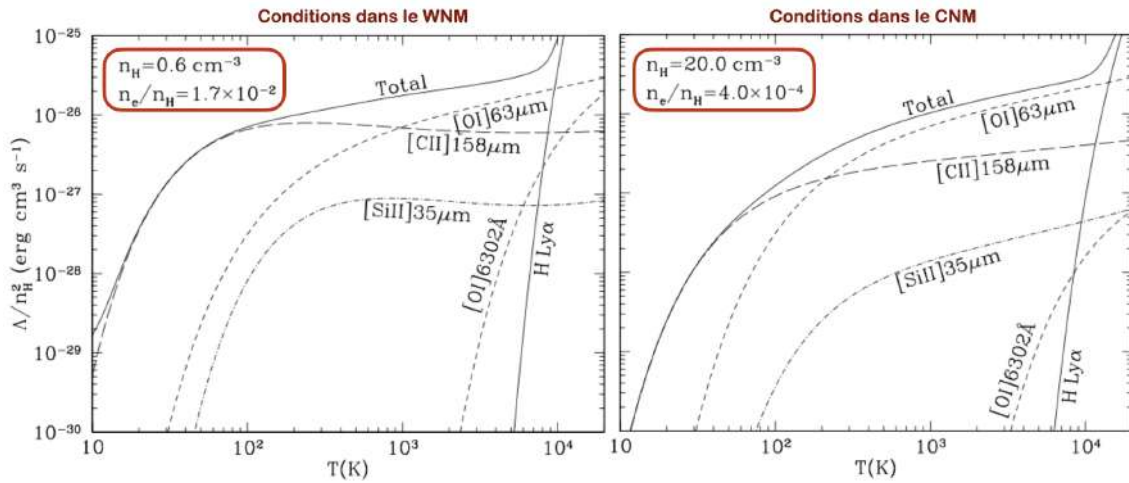


FIGURE 10.11 – **Taux de refroidissement Λ/n_H^2 en fonction de la température T du gaz.** Il est représenté pour des densités n_H et des fractions d'ionisation x_e typiques des conditions dans le WNM (à gauche) et dans le CNM (à droite). Figure issue de [3].

Processus de refroidissement

Le refroidissement du gaz est dominé par le **processus d'excitation collisionnelle suivi d'une désexcitation radiative**. Ainsi, l'énergie cinétique du partenaire de collision est convertie d'abord en énergie interne d'excitation, puis en énergie radiative qui s'échappe du milieu. Pour les températures typiques du HI (à la fois CNM et WNM), **les principales raies de refroidissement sont [O I] à $63 \mu\text{m}$ et [C II] à $158 \mu\text{m}$** . Comme ce processus est initié par une collision à deux corps, il n'est pas surprenant que le **taux de refroidissement Λ** associé soit approximativement **proportionnel au carré de la densité**, dans les domaines de température considérés (Fig. 10.11)

$$\Lambda \propto n_H^2 \quad (10.14)$$

12. En plus de la taille et de la composition des grains
13. Voir la section 10.6.

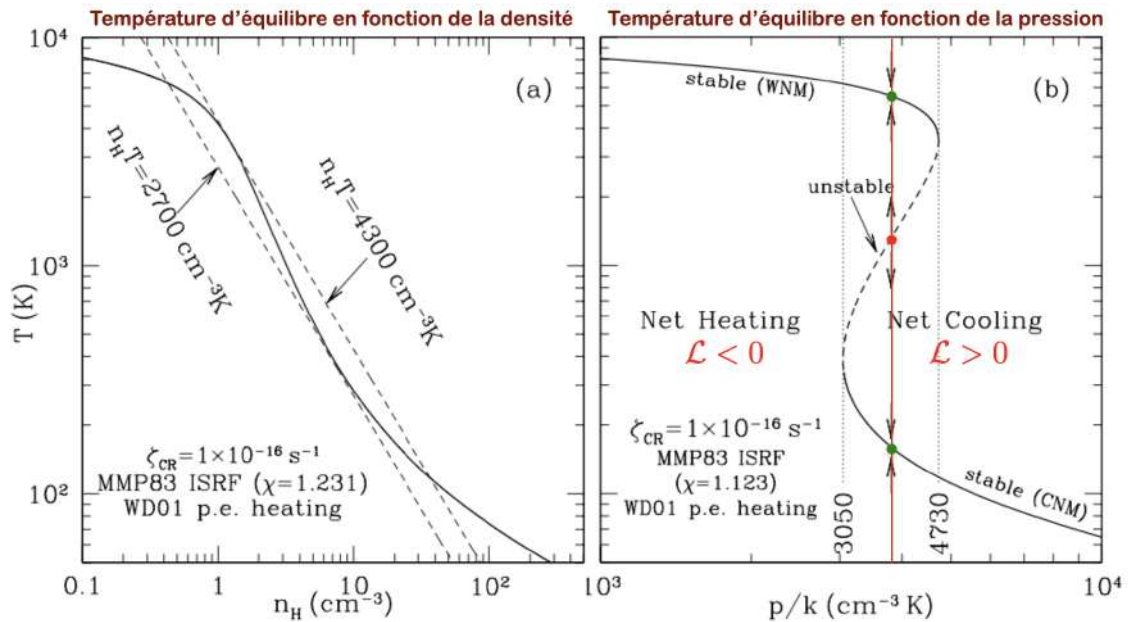


FIGURE 10.12 – **Température d'équilibre du HI.** Elle est représentée en fonction de la densité du gaz (à gauche) et de la pression (à droite). Figure adaptée de [3].

Courbe d'équilibre

L'équilibre thermique est déterminé par l'équation

$$\Gamma(n_H, T) = \Lambda(n_H, T) \quad (10.15)$$

On peut en déduire la température d'équilibre T_{eq} en fonction de la densité du gaz. Physiquement, si la densité augmente, le refroidissement ($\propto n_H^2$) augmente plus vite que le chauffage ($\propto n_H$), de sorte que la température d'équilibre diminue. On a donc une courbe d'équilibre dans le plan (n_H, T) qui a la forme représentée sur la Fig. 10.12 (à gauche). On y voit aussi (à droite) que si l'on impose un **équilibre de pression** $P/k_B = n_H T$, **on a potentiellement trois solutions**, si P/k_B se trouve dans un certain intervalle aux alentours de $\sim 3800 \text{ cm}^{-3} \cdot \text{K}$. À plus basse pression, seule la solution haute température (WNM) est possible, et à haute pression, seule la solution basse température (CNM) l'est. Il faut noter que **la courbe d'équilibre dépend des conditions environnementales**, notamment de la **métallicité** et du **champ de rayonnement**. On voit d'ailleurs que les deux panneaux de la Fig. 10.12 ne donnent pas le même intervalle de pression intermédiaire, car les paramètres χ diffèrent¹⁴.

Instabilité thermique

La détermination de la stabilité de ces solutions repose sur un critère portant sur le **refroidissement net** $\mathcal{L} = \Lambda - \Gamma$. Sur la Fig 10.12 (droite), la zone à droite de la courbe d'équilibre dans le plan $(P/k_B, T)$ correspond à $\mathcal{L} > 0$ et la zone à gauche de la courbe à $\mathcal{L} < 0$. En se plaçant alors sur l'un des points solutions dans le régime de pression intermédiaire, il apparaît que les deux points externes sont stables, en prolongement des branches WNM et CNM, et que le point intermédiaire est instable. On a donc **deux phase stables (WNM et CNM) et une phase instable (UNM, pour Unstable Neutral Medium)**.

14. Voir la section 10.6 pour la définition de ce paramètre.

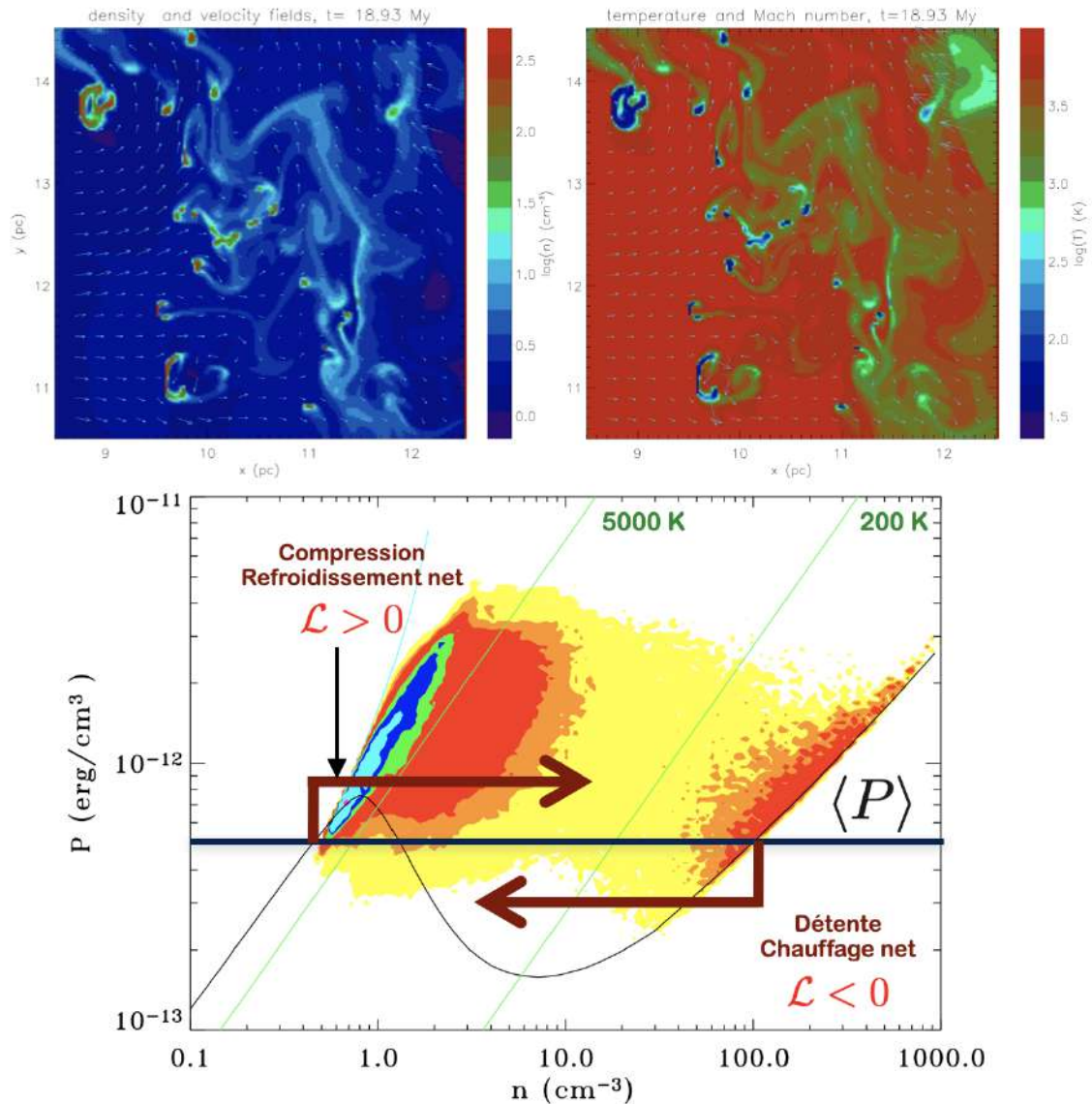


FIGURE 10.13 – Simulation numérique bidimensionnelle de l'instabilité thermique du HI. Champ de densité n_{H} et de température T et distribution de (n_{H}, P) dans la simulation. Figure adaptée de [42].

Exercice 101 : Justifier par un raisonnement physique la détermination des zones de refroidissement net $\mathcal{L} > 0$ et de réchauffement net $\mathcal{L} < 0$, puis le caractère stable ou instable des points d'équilibre thermique à pression donnée.

L'équilibre thermique et l'équilibre de pression sont dynamiques : le gaz, sous l'effet d'une perturbation, peut passer d'un état stable à l'autre, et on peut ainsi former des condensations de gaz dense froid au sein d'un milieu internuage chaud comme le montrent les simulations numériques, par exemple celles de [42] montrées sur la Fig. 10.13. Partant par exemple de l'état d'équilibre WNM à gauche et faisant subir au gaz une perturbation compressive, le gaz se retrouve dans la zone de refroidissement net. Si la compression est suffisante, le gaz transite vers la branche CNM stable tout à

droite. À chaque instant, une partie non négligeable du gaz est donc dans la zone instable (en jaune sur la Fig. 10.13).

10.4 Les grains de poussière

10.4.1 Structure

Les grains sont des agrégats solides, essentiellement composés de carbone et de silicates¹⁵ dont la taille varie du nanomètre (soit quelques atomes) à la dizaine de micromètres, suivant une **distribution de tailles** souvent modélisée comme une loi de puissance¹⁶. Ces grains ne sont pas sphériques, mais présentent une **structure complexe, fractale**, avec des anfractuosités qui augmentent la surface à volume donné, mais on les assimile souvent, dans les modèles, à des **sphéroïdes**, voire des sphères. Dans les zones les plus froides du MIS, des molécules du gaz peuvent condenser à la surface des grains pour former des **manteaux de glaces**, essentiellement composés d'eau, de CO₂, de CO, ... Par interaction avec le rayonnement UV et visible des étoiles et avec les rayons cosmiques, les grains acquièrent une **charge électrique**, majoritairement positive. Au total, les grains de poussières représentent seulement **1% de la masse du MIS**, mais ils en sont un rouage très important, à divers titres.

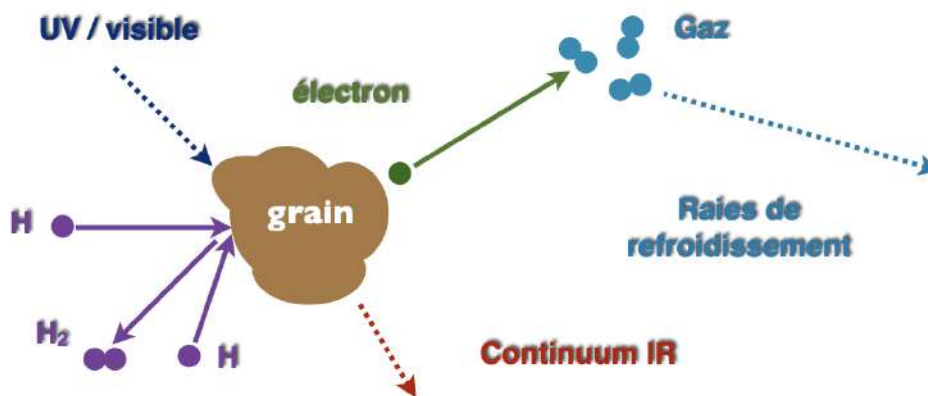


FIGURE 10.14 – Les rôles de la poussière interstellaire.

10.4.2 Interaction avec le rayonnement

Les grains absorbent la lumière visible et UV des étoiles de la galaxie (Fig. 10.14), ce qui provoque d'une part **l'extinction et le rougissement** de la lumière des étoiles en arrière-plan des nuages poussiéreux, et d'autre part une élévation de la température des grains, puisque l'énergie radiative absorbée est pour une bonne part redistribuée dans les vibrations du réseau solide. Ainsi chauffés à des températures¹⁷ de l'ordre de 10 à 20 K, les grains émettent un **rayonnement thermique infrarouge**. Enfin, les grains étant chargés électriquement et en rotation, ils possèdent un **moment magnétique** qui tend à s'aligner dans le champ magnétique local. Cet alignement provoque, du fait de la non-sphéricité des grains, une **polarisation** de la lumière des étoiles d'arrière-plan et de l'émission thermique mentionnée à l'instant.

15. Les silicates sont des sels combinant le dioxyde de silicium SiO₂ à d'autres oxydes métalliques (fer, magnésium, essentiellement).

16. Cette distribution s'étend en réalité aux tailles plus élevées, puisque les grains s'agglomèrent en structures plus grosses, formant *in fine* planétésimaux et planètes.

17. À proximité immédiate d'une étoile, les températures peuvent être plus élevées, d'un ordre de grandeur environ.

Exercice 102 : Estimer la longueur d'onde du maximum d'émission thermique des poussières à partir de leur température.

10.4.3 La température des grains

Position du problème

La température des grains est déterminée par la compétition des processus de chauffage et de refroidissement. Le chauffage des grains est dominé par le **chauffage radiatif** par absorption des photons stellaires (UV et visible) Les grains, portés à des températures de quelques dizaines de K tout au plus¹⁸, vont émettre dans l'infrarouge, domaine où le milieu est optiquement mince. On a donc un **refroidissement radiatif** dans l'IR. Pour calculer la température des grains, il est cependant essentiel de distinguer le cas des **gros grains** (typiquement $a \gtrsim 0.03 \mu\text{m}$) de celui des **très petits grains** (comme les PAH).

En effet, pour les premiers, l'énergie interne du grain est typiquement très supérieure à celle des photons UV responsables du chauffage, $U \gg h\nu$, de sorte que la variation de température provoquée par l'absorption d'un photon unique est¹⁹

$$\delta T = \frac{h\nu}{C(T)} \ll \frac{U}{C} \sim T \quad (10.16)$$

où C est la **capacité calorifique** C du grain. On aura donc des fluctuations très faibles de température à chaque absorption de photon, et on peut donc traiter le problème classiquement, la notion de **température d'équilibre** ayant un sens.

Pour les très petits grains, en revanche, on aura $h\nu \gtrsim U$, de sorte que

$$\delta T = \frac{h\nu}{C(T)} \gtrsim \frac{U}{C} \sim T \quad (10.17)$$

et la température de ces grains va varier fortement à chaque absorption. Il est nécessaire, dans ce cas, de traiter le problème quantiquement (c'est-à-dire de considérer le caractère discret de l'apport d'énergie) et on ne peut pas à proprement parler dire qu'il y a une température d'équilibre. Dans les sous-sections suivantes, on traite ces deux cas séparément.

Chauffage radiatif des gros grains

L'absorption d'un photon par le grain provoque une **excitation électronique**, qui peut être suivie d'une désexcitation par transfert de l'énergie vers les nombreux modes de vibrations du réseau, c'est le processus de **chauffage** auquel on s'intéresse ici²⁰. Le **taux de chauffage** d'un grain de rayon a (c'est-à-dire l'augmentation de son énergie interne par unité de temps du fait de l'absorption des photons) s'écrit sous la forme

$$\left(\frac{dU}{dt}\right)_{\text{abs}} = \int \frac{u_\nu d\nu}{h\nu} h\nu c Q_{\text{abs}}(\nu) \pi a^2 \quad (10.18)$$

en utilisant l'**efficacité d'absorption**²¹ $Q_{\text{abs}}(\nu)$, qu'on représente sur la Fig. 10.15 pour le cas de silicates et de grains carbonés de différentes tailles. Comme elle dépend de la fréquence (**l'essentiel de l'absorption se situant dans l'UV et le visible**) et de la taille des grains, on introduit une **efficacité**

18. Dans la majeure partie du MIS, loin de toute étoile.

19. On peut imaginer prendre une capacité calorifique indépendante de la température, pour fixer les idées.

20. Si l'énergie est suffisante ($\gtrsim 5 \text{ eV}$), l'électron peut être arraché, c'est l'**effet photo-électrique**, et sinon, la désexcitation peut se faire selon une cascade radiative, avec émission de photons de plus basse énergie, c'est le phénomène de **luminescence**, observé dans le visible (600 – 800 nm) sous forme d'**émission rouge étendue** (ERE)

21. Cette grandeur sans dimension est le rapport de la section efficace d'absorption à la section géométrique πa^2 .

d'absorption moyennée sur le spectre de la radiation chauffant le grain

$$\langle Q_{\text{abs}} \rangle_* = \frac{\int u_\nu Q_{\text{abs}}(\nu) d\nu}{\int u_\nu d\nu} = \frac{\int u_\nu Q_{\text{abs}}(\nu) d\nu}{u_*} \quad (10.19)$$

où u_* est la densité d'énergie du rayonnement chauffant le grain. On a alors

$$\left(\frac{dU}{dt} \right)_{\text{abs}} = \langle Q_{\text{abs}} \rangle_* c \pi a^2 u_* \quad (10.20)$$

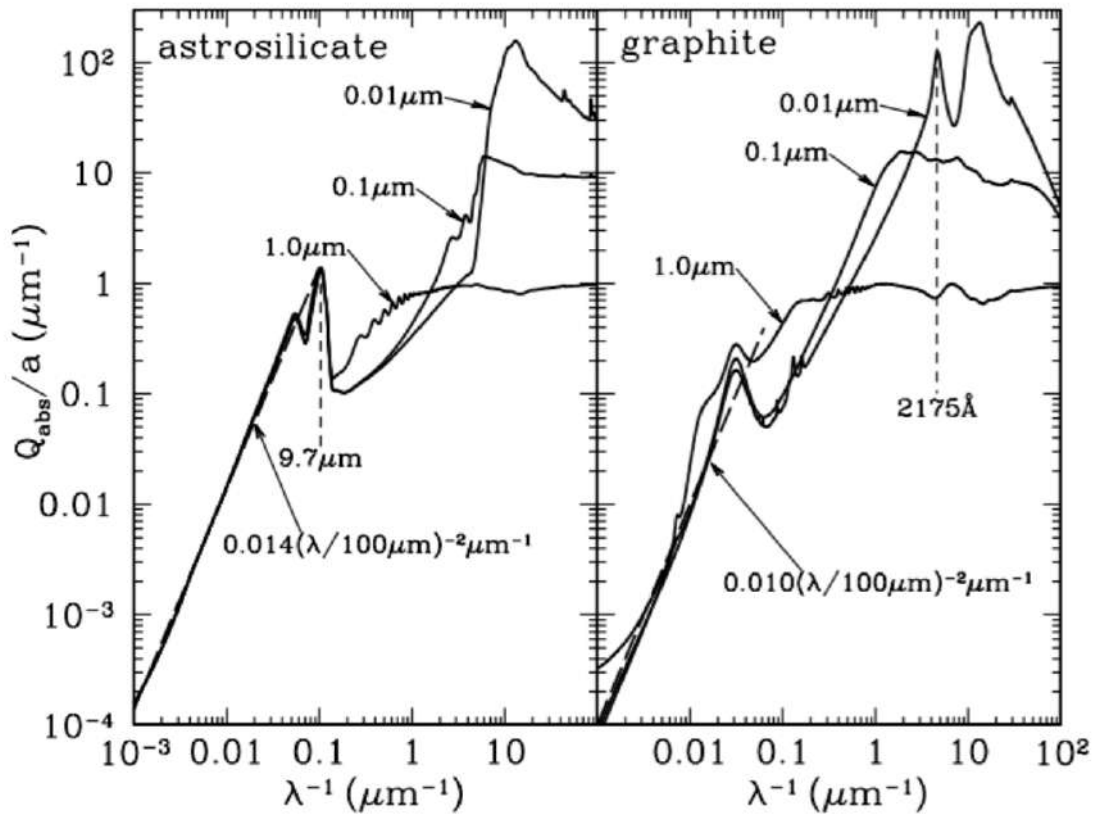


FIGURE 10.15 – Efficacités d'absorption. Elles sont rapportées au rayon a (équivalentes à la section efficace rapportée au volume du grain), pour les silicates et les grains carbonés de différentes tailles (0.01 à $1 \mu\text{m}$. Figure issue de [3].

En particulier, si on prend comme champ de rayonnement²² l'ISRF (*Interstellar Standard Radiation Field*), on a une densité d'énergie $u_* = u_{\text{ISRF}} = 1.05 \cdot 10^{-12} \mathcal{U} \text{ erg} \cdot \text{cm}^{-3}$, avec \mathcal{U} un paramètre de mise à l'échelle qui vaut 1 pour l'ISRF de [43]. Les efficacités moyennes d'absorption pour les silicates et les grains carbonés dans ce champ de rayonnement sont présentées, en fonction de leur taille, sur la Fig. 10.16. On note que

$$\langle Q_{\text{abs}} \rangle_{\text{ISRF}} \approx 0.8 \left(\frac{a}{0.1 \mu\text{m}} \right)^{0.85} \quad \text{Grains carbonés de } 0.005 \text{ à } 0.15 \mu\text{m} \quad (10.21)$$

22. Voir la section 10.6.

$$\langle Q_{\text{abs}} \rangle_{\text{ISRF}} \approx 0.18 \left(\frac{a}{0.1 \mu\text{m}} \right)^{0.6} \quad \text{Silicates de } 0.01 \text{ à } 1 \mu\text{m} \quad (10.22)$$

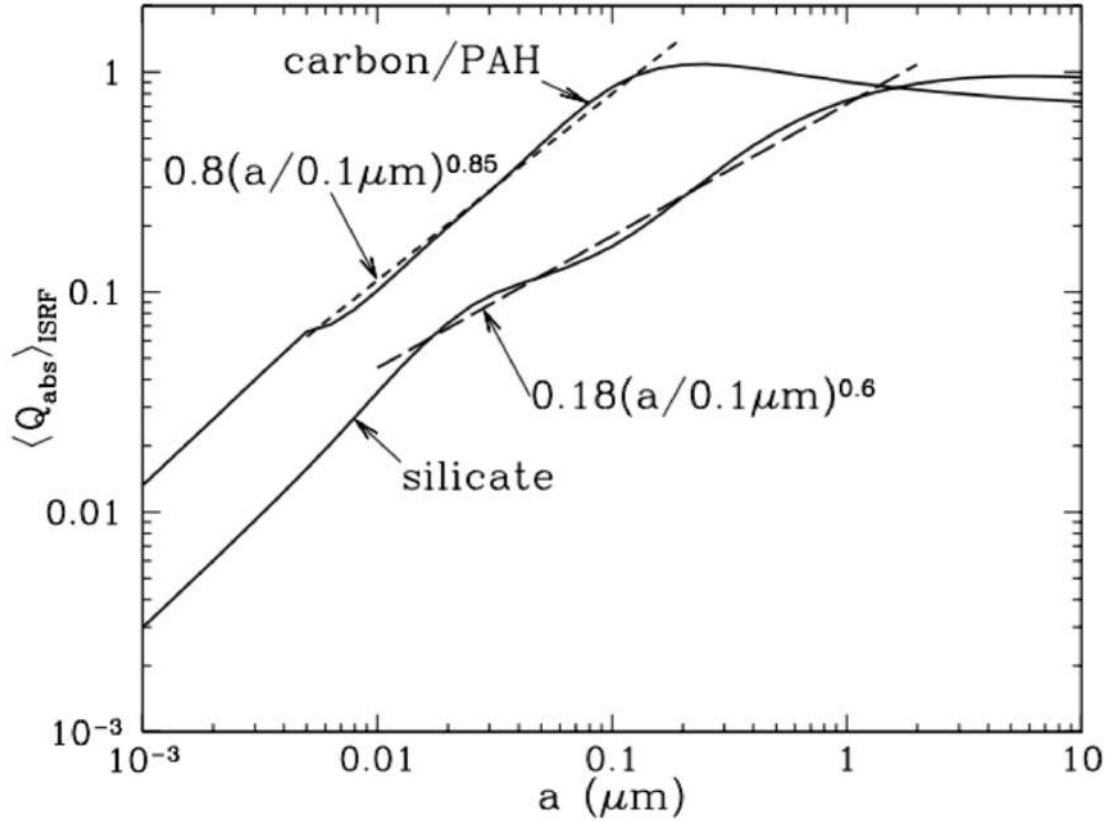


FIGURE 10.16 – **Efficacités moyennes d'absorption.** Elles sont représentées pour les silicates et les grains carbonés dans l'ISRF de [43] en fonction de leur taille a . Figure issue de [3].

Refroidissement radiatif des gros grains

Le refroidissement des grains procède par émission de photons IR. Pour établir l'expression du **taux de refroidissement**, il faut noter que la **loi de Kirchhoff** relie l'émission à l'absorption, avec

$$j_\nu = \kappa_\nu B_\nu(T_d) = n_d C_{\text{abs}}(\nu) B_\nu(T_d) \quad (10.23)$$

faisant intervenir la fonction de Planck à la température des poussières T_d . Dans cette équation, l'émissivité j_ν est une puissance émise par unité de volume du MIS, par intervalle de fréquence, et par unité d'angle solide. Pour un seul grain (afin d'équilibrer le taux de chauffage de 10.18), la puissance émise dans toutes les directions sur l'ensemble du spectre est alors

$$\left(\frac{dU}{dt} \right)_{\text{em}} = \int 4\pi C_{\text{abs}}(\nu) B_\nu(T_d) d\nu = 4\pi^2 a^2 \int Q_{\text{abs}}(\nu) B_\nu(T_d) d\nu \quad (10.24)$$

On peut réécrire cette expression en faisant apparaître une **efficacité d'absorption moyennée sur le spectre thermique des grains** et la **loi de Stefan**

$$\left(\frac{dU}{dt}\right)_{\text{em}} = 4\pi a^2 \langle Q_{\text{abs}} \rangle_{T_d} \sigma T_d^4 \quad \langle Q_{\text{abs}} \rangle_{T_d} = \frac{\int Q_{\text{abs}}(\nu) B_\nu(T_d) d\nu}{\int B_\nu(T_d) d\nu} \quad (10.25)$$

Exercice 103 : Établir l'expression (10.25).

La température des poussières étant de quelques dizaines de K, le rayonnement sera essentiellement dans l'IR. Dans ce domaine, comme le montre la Fig. 10.15, on a typiquement $Q_{\text{abs}} \propto a\lambda^{-\beta}$ avec $\beta \approx 2$. Avec un tel modèle en loi de puissance pour l'efficacité d'absorption (étendu à tout le spectre), soit $Q_{\text{abs}} = Q_0 a (\nu/\nu_0)^\beta$, on obtient

$$\langle Q_{\text{abs}} \rangle_{T_d} = \frac{15}{\pi^4} \Gamma(4 + \beta) \zeta(4 + \beta) Q_0 a \left(\frac{k_B T_d}{h\nu_0} \right)^\beta \quad (10.26)$$

où Γ et ζ sont les fonctions "Gamma" et "zeta" d'Euler. On trouve en particulier que

$$\langle Q_{\text{abs}} \rangle_{T_d} \sim 10^{-6} \left(\frac{a}{0.1 \mu\text{m}} \right) \left(\frac{T_d}{1 \text{K}} \right)^2 \quad (10.27)$$

pour les silicates et les grains carbonés²³, ces derniers présentant des variations plus importantes du fait que Q_{abs}/a est moins bien représenté par une loi de puissance en $\lambda^{-\beta}$ (voir la Fig. 10.15).

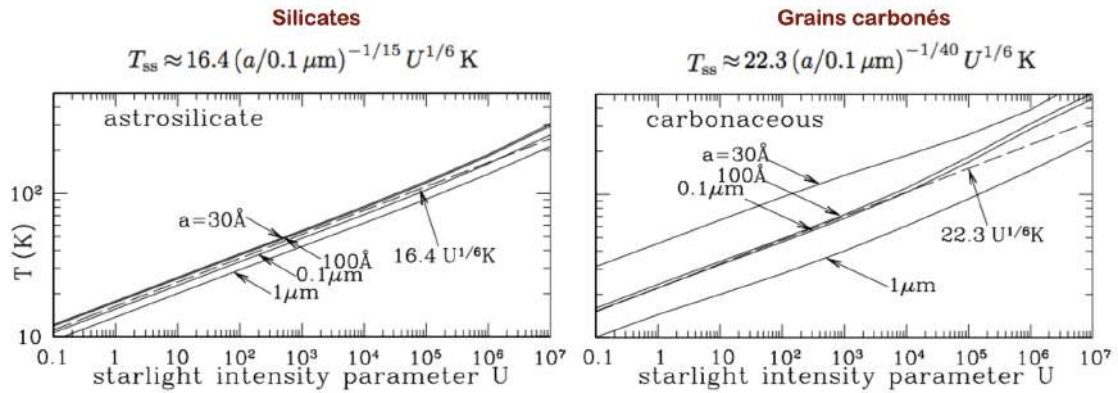


FIGURE 10.17 – Température d'équilibre des silicates et des grains carbonés dans un champ de rayonnement ayant le spectre de l'ISRF, en fonction de l'intensité U du champ, et pour différentes tailles de grains. Figure adaptée de [3].

Température d'équilibre des gros grains

Pour déterminer la température d'équilibre T_d , on écrit l'**égalité entre chauffage et refroidissement**,

$$\langle Q_{\text{abs}} \rangle_* c\pi a^2 u_* = 4\pi a^2 \langle Q_{\text{abs}} \rangle_{T_d} \sigma T_d^4 \quad (10.28)$$

23. On trouvera les formes précises dans [3].

Pour un modèle de section efficace d'absorption dans l'IR en loi de puissance, on en déduit

$$T_d = \left(\frac{h\nu_0}{k_B} \right)^{\beta/(4+\beta)} \left[\frac{\pi^4 \langle Q_{\text{abs}} \rangle_* c u_*}{60 \Gamma(4+\beta) \zeta(4+\beta) Q_0 a \sigma} \right]^{1/(4+\beta)} \quad (10.29)$$

Exercice 104 : Établir l'expression (10.29).

Si on suppose de plus un champ de rayonnement ayant le spectre de l'ISRF, avec un paramètre d'échelle \mathcal{U} , on a des dépendances assez faibles de la température d'équilibre sur la taille des grains, leur composition, et \mathcal{U} , comme le montre la Fig. 10.17, où les comportements indiqués²⁴ sont

$$T_d \approx 16.4 \left(\frac{a}{0.1 \mu\text{m}} \right)^{-1/15} \mathcal{U}^{1/6} \text{ K} \quad (\text{Silicates}) \quad (10.30)$$

$$T_d \approx 22.3 \left(\frac{a}{0.1 \mu\text{m}} \right)^{-1/40} \mathcal{U}^{1/6} \text{ K} \quad (\text{Grains carbonés}) \quad (10.31)$$

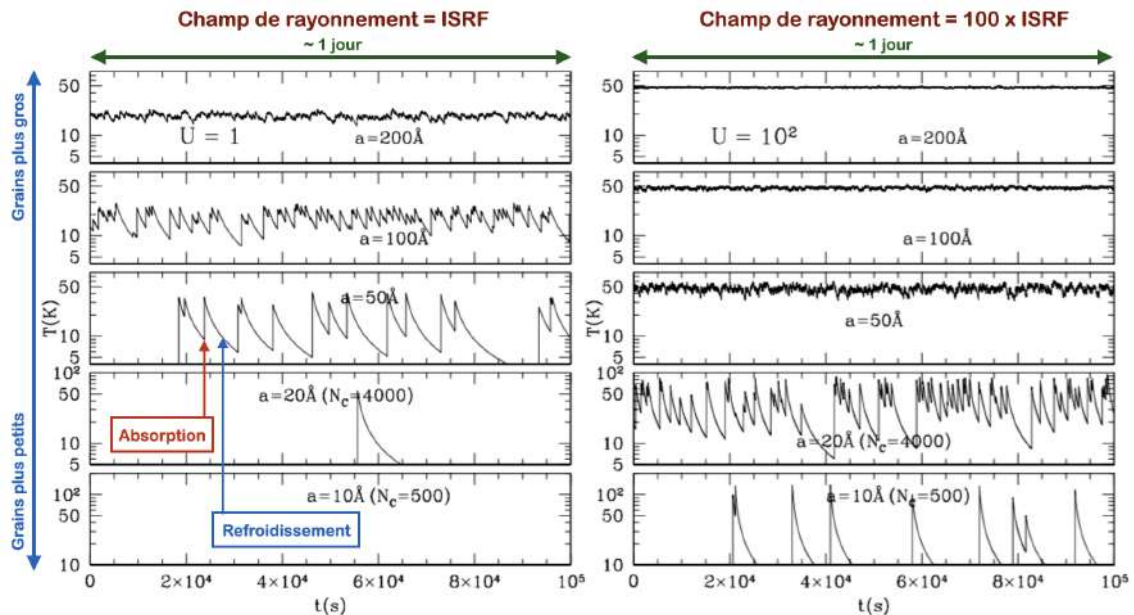


FIGURE 10.18 – **Évolution de la température de grains.** Des grains de différentes tailles (de plus en plus petits de haut en bas) sont modélisés, pendant une journée environ, dans un environnement correspondant à l'ISRF ($U = 1$, à gauche) ou beaucoup plus intense ($U = 100$, à droite). Figure adaptée de [3].

Le cas des très petits grains

Comme on l'a dit, pour un très petit grain, chaque évènement d'absorption d'un photon lui ajoute une énergie comparable à l'énergie déjà contenue dans le grain, de sorte que celui-ci est **fortement chauffé stochastiquement**. Portés à des températures élevées ($T \gtrsim 100 \text{ K}$), ces grains vont **briller dans l'infrarouge proche**²⁵ et ainsi se refroidir entre deux évènements d'absorption, qui sont d'autant

24. Là aussi, le comportement des grains carbonés n'est pas exactement le bon en fonction de la taille, du fait que Q_{abs}/a est moins bien représenté par une loi de puissance en $\lambda^{-\beta}$.

25. Ils vont notamment contribuer aux structures en émission à 7.7, 8.6 et 11.3 μm .

plus rares que le grain est petit. On peut voir, sur la Fig. 10.18, l'évolution de la température de grains de différentes tailles (de plus en plus gros de bas en haut) pendant une journée environ, dans un environnement correspondant à l'ISRF ($U = 1$, à gauche) ou beaucoup plus intense ($U = 100$, à droite). On voit donc que pour les plus petits grains, il n'y a **pas de température d'équilibre à proprement parler**, et il faut raisonner en termes de **distribution de probabilité de la température**²⁶, en introduisant la probabilité dP de trouver, pour un grain donné à un instant donné, une température comprise entre T et $T + dT$. Cette probabilité dépend de la taille et de la composition du grain, ainsi que du rayonnement absorbé (intensité et spectre), elle peut être obtenue par **simulation Monte-Carlo** [44] de l'évolution temporelle $T(t)$ (comme sur la Fig. 10.18) ou par calcul direct [45]. On observe (Fig. 10.19) une **distribution large pour les petits grains, et de plus en plus étroite pour les gros grains**.

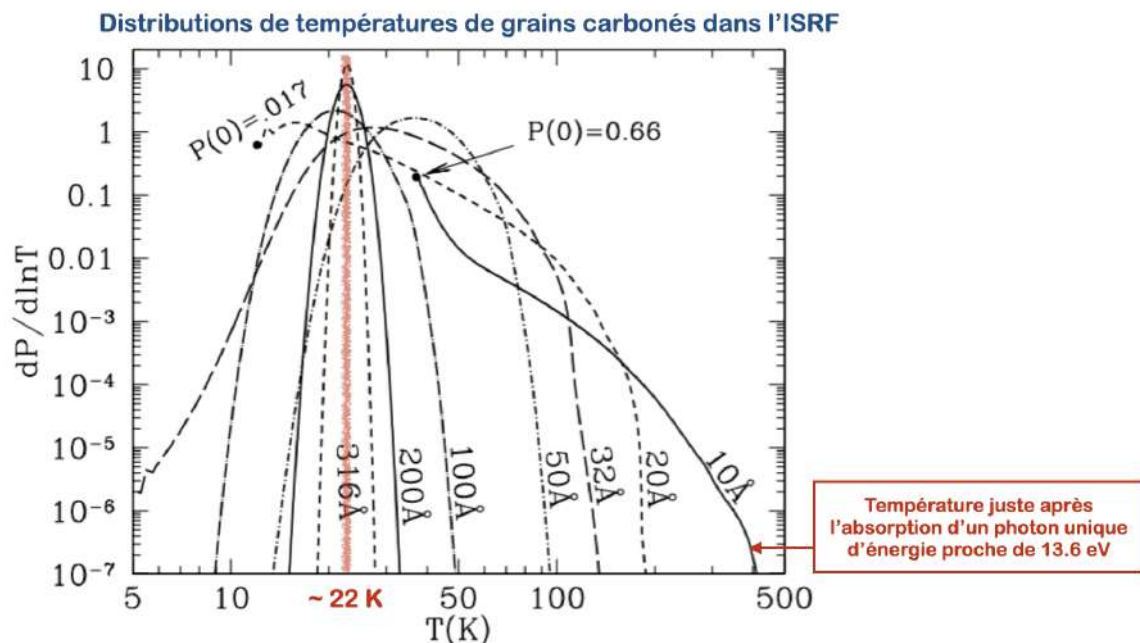


FIGURE 10.19 – **Distribution de probabilité des températures de grains**. Il s'agit de grains carbonés de différentes tailles. Figure adaptée de [3].

10.4.4 Rôles thermodynamique et chimique

Lorsqu'un grain absorbe un photon UV ou visible, l'énergie n'est pas seulement convertie en agitation thermique interne au grain, mais elle peut servir à arracher un électron, c'est l'**effet photoélectrique**. Le grain s'en trouve chargé électriquement, et l'électron emporte avec lui une énergie cinétique qui peut être sensiblement supérieure à celle des particules du gaz environnant. Par collisions avec celles-ci, l'électron photo-arraché (on parle aussi de **photo-électron**) va leur céder une partie de cette énergie, et donc augmenter la température du gaz. On a donc un **chauffage du gaz** par effet photo-électrique. Le photo-électron peut également provoquer des **ionisations secondaires du gaz, altérant sa composition chimique**. Un effet semblable existe avec les rayons cosmiques remplaçant le photon UV initial²⁷. De plus, de nombreuses **réactions chimiques** peuvent avoir lieu à la surface des grains, ceux-ci servant en quelque sorte de catalyseurs. C'est le cas notamment de la formation de H_2 , très peu efficace en

26. On fait ici l'hypothèse raisonnable d'**ergodicité**.

27. Cet effet est important uniquement dans les régions les plus denses, où le rayonnement UV ne pénètre plus.

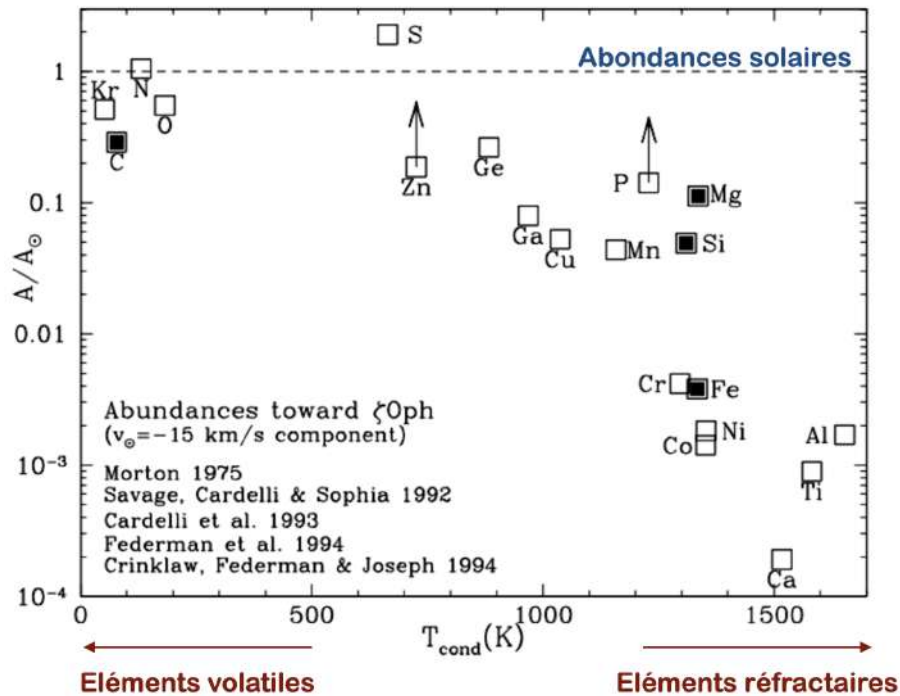


FIGURE 10.20 – Déplétion des éléments en phase gaz. Adapté de [3].

phase gazeuse. Enfin, comme on l'a mentionné, des espèces chimiques peuvent geler à la surface des grains, ce qui provoque leur **déplétion** en phase gazeuse. En tenant compte des différentes espèces qui peuvent contenir un élément A donné, on peut en déduire la déplétion de l'élément lui-même dans le gaz, qui est par définition le rapport

$$d(A) = \frac{[A]}{[A]_{\odot}} \quad (10.32)$$

de l'abondance observée en phase gaz à celle observée dans le système solaire. On constate (Fig. 10.20) que cette déplétion est d'autant plus importante (c'est-à-dire $d \ll 1$) que l'élément est plus réfractaire²⁸, comme le fer ou le silicium. De ces mesures on peut déduire des contraintes sur la composition des grains.

10.4.5 Dynamique des grains

Les plus grosses poussières peuvent être traitées comme des particules Browniennes, en interaction constante avec le gaz. Il en résulte notamment des effets de **traînée** sur les grains, avec un temps caractéristique τ de l'ordre de 10^5 an. Les grains étant chargés, ils peuvent également subir la **force de Lorentz** dans le champ magnétique local, et orbiter ainsi autour des lignes de champ. L'absorption et la diffusion du rayonnement peuvent également avoir un impact sur la dynamique des grains, en raison de la **pression de radiation**. Pour les grains en orbite autour d'une étoile, cet effet, combiné à l'aberration du rayonnement, provoque un freinage important (**effet Poynting-Robertson**).

L'éjection de molécules (notamment H_2), l'effet photo-électrique, ou encore la diffusion des atomes, des ions, ou des photons sur la surface irrégulière d'un grain produisent un couple sur celui-ci, le

28. C'est-à-dire qu'il résiste à la chaleur.

mettant en **rotation**, possiblement **suprathernale**²⁹. Pour les plus petits grains, s'ils sont chargés électriquement et donc possèdent un dipôle électrique, cette rotation rapide peut amener une émission observable³⁰ aux alentours de quelques GHz. Enfin, comme on l'a évoqué plus haut, les grains non sphériques ont tendance à s'aligner dans le champ magnétique \vec{B} , préférentiellement avec leur axe de plus grande dimension perpendiculaire à \vec{B} . Cet effet, encore mal compris, implique l'alignement du grain sur son moment cinétique et l'alignement de ce dernier sur le champ magnétique, et est surtout efficace pour les plus gros grains.

10.4.6 Traceurs

L'existence des grains de poussières est immédiatement visible sur les images de la Galaxie dans le visible, puisqu'elles provoquent **l'extinction, somme de l'absorption et de la diffusion**, de la lumière des étoiles en arrière-plan. On peut estimer la densité de colonne des poussières en procédant à des comptages d'étoiles dans une région éteinte par rapport à une région semblable mais sans poussières. En observant dans l'infrarouge proche, on peut aussi utiliser le **rougissement** des étoiles, l'extinction étant dépendante de la longueur d'onde, typiquement comme $\lambda^{-\beta}$, avec un **indice spectral** $\beta \sim 1-2$. Les poussières peuvent également être tracées par l'intensité totale de leur **émission thermique**, qui présente un maximum dans l'infrarouge lointain (FIR). La polarisation de cette émission renseigne quant à elle non seulement sur les poussières mais aussi sur les propriétés du champ magnétique. Enfin, au voisinage des étoiles, on peut tirer parti de la diffusion de la lumière stellaire par les poussières au sein des **nébuleuses par réflexion**. Des méthodes semblables permettent de caractériser les poussières des disques protoplanétaires en utilisant la diffusion de la lumière de la protoétoile.

10.5 Les rayons cosmiques

10.5.1 Nature et origine

Les **rayons cosmiques** sont des particules (noyaux et électrons) de haute énergie (10 à 10^{14} MeV), donc relativistes³¹. Ils ont été découverts au début du XX^e siècle par Victor Hess, au travers de leur effet d'ionisation de l'atmosphère terrestre³². Produits par les supernovæ et les objets compacts³³, qui fournissent également des rayons X de 1 à 10 keV, ils sont accélérés par un processus appelé **diffusion de Fermi** dans les chocs magnétisés des restes de supernova³⁴. La composition de ces rayons cosmiques (Fig. 10.21) est approximativement celle du voisinage solaire, avec une surabondance d'éléments légers (lithium, beryllium et bore) du fait du phénomène de **spallation** des noyaux plus lourds par interaction avec le MIS. La **distribution en énergie** des rayons cosmiques (Fig. 10.21) suit une loi de puissance, c'est-à-dire que le flux de cosmiques (nombre de particules par unité de surface, par unité de temps et par intervalle en énergie) varie comme

$$\Phi_{\text{CR}}(E) \propto E^{-\alpha} \quad (10.33)$$

avec un **indice spectral** $\alpha \sim 2.7$. Cette loi de puissance présente une coupure à basse énergie, les cosmiques peu énergétiques étant déviés par le vent solaire magnétisé (on parle de **modulation**). L'interaction entre champ magnétique et rayons cosmiques se manifeste également dans l'équipartition entre densité d'énergie des cosmiques et densité d'énergie du champ magnétique. Les cosmiques, particules chargées, sont contraints à des orbites hélicoïdales autour des lignes de champ, avec des rayons

29. C'est-à-dire que l'énergie cinétique de rotation est supérieure à celle qu'on estimerait à partir de l'hypothèse d'une énergie $k_B T/2$ par degré de liberté.

30. On pense que l'AME (*Anomalous Microwave Emission*) est due à cet effet.

31. Le facteur de Lorentz est $\gamma \gg 1$, de sorte que leur énergie $E = \gamma mc^2$ est très grande devant l'énergie de masse.

32. L'ionisation augmentait avec l'altitude, ne subissait pas de variation diurne, et était sensiblement isotrope.

33. Au moins pour les cosmiques d'énergie jusqu'à 10^9 MeV. Les cosmiques plus énergétiques sont probablement d'origine extragalactique.

34. L'accélération de Fermi des rayons cosmiques nécessite un champ magnétique variable dans le temps, ce qui est fourni par le fait que le champ magnétique est gelé dans le plasma turbulent.

de gyration $r_B = \gamma mv / (qB)$ bien plus petits que la taille de la Galaxie et ils sont donc **confinés** dans la Galaxie. Les irrégularités du champ magnétique amènent cependant à une **diffusion** progressive, sur des échelles de temps de l'ordre de 10^7 an.

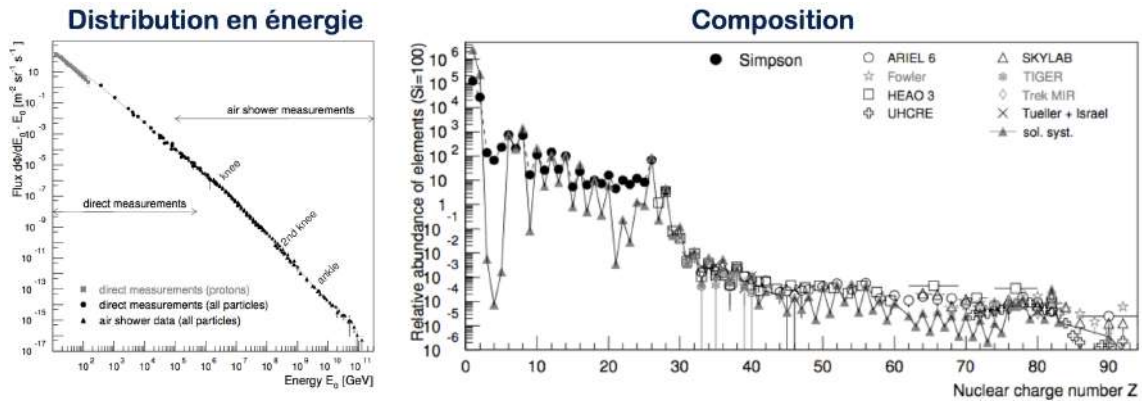


FIGURE 10.21 – **Distribution en énergie et composition des rayons cosmiques.** Figures issues de [3].

10.5.2 Rôle dans le MIS

Les rayons cosmiques interagissent avec le gaz interstellaire de diverses manières. Principalement, ils peuvent arracher un électron et ainsi participer à l'**état d'ionisation** du gaz. Cet électron peut ensuite céder son surplus d'énergie par collisions, pour fournir un **chauffage du gaz**, via un processus proche de celui discuté plus haut pour l'effet photo-électrique sur les grains³⁵. Dans les régions les plus denses du MIS, et donc en l'absence de photons, les cosmiques sont ainsi la principale source d'énergie. Les électrons libérés présentent un spectre en énergie, mais en moyenne leur énergie cinétique est $\langle E_c \rangle \sim 35$ eV, relativement indépendante de l'énergie du cosmique.

D'autre part, des **collisions inélastiques** sans ionisation peuvent exciter les molécules de H_2 , l'énergie cinétique prise au cosmique étant convertie en énergie interne. Ce processus est possiblement suivi de la **dissociation de l'hydrogène moléculaire**, dont les produits, à savoir les atomes H, possèdent un excès d'énergie fournissant une source importante de chauffage du gaz³⁶.

In fine, si l'on peut calculer l'énergie ΔE cédée au gaz par un cosmique, pour établir un bilan global il faut néanmoins avoir une idée du **taux d'ionisation primaire**, usuellement noté ζ_{CR} , c'est-à-dire de la probabilité d'ionisation par un cosmique, par unité de temps, pour un atome ou une molécule donnée (H ou H_2). On peut estimer ces taux, de l'ordre de quelques $10^{-17} s^{-1}$, à partir de la mesure des abondances de certaines espèces (OH dans le MIS diffus et H_3^+ dans les nuages moléculaires), dont la formation est initiée par un événement d'ionisation de H et H_2 par un cosmique.

10.5.3 Observations

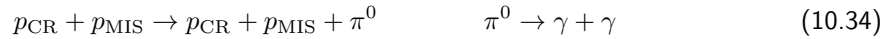
Les rayons cosmiques parvenant au sommet de l'atmosphère terrestre interagissent avec les molécules, créant des particules secondaires en cascade sous la forme de **gerbes cosmiques**. Ces particules relativistes se déplacent plus vite que la lumière dans l'air, ce qui provoque un **effet Cerenkov** observé par des télescopes γ (HESS, MAGIC, VERITAS, Auger et le futur Cerenkov Telescope Array). Les particules qui atteignent le sol peuvent être détectées par le biais de scintillateurs. On peut ainsi mesurer le flux

35. On trouvera dans [26], p.188, une discussion du devenir des électrons ainsi arrachés.

36. Les cosmiques de haute énergie (> 1 GeV) excitent quant à eux les noyaux directement, qui se dés excitent en émettant un rayonnement γ , et ne participent donc pas au chauffage du gaz.

total et la distribution en énergie des cosmiques, mais aussi effectuer des cartographies mettant en évidence les sources individuelles de cosmiques, notamment les restes de supernovæ.

Des mesures indirectes sont également possibles, notamment dans le domaine des γ , avec des observatoires spatiaux (Compton-GRO, Chandra, Integral, Fermi). Ce **rayonnement continu** γ observé dès les années 1960, est dû à l'interaction des protons de haute énergie avec les protons du MIS, produisant des pions qui se désintègrent ensuite en γ ,



et permet une cartographie du milieu interstellaire exempte des biais affectant les autres méthodes, fondées sur l'émission thermique des poussières ou les raies du gaz. D'autre part, les électrons relativistes dans le champ magnétique interstellaire produisent un **rayonnement synchrotron** à basse fréquence, observable depuis le sol.

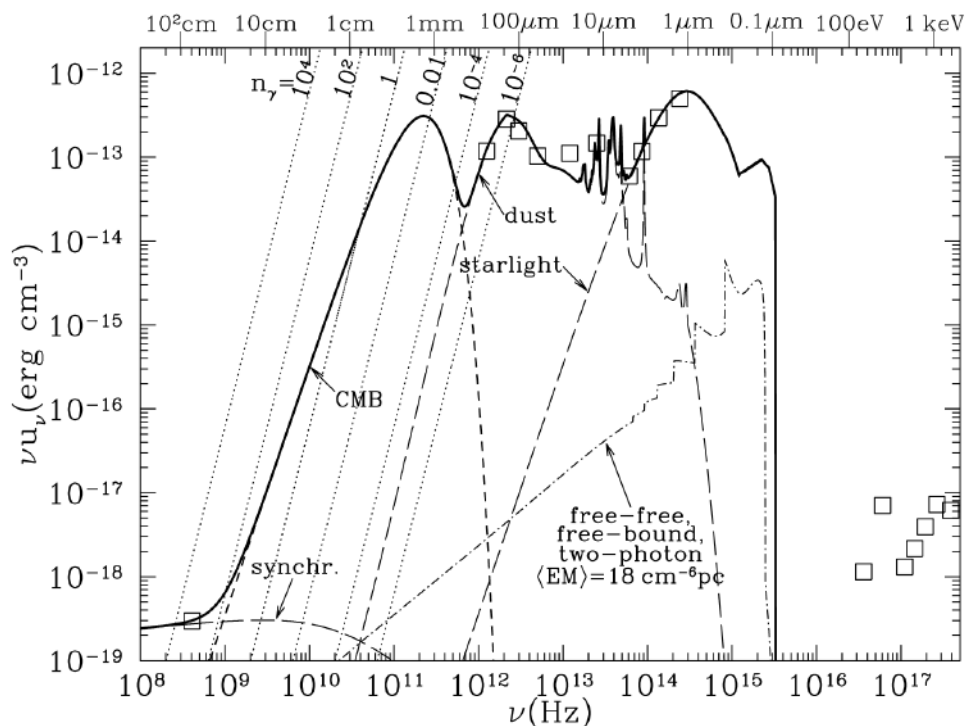


FIGURE 10.22 – Les composantes du champ de rayonnement interstellaire [3].

10.6 Les champs de rayonnement

10.6.1 Les différentes composantes

Le champ de rayonnement électromagnétique dans la Galaxie est constitué de plusieurs contributions, décrites succinctement ci-dessous (Fig. 10.22). Loin de toute étoile, il forme le **champ de rayonnement interstellaire standard (ISRF)**³⁷.

37. On ne mentionne pas ici les raies spectrales (H α , CO), malgré leur importance pour caractériser le gaz atomique et moléculaire, mais uniquement les processus - essentiellement continus - jouant un rôle dans la détermination de l'état thermodynamique du MIS.

Le synchrotron Galactique

Produit par les **électrons relativistes en mouvement autour des lignes de champ magnétique Galactique**, il domine le rayonnement aux fréquences inférieures à 1 GHz, où il devient comparable au CMB. Sa dépendance spectrale est approximativement en ν^{-1} , avec une densité d'énergie u_ν telle que $\nu u_\nu \approx 3 \cdot 10^{-19} \text{ erg} \cdot \text{cm}^{-3}$ sur le domaine 0.1-10 GHz. Le relevé de [46] (Fig. 10.23) en donne la distribution spatiale sur le ciel, à 408 MHz.

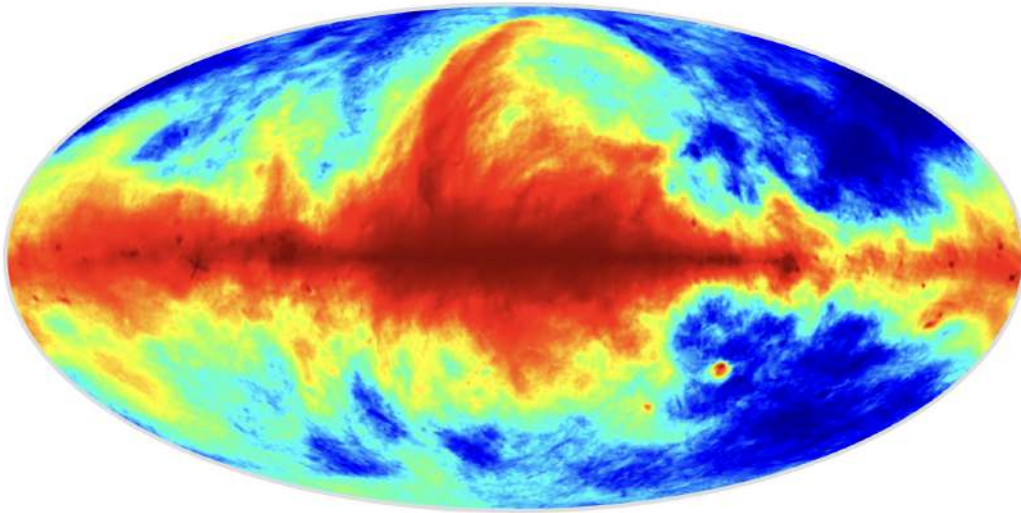


FIGURE 10.23 – Emission synchrotron Galactique [46].

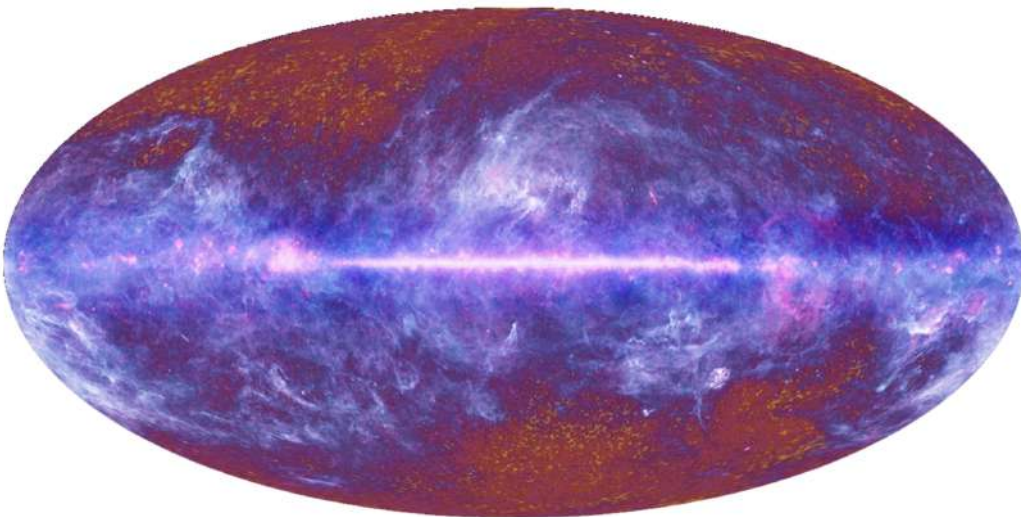


FIGURE 10.24 – Emission FIR de la poussière Galactique observée par Planck [47].

Le fond diffus cosmologique (CMB)

Constitué des photons libérés du plasma primordial au moment de la recombinaison ($z \sim 1100$), il présente un spectre de **corps noir quasi parfait** à $T_{\text{CMB}} = 2.725 \text{ K}$, avec une distribution extrêmement

isotrope sur le ciel³⁸. Des **fluctuations relatives de l'ordre de 10^{-5}** reflètent les fluctuations primordiales de densité dans le plasma, à l'origine de la formation des grandes structures de l'Univers. Le CMB domine le rayonnement Galactique entre 1 et quelques centaines de GHz, où l'émission thermique des poussières prend le relais.

L'émission thermique FIR de la poussière

Le rayonnement entre ~ 500 GHz et ~ 60 THz est dominé par l'émission des poussières, d'abord par l'émission des gros grains, en dessous de 6 THz environ, qui prend la forme d'un **corps noir modifié** (*Modified Black Body*) avec une intensité spécifique³⁹ $I_\nu = \tau_\nu B_\nu(T_d) = \tau_0(\nu/\nu_0)^\beta B_\nu(T_d)$, où $\beta \sim 1.6$ est l'**indice spectral** et $T_d \sim 17$ K est la **température des poussières**. Au delà de 6 THz, on observe des bandes assez étroites, correspondant au **chauffage stochastique des très petits grains et des hydrocarbures aromatiques polycycliques (PAH)**.

Exercice 105 : Expliquer pourquoi la forme de l'intensité spécifique I_ν , donnée ici correspond à un cas optiquement mince.

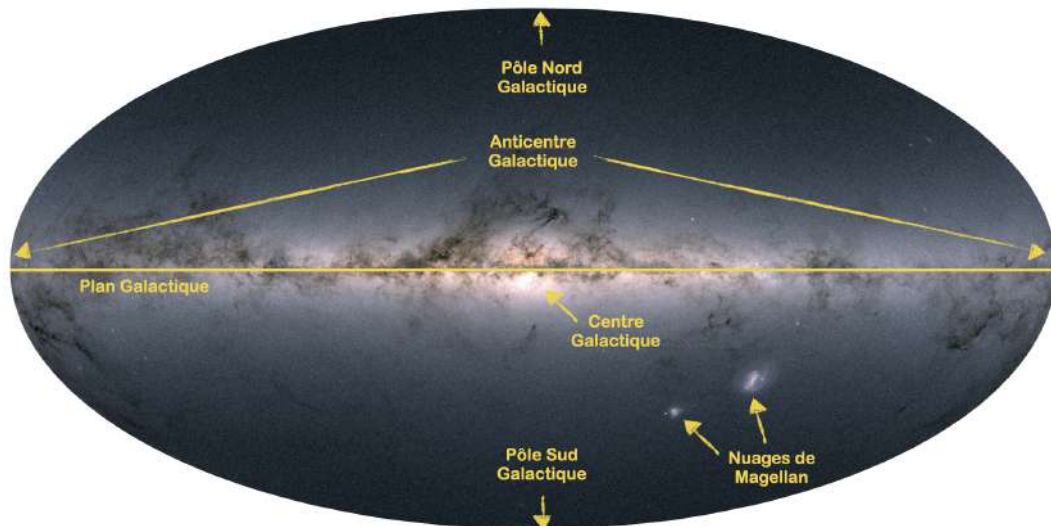


FIGURE 10.25 – Emission visible Galactique observée par Gaia (Crédit : ESA/Gaia/DPAC).

Le rayonnement visible et UV des étoiles

Ce rayonnement domine le spectre entre le proche infrarouge $\sim 2 \mu\text{m}$ et la **limite de Lyman** (91.2 nm) de photo-ionisation de l'hydrogène neutre dans son état fondamental⁴⁰. Le spectre est modélisé⁴¹ par [43] comme une combinaison linéaire de trois corps noirs pour $\lambda > 245$ nm et une succession de trois lois de puissance entre 245 nm et 91.2 nm⁴². Si les valeurs numériques des pa-

38. Une fois qu'on a tenu compte du mouvement de la Terre par rapport au référentiel du CMB, donnant une modulation dipolaire d'amplitude $\Delta T \approx 7$ mK permettant d'en déduire la vitesse $v \approx 370 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ de ce mouvement.

39. On voit ici que cette émission est très généralement optiquement mince, les nuages moléculaires où se trouvent la poussières sont transparents dans le FIR.

40. Les photons de plus haute énergie émis par les étoiles sont immédiatement absorbés par le MIS, et n'apparaissent donc pas dans le spectre.

41. Ce modèle représente bien le rayonnement dans cette partie du spectre pour le voisinage solaire, mais d'autres modélisations existent, par exemple [48].

42. Le rayonnement dans le domaine UV est dominé par les étoiles O/B, peu nombreuses, et est donc fortement variable spatialement.

ramètres de ce modèle données par [43] sont adaptées au voisinage solaire, il est nécessaire, pour caractériser le champ de rayonnement FUV à proximité d'une source comme une association OB, de disposer d'un **paramètre modifiant globalement l'intensité du spectre**. Deux choix sont possibles :

- On peut mettre à l'échelle en se fondant sur **la densité d'énergie à une longueur d'onde particulière**, en l'occurrence 100 nm. Habing [49] a mesuré cette valeur dans le voisinage solaire à $\nu u_\nu(100 \text{ nm}) \approx 4 \cdot 10^{-14} \text{ erg} \cdot \text{cm}^{-3}$ et on introduit donc le paramètre

$$\chi = \frac{\nu u_\nu(100 \text{ nm})}{4 \cdot 10^{-14} \text{ erg} \cdot \text{cm}^{-3}} \quad (10.35)$$

Cette paramétrisation est utile pour les **processus à bande étroite**, comme la photo-excitation de H_2 .

- On peut mettre à l'échelle en se fondant sur **la densité d'énergie intégrée sur le domaine FUV** (6-13.6 eV), elle aussi mesurée par [49], avec $\nu u_\nu(6 - 13.6 \text{ eV}) \approx 5.29 \cdot 10^{-14} \text{ erg} \cdot \text{cm}^{-3}$, et on introduit donc le paramètre

$$G_0 = \frac{\nu u_\nu(6 - 13.6 \text{ eV})}{5.29 \cdot 10^{-14} \text{ erg} \cdot \text{cm}^{-3}} \quad (10.36)$$

Cette paramétrisation est utile pour les **processus en bande large**, comme le chauffage des poussières.

L'estimation de Habing étant ancienne, des estimations plus récentes [48, 50] donnent pour le champ dans le voisinage solaire, $G_0 \approx 1.6$ et $\chi \approx 1.7$. On trouvera dans [51] une discussion des valeurs de G_0 (de ~ 1 à $\sim 10^{4-5}$) qu'on peut observer dans différentes régions.

L'émission du gaz ionisé

Sous-dominante presque partout, mais présente de ~ 10 GHz à la limite de Lyman, on trouve l'émission du gaz photo-ionisé (WIM), qui recouvre d'une part **l'émission free-free ou Bremsstrahlung**, due au freinage des électrons thermiques par les ions⁴³, d'autre part **les émissions free-bound qui sont des continua de recombinaison**, et enfin **les raies de recombinaison** telles que $\text{H}\alpha$. La distribution spatiale de cette émission est cartographiée notamment par le relevé WHAM (Wisconsin Halpha Mapper) [52].

L'émission X du plasma chaud (HIM)

La puissance injectée par les supernovæ⁴⁴, de l'ordre de $3 \cdot 10^{34} \text{ W}$ est convertie en énergie thermique du plasma chaud constituant le HIM. Il produit ainsi un **rayonnement X et EUV (extreme UV)**, dont la partie la moins énergétique est absorbée par le gaz neutre⁴⁵. Ce qui reste présente une très faible densité d'énergie⁴⁶ ($\nu u_\nu \approx 10^{-17} \text{ erg} \cdot \text{cm}^{-3}$), mais joue un rôle important dans l'ionisation du milieu dense, au même titre que les rayons cosmiques.

Exercice 106 : Vérifier numériquement la valeur de la puissance injectée par les supernovæ, à partir des ordres de grandeur donnés dans la note.

10.6.2 Rôles du rayonnement dans le MIS

Le champ de rayonnement constitué des composantes ci-dessus joue un rôle important dans la **détermination de l'état thermodynamique** du gaz et des poussières, et il est donc nécessaire, pour évaluer l'état du gaz, de connaître la densité d'énergie du rayonnement.

43. L'intensité de cette émission dépend de la **mesure d'émission (EM)**, intégrale du carré de la densité électronique sur la ligne de visée, et de la température du gaz. Typiquement, on a $\langle \text{EM} \rangle \approx 18 \text{ cm}^{-6} \cdot \text{pc}$ et $T \approx 8000 \text{ K}$.

44. On peut l'estimer à partir de l'énergie injectée par une supernova, typiquement 10^{51} erg et de la fréquence de ces évènements, typiquement une par siècle dans la Galaxie.

45. À moins d'être dans le voisinage immédiat d'une étoile.

46. Cette densité d'énergie peut être beaucoup plus grande dans les galaxies actives.

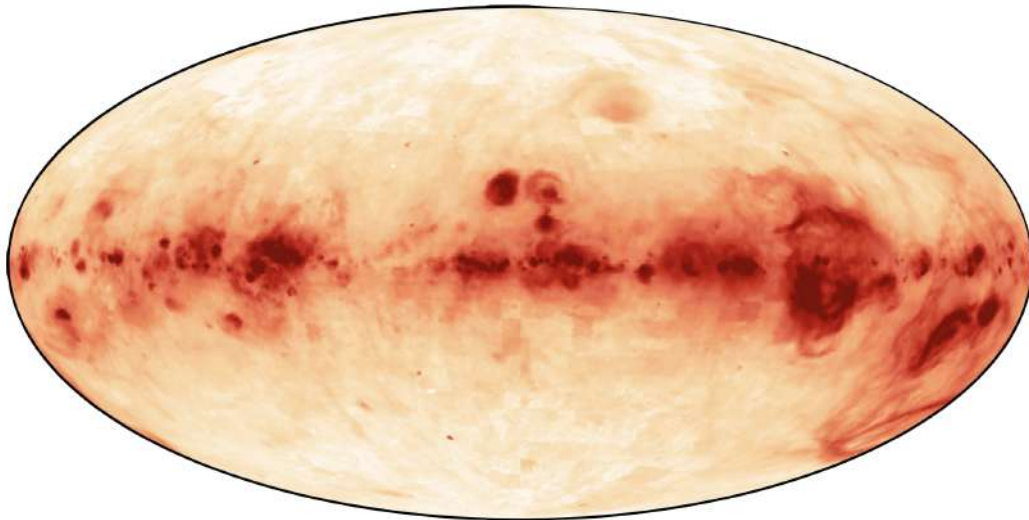


FIGURE 10.26 – **Emission $H\alpha$ Galactique** [52].

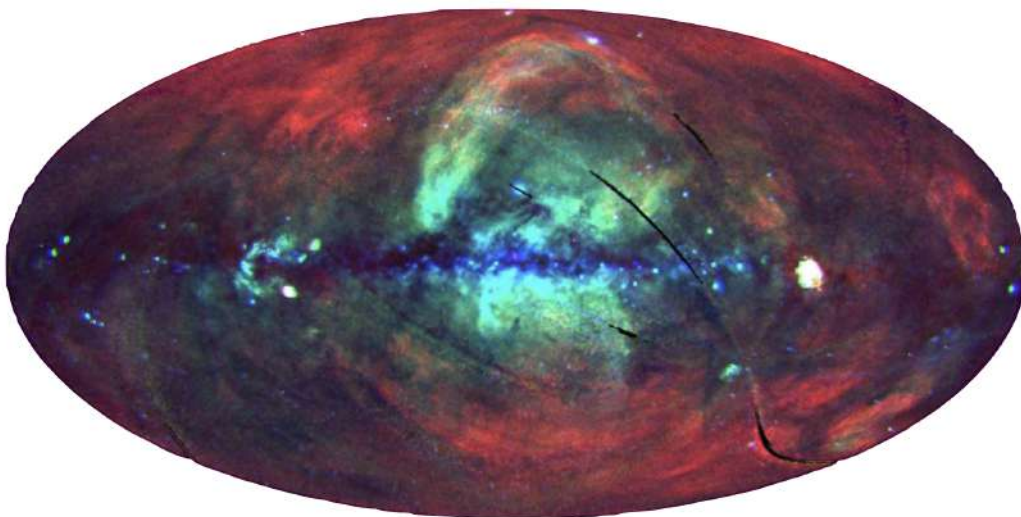


FIGURE 10.27 – **Relevé ROSAT dans les rayons X mous.** (rouge : 0.2-0.4 keV, vert : 0.5-0.9 keV, bleu : 0.9-2.0 keV) [53].

- Par effet photo-électrique sur les grains, le rayonnement UV fournit une source majeure de **chauffage** du gaz.
- Les photons du CMB fournissent une source de **chauffage** des nuages moléculaires au travers de l'excitation des niveaux rotationnels (de CO notamment).
- L'excitation collisionnelle des atomes et molécules, suivie de la désexcitation dans des raies optiquement minces, participe au **refroidissement** du gaz.
- La conversion par les poussières du rayonnement UV en FIR, domaine où le MIS est nettement moins optiquement épais, participe elle aussi au **refroidissement**.
- La photo-ionisation du gaz et des grains participe grandement à la détermination de **l'état d'ionisation**.
- La photo-ionisation et la photo-dissociation jouent un rôle majeur dans la détermination de la

composition chimique du MIS et l'énergie des photons absorbés permet également l'ouverture de chemins réactionnels endoénergétiques.

- La pression de radiation a des effets non négligeables sur la **dynamique des poussières et du gaz** qui leur est couplé.

10.7 Le champ magnétique interstellaire

10.7.1 Structure et origine

Le champ magnétique Galactique présente une **composante ordonnée**, suivant les bras spiraux, avec des **renversements** de sens entre les bras, et une **composante "turbulente"** qui s'y superpose. Les deux composantes ont le même ordre de grandeur d'intensité, $\sim 5 \mu\text{G}$, où l'on rappelle que $1 \text{G} = 10^{-4} \text{T}$. Comme le gros du MIS est un fluide partiellement ionisé et donc conducteur, l'origine de ce champ est probablement à chercher dans un **effet dynamo** dû à la rotation différentielle de la Galaxie. Cet effet nécessitant un **champ "graine"** à amplifier, il se pose encore la question de l'origine de ce champ (expulsion de champs magnétiques stellaires par les supernovæ, formation dans l'Univers primordial au moment de l'inflation, ...).

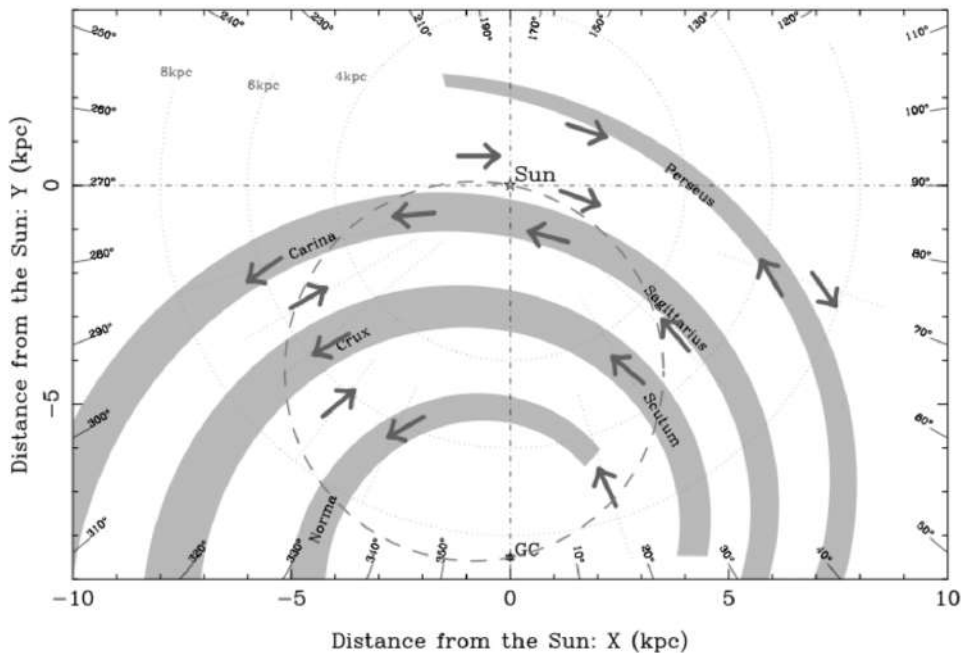


FIGURE 10.28 – Structure du champ magnétique Galactique [54].

10.7.2 Rôle dans le MIS

Le champ magnétique étant couplé au gaz via les ions (astreints à se déplacer le long des lignes de champ), il joue un rôle dynamique dans l'évolution du gaz par les **effets magnétohydrodynamiques de pression et de tension magnétique**, notamment dans la régulation de l'effondrement des cœurs denses pendant la formation stellaire. Il provoque également l'**alignement des poussières** responsable de la polarisation observée en extinction dans le visible et en émission dans l'infrarouge. Il participe aussi à l'**accélération et à la propagation des rayons cosmiques** dans la Galaxie, comme on l'a

déjà mentionné. Enfin, il est responsable, avec les électrons relativistes, du **rayonnement synchrotron** (aussi appelé "magnétobremstrahlung").

10.7.3 Méthodes de mesure

Il existe de multiples méthodes de mesure du champ magnétique, qui renseignent sur différentes caractéristiques du champ (intensité, orientation de la composante dans le plan du ciel, direction de la composante sur la ligne de visée, etc.). Parmi celles-ci, on peut citer :

- **L'effet Zeeman**, par lequel la présence d'un champ magnétique provoque la levée de dégénérescence de niveaux d'énergie. Si l'écart en énergie est trop faible pour être mesurable, la différence de polarisation circulaire entre les deux sous-niveaux peut être exploitée pour mesurer la composante du champ le long de la ligne de visée B_{\parallel} .
- **L'émission synchrotron** (en intensité totale et en polarisation) permet de mesurer l'intensité B_{\perp} de la composante du champ dans le plan du ciel \vec{B}_{\perp} .
- **La rotation Faraday**, qui fait tourner le plan de polarisation rectiligne d'une onde électromagnétique passant au travers d'un plasma magnétisé, permet d'accéder, si l'on connaît aussi la densité électronique n_e , à une mesure de B_{\parallel} , et notamment de son orientation le long de la ligne de visée.
- **La polarisation en extinction dans le visible, et en émission dans l'infrarouge**, due à l'alignement des poussières dans le champ magnétique, permet d'accéder à la direction de \vec{B}_{\perp} . Combinée avec une mesure de la dispersion des vitesses du gaz fondée sur les largeurs de raies spectrales, elle peut donner accès à une estimation de l'intensité B_{\perp} de cette composante, via la méthode de Davis-Chandrasekhar-Fermi [55].

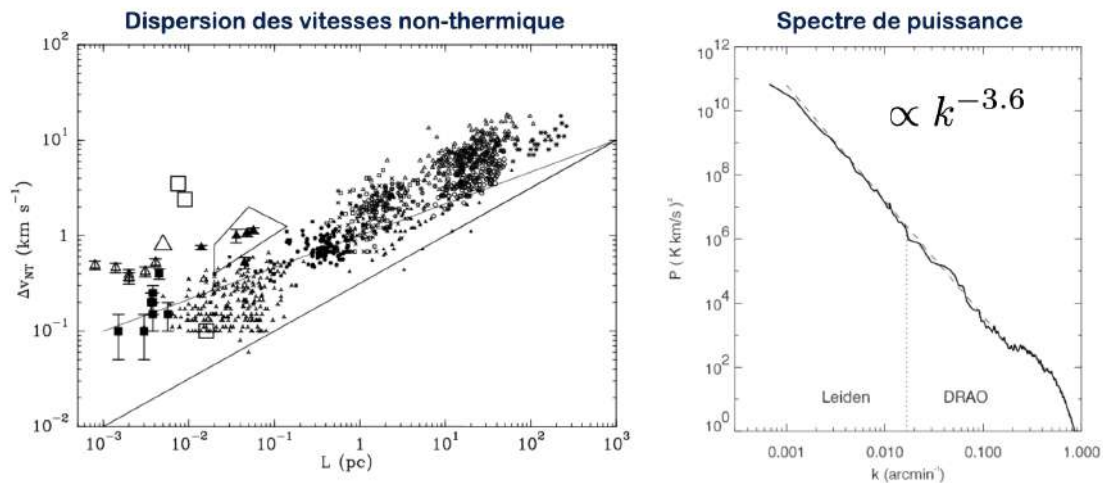


FIGURE 10.29 – **Signatures observationnelles de la turbulence.** Dispersion des vitesses nonthermique en fonction de l'échelle [56] (à gauche) et spectre de puissance de l'émission HI dans Ursa Major [57] (à droite).

10.8 La turbulence interstellaire

10.8.1 Signatures observationnelles

On note plusieurs signatures observationnelles de la présence de turbulence dans le MIS :

- La distribution spatiale des émissions associées au milieu interstellaire (émission thermique des poussières, raies moléculaires) révèle une **structure complexe et filamenteuse**, avec des propriétés d'**auto-similarité**, c'est-à-dire que l'aspect d'une sous-région, vue avec une plus grande résolution angulaire, est semblable statistiquement à celui de la région globale⁴⁷.
- Cette propriété se traduit, dans l'espace de Fourier, par la forme que prend le **spectre de puissance** $P(\vec{k})$ de ces émissions, transformée de Fourier de la **fonction d'autocorrélation** $A(\vec{\tau}) = \langle X(\vec{r})X(\vec{r} + \vec{\tau}) \rangle$, où X est la carte de l'émission. On observe en effet que, sur une grande plage d'échelles spatiales $k = \|\vec{k}\|$, le spectre de puissance prend la forme d'une **loi de puissance** $P(\vec{k}) \propto k^{-\alpha}$, avec un indice spectral α proche de 11/3, ce qui correspond à la turbulence de Kolmogorov⁴⁸.
- La largeur des raies spectrales observées dans les nuages moléculaires est notablement **supra-thermale**, ce qui indique que la dispersion des vitesses contient une composante supplémentaire par rapport à la seule agitation thermique. De plus, **cet excédent de dispersion des vitesses** $\sigma_{v,NT}$ **dépend de l'échelle** ℓ , approximativement selon $\sigma_{v,NT} \propto \ell^{1/2}$, ce qui est là aussi une propriété observée en turbulence⁴⁹.
- À très petite échelle, on observe des signatures de la **dissipation intermittente** de l'énergie turbulente, c'est-à-dire le fait que l'énergie cinétique ayant cascadié des grandes échelles ne se dissipe pas en chaleur de manière uniforme en temps et en espace, mais dans des **structures très localisées et éphémères**. Cette propriété se manifeste par l'apparition d'ails non-Gaussiennes dans la distribution des incréments de vitesse moyenne observés entre deux points du ciel lorsque leur séparation est faible, ce qui signifie que les forts **cisaillements** sont plus probables que ce qu'on attendrait d'une dissipation uniforme.
- La présence de certaines espèces moléculaires dans des régions où elles devraient être impossibles à former étant donnée la température moyenne indique que la dissipation intermittente de la turbulence peut provoquer une **élévation locale très importante de la température**, suffisante pour surmonter les **barrières d'activation**.

10.8.2 Origine et rôle

La turbulence interstellaire est alimentée par l'injection d'énergie cinétique, notamment à grande échelle par la **rotation différentielle de la Galaxie**, mais aussi par l'accumulation des **supernovæ et l'expansion de leurs rémanents**. La viscosité du MIS étant très faible, le **nombre de Reynolds** est très grand, $Re > 5 \cdot 10^4$, ce qui conforte l'hypothèse d'un régime turbulent pour les écoulements interstellaires. À petite échelle, la turbulence fournit un **support contre l'effondrement gravitationnel** et régule donc en partie la formation stellaire.

47. Cela amène à introduire la notion de **dimension fractale** des structures du milieu interstellaire.

48. Ce qui pose des questions, la turbulence de Kolmogorov étant hydrodynamique et incompressible, alors que le MIS est magnétisé et fortement compressible.

49. Avec potentiellement des exposants différents, la conservation de l'énergie dans la **cascade turbulente de Kolmogorov** donnant plutôt $\sigma_{v,NT} \propto \ell^{1/3}$. On pourra se reporter à [56].

Chapitre 11

La formation des étoiles

La question de la formation stellaire a pris corps au cours des années 1940, avec l'étude des étoiles de type **T-Tauri**, qu'on trouve dans des nuages sombres, dont il a été réalisé qu'elles représentaient une **étape primitive des étoiles de type solaire**, qui doivent avoir condensé à partir du matériau de ces nuages. Les deux décennies suivantes furent consacrées au développement de **modèles de l'effondrement**, avant que les avancées technologiques permettent de **sonder les nuages dans l'infrarouge**¹, levant le problème de l'extinction. Ce champ de recherche est toujours très actif, d'autant plus qu'il se connecte avec celui de la **formation des (exo)planètes**.

11.1 Observations de la formation stellaire

11.1.1 Les sites de formation stellaire : associations OB, T et R

La formation stellaire est observée dans **tous les types de galaxies** : dans les bras des galaxies spirales, dans les galaxies "irrégulières" comme les nuages de Magellan², dans les galaxies dites à **flambée d'étoiles** ("starburst"), ou encore dans les galaxies en interaction. Dans notre Galaxie, on observe une formation **inhomogène spatialement**, certaines régions étant très actives (W49, Orion) et d'autres beaucoup moins (Taurus), et privilégiant³ la **formation en groupes** de 10 à 10⁷ membres. Comme les étoiles naissent dans des régions denses du MIS, les nuages moléculaires, potentiellement obscurcis par la poussière présente, on distinguera les **amas enfouis**, révélés par l'observation en infrarouge, des **sous-groupes** visibles en optique, plus évolués et ayant dispersé la majorité de leur nuage parent. En fonction de la présence ou non d'étoiles massives dans le groupe, la dispersion du gaz sera plus ou moins efficace, de sorte qu'on distinguera⁴ :

- Les **associations OB**, qui contiennent quelques dizaines de membres, des étoiles jeunes et massives, sur des tailles de l'ordre de 10 à 200 pc. Elles sont formées dans les GMC, non liées gravitationnellement, elles dispersent rapidement le gaz du nuage parent et se dispersent elles aussi rapidement, sur des échelles de ~ 10 Myr.
- Les **associations T**, qui contiennent 30 à 300 membres, des étoiles de faible masse, les T-Tauri, sur des tailles de l'ordre de 3 à 30 pc.

1. Dans l'infrarouge proche d'abord, accessible depuis le sol, puis dans l'infrarouge moyen et lointain, où l'extinction est encore plus faible, mais qui n'est accessible que depuis l'espace. Le lancement d'IRAS en 1983 a ouvert ce champ.

2. La nébuleuse de la Tarentule (30 Doradus) dans le LMC est l'une des régions de formation stellaire les plus actives qu'on connaisse.

3. On pense qu'en réalité, toutes les étoiles se forment en groupe, plus ou moins nombreux. On pourra distinguer les **amas** liés gravitationnellement, des **associations** potentiellement plus lâches.

4. Ces distinctions mettent l'accent sur les membres les plus fréquents des groupes, mais il est évident que chacun présente une distribution en masse assez large.

- Les **associations R**, qui contiennent des étoiles de masse intermédiaire (type A ou B), mélangées à des étoiles de faible masse T-Tauri. Du fait de leur temps d'évolution assez rapide, le nuage parent est souvent encore présent, et on observe des nébuleuses en réflexion associées à ces groupements.

11.1.2 Classification des objets stellaires jeunes

Diagrammes couleur-couleur et excès infrarouge

Si les membres les plus brillants d'un groupe sont identifiés directement dans un relevé optique ou IR, la détermination des autres membres, et la distinction avec les étoiles d'avant-plan ou d'arrière-plan requiert des méthodes particulières, soit d'ordre statistique (en comparant avec une région proche), soit individuelles (mouvements propres, spectroscopie ou photométrie). La classification des membres des groupes enfouis peut se fonder notamment sur l'utilisation de **diagrammes couleur-couleur** en infrarouge, utilisant les bandes J ($1.25 \mu\text{m}$), H ($1.65 \mu\text{m}$) et K ($2.22 \mu\text{m}$), comme le montre la Fig. 11.1. Les courbes théoriques sur le panneau de gauche montrent les couleurs J–H et H–K pour un corps noir à différentes températures effectives, pour des étoiles sur la séquence principale et pour des géantes rouges. Le rougissement interstellaire déplace les points le long des lignes en tirets. Un diagramme observé (Fig. 11.1, droite) montre que des éléments de l'amas présentent un **excès infrarouge**, associé à la présence de **poussières circumstellaires**.

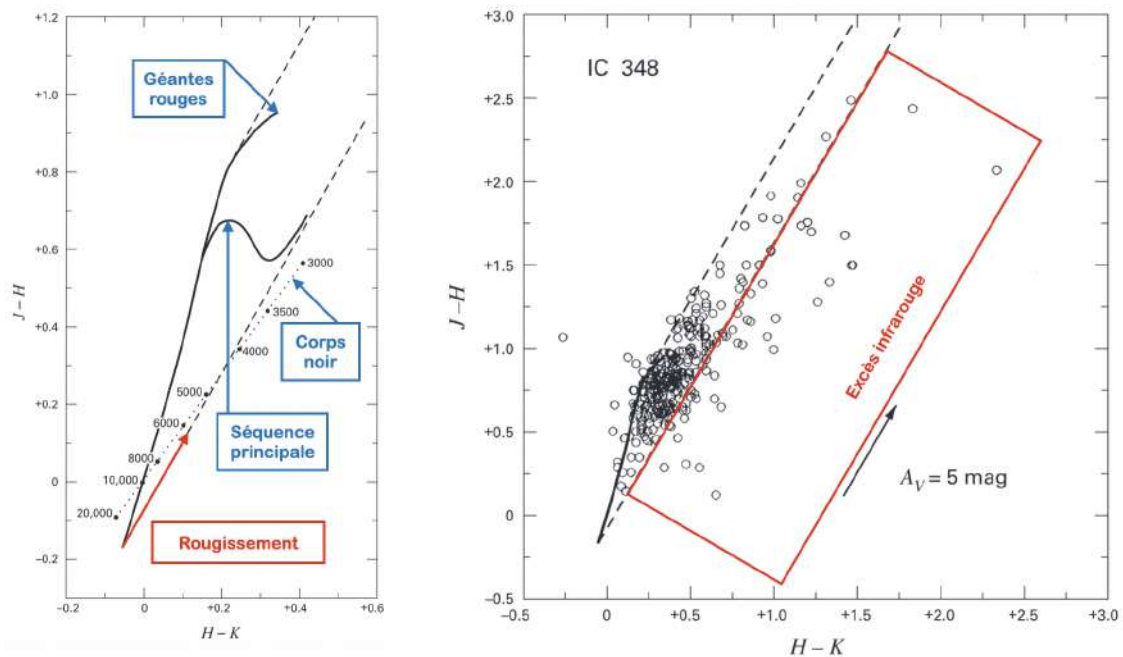


FIGURE 11.1 – **Diagramme couleur-couleur et excès infrarouge.** À gauche : diagramme couleur-couleur théorique pour un corps noir à différentes températures effectives, pour des étoiles sur la séquence principale et pour des géantes rouges. Le rougissement interstellaire déplace les points le long des lignes en tirets. À droite : diagramme observé dans l'amas IC 348. Les éléments de l'amas présentant un excès infrarouge sortent de la bande due à l'extinction interstellaire. Figure adaptée de [26].

Objets de classe 0, I, II et III

Une fois corrigés du rougissement interstellaire, les spectres permettent de classer les différents **objets stellaires jeunes** (*Young Stellar Objects*, YSO) en fonction de l'excès infrarouge, quantifié par la pente du spectre, évaluée entre $2.2 \mu\text{m}$ et $10 \mu\text{m}$,

$$\alpha_{\text{IR}} = \frac{d \log(\lambda F_{\lambda})}{d \log \lambda} \quad (11.1)$$

Différents exemples sont présentés sur la Fig. 11.2. On a alors la classification suivante :

- Les objets visibles uniquement en FIR et au delà sont dits de **classe 0**. Ce sont des sources très enfouies, dont le spectre est celui d'un corps noir à $15 - 30 \text{ K}$.
- Les objets visibles en proche infrarouge, mais avec un fort excès infrarouge ($\alpha_{\text{IR}} > 0$) sont dits de **classe I**. Ils sont associés à des cœurs denses.
- Les objets pour lesquels $-1.5 < \alpha_{\text{IR}} < 0$ sont dits de **classe II**. Ils sont moins enfouies, et leur spectre combine les contributions de l'objet central et du **disque protoplanétaire**.
- Les objets pour lesquels $\alpha_{\text{IR}} < -1.5$ sont dits de **classe III**. Ils ont un spectre approchant celui d'un corps noir stellaire, le disque ayant été presque entièrement converti en planètes et en "débris" (on parle de **disques de débris**).

Cette classification recouvre donc très probablement une **évolution temporelle**⁵, de la classe 0 à la classe III, au fur et à mesure que l'environnement circumstellaire est "nettoyé".

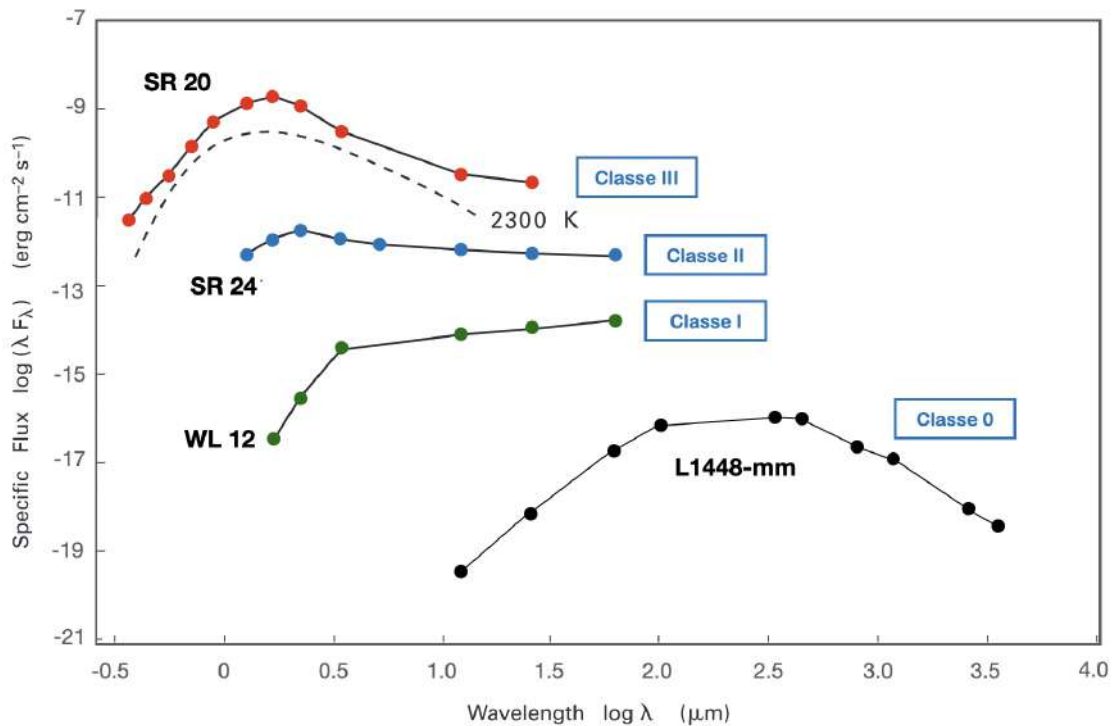


FIGURE 11.2 – Spectres corrigés du rougissement interstellaire pour différents objets stellaires jeunes (classes 0 à III). Le spectre d'un corps noir à 2300 K est aussi indiqué. Figure adaptée de [26].

5. Une autre caractérisation possible de l'évolution d'un groupe se fonde sur la **fonction de luminosité** dN/dL_* , recensant le nombre d'objets de luminosité bolométrique donnée. Celle-ci évoluant rapidement, et de façon très dépendante de la masse, pour les objets jeunes, l'évolution de cette fonction trace celle du groupe.

Les étoiles T Tauri

Les **T Tauri**, du nom du prototype des étoiles de ce type (Fig. 11.3, à gauche), ont été découvertes en 1945 par Alfred H. Joy. Elles présentent une luminosité fortement variable, du fait de l'enfouissement, avec un type spectral F à M ($T_{\text{eff}} \sim 2500 - 7000 \text{ K}$, $L \sim 10^{-3} - 6 L_{\odot}$). Leur masse typique est $< 2 M_{\odot}$ et leur âge estimé à $< 10^7$ an. Les deux dernières classes (II et III) d'objets stellaires jeunes mentionnées plus haut recouvrent également *grosso modo* deux classes d'étoiles T Tauri, qui se distinguent par leurs propriétés en termes de raies spectrales :

- Les **T Tauri classiques** (classe II) présentent de fortes raies d'émission, notamment $H\alpha$ et des raies du CaII aux alentours de 400 nm. Ces raies suggèrent la présence d'une enveloppe de gaz chaud ionisé ($> 10^4 \text{ K}$).
- Les **T Tauri à faibles raies** (classe III) présentent, comme leur nom l'indique, des raies beaucoup plus faibles.

Les deux classes de T Tauri sont probablement aussi nombreuses l'une que l'autre, mais la seconde a été découverte bien plus tard, notamment au travers de leur émission X anormalement élevée, au tournant des années 1980.

Les objets Herbig Ae/Be

Découvertes en 1960, les étoiles **Herbig Ae/Be** sont de type spectral A ou B, donc plus chaudes que les T Tauri, mais elles présentent des caractéristiques similaires (raies d'émission de l'hydrogène et du lithium, notamment). Elles sont situées dans des nuages denses et sont plus massives ($2 - 20 M_{\odot}$) et plus jeunes ($< 10^6$ an) que les T Tauri. Une telle étoile est R Coronæ Australis, représentée sur la Fig. 11.3 (à droite).

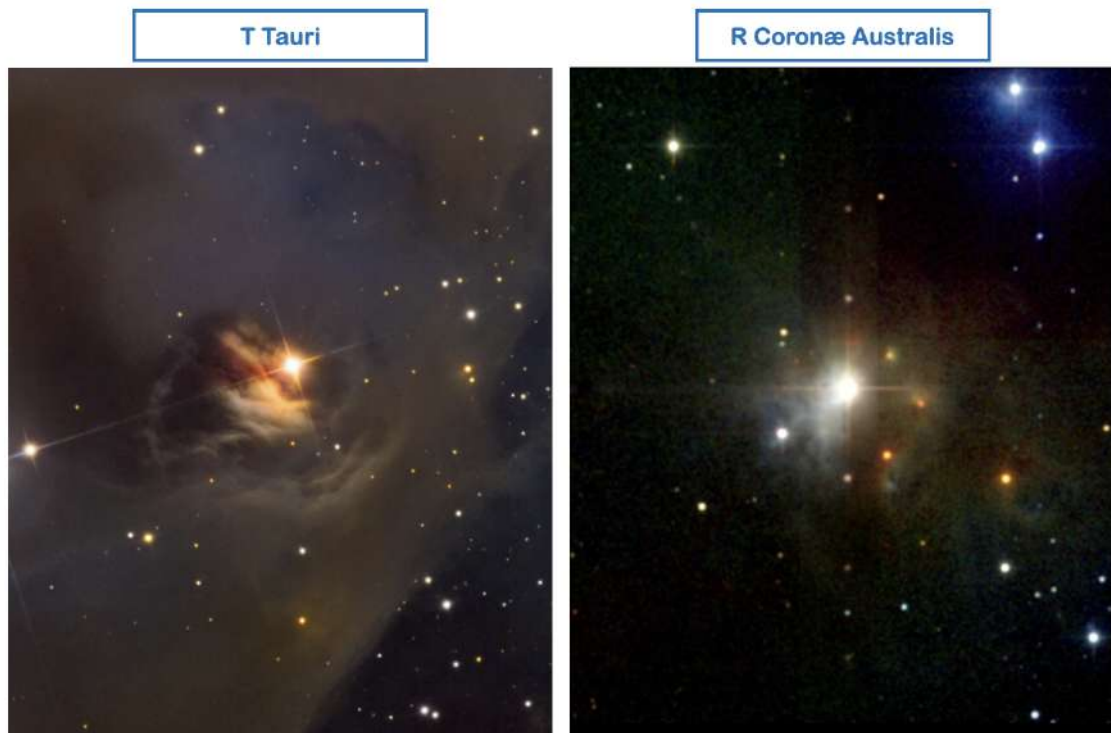


FIGURE 11.3 – **Des objets stellaires jeunes.** T Tauri (à gauche, *Crédit : A. Block / Mount Lemmon SkyCenter / University of Arizona*) et R Coronæ Australis, une étoile Herbig Ae/Be (à droite, *Crédit : 2MASS*).

11.1.3 Séquence d'évolution

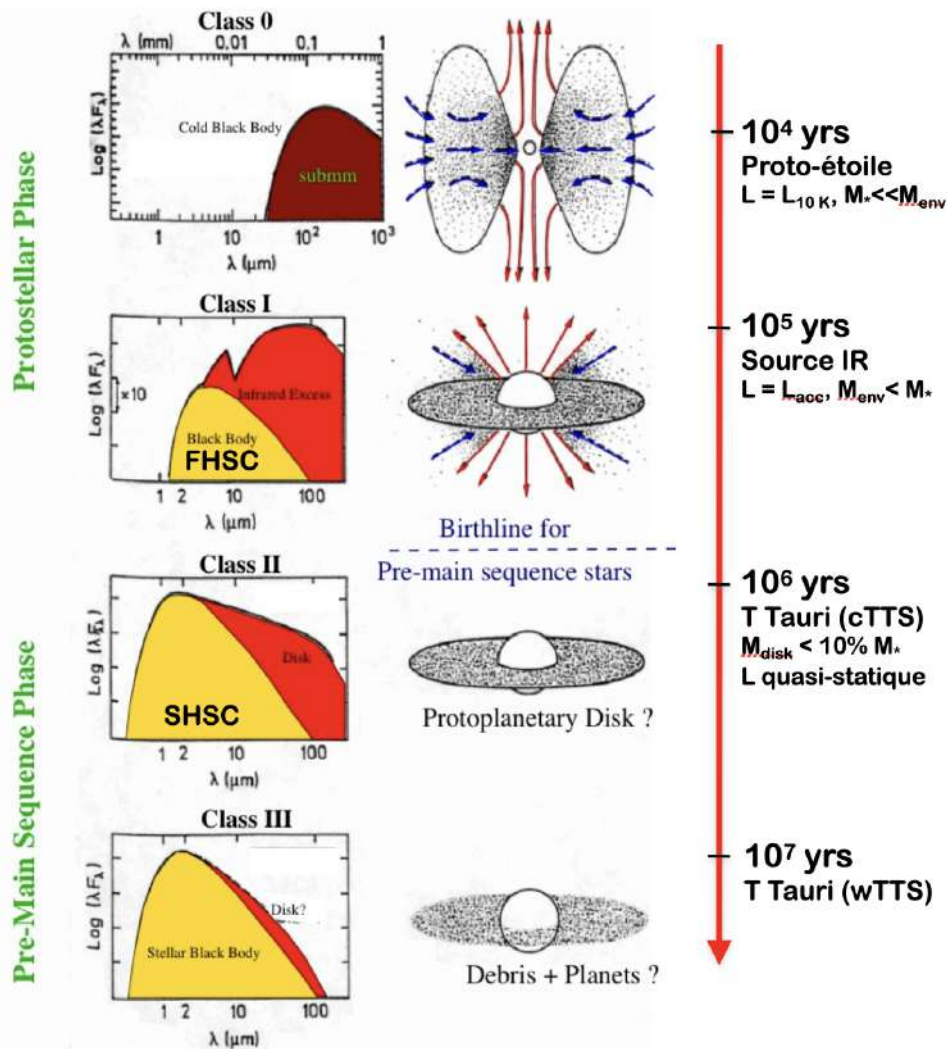


FIGURE 11.4 – **Evolution des objets proto-stellaires.** En fonction du temps (de haut en bas), avec le spectre à gauche, la représentation schématique du système au centre, et les principales propriétés à droite. Figure issue de [58]

L'image qui se dégage de l'évolution des objets **proto-stellaires** est celle présentée sur la Fig. 11.4. On y retrouve les classes déjà discutées :

- Les objets de **classe 0**, observés dans le continuum millimétrique, qui trace l'enveloppe de l'objet par l'émission de la poussière chauffée. Le rapport élevé $L_{\text{mm}}/L_{\text{bol}}$ de la luminosité millimétrique à la luminosité bolométrique indique que cette **enveloppe est beaucoup plus massive que l'objet central** et que le disque (qui représente environ 10% de l'enveloppe). L'âge typique de ces objets est de l'ordre de $10^4 - 10^5$ an.
- Les objets de **classe I**, qui brillent dans l'IR du fait de la **luminosité d'accrétion**. L'enveloppe et le disque combinés ont désormais une masse inférieure à celle de l'objet central.
- Les objets de **classe II** (T Tauri classiques) ont perdu toute enveloppe mais ont encore un disque, qui représente $\lesssim 10\%$ de la masse de l'objet central.

- Les objets de **classe III** (T Tauri à faibles raies) n'ont plus qu'un disque de débris et des compagnons planétaires.

11.1.4 Estimation des âges par le diagramme HR

On peut estimer les âges des associations T, et leur état d'activité, en plaçant les objets jeunes visibles optiquement dans un **diagramme de Hertzsprung-Russell (HR)**. Sur celui-ci (on donne un exemple sur la Fig. 11.5), on note que les objets se situent tous entre deux courbes, l'une étant la **ligne des naissances** (*birthline*), et l'autre la **séquence principale à âge nul** (*Zero Age Main-Sequence, ZAMS*). Les modèles dont on discutera plus loin montrent que les objets stellaires jeunes de classe II et III⁶ se déplacent dans le diagramme HR de la première courbe à la seconde. La présence d'objets proches de la ligne des naissances indique que la région est encore en train de former des étoiles, et la position des objets les plus évolués, c'est-à-dire les plus proches de la ZAMS donne une information sur l'âge de l'association, en comparant avec les isochrones de modèles d'évolution pré-séquence principale (Fig. 11.5, droite). Dans certains cas, on observe que seules les étoiles d'une masse suffisante ont atteint la ZAMS⁷, ce qui permet là aussi de mettre une limite supérieure à l'âge de l'association (*turn-on* de la séquence principale).

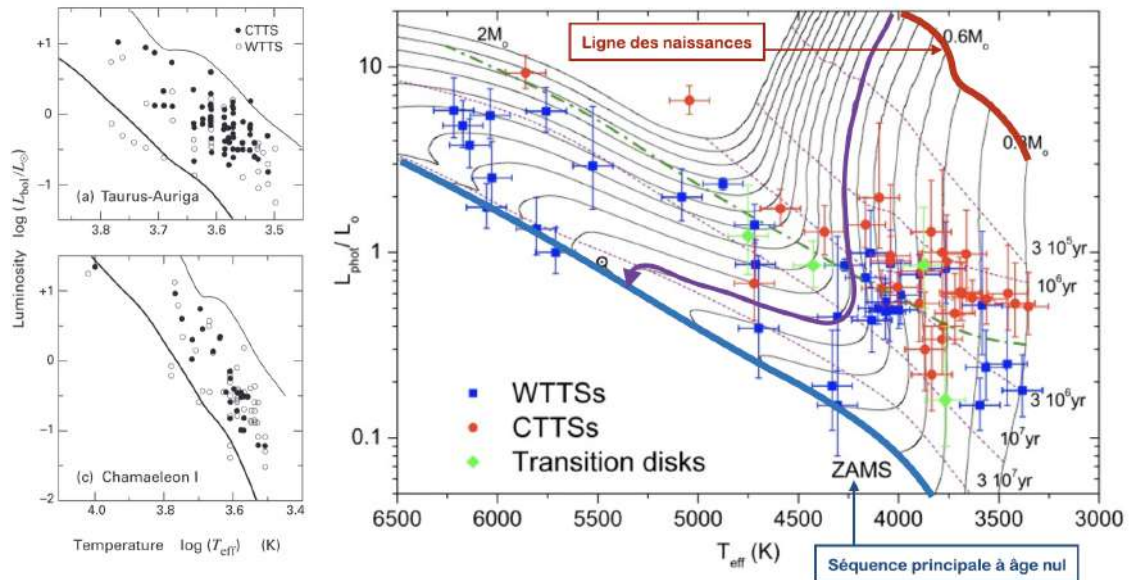


FIGURE 11.5 – **ZAMS et ligne des naissances.** À gauche : diagrammes de Hertzsprung-Russell d'associations T dans Taurus et Chamaeleon, montrant les T Tauri classiques et à raies faibles, la ligne des naissance et la ZAMS. Figure issue de [26]. À droite, sur le cas d'une autre association, on montre les trajectoires d'évolution d'étoiles de différentes masses. Figure adaptée de [59].

Une méthode proche peut être utilisée pour les associations OB, telle Upper Scorpius, en notant que pour les étoiles massives, l'évolution vers la séquence principale ne peut être observée, car trop rapide, mais qu'on peut en revanche noter leur départ (*turn-off*). La déviation de la séquence principale pour une certaine masse (par exemple $30 M_{\odot}$) donne l'âge de l'association via le temps de vie sur la séquence principale ($5 \cdot 10^6$ an dans ce cas). La mesure des mouvements propres peut aussi permettre de retrouver la configuration la plus compacte, et le temps écoulé depuis cet état initial. Les deux méthodes sont illustrées sur la Fig. 11.6.

6. Les sources moins évoluées n'apparaissent pas dans ce diagramme car on ne peut attribuer une température effective à leur objet central.

7. Par exemple, sur la Fig. 11.5 (droite), aucune étoile de moins de $0.7 M_{\odot}$ n'a atteint la ZAMS.

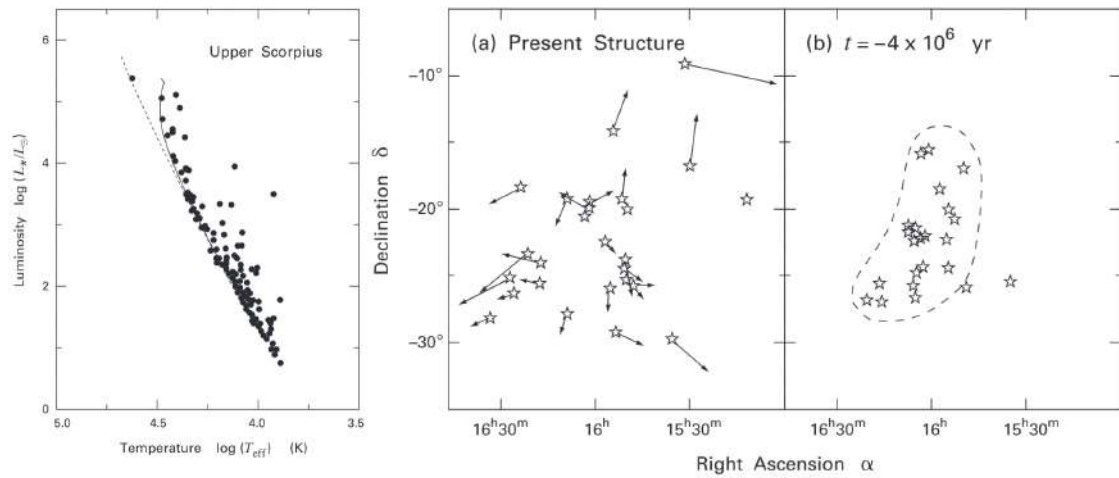


FIGURE 11.6 – **OB Upper Scorpius**. Diagramme HR de l'association OB Upper Scorpius, montrant le *turn-off* de la séquence principale (à gauche), et reconstruction de la morphologie initiale de l'association via les mouvements propres (à droite). Figures issues de [26].

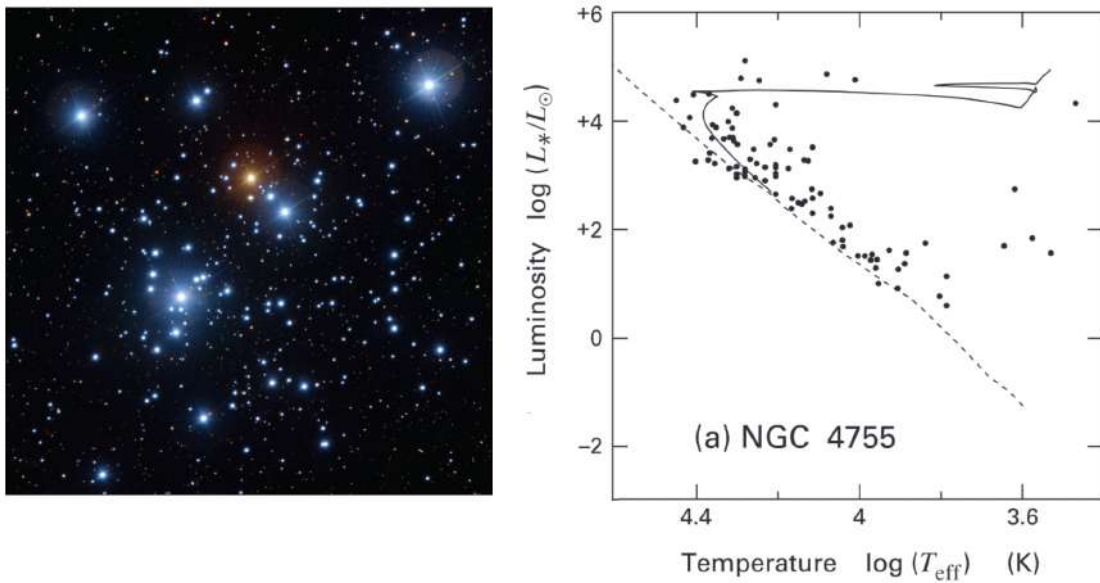


FIGURE 11.7 – L'amas ouvert de la “Boîte à Bijoux”. Image ESO/VLT et diagramme HR. Figure issue de [26].

11.1.5 Les amas ouverts

Un dernier type de groupement stellaire se doit d'être mentionné. Les **amas ouverts**, comme les Pleiades, sont des associations évoluées (10^8 à 10^9 an), mais dont les membres les moins massifs sont encore en évolution vers la séquence principale, bien que l'absence de gaz implique la fin de la formation d'objets protostellaires. La plupart de ces amas sont gravitationnellement liés, de taille ~ 5 pc, et regroupent quelques dizaines à quelques centaines de membres, qui partagent le même âge

et la même composition chimique⁸. Pour ces amas, on observe parfois simultanément les deux points de *turn on* et *turn-off* de la séquence principale, comme c'est le cas sur la Fig. 11.7. Les membres les plus massifs se trouvent dans les zones centrales les plus densément peuplées, c'est le phénomène de **ségrégation en masse**, qu'on observe également dans les groupements plus jeunes, et doit donc faire partie intégrante du processus de formation stellaire. Pour les amas ouverts, le processus de **relaxation dynamique** intervient en plus, le temps caractéristique étant de l'ordre de $7 \cdot 10^7$ an.

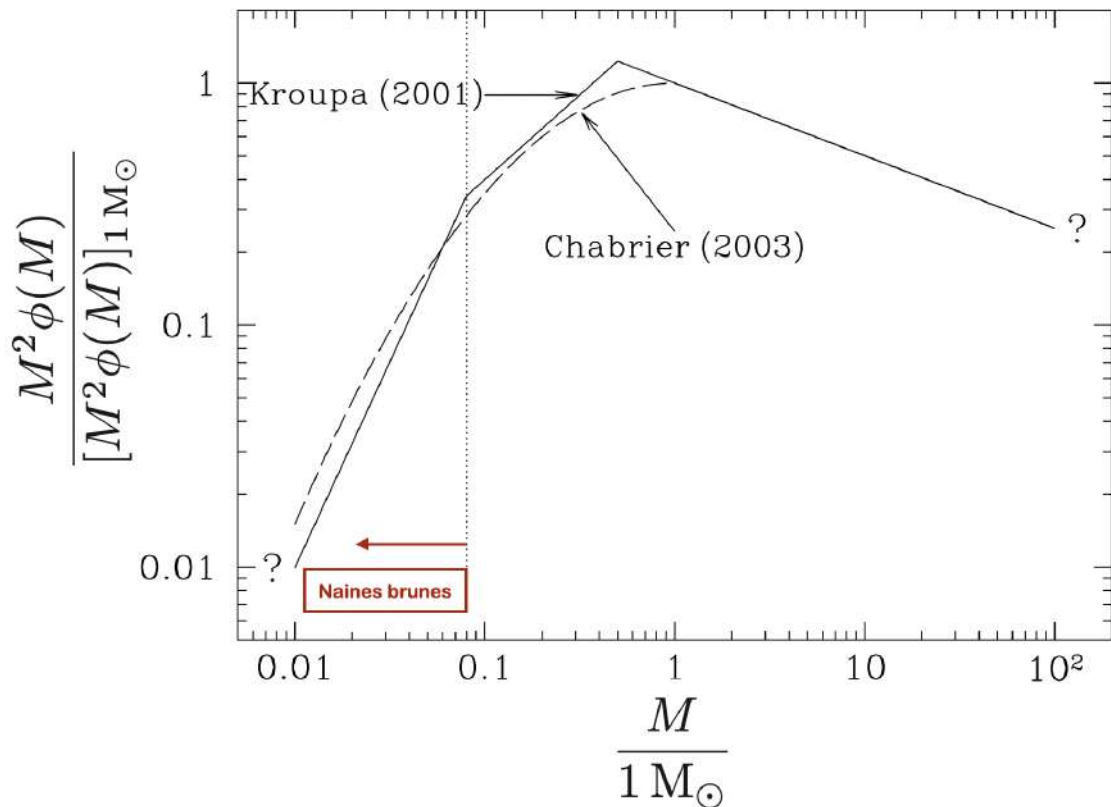


FIGURE 11.8 – **Fonction de masse initiale** (représentée par $M^2\phi(M)$) pour les modèles de Kroupa [60] et Chabrier [61]. Figure adaptée de [3].

11.1.6 La fonction de masse initiale (IMF)

La masse initiale d'une étoile est un paramètre déterminant pour son évolution ultérieure. Il est donc essentiel de s'interroger sur la distribution en probabilité de ces masses. La **fonction de masse initiale** (*Initial Mass Function*, IMF) $\phi(M)$ est définie par⁹

$$\phi(M) = \frac{dN}{dM} \quad (11.2)$$

où dN est le nombre d'étoiles nouvellement formées de masse comprise entre M et $M + dM$. La détermination de l'IMF repose d'abord sur l'observation de la **fonction de luminosité** actuelle des

8. Cette propriété en a fait des outils importants dans la découverte de l'extinction interstellaire et la construction des premiers barreaux de l'échelle des distances cosmologiques.

9. Il convient de prendre garde au fait que certains papiers la définissent non par intervalle de masse, mais par intervalle logarithmique en masse, soit $dN/d \log M$. Les exposants mentionnés plus bas sont alors modifiés d'une unité.

étoiles du champ, $\Phi(M_V)$, où la magnitude absolue en bande V est un *proxy* de la luminosité¹⁰. Cette fonction $\Phi(M_V)$ tenant compte du temps de vie sur la séquence principale, elle peut s'écrire comme une intégrale sur le temps impliquant le **taux de formation stellaire**¹¹ $\dot{M}(t)$ et la **fonction initiale de luminosité** $\Psi(M_V)$ (voir [26], §4.5.1). Sous des hypothèses raisonnables, on peut inverser la relation et en tirer $\Psi(M_V)$, qui est, elle, directement reliée à $\phi(M)$. C'est ainsi que E. E. Salpeter [62] a montré, par un ajustement entre $0.4 M_\odot$ et $10 M_\odot$, que $\phi(M) \propto M^{-2.35}$. Depuis, d'autres estimations ont été faites, l'IMF pouvant être mesurée jusqu'à de beaucoup plus faibles masses $\sim 0.08 M_\odot$, proches de la limite de combustion de l'hydrogène. On commence à sonder alors la distribution de masse des **naines brunes**. Parmi les formes empiriques proposées, on peut citer les IMF de Kroupa [60] (succession de lois de puissance) et Chabrier [61] (forme log-normale), représentées sur la Fig. 11.8. Le point essentiel étant que le nombre d'étoiles formées décroît rapidement au delà de $\sim 0.1 M_\odot$, une étoile sur dix environ ayant une masse supérieure à celle du Soleil, et **la masse typique d'une étoile est donc de quelques dixièmes de masse solaire**. Pour les étoiles des amas et des associations, la détermination¹² de $\phi(M)$ est sujette à des fluctuations statistiques, mais il semble que l'IMF soit proche de celle des étoiles de champ. L'IMF semble donc relativement indépendante de la région considérée, mais son **universalité** est néanmoins toujours une question ouverte, notamment en fonction de la métallicité.

11.1.7 Observations des cœurs préstellaires

Observations et propriétés individuelles

Les **cœurs préstellaires**, gravitationnellement liés mais sans proto-étoile centrale, sont à distinguer des **cœurs protostellaires**, dans lesquels un objet central commence à chauffer son environnement. On observe ces cœurs au travers de leur émission dans l'infrarouge lointain et dans le millimétrique. Un exemple de cœur préstellaire typique est L1544, dont on montre des observations millimétriques et la dérivation du profil de densité et de température sur la Fig. 11.9. On voit que l'objet, s'il n'est pas exactement à symétrie sphérique, est néanmoins **globalement amorphe**, avec une **concentration centrale peu marquée** d'extension quelques 10^3 UA.

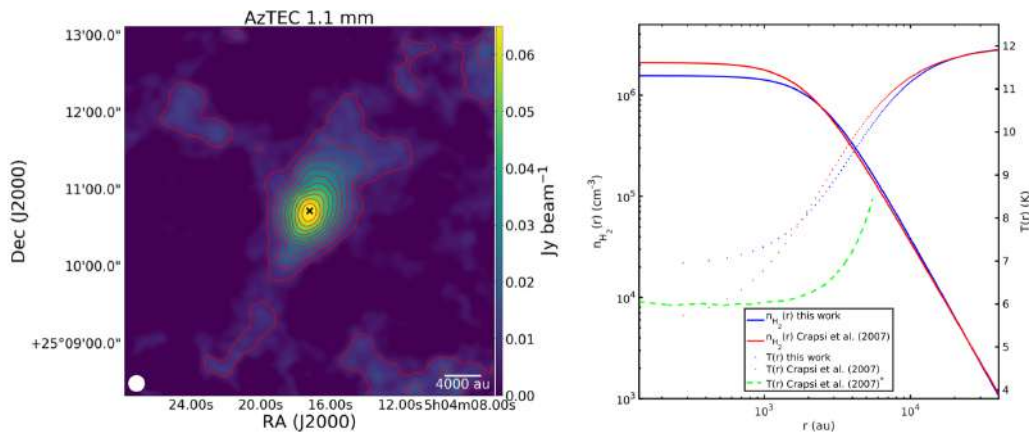


FIGURE 11.9 – **Le cœur préstellaire L1544**. Observations millimétriques (à gauche) et profils de densité et de température déduits (à droite). Figures issues de [63].

La **détermination de la température** se fonde sur l'observation que ces objets n'émettent qu'à

10. $\Phi(M_V)dM_V$ est le nombre d'étoiles de magnitude M_V à dM_V près, par unité de volume. On observe que cette fonction croît jusqu'à $M_V \approx 5$, ce qui correspond aux étoiles dont le temps de vie sur la séquence principale est de l'ordre de l'âge de la Galaxie, 10^{10} an. Elle plafonne ensuite, pour les étoiles de plus faible luminosité.

11. par unité de volume

12. On utilise essentiellement les amas ouverts et les associations OB pour cette détermination.

grande longueur d'onde et sont donc **froids**. L'émission de la poussière est modélisée par un corps noir modifié, où la densité spectrale de flux F_ν dépend de la température des poussières, de leur indice spectral β et de la taille angulaire apparente Ω ,

$$F_\nu = B_\nu(T_d)(1 - e^{-\tau_\nu})\Omega \approx \tau_\nu B_\nu(T_d)\Omega = \tau_0 \left(\frac{\nu}{\nu_0}\right)^\beta B_\nu(T_d)\Omega \quad (11.3)$$

Un ajustement de la **distribution spectrale en énergie** (SED) observée fournit typiquement $T_d \sim 7 - 15$ K et $\beta \sim 1.5 - 2$. On peut également en tirer la masse des poussières, puis celle du gaz. On trouve alors des masses de l'ordre de 0.5 à $10 M_\odot$ [64].

Morphologie des populations de cœurs et fonction de masse

Dans les relevés à grand champ, on peut identifier un grand nombre de candidats pré- et protostellaires, comme le montre l'exemple d'Aquila observé avec *Herschel*, présenté sur la Fig. 11.10. L'extraction des structures filamenteuses dans la carte de la densité de colonne de H_2 semble pointer le fait que les cœurs se forment en "perles" sur des filaments denses.

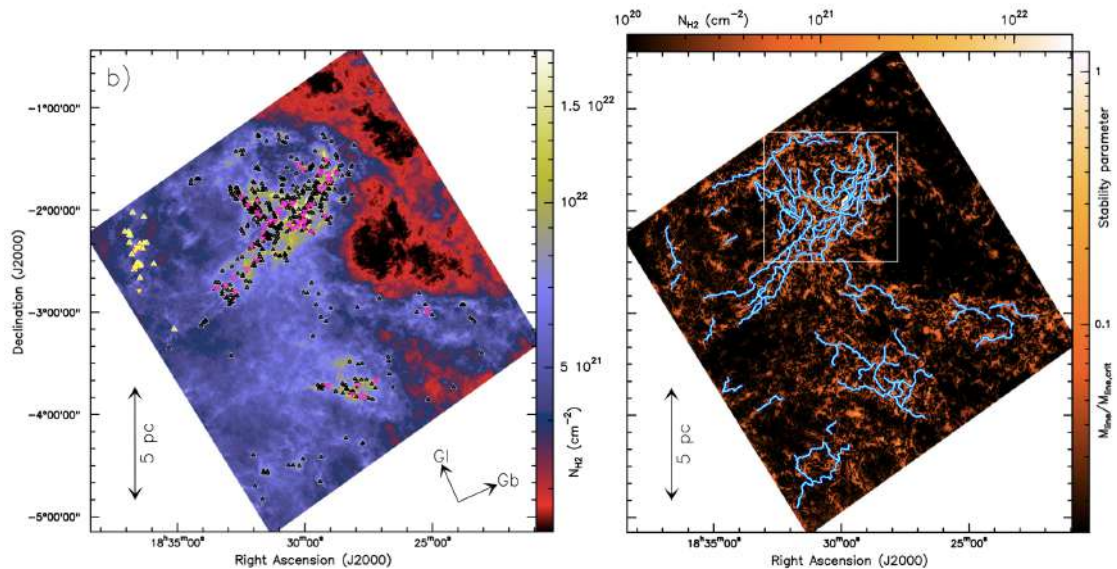


FIGURE 11.10 – **Identification de candidats pré- et protostellaires dans le nuage moléculaire Aquila.** À gauche, les triangles noirs correspondent aux cœurs préstellaires, les magenta aux cœurs protostellaires. À droite, on montre une extraction des structures filamenteuses dans la carte de la densité de colonne de H_2 . Figures issues de [65].

À partir de ces relevés, on peut construire une **fonction de masse des cœurs** (*core mass function*, CMF), en comptant le nombre de cœurs de masse comprise dans chaque intervalle. On observe (Fig. 11.11) que cette CMF présente une **forte ressemblance avec l'IMF stellaire**, mais décalée vers les plus grandes masses, ce qui peut être une **signature de l'efficacité de formation stellaire** (SFE). L'IMF stellaire semble donc en partie être **déterminée à l'étape des cœurs préstellaires**, et des théories sont élaborées pour expliquer la forme de la CMF [66, 67, 68].

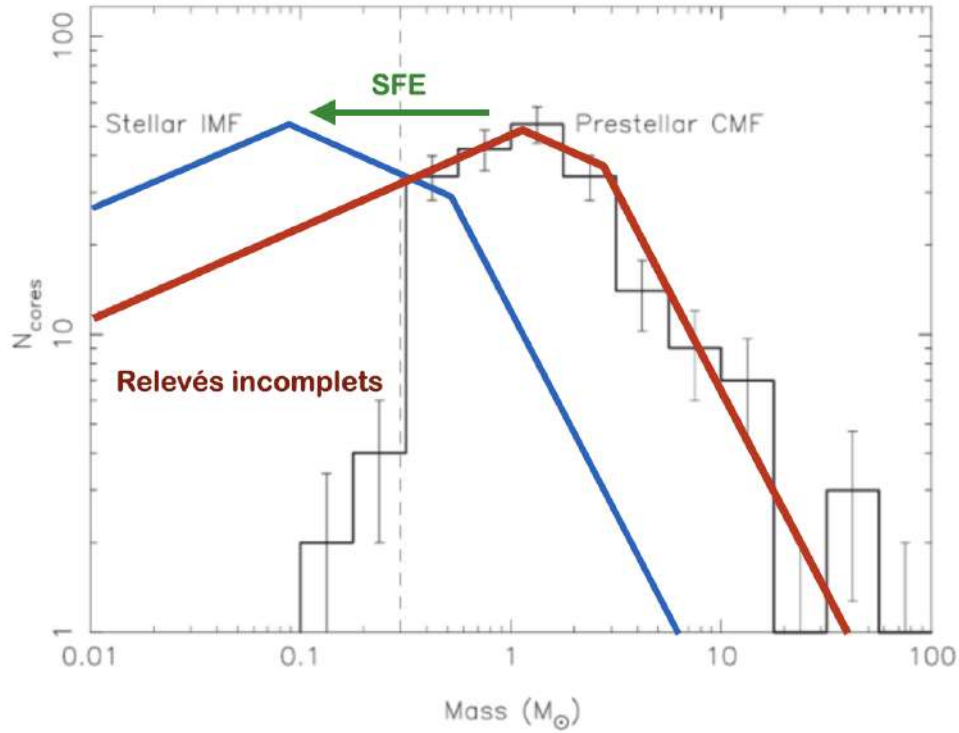


FIGURE 11.11 – CMF des cœurs préstellaires et IMF stellaire. Figure adaptée de [64].

11.2 Des cœurs aux protoétoiles

La formation stellaire implique une condensation formidable, pour passer de la densité du gaz interstellaire $\sim 10 \text{ cm}^{-3}$ à celle des étoiles $\sim 10^{22} \text{ cm}^{-3}$, suivant un processus où la **gravité** doit surmonter la **pression thermique**, le support **turbulent**, le support **rotationnel**, et le support **magnétique**. Comme l'essentiel du gaz moléculaire ne semble pas en état d'effondrement, il est important de comprendre d'abord l'équilibre des forces qui permettent aux nuages de persister sur de longues périodes.

11.2.1 Sphères isothermes

Pour discuter la structure d'un nuage, on prend le cas d'un modèle simple, à symétrie sphérique, sans champ magnétique ni rotation, où les forces d'auto-gravité sont contrebalancées par la seule pression thermique, et on fait l'hypothèse que le nuage est isotherme¹³. En combinant l'équation d'équilibre hydrostatique $\vec{\nabla}P = \rho\vec{g} = -\rho\vec{\nabla}\Phi_g$ entre les forces de gravité et les forces de pression, l'équation d'état isotherme $P = \rho c_s^2$ et l'équation de Poisson $\Delta\Phi_g = 4\pi G\rho$ reliant le potentiel gravitationnel Φ_g et la masse volumique ρ , on obtient l'**équation de Lane-Emden isotherme**

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\psi}{d\xi} \right) = e^{-\psi} \quad (11.4)$$

où l'on a introduit un rayon adimensionné ξ et une fonction ψ de la masse volumique

$$\xi = \sqrt{\frac{4\pi G\rho_c}{c_s^2}} r \quad \rho = \rho_c e^{-\psi} \quad (11.5)$$

13. Cette hypothèse n'est pas valide pour les nuages moléculaires à grande échelle, mais est raisonnable pour les cœurs denses et les **globules de Bok**, structures similaires aux cœurs denses mais isolées, hors de tout nuage.

Hormis la température T apparaissant dans la vitesse du son isotherme c_s , la solution dépend essentiellement de la densité centrale ρ_c . La solution ψ et ρ/ρ_c en fonction de ξ est représentée sur la Fig. 11.12. Ces solutions, paramétrées par la densité centrale ρ_c sont appelées **sphères de Bonnor-Ebert**.

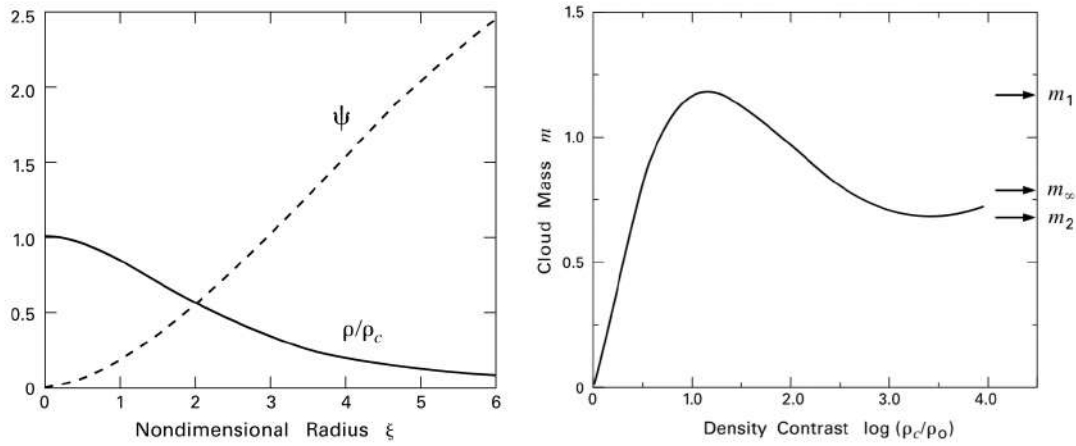


FIGURE 11.12 – **Equation de Lane-Emden isotherme**. Solution (à gauche) et évolution de la masse (adimensionnée) en fonction du contraste de densité pour un nuage borné par la pression extérieure (à droite). Figures issue de [26].

Exercice 107 : Établir l'équation (11.4). Quelles sont les conditions "initiales" pour la résoudre ?

À grande distance, les solutions prennent une forme en ξ^{-2} , et il existe en réalité une solution appelée **sphère isotherme singulière**, qui satisfait l'équation (11.4) mais pas les conditions initiales,

$$\rho(r) = \frac{c_s^2}{2\pi G r^2} \quad (11.6)$$

Exercice 108 : Montrer que (11.6) est effectivement solution de (11.4).

Un nuage baignant dans un milieu imposant une pression extérieure¹⁴ P_0 , on doit tronquer la solution à un rayon adimensionné ξ_0 tel que $P = P_0$. On a alors une **famille de solutions** paramétrées par le contraste en densité ρ_c/ρ_0 . On peut en particulier déterminer la masse M du nuage par intégration, qu'on écrit sous une forme adimensionnée m , avec

$$m = \frac{P_0^{1/2} G^{3/2} M}{c_s^4} = \sqrt{\frac{\rho_0}{4\pi\rho_c}} \left(\xi^2 \frac{d\psi}{d\xi} \right)_{\xi=\xi_0} \quad (11.7)$$

Exercice 109 : Établir l'équation (11.7).

Cette forme ne dépendant que du contraste en densité ρ_c/ρ_0 , on peut la représenter (Fig. 11.12, droite), et on voit qu'elle présente plusieurs oscillations. On peut montrer que les nuages de faibles contrastes ($\rho_c/\rho_0 \approx 1$) sont essentiellement stables vis-à-vis de légères perturbations de la pression extérieure qui les confine. Leur taille r_0 ne dépend pas de G

$$r_0 = \left(\frac{3M c_s^2}{4\pi P_0} \right)^{1/3} \quad (11.8)$$

Exercice 110 : Quelle loi bien connue de la physique des gaz retrouve-t-on avec l'équation (11.8) ?

14. Ou, de manière équivalente, une densité ρ_0 .

11.2.2 Instabilité gravitationnelle et approche de Jeans

En se déplaçant vers la droite sur la courbe $m(\rho_c/\rho_0)$ de la Fig. 11.12, on atteint une masse critique, la **masse de Bonnor-Ebert** M_{BE} pour $\rho_c/\rho_0 \approx 14.1$, où m atteint son premier maximum. Les nuages situés à droite de cette position sont **instables**. Pour comprendre l'origine de cette **instabilité gravitationnelle**, une approche simplifiée, due à Jeans, est utile. Dans ce modèle, on considère un milieu homogène, infini, statique, sans rotation, ni champ magnétique, et on écrit les équations de continuité, d'Euler (viscosité nulle, $\eta = 0$), de Poisson, et d'état

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -\frac{\vec{\nabla} P}{\rho} - \vec{\nabla} \Phi_g \quad \Delta \Phi_g = 4\pi G \rho \quad P = \rho c_s^2 \quad (11.9)$$

On considère de petites perturbations (ρ_1, P_1, \dots) aux solutions statiques (ρ_0, P_0, \dots) de ces équations,

$$\rho = \rho_0 + \rho_1 \quad P = P_0 + P_1 \quad \vec{v} = \vec{0} + \vec{v}_1 \quad \Phi_g = \Phi_{g,0} + \Phi_{g,1} \quad (11.10)$$

On linéarise alors les équations en développant au premier ordre, ce qui donne

$$\frac{\partial^2 \rho_1}{\partial t^2} = c_s^2 \Delta \rho_1 + (4\pi G \rho_0) \rho_1 \quad (11.11)$$

On suppose enfin, pour ces perturbations, une forme harmonique¹⁵, soit

$$\rho_1 = A_\rho \exp [i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)] \quad (11.12)$$

ce qui donne la relation de dispersion

$$\omega^2 = c_s^2 (k^2 - k_J^2) \quad k_J = \frac{\sqrt{4\pi G \rho_0}}{c_s} \quad (11.13)$$

et montre qu'une perturbation est instable si sa longueur d'onde $\lambda = 2\pi/k$ de la perturbation est supérieure à la **longueur de Jeans**

$$\lambda_J = \sqrt{\frac{\pi c_s^2}{G \rho_0}} \quad (11.14)$$

Elle correspond à une **masse de Jeans**, prise comme la masse de la sphère homogène de diamètre λ_J

$$M_J = \frac{\pi}{6} \rho_0 \lambda_J^3 \quad (11.15)$$

Numériquement, on a $\lambda_J \approx 0.2$ pc et $M_J \approx 1 M_\odot$ pour un gaz d'hydrogène de densité $n_H = 10^4 \text{ cm}^{-3}$ et de température $T = 10$ K. La masse de Bonnor-Ebert est l'équivalent à symétrie sphérique de la masse de Jeans, et elle marque donc le début de l'instabilité d'un nuage¹⁶ qui se développe sur une échelle de temps

$$\tau_J = \frac{1}{\sqrt{4\pi G \rho_0}} \approx 2.3 \cdot 10^5 \left(\frac{n_H}{10^4 \text{ cm}^{-3}} \right)^{-1/2} \quad (11.16)$$

Exercice 111 : Établir l'équation (11.11) puis l'équation (11.13).

Exercice 112 : Pourquoi l'état initial de l'approche de Jeans est-il en fait complètement irréaliste (on parle d'"arnaque de Jeans")? Cela ne pose pas de problème puisqu'une approche plus correcte à

15. On fait une **analyse de stabilité linéaire**, en déterminant la **relation de dispersion** entre ω et k , et les conditions pour lesquelles ω peut présenter une partie imaginaire, aboutissant à des perturbations exponentiellement croissantes, ce qui traduit l'instabilité.

16. D'autres **modes** perturbatifs deviennent successivement instables lorsqu'on continue à se déplacer vers la droite sur la courbe $m(\rho_c/\rho_0)$. Au premier maximum, M_{BE} , c'est le mode fondamental qui se déstabilise, et chaque extremum sur cette courbe marque la déstabilisation d'un mode supplémentaire. Pour la sphère isotherme singulière, obtenue dans la limite $\rho_c/\rho_0 \rightarrow \infty$, tous les modes sont instables.

partir de l'équation de Lane-Emden donne des résultats proches.

Les valeurs numériques de λ_J et M_J montrent que **les cœurs denses et les globules de Bok sont proches de l'instabilité gravitationnelle**. Le cas des **clumps**, dont la densité et la température sont proches de celles des cœurs, mais la masse sensiblement plus élevée (10 à $10^3 M_\odot$), le fait qu'ils ne semblent pas en effondrement indiquent que **d'autres supports sont requis contre la gravité que la seule pression thermique**.

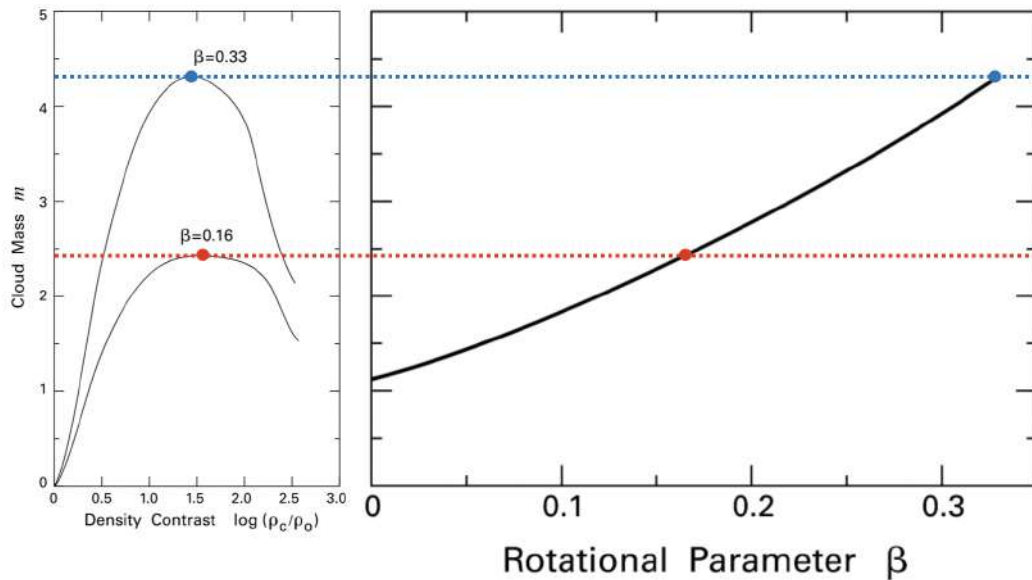


FIGURE 11.13 – **Influence de la rotation sur la stabilité**. Courbes $m(\rho_c/\rho_0)$ pour deux paramètres de rotation β (à gauche) et évolution de la masse critique marquant le premier maximum de $m(\rho_c/\rho_0)$, en fonction de β (à droite). Figures adaptées de [26].

11.2.3 Support rotationnel

On peut généraliser l'approche précédente en incluant l'effet de la rotation du nuage autour d'un axe fixe. Il faut alors passer en coordonnées cylindriques (ϱ, θ, z) et introduire le **moment cinétique spécifique**¹⁷ $j = \varrho u_\theta$, où u_θ est la composante orthoradiale de la vitesse. L'impact de la force centrifuge est une **stabilisation** des configurations, mais le détail dépend de la manière dont j varie avec la distance à l'axe¹⁸. En supposant une **rotation solide** à la vitesse angulaire Ω_0 , on peut faire une résolution numérique, qui va dépendre de **deux paramètres** indépendants :

- Le contraste de densité ρ_c/ρ_0 , de même que pour les modèles sans rotation
- Un paramètre caractérisant la rotation, $\beta = \Omega_0^2 r_0^3 / (3GM)$, rapport de l'énergie cinétique de rotation à l'énergie potentielle gravitationnelle dans le cas sans rotation.

La Fig. 11.13 montre que la masse maximale (critique) au-delà de laquelle le nuage est instable augmente lorsque β augmente, c'est-à-dire que le **support rotationnel** est plus important. En réalité, la mesure de l'énergie cinétique de rotation des cœurs denses, via les profils de raies, semble indiquer qu'elle est négligeable devant l'énergie potentielle gravitationnelle, soit $\beta \lesssim 10^{-3}$. Il faut donc chercher ailleurs la source du support contre la gravité, en l'occurrence le champ magnétique.

17. Le terme "spécifique" signifie "par unité de masse", c'est une dénomination usuelle.

18. Il doit croître en s'éloignant de l'axe, faute de quoi une **instabilité rotationnelle** se développe, mais il n'y a pas d'autre contrainte théorique ou observationnelle.

11.2.4 Support magnétique

Un peu de MHD

La présence d'un champ magnétique impose de traiter le problème en **magnétohydrodynamique** (MHD), qui décrit la dynamique relativement lente de fluides conducteurs. On considère donc un fluide de masse volumique ρ , dont les seuls constituants sont des particules de masse m et de charge q . On se place dans le référentiel \mathcal{R} de l'observateur, supposé galiléen. On note \vec{v} la vitesse d'un élément **mésoscopique** du fluide dans ce référentiel, et n sa densité particulière (nombre de particules par unité de volume). Cet élément de fluide est potentiellement soumis à un champ de gravité dont l'accélération locale est notée \vec{g} . On note par ailleurs P la pression cinétique locale et on regroupe toute autre force par unité de volume qui s'applique localement, une fois tenu compte de la gravité et des forces de pression, sous la notation \vec{f} . Les équations de la dynamique des fluides avec ces notations sont alors l'**équation de continuité**, qui exprime la conservation de la masse

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0, \quad (11.17)$$

et l'**équation d'Euler**, qui exprime la conservation de la quantité de mouvement¹⁹

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right] = \rho \vec{g} - \vec{\nabla} P + \vec{f}. \quad (11.18)$$

Le mouvement d'un fluide chargé implique l'existence de courants, dont la densité volumique dans le référentiel \mathcal{R} est notée $\vec{j} = nq\vec{v}$.

Pour chaque élément de fluide, on peut à chaque instant introduire un **référentiel propre** \mathcal{R}' , en mouvement rectiligne uniforme à la vitesse \vec{v} par rapport à \mathcal{R} , de sorte que cet élément de fluide est immobile dans \mathcal{R}' à cet instant. Dans ce référentiel propre de l'élément de fluide, les champs électrique et magnétique sont respectivement \vec{E}' et \vec{B}' , et ils se transforment en \vec{E} et \vec{B} dans le référentiel de l'observateur selon les **lois de transformation relativiste** des champs

$$\vec{E}' = \gamma \left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B} \right) - (\gamma - 1) \left(\vec{E} \cdot \vec{u} \right) \vec{u} \quad \vec{B}' = \gamma \left(\vec{B} - \frac{\vec{v} \wedge \vec{E}}{c^2} \right) - (\gamma - 1) \left(\vec{B} \cdot \vec{u} \right) \vec{u} \quad (11.19)$$

où $\vec{u} = \vec{v}/v$ est le vecteur unitaire de la vitesse \vec{v} de \mathcal{R}' par rapport à \mathcal{R} . On fait l'hypothèse que les mouvements du fluide sont non-relativistes, de sorte que $\beta = v/c \ll 1$ et $\gamma \approx 1$, et donc

$$\vec{E}' = \left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B} \right) \quad \vec{B}' = \left(\vec{B} - \frac{\vec{v} \wedge \vec{E}}{c^2} \right) \quad (11.20)$$

La **loi d'Ohm locale** dans le référentiel propre du fluide s'écrit $\vec{j}' = \sigma \vec{E}'$, où σ est la conductivité électrique. En se plaçant dans le cadre de la **MHD idéale**, pour laquelle la conductivité électrique est infinie, on en déduit que le champ \vec{E}' doit être nul (sinon le courant serait infini) et donc

$$\vec{E} = -\vec{v} \wedge \vec{B} \quad (11.21)$$

On a alors directement, à partir de l'équation de Maxwell-Faraday, l'**équation d'induction**

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{\nabla} \wedge \left(\vec{v} \wedge \vec{B} \right). \quad (11.22)$$

L'expression de la densité de courant \vec{j} peut être obtenue à partir de l'équation de Maxwell-Ampère

$$\mu_0 \vec{j} = \vec{\nabla} \wedge \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (11.23)$$

19. On néglige la viscosité.

En introduisant une échelle caractéristique ℓ_0 et un temps caractéristique t_0 de l'écoulement, on a, en ordre de grandeur

$$\frac{|\vec{\nabla} \wedge \vec{B}|}{\left| \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \right|} \sim \frac{\frac{B}{\ell_0}}{\frac{E}{c^2 t_0}} \quad (11.24)$$

Or $E \sim vB$ d'après la relation écrite plus haut, et de plus $v \sim \ell_0/t_0$, ce qui donne alors

$$\frac{|\vec{\nabla} \wedge \vec{B}|}{\left| \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \right|} \sim \left(\frac{c}{v} \right)^2 \gg 1 \quad (11.25)$$

On en déduit que le terme de courant de déplacement peut être négligé devant $\vec{\nabla} \wedge \vec{B}$, ainsi qu'une approximation de la densité volumique de courant

$$\vec{j} = \frac{\vec{\nabla} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \quad (11.26)$$

L'approximation du flux gelé

Dans le cadre des hypothèses faites ici, on peut appliquer le **théorème du "flux gelé"**, qui s'énonce comme suit. Étant donnée une surface \mathcal{S} attachée au fluide et traversée par un flux magnétique Φ , soit

$$\Phi = \iint_{\mathcal{S}} \vec{B} \cdot d\vec{S}, \quad (11.27)$$

on montre que ce flux est constant au cours du temps lorsqu'on tient compte simultanément des variations temporelles du champ \vec{B} en un point donné de l'espace et des variations de la surface d'intégration \mathcal{S} du fait des mouvements du fluide. Mathématiquement, on écrit

$$\frac{d\Phi}{dt} = \iint_{\mathcal{S}} \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S} + \oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot (\vec{v} \wedge d\vec{\ell}) = 0 \quad (11.28)$$

où \mathcal{C} est le contour fermé (orienté selon $d\vec{\ell}$) sur lequel s'appuie la surface \mathcal{S} . Cette approximation est dite du **flux gelé**, car elle correspond au fait que les lignes de champ magnétique sont entraînées avec le fluide, et qu'inversement, le gaz est astreint à se déplacer avec les lignes de champ. Cette contrainte est appliquée aux ions et aux électrons, qui entraînent le reste du gaz par friction. Il est certain que cette approximation ne peut être valide à toutes les étapes de la formation stellaire et qu'un découplage de la matière et du champ doit avoir lieu (la **diffusion ambipolaire** et la **reconnexion** des lignes de champ) pour que la contraction puisse procéder jusqu'aux densités stellaires²⁰.

Pression et tension magnétique

Dans le système considéré, la force par unité de volume \vec{f} se résume à la composante magnétique de la force de Lorentz, soit

$$\vec{f} = n \times (q\vec{v} \wedge \vec{B}) = \vec{j} \wedge \vec{B} = \frac{(\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) \wedge \vec{B}}{\mu_0} \quad (11.29)$$

20. On trouve sinon des valeurs de champ magnétique pour les T Tauri qui sont des ordres de grandeur trop élevées.

dont on peut montrer²¹ qu'elle peut s'écrire

$$\vec{f} = -\vec{\nabla} \left(\frac{B^2}{2\mu_0} \right) + \frac{1}{\mu_0} (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} \quad (11.31)$$

En écrivant l'équation d'Euler complète, on a alors

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right] = \rho \vec{g} - \vec{\nabla} P - \vec{\nabla} \left(\frac{B^2}{2\mu_0} \right) + \frac{1}{\mu_0} (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} \quad (11.32)$$

On peut donc combiner les deux termes de gradient apparaissant au membre de droite, selon

$$-\vec{\nabla} P - \vec{\nabla} \left(\frac{B^2}{2\mu_0} \right) \quad (11.33)$$

Il apparaît donc que la quantité

$$P_m = \frac{B^2}{2\mu_0}. \quad (11.34)$$

se comporte comme le terme de pression, ce qui justifie son nom de **pression magnétique**. Pour comprendre l'effet physique de ces deux termes de \vec{f} , on peut s'appuyer sur le théorème du flux gelé, en considérant les situations représentées sur la Fig. 11.14.

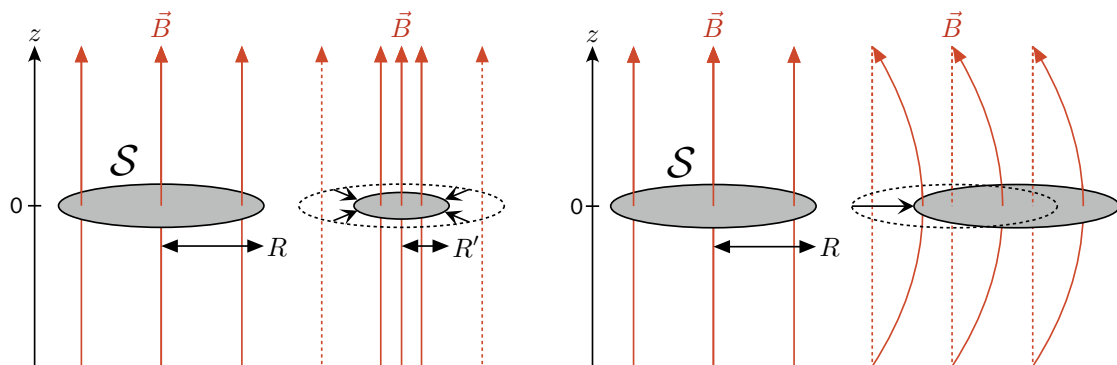


FIGURE 11.14 – **Interprétation de la pression et de la tension magnétiques.** Sur le panneau de gauche, on considère le cas de la contraction homothétique d'une surface circulaire de rayon initial R , les lignes de champ magnétiques restant parallèles à l'axe Oz . Sur le panneau de droite, on considère le cas où la surface circulaire n'est pas déformée mais se déplace globalement, les lignes de champ restant fixées à grande distance sur l'axe Oz .

Sur le panneau de gauche, une surface S , circulaire de rayon R , traversée par le champ \vec{B} supposé uniforme, est contractée de manière homothétique en une surface également circulaire, de rayon $R' < R$, le champ magnétique traversant la surface restant uniforme. Le flux magnétique au travers de S s'écrit $\Phi = \pi R^2 B$ et il est constant. On a donc $B \propto R^{-2}$. La pression magnétique, en B^2 , va donc augmenter, et le système résister à la contraction, ce qui justifie l'idée selon laquelle **le champ magnétique fournit un support contre la gravité**.

Pour interpréter le second terme de \vec{f} , on considère maintenant la situation représentée sur le panneau de droite de la Fig. 11.14. La surface circulaire de rayon R n'est cette fois pas déformée

21. Il faut utiliser la formule

$$\vec{\nabla} (\vec{u} \cdot \vec{v}) = (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} + \vec{u} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{v}) + \vec{v} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{u}) \quad (11.30)$$

mais déplacée légèrement vers la droite, de sorte que le champ magnétique, d'intensité uniforme et constante, est courbé, les lignes de champ restant attachées à grande distance. Au niveau $z = 0$, le champ magnétique s'écrit $\vec{B} = B\vec{u} = B\vec{e}_z$ avec \vec{e}_z le vecteur unitaire de l'axe z , et donc

$$\frac{1}{\mu_0} (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} = \frac{B}{\mu_0} \frac{d(B\vec{u})}{dz} \quad (11.35)$$

Or on note que l'intensité du champ magnétique reste uniforme, donc finalement

$$\frac{1}{\mu_0} (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} = \frac{B^2}{\mu_0} \frac{d\vec{u}}{dz} \quad (11.36)$$

Sur le schéma, on note que $d\vec{u}/dz$ est orienté vers la gauche, et de manière générale il serait orienté vers l'intérieur de la courbure des lignes de champ. Comme $B^2/\mu_0 > 0$, la force est donc dirigée dans ce sens, et elle a pour effet de tenter de diminuer cette courbure, et de restaurer des lignes de champ "droites". Cela justifie l'appellation de **tension magnétique** pour ce terme.

Equilibre d'un nuage en présence de champ magnétique

On trouvera dans [26] (§9.4) la discussion des configurations d'équilibre en présence d'un champ magnétique mais sans rotation, qui dépendent de **trois paramètres** : le contraste en densité, le rapport α de l'énergie magnétique à l'énergie thermique, et le rayon adimensionné ξ_0 . Les lignes de champ, en particulier, présentent une géométrie "**en sablier**" ("*hourglass*"), avec une distribution en densité aplatie perpendiculairement aux lignes de champ. C'est le résultat du fait que les ions peuvent librement s'écouler le long des lignes de champ, et donc y entraîner les neutres, ce qui provoque une contraction d'abord préférentiellement parallèle aux lignes de champ. La contraction perpendiculairement au champ entraîne la formation de la structure en sablier, comme on peut le voir sur la Fig. 11.15.

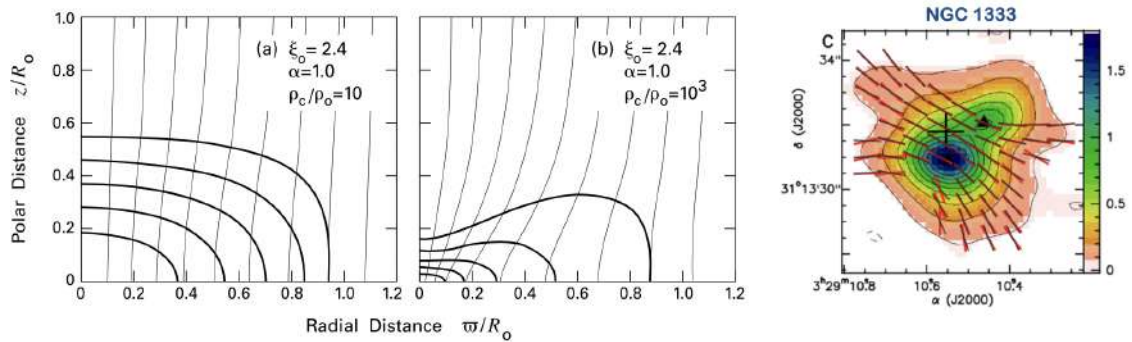


FIGURE 11.15 – **Influence du champ magnétique.** À gauche : exemples de configurations d'équilibre en présence d'un champ magnétique (courbes isodensité en traits gras, lignes de champ magnétique en traits fins). Figure issue de [26]. À droite : observation de l'émission et du champ magnétique dans la protoétoile NGC1333-IRAS4A [69].

La stabilité du nuage peut ici aussi être discutée, et il est intéressant de le faire à partir du **théorème du viriel**, qu'on écrira ici

$$2E_c + E_g + E_m = 0 \quad (11.37)$$

en faisant intervenir l'énergie cinétique E_c , l'énergie potentielle gravitationnelle E_g et l'énergie magnétique $E_m = VB^2/(2\mu_0)$, où V est le volume du nuage. En négligeant l'énergie cinétique, on montre qu'il y a une valeur critique du **rapport masse-flux**²² au-delà de laquelle le nuage est instable

$$\left(\frac{M}{\Phi}\right)_{\text{crit}} = \sqrt{\frac{20}{9\pi\mu_0 G}} \quad (11.38)$$

22. On parle ici du **flux magnétique** $\Phi = \pi R^2 B$ au travers de la section du nuage.

Les nuages pour lesquels M/Φ dépasse cette valeur sont appelés **supercritiques**, les autres sont dits **sous-critiques**. L'analyse de stabilité peut aussi se faire à la manière de l'approche de Jeans, quoique plus complexe, et fait apparaître, en plus des ondes sonores, les ondes MHD que sont les **ondes magnéto-soniques** et les **ondes d'Alfvén**. On se reportera à [26] (§9.5) pour une discussion exhaustive.

11.2.5 Temps de chute libre

Pour un nuage instable, la question du temps caractéristique de contraction se pose naturellement. On peut l'aborder dans un cas extrêmement simplifié qui est celui de la **chute libre** pour un nuage homogène de masse M , en symétrie sphérique (on note R le rayon initial) et en négligeant le gradient de pression pouvant contrebalancer la gravité. On part donc de l'équation du mouvement

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{Gm(r)}{r^2} \quad (11.39)$$

pour une particule située initialement au rayon r , attirée par la masse $m(r)$ interne à ce rayon. En passant en variable vitesse radiale $u = \dot{r}$, on montre que le **temps de chute libre** s'écrit

$$t_{\text{ff}} = \sqrt{\frac{3}{8\pi G\rho_0}} \int_0^1 \sqrt{\frac{\xi}{1-\xi}} d\xi = \sqrt{\frac{3\pi}{32G\rho_0}} \quad (11.40)$$

où ρ_0 est la masse volumique initiale du nuage. Numériquement, on a

$$t_{\text{ff}} = 4.4 \cdot 10^4 \left(\frac{n_{\text{H}}}{10^6 \text{ cm}^{-3}} \right)^{-1/2} \text{ an} \quad (11.41)$$

Exercice 113 : Établir l'expression (11.40) du temps de chute libre.

11.2.6 La fragmentation hiérarchique

Au cours de l'effondrement, il peut se produire un phénomène de **fragmentation** permettant peut-être d'interpréter le fait que la formation stellaire se fasse en groupes. Considérons un nuage gravitationnellement instable, de masse $M_0 > M_{\text{J}}$, en évolution isotherme. Le modèle de la Fig. 11.16 (à gauche) est une version extrêmement schématisée de cette situation. Le nuage en contraction passe d'une taille caractéristique L à une taille aL , avec $a < 1$. La masse de Jeans (11.15), qui varie comme $\rho^{-1/2}T^{3/2}$, donc comme $(aT)^{3/2}$ ou encore $a^{3/2}$ dans une évolution isotherme, décroît avec le temps t puisque $a(t)$ est une fonction décroissante. Une sous-région du nuage, de masse bM_0 avec $b < 1$, devient instable dès lors que $M_{\text{J}}(a) < bM_0$. Chaque sous-nuage s'effondre alors sur lui-même indépendamment du reste du nuage. **La fragmentation s'arrête du fait de l'augmentation de l'opacité τ** , qui résulte de l'augmentation de la densité du gaz et des poussières lors de l'effondrement. Le piégeage radiatif qui s'ensuit amène une **élévation de température qui fait remonter la masse de Jeans** et stoppe le processus. On peut produire de trois à huit fragments à chaque niveau, et la **masse minimale d'un fragment** peut être calculée [64] (§5.3)

$$M_{\text{min}} \approx 10c \left(\frac{h}{2G} \right)^{3/2} \left(\frac{k_{\text{B}}T}{\mu^9} \right)^{1/4} \quad (11.42)$$

où μ est la masse moyenne par particule. Numériquement, pour $T = 10 \text{ K}$ et $\mu = 4 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$, on trouve $M_{\text{min}} \approx 0.015 M_{\odot}$, bien inférieure à la limite de combustion de l'hydrogène. Ce calcul prédit donc en quelque sorte l'existence des **naines brunes**.

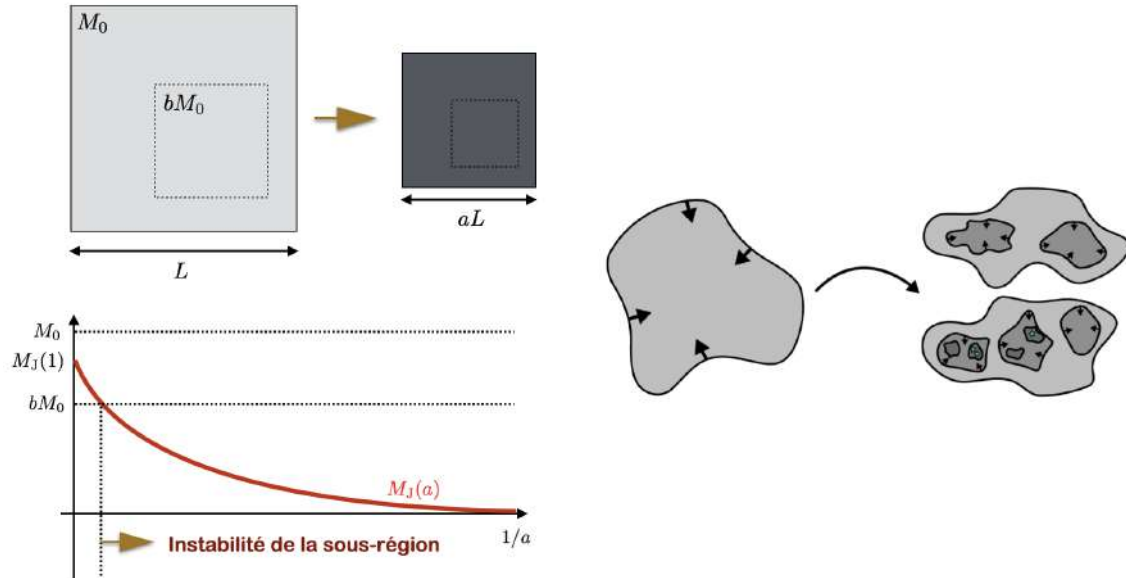


FIGURE 11.16 – **Fragmentation hiérarchique.** Modèle schématique (à gauche) et représentation plus "réaliste" de son effet sur un nuage en effondrement (à droite).

11.2.7 Afranchissement des supports magnétique et rotationnel

On a vu que le champ magnétique et la rotation pouvaient fournir un support contre l'effondrement gravitationnel²³. Il convient donc de voir comment on peut s'en affranchir pour permettre la contraction.

La diffusion ambipolaire

La présence d'un champ magnétique dans un milieu partiellement ionisé²⁴ avec une conductivité électrique très grande impose le gel du champ magnétique dans la matière, par le biais de l'attachement des ions²⁵ au champ et de la friction entre les ions et les neutres. Ces derniers peuvent se déplacer librement par rapport à \vec{B} , et il y a donc diffusion entre les ions et les neutres, qu'on appelle **diffusion ambipolaire**. Le temps caractéristique de cette diffusion s'écrit

$$\tau_{AD} \sim \frac{3x_e C_{in}}{4\pi G m_H} \quad (11.43)$$

où C_{in} est la section efficace de collision ion-neutre. Numériquement, si x_e est déterminée par l'équilibre entre l'ionisation de H_2 par les rayons cosmiques ($\propto \zeta_{CR} n_{H_2}$) et la recombinaison ($\propto x_e^2 n_{H_2}^2$), on trouve

$$\tau_{AD} \approx 2.5 \cdot 10^6 \left(\frac{n_{H_2}}{10^4 \text{ cm}^{-3}} \right)^{-1/2} \text{ an} \quad (11.44)$$

Assez rapidement, l'essentiel de la masse (portée par les neutres) a donc pu diffuser vers le centre, laissant derrière elle les lignes de champ. La situation peut alors aussi être vue comme une augmentation du rapport M/Φ , et l'effondrement peut se poursuivre.

23. Pour le cas de la rotation, ce support est négligeable dans les cœurs mais devient important à petite échelle lorsque l'objet protostellaire central est formé.

24. L'ionisation est très faible : on rappelle que la fraction d'ionisation est $x_e \lesssim 10^{-7}$ dans ces régions.

25. Les électrons aussi, mais ils comptent pour une fraction négligeable de la masse et sont moins bien couplés aux neutres.

La barrière centrifuge et le freinage magnétique

Dans les phases tardives de l'effondrement, l'énergie cinétique de rotation va prendre un rôle important. Pour le comprendre, prenons le cas d'un nuage sphérique homogène, de masse M , non magnétisé, de rayon initial R_0 , en rotation solide à la vitesse angulaire initiale Ω_0 autour d'un axe Oz . La conservation du moment cinétique implique que la vitesse angulaire de rotation et l'énergie cinétique correspondante augmentent lors de la contraction,

$$\Omega = \Omega_0 \left(\frac{R_0}{R} \right)^2 \quad E_{\text{rot}} = \frac{1}{5} M R^2 \Omega^2 = \frac{1}{5} M R_0^2 \Omega_0^2 \left(\frac{R_0}{R} \right)^2 \quad (11.45)$$

L'énergie potentielle gravitationnelle, elle, augmente aussi en valeur absolue, mais moins vite, puisqu'elle est en $1/R$. Le rapport des deux énergies est alors

$$\frac{E_{\text{rot}}}{|E_g|} = \left(\frac{E_{\text{rot}}}{|E_g|} \right)_0 \left(\frac{R_0}{R} \right) \quad (11.46)$$

et l'effondrement s'arrête lorsque ce rapport atteint l'unité. On se heurte à une **barrière centrifuge** ennuyeuse : typiquement, dans un cœur dense de 0.1 pc, on a $E_{\text{rot}}/E_g \sim 10^{-3}$, de sorte que le rapport de compression R_0/R ne saurait dépasser ~ 1000 , la densité du milieu n'augmentant que d'un facteur 10^9 au lieu des 10^{21} recherchés. Il faut donc **évacuer du moment cinétique**, i.e., ralentir la rotation.

La solution se trouve dans le champ magnétique. Les lignes de champ traversant le nuage sont "arrimées" au champ à grande échelle. La rotation du cœur central tend à les enrouler, comme le montre le schéma de la Fig. 11.17 (gauche). La **tension magnétique** cherchant à réaligner les lignes de champ, des ondes d'Alfvén se propagent du cœur vers l'enveloppe, à la vitesse d'Alfvén v_A . Dans l'enveloppe, les ions sont entraînés par le mouvement du champ magnétique, et les neutres suivent par friction, ce qui aboutit à une mise en rotation de l'enveloppe, permettant l'évacuation du moment cinétique du cœur. Un modèle très simple permet d'estimer le temps caractéristique de ce **freinage magnétique**, qui dépend de la masse et du rayon du nuage, de la densité ρ_e de l'enveloppe, et de l'intensité du champ magnétique,

$$\tau_{\text{MB}} \sim \frac{M}{\pi R^2 \rho_e v_A} \quad (11.47)$$

La barrière centrifuge peut ainsi être surmontée sur cette échelle de temps, mais le processus peut être trop efficace, car il semble empêcher la formation de **disques protoplanétaires**. Comme on observe ces disques, on parle de "**magnetic braking catastrophe**", qui est potentiellement résolue par le désalignement entre axe de rotation et champ magnétique, comme le suggèrent les simulations (Fig. 11.17, droite [70]).

11.2.8 Premier cœur hydrostatique de Larson

La remarque qui a été faite plus haut sur l'effet de l'augmentation de l'opacité a son importance sur l'évolution d'un fragment isolé. Thermodynamiquement, on peut appliquer le **premier principe**

$$dU = \delta W + \delta Q = -PdV + \delta Q \quad (11.48)$$

le travail reçu par le nuage étant celui des forces de pression, qui est positif puisque $dV < 0$. Le gaz étant supposé parfait, il obéit à la **première loi de Joule**, U n'est fonction que de T . Une évolution isotherme implique donc $dU = 0$ et donc $\delta Q < 0$. **Le système doit évacuer de la chaleur**, ce qu'il fait sous forme de **rayonnement**²⁶. Cela est possible tant que la densité est suffisamment faible, mais **l'opacité augmente nécessairement lorsque le rayon du nuage diminue**, puisque

$$\tau \propto \int n_{\text{H}} dr \propto R^{-2} \quad (11.49)$$

26. Conduction et convection sont très inefficaces dans ces milieux raréfiés.

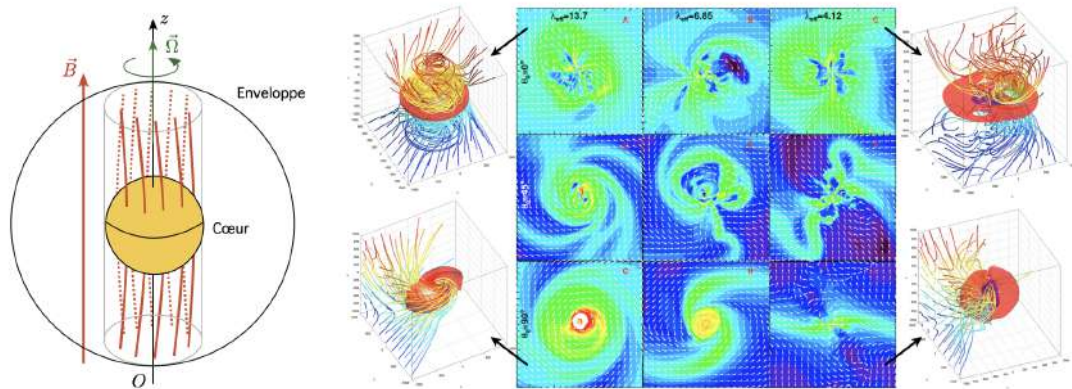


FIGURE 11.17 – **Freinage magnétique.** Schéma montrant le principe du freinage magnétique par enroulement des lignes de champ, propagation d'ondes d'Alfvén vers l'enveloppe et mise en co-rotation de celle-ci (à gauche) et simulations numériques de cet effet [70].

Lorsque le nuage devient optiquement épais, l'isothermalité est rompue et l'évolution doit devenir **adiabatique**. On a alors augmentation de l'énergie interne $dU = \delta W > 0$ jusqu'à atteindre l'équilibre avec l'énergie potentielle de gravitation et l'énergie cinétique, selon la relation du viriel $2(E_c + U) + E_g = 0$. On observe alors une pause de l'effondrement dans les parties centrales opaques, c'est la formation du **premier cœur hydrostatique de Larson** (*first hydrostatic core*, FHSC). Le gaz des couches externes continue, lui, à s'effondrer, ce qui provoque un **choc d'accrétion sur le cœur**. La Fig. 11.18 présente des simulations de ces objets, au **temps de vie très court**, et des observations d'objets candidats.

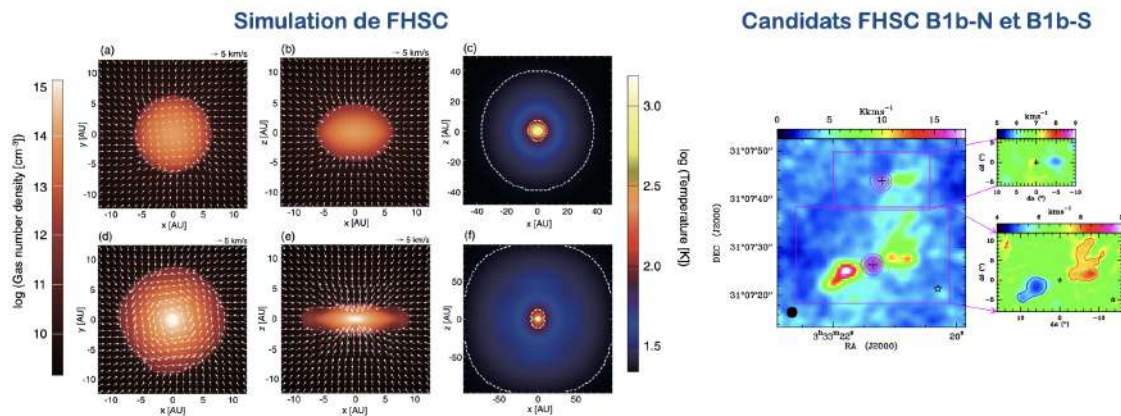


FIGURE 11.18 – **Premiers cœurs hydrostatiques.** Simulations (à gauche) [71] et observations d'objets candidats (à droite) [72].

11.3 L'évolution vers la séquence principale

11.3.1 La phase principale d'accrétion

Lorsqu'au centre du cœur en effondrement, l'opacité devient trop importante pour évacuer l'énergie²⁷, un objet central stable est né, le premier cœur de Larson. À ce stade, sa masse est de l'ordre de $5 \cdot 10^{-2} M_{\odot}$ et sa taille $\sim 5 \text{ UA}$. L'application du théorème du viriel montre que sa température est alors $\sim 850 \text{ K}$, et sous l'effet de l'accumulation de masse, cette température augmente en M/R . Lorsqu'elle dépasse $\sim 2000 \text{ K}$, **l'hydrogène moléculaire commence à se dissocier** collisionnellement. Ce processus étant fortement **endothermique**, il prélève de l'énergie interne au système et lui retire donc du support contre la gravité. C'est la fin du premier cœur hydrostatique de Larson et le **second collapse**, au bout duquel un second cœur hydrostatique se forme, qui est une véritable **proto-étoile** aux propriétés quasi-stellaires ($M_{*} \sim 0.1 M_{\odot}$, $R_{*} \sim 5 R_{\odot}$, $T_{*} \sim 10^5 \text{ K}$). Le matériau de l'enveloppe continue à s'effondrer et vient **accréter** sur la proto-étoile, c'est la **phase principale d'accrétion** pendant laquelle la proto-étoile va constituer l'essentiel de sa masse.

Pour traiter cette phase, on considère le **modèle d'accrétion de Bondi**, dont les hypothèses sont :

- La proto-étoile est assimilée à une masse ponctuelle au repos dans un milieu ambiant uniforme ;
- L'accrétion est à symétrie sphérique, à un taux \dot{M} constant ;
- L'équation d'état du gaz est isotherme, avec une vitesse du son constante ;
- L'auto-gravité du gaz est négligeable devant l'attraction exercée par la proto-étoile ;
- L'augmentation de la masse de la proto-étoile est négligeable devant sa masse initiale ;
- Le système est en régime stationnaire.

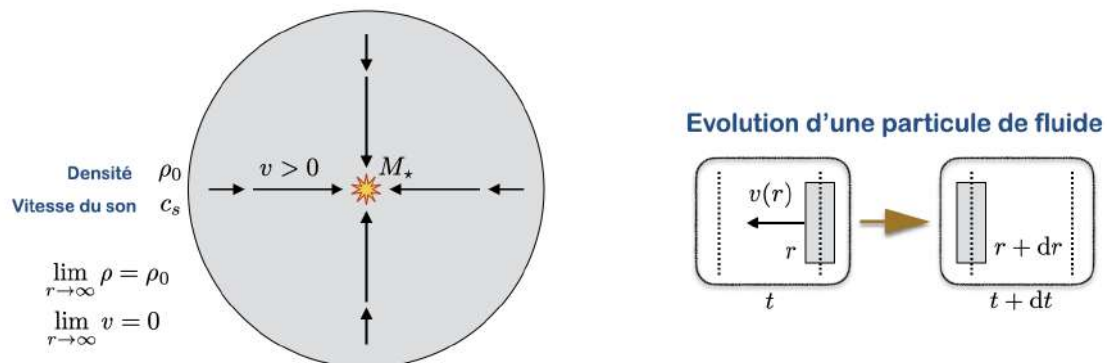


FIGURE 11.19 – **Accrétion de Bondi**. Schéma du modèle de l'accrétion de Bondi (à gauche) et évolution d'une particule fluide entre t et $t + dt$ pour résoudre le problème (à droite).

Le problème est schématisé sur la Fig. 11.19. En considérant l'accélération radiale $a(r)$ d'une particule fluide entre t et $t + dt$, l'équation du mouvement sous l'effet de la gravité de la proto-étoile et des forces de pression, l'équation d'état isotherme reliant pression et densité et la conservation de la masse au travers d'une coquille sphérique, soit

$$\dot{M} = 4\pi r^2 v(r) \rho(r) \quad (11.51)$$

27. Remarquons ici que dans la phase précédente, la luminosité L est fournie par la libération d'énergie potentielle gravitationnelle E_g , selon

$$L = 4\pi R^2 \sigma T^4 \propto -G \frac{M^2 \dot{R}}{R^2} \quad (11.50)$$

La température du cœur est faible, mais sa grande taille compense pour fournir une luminosité importante.

on obtient une équation différentielle non-linéaire donnant la vitesse $v(r)$ du gaz en fonction de r

$$\frac{dv}{dr} = -\frac{\frac{GM_\star}{r^2} - \frac{2c_s^2}{r}}{v(r) - \frac{c_s^2}{v(r)}} \quad (11.52)$$

Exercice 114 : Établir l'équation différentielle (11.52).

On peut résoudre cette équation en séparant les variables v et r , et en appliquant la condition aux limites qu'à grande distance $r \rightarrow \infty$ la vitesse s'annule et la densité tend vers celle de l'enveloppe, ρ_0 . Pour une proto-étoile donnée dans un environnement donné, on obtient alors une relation analytique (quoiqu'implicite) entre la vitesse et la position

$$\dot{M} = 4\pi\rho_0 v r^2 \exp\left(\frac{GM_\star}{c_s^2 r} - \frac{v^2}{2c_s^2}\right) \quad (11.53)$$

Exercice 115 : Résoudre l'équation différentielle (11.52) pour obtenir la solution (11.53).

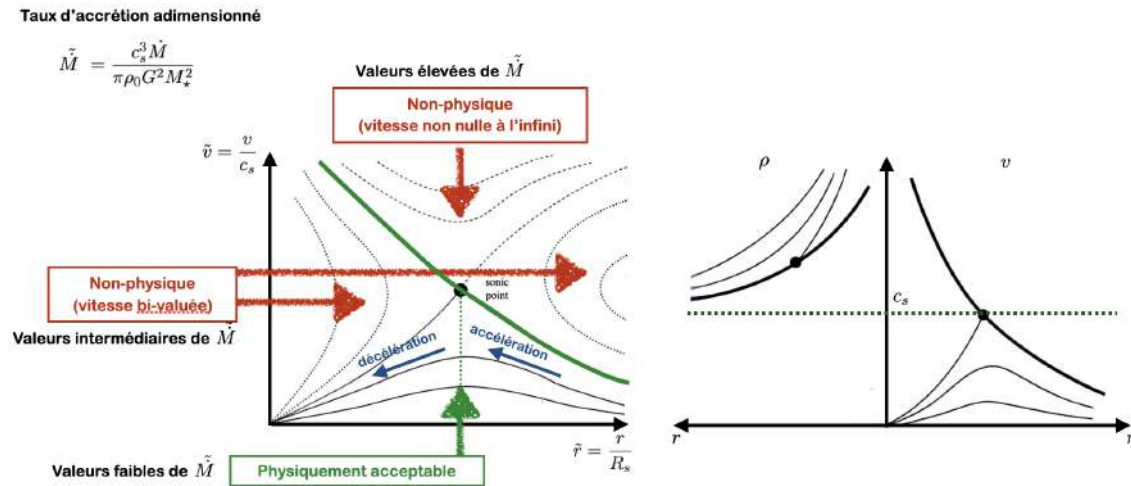


FIGURE 11.20 – **Solutions de l'accrétion de Bondi.** Solutions $\tilde{v}(\tilde{r})$ pour différents taux d'accrétions adimensionnés \tilde{M} (à gauche) et profils de vitesse et de densité pour les solutions physiquement acceptables (à droite). Figure adaptée de [64].

On note que, dans l'équation différentielle (11.52), il existe potentiellement une singularité qui correspond à l'existence d'un **point sonique** R_s tel que $v(R_s) = c_s$. Cela ne pose pas de problème si le numérateur s'annule également en ce point, ce qui permet de déterminer R_s ,

$$R_s = \frac{GM_\star}{2c_s^2} \quad (11.54)$$

L'équation implicite (11.53) peut être résolue numériquement en introduisant un rayon adimensionné, une vitesse adimensionnée et un taux d'accrétion adimensionné,

$$\tilde{M} = \tilde{v} \tilde{r}^2 \exp\left(\frac{2}{\tilde{r}} - \frac{\tilde{v}^2}{2}\right) \quad (11.55)$$

ce qui donne les courbes de la Fig. 11.20. Les seules solutions physiquement acceptables sont celles qui sont **subsoniques** ($v < c_s$) et la seule solution qui passe par le point sonique $(r, v) = (R_s, c_s)$, indiquée en vert. Le taux d'accrétion correspondant à cette dernière solution est une valeur critique

$$\dot{M}_c = \frac{e^{3/2} \pi \rho_0 G^2 M_*^2}{c_s^3} \quad (11.56)$$

pour laquelle on peut avoir une **accrétion supersonique** sur la proto-étoile, atteignant asymptotiquement la vitesse de chute libre (Fig. 11.20, droite). L'arrivée de ce matériel en chute libre sur la proto-étoile provoque un **choc d'accrétion** et la luminosité de l'objet central est essentiellement due à l'accrétion

$$L = G \frac{M_* \dot{M}}{R_*} \quad (11.57)$$

Exercice 116 : Démontrer l'expression (11.56) du taux d'accrétion critique.

11.3.2 Évolution dans le diagramme de Hertzsprung-Russell

Après la fin de la phase d'accrétion, les protoétoiles sont alors visibles optiquement, et on peut déterminer leur luminosité et leur température effective, elles apparaissent alors dans le diagramme de Hertzsprung-Russell. Toutes se trouvent en dessous d'une courbe appelée **ligne des naissances**, comme on le voit sur la Fig. 11.5. Elles vont ensuite évoluer, rapidement d'abord puis plus lentement, vers la **séquence principale**, le long de trajectoires déterminées par leur masse M_* , comme le montrent les différents panneaux de la Fig. 11.21.

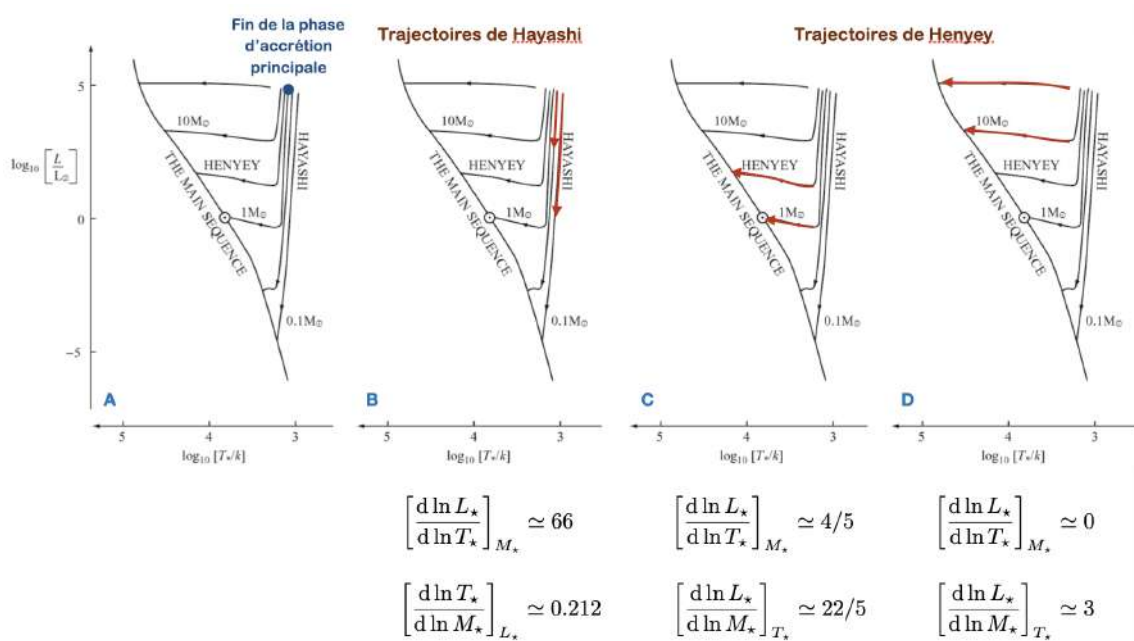


FIGURE 11.21 – **Évolution des proto-étoiles dans le diagramme HR.** Apparition au niveau de la ligne des naissances (A), en passant par les trajectoires de Hayashi (B) et de Henyey pour les étoiles peu massives (C) et très massives (D). Figure adaptée de [64].

Trajectoires de Hayashi

Le début de l'évolution de l'objet central, opaque au rayonnement en raison de la poussière et en équilibre hydrostatique, est une **contraction quasi-statique**, appelée **contraction de Kelvin-Helmholtz**, qui libère de l'énergie gravitationnelle, dont la moitié sert à chauffer le gaz et l'autre moitié est rayonnée. Pour déterminer l'évolution dans le diagramme HR, il faut considérer la structure de l'atmosphère de la proto-étoile. Au-dessus de 2000 K, la poussière est détruite, et l'opacité κ est fournie par les ions H^- , avec $\kappa = \kappa_1 \rho^{3/2} T^{9/2}$. Dans les couches les plus externes, **l'énergie est transportée radiativement**, de sorte que la constance du flux radiatif

$$F = -\frac{4\sigma T^3}{\kappa} \frac{dT}{dr} = \sigma T_\star^4 \quad (11.58)$$

permet de relier la **structure en température** $T(\tau)$ de ces couches à la température de surface T_\star ,

$$T(\tau) = T_\star (\tau + 1)^{1/4} \quad (11.59)$$

L'équilibre hydrostatique et l'équation d'état, qui s'écrivent²⁸

$$\frac{dP}{d\tau} = \frac{GM_\star \rho(\tau)}{\kappa(\tau) R_\star^2} \quad P(\tau) = \frac{\rho(\tau) k_B T(\tau)}{\mu} \quad (11.60)$$

permettent alors de déterminer la **structure en pression**

$$P(\tau) = \left[\frac{3GM_\star \ln(\tau + 1)}{2\kappa_1 R_\star^2 T_\star^4} \right]^{2/3} \left(\frac{k_B}{\mu} \right)^{1/3} \quad (11.61)$$

Le transport reste radiatif sur une faible épaisseur optique $\tau \approx 4$, puis devient **convectif**, le gradient $d \ln P / d \ln T$ devenant trop faible. Il est alors imposé par le rapport $\gamma / (\gamma - 1) \approx 5/2$ et la relation pression-température devient

$$\frac{P}{T^{5/2}} = \frac{P_t}{T_t^{5/2}} \quad (11.62)$$

où P_t et T_t sont les valeurs de la pression et de la température calculées au point de transition radiatif-convectif ($\tau = 4$). Dans cet intérieur convectif, l'équation d'état et l'équilibre hydrostatique fournissent deux équations reliant respectivement la température et la pression à la masse et au rayon

$$T \approx G \frac{M_\star \mu}{k_B R} \quad P \approx G \frac{M_\star^2}{R_\star^4} \quad (11.63)$$

À partir de ces expressions de P et T et de leurs valeurs à la transition radiatif-convectif, on en tire la relation entre luminosité $L_\star = 4\pi R_\star^2 \sigma T_\star^4$, température de surface T_\star et masse M_\star de la proto-étoile

$$L_\star \propto M_\star^{-14} T_\star^{66} \quad (11.64)$$

La luminosité diminue au cours du temps²⁹, de sorte que la proto-étoile se déplace dans le diagramme HR vers le bas. La température varie en revanche très peu, et les trajectoires sont très proches les unes des autres pour différentes masses. Ces deux propriétés se comprennent à partir des dérivées

$$\left[\frac{d \ln L_\star}{d \ln T_\star} \right]_{M_\star} \approx 66 \gg 1 \quad \left[\frac{d \ln T_\star}{d \ln M_\star} \right]_{L_\star} \approx \frac{14}{66} \ll 1 \quad (11.65)$$

Ces portions de l'évolution des proto-étoiles dans le diagramme de Hertzsprung-Russell s'appellent les **trajectoires de Hayashi** (Fig. 11.21, panneau B). Les proto-étoiles de masse $M_\star \lesssim 0.4 M_\odot$ atteignent la séquence principale (ZAMS) à la fin de cette évolution.

28. On rappelle que μ est la masse moyenne par particule du gaz.

29. On peut construire un modèle d'équilibre hydrostatique pour un gaz polytropique, adapté au cas d'une évolution adiabatique. Cela amène à écrire une **équation de Lane-Emden** (non isotherme) qui permet de déterminer la loi de contraction \dot{R}_\star de l'étoile et de montrer que sa luminosité diminue (voir [26], §16.2).

Trajectoires de Henyey

Les étoiles de plus grande masse procèdent différemment. En effet, la température continue d'augmenter, bien que lentement, et il arrive un point où la source d'opacité dominante devient l'opacité libre-libre et lié-libre, $\kappa = \kappa_2 \rho^2 T^{-7/2}$, avec par conséquent un **changement drastique de la dépendance en température**. La chute de l'opacité, combinée à l'augmentation de température et à la diminution de la luminosité fait que le gradient de température radiatif

$$\left(\frac{dT}{dR}\right)_{\text{rad}} \propto \frac{\kappa L_\star}{T_\star^3} \quad (11.66)$$

décroît en deça du gradient de stabilité, et l'équilibre de l'étoile devient radiatif. On en tire une nouvelle relation entre la masse, la luminosité et la température de surface, sous la forme

$$L_\star \propto M_\star^{22/5} T_\star^{4/5} \quad (11.67)$$

La température continue d'augmenter, mais cette fois la luminosité augmente également. On a des trajectoire à peu près diagonales dans le diagramme HR, et les trajectoires pour les étoiles plus massives se trouvent "au-dessus" (Fig. 11.21, panneau C), comme le montrent les dérivées

$$\left[\frac{d \ln L_\star}{d \ln T_\star}\right]_{M_\star} \approx \frac{4}{5} \quad \left[\frac{d \ln L_\star}{d \ln M_\star}\right]_{T_\star} \approx \frac{22}{5} \quad (11.68)$$

Ces portions de l'évolution des proto-étoiles dans le diagramme de Hertzsprung-Russell s'appellent les **trajectoires de Henyey**. Pour les étoiles très massives, l'opacité est fournie par la diffusion des électrons, $\kappa = \kappa_3 \rho$, ce qui donne $L_\star \propto M_\star^3$, indépendamment de la température. On a donc des trajectoires (Fig. 11.21, panneau D) quasiment horizontales. Lorsque la température du cœur est suffisante, les réactions nucléaires s'allument et la luminosité est alors fournie par ces réactions, et non plus par la contraction gravitationnelle, qui s'arrête.

Temps de Kelvin-Helmholtz

Il faut remarquer que le temps caractéristique d'évolution lorsque la luminosité est tirée de l'énergie potentielle gravitationnelle est le **temps de Kelvin-Helmholtz**

$$t_{\text{KH}} = \frac{GM_\star^2}{R_\star L_\star} \quad (11.69)$$

Sur les trajectoires de Henyey, la luminosité est à peu près constante, mais le rayon diminue, de sorte que t_{KH} augmente. Physiquement, l'évolution vers la séquence principale est donc rapide au début, puis de plus en plus lente³⁰. Cela explique pourquoi on observe beaucoup plus d'étoiles proches de la séquence principale qu'aux premiers stades de l'évolution.

11.3.3 La structure d'un système protostellaire

La discussion précédente a souvent fait l'hypothèse d'une symétrie sphérique, mais la structure d'un objet protostellaire est nettement plus complexe (Fig. 11.22). On distingue :

- Un **cœur central dense**, qui est la proto-étoile proprement dite ;
- Un **disque** circumstellaire, aussi appelé disque protoplanétaire ;
- Une **enveloppe** beaucoup plus ténue ;
- Un **jet** fortement collimaté ;
- Un **flot** bipolaire, entraînement du matériel de l'enveloppe et du nuage parent par le jet.

30. Ce temps de Kelvin-Helmholtz, si on l'applique au Soleil, est sensiblement plus faible que l'âge de certaines roches terrestres. Cette observation a historiquement montré l'impossibilité que le Soleil tire son énergie de la contraction gravitationnelle.

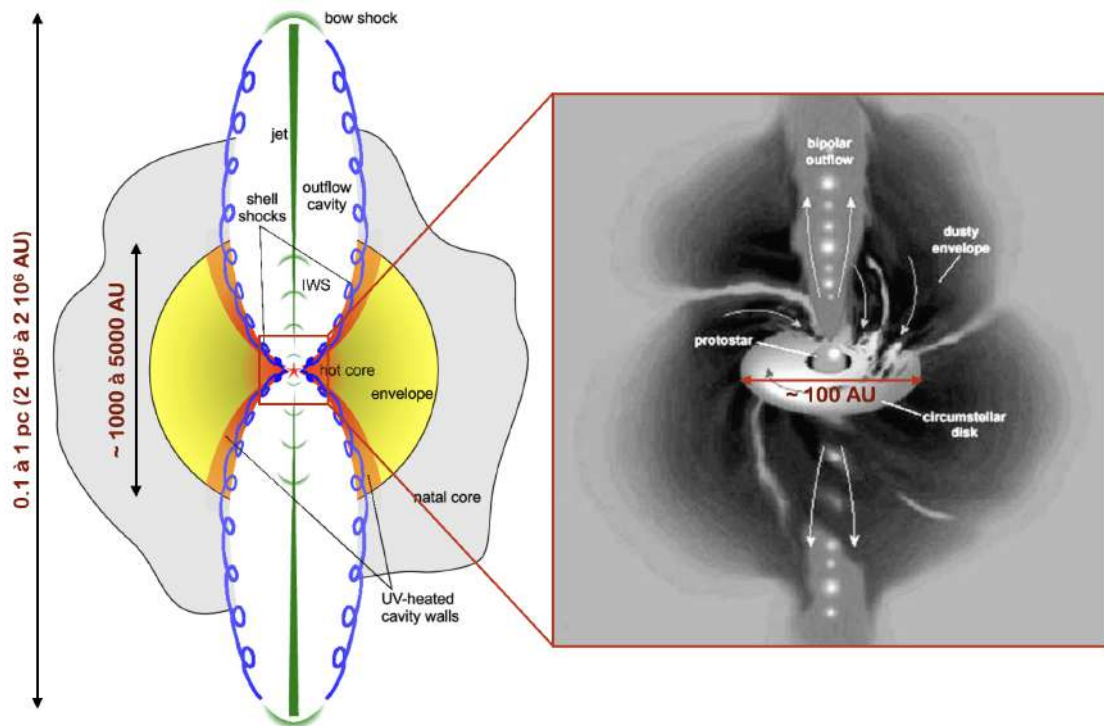


FIGURE 11.22 – **Structure d'un objet protostellaire.** Figures issues de [73] et <https://www.americanscientist.org/article/protostars>.

Le **disque circumstellaire** est formé pendant l'effondrement sous l'effet de la force centrifuge, et présente souvent un **profil évasé** ("*flaring disk*"). L'accrétion sur la proto-étoile est canalisée depuis l'enveloppe vers la proto-étoile via le disque. Les observations à haute résolution angulaire dans le millimétrique montrent souvent des **anneaux, signalant probablement la présence de planètes en formation**. En mesurant la rotation du disque via les raies moléculaires, on peut, si la rotation est **Keplerienne**, en déduire la masse de l'objet central.

Le **jet collimaté** est lancé de l'objet central ou du disque, sous l'effet combiné de la rotation et du champ magnétique. Il permet l'évacuation d'une partie du moment cinétique nécessaire pour poursuivre la contraction. La masse éjectée, à des vitesses élevées de l'ordre de $100 \text{ à } 500 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$, est de l'ordre de 10% de la masse accrétée. On observe le jet au travers de l'émission *free-free*, de $\text{H}\alpha$ et de raies de métaux ionisés.

Le **flot bipolaire** est créé par l'entraînement du milieu ambiant par le jet, laissant une **cavité** au bord de laquelle peuvent se développer des **chocs**, notamment aux extrémités du jet, où on observe des **chocs d'étrave** (*bow shocks*). Les flots sont beaucoup plus lents ($v \lesssim 20 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$) et visibles notamment dans les émissions moléculaires comme CO ou SiO.

11.4 Les extrêmes : étoiles massives et naines brunes

11.4.1 Le cas des étoiles massives

Des difficultés spécifiques

La formation des étoiles de masse $7 M_{\odot}$ et plus présentent des particularités, en regard du scénario discuté jusqu'ici. L'**évolution rapide** vers la séquence principale a pour effet que la combustion de

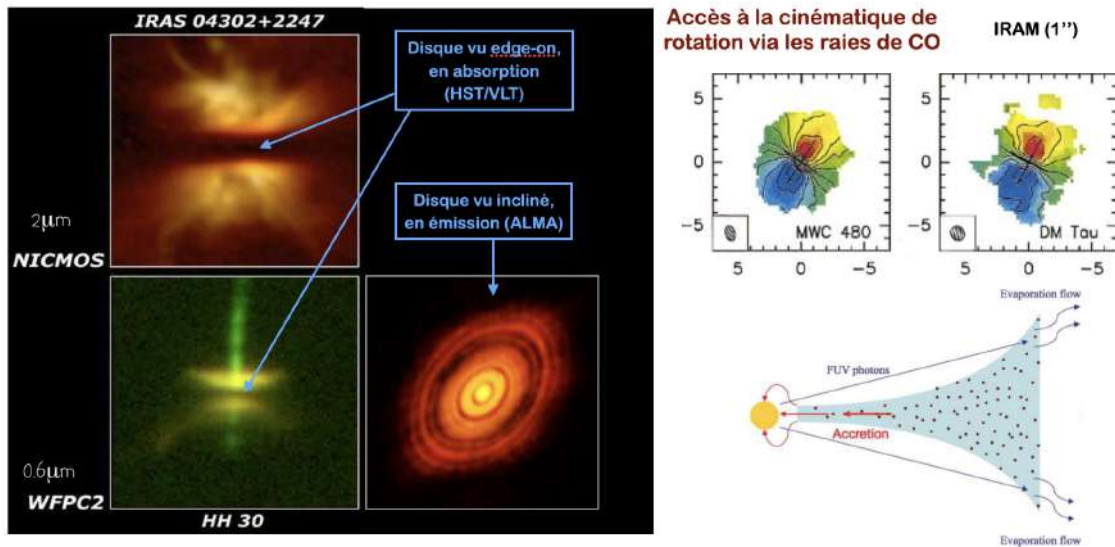


FIGURE 11.23 – **Disques protoplanétaires.** Observations en absorption et en émission (à gauche), cartes de rotation obtenues à partir des raies de CO (en haut à droite), et schéma de la structure évasé d'un disque (en bas à droite).

l'hydrogène débute avant la fin de l'accrétion. **La luminosité stellaire vient alors limiter le taux d'accrétion**, et il est de plus difficile de la séparer de la luminosité d'accrétion pour étudier le processus. À cette difficulté s'ajoutent d'autres obstacles observationnels : le fait que ces étoiles soient **rare**s et donc souvent lointaines, qu'elles évoluent rapidement et qu'il est donc difficile de les observer à chaque étape de leur formation, et enfin qu'elles se forment en **groupe**. Comprendre la formation de ces étoiles massives est cependant crucial car **elles dominent la luminosité des galaxies externes** et sont une source importante d'**énergie** et d'**enrichissement chimique** du milieu interstellaire.

Les différentes étapes de la formation d'une étoile massive

Les étoiles massives naissent dans les nuages les plus denses du MIS, les IRDC, opaques en infrarouge mais qui brillent dans le submillimétrique via l'émission de la poussière froide ($T_d \sim 10 - 20$ K). Au sein de ces nuages de quelques 100 à 1000 M_\odot , on trouve des **cœurs sombres en infrarouge**, de taille ~ 0.1 pc et de masse 10 – 100 M_\odot . Ces cœurs évoluent vers une étape de **cœurs moléculaires chauds** lorsque la formation stellaire débute. La chimie moléculaire complexe est induite par l'évaporation des molécules formées sur les grains³¹. Comme ils descendent des **cœurs sombres en infrarouge**, leurs masses sont semblables mais ils sont bien plus lumineux ($\sim 10^4 L_\odot$) et brillent dans l'IR, signalant des températures nettement plus élevées ($T_d \sim 100 - 200$ K). À haute résolution, on détecte de multiples sources en leur sein, ce sont les étoiles massives en formation groupée (Fig. 11.24).

Une fois formées, ces étoiles massives émettent un fort rayonnement UV qui ionise leur environnement, c'est la formation des **régions HII**, qu'on peut décomposer en différentes étapes, au fur et à mesure de la croissance de la région ionisée :

- Les régions HII **hypercompactes** de taille $L < 0.01$ pc ;
- Les régions HII **ultracompactes** de taille 0.01 pc $< L < 0.1$ pc ;
- Les régions HII **compactes** de taille 0.1 pc $< L < 0.5$ pc ;
- Les régions HII **classiques** de taille $L > 0.5$ pc ;

31. On trouve par exemple des chaînes carbonées comme C_2H_2 , HC_9N , $C_6H_7^+$, ...

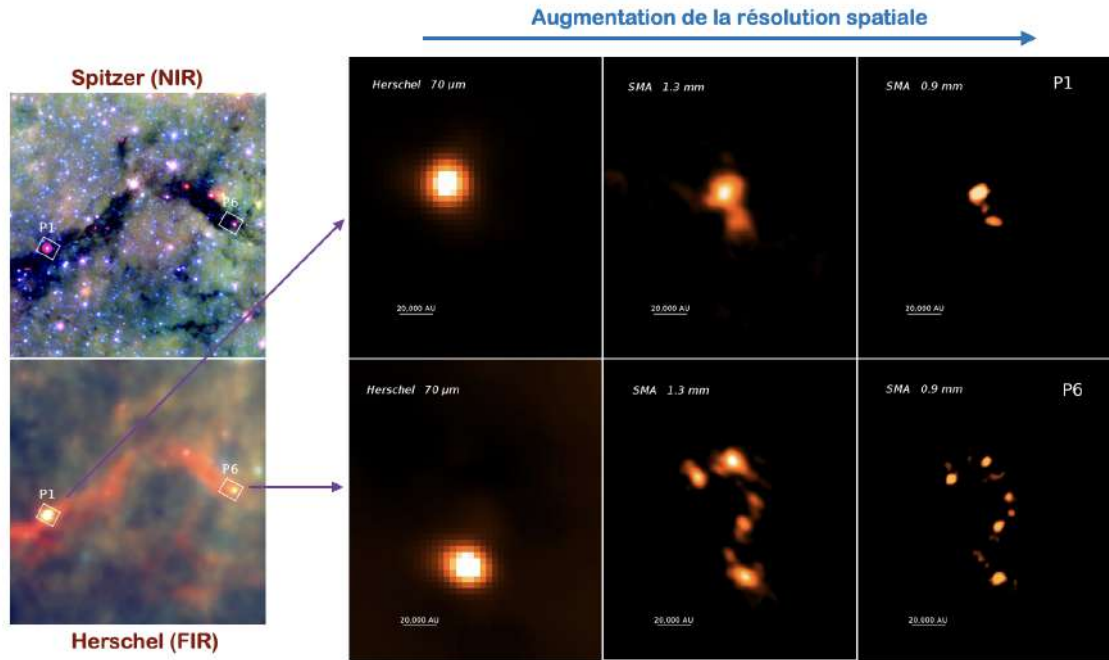


FIGURE 11.24 – Observations de l'IRDC appelé "Nébuluse du Serpent". Avec Spitzer et Herschel à gauche, et avec l'interféromètre submillimétrique SMA à droite (deux dernières colonnes) [74].

La construction d'une étoile massive

Si l'on essaie de former une étoile massive avec un scénario semblable à celui des étoiles de plus faible masse, on se heurte à deux problèmes. Tout d'abord, au delà d'une certaine luminosité de l'objet central, la pression de radiation stoppe l'accrétion, car la force de pression est supérieure à l'attraction gravitationnelle,

$$\frac{dP_{\text{rad}}}{dr} = \frac{\rho\kappa}{c} \frac{L(r)}{4\pi r^2} > G \frac{\rho M_{\star}}{r^2} \quad (11.70)$$

Cette luminosité limite est la **luminosité d'Eddington**

$$L_{\text{edd}} = \frac{4\pi G M_{\star} c}{\kappa} = 3.3 \cdot 10^5 \left(\frac{M}{1 M_{\odot}} \right) \left(\frac{0.4 \text{ cm}^2 \cdot \text{g}^{-1}}{\kappa} \right) L_{\odot} \quad (11.71)$$

La **relation masse-luminosité** impose alors une **masse maximale, de l'ordre de $60 M_{\odot}$** . L'autre difficulté tient au fait que le gaz ionisé dans l'environnement de l'étoile est très chaud $\sim 10^4 \text{ K}$, comme on l'a vu. Les vitesses d'agitation thermique sont alors potentiellement supérieures à la vitesse d'échappement. Typiquement, on écrira

$$c_s \sim \sqrt{\frac{k_B T}{m}} > v_{\text{lib}} \sim \sqrt{\frac{2GM_{\star}}{R_S}} \quad (11.72)$$

où R_S est le rayon de Strömgen. Pour empêcher cet **échappement du gaz**, problématique pour construire une étoile massive, il faut le maintenir dans un rayon R_S suffisamment petit, et donc qu'il présente des **densités très élevées**, de l'ordre de 10^8 cm^{-3} difficilement accessibles à ce stade.

Les hypothèses faites sont donc probablement trop simplificatrices, et il faut en relaxer.

— **L'accrétion n'est pas à symétrie sphérique** : il y a formation de disques, et la pression de radiation hors du plan équatorial est moins efficace.

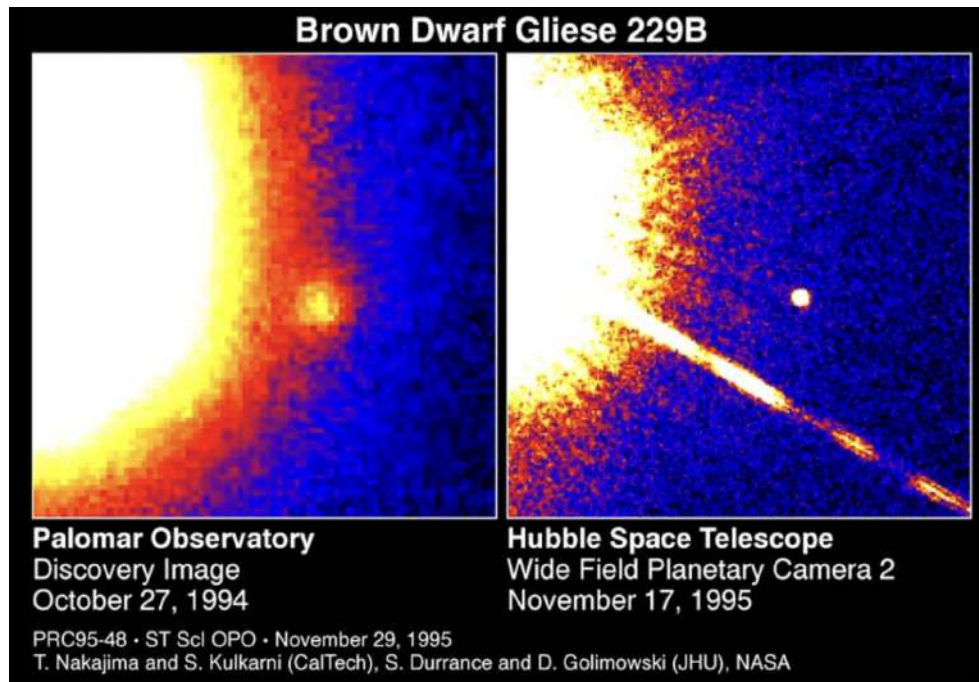


FIGURE 11.25 – **Gliese 229B**. C'est la seconde naine brune découverte.

- **Les populations de grains sont modifiées**, par réduction de leurs abondances (destruction par les chocs et le rayonnement), et par l'évaporation des manteaux de glaces. Les grains sont sans doute plus petits, de moindre section efficace.
- **La métallicité entre en jeu**, notamment pour les **étoiles de population III** (premières étoiles), lorsque la poussière ne pouvait pas encore être présente. La pression de radiation agit alors essentiellement sur les électrons, ce qui est moins efficace.
- **La formation n'est pas isolée**, mais en amas, et le champ de gravité à prendre en compte est plus complexe et plus intense que pour une étoile seule.

Ces corrections autorisent théoriquement l'**augmentation de la masse maximale** possible d'une étoile. Alternativement, la formation stellaire en amas autorise potentiellement la **coalescence** d'étoiles de masses intermédiaires $\sim 7 M_{\odot}$ formées plus classiquement.

11.4.2 Les naines brunes

Les naines brunes, autre extrême de la distribution des masses stellaires, ont été prédites en 1963, mais, difficiles à détecter car **petites et froides donc très peu lumineuses**, il a fallu attendre 1994 pour détecter les premières d'entre elles (Teide-1, puis Gliese 229B, représentée sur la Fig. 11.25). Depuis plusieurs relevés en infrarouge, comme 2MASS, ont permis d'établir leurs propriétés. Leurs très basses températures effectives, jusqu'à 500 K, ont amené l'introduction de nouveaux **types spectraux** (L, T et Y). Leurs très faibles masses, inférieures à la masse minimale de combustion thermonucléaire de l'hydrogène ($0.075 M_{\odot} = 80 M_{\text{Jup}}$), alors que certaines exoplanètes ont des masses de l'ordre de $\sim 10 M_{\text{Jup}}$, a permis de **douter de leur caractère stellaire**. Le critère selon lequel une planète est en orbite autour d'une étoile n'est pas très utile non plus, car certaines planètes sont sans étoile ("*free-floating planets*"), telle PSO J318.5-22, et il existe des naines brunes en orbite autour d'étoiles classiques (c'est le cas de Gliese 229B). Le critère de la fonction de masse initiale semble plus pertinent, et **les naines brunes se placent dans la continuation de l'IMF stellaire aux faibles masses**, ce qui suggère un mécanisme de formation semblable à celui des étoiles, et différent des planètes.

Chapitre 12

La cosmologie

La **cosmologie** est l'étude de l'Univers dans son ensemble, qu'il s'agisse de décrire l'**histoire thermique** de l'Univers, jalonnée de transitions de phase (grande unification, transition électro-faible, nucléosynthèse primordiale, recombinaison, réionisation), ou la **formation des structures** (galaxies, amas, superamas). Elle s'appuie sur un cadre théorique fondé sur la relativité générale pour la formulation de modèles globaux d'univers, et sur la physique des hautes énergies pour la description des phases primitives de son histoire.

12.1 L'expansion de l'Univers : la loi de Hubble

12.1.1 Des univers-îles

La mesure des distances dans l'Univers s'appuie sur la construction progressive d'une **échelle des distances**, dont un échelon essentiel est l'observation d'une **relation période-luminosité** $P-L$ des étoiles variables de type **Céphéide**, par H. S. Leavitt dans les années 1910. En classifiant des Céphéides dans les nuages de Magellan, elle constata que celles-ci sont d'autant plus brillantes que leur période P est plus longue (Fig. 12.1). Or toutes étant dans les nuages de Magellan, elles sont à peu près à la même distance, donc la relation liant la période à la moyenne temporelle de la luminosité apparente de ces étoiles est aussi une relation entre leur période P et leur luminosité intrinsèque L . Ces étoiles sont donc des **chandelles standard** : en identifiant une de ces étoiles dans un système, on tire de sa période une estimation de sa luminosité intrinsèque. La comparaison avec la luminosité apparente fournit la distance D du système¹

Au début des années 1920, la nature des "nébuleuses spirales" telle celle d'Andromède faisait débat, entre les tenants d'objets Galactiques et d'objets **extragalactiques** beaucoup plus lointains, qui seraient des collections d'étoiles équivalentes à notre propre Galaxie. Ce débat fut très vif, notamment le 26 avril 1920 au Smithsonian Museum of Natural History de Washington, entre H. Shapley, partisan d'une nature Galactique, et H. Curtis, convaincu d'une nature extragalactique. Parmi les arguments de Curtis, l'observation de 27 **novæ** en quelques années dans les nébuleuses spirales, dont 16 dans la seule Andromède, contre 35 en trois siècles dans notre Galaxie, semble assez convaincante, mais c'est l'observation de Céphéides dans Andromède par E. Hubble en 1929 qui clôt définitivement le débat : avec une distance² de 752 kpc, cet objet ne peut être dans notre Galaxie, c'est un autre "Univers-île" comme la Voie Lactée.

1. Ces étoiles furent observées notamment par H. Shapley dans les **amas globulaires** répartis dans le halo de notre Galaxie. Il en déduisit la distance du système solaire au centre Galactique, $D_{SC} \approx 8.5$ kpc et le diamètre du disque Galactique, $D_G \approx 30$ kpc.

2. L'estimation de Hubble était de 275 kpc, assez fausse mais suffisante pour écarter une nature Galactique.

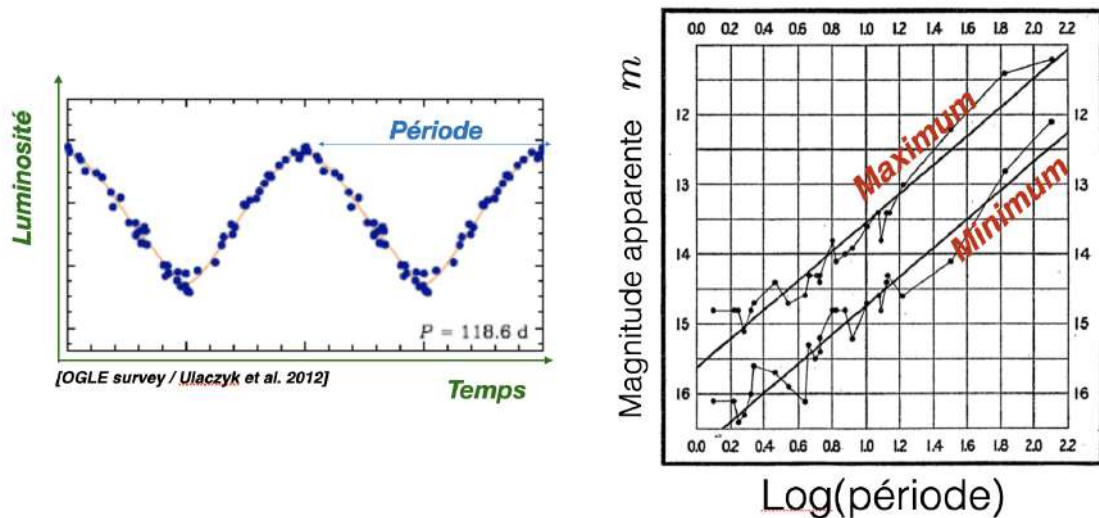


FIGURE 12.1 – **Les Céphéides**. La figure de gauche montre une courbe de lumière d'une telle étoile, celle de droite est issue du travail de H. S. Leavitt sur les Céphéides dans les nuages de Magellan

12.1.2 La loi de Hubble-Lemaître

Les observations de Hubble montrèrent également que ces galaxies présentent un **décalage spectral vers le rouge** (*redshift*) z d'autant plus marqué qu'elles sont plus éloignées. Il en déduisit pour chacune une "vitesse de récession" v montrant que l'Univers local est en **expansion**. Des observations ultérieures étendirent cette constatation à des distances bien plus grandes, en utilisant notamment le fait que les supernovæ de type Ia sont également des chandelles standard, résultant en un **diagramme de Hubble** représentant la magnitude en fonction de z (Fig. 12.2). Le redshift z et la distance r sont ainsi apparemment reliés par la **loi de Hubble-Lemaître**

$$cz = H_0 r \quad (12.1)$$

où H_0 est la **constante de Hubble**, de l'ordre de $70 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1}$, qui représente le taux d'expansion actuel³. La mesure de cette valeur fut longtemps l'un des objectifs majeurs de la cosmologie observationnelle (Fig. 12.3). Cette loi présente des déviations à petite échelle en raison des **mouvements particuliers** liés à l'interaction gravitationnelle entre galaxies, et à grande échelle du fait de l'évolution du taux d'expansion. Les observations de supernovæ ont d'ailleurs permis de montrer que cette expansion est **accélérée**, nécessitant l'introduction d'une **énergie noire**.

12.1.3 Équations d'Einstein

Dès leur publication⁴, les observations de Hubble sont interprétées en termes de modèles d'Univers homogène et isotrope, dans le cadre de la toute récente théorie de la gravitation relativiste, la **relativité générale**⁵. Dans cette théorie, il n'y a pas à proprement parler de champ de gravitation, mais une courbure de l'espace-temps liée au contenu en masse-énergie de l'Univers⁶. Si l'espace-temps est

3. Le terme de "constante" est donc assez malvenu, puisque ce taux peut varier comme on le verra.

4. En réalité, G. Lemaître avait déjà prédit en 1927 la loi de récession observée par Hubble en utilisant justement la relativité générale.

5. En mécanique newtonienne, le principe de relativité stipule que les lois de la mécanique sont les mêmes dans tous les référentiels Galiléens. La relativité restreinte étend ce principe à toutes les lois de la physique, et la relativité générale l'étend encore aux référentiels non Galiléens.

6. Un fameux mot de J. Wheeler précise cette idée : "Space-time tells matter how to move. Matter tells space-time how to curve."

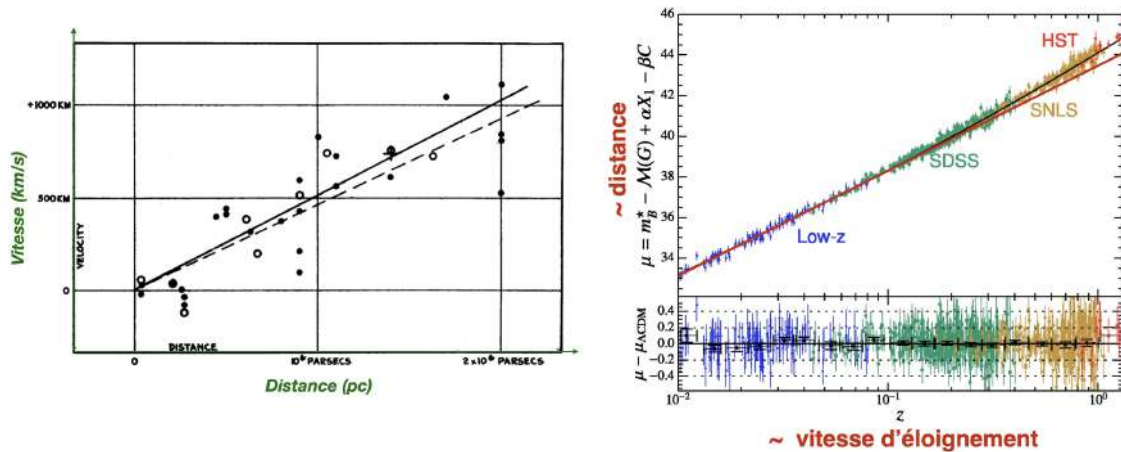


FIGURE 12.2 – **La loi de Hubble-Lemaître**. La figure de gauche est issue de l'article original de Hubble, celle de droite montre des mesures sur une plus grande plage de redshifts et souligne la déviation à la loi linéaire, correspondant à l'accélération de l'expansion [75].

localement indistinguable de celui de la relativité restreinte, avec une **métrique de Minkowski**⁷, le traitement de l'Univers à grande échelle impose de tenir compte de la courbure sous la forme d'une **métrique** $g_{\mu\nu}(\vec{x})$ donnant l'intervalle relativiste entre deux évènements sous la forme⁸

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (12.2)$$

De cette métrique on déduit un **tenseur de courbure** de rang 4 noté $R^\alpha_{\beta\mu\nu}$ puis le **tenseur de Ricci**, qui en est une **contraction**⁹ $R_{\mu\nu} = R^\alpha_{\mu\alpha\nu}$ et le **scalaire de Ricci** $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$. Enfin on définit le **tenseur d'Einstein** $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - (1/2)Rg_{\mu\nu}$, qui est donc entièrement défini par la métrique, soit la courbure de l'espace-temps.

D'un autre côté, le contenu en matière-énergie de l'Univers est caractérisé par un **tenseur énergie-impulsion** $T_{\mu\nu}$, de rang 2 et symétrique, dont les composantes sont

- $T_{00} = \rho c^2$ est la densité d'énergie
- T_{0i} est le vecteur densité de quantité de mouvement
- T_{i0} est le vecteur densité de flux d'énergie
- T_{ij} est un tenseur de pression-contraintes à trois dimensions

Les **équations d'Einstein** (1915) relient alors la courbure au contenu de l'Univers

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{R}{2}g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (12.3)$$

En 1917, pour obtenir un Univers statique, Einstein introduisit une **constante cosmologique** Λ dans son équation

$$R_{\mu\nu} - \frac{R}{2}g_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (12.4)$$

Cette constante tomba en désuétude lorsque l'expansion de l'Univers fut découverte par Hubble, mais elle a été depuis réintroduite pour modéliser l'accélération de l'expansion.

7. De même qu'une fourmi sur la Géode est incapable de dire qu'elle se déplace sur une surface courbe.

8. En relativité restreinte, $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$.

9. On utilise ici la **convention de sommation d'Einstein** selon laquelle tout indice répété implique une sommation de cet indice sur l'ensemble des quatre dimensions.

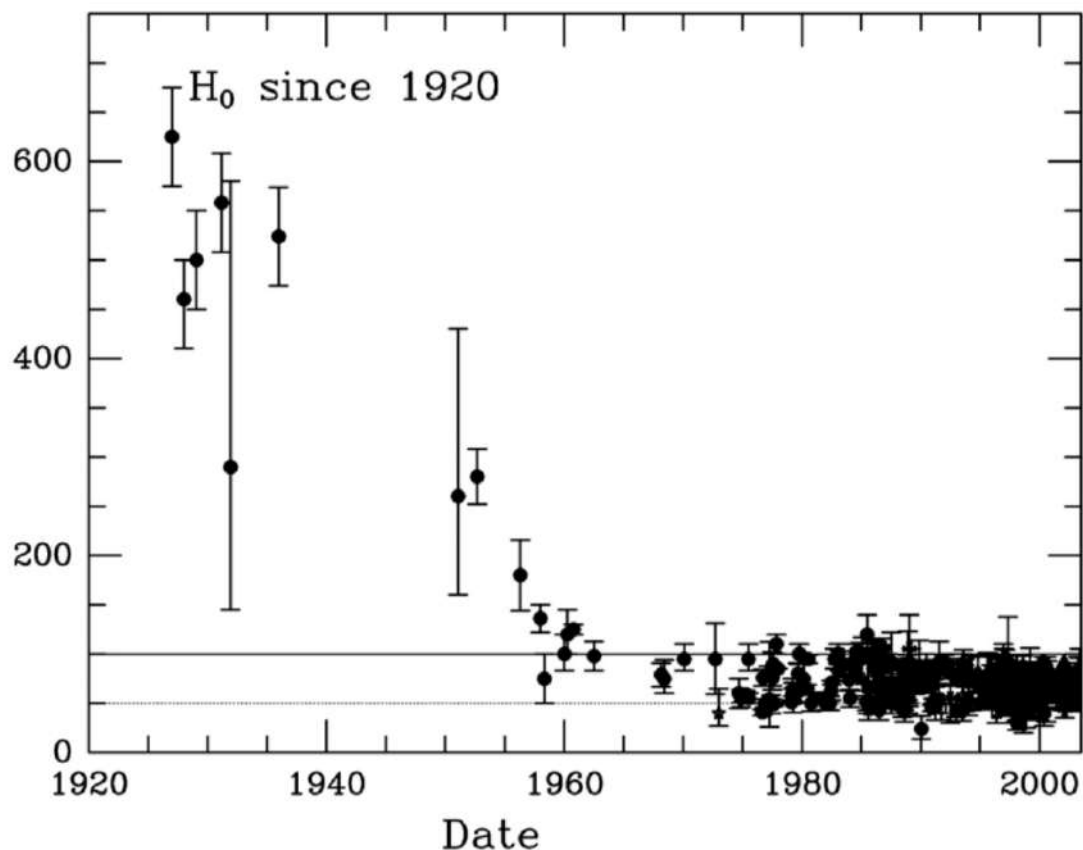


FIGURE 12.3 – Évolution des estimations de la constante de Hubble avec le temps (Source : <https://lweb.cfa.harvard.edu/~dfabricant/huchra/hubble/>).

12.2 Les modèles Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker

12.2.1 Le principe cosmologique

Les équations d'Einstein fournissent les lois d'évolution requises pour construire un modèle dynamique d'Univers. Dans le cas général, il est très difficile d'obtenir une solution de ces équations, mais le problème se simplifie notablement lorsqu'on impose les conditions d'**homogénéité** et d'**isotropie**. Ces conditions ne sont pas déraisonnables, les observations (en particulier celles du fond diffus cosmologique), montrant que notre univers est fortement isotrope à grande échelle. Il est plus difficile d'établir que l'Univers est spatialement homogène, mais il existe également de bonnes preuves à cet égard¹⁰. Si ces observations n'étaient pas disponibles à l'époque de Hubble, il n'est cependant pas étonnant que des solutions à haute symétrie aient été cherchées en premier, parce qu'elles sont *a priori* plus simples à déterminer. Cette idée selon laquelle l'Univers serait spatialement homogène¹¹ et isotrope constitue le **principe cosmologique**¹².

10. On peut aussi invoquer le **principe Copernicien** selon lequel la place de la Terre dans l'Univers n'a rien de particulier pour déduire l'homogénéité à partir de l'isotropie.

11. C'est-à-dire que, hormis les irrégularités locales, il présente le même aspect en tous les points de l'espace à un "temps cosmique" τ donné.

12. Certains ont défendu un "principe cosmologique parfait" selon lequel l'Univers serait également invariant dans le temps. S'il semble démenti par l'observation, il n'est pas interdit de penser qu'aux temps longs l'Univers obéira à un tel

Dans ces conditions, la métrique est assez sévèrement contrainte, et malgré une certaine liberté dans le choix des coordonnées, une forme simple de l'intervalle est

$$ds^2 = -c^2 d\tau^2 + a^2(\tau) [d\chi^2 + S_k^2(\chi)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)] \quad (12.5)$$

où $a(\tau)$ est un **facteur d'échelle**, tel que le rayon vecteur \vec{d} entre deux objets **comobiles**¹³ quelconques est proportionnel à a , soit $\vec{d}(\tau) = a(\tau)\vec{d}_0$ (Fig. 12.4, gauche). La fonction $S_k(\chi)$ décrit la géométrie **spatiale** (c'est-à-dire la géométrie d'hypersurfaces à temps τ constant) de l'Univers, et prend l'une des trois formes suivantes, en fonction de la valeur propre k caractérisant la courbure

$$S_k(\chi) = \begin{cases} \sin \chi & \text{pour } k = +1 \\ \chi & \text{pour } k = 0 \\ \sinh \chi & \text{pour } k = -1. \end{cases} \quad (12.6)$$

Ces trois cas correspondent respectivement à une géométrie **sphérique, plate (Euclidienne) ou hyperbolique**, comme schématisé sur la Fig. 12.4 (droite). On peut noter que si l'on définit $r = S_k(\chi)$, la métrique s'écrit sous une forme peut-être un peu plus explicite dans les coordonnées (τ, r, θ, ϕ)

$$ds^2 = -c^2 d\tau^2 + a^2(\tau) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right] \quad (12.7)$$

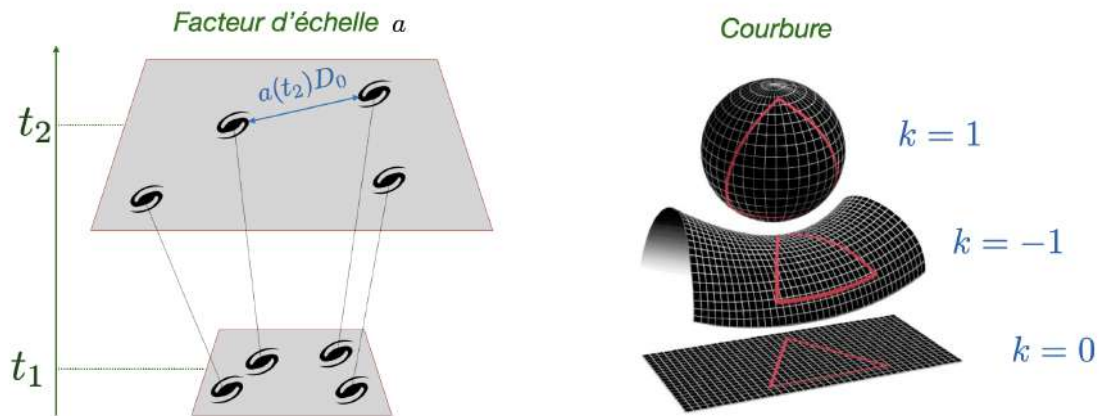


FIGURE 12.4 – Facteur d'échelle et courbure.

12.2.2 Les équations de Friedmann

Le facteur d'échelle n'est pas déterminé par les conditions de symétrie, mais par les équations d'Einstein. Son équation d'évolution a été obtenue par Friedmann en 1922, en prenant un tenseur énergie-impulsion diagonal $T_{\mu\nu} = \text{diag}(\rho c^2, P, P, P)$, ce qui donne

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = -\frac{kc^2}{a^2} + \frac{8\pi G}{3}\rho \quad (12.8)$$

principe fort.

13. C'est-à-dire qui n'ont pas d'autre mouvement l'un par rapport à l'autre que celui lié à l'expansion ou à la contraction de l'espace lui-même.

Dans cette première **équation de Friedmann**, on a noté $\dot{a} = da/d\tau$ la dérivée temporelle du facteur d'échelle. On remarque que cette équation serait celle d'une **cosmologie newtonienne** exprimant la conservation de l'énergie pour une particule de masse unité au bord d'un Univers homogène de rayon a

$$\frac{1}{2}v^2 - \frac{GM}{a} = \frac{1}{2}\dot{a}^2 - \frac{4\pi G\rho a^2}{3} = C^{\text{te}} \quad (12.9)$$

Le signe de la courbure k correspond alors à un état lié pour $k = 1$ (Univers **fermé**), un état libre pour $k = -1$ (Univers **ouvert**) et un état marginalement lié pour $k = 0$ (Univers **plat**). Cette équation peut être complétée par une seconde, traduisant la conservation de l'énergie. On peut la déterminer en admettant que l'évolution de l'Univers est adiabatique et que le seul travail est celui des forces de pression $\delta W = -PdV$, avec V le "volume de l'Univers". On applique alors le premier principe

$$dU = d(\rho c^2 V) = c^2 (Vd\rho + \rho dV) = \delta W = -PdV \quad (12.10)$$

ce qui donne, en notant que $V \propto a^3$,

$$\dot{\rho} = -3\frac{\dot{a}}{a} \left(\rho + \frac{P}{c^2} \right) \quad (12.11)$$

La combinaison de cette équation avec la dérivée temporelle de la première équation de Friedmann aboutit à la **seconde équation de Friedmann**, donnant l'**accélération de l'expansion**,

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \left(\rho + \frac{3P}{c^2} \right) \quad (12.12)$$

Pour $P = 0$, c'est ce qu'on aurait pu écrire en mécanique Newtonienne pour une sphère de poussières en expansion, mais le cas général contient un terme supplémentaire de décélération dû à la pression (pour $P > 0$). Il faut noter que cette pression n'est pas liée à l'agitation thermique des particules d'un gaz, car cette densité d'énergie est déjà prise en compte dans le terme ρc^2 .

Exercice 117 : Établir les équations (12.11) et (12.12).

12.2.3 Les équations d'état

On a maintenant deux équations différentielles du premier ordre pour trois inconnues a , P , ρ . Il faut donc compléter le système avec une **équation d'état**¹⁴ reliant P et ρ . Les possibilités sont, *a priori* :

- Une matière non collisionnelle, appelée généralement **poussière**, pour laquelle $P = P_m = 0$
- La **radiation**, pour laquelle $P = P_r = \rho c^2/3$

L'observation que l'expansion est accélérée suggère d'introduire un fluide à pression négative, l'**énergie noire**, de sorte que $\ddot{a} > 0$. Le fait qu'on ne sache pas de quoi il s'agit est caché par l'écriture d'une équation d'état $P = \omega\rho c^2$ avec $\omega(z) < 0$ dépendant du redshift. Un cas particulier important est celui d'un champ scalaire de **quintessence** pour lequel $\omega = -1$, ce qui revient à réintroduire la **constante cosmologique** Λ d'Einstein.

Pour tous ces fluides, on a donc une équation d'état $P = \omega\rho c^2$ avec respectivement $\omega_m = 0$ (matière), $\omega_r = 1/3$ (radiation) et $\omega_\Lambda = -1$ (constante cosmologique). L'équation d'évolution de ρ donne alors $\rho \propto a^{-3(1+\omega)}$ et les densités ρ_m , ρ_r et ρ_Λ des fluides correspondants varient donc avec le facteur d'échelle comme

$$\rho_m \propto a^{-3} \quad \rho_r \propto a^{-4} \quad \rho_\Lambda = C^{\text{te}} \quad (12.13)$$

Exercice 118 : Établir les relations (12.13).

14. En thermodynamique, une équation d'état relie trois variables, par exemple P , ρ et T . En cosmologie, cette terminologie est plus lâche et désigne donc une relation entre P et ρ uniquement, soit parce que la température dépend univoquement de la densité (comme pour la radiation), soit parce qu'elle n'est pas définie (comme pour la quintessence).

La matière, importante dans le bilan d'énergie actuel, deviendra négligeable par rapport à la constante cosmologique dans le futur, et était négligeable devant la radiation dans un passé lointain. Dans l'Univers primordial, l'**inflation** correspond à une constante cosmologique et devait dominer le bilan d'énergie. L'accélération de l'expansion, dans un Univers constitué d'un seul de ces fluides s'écrit

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \left(\frac{3P}{c^2} + \rho \right) = -\frac{4\pi G}{3} (1 + 3\omega)\rho \quad (12.14)$$

L'accélération \ddot{a} est donc du signe opposé à $1 + 3\omega$ puisque a comme ρ sont des quantités positives. Si $\omega > -1/3$, l'expansion est nécessairement **freinée**, et si $\omega < -1/3$, elle est nécessairement **accélérée**. La constante cosmologique correspond à ce second cas de figure.

12.2.4 Taux d'expansion, paramètres de densité et densité critique

Le **taux d'expansion** de l'Univers est défini par

$$H = \frac{\dot{a}}{a} \quad (12.15)$$

et il s'identifie à la constante de Hubble lorsqu'on le prend à l'époque actuelle τ_0 . Comme on le verra, cette quantité est mesurée avec une grande précision via les fluctuations du fond diffus cosmologique (CMB), avec¹⁵ $H_0 = 67.74 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1}$. En écrivant la première équation de Friedmann à l'instant présent τ_0 , on a

$$H_0^2 = -\frac{kc^2}{a_0^2} + \frac{8\pi G}{3}\rho_0 \quad (12.16)$$

ce qui permet de relier le terme de courbure au **paramètre de densité actuel** Ω_0

$$-\frac{kc^2}{R_0^2} = H_0^2 - \frac{8\pi G}{3}\rho_0 = H_0^2 (1 - \Omega_0) \quad \Omega_0 = \frac{8\pi G\rho_0}{H_0^2} = \frac{\rho_0}{\rho_{c,0}} \quad \rho_{c,0} = \frac{3H_0^2}{8\pi G} \quad (12.17)$$

On a donc les relations suivantes

$$k = 0 \quad (\Omega_0 = 1) \quad k > 0 \quad (\Omega_0 > 1) \quad k < 0 \quad (\Omega_0 < 1) \quad (12.18)$$

et on a fait apparaître une **densité critique** $\rho_{c,0}$ pour laquelle la courbure est nulle. Il est habituel d'introduire des paramètres de densité pour chacun des fluides possibles, soit

$$\Omega_{m,0} = \frac{\rho_{m,0}}{\rho_{c,0}} \quad \Omega_{r,0} = \frac{\rho_{r,0}}{\rho_{c,0}} \quad \Omega_{\Lambda,0} = \frac{\rho_{\Lambda,0}}{\rho_{c,0}} \quad (12.19)$$

Les observations indiquent que le contenu actuel en matière de l'Univers correspond à $\Omega_{m,0} \approx 0.3$, ce qui suggérerait une géométrie hyperbolique... si la matière était le seul fluide présent. Mais il est nécessaire, pour expliquer les observations, d'inclure une composante d'énergie noire avec $\Omega_{\Lambda,0} \approx 0.7$. La radiation, elle, est négligeable, avec $\Omega_{r,0} \sim 10^{-4}$ (voir plus loin pour le calcul de cette estimation). Le paramètre de densité total

$$\Omega_0 = \Omega_{m,0} + \Omega_{\Lambda,0} + \Omega_{r,0} \quad (12.20)$$

semble donc très proche de 1 et il est habituel de poser un paramètre de densité associé à la courbure sous la forme

$$\Omega_{k,0} = 1 - (\Omega_{m,0} + \Omega_{\Lambda,0} + \Omega_{r,0}) = 1 - \Omega_0 \quad (12.21)$$

En tenant compte de la forme des différentes densités d'énergie avec le facteur d'échelle, on obtient l'équation d'évolution du taux d'expansion

$$H^2 = H_0^2 \left[\Omega_{m,0} \left(\frac{a_0}{a} \right)^3 + \Omega_{r,0} \left(\frac{a_0}{a} \right)^4 + \Omega_{\Lambda,0} + \Omega_{k,0} \left(\frac{a_0}{a} \right)^2 \right] \quad (12.22)$$

15. Planck Collaboration XIII, A&A, 594, 13, 2016.

qu'il est possible d'écrire sous la forme suivante

$$H(z) = H_0 \left[\Omega_{m,0} (1+z)^3 + \Omega_{r,0} (1+z)^4 + \Omega_{\Lambda,0} + \Omega_{k,0} (1+z)^2 \right]^{1/2} \quad (12.23)$$

en fonction du **redshift** z , défini par

$$1+z = \frac{a_0}{a} \quad (12.24)$$

On a ici une équation d'évolution du facteur d'échelle, puisque $H = \dot{a}/a$, qu'on peut réécrire en introduisant $y = a/a_0$ et $x = H_0\tau$, sous la forme

$$\left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = \Omega_{k,0} + \frac{\Omega_{m,0}}{y} + \frac{\Omega_{r,0}}{y^2} + \Omega_{\Lambda,0} y^2 \quad (12.25)$$

dont la résolution n'est pas possible analytiquement de manière générale, mais dont on va étudier quelques cas particuliers.

Exercice 119 : *Obtenir l'équation d'évolution (12.23).*

12.2.5 Les univers "poussières" ouverts et fermés

Ces modèles sont d'intérêt purement académique, car leur courbure non-nulle semble en désaccord avec les observations. On considère donc un Univers "poussières" ($\omega = 0$), de courbure quelconque, mais non nulle, soit $\Omega_{k,0} \neq 0$. On définit la **distance comobile** η comme

$$\eta = \int \frac{cd\tau}{a(\tau)} \quad (12.26)$$

de sorte que l'évolution du facteur d'échelle $y = a/a_0$ obéit à l'équation

$$\frac{d^2y}{d\eta^2} + ky = \frac{k\Omega_0}{2(\Omega_0 - 1)} \quad (12.27)$$

Exercice 120 : *Obtenir l'équation d'évolution (12.27).*

Univers poussières fermé

Pour un univers "fermé" ($k = 1, \Omega_0 > 1$), on a donc

$$\frac{d^2y}{d\eta^2} + y = \frac{\Omega_0}{2(\Omega_0 - 1)} \quad (12.28)$$

dont on trouve la solution générale en choisissant judicieusement la borne inférieure dans la définition de η (on peut ainsi supprimer le terme de phase à l'origine dans le cosinus), de sorte qu'à $\eta = 0$ on fasse correspondre $\tau = 0$ et $y = 0$, d'où

$$y = \frac{\Omega_0}{2(\Omega_0 - 1)} (1 - \cos \eta) \quad (12.29)$$

Quant au temps τ , on écrit $d\tau = (a/c)d\eta = y(a_0/c)d\eta$ pour obtenir son expression en fonction de η

$$H_0\tau = \frac{H_0 a_0 \Omega_0}{2c(\Omega_0 - 1)} (\eta - \sin \eta) = \frac{\Omega_0}{2(\Omega_0 - 1)^{3/2}} (\eta - \sin \eta) \quad (12.30)$$

On a l'équation paramétrique d'une cycloïde. La valeur maximale du facteur d'échelle est atteinte pour $\eta = \pi$ et vaut

$$a_{\max} = \frac{\Omega_0}{\Omega_0 - 1} \quad (12.31)$$

L'âge actuel de l'Univers correspond à $y = 1$, ce qui donne

$$\tau_0 = \frac{\Omega_0}{2H_0(\Omega_0 - 1)^{3/2}} \left[\arccos\left(\frac{2 - \Omega_0}{\Omega_0}\right) - \sqrt{1 - \left(\frac{2 - \Omega_0}{\Omega_0}\right)^2} \right] \quad (12.32)$$

Enfin la durée de vie de cet Univers est finie, et atteinte lorsque $\eta = 2\pi$ et vaut

$$\tau_{\max} = \frac{\pi\Omega_0}{H_0(\Omega_0 - 1)^{3/2}} \quad (12.33)$$

Exercice 121 : Obtenir les expressions de a_{\max} , τ_0 et τ_{\max} .

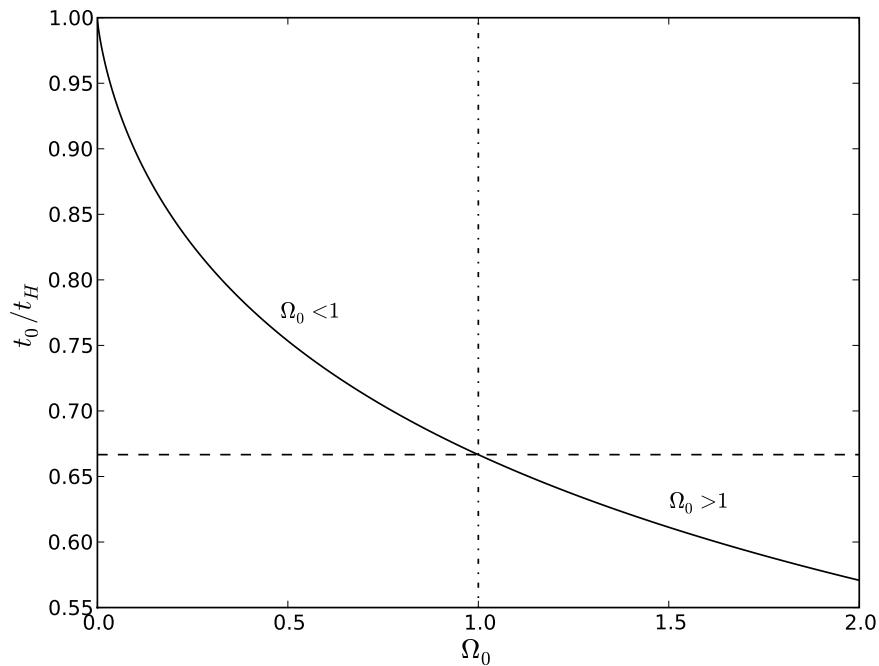


FIGURE 12.5 – Âge calculé pour un Univers poussière de courbure non nulle. L'âge est rapporté au temps de Hubble $t_H = 1/H_0$, en fonction du paramètre de densité Ω_0 . La courbe en tirets marque l'âge calculé dans le cas $\Omega_0 = 1$, soit $t_0 = (2/3)t_H$.

Univers poussières ouvert

Pour un Univers ouvert ($k = -1, \Omega_0 < 1$), on a

$$\frac{d^2y}{d\eta^2} - y = \frac{\Omega_0}{2(1 - \Omega_0)} \quad (12.34)$$

dont la solution se met sous la forme, suivante, en faisant correspondre $\tau = 0$ et $y = 0$ à $\eta = 0$,

$$y = \frac{\Omega_0}{2(1 - \Omega_0)} (\cosh \eta - 1) \quad (12.35)$$

et de la même manière que plus haut,

$$H_0 \tau = \frac{\Omega_0}{2(1 - \Omega_0)^{3/2}} (\sinh \eta - \eta) \quad (12.36)$$

On a maintenant un Univers de durée de vie infinie.

12.2.6 Univers à un seul fluide de courbure nulle

Univers "poussières" et Univers "radiation"

On suppose l'Univers rempli d'un seul fluide, homogène et isotrope, et on traite les cas des modèles $(\Omega_{m,0}, \Omega_{r,0}, \Omega_{\Lambda,0}) = (1, 0, 0)$ - dit **Univers d'Einstein-de Sitter** - et $(\Omega_{m,0}, \Omega_{r,0}, \Omega_{\Lambda,0}) = (0, 1, 0)$. La courbure est alors nulle ($\Omega_0 = 1$) et on a un Univers mono-fluide avec $\omega \geq 0$. On traite simultanément ces deux cas en notant que l'équation d'évolution se met alors sous la forme générale

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{1}{y^{1+3\omega}} \quad (12.37)$$

avec, suivant le cas, $\omega = 0$ ou $\omega = 1/3$. On a alors une équation différentielle à variables séparables qu'on intègre en prenant $y(0) = 0$, ce qui donne, sans difficulté,

$$a = a_0 \left[\frac{3(1 + \omega)H_0\tau}{2} \right]^{\frac{2}{3(1+\omega)}}. \quad (12.38)$$

Exercice 122 : Obtenir la forme (12.38) du facteur d'échelle.

La durée de vie de ces Univers est infinie puisque a ne s'annule pas dès lors que $\tau > 0$ (on a même $a \rightarrow \infty$ quand $\tau \rightarrow \infty$), et l'âge de l'Univers est obtenu en écrivant $y(x_0) = 1$, soit

$$\tau_0 = \frac{2}{3(1 + \omega)H_0} \quad (12.39)$$

ce qui permet d'écrire l'évolution du facteur d'échelle sous la forme

$$a = a_0 \left(\frac{\tau}{\tau_0} \right)^{\frac{2}{3(1+\omega)}} \quad (12.40)$$

Cet âge τ_0 est inférieur au **temps de Hubble** τ_H , défini comme étant l'âge qu'aurait l'Univers si l'expansion était linéaire, soit $\tau_H = 1/H_0$. Le fait que $\tau_0 < \tau_H$ est une conséquence directe du freinage de l'expansion¹⁶. Le taux d'expansion est alors donné par

$$H = \frac{H_0}{y} \frac{dy}{dx} = \frac{H_0}{y^{3(1+\omega)/2}} = \frac{2H_0}{3(1 + \omega)x} = \frac{2}{3(1 + \omega)\tau} = H_0 \frac{\tau_0}{\tau} \quad (12.42)$$

et la forme de ρ est donnée par la loi de conservation

$$\rho = \frac{1}{6\pi G(1 + \omega)^2 \tau^2} \quad (12.43)$$

16. On a l'équivalence

$$\ddot{a} < 0 \iff \omega > -1/3 \iff \tau_0 < \tau_H \quad (12.41)$$

Exercice 123 : Obtenir l'expression (12.43) de la densité.

On peut remarquer que ceci implique que $\Omega = \Omega_0 = 1$ à chaque instant. Dans le cas particulier $\omega = 0$ (Univers poussière) ces relations deviennent

$$a = a_0 \left(\frac{3}{2} H_0 \tau \right)^{2/3} \quad \tau_0 = \frac{2}{3H_0} \quad H = \frac{2}{3\tau} \quad \rho = \frac{1}{6\pi G \tau^2} \quad (12.44)$$

et dans le cas particulier $\omega = 1/3$ (Univers radiation), elles deviennent

$$a = a_0 (2H_0 \tau)^{1/2} \quad \tau_0 = \frac{1}{2H_0} \quad H = \frac{1}{2\tau} \quad \rho = \frac{3}{32\pi G \tau^2} \quad (12.45)$$

Les graphes $y(x)$ pour ces deux cas particuliers sont représentés sur la Fig. 12.6 (courbes **1** et **2**, respectivement). On peut calculer numériquement l'âge de l'Univers dans ces différents modèles en prenant $H_0 = 67.74 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$

$$\tau_H = 14.44 \text{ Gyr} \quad \tau_0(\omega = 0) = \frac{2}{3} \tau_H = 9.63 \text{ Gyr} \quad \tau_0(\omega = 1/3) = \frac{1}{2} \tau_H = 7.22 \text{ Gyr} \quad (12.46)$$

Ces deux types d'Univers donnent des âges qui sont **incompatibles avec l'observation de certains amas globulaires**, dont les plus vieux ont un âge au moins égal à 11 Gyr.

Univers de de Sitter

On se place maintenant dans le cas de l'**Univers de de Sitter** ($\Omega_{m,0}, \Omega_{r,0}, \Omega_{\Lambda,0}$) = (0, 0, 1) pour lequel la courbure est toujours nulle, mais dont le contenu est uniquement constitué d'énergie noire. On a alors tout simplement¹⁷

$$\left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = y^2 \quad \text{et donc} \quad y = Ae^x \quad (12.47)$$

En imposant $y(x_0) = 1$, on a

$$a = a_0 e^{H_0(\tau - \tau_0)} \quad (12.48)$$

Cet Univers est éternel, aussi bien vers le passé que vers le futur (voir la courbe **3** correspondante sur la Fig. 12.6). Son taux d'expansion H est indépendant du temps, $H = H_0$, la densité est constante, comme on l'a déjà vu ($\rho = \rho_{\Lambda}$) et le paramètre de densité est donc aussi constant, $\Omega = \Omega_0 = 1$. Ce cas de figure est ce qui attend probablement notre Univers dans un futur par si lointain, et qui devait dominer également lors de l'**inflation** dans l'Univers primordial. Notons que la densité d'énergie restant constante alors que l'Univers est en expansion nécessite une **création nette d'énergie**¹⁸

12.2.7 Univers Λ -CDM

Le **modèle de concordance** de la cosmologie actuelle est celui d'un Univers Λ -CDM (Λ -Cold Dark Matter), dans lequel l'essentiel de la densité d'énergie correspond à une constante cosmologique (énergie du vide) $\Omega_{\Lambda,0} = 0.6911$. La matière ordinaire et la matière noire froide, c'est-à-dire non-relativiste et non-collisionnelle, fournissent quant à elles une densité $\Omega_{m,0} = 0.3089$. La contribution du rayonnement, dont on suppose ici qu'elle est limitée à celle du fond diffus cosmologique (CMB) s'écrit

$$\Omega_{r,0} = \frac{8\pi G \rho_{0,r}}{3H_0^2} = \frac{8\pi G u_0}{3H_0^2 c^2} \quad (12.49)$$

17. La solution $y = Ae^{-x}$ n'est pas physique étant donné qu'on observe un Univers en expansion.

18. A. Guth, l'un des fondateurs de la théorie de l'inflation en parle comme de l'*ultimate free lunch*...

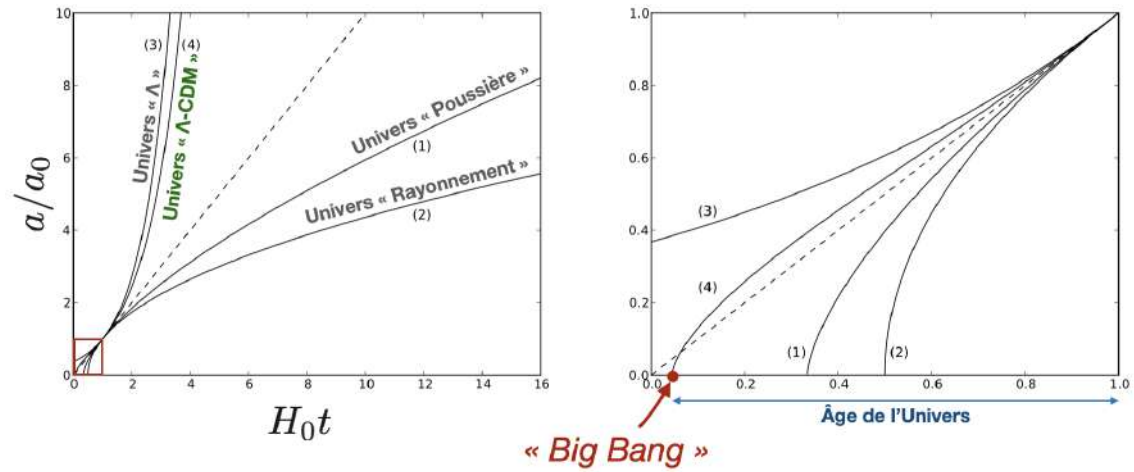


FIGURE 12.6 – **Évolution du facteur d'échelle normalisé $y = a/a_0$ en fonction de $x = H_0\tau$.** Les différents modèles sont présentés avec une origine des temps est déplacée pour chaque modèle de façon à ce que les courbes se superposent en $x = 1$, pris comme époque actuelle, et ce avec la même pente, imposée par la constante de Hubble H_0 . La droite en pointillés $y = x$ est présentée pour référence. **(1)** : $(\Omega_0 = 1, \omega = 0)$ **(2)** : $(\Omega_0 = 1, \omega = 1/3)$ **(3)** : $(\Omega_0 = 1, \omega = -1)$ **(4)** : Λ -CDM

avec u_0 la densité d'énergie du CMB à notre époque. Or le CMB est un corps noir presque parfait dont la température est $T_0 = 2.725$ K. On peut donc écrire

$$\Omega_{r,0} = \frac{8\pi G}{3H_0^2 c^2} \times \frac{4\sigma}{c} T_0^4 = \frac{32\pi G\sigma T_0^4}{3H_0^2 c^3} \quad (12.50)$$

Numériquement, on trouve $\Omega_{r,0} = 4.97 \cdot 10^{-5}$, ce qui est complètement négligeable devant $\Omega_{m,0}$ et $\Omega_{\Lambda,0}$. On a donc au total $\Omega_0 = 1$. L'Univers est effectivement **plat** avec une très bonne approximation, de l'ordre de $5 \cdot 10^{-3}$. L'équation de Friedmann adimensionnée obtenue plus haut prend alors la forme

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{\Omega_{m,0}}{y} + \Omega_{\Lambda,0}y^2 \quad \text{avec} \quad \Omega_{\Lambda,0} = 1 - \Omega_{m,0} \quad (12.51)$$

On peut vérifier sans difficulté que celle-ci admet comme solution $y = a [\sinh(bx)]^{2/3}$, et en insérant cette forme dans l'équation on obtient les valeurs de a et b , ce qui donne

$$a = a_0 \left(\frac{1 - \Omega_{\Lambda,0}}{\Omega_{\Lambda,0}}\right)^{1/3} \left[\sinh\left(\frac{3}{2}\sqrt{\Omega_{\Lambda,0}}H_0\tau\right)\right]^{2/3} \quad (12.52)$$

Exercice 124 : Obtenir la forme (12.52).

L'âge de l'Univers dans le modèle Λ -CDM se calcule comme précédemment en écrivant qu'à l'époque actuelle, $y(x_0) = 1$, ce qui donne un âge

$$\tau_0 = \frac{2}{3H_0\sqrt{\Omega_{\Lambda,0}}} \operatorname{asinh}\left(\sqrt{\frac{\Omega_{\Lambda,0}}{1 - \Omega_{\Lambda,0}}}\right) \quad (12.53)$$

et on a numériquement $\tau_0 = 13.81$ Gyr, qui est très proche de la valeur obtenue par *Planck* (13.799 ± 0.021 Gyr). L'allure de $y(x)$ est représentée sur la courbe **4** de la Fig. 12.6. Les comportements

asymptotiques sont facilement déterminés. D'une part, pour $x \ll 1$, c'est-à-dire aux temps courts, lorsque la matière domine,

$$y \simeq \left(\frac{\Omega_{m,0}}{1 - \Omega_{m,0}} \right)^{1/3} \left(\frac{3}{2} \sqrt{1 - \Omega_{m,0}} x \right)^{2/3} = \Omega_{m,0}^{1/3} \left(\frac{3x}{2} \right)^{2/3} \quad (12.54)$$

qui est au préfacteur $\Omega_{m,0}^{1/3}$ près la forme trouvée dans le cas d'un Univers poussière plat ($\Omega_0 = \Omega_{m,0} = 1$). Inversement, aux temps longs, lorsque la constante cosmologique domine, $x \gg 1$ et donc

$$y \simeq \left[\frac{\Omega_{m,0}}{4(1 - \Omega_{m,0})} \right]^{1/3} \exp(\sqrt{1 - \Omega_{m,0}} x) = \left(\frac{1 - \Omega_{\Lambda,0}}{4\Omega_{\Lambda,0}} \right)^{1/3} \exp(\sqrt{\Omega_{\Lambda,0}} x) \quad (12.55)$$

qui est semblable à la forme trouvée pour l'Univers de de Sitter.

12.2.8 Interprétation des observations

Distances apparentes et redshift

La modèles présentés ci-dessus, appelés collectivement modèles de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW), permettent l'interprétation des observations. En particulier, la lumière issue d'objets lointains subit une focalisation due à la présence de matière sur le chemin parcouru, qu'on exprime en termes de distances apparentes, la **distance angulaire** $D_A(z)$ et la **distance de luminosité** $D_L(z)$, toutes deux calculables au moins numériquement en fonction de l'histoire de l'expansion et donc du redshift z de l'objet¹⁹. Les relations entre ces distances et le redshift (qui mesure l'expansion de l'Univers) peuvent être utilisées de deux manières :

- Si l'on connaît les propriétés intrinsèques des objets, on en déduit les paramètres cosmologiques.
- Si l'on connaît les paramètres cosmologiques, on en déduit les propriétés des objets.

Le redshift est mesuré directement par le rapport entre la longueur d'onde observée et celle émise

$$1 + z = \frac{a_0}{a} = \frac{\lambda_{\text{obs}}}{\lambda_{\text{em}}} \quad (12.56)$$

L'observation, dans le spectre d'objets lointains, de raies dont la longueur d'onde au laboratoire est connue permet de déterminer le redshift. On obtient ainsi, avec des spectromètres à haute résolution, des **redshifts spectroscopiques**. Il est aussi possible d'utiliser des observations en bande large, ce qui fournit des **redshifts photométriques**, moins précis.

Distance propre

Considérons la propagation radiale d'un signal lumineux, pour lequel on a donc

$$ds^2 = 0 = -c^2 d\tau^2 + a^2(\tau) [d\chi^2 + S_k^2(\chi)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)] = -c^2 d\tau^2 + a^2(\tau) d\chi^2 \quad (12.57)$$

de sorte que $d\chi = -cd\tau/a$ (le choix du signe représente le fait que l'observateur se trouve au centre des coordonnées). On a alors

$$dz = d(1 + z) = -\frac{a_0}{a^2} da = -\frac{a_0}{a^2} \dot{a} d\tau = -\frac{a_0}{a} H d\tau = \frac{a_0}{c} H d\chi \quad (12.58)$$

ce qui donne la **distance propre** $D_p(z) = a_0 \chi(z)$ entre l'époque actuelle et un redshift donné z comme

$$D_p(z) = \int_0^z \frac{cdz}{H(z)} = \int_0^z \frac{cdz}{H_0 \left[\Omega_{m,0} (1+z)^3 + \Omega_{r,0} (1+z)^4 + \Omega_{\Lambda,0} + \Omega_{k,0} (1+z)^2 \right]^{1/2}} \quad (12.59)$$

19. Ces distances répondent aux questions suivantes : "À quelle distance devrait se trouver un objet de luminosité ou de taille donnée, dans un univers vide, pour apparaître avec une telle densité spectrale de flux ou une telle taille angulaire calculée dans un modèle avec cette métrique?"

qu'on peut calculer au moins numériquement, et qui converge dès lors que l'Univers contient matière ou radiation. Une illustration parlante, quoiqu'académique, de ce calcul est celui de l'Univers d'Einstein-de Sitter $(\Omega_{m,0}, \Omega_{r,0}, \Omega_{\Lambda,0}, \Omega_{k,0}) = (1, 0, 0, 0)$. On obtient alors

$$D_p(z) = \frac{2c}{H_0} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+z}} \right) \quad (12.60)$$

À bas redshift, la distance propre croît linéairement avec le redshift, on retrouve la loi de Hubble. On la retrouve d'ailleurs pour l'ensemble des modèles. La distance propre jusqu'à $z = \infty$ s'appelle l'**horizon**, et elle est finie ($D_p(\infty) = 2c/H_0$).

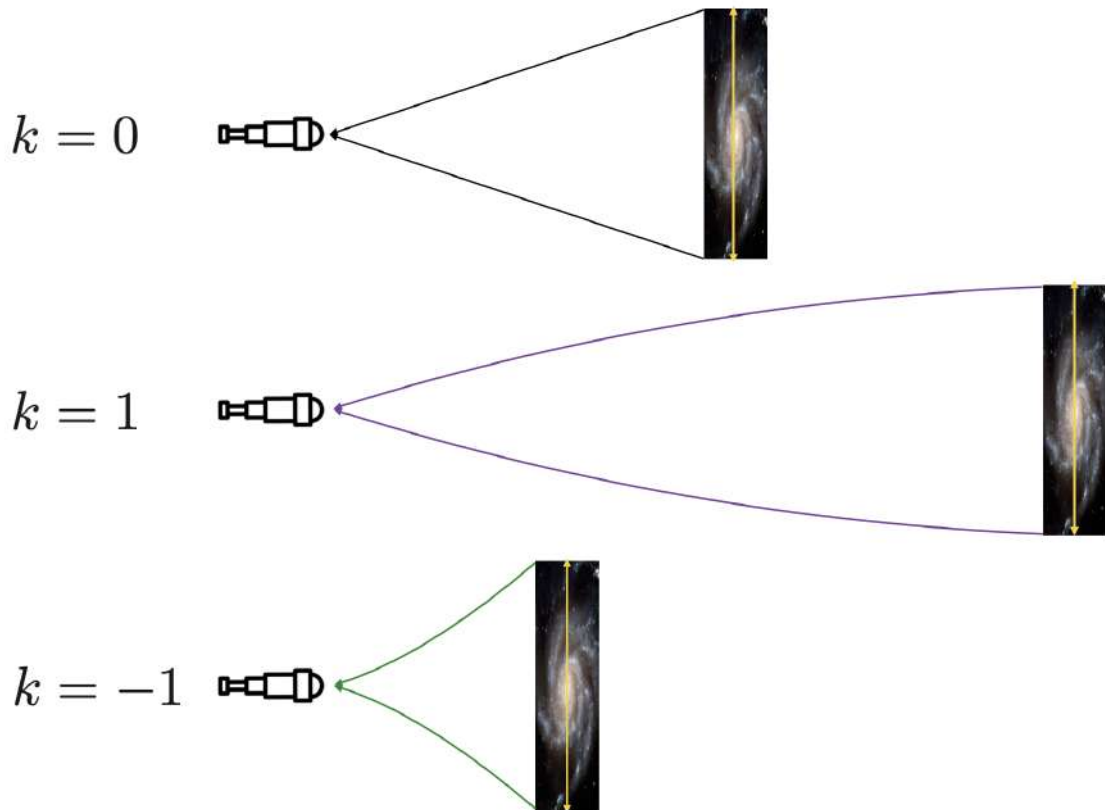


FIGURE 12.7 – **La distance apparente angulaire.** Une galaxie de même taille physique apparaissant avec une même taille angulaire peut être à des distances différentes en fonction de la courbure de l'espace.

Distance angulaire

Supposons qu'on observe une galaxie au redshift z , qui présente une taille angulaire $d\theta$ sur le ciel. Quelle est la taille physique dl correspondante ? Pour la calculer, imaginons deux photons émis au même temps τ aux deux bouts de la galaxie, et se propageant jusqu'à nous. Ils partent de la même distance χ et on peut choisir le système de coordonnées de telle manière que $d\phi = 0$. On a donc la taille propre de la galaxie comme $dl = ds$ avec

$$ds^2 = -c^2 d\tau^2 + a^2(\tau) [d\chi^2 + S_k^2(\chi)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)] = a^2(\tau) S_k^2(\chi) d\theta^2 \quad (12.61)$$

On a donc $dl = a[\tau(z)]S_k[\chi(z)]d\theta$ et on en tire l'expression de la **distance angulaire**

$$D_A(z) = a[\tau(z)]S_k[\chi(z)] \quad (12.62)$$

Avec un univers à courbure nulle comme ce qui semble être le cas, on a $S_k[\chi(z)] = \chi(z)$ et donc

$$D_A(z) = \frac{a_0}{1+z}\chi(z) = \frac{D_p(z)}{1+z} = \frac{1}{1+z} \int_0^z \frac{cdz}{H(z)} \quad (12.63)$$

Il s'agit d'un résultat très puissant. Il existe en effet une "règle standard" assez précise, les **oscillations acoustiques des baryons (BAO)**, qui est imprimée dans la distribution spatiale des galaxies et qu'on peut donc mesurer. Cela permet une détermination de $D_A(z)$ en fonction du redshift et contraint donc puissamment le modèle cosmologique, en renforçant notamment le besoin d'une énergie noire. Les BAO peuvent être ainsi utilisés en conjonction avec les mesures du CMB pour contraindre les paramètres cosmologiques.

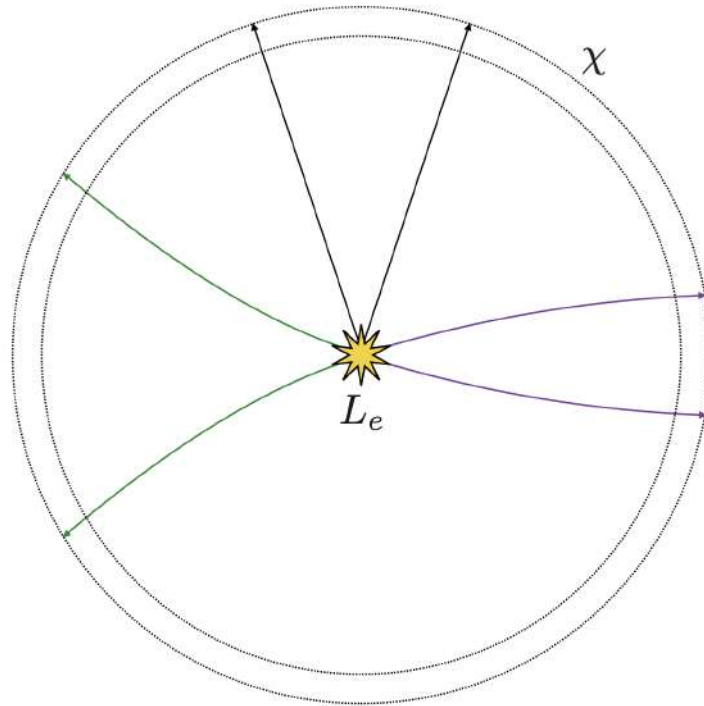


FIGURE 12.8 – La distance apparente de luminosité.

Distance de luminosité

Une notion de distance peut également être associée au flux apparent d'une source. Dans un univers plat et pour une source de luminosité intrinsèque L , on mesure, à la distance D de la source, un flux $F = L/(4\pi D^2)$, ce qui donne une **distance de luminosité**

$$D_L(z) = \sqrt{\frac{L}{4\pi F}} \quad (12.64)$$

On peut relier cette distance aux deux autres déjà définies, en considérant une source à l'origine des coordonnées ($\chi = 0$) et en plaçant un ensemble d'observateurs sur une coquille sphérique à la distance

χ . La source émet N photons de fréquence ν_e pendant un intervalle de temps (dans son référentiel propre) $\tau_e = 1/\nu_e$. Sa luminosité intrinsèque est donc $L_e = Nh\nu_e/\tau_e = Nh\nu_e^2$. Les photons sont conservés en l'absence d'interaction avec le milieu, donc ce sont les mêmes photons qui traversent la coquille sphérique à la distance χ pendant un temps $\tau_o = (1+z)\tau_e$, et chacun de ces photons porte une énergie $h\nu_o = h\nu_e/(1+z)$, de sorte que l'énergie traversant la surface par unité de temps est $L_o = Nh\nu_o/\tau_o = Nh\nu_o^2 = L_e/(1+z)^2$. Cette surface valant $A = 4\pi a_0^2 S_k^2[\chi(z)] = 4\pi a^2(z)(1+z)^2 S_k^2[\chi(z)]$, le flux est

$$F = \frac{L_o}{A} = \frac{L_e}{(1+z)^4} \frac{1}{4\pi a^2(z) S_k^2[\chi(z)]} \quad (12.65)$$

ce qui donne la **distance de luminosité** comme

$$D_L(z) = \sqrt{\frac{L_e}{4\pi F}} = (1+z)^2 a(z) S_k[\chi(z)] = (1+z)^2 D_A(z) \quad (12.66)$$

Notons que pour une source donnée, de taille dl et de luminosité L , on a une taille angulaire sur le ciel $d\Omega \propto dl^2/D_A^2$ et un flux $F \propto L/D_L^2$, ce qui donne une intensité intégrée $I \propto F/d\Omega \propto (D_A/D_L)^2 \propto (1+z)^{-4}$. On parle de **surface-brightness dimming** pour cette perte d'intensité²⁰

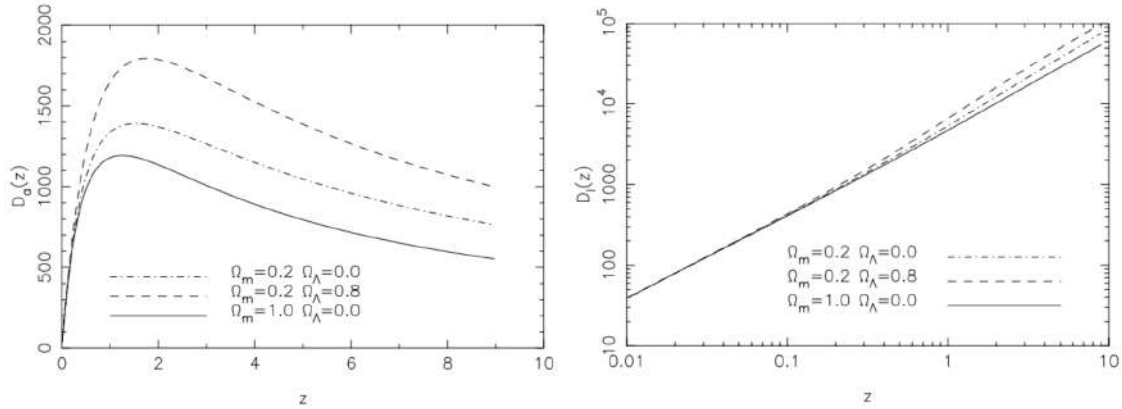


FIGURE 12.9 – **Distances angulaire et de luminosité.** Les courbes présentent les deux distances en fonction du redshift, pour différents modèles cosmologiques.

Le paramètre de décélération

Les modèles FLRW prédisent la linéarité entre la distance et le redshift, c'est-à-dire la loi de Hubble, pour les très bas redshifts $z \ll 1$

$$D \propto z \quad (12.67)$$

Tous les observateurs se perçoivent comme étant au "centre de l'univers", et l'observable clé est la "constante" de Hubble H_0 , qui est essentiellement l'inverse de l'âge de l'Univers. Toujours à bas redshift, mais un peu plus élevés, on va commencer à voir des déviations à cette loi linéaire, paramétrées par le **paramètre de décélération**

$$q_0 = -\frac{a_0 \ddot{a}_0}{\dot{a}_0^2} \quad (12.68)$$

Aux débuts de la cosmologie, il s'agissait essentiellement de déterminer ces deux valeurs :

- H_0 , pour déterminer à quelle vitesse l'Univers s'étendait,

20. Notons que cette évolution avec le redshift pour l'intensité intégrée est cohérente avec le fait que I_ν/ν^3 soit un invariant relativiste.

— q_0 , pour déterminer à quel taux cette expansion ralentissait.

À la fin des années 1990, la mesure d'un grand nombre de supernovæ de type Ia a permis aux groupes de S. Perlmutter et B. Schmidt de montrer que, de manière tout à fait surprenante, $q_0 < 0$, c'est à dire que l'expansion est accélérée. En effet, les supernovæ à $z \gtrsim 0.2$ ont une distance apparente plus grande que celle prédite dans les modèles cosmologiques ne contenant que de la matière normale et la distance observée est mieux ajustée par les modèles avec une constante cosmologique Λ ou avec de l'énergie noire, avec $\Omega_{\Lambda,0} \approx 0.7$. La raison pour laquelle **l'accélération entraîne une augmentation de la distance apparente** peut être comprise comme suit. Toutes les distances impliquent l'intégrale

$$\chi(z) = \frac{c}{a_0} \int_0^z \frac{dz}{H(z)} \quad (12.69)$$

et dans les modèles d'Univers plat, toutes ces distances sont simplement reliées les unes aux autres par des facteurs du type $(1+z)^\alpha$. Imaginons alors deux modèles, l'un de référence avec une loi d'expansion $H_1(z)$, et un autre avec $H_2(z)$, accéléré par rapport au premier, c'est-à-dire que $H_2(z) = H_1(z)$ pour l'Univers local $z < z_*$ mais $H_2(z) < H_1(z)$ pour $z > z_*$ (l'expansion étant moins rapide initialement). On a alors, pour une source située à un redshift $z > z_*$,

$$\frac{a_0}{c} \chi_2(z) = \int_0^z \frac{dz}{H_2(z)} > \int_0^z \frac{dz}{H_1(z)} = \frac{a_0}{c} \chi_1(z) \quad (12.70)$$

La déviation observée sur le panneau de droite de la Fig. 12.2 indique ainsi que l'expansion de l'Univers est bien accélérée.

12.3 Le modèle du Big Bang et l'inflation

La découverte de l'expansion de l'Univers amena très vite à s'interroger sur son histoire, et notamment sur la possibilité qu'il ait pu connaître à une époque reculée une période où il était très dense et très chaud. Cette idée ne fut pas rapidement acceptée²¹ et beaucoup défendirent l'idée d'un Univers statique. Le terme de "**Big Bang**" est d'ailleurs dû à Fred Hoyle, qui y voyait une manière de tourner en dérision l'idée d'un "commencement de l'Univers". Pourtant, cette théorie repose non seulement sur l'observation de l'expansion, mais également sur la mesure de l'abondance des éléments légers, formés lors de la **nucléosynthèse primordiale** et l'observation d'un rayonnement presque parfaitement isotrope emplissant l'Univers, le **fond diffus cosmologique** (CMB)

12.3.1 Le fond diffus cosmologique

Origine du rayonnement

Prédit en 1948 par R. Alpher et R. Herman, le CMB est constitué des photons qui peuplaient le plasma chaud à des redshifts $z \gtrsim 1100$, en compagnie des noyaux et des électrons libres. Dans ce plasma, les photons sont diffusés efficacement par les électrons par **diffusion Thomson**, leur libre parcours moyen étant très court. Le plasma est donc opaque. Aux alentours de $z \approx 1100$, soit environ 370 000 ans après le Big Bang, les électrons et les noyaux se recombinent (on parle de la **recombinaison** ou du **découplage** de la matière et du rayonnement), de sorte que les photons ne sont plus efficacement diffusés et peuvent se propager librement, l'Univers devient transparent. Le gaz de photons peut être traité comme un corps noir, dont la densité d'énergie $u = \rho c^2$ varie en $a^{-4} \propto (1+z)^4$ comme on l'a vu plus haut. Or pour un corps noir $u \propto T^4$, de sorte que la température de ce rayonnement est

$$T(z) = T_{\text{CMB}}(1+z) \quad (12.71)$$

21. Les convictions religieuses de G. Lemaître, physicien mais aussi abbé catholique, qui défendait cette idée, semblaient former un conflit d'intérêt pour de nombreux physiciens d'alors.

où T_{CMB} est la température qu'on observerait actuellement. Ce rayonnement, semblant parfaitement isotrope, a été détecté par hasard en 1965 par A. A. Penzias et R. W. Wilson, et les mesures ultérieures, notamment avec le satellite COBE, ont montré qu'il présentait une distribution spectrale de corps noir, avec $T_{\text{CMB}} \approx 2.725 \text{ K}$ (voir la Fig. 3.5). Il s'agit du rayonnement électromagnétique le plus lointain observable, correspondant à la **surface de dernière diffusion** des photons sur les électrons libres avant la recombinaison.

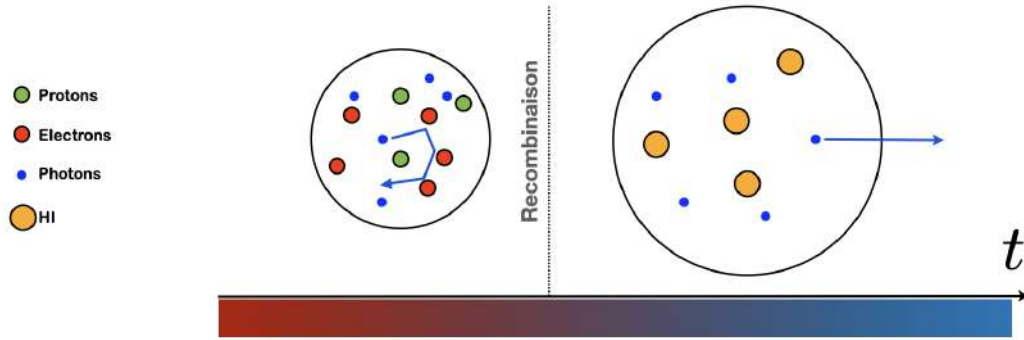


FIGURE 12.10 – La recombinaison.

Redshift du découplage

On peut calculer le redshift z_d auquel a lieu la recombinaison en considérant pour simplifier un plasma d'hydrogène seulement et en partant de la **loi de Saha** (Eq. 3.35)

$$\frac{y^2}{1-y} = \frac{1}{n_{\text{H}} \Lambda_e^3} \exp\left(-\frac{\chi_0}{k_B T}\right) \quad (12.72)$$

où $y = n(\text{H}^+)/n_{\text{H}}$ est le degré d'ionisation, $\chi_0 = 13.6 \text{ eV}$ est le potentiel d'ionisation, et Λ_e est la **longueur d'onde thermique de de Broglie des électrons**

$$\Lambda_e = \frac{h}{\sqrt{2\pi m_e k_B T}} \quad (12.73)$$

La densité totale d'hydrogène varie avec le redshift du fait de l'expansion comme $n_{\text{H}} \propto (1+z)^{-3}$. D'autre part, la température du CMB est liée au redshift par $T_{\text{CMB}} \propto (1+z)$. Le découplage correspond au moment où le milieu passe d'entièrement ionisé ($y \simeq 1$) à entièrement neutre ($y \simeq 0$), et on cherche une estimation du redshift z_d auquel a lieu cette transition. En posant $n_b \simeq 0.25 \text{ m}^{-3}$ la densité de matière baryonique dans l'Univers actuel, on montre alors que z_d est solution de

$$\frac{1}{2} = \frac{(2\pi m_e k T_{\text{CMB}})^{3/2}}{n_b (1+z_d)^{3/2} h^3} \exp\left(-\frac{\chi_0}{k T_{\text{CMB}} (1+z_d)}\right) \quad (12.74)$$

En insérant les valeurs numériques, on a

$$1 = \frac{5.43 \times 10^{21}}{(1+z_d)^{3/2}} \exp\left(-\frac{5.8 \times 10^4}{(1+z_d)}\right) \quad (12.75)$$

La résolution numérique de cette équation donne $z_d \simeq 1480$, ce qui est une estimation raisonnable²² et correspond à une température $T_d \simeq 4000 \text{ K}$ (Fig. 12.11) et $n_d \simeq 8 \times 10^8 \text{ m}^{-3}$.

Exercice 125 : Établir l'équation implicite sur z_d (Eq. 12.74).

22. En réalité, on a plutôt $z_d \simeq 1100$.

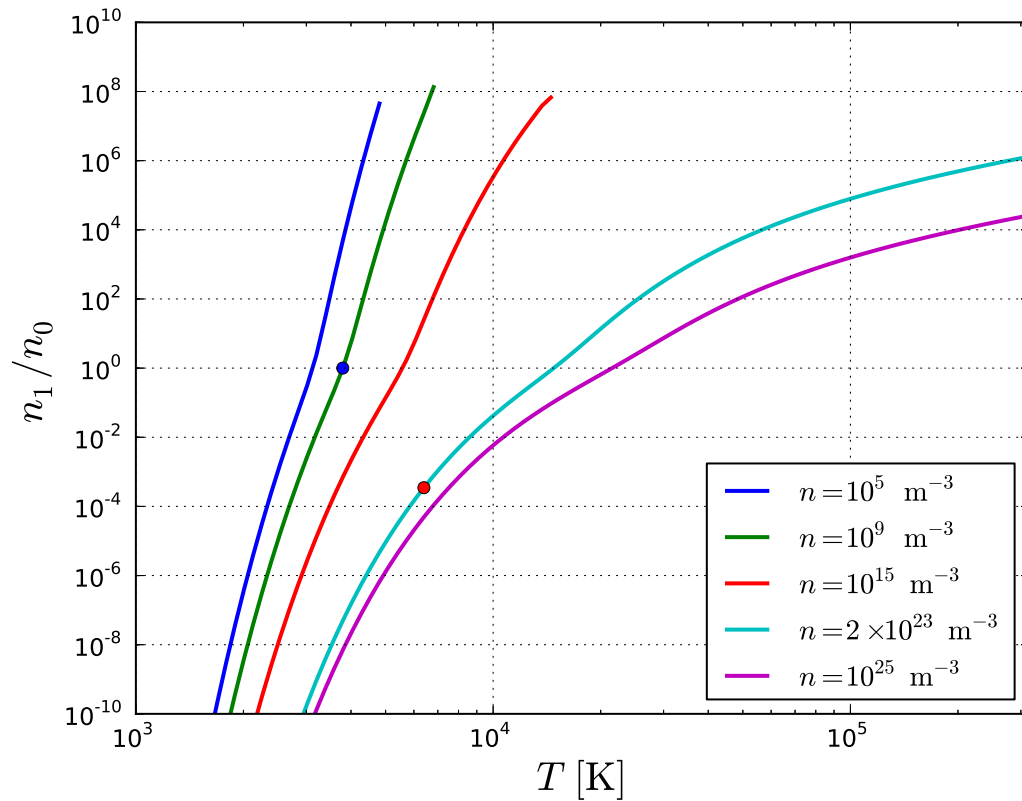


FIGURE 12.11 – Rapport $n_1/n_0 = n(\text{H}^+)/n(\text{H})$ d'un plasma d'hydrogène en fonction de la température, pour plusieurs densités totales $n = n_{\text{H}}$. Le cas de la photosphère Solaire ($T = 6400 \text{ K}$) est représenté par le point rouge, celui du découplage ayant donné naissance au CMB par le point bleu.

Le dipôle du CMB

Le spectre d'émission du CMB n'est isotrope que pour un observateur fixe dans le référentiel lié à la source du CMB. Pour un observateur se déplaçant à la vitesse \vec{v} dans ce référentiel, on montre que le spectre observé dans une direction d'observation \vec{n} faisant un angle ϑ avec \vec{v} est également un spectre de corps noir, mais à la température

$$T(\vartheta) = T_{\text{CMB}} \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c} \cos \vartheta} \quad (12.76)$$

Exercice 126 : Démontrer ce résultat en partant du fait que le rapport I_ν/ν^3 est un invariant relativiste, conservé dans le changement de référentiel à considérer.

Comme $v \ll c$, on peut faire un développement limité de $T(\vartheta)$ au premier ordre en v/c

$$T(\vartheta) \simeq T_{\text{CMB}} \left(1 + \frac{v}{c} \cos \vartheta \right) \quad (12.77)$$

ce qui montre que, suivant que l'observateur regarde dans la direction de son mouvement par rapport

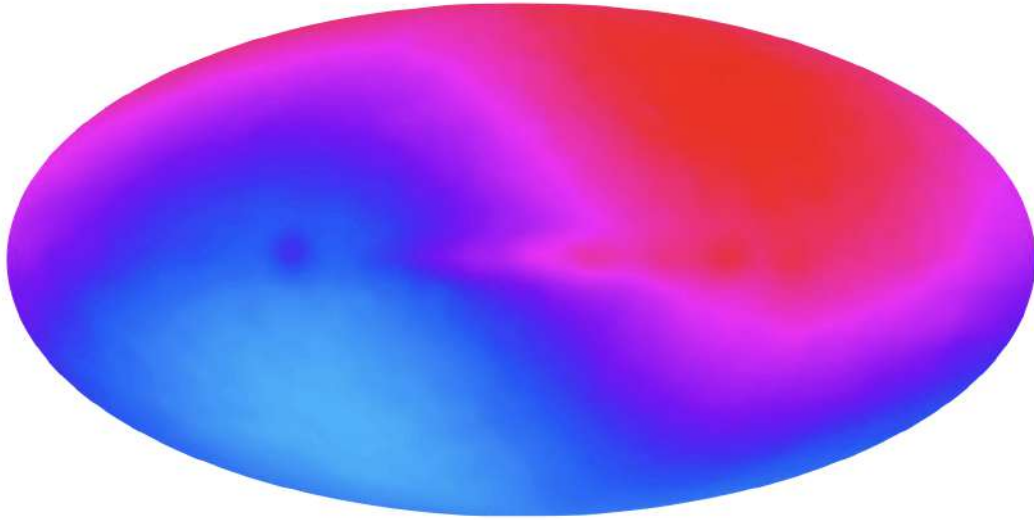


FIGURE 12.12 – **Emission du corps noir cosmologique (CMB) montrant l'effet de dipôle.** L'échelle des couleurs va de -2.5 mK (bleu) à +3.5 mK (rouge) autour de la valeur moyenne de l'émission du CMB. Crédit : DMR/COBE/NASA.

au CMB ou dans la direction opposée, il observera un corps noir cosmologique plus chaud ou plus froid. C'est ce qui est représenté sur la Fig. 12.12, issue des mesures de COBE.

Exercice 127 : Sachant que le satellite WMAP a mesuré l'amplitude crête-à-crête du dipôle et a trouvé $\Delta T_{\text{dipole}} = 6.692 \text{ mK}$, en déduire la vitesse v du système solaire par rapport au référentiel du CMB. Quels mouvements composent cette vitesse ?

Après correction de cet effet systématique, le rayonnement du fond diffus cosmologique n'est cependant pas parfaitement isotrope : il présente des fluctuations relatives $\delta T_{\text{CMB}}/T_{\text{CMB}} \sim 10^{-5}$. Ces **fluctuations primordiales** sont interprétées comme étant les graines à partir desquelles se sont formées les grandes structures de l'Univers. Leur répartition angulaire fournit des contraintes fortes aux modèles cosmologiques (Fig. 12.13).

12.3.2 La nucléosynthèse primordiale

La température actuelle du CMB étant proche de 2.7 K, elle correspond à une énergie de l'ordre de $2.3 \cdot 10^{-4} \text{ eV}$, et le rapport des densités du rayonnement et de la matière est $\rho_{r,0}/\rho_{m,0} \approx 1.6 \cdot 10^{-4}$, avec une évolution en $1+z$, de sorte qu'à $z = z_e \approx 6200$, les deux fluides avaient des densités identiques, la radiation dominant aux époques antérieures²³. À cette époque, le taux d'expansion est donné par

$$H_e^2 = H_0^2 [\Omega_{m,0}(1+z_e)^3 + \Omega_{r,0}(1+z_e)^4] = 2H_0^2 \Omega_{m,0}(1+z_e)^3 \quad (12.78)$$

en négligeant la constante cosmologique et la courbure, qui sont alors sous-dominantes. On en tire $H_e \approx 3.8 \cdot 10^5 H_0$ et un âge $\tau_e \sim 1/H_e \approx 1.2 \cdot 10^{12} \text{ s} \approx 4 \cdot 10^4 \text{ an}$ assez nettement antérieur au découplage. Avant cette date, on a un Univers dominé par la radiation, avec²⁴

$$a \propto \tau^{1/2} \quad \rho \propto a^{-4} \propto \tau^{-2} \quad T \propto \tau^{-1/2} \quad (12.79)$$

23. L'équivalence matière-rayonnement précède donc assez nettement leur découplage.

24. On rappelle que pour la radiation, $T \propto 1+z \propto a^{-1}$.

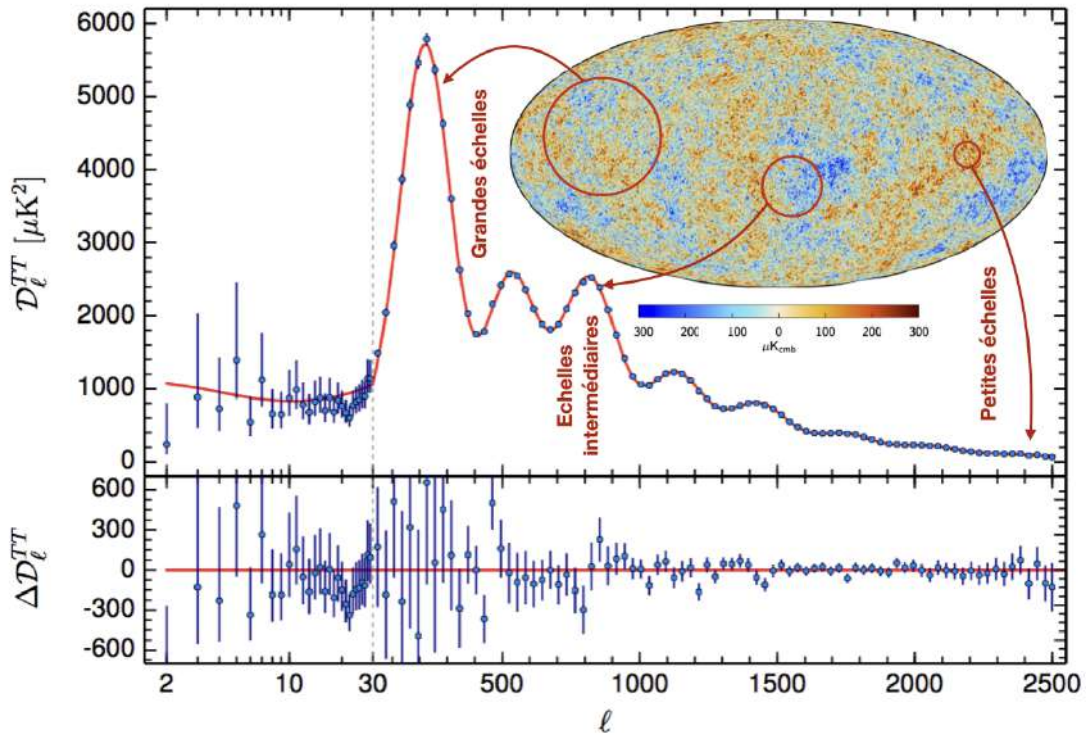


FIGURE 12.13 – **Les fluctuations du CMB.** La carte en insert représente les fluctuations de température du CMB, de l'ordre de $\delta T_{\text{CMB}}/T_{\text{CMB}} \sim 10^{-5}$. Leur répartition angulaire est quantifiée par le **spectre de puissance** représenté par les points de donnée en bleu. Chaque point représente la puissance présente dans le signal à une certaine échelle angulaire ℓ , les plus grandes valeurs de ℓ correspondant aux plus petites échelles. La courbe en rouge est un ajustement par le **modèle Λ -CDM à six paramètres**. On en tire des valeurs extrêmement précises de ces paramètres, notamment de la constante de Hubble. Figure adaptée de [2].

On peut alors **relier directement l'âge de l'Univers à sa température**. Comme à $\tau_e \sim 10^{12}$ s la température est de l'ordre de 12000 K (soit $k_B T \sim 1$ eV), on en déduit que pour un âge $\tau \sim 100$ s, on accède à des énergies de l'ordre de 0.1 MeV, proche des échelles d'énergie des réactions nucléaires. Lorsque la température est suffisamment élevée pour que $k_B T > \Delta E$, avec $\Delta E \approx 1.5$ MeV la différence d'énergie de masse entre un proton et un neutron ($m_p < m_n$), la formule de Boltzmann impose qu'il y ait autant de protons que de neutrons dans le milieu. De même, l'énergie de liaison de l'hélium étant 28 MeV, si la température est suffisante, l'abondance des noyaux d'hélium est très faible. Lorsque l'Univers se refroidit en s'étendant, l'équilibre $n \rightleftharpoons p$ est décalé vers les protons, les neutrons sont enfermés dans les noyaux d'hélium (et des traces de lithium et de deutérium), ceux restant libres se désintégrant en protons avec une demi-vie de ~ 880 s. Les calculs précis montrent que le rapport final entre le nombre de neutrons et celui de protons est de $n_n/n_p \approx 1/7$ correspondant à une abondance de 25% d'hélium en masse. Ce résultat, prédit par Alpher, Bethe et Gamow en 1948, constitue la **nucléosynthèse primordiale** et explique l'abondance observée de l'hélium dans les étoiles de très faible métallicité, qui n'était pas comprise jusqu'alors. L'abondance d'autres éléments légers (D, ^3He , ^7Li notamment) dépend aussi de la densité des baryons (c'est-à-dire de la matière ordinaire), correspondant à un paramètre de densité à l'époque actuelle Ω_b . Les mesures d'abondances indiquant toutes que

$\Omega_b \approx 0.04 - 0.05$, significativement plus faible que $\Omega_{m,0} \approx 0.3$, on a ici aussi²⁵ besoin de faire appel à de la **matière noire non-baryonique**.

12.3.3 L'inflation

Les modèles FLRW et celui du Big Bang expliquent remarquablement la présence d'un fond diffus de radiation et les abondances des éléments dans les étoiles de première génération, mais dans les années 1970, certaines difficultés se firent jour.

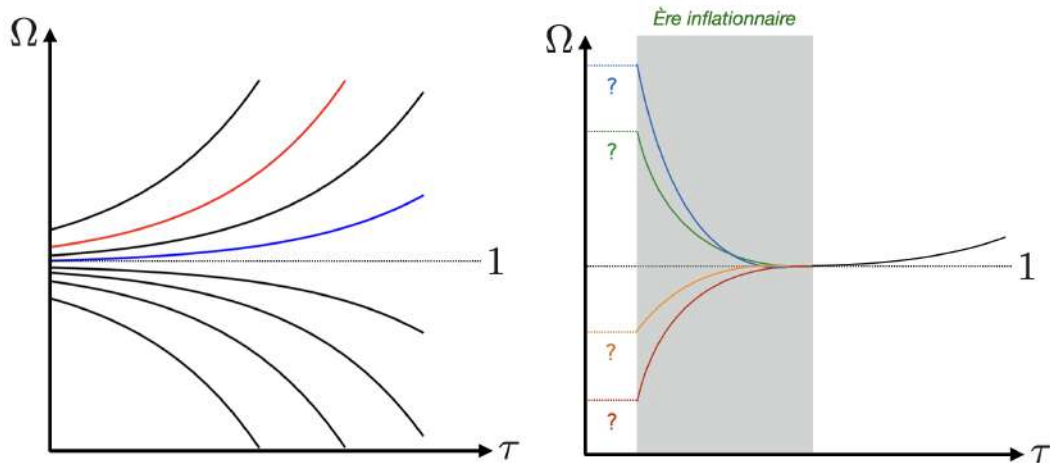


FIGURE 12.14 – **Le problème de la courbure**. La figure de gauche présente le problème dans le cadre du modèle du Big Bang, et celle de droite présente la résolution dans le paradigme de l'inflation.

Le problème de la courbure

Le **problème de la courbure** (*flatness problem* en anglais) est un problème de **réglage fin**, signifiant que les observables semblent pointer, dans le cadre du modèle cosmologique considéré, vers un réglage particulièrement précis des conditions de l'Univers primordial, ce qui est hautement improbable. En l'occurrence, le paramètre apparemment réglé trop finement est la densité de matière de l'Univers. Pour comprendre ce problème, mis en évidence pour la première fois par R. Dicke en 1969, on réécrit la première équation de Friedmann sous la forme

$$\left(\frac{1}{\Omega} - 1\right) \rho a^2 = -\frac{3kc^2}{8\pi G} \quad (12.80)$$

en introduisant la densité critique et le paramètre de densité

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G} \quad \Omega = \frac{\rho}{\rho_c} \quad (12.81)$$

Exercice 128 : Établir la forme (12.80) de l'équation de Friedmann.

Le membre de droite est une constante, et dans celui de gauche, le produit ρa^2 augmente lorsque a diminue (que l'Univers soit dominé par la matière ou par le rayonnement). Depuis l'**ère de Planck**, on estime que ρa^2 a diminué d'un facteur 10^{60} de sorte que l'autre facteur a dû augmenter du même

25. La matière noire est invoquée pour expliquer des phénomènes bien plus proches de nous, à savoir les courbes de rotation des galaxies et la dispersion de vitesse des amas de galaxies.

facteur. La mesure de Ω_0 à l'époque actuelle peut se faire à partir des anisotropies du CMB ou des mesures de supernovæ, et elles indiquent que $|\Omega_0 - 1| \leq 0.01$. Il fallait donc qu'à l'époque de Planck on ait $\Omega = 1$ à mieux que 10^{-62} , ce qui est difficilement acceptable (Fig. 12.14, gauche). En effet, un très petit écart de Ω par rapport à 1 dans l'Univers primordial aurait été amplifié énormément pendant les milliards d'années d'expansion, de sorte que la densité actuelle aurait dû être très éloignée de la densité critique²⁶.

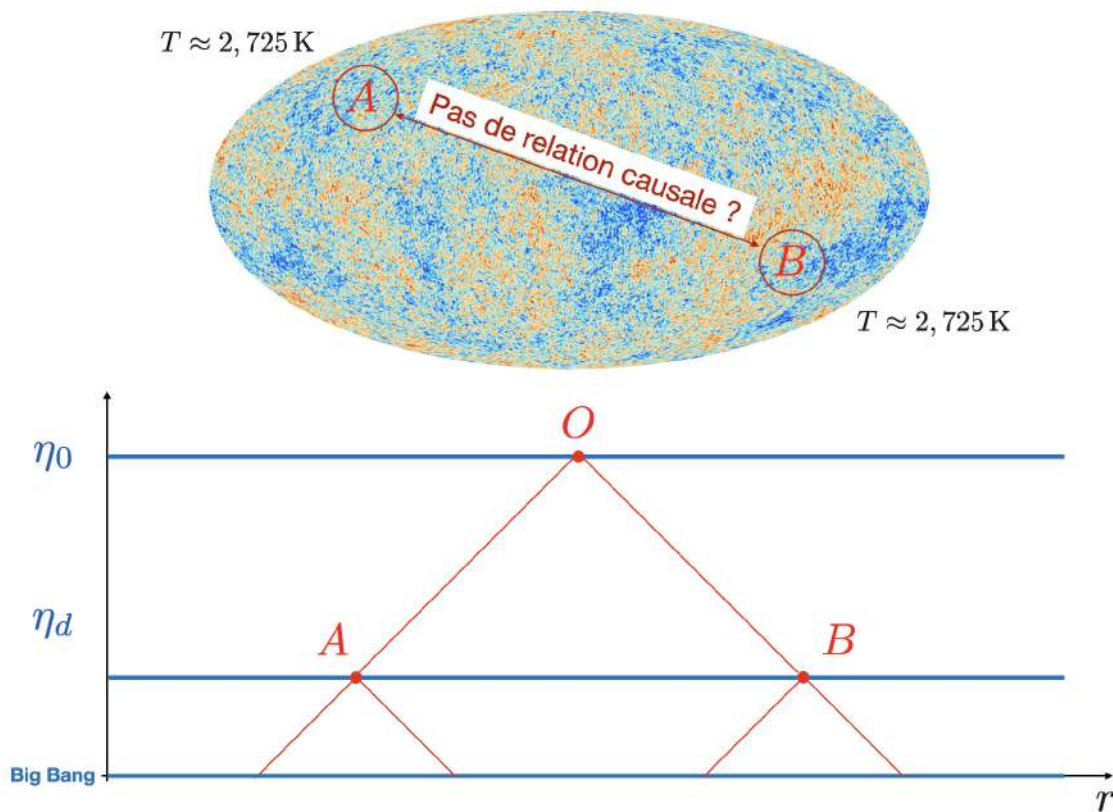


FIGURE 12.15 – **Le problème de l'horizon.** Les conditions physiques aux points A et B sur la surface de dernière diffusion sont déterminées par leur histoire, incluse dans leurs cônes de lumière depuis le Big Bang, qui ne se recouvrent pas et ne peuvent donc imposer l'homogénéité en A et B . Figure adaptée de [2].

Le problème de l'horizon

L'apparente isotropie du CMB, à mieux que 10^{-5} près, pose quant à elle un problème majeur de causalité, appelé **problème de l'horizon**, soulevé par W. Rindler en 1956. Le principe est relativement simple à comprendre : imaginons deux galaxies dans des directions opposées du ciel par rapport à la terre, toutes deux situées à 10 milliards d'années-lumière. Leur distance relative est donc de 20 milliards d'années-lumière, et elles n'ont pu être en contact causal étant donné l'âge de l'Univers (13.6 milliards d'années). La surface de dernière diffusion, plus lointaine encore, ne devrait pas présenter une uniformité aussi remarquable ! Il faut qu'à un moment dans le passé ces régions aient été causalement connectées.

26. Si initialement $\rho > \rho_c$ même par un tout petit écart, l'Univers serait aujourd'hui si dense qu'il aurait cessé de s'étendre et se serait effondré dans un **Big Crunch**. Inversement, si $\rho < \rho_c$ l'Univers se serait étendu trop rapidement pour pouvoir former les galaxies...

Pour préciser les choses, on écrit que la distance physique qu'un signal lumineux peut parcourir pendant un temps d'expansion $\tau \sim 1/H$ est $r = c\tau \sim c/H$, ce qui donne un **horizon comobile** $c\tau/a$. Or a varie, dans une ère dominée par la matière ou par la radiation, comme $\tau^{2/3}$ ou $\tau^{1/2}$. On a donc un horizon comobile dont la taille tend vers zéro lorsque $\tau \rightarrow 0$. La distance sur laquelle la lumière, et donc toute influence causale, peut se propager se réduit à zéro plus rapidement que la taille de l'univers lui-même... C'est particulièrement ennuyeux pour justifier que des régions différentes du ciel présentent la même température du CMB. Un calcul plus précis montre que pour $z_d \approx 1100$ la taille angulaire de l'horizon sur le ciel est d'environ 2° . Deux régions séparées angulairement par une distance plus grande ne peuvent avoir été en contact causal, comme le schématise la Fig. 12.15.

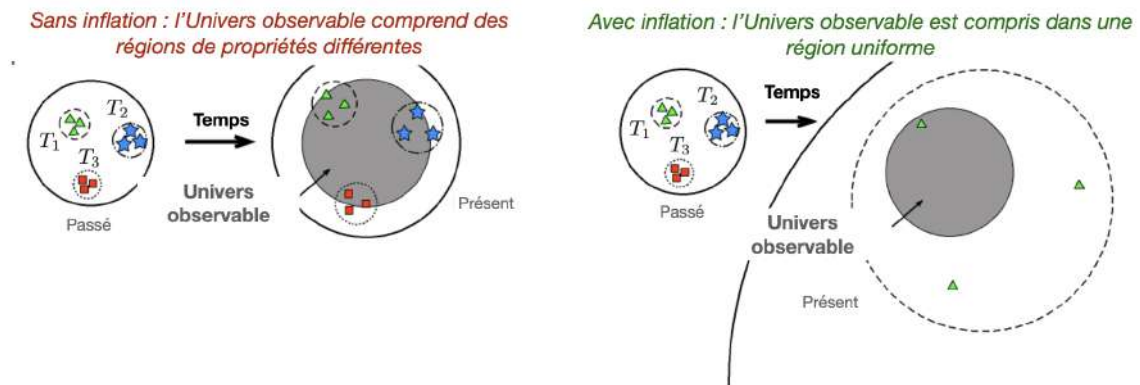


FIGURE 12.16 – Le paradigme de l'inflation. Figure adaptée d'un schéma de N. Strobel.

La solution par l'inflation

Le problème de l'horizon a pour origine le fait que le rapport $c\tau/a$ tend vers zéro aux temps courts parce que l'expansion de l'Univers est décélérée pour un contenu de matière ou de radiation. Si l'on avait $a \propto \tau^\gamma$ avec $\gamma > 1$, donc une accélération de l'expansion, le problème serait résolu. C'est l'une des raisons qui ont rendu populaire le paradigme de l'**inflation cosmique**, introduit par A. Guth²⁷. Il postule l'existence d'une période d'expansion exponentielle $a \propto e^{\lambda\tau}$ pendant 10^{-32} s, au cours de la première seconde de l'histoire de l'Univers, due à la présence d'un **champ scalaire**, l'inflaton²⁸. La taille de l'Univers aurait alors augmenté d'un facteur 10^{22} à partir d'une toute petite région en équilibre thermique et donc reliée causalement. Toutes les parties de cette région se sont alors retrouvées isolées les unes des autres, mais elles étaient en contact avant l'inflation. Le CMB étant observé après l'inflation, il a conservé l'équilibre pré-inflationnaire, ce qui explique son homogénéité. La théorie prédit que les fluctuations à l'homogénéité présentent un **spectre de puissance** parfaitement en accord avec les observations des satellites WMAP et Planck (Fig. 12.13). L'inflation permet aussi de résoudre le problème de la courbure. Avec une densité ρ constante, le facteur ρa^2 dans (12.80) croît exponentiellement avec le temps, et l'autre facteur $(\Omega^{-1} - 1)$ doit donc décroître. Ainsi il peut prendre à peu près n'importe quelle valeur initialement, il tendra extrêmement rapidement vers 0 à la fin de l'inflation. Il recommencera à augmenter ensuite, mais il n'est plus nécessaire de supposer qu'il était quasi nul lorsque $\tau \rightarrow 0$ (Fig. 12.14, droite). L'ère inflationnaire prend fin avec un **réchauffement** (*reheating* en anglais) au cours duquel la densité d'énergie du champ scalaire est convertie en énergie thermique du plasma, avec une transition vers une ère dominée par la radiation puis une ère dominée par la matière. Les fluctuations quantiques du champ de l'inflaton sont elles aussi étendues à des échelles

27. Guth travaillait alors sur les théories de grande unification des forces fondamentales de la nature, au moyen de champs scalaires, et c'est en écoutant R. Dicke présenter les problèmes actuels de la cosmologie en 1979 qu'il réalisa que ce type de champ pouvait potentiellement résoudre le problème de l'horizon et de la courbure.

28. La nature de ce champ est encore fortement débattue, ce qui constitue un des défauts de la théorie inflationnaire.

macroscopiques et laissent une signature dans les fluctuations du CMB, à partir desquelles se forment ensuite les grandes structures de l'Univers (galaxies, amas, super-amas, . . .)

Bibliographie

- [1] J. D. Jackson, *Classical electrodynamics*. New York, NY : Wiley, 3rd ed. ed., 1999.
- [2] Planck Collaboration, “Planck 2015 results. I. Overview of products and scientific results,” *A&A*, vol. 594, p. A1, Sept. 2016.
- [3] B. T. Draine, *Physics of the Interstellar and Intergalactic Medium*. 2011.
- [4] E. A. Bergin, T. G. Phillips, C. Comito, N. R. Crockett, D. C. Lis, P. Schilke, S. Wang, T. A. Bell, G. A. Blake, B. Bumble, E. Caux, S. Cabrit, C. Ceccarelli, J. Cernicharo, F. Daniel, T. de Graauw, M. L. Dubernet, M. Emprechtinger, P. Encrenaz, E. Falgarone, M. Gerin, T. F. Giesen, J. R. Goicoechea, P. F. Goldsmith, H. Gupta, P. Hartogh, F. P. Helmich, E. Herbst, C. Joblin, D. Johnstone, J. H. Kawamura, W. D. Langer, W. B. Latter, S. D. Lord, S. Maret, P. G. Martin, G. J. Melnick, K. M. Menten, P. Morris, H. S. P. Müller, J. A. Murphy, D. A. Neufeld, V. Ossenkopf, L. Pagani, J. C. Pearson, M. Pérault, R. Plume, P. Roelfsema, S. L. Qin, M. Salez, S. Schlemmer, J. Stutzki, A. G. G. M. Tielens, N. Trappe, F. F. S. van der Tak, C. Vastel, H. W. Yorke, S. Yu, and J. Zmuidzinas, “Herschel observations of EXtra-Ordinary Sources (HEXOS) : The present and future of spectral surveys with Herschel/HIFI,” *A&A*, vol. 521, p. L20, Oct. 2010.
- [5] Planck Collaboration, “Planck 2013 results. VI. High Frequency Instrument data processing,” *A&A*, vol. 571, p. A6, Nov. 2014.
- [6] Planck Collaboration, “Planck intermediate results. XXI. Comparison of polarized thermal emission from Galactic dust at 353 GHz with interstellar polarization in the visible,” *A&A*, vol. 576, p. A106, Apr. 2015.
- [7] D. K. Sing, J. M. Désert, A. Lecavelier Des Etangs, G. E. Ballester, A. Vidal-Madjar, V. Parmentier, G. Hebrard, and G. W. Henry, “Transit spectrophotometry of the exoplanet HD 189733b. I. Searching for water but finding haze with HST NICMOS,” *A&A*, vol. 505, pp. 891–899, Oct. 2009.
- [8] C. Christian and J.-R. Roy, *Telescopes*, p. 253–272. Cambridge University Press, 2 ed., 2017.
- [9] G. Anglada-Escudé, P. J. Amado, J. Barnes, Z. M. Berdiñas, R. P. Butler, G. A. L. Coleman, I. de La Cueva, S. Dreizler, M. Endl, B. Giesers, S. V. Jeffers, J. S. Jenkins, H. R. A. Jones, M. Kiraga, M. Kürster, M. J. López-González, C. J. Marvin, N. Morales, J. Morin, R. P. Nelson, J. L. Ortiz, A. Ofir, S.-J. Paardekooper, A. Reiners, E. Rodríguez, C. Rodríguez-López, L. F. Sarmiento, J. P. Strachan, Y. Tsapras, M. Tuomi, and M. Zechmeister, “A terrestrial planet candidate in a temperate orbit around Proxima Centauri,” *Nature*, vol. 536, pp. 437–440, Aug. 2016.
- [10] A. R. Thompson, J. M. Moran, and J. Swenson, George W., *Interferometry and Synthesis in Radio Astronomy, 3rd Edition*. 2017.
- [11] Event Horizon Telescope Collaboration, K. Akiyama, A. Alberdi, W. Alef, J. C. Algaba, R. Anantua, K. Asada, R. Azulay, U. Bach, A.-K. Baczko, D. Ball, M. Baloković, J. Barrett, M. Bauböck, B. A.

Benson, D. Bintley, L. Blackburn, R. Blundell, K. L. Bouman, G. C. Bower, H. Boyce, M. Bremer, C. D. Brinkerink, R. Brissenden, S. Britzen, A. E. Broderick, D. Brogiere, T. Bronzwaer, S. Bustamante, D.-Y. Byun, J. E. Carlstrom, C. Ceccobello, A. Chael, C.-k. Chan, K. Chatterjee, S. Chatterjee, M.-T. Chen, Y. Chen, X. Cheng, I. Cho, P. Christian, N. S. Conroy, J. E. Conway, J. M. Cordes, T. M. Crawford, G. B. Crew, A. Cruz-Osorio, Y. Cui, J. Davelaar, M. De Laurentis, R. Deane, J. Dempsey, G. Desvignes, J. Dexter, V. Dhruv, S. S. Doeleman, S. Dougal, S. A. Dzib, R. P. Eatough, R. Emami, H. Falcke, J. Farah, V. L. Fish, E. Fomalont, H. A. Ford, R. Fraga-Encinas, W. T. Freeman, P. Friberg, C. M. Fromm, A. Fuentes, P. Galison, C. F. Gammie, R. García, O. Gentaz, B. Georgiev, C. Goddi, R. Gold, A. I. Gómez-Ruiz, J. L. Gómez, M. Gu, M. Gurwell, K. Hada, D. Haggard, K. Haworth, M. H. Hecht, R. Hesper, D. Heumann, L. C. Ho, P. Ho, M. Honma, C.-W. L. Huang, L. Huang, D. H. Hughes, S. Ikeda, C. M. V. Impellizzeri, M. Inoue, S. Issaoun, D. J. James, B. T. Jannuzi, M. Janssen, B. Jeter, W. Jiang, A. Jiménez-Rosales, M. D. Johnson, S. Jorstad, A. V. Joshi, T. Jung, M. Karami, R. Karuppusamy, T. Kawashima, G. K. Keating, M. Kettenis, D.-J. Kim, J.-Y. Kim, J. Kim, J. Kim, M. Kino, J. Y. Koay, P. Kocherlakota, Y. Kofuji, P. M. Koch, S. Koyama, C. Kramer, M. Kramer, T. P. Krichbaum, C.-Y. Kuo, N. La Bella, T. R. Lauer, D. Lee, S.-S. Lee, P. K. Leung, A. Levis, Z. Li, R. Lico, G. Lindahl, M. Lindqvist, M. Lisakov, J. Liu, K. Liu, E. Liuzzo, W.-P. Lo, A. P. Lobanov, L. Loirard, C. J. Lonsdale, R.-S. Lu, J. Mao, N. Marchili, S. Markoff, D. P. Marrone, A. P. Marscher, I. Martí-Vidal, S. Matsushita, L. D. Matthews, L. Medeiros, K. M. Menten, D. Michalik, I. Mizuno, Y. Mizuno, J. M. Moran, K. Moriyama, M. Moscibrodzka, C. Müller, A. Mus, G. Musoke, I. Myserlis, A. Nadolski, H. Nagai, N. M. Nagar, M. Nakamura, R. Narayan, G. Narayanan, I. Natarajan, A. Nathanail, S. N. Fuentes, J. Neilsen, R. Neri, C. Ni, A. Noutsos, M. A. Nowak, J. Oh, H. Okino, H. Olivares, G. N. Ortiz-León, T. Oyama, F. Özel, D. C. M. Palumbo, G. F. Paraschos, J. Park, H. Parsons, N. Patel, U.-L. Pen, D. W. Pesce, V. Piétu, R. Plambeck, A. PopStefanija, O. Porth, F. M. Pötzl, B. Prather, J. A. Preciado-López, D. Psaltis, H.-Y. Pu, V. Ramakrishnan, R. Rao, M. G. Rawlings, A. W. Raymond, L. Rezzolla, A. Ricarte, B. Ripperda, F. Roelofs, A. Rogers, E. Ros, C. Romero-Cañizales, A. Roshanineshat, H. Rottmann, A. L. Roy, I. Ruiz, C. Ruszczyk, K. L. J. Rygl, S. Sánchez, D. Sánchez-Argüelles, M. Sánchez-Portal, M. Sasada, K. Satopathy, T. Savolainen, F. P. Schloerb, J. Schonfeld, K.-F. Schuster, L. Shao, Z. Shen, D. Small, B. W. Sohn, J. SooHoo, K. Souccar, H. Sun, F. Tazaki, A. J. Tetarenko, P. Tiede, R. P. J. Tilanus, M. Titus, P. Torne, E. Traianou, T. Trent, S. Trippe, M. Turk, I. van Bommel, H. J. van Langevelde, D. R. van Rossum, J. Vos, J. Wagner, D. Ward-Thompson, J. Wardle, J. Weintraub, N. Wex, R. Wharton, M. Wielgus, K. Wiik, G. Witzel, M. F. Wondrak, G. N. Wong, Q. Wu, P. Yamaguchi, D. Yoon, A. Young, K. Young, Z. Younsi, F. Yuan, Y.-F. Yuan, J. A. Zensus, S. Zhang, G.-Y. Zhao, S.-S. Zhao, C. Agurto, A. Allardi, R. Amestica, J. P. Araneda, O. Arriagada, J. L. Berghuis, A. Bertarini, R. Berthold, J. Blanchard, K. Brown, M. Cárdenas, M. Cantzler, P. Caro, E. Castillo-Domínguez, T. L. Chan, C.-C. Chang, D. O. Chang, S.-H. Chang, S.-C. Chang, C.-C. Chen, R. Chilson, T. C. Chuter, M. Ciechanowicz, E. Colin-Beltran, I. M. Coulson, J. Crowley, N. Degenaar, S. Dornbusch, C. A. Durán, W. B. Everett, A. Faber, K. Forster, M. M. Fuchs, D. M. Gale, G. Geertsema, E. González, D. Graham, F. Gueth, N. W. Halverson, C.-C. Han, K.-C. Han, Y. Hasegawa, J. L. Hernández-Rebollar, C. Herrera, R. Herrero-Illana, S. Heyminck, A. Hirota, J. Hoge, S. R. Hostler Schimpf, R. E. Howie, Y.-D. Huang, H. Jiang, H. Jinchu, D. John, K. Kimura, T. Klein, D. Kubo, J. Kuroda, C. Kwon, R. Lacasse, R. Laing, E. M. Leitch, C.-T. Li, C.-T. Liu, K.-Y. Liu, L. C. C. Lin, L.-M. Lu, F. Mac-Auliffe, P. Martin-Cocher, C. Matulonis, J. K. Maute, H. Messias, Z. Meyer-Zhao, A. Montaña, F. Montenegro-Montes, W. Montgomerie, M. E. Moreno Nolasco, D. Muders, H. Nishioka, T. J. Norton, G. Nystrom, H. Ogawa, R. Olivares, P. Oshiro, J. P. Pérez-Beaupuits, R. Parra, N. M. Phillips, M. Poirier, N. Pradel, R. Qiu, P. A. Raffin, A. S. Rahlin, J. Ramírez, S. Ressler, M. Reynolds, I. Rodríguez-Montoya, A. F. Saez-Madain, J. Santana, P. Shaw, L. E. Shirkey, K. M. Silva, W. Snow, D. Sousa, T. K. Sridharan, W. Stahm, A. A. Stark, J. Test, K. Torstensson, P. Venegas, C. Walther, T.-S. Wei, C. White, G. Wieching, R. Wijnands, J. G. A. Wouterloot, C.-Y. Yu, W. Yu, and M. Zaballos, "First Sagittarius A* Event Horizon Telescope Results. I. The Shadow of the Supermassive Black Hole in the Center of the

Milky Way," *ApJL*, vol. 930, p. L12, May 2022.

- [12] Event Horizon Telescope Collaboration, K. Akiyama, A. Alberdi, W. Alef, K. Asada, R. Azulay, A.-K. Baczko, D. Ball, M. Baloković, J. Barrett, D. Bintley, L. Blackburn, W. Boland, K. L. Bouman, G. C. Bower, M. Bremer, C. D. Brinkerink, R. Brissenden, S. Britzen, A. E. Broderick, D. Brogiere, T. Bronzwaer, D.-Y. Byun, J. E. Carlstrom, A. Chael, C.-k. Chan, S. Chatterjee, K. Chatterjee, M.-T. Chen, Y. Chen, I. Cho, P. Christian, J. E. Conway, J. M. Cordes, G. B. Crew, Y. Cui, J. Davelaar, M. De Laurentis, R. Deane, J. Dempsey, G. Desvignes, J. Dexter, S. S. Doeleman, R. P. Eatough, H. Falcke, V. L. Fish, E. Fomalont, R. Fraga-Encinas, W. T. Freeman, P. Friberg, C. M. Fromm, J. L. Gómez, P. Galison, C. F. Gammie, R. García, O. Gentaz, B. Georgiev, C. Goddi, R. Gold, M. Gu, M. Gurwell, K. Hada, M. H. Hecht, R. Hesper, L. C. Ho, P. Ho, M. Honma, C.-W. L. Huang, L. Huang, D. H. Hughes, S. Ikeda, M. Inoue, S. Issaoun, D. J. James, B. T. Jannuzi, M. Janssen, B. Jeter, W. Jiang, M. D. Johnson, S. Jorstad, T. Jung, M. Karami, R. Karuppusamy, T. Kawashima, G. K. Keating, M. Kettenis, J.-Y. Kim, J. Kim, J. Kim, M. Kino, J. Y. Koay, P. M. Koch, S. Koyama, M. Kramer, C. Kramer, T. P. Krichbaum, C.-Y. Kuo, T. R. Lauer, S.-S. Lee, Y.-R. Li, Z. Li, M. Lindqvist, K. Liu, E. Liuzzo, W.-P. Lo, A. P. Lobanov, L. Loinard, C. Lonsdale, R.-S. Lu, N. R. MacDonald, J. Mao, S. Markoff, D. P. Marrone, A. P. Marscher, I. Martí-Vidal, S. Matsushita, L. D. Matthews, L. Medeiros, K. M. Menten, Y. Mizuno, I. Mizuno, J. M. Moran, K. Moriyama, M. Moscibrodzka, C. Müller, H. Nagai, N. M. Nagar, M. Nakamura, R. Narayan, G. Narayanan, I. Natarajan, R. Neri, C. Ni, A. Noutsos, H. Okino, H. Olivares, G. N. Ortiz-León, T. Oyama, F. Özel, D. C. M. Palumbo, N. Patel, U.-L. Pen, D. W. Pesce, V. Piétu, R. Plambeck, A. PopStefanija, O. Porth, B. Prather, J. A. Preciado-López, D. Psaltis, H.-Y. Pu, V. Ramakrishnan, R. Rao, M. G. Rawlings, A. W. Raymond, L. Rezzolla, B. Ripperda, F. Roelofs, A. Rogers, E. Ros, M. Rose, A. Roshanineshat, H. Rottmann, A. L. Roy, C. Ruszczyk, B. R. Ryan, K. L. J. Rygl, S. Sánchez, D. Sánchez-Arguelles, M. Sasada, T. Savolainen, F. P. Schloerb, K.-F. Schuster, L. Shao, Z. Shen, D. Small, B. W. Sohn, J. SooHoo, F. Tazaki, P. Tiede, R. P. J. Tilanus, M. Titus, K. Toma, P. Torne, T. Trent, S. Trippe, S. Tsuda, I. van Bemmell, H. J. van Langevelde, D. R. van Rossum, J. Wagner, J. Wardle, J. Weintraub, N. Wex, R. Wharton, M. Wielgus, G. N. Wong, Q. Wu, K. Young, A. Young, Z. Younsi, F. Yuan, Y.-F. Yuan, J. A. Zensus, G. Zhao, S.-S. Zhao, Z. Zhu, J.-C. Algaba, A. Allardi, R. Amestica, J. Anczarski, U. Bach, F. K. Baganoff, C. Beaudoin, B. A. Benson, R. Berthold, J. M. Blanchard, R. Blundell, S. Bustamente, R. Cappallo, E. Castillo-Domínguez, C.-C. Chang, S.-H. Chang, S.-C. Chang, C.-C. Chen, R. Chilson, T. C. Chuter, R. Córdova Rosado, I. M. Coulson, T. M. Crawford, J. Crowley, J. David, M. Derome, M. Dexter, S. Dornbusch, K. A. Dudevoir, S. A. Dzib, A. Eckart, C. Eckert, N. R. Erickson, W. B. Everett, A. Faber, J. R. Farah, V. Fath, T. W. Folkers, D. C. Forbes, R. Freund, A. I. Gómez-Ruiz, D. M. Gale, F. Gao, G. Geertsema, D. A. Graham, C. H. Greer, R. Grosslein, F. Gueth, D. Haggard, N. W. Halverson, C.-C. Han, K.-C. Han, J. Hao, Y. Hasegawa, J. W. Henning, A. Hernández-Gómez, R. Herrero-Illana, S. Heyminck, A. Hirota, J. Hoge, Y.-D. Huang, C. M. V. Impellizzeri, H. Jiang, A. Kamble, R. Keisler, K. Kimura, Y. Kono, D. Kubo, J. Kuroda, R. Lacasse, R. A. Laing, E. M. Leitch, C.-T. Li, L. C. C. Lin, C.-T. Liu, K.-Y. Liu, L.-M. Lu, R. G. Marson, P. L. Martin-Cocher, K. D. Massingill, C. Matulonis, M. P. McColl, S. R. McWhirter, H. Messias, Z. Meyer-Zhao, D. Michalik, A. Montaña, W. Montgomerie, M. Mora-Klein, D. Muders, A. Nadolski, S. Navarro, J. Neilsen, C. H. Nguyen, H. Nishioka, T. Norton, M. A. Nowak, G. Nystrom, H. Ogawa, P. Oshiro, T. Oyama, H. Parsons, S. N. Paine, J. Peñalver, N. M. Phillips, M. Poirier, N. Pradel, R. A. Primiani, P. A. Raffin, A. S. Rahlin, G. Reiland, C. Risacher, I. Ruiz, A. F. Sáez-Madaín, R. Sassella, P. Schellart, P. Shaw, K. M. Silva, H. Shiokawa, D. R. Smith, W. Snow, K. Souccar, D. Sousa, T. K. Sridharan, R. Srinivasan, W. Stahm, A. A. Stark, K. Story, S. T. Timmer, L. Vertatschitsch, C. Walther, T.-S. Wei, N. Whitehorn, A. R. Whitney, D. P. Woody, J. G. A. Wouterloot, M. Wright, P. Yamaguchi, C.-Y. Yu, M. Zaballos, S. Zhang, and L. Ziurys, "First M87 Event Horizon Telescope Results. I. The Shadow of the Supermassive Black Hole," *ApJL*, vol. 875, p. L1, Apr. 2019.
- [13] B. P. Abbott, R. Abbott, T. D. Abbott, M. R. Abernathy, F. Acernese, K. Ackley, C. Adams, T. Adams, P. Addesso, R. X. Adhikari, V. B. Adya, C. Affeldt, M. Agathos, K. Agatsuma, N. Ag-

garwal, O. D. Aguiar, L. Aiello, A. Ain, P. Ajith, B. Allen, A. Allocca, P. A. Altin, S. B. Anderson, W. G. Anderson, K. Arai, M. A. Arain, M. C. Araya, C. C. Arceneaux, J. S. Areeda, N. Arnaud, K. G. Arun, S. Ascenzi, G. Ashton, M. Ast, S. M. Aston, P. Astone, P. Aufmuth, C. Aulbert, S. Babak, P. Bacon, M. K. M. Bader, P. T. Baker, F. Baldaccini, G. Ballardini, S. W. Ballmer, J. C. Barayoga, S. E. Barclay, B. C. Barish, D. Barker, F. Barone, B. Barr, L. Barsotti, M. Barsuglia, D. Barta, J. Bartlett, M. A. Barton, I. Bartos, R. Bassiri, A. Basti, J. C. Batch, C. Baune, V. Bavigadda, M. Bazzan, B. Behnke, M. Bejger, C. Belczynski, A. S. Bell, C. J. Bell, B. K. Berger, J. Bergman, G. Bergmann, C. P. L. Berry, D. Bersanetti, A. Bertolini, J. Betzwieser, S. Bhagwat, R. Bhandare, I. A. Bilenko, G. Billingsley, J. Birch, R. Birney, O. Birnholtz, S. Biscans, A. Bisht, M. Bitossi, C. Biwer, M. A. Bizouard, J. K. Blackburn, C. D. Blair, D. G. Blair, R. M. Blair, S. Bloemen, O. Bock, T. P. Bodiya, M. Boer, G. Bogaert, C. Bogan, A. Bohe, P. Bojtos, C. Bond, F. Bondu, R. Bonnand, B. A. Boom, R. Bork, V. Boschi, S. Bose, Y. Bouffanais, A. Bozzi, C. Bradaschia, P. R. Brady, V. B. Braginsky, M. Branchesi, J. E. Brau, T. Briant, A. Brilliet, M. Brinkmann, V. Brisson, P. Brockill, A. F. Brooks, D. A. Brown, D. D. Brown, N. M. Brown, C. C. Buchanan, A. Buikema, T. Bulik, H. J. Bulten, A. Buonanno, D. Buskulic, C. Buy, R. L. Byer, M. Cabero, L. Cadonati, G. Cagnoli, C. Cahillane, J. C. Bustillo, T. Callister, E. Calloni, J. B. Camp, K. C. Cannon, J. Cao, C. D. Capano, E. Capocasa, F. Carbognani, S. Caride, J. Casanueva Diaz, C. Casentini, S. Caudill, M. Cavaglià, F. Cavalier, R. Cavalieri, G. Cella, C. B. Cepeda, L. C. Baiardi, G. Cerretani, E. Cesarini, R. Chakraborty, T. Chalermongsak, S. J. Chamberlin, M. Chan, S. Chao, P. Charlton, E. Chassande-Mottin, H. Y. Chen, Y. Chen, C. Cheng, A. Chincarini, A. Chiummo, H. S. Cho, M. Cho, J. H. Chow, N. Christensen, Q. Chu, S. Chua, S. Chung, G. Ciani, F. Clara, J. A. Clark, F. Cleva, E. Coccia, P. F. Cohadon, A. Colla, C. G. Collette, L. Cominsky, M. Constan-
cio, A. Conte, L. Conti, D. Cook, T. R. Corbitt, N. Cornish, A. Corsi, S. Cortese, C. A. Costa, M. W. Coughlin, S. B. Coughlin, J. P. Coulon, S. T. Countryman, P. Couvares, E. E. Cowan, D. M. Coward, M. J. Cowart, D. C. Coyne, R. Coyne, K. Craig, J. D. E. Creighton, T. D. Creighton, J. Cripe, S. G. Crowder, A. M. Cruise, A. Cumming, L. Cunningham, E. Cuoco, T. Dal Canton, S. L. Danilishin, S. D'Antonio, K. Danzmann, N. S. Darman, C. F. Da Silva Costa, V. Dattilo, I. Dave, H. P. Daveloza, M. Davier, G. S. Davies, E. J. Daw, R. Day, S. De, D. DeBra, G. Debreczeni, J. Degallaix, M. De Laurentis, S. Deléglise, W. Del Pozzo, T. Denker, T. Dent, H. Dereli, V. Dergachev, R. T. DeRosa, R. De Rosa, R. DeSalvo, S. Dhurandhar, M. C. Díaz, L. Di Fiore, M. Di Giovanni, A. Di Lieto, S. Di Pace, I. Di Palma, A. Di Virgilio, G. Dojcinoski, V. Dolique, F. Donovan, K. L. Dooley, S. Doravari, R. Douglas, T. P. Downes, M. Drago, R. W. P. Drever, J. C. Driggers, Z. Du, M. Ducrot, S. E. Dwyer, T. B. Edo, M. C. Edwards, A. Effler, H. B. Eggenstein, P. Ehrens, J. Eichholz, S. S. Eikenberry, W. Engels, R. C. Essick, T. Etzel, M. Evans, T. M. Evans, R. Everett, M. Factourovich, V. Fafone, H. Fair, S. Fairhurst, X. Fan, Q. Fang, S. Farinon, B. Farr, W. M. Farr, M. Favata, M. Fays, H. Fehrmann, M. M. Fejer, D. Feldbaum, I. Ferrante, E. C. Ferreira, F. Ferrini, F. Fidecaro, L. S. Finn, I. Fiori, D. Fiorucci, R. P. Fisher, R. Flaminio, M. Fletcher, H. Fong, J. D. Fournier, S. Franco, S. Frasca, F. Frasconi, M. Frede, Z. Frei, A. Freise, R. Frey, V. Frey, T. T. Fricke, P. Fritschel, V. V. Frolov, P. Fulda, M. Fyffe, H. A. G. Gabbard, J. R. Gair, L. Gammaitoni, S. G. Gaonkar, F. Garufi, A. Gatto, G. Gaur, N. Gehrels, G. Gemme, B. Gendre, E. Genin, A. Gennai, J. George, L. Gergely, V. Germain, A. Ghosh, A. Ghosh, S. Ghosh, J. A. Giaime, K. D. Giardino, A. Giazotto, K. Gill, A. Glaefke, J. R. Gleason, E. Goetz, R. Goetz, L. Gondan, G. González, J. M. G. Castro, A. Gopakumar, N. A. Gordon, M. L. Gorodetsky, S. E. Gossan, M. Gosselin, R. Gouaty, C. Graef, P. B. Graff, M. Granata, A. Grant, S. Gras, C. Gray, G. Greco, A. C. Green, R. J. S. Greenhalgh, P. Groot, H. Grote, S. Grunewald, G. M. Guidi, X. Guo, A. Gupta, M. K. Gupta, K. E. Gushwa, E. K. Gustafson, R. Gustafson, J. J. Hacker, B. R. Hall, E. D. Hall, G. Hammond, M. Haney, M. M. Hanke, J. Hanks, C. Hanna, M. D. Hannam, J. Hanson, T. Hardwick, J. Harms, G. M. Harry, I. W. Harry, M. J. Hart, M. T. Hartman, C. J. Haster, K. Haughian, J. Healy, J. Heefner, A. Heidmann, M. C. Heintze, G. Heinzl, H. Heitmann, P. Hello, G. Hemming, M. Hendry, I. S. Heng, J. Hennig, A. W. Heptonstall, M. Heurs, S. Hild, D. Hoak, K. A. Hodge, D. Hofman, S. E. Hollitt, K. Holt, D. E. Holz, P. Hopkins, D. J. Hosken, J. Hough, E. A. Houston, E. J. Howell, Y. M. Hu, S. Huang, E. A. Huerta, D. Huet, B. Hughey,

S. Husa, S. H. Huttner, T. Huynh-Dinh, A. Idrisy, N. Indik, D. R. Ingram, R. Inta, H. N. Isa, J. M. Isac, M. Isi, G. Islas, T. Isogai, B. R. Iyer, K. Izumi, M. B. Jacobson, T. Jacqmin, H. Jang, K. Jani, P. Jaranowski, S. Jawahar, F. Jiménez-Forteza, W. W. Johnson, N. K. Johnson-McDaniel, D. I. Jones, R. Jones, R. J. G. Jonker, L. Ju, K. Haris, C. V. Kalaghatgi, V. Kalogera, S. Kandhasamy, G. Kang, J. B. Kanner, S. Karki, M. Kasprzack, E. Katsavounidis, W. Katzman, S. Kaufer, T. Kaur, K. Kawabe, F. Kawazoe, F. Kéfélian, M. S. Kehl, D. Keitel, D. B. Kelley, W. Kells, R. Kennedy, D. G. Keppel, J. S. Key, A. Khalaidovski, F. Y. Khalili, I. Khan, S. Khan, Z. Khan, E. A. Khazanov, N. Kijbunchoo, C. Kim, J. Kim, K. Kim, N.-G. Kim, N. Kim, Y. M. Kim, E. J. King, P. J. King, D. L. Kinzel, J. S. Kissel, L. Kleybolte, S. Klimentko, S. M. Koehlenbeck, K. Kokeyama, S. Koley, V. Kondrashov, A. Kontos, S. Koranda, M. Korobko, W. Z. Korth, I. Kowalska, D. B. Kozak, V. Kringel, B. Krishnan, A. Królak, C. Krueger, G. Kuehn, P. Kumar, R. Kumar, L. Kuo, A. Kutynia, P. Kwee, B. D. Lackey, M. Landry, J. Lange, B. Lantz, P. D. Lasky, A. Lazzarini, C. Lazzaro, P. Leaci, S. Leavey, E. O. Lebigot, C. H. Lee, H. K. Lee, H. M. Lee, K. Lee, A. Lenon, M. Leonardi, J. R. Leong, N. Leroy, N. Letendre, Y. Levin, B. M. Levine, T. G. F. Li, A. Libson, T. B. Littenberg, N. A. Lockerbie, J. Logue, A. L. Lombardi, L. T. London, J. E. Lord, M. Lorenzini, V. Lorette, M. Lormand, G. Losurdo, J. D. Lough, C. O. Lousto, G. Lovelace, H. Lück, A. P. Lundgren, J. Luo, R. Lynch, Y. Ma, T. MacDonald, B. Machenschalk, M. MacInnis, D. M. Macleod, F. Magaña-Sandoval, R. M. Magee, M. Mageswaran, E. Majorana, I. Maksimovic, V. Malvezzi, N. Man, I. Mandel, V. Mandic, V. Mangano, G. L. Mansell, M. Manske, M. Mantovani, F. Marchesoni, F. Marion, S. Márka, Z. Márka, A. S. Markosyan, E. Maros, F. Martelli, L. Martellini, I. W. Martin, R. M. Martin, D. V. Martynov, J. N. Marx, K. Mason, A. Masserot, T. J. Massinger, M. Masso-Reid, F. Matichard, L. Matone, N. Mavalvala, N. Mazumder, G. Mazzolo, R. McCarthy, D. E. McClelland, S. McCormick, S. C. McGuire, G. McIntyre, J. McIver, D. J. McManus, S. T. McWilliams, D. Meacher, G. D. Meadors, J. Meidam, A. Melatos, G. Mendell, D. Mendoza-Gandara, R. A. Mercer, E. Merilh, M. Merzougui, S. Meshkov, C. Messenger, C. Messick, P. M. Meyers, F. Mezzani, H. Miao, C. Michel, H. Middleton, E. E. Mikhailov, L. Milano, J. Miller, M. Millhouse, Y. Minenkov, J. Ming, S. Mirshekari, C. Mishra, S. Mitra, V. P. Mitrofanov, G. Mitselmakher, R. Mittleman, A. Moggi, M. Mohan, S. R. P. Mohapatra, M. Montani, B. C. Moore, C. J. Moore, D. Moraru, G. Moreno, S. R. Morriss, K. Mossavi, B. Mours, C. M. Mow-Lowry, C. L. Mueller, G. Mueller, A. W. Muir, A. Mukherjee, D. Mukherjee, S. Mukherjee, N. Mukund, A. Mullaev, J. Munch, D. J. Murphy, P. G. Murray, A. Mytidis, I. Nardecchia, L. Naticchioni, R. K. Nayak, V. Nacula, K. Nedkova, G. Nelemans, M. Neri, A. Neunzert, G. Newton, T. T. Nguyen, A. B. Nielsen, S. Nissanke, A. Nitz, F. Nocera, D. Nolting, M. E. N. Normandin, L. K. Nuttall, J. Oberling, E. Ochsner, J. O'Dell, E. Oelker, G. H. Oggin, J. J. Oh, S. H. Oh, F. Ohme, M. Oliver, P. Oppermann, R. J. Oram, B. O'Reilly, R. O'Shaughnessy, C. D. Ott, D. J. Ottaway, R. S. Ottens, H. Overmier, B. J. Owen, A. Pai, S. A. Pai, J. R. Palamos, O. Palashov, C. Palomba, A. Pal-Singh, H. Pan, Y. Pan, C. Pankow, F. Pannarale, B. C. Pant, F. Paoletti, A. Paoli, M. A. Papa, H. R. Paris, W. Parker, D. Pascucci, A. Pasqualetti, R. Passaquieti, D. Passuello, B. Patricelli, Z. Patrick, B. L. Pearlstone, M. Pedraza, R. Pedurand, L. Pekowsky, A. Pele, S. Penn, A. Perreca, H. P. Pfeiffer, M. Phelps, O. Piccinni, M. Pichot, M. Pickenpack, F. Piergiovanni, V. Piero, G. Pillant, L. Pinard, I. M. Pinto, M. Pitkin, J. H. Poeld, R. Poggiani, P. Popolizio, A. Post, J. Powell, J. Prasad, V. Predoi, S. S. Premachandra, T. Prestegard, L. R. Price, M. Prijatelj, M. Principe, S. Privitera, R. Prix, G. A. Prodi, L. Prokhorov, O. Puncken, M. Punturo, P. Puppo, M. Pürner, H. Qi, J. Qin, V. Quetschke, E. A. Quintero, R. Quitzow-James, F. J. Raab, D. S. Rabeling, H. Radkins, P. Raffai, S. Raja, M. Rakhmanov, C. R. Ramet, P. Rapagnani, V. Raymond, M. Razzano, V. Re, J. Read, C. M. Reed, T. Regimbau, L. Rei, S. Reid, D. H. Reitze, H. Rew, S. D. Reyes, F. Ricci, K. Riles, N. A. Robertson, R. Robie, F. Robinet, A. Rocchi, L. Rolland, J. G. Rollins, V. J. Roma, J. D. Romano, R. Romano, G. Romanov, J. H. Romie, D. Rosińska, S. Rowan, A. Rüdiger, P. Ruggi, K. Ryan, S. Sachdev, T. Sadecki, L. Sadeghian, L. Salconi, M. Saleem, F. Salemi, A. Samajdar, L. Sammut, L. M. Sampson, E. J. Sanchez, V. Sandberg, B. Sandeen, G. H. Sanders, J. R. Sanders, B. Sassolas, B. S. Sathyaprakash, P. R. Saulson, O. Sauter, R. L. Savage, A. Sawadsky, P. Schale, R. Schilling, J. Schmidt, P. Schmidt, R. Schnabel, R. M. S. Schofield,

A. Schönbeck, E. Schreiber, D. Schuette, B. F. Schutz, J. Scott, S. M. Scott, D. Sellers, A. S. Sengupta, D. Sentenac, V. Sequino, A. Sergeev, G. Serna, Y. Setyawati, A. Sevigny, D. A. Shaddock, T. Shaffer, S. Shah, M. S. Shahriar, M. Shaltev, Z. Shao, B. Shapiro, P. Shawhan, A. Sheperd, D. H. Shoemaker, D. M. Shoemaker, K. Siellez, X. Siemens, D. Sigg, A. D. Silva, D. Simakov, A. Singer, L. P. Singer, A. Singh, R. Singh, A. Singhal, A. M. Sintès, B. J. J. Slagmolen, J. R. Smith, M. R. Smith, N. D. Smith, R. J. E. Smith, E. J. Son, B. Sorazu, F. Sorrentino, T. Souradeep, A. K. Srivastava, A. Staley, M. Steinke, J. Steinlechner, S. Steinlechner, D. Steinmeyer, B. C. Stephens, S. P. Stevenson, R. Stone, K. A. Strain, N. Straniero, G. Stratta, N. A. Strauss, S. Strigin, R. Sturani, A. L. Stuver, T. Z. Summerscales, L. Sun, P. J. Sutton, B. L. Swinkels, M. J. Szczepańczyk, M. Tacca, D. Talukder, D. B. Tanner, M. Tápai, S. P. Tarabrin, A. Taracchini, R. Taylor, T. Theeg, M. P. Thirugnanasambandam, E. G. Thomas, M. Thomas, P. Thomas, K. A. Thorne, K. S. Thorne, E. Thrane, S. Tiwari, V. Tiwari, K. V. Tokmakov, C. Tomlinson, M. Tonelli, C. V. Torres, C. I. Torrie, D. Töyrä, F. Travasso, G. Traylor, D. Trifirò, M. C. Tringali, L. Trozzo, M. Tse, M. Turconi, D. Tuyenbayev, D. Ugolini, C. S. Unnikrishnan, A. L. Urban, S. A. Usman, H. Vahlbruch, G. Vajente, G. Valdes, M. Vallisneri, N. van Bakel, M. van Beuzekom, J. F. J. van den Brand, C. Van Den Broeck, D. C. Vander-Hyde, L. van der Schaaf, J. V. van Heijningen, A. A. van Veggel, M. Vardaro, S. Vass, M. Vasúth, R. Vaulin, A. Vecchio, G. Vedovato, J. Veitch, P. J. Veitch, K. Venkateswara, D. Verkindt, F. Vetrano, A. Viceré, S. Vinciguerra, D. J. Vine, J. Y. Vinet, S. Vitale, T. Vo, H. Vocca, C. Vorvick, D. Voss, W. D. Voudsen, S. P. Vyatchanin, A. R. Wade, L. E. Wade, M. Wade, S. J. Waldman, M. Walker, L. Wallace, S. Walsh, G. Wang, H. Wang, M. Wang, X. Wang, Y. Wang, H. Ward, R. L. Ward, J. Warner, M. Was, B. Weaver, L. W. Wei, M. Weinert, A. J. Weinstein, R. Weiss, T. Welborn, L. Wen, P. Weßels, T. Westphal, K. Wette, J. T. Whelan, S. E. Whitcomb, D. J. White, B. F. Whiting, K. Wiesner, C. Wilkinson, P. A. Willems, L. Williams, R. D. Williams, A. R. Williamson, J. L. Willis, B. Willke, M. H. Wimmer, L. Winkelmann, W. Winkler, C. C. Wipf, A. G. Wiseman, H. Wittel, G. Woan, J. Worden, J. L. Wright, G. Wu, J. Yablon, I. Yakushin, W. Yam, H. Yamamoto, C. C. Yancey, M. J. Yap, H. Yu, M. Yvert, A. Zadrožny, L. Zangrando, M. Zanolin, J. P. Zendri, M. Zevin, F. Zhang, L. Zhang, M. Zhang, Y. Zhang, C. Zhao, M. Zhou, Z. Zhou, X. J. Zhu, M. E. Zucker, S. E. Zuraw, J. Zweizig, LIGO Scientific Collaboration, and Virgo Collaboration, "Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger," *Physical Review Letters*, vol. 116, p. 061102, Feb. 2016.

- [14] LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration, "Observation of gravitational waves from a binary black hole merger," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 116, p. 061102, Feb 2016.
- [15] N. R. Tanvir, A. J. Levan, C. González-Fernández, O. Korobkin, I. Mandel, S. Rosswog, J. Hjorth, P. D'Avanzo, A. S. Fruchter, C. L. Fryer, T. Kangas, B. Milvang-Jensen, S. Rosetti, D. Steeghs, R. T. Wollaeger, Z. Cano, C. M. Copperwheat, S. Covino, V. D'Elia, A. de Ugarte Postigo, P. A. Evans, W. P. Even, S. Fairhurst, R. Figuera Jaimes, C. J. Fontes, Y. I. Fujii, J. P. U. Fynbo, B. P. Gompertz, J. Greiner, G. Hodosan, M. J. Irwin, P. Jakobsson, U. G. Jørgensen, D. A. Kann, J. D. Lyman, D. Malesani, R. G. McMahon, A. Melandri, P. T. O'Brien, J. P. Osborne, E. Palazzi, D. A. Perley, E. Pian, S. Piranomonte, M. Rabus, E. Rol, A. Rowlinson, S. Schulze, P. Sutton, C. C. Thöne, K. Ulaczyk, D. Watson, K. Wiersema, and R. A. M. J. Wijers, "The Emergence of a Lanthanide-rich Kilonova Following the Merger of Two Neutron Stars," *ApJL*, vol. 848, p. L27, Oct. 2017.
- [16] G. Agazie, A. Anumalapudi, A. M. Archibald, Z. Arzoumanian, P. T. Baker, B. Bécsy, L. Blecha, A. Brazier, P. R. Brook, S. Burke-Spolaor, R. Burnette, R. Case, M. Charisi, S. Chatterjee, K. Chatzioannou, B. D. Cheeseboro, S. Chen, T. Cohen, J. M. Cordes, N. J. Cornish, F. Crawford, H. T. Cromartie, K. Crowter, C. J. Cutler, M. E. Decesar, D. Degan, P. B. Demorest, H. Deng, T. Dolch, B. Drachler, J. A. Ellis, E. C. Ferrara, W. Fiore, E. Fonseca, G. E. Freedman, N. Garver-Daniels, P. A. Gentile, K. A. Gersbach, J. Glaser, D. C. Good, K. Gültekin, J. S. Hazboun, S. Hourihane, K. Islo, R. J. Jennings, A. D. Johnson, M. L. Jones, A. R. Kaiser, D. L. Kaplan, L. Z. Kelley, M. Kerr, J. S. Key, T. C. Klein, N. Laal, M. T. Lam, W. G. Lamb, T. J. W. Lazio, N. Lewandowska, T. B. Littenberg, T. Liu, A. Lommen, D. R. Lorimer, J. Luo, R. S. Lynch, C.-P. Ma,

- D. R. Madison, M. A. Mattson, A. McEwen, J. W. McKee, M. A. McLaughlin, N. McMann, B. W. Meyers, P. M. Meyers, C. M. F. Mingarelli, A. Mitridate, P. Natarajan, C. Ng, D. J. Nice, S. K. Ocker, K. D. Olum, T. T. Pennucci, B. B. P. Perera, P. Petrov, N. S. Pol, H. A. Radovan, S. M. Ransom, P. S. Ray, J. D. Romano, S. C. Sardesai, A. Schmiedekamp, C. Schmiedekamp, K. Schmitz, L. Schult, B. J. Shapiro-Albert, X. Siemens, J. Simon, M. S. Siwek, I. H. Stairs, D. R. Stinebring, K. Stovall, J. P. Sun, A. Susobhanan, J. K. Swiggum, J. Taylor, S. R. Taylor, J. E. Turner, C. Unal, M. Vallisneri, R. van Haasteren, S. J. Vigeland, H. M. Wahl, Q. Wang, C. A. Witt, O. Young, and Nanograv Collaboration, "The NANOGrav 15 yr Data Set : Evidence for a Gravitational-wave Background," *ApJL*, vol. 951, p. L8, July 2023.
- [17] J. E. Carlstrom, G. P. Holder, and E. D. Reese, "Cosmology with the Sunyaev-Zel'dovich Effect," *Annual Review of Astronomy & Astrophysics*, vol. 40, pp. 643–680, Jan. 2002.
- [18] M. Schartmann, K. Wada, M. A. Prieto, A. Burkert, and K. R. W. Tristram, "Time-resolved infrared emission from radiation-driven central obscuring structures in active galactic nuclei," *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 445, pp. 3878–3891, Dec. 2014.
- [19] R. A. Alpher and R. Herman, "Evolution of the Universe," *Nature*, vol. 162, pp. 774–775, Nov. 1948.
- [20] G. Gamow, "The Origin of Elements and the Separation of Galaxies," *Physical Review*, vol. 74, pp. 505–506, Aug. 1948.
- [21] A. A. Penzias and R. W. Wilson, "A Measurement of Excess Antenna Temperature at 4080 Mc/s.," *Astrophysical Journal*, vol. 142, pp. 419–421, July 1965.
- [22] J. C. Mather, E. S. Cheng, J. Eplee, R. E., R. B. Isaacman, S. S. Meyer, R. A. Shafer, R. Weiss, E. L. Wright, C. L. Bennett, N. W. Boggess, E. Dwek, S. Gulkis, M. G. Hauser, M. Janssen, T. Kelsall, P. M. Lubin, J. Moseley, S. H., T. L. Murdock, R. F. Silverberg, G. F. Smoot, and D. T. Wilkinson, "A Preliminary Measurement of the Cosmic Microwave Background Spectrum by the Cosmic Background Explorer (COBE) Satellite," *Astrophysical Journal Letters*, vol. 354, p. L37, May 1990.
- [23] F. H. Shu, *Physics of Astrophysics, Vol. I*. 1991.
- [24] H. Weaver, D. R. W. Williams, N. H. Dieter, and W. T. Lum, "Observations of a Strong Unidentified Microwave Line and of Emission from the OH Molecule," *Nature*, vol. 208, pp. 29–31, Oct. 1965.
- [25] F. Walter, E. Brinks, W. J. G. de Blok, F. Bigiel, J. Kennicutt, Robert C., M. D. Thornley, and A. Leroy, "THINGS : The H I Nearby Galaxy Survey," *The Astronomical Journal*, vol. 136, pp. 2563–2647, Dec. 2008.
- [26] S. W. Stahler and F. Palla, *The Formation of Stars*. 2004.
- [27] T. M. Dame, D. Hartmann, and P. Thaddeus, "The Milky Way in Molecular Clouds : A New Complete CO Survey," *The Astrophysical Journal*, vol. 547, pp. 792–813, Feb. 2001.
- [28] I. Harris, Daniel L., "On the Line-Absorption Coefficient due to Doppler Effect and Damping.," *ApJ*, vol. 108, p. 112, July 1948.
- [29] P. J. Flower, "Transformations from Theoretical Hertzsprung-Russell Diagrams to Color-Magnitude Diagrams : Effective Temperatures, B-V Colors, and Bolometric Corrections," *ApJ*, vol. 469, p. 355, Sept. 1996.
- [30] N. Grevesse and A. Noels, "Cosmic abundances of the elements.," in *Origin and Evolution of the Elements* (N. Prantzos, E. Vangioni-Flam, and M. Casse, eds.), pp. 15–25, Jan. 1993.
- [31] F. Baron, J. D. Monnier, E. Pedretti, M. Zhao, G. Schaefer, R. Parks, X. Che, N. Thureau, T. A. ten Brummelaar, H. A. McAlister, S. T. Ridgway, C. Farrington, J. Sturmman, L. Sturmman, and N. Turner, "Imaging the Algol Triple System in the H Band with the CHARA Interferometer," *ApJ*, vol. 752, p. 20, June 2012.

- [32] R. Griffin, N. Ginestet, and J. M. Carquillat, “Contribution à l'étude des binaires des types f, g, k, m ix. hd 191588, nouvelle binaire spectroscopique à raies simples de type rs cvn, système triple,” 2007.
- [33] D. Basilio, G. Bellini, J. Benziger, R. Biondi, B. Caccianiga, F. Calaprice, A. Caminata, A. Cherpurnov, D. D'Angelo, A. Derbin, A. Di Giacinto, V. Di Marcello, X. F. Ding, A. Di Ludovico, L. Di Noto, I. Drachnev, D. Franco, C. Galbiati, C. Ghiano, M. Giammarchi, A. Goretti, M. Gromov, D. Guffanti, A. Ianni, A. Ianni, A. Jany, V. Kobychyev, G. Korga, S. Kumaran, M. Laubenstein, E. Litvinovich, P. Lombardi, I. Lomskeya, L. Ludhova, I. Machulin, J. Martyn, E. Meroni, L. Miramonti, M. Misiaszek, V. Muratova, R. Nugmanov, L. Oberauer, V. Orekhov, F. Ortica, M. Pallavicini, L. Pelicci, Ö. Penek, L. Pietrofaccia, N. Pilipenko, A. Pocar, G. Raikov, M. T. Ranalli, G. Ranucci, A. Razeto, A. Re, N. Rossi, S. Schönert, D. Semenov, G. Settanta, M. Skorokhvatov, A. Singhal, O. Smirnov, A. Sotnikov, R. Tartaglia, G. Testera, E. Unzhakov, F. L. Villante, A. Vishneva, R. B. Vogelaar, F. von Feilitzsch, M. Wojcik, M. Wurm, S. Zavatarelli, K. Zuber, G. Zuzel, and Borexino Collaboration, “Final results of Borexino on CNO solar neutrinos,” *Phys. Rev. D*, vol. 108, p. 102005, Nov. 2023.
- [34] D. Koester, R. Napiwotzki, N. Christlieb, H. Drechsel, H. J. Hagen, U. Heber, D. Homeier, C. Karl, B. Leibundgut, S. Moehler, G. Nelemans, E. M. Pauli, D. Reimers, A. Renzini, and L. Yungelson, “High-resolution UVES/VLT spectra of white dwarfs observed for the ESO SN Ia progenitor survey (SPY). I.,” *A&A*, vol. 378, pp. 556–568, Nov. 2001.
- [35] P. G. Prada Moroni and O. Straniero, “Calibration of White Dwarf Cooling Sequences : Theoretical Uncertainty,” *ApJ*, vol. 581, pp. 585–597, Dec. 2002.
- [36] M. Salaris, I. Domínguez, E. García-Berro, M. Hernanz, J. Isern, and R. Mochkovitch, “The Cooling of CO White Dwarfs : Influence of the Internal Chemical Distribution,” *ApJ*, vol. 486, pp. 413–419, Sept. 1997.
- [37] S. S. R. Offner, P. C. Clark, P. Hennebelle, N. Bastian, M. R. Bate, P. F. Hopkins, E. Moraux, and A. P. Whitworth, “The Origin and Universality of the Stellar Initial Mass Function,” in *Protostars and Planets VI* (H. Beuther, R. S. Klessen, C. P. Dullemond, and T. Henning, eds.), p. 53, Jan. 2014.
- [38] F. Bigiel, A. Leroy, F. Walter, E. Brinks, W. J. G. de Blok, B. Madore, and M. D. Thornley, “The Star Formation Law in Nearby Galaxies on Sub-Kpc Scales,” *Astronomical Journal*, vol. 136, pp. 2846–2871, Dec. 2008.
- [39] P. Madau and M. Dickinson, “Cosmic Star-Formation History,” *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, vol. 52, pp. 415–486, Aug. 2014.
- [40] V. Pelgrims, K. Ferrière, F. Boulanger, R. Lallement, and L. Montier, “Modeling the magnetized Local Bubble from dust data,” *A&A*, vol. 636, p. A17, Apr. 2020.
- [41] G. Fragione and A. Loeb, “Constraining the Milky Way mass with hypervelocity stars,” *New Astronomy*, vol. 55, pp. 32–38, Aug. 2017.
- [42] E. Audit and P. Hennebelle, “Thermal condensation in a turbulent atomic hydrogen flow,” *A&A*, vol. 433, pp. 1–13, Apr. 2005.
- [43] J. S. Mathis, P. G. Mezger, and N. Panagia, “Interstellar radiation field and dust temperatures in the diffuse interstellar medium and in giant molecular clouds,” *A&A*, vol. 128, pp. 212–229, Nov. 1983.
- [44] B. T. Draine and N. Anderson, “Temperature fluctuations and infrared emission from interstellar grains,” *ApJ*, vol. 292, pp. 494–499, May 1985.
- [45] B. T. Draine and A. Li, “Infrared Emission from Interstellar Dust. I. Stochastic Heating of Small Grains,” *ApJ*, vol. 551, pp. 807–824, Apr. 2001.
- [46] C. G. T. Haslam, C. J. Salter, H. Stoffel, and W. E. Wilson, “A 408-MHZ All-Sky Continuum Survey. II. The Atlas of Contour Maps,” *Astronomy and Astrophysics Supplement*, vol. 47, p. 1, Jan. 1982.

- [47] Planck Collaboration, “Planck 2013 results. I. Overview of products and scientific results,” *A&A*, vol. 571, p. A1, Nov. 2014.
- [48] B. T. Draine, “Photoelectric heating of interstellar gas,” *Astrophysical Journal Supplement*, vol. 36, pp. 595–619, Apr. 1978.
- [49] H. J. Habing, “The interstellar radiation density between 912 Å and 2400 Å,” *Bulletin of the Astronomical Institutes of the Netherlands*, vol. 19, p. 421, Jan. 1968.
- [50] A. Parravano, D. J. Hollenbach, and C. F. McKee, “Time Dependence of the Ultraviolet Radiation Field in the Local Interstellar Medium,” *The Astrophysical Journal*, vol. 584, pp. 797–817, Feb. 2003.
- [51] O. Berné, É. Habart, E. Peeters, A. Abergel, E. A. Bergin, J. Bernard-Salas, E. Bron, J. Cami, E. Dartois, A. Fuente, J. R. Goicoechea, K. D. Gordon, Y. Okada, T. Onaka, M. Robberto, M. Röllig, A. G. G. M. Tielens, S. Vicente, M. G. Wolfire, F. Alarcón, C. Boersma, A. Canin, R. Chown, D. Dicken, D. Languignon, R. Le Gal, M. W. Pound, B. Trahin, T. Simmer, A. Sidhu, D. Van De Putte, S. Cuadrado, C. Guilloteau, A. Maragkoudakis, B. R. Schefer, T. Schirmer, S. Cazaux, I. Aleman, L. Allamandola, R. Aucht, G. A. Baratta, S. Bejaoui, P. P. Bera, G. Bilalbegović, J. H. Black, F. Boulanger, J. Bouwman, B. Brandl, P. Brechignac, S. Brünken, A. Burkhardt, A. Candian, J. Cernicharo, M. Chabot, S. Chakraborty, J. Champion, S. W. J. Colgan, I. R. Cooke, A. Coutens, N. L. J. Cox, K. Demyk, J. Donovan Meyer, C. Engrand, S. Foschino, P. García-Lario, L. Gavilan, M. Gerin, M. Godard, C. A. Gottlieb, P. Guillard, A. Gusdorf, P. Hartigan, J. He, E. Herbst, L. Hornekaer, C. Jäger, E. Janot-Pacheco, C. Joblin, M. Kaufman, F. Kemper, S. Kendrew, M. S. Kirsanova, P. Klaassen, C. Knight, S. Kwok, Á. Labiano, T. S. Y. Lai, T. J. Lee, B. Lefloch, F. Le Petit, A. Li, H. Linz, C. J. Mackie, S. C. Madden, J. Mascetti, B. A. McGuire, P. Merino, E. R. Micelotta, K. Misselt, J. A. Morse, G. Mulas, N. Neelamkodan, R. Ohsawa, A. Omont, R. Paladini, M. E. Palumbo, A. Pathak, Y. J. Pendleton, A. Petrignani, T. Pino, E. Puga, N. Rangwala, M. Rapacioli, A. Ricca, J. Roman-Duval, J. Roser, E. Roueff, G. Rouillé, F. Salama, D. A. Sales, K. Sandstrom, P. Sarre, E. Sciamma-O’Brien, K. Sellgren, M. J. Shannon, S. S. Shenoy, D. Teyssier, R. D. Thomas, A. Togi, L. Verstraete, A. N. Witt, A. Wootten, N. Ysard, H. Zettergren, Y. Zhang, Z. E. Zhang, and J. Zhen, “PDRs4All : A JWST Early Release Science Program on Radiative Feedback from Massive Stars,” *Publications of the Astronomical Society of the Pacific*, vol. 134, p. 054301, May 2022.
- [52] L. M. Haffner, R. J. Reynolds, G. J. Madsen, A. S. Hill, K. A. Barger, K. P. Jaehnig, E. J. Mierkiewicz, J. W. Percival, and N. Chopra, “Early Results from the Wisconsin H-Alpha Mapper Southern Sky Survey,” in *The Dynamic Interstellar Medium : A Celebration of the Canadian Galactic Plane Survey* (R. Kothes, T. L. Landecker, and A. G. Willis, eds.), vol. 438 of *Astronomical Society of the Pacific Conference Series*, p. 388, Dec. 2010.
- [53] S. L. Snowden, M. J. Freyberg, P. P. Plucinsky, J. H. M. M. Schmitt, J. Truemper, W. Voges, R. J. Edgar, D. McCammon, and W. T. Sanders, “First Maps of the Soft X-Ray Diffuse Background from the ROSAT XRT/PSPC All-Sky Survey,” *The Astrophysical Journal*, vol. 454, p. 643, Dec. 1995.
- [54] J. L. Han, “Magnetic Fields in Our Galaxy : How much do we know? III. Progress in the Last Decade,” *Chinese Journal of Astronomy and Astrophysics Supplement*, vol. 6, pp. 211–217, Dec. 2006.
- [55] S. Chandrasekhar and E. Fermi, “Problems of Gravitational Stability in the Presence of a Magnetic Field,” *The Astrophysical Journal*, vol. 118, p. 116, July 1953.
- [56] P. Hennebelle and E. Falgarone, “Turbulent molecular clouds,” *The Astronomy and Astrophysics Review*, vol. 20, p. 55, Nov. 2012.
- [57] M. A. Miville-Deschênes, G. Joncas, E. Falgarone, and F. Boulanger, “High resolution 21 cm mapping of the Ursa Major Galactic cirrus : Power spectra of the high-latitude H I gas,” *A&A*, vol. 411, pp. 109–121, Nov. 2003.

- [58] P. André, “The Initial Conditions for Protostellar Collapse : Observational Constraints,” in *EAS Publications Series* (J. Bouvier and J.-P. Zahn, eds.), vol. 3 of *EAS Publications Series*, pp. 1–38, Jan. 2002.
- [59] C. Bertout, L. Siess, and S. Cabrit, “The evolution of stars in the Taurus-Auriga T association,” *A&A*, vol. 473, pp. L21–L24, Oct. 2007.
- [60] P. Kroupa, “On the variation of the initial mass function,” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 322, pp. 231–246, Apr. 2001.
- [61] G. Chabrier, “The Galactic Disk Mass Function : Reconciliation of the Hubble Space Telescope and Nearby Determinations,” *ApJL*, vol. 586, pp. L133–L136, Apr. 2003.
- [62] E. E. Salpeter, “The Luminosity Function and Stellar Evolution.,” *ApJ*, vol. 121, p. 161, Jan. 1955.
- [63] A. Chacón-Tanarro, J. E. Pineda, P. Caselli, L. Bizzocchi, R. A. Gutermuth, B. S. Mason, A. I. Gómez-Ruiz, J. Harju, M. Devlin, S. R. Dicker, T. Mroczkowski, C. E. Romero, J. Sievers, S. Stanchfield, S. Offner, and D. Sánchez-Argüelles, “Dust opacity variations in the pre-stellar core L1544,” *A&A*, vol. 623, p. A118, Mar. 2019.
- [64] D. Ward-Thompson and A. P. Whitworth, *An Introduction to Star Formation*. 2015.
- [65] V. Könyves, P. André, A. Men’shchikov, P. Palmeirim, D. Arzoumanian, N. Schneider, A. Roy, P. Didelon, A. Maury, Y. Shimajiri, J. Di Francesco, S. Bontemps, N. Peretto, M. Benedettini, J. P. Bernard, D. Elia, M. J. Griffin, T. Hill, J. Kirk, B. Ladjelate, K. Marsh, P. G. Martin, F. Motte, Q. Nguyễn Luong, S. Pezzuto, H. Roussel, K. L. J. Rygl, S. I. Sadavoy, E. Schisano, L. Spinoglio, D. Ward-Thompson, and G. J. White, “A census of dense cores in the Aquila cloud complex : SPIRE/PACS observations from the Herschel Gould Belt survey,” *A&A*, vol. 584, p. A91, Dec. 2015.
- [66] P. Hennebelle and G. Chabrier, “Analytical Theory for the Initial Mass Function : CO Clumps and Prestellar Cores,” *ApJ*, vol. 684, pp. 395–410, Sept. 2008.
- [67] P. Hennebelle and G. Chabrier, “Analytical Theory for the Initial Mass Function. II. Properties of the Flow,” *ApJ*, vol. 702, pp. 1428–1442, Sept. 2009.
- [68] P. Hennebelle and G. Chabrier, “Analytical Theory for the Initial Mass Function. III. Time Dependence and Star Formation Rate,” *ApJ*, vol. 770, p. 150, June 2013.
- [69] C. L. H. Hull and Q. Zhang, “Interferometric observations of magnetic fields in forming stars,” *Frontiers in Astronomy and Space Sciences*, vol. 6, p. 3, Mar. 2019.
- [70] Z.-Y. Li, R. Krasnopolsky, and H. Shang, “Does Magnetic-field-Rotation Misalignment Solve the Magnetic Braking Catastrophe in Protostellar Disk Formation?,” *ApJ*, vol. 774, p. 82, Sept. 2013.
- [71] K. Furuya, Y. Aikawa, K. Tomida, T. Matsumoto, K. Saigo, K. Tomisaka, F. Hersant, and V. Wakelam, “Chemistry in the First Hydrostatic Core Stage by Adopting Three-dimensional Radiation Hydrodynamic Simulations,” *ApJ*, vol. 758, p. 86, Oct. 2012.
- [72] M. Gerin, J. Pety, A. Fuente, J. Cernicharo, B. Commerçon, and N. Marcelino, “Nascent bipolar outflows associated with the first hydrostatic core candidates Barnard 1b-N and 1b-S,” *A&A*, vol. 577, p. L2, May 2015.
- [73] E. F. van Dishoeck, L. E. Kristensen, A. O. Benz, E. A. Bergin, P. Caselli, J. Cernicharo, F. Herpin, M. R. Hogerheijde, D. Johnstone, R. Liseau, B. Nisini, R. Shipman, M. Tafalla, F. van der Tak, F. Wyrowski, Y. Aikawa, R. Bachiller, A. Baudry, M. Benedettini, P. Bjerkeli, G. A. Blake, S. Bontemps, J. Braine, C. Brinch, S. Bruderer, L. Chavarría, C. Codella, F. Daniel, T. de Graauw, E. Deul, A. M. di Giorgio, C. Dominik, S. D. Doty, M. L. Dubernet, P. Encrenaz, H. Feuchtgruber, M. Fich, W. Frieswijk, A. Fuente, T. Giannini, J. R. Goicoechea, F. P. Helmich, G. J. Herczeg, T. Jacq, J. K. Jørgensen, A. Karska, M. J. Kaufman, E. Keto, B. Larsson, B. Lefloch, D. Lis, M. Marseille, C. McCoey, G. Melnick, D. Neufeld, M. Olberg, L. Pagani, O. Panić, B. Parise, J. C. Pearson, R. Plume, C. Risacher, D. Salter, J. Santiago-García, P. Saraceno, P. Stäuber, T. A. van Kempen, R. Visser, S. Viti, M. Walmsley, S. F. Wampfler, and U. A. Yıldız, “Water in

Star-forming Regions with the Herschel Space Observatory (WISH). I. Overview of Key Program and First Results," *PAPS*, vol. 123, p. 138, Feb. 2011.

- [74] K. Wang, Q. Zhang, L. Testi, F. van der Tak, Y. Wu, H. Zhang, T. Pillai, F. Wyrowski, S. Carey, S. E. Ragan, and T. Henning, "Hierarchical fragmentation and differential star formation in the Galactic 'Snake' : infrared dark cloud G11.11-0.12," *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 439, pp. 3275–3293, Apr. 2014.
- [75] N. A. Bahcall, "Hubble's Law and the expanding universe," *Proceedings of the National Academy of Science*, vol. 112, pp. 3173–3175, Mar. 2015.