

# INTRODUCTION A LA RELATIVITE GENERALE

LUC BLANCHET

*GR $\epsilon$ CO, Institut d'Astrophysique de Paris,  
UMR 7095 du CNRS, Université Pierre & Marie Curie,  
98<sup>bis</sup> boulevard Arago, 75014 Paris, France*

(Dated: October 29, 2008)

Abstract

1. INTRODUCTION
2. PRINCIPE DE RELATIVITE
3. RELATIVITE RESTREINTE
4. PRINCIPE D'EQUIVALENCE
5. FORCES GRAVITATIONNELLES
6. CALCUL TENSORIEL
7. RELATIVITE GENERALE
8. TESTS CLASSIQUES
9. RAYONNEMENT GRAVITATIONNEL
10. DETECTION DU RAYONNEMENT GRAVITATIONNEL
11. TROUS NOIRS
12. DYNAMIQUE DES TROUS NOIRS

## I. INTRODUCTION

La relativité générale est quelquefois considérée comme la plus importante création intellectuelle jamais réalisée par un seul homme: Albert Einstein. Elle a révolutionné notre vision de la nature de l'espace et du temps, et de notre perception familière de la force de la gravitation. Les physiciens "relativistes" admirent l'extraordinaire cohérence mathématique – et donc la beauté – de ses équations. La relativité générale est née en 1915 après des années de gestation laborieuse remontant à la découverte de la relativité restreinte en 1905 par Einstein, Lorentz et Poincaré. Le phénomène familier de la gravitation possède en relativité générale l'interprétation extraordinaire d'être la manifestation de la courbure de l'espace et du temps produite par la présence des corps massifs. Cette description est une conséquence d'un principe fondamental, appelé de nos jours le principe d'équivalence d'Einstein, qui est la traduction en physique moderne du fait que tous les corps sont accélérés de la même façon dans un champ gravitationnel.

### A. Place de la gravitation en physique

La force gravitationnelle n'est qu'une des quatre interactions fondamentales connues. On connaît en effet au niveau le plus fondamental trois familles de quarks et de leptons et les quatre interactions suivantes:

1. L'interaction électromagnétique lie les électrons et les protons dans les atomes, et explique la cohésion des corps solides habituels (morceau de craie, la Terre, ...);
2. L'interaction gravitationnelle, qui est responsable du mouvement des planètes, de la structure des galaxies et du mouvement des grandes masses (y compris l'univers lui-même) sur des grandes échelles de distance;
3. L'interaction forte, qui lie entre eux les protons et les neutrons dans les noyaux atomiques;
4. L'interaction faible, qui se manifeste dans des processus radioactifs comme la désintégration du neutron.

Les interactions électromagnétique, forte et faible sont décrites par des théories quantiques des champs. La théorie électrofaible (modèle de Weinberg-Salam) unifie les interactions électromagnétique et faible, tandis que la chromodynamique quantique décrit l'interaction forte. Ces théories constituent ce que l'on appelle le modèle standard de la physique des particules. Par contre l'interaction gravitationnelle est décrite par une *théorie classique*, la relativité générale, qui se ramène dans la limite où la vitesse de la lumière  $c \rightarrow \infty$  à la loi de Newton.

On s'attend à ce que les effets quantiques gravitationnels n'interviennent pas avant l'échelle d'unités de Planck formée avec les trois constantes fondamentales  $c$ ,  $G$  et  $\hbar$ .<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup> La constante gravitationnelle vaut environ  $G \simeq 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg}/\text{s}^2$ . Sa valeur n'est connue qu'avec quatre chiffres significatifs ce qui en fait la constante fondamentale la moins bien déterminée expérimentalement.

L'énergie de Planck est donnée par

$$E_P = \sqrt{\frac{\hbar c^5}{G}} = 1.3 \cdot 10^{19} \text{ GeV} . \quad (1.1)$$

Une telle énergie serait atteinte dans les premiers instants après le Big-Bang, au temps de Planck  $T_P = 5.4 \cdot 10^{-44} \text{ s}$ , lorsque le rayon de l'univers avait la longueur de Planck  $L_P = 1.6 \cdot 10^{-35} \text{ m}$ .

La force gravitationnelle se distingue des autres forces par le fait que c'est de loin *la plus faible* des quatre interactions connues. Soit l'atome d'hydrogène formé d'un proton de masse  $m_p$  et de charge  $e$ , et d'un électron de masse  $m_e$  et de charge  $-e$ . Il s'exerce entre le proton et l'électron une force électrostatique attractive donnée par la loi de Coulomb (nous faisons un raisonnement de physique classique)

$$F_e = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} , \quad (1.2)$$

ainsi qu'une force gravitationnelle attractive donnée par la loi de Newton

$$F_g = \frac{G m_p m_e}{r^2} . \quad (1.3)$$

Ces deux forces sont des forces en  $1/r^2$ ; leur rapport ne dépend pas de la distance entre le proton et l'électron et a la valeur extrêmement petite

$$\frac{F_g}{F_e} = \frac{4\pi\epsilon_0 G m_p m_e}{e^2} = 4 \cdot 10^{-40} . \quad (1.4)$$

Cependant, malgré son extrême faiblesse, la force gravitationnelle *domine l'univers à grande échelle*. Il y a pour cela deux raisons:

1. Le potentiel gravitationnel, comme le potentiel électromagnétique, est à *longue portée*,

$$U(r) = \frac{G M M'}{r} . \quad (1.5)$$

Il n'y a pas de facteur de Yukawa  $\propto \exp[-\frac{\mu_g c}{\hbar} r]$  ce qui s'interprète en disant que le graviton, qui serait la particule médiatrice de l'interaction gravitationnelle, a une masse nulle,  $\mu_g = 0$ .

2. Mais, au contraire des charges électriques, les charges gravitationnelles ou masses sont toujours *positives*. En effet la masse est en fait reliée à l'énergie totale du corps, ce que l'on exprime par le *principe d'équivalence d'Einstein*

$$m_g = m_i = \frac{E}{c^2} > 0 . \quad (1.6)$$

Ici  $m_g$  et  $m_i$  désignent respectivement la masse gravitationnelle (analogue de la charge) et la masse inertielle, qui sont égales pour tous les corps, un fait observationnel fondamental très bien établi expérimentalement. Donc, au contraire de la force électromagnétique qui disparaît sur des échelles macroscopiques à cause de la neutralité électrique des corps, l'effet de la force gravitationnelle est toujours cumulatif et s'exerce à grande échelle.

La relativité générale permet d'expliquer tous les phénomènes connus liés à la gravitation, souvent avec un accord quantitatif remarquable avec les observations. Par exemple la précision des tests de la relativité générale dans le système solaire atteint  $10^{-4}$ . Aujourd'hui la relativité générale est un "outil" permettant d'explorer l'existence et de comprendre les observations de nouveaux objets ou de nouveaux phénomènes en astrophysique. Ainsi les propriétés particulières du trou noir sont utilisées par les astrophysiciens travaillant sur les objets compacts et les disques d'accrétion autour de trous noirs. La relativité générale va probablement permettre d'ouvrir une nouvelle "fenêtre" en astronomie, celle des ondes gravitationnelles, car ce rayonnement a des propriétés spécifiques très différentes des ondes électromagnétiques.

Il faut pourtant garder à l'esprit que le domaine où s'exerce la relativité générale est le *macrocosme*. Comme cette théorie n'incorpore pas les lois de la mécanique quantique, il est probable qu'elle doive être considérée comme une théorie "effective" valable uniquement à grande échelle ( $\ll L_P$ ). Assez étrangement, la force gravitationnelle n'a pu être testée en laboratoire que jusqu'à une échelle de l'ordre du millimètre. A une échelle microscopique, inférieure ou très inférieure au millimètre, on ne connaît expérimentalement rien de la loi gravitationnelle. Il est vraisemblable que la relativité générale *stricto sensu* ne s'applique plus à des très petites échelles.

## B. Historique de la gravitation

Il est souvent utile d'avoir en tête, à titre de référence, les dates et époques importantes dans l'histoire de la gravitation et de la relativité. Nous donnons ici sans commentaire une liste non exhaustive (la plupart des concepts mentionnés seront expliqués plus loin).

- VI<sup>ème</sup> siècle avant JC : Théorème de Pythagore
- III<sup>ème</sup> siècle avant JC : Géométrie euclidienne
- V<sup>ème</sup> siècle : Observation (à Byzance) de l'universalité de la chute des corps
- 1543 : Révolution copernicienne
- 1609 et 1619 : Lois de Kepler
- 1632 : Principe d'inertie et lois de la chute des corps (Galilée)
- 1686 : Lois de la dynamique newtonienne
- 1743 : Opérateur des ondes (d'Alembert)
- 1765 : Equations d'Euler
- 1784 et 1798 : Corps obscurs de Michell et Laplace
- 1787 : Equations de Lagrange
- 1798 : Expérience de Cavendish
- 1811 : Equation de Poisson

- 1827 : Courbure gaussienne
- 1826 et 1832 : Géométrie non euclidienne (Lobatchevski et Bolyai)
- 1834 : Equations de Hamilton
- 1845 : Précession anormale de Mercure (Le Verrier)
- 1846 : Découverte de Neptune par le calcul (Le Verrier et Adams)
- 1851 : Expérience de Fizeau
- 1854 : Courbure riemannienne
- 1859 : Expérience de Foucault
- 1887 : Expérience de Michelson et Morley
- 1889 : Expérience d'Eötvös sur le principe d'équivalence
- 1893 : Principe de Mach
- 1905 : Relativité restreinte
- 1906 : Théorie relativiste de la gravitation (Poincaré)
- 1911 : Principe d'équivalence et effet Einstein
- 1913 : Théorie scalaire de Nordstrøm
- 1915 : Equations d'Einstein
- 1916 : Solution de Schwarzschild, ondes gravitationnelles, univers statique d'Einstein
- 1919 : Vérification par Eddington de la déviation de la lumière par le soleil
- 1922 : Cosmologie de Friedman, théorie de Newton-Cartan
- 1927 : Atome primitif de Lemaître
- 1930 : Masse critique de Chandrasekhar
- 1934 : Cosmologie newtonienne (Milne)
- 1939 : Masse critique de Oppenheimer et Volkoff, effondrement gravitationnel
- 1960 : Quasars, concept de trou noir, barres de Weber, expérience de Pound et Rebka (vérification de l'effet Einstein)
- 1961 : Théorie tenseur-scalaire (Brans et Dicke)
- 1963 : Trou noir de Kerr
- 1964 : Effet Shapiro, expérience de Dicke
- 1965 : Rayonnement cosmologique

- 1966 : Théorèmes sur les singularités (Penrose et Hawking)
- 1968 : Pulsars, effet Nordtvedt (principe d'équivalence fort)
- 1969 : Mécanisme de Penrose
- 1971 : Dynamique des trous noirs (Hawking)
- 1972 : Entropie du trou noir (Beckenstein)
- Années 60-70 : Théorèmes d'unicité des trous noirs (Carter et Israel)
- 1974 : Découverte du pulsar binaire (Hulse et Taylor)
- 1976 : Rayonnement de Hawking
- 1979 : Effet d'accélération orbitale du pulsar binaire (Taylor), théorèmes sur la positivité de l'énergie (Schoen et Yau), mirages gravitationnels
- Années 70-80 : Techniques de détection du rayonnement gravitationnel
- 1981 : Cosmologie inflationniste
- 1982 : Cosmologie quantique (équation de Wheeler-De Witt)
- 1984 : Supercordes
- 1986 : Formulation d'Ashtekar de la relativité générale
- Depuis les années 60: Problème de la quantification du champ gravitationnel
- Années 90 : Problème des courbes de rotation de galaxies (matière noire)
- 1998 : Découverte d'une constante cosmologique (énergie noire)
- 2010 (?) : Détection du rayonnement gravitationnel (expériences LIGO et VIRGO)
- 2010 (?) : Tests du principe d'équivalence en orbite (expériences Microscope et STEP)
- 2020 (?) : Observatoire gravitationnel dans l'espace LISA

## II. PRINCIPE DE RELATIVITE

### A. Notions de référentiel et d'événement

- Un système de référence ou *référentiel* est la donnée:
  1. D'un système de coordonnées spatiales  $x^i$  à trois dimensions (où l'indice  $i$  prend les valeurs  $i = 1, 2, 3$ ) permettant de repérer les positions spatiales;
  2. D'un système d'horloges *en chaque point de l'espace* marquant une coordonnée temporelle  $t$  permettant de repérer les instants successifs en ce point.

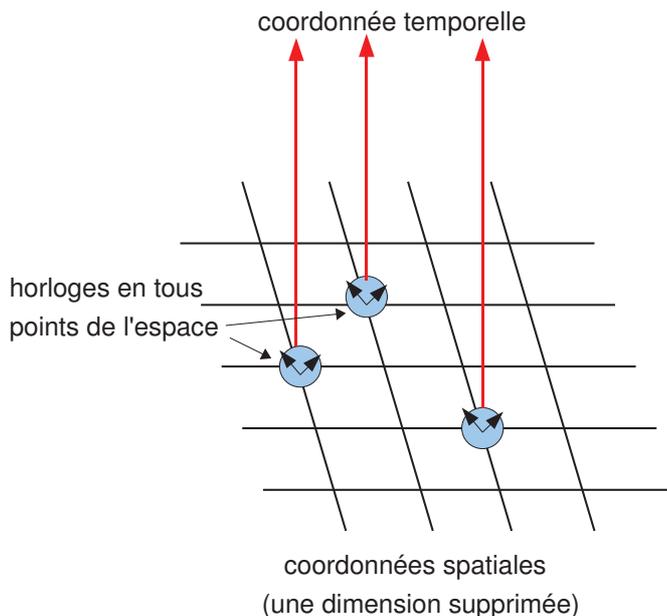


FIG. 1: Notion de référentiel.

En pratique on pourra réaliser un référentiel en assignant des positions fixes, par définition, à un ensemble de corps solides remplissant tout l'espace (chacun des corps étant muni d'une horloge). Un référentiel sera dénoté  $\{t, x^i\}$ .

- Un *événement* est la donnée, dans un référentiel particulier, de trois valeurs particulières des coordonnées spatiales  $x^i$  et d'une valeur de la coordonnée temporelle  $t$  marquée par l'horloge située à la position  $x^i$ . On dénotera indifféremment l'événement  $\mathcal{P}$  par

$$\mathcal{P} = (t, x^i) \equiv (t, \mathbf{x}) \equiv (t, x^1, x^2, x^3) \equiv (t, x, y, z) . \quad (2.1)$$

A partir d'un référentiel  $\{t, x^i\}$  associé aux coordonnées  $t, x^i$  on peut définir un nouveau référentiel  $\{t', x'^i\}$  associé à de nouvelles coordonnées  $t', x'^i$  en posant

$$t' = f^0(t, x^j) , \quad (2.2a)$$

$$x'^i = f^i(t, x^j) , \quad (2.2b)$$

où  $f^0, f^i$  sont quatre fonctions arbitraires de  $t, x^i$  telles que les fonctions inverses donnant  $t, x^i$  en fonction de  $t', x'^i$  existent.<sup>2</sup> Dans les deux référentiels  $\{t, x^i\}$  et  $\{t', x'^i\}$ , reliés entre eux par les transformations de coordonnées (2.2), un *même* événement sera

$$\mathcal{P} = (t, x^i) = (t', x'^i) . \quad (2.3)$$

Il faut penser les événements comme des points dans l'espace et le temps (appelé plus tard l'espace-temps), repérés dans les divers référentiels par des coordonnées telles que (2.3), mais dont la définition est *intrinsèque*, c'est-à-dire qui existent de façon indépendante du choix d'un référentiel en particulier.

Les indications de temps marquées par deux horloges situées à des points distincts de positions spatiales  $x^i$  et  $x^i + \Delta x^i$  peuvent être *synchronisées* au moyen d'échanges de signaux (par exemple lumineux). Soit un signal émis en l'évènement  $\mathcal{P}_1 = (t_1, x^i)$ , où la première horloge marque  $t_1$ , reçu et aussitôt réémis en  $\mathcal{P}_2 = (t_2, x^i + \Delta x^i)$ , où la deuxième horloge marque  $t_2$ , et reçu sur la première horloge en  $\mathcal{P}_3 = (t_3, x^i)$ . Alors on synchronise les deux horloges en choisissant par définition

$$t_2 = \frac{t_1 + t_3}{2} . \quad (2.4)$$

Dans certains cas, on pourra par cette méthode synchroniser de proche en proche toutes les horloges de l'espace entier.

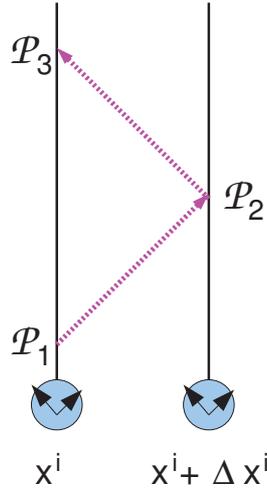


FIG. 2: Synchronisation d'une horloge à l'aide de signaux lumineux.

## B. Notion de référentiel inertiel

On appelle référentiel inertiel un référentiel  $\{t, x^i\}$  dans lequel le mouvement de tous les corps libres, c'est-à-dire *non soumis à l'action de forces extérieures*, est rectiligne et

<sup>2</sup> On suppose donc que le *jacobien* de la transformation, c'est-à-dire le déterminant de la matrice des dérivées partielles des nouvelles coordonnées par rapport aux anciennes,  $J = \det[\partial(t', x'^i)/\partial(t, x^j)]$ , est non nul.

uniforme. Soit  $x^i(t)$  la trajectoire du corps dans le référentiel inertiel, alors<sup>3</sup>

$$\boxed{\frac{d^2x^i(t)}{dt^2} = 0} . \quad (2.5)$$

On admet que dans un référentiel inertiel on peut synchroniser, au sens précédent (2.4), toutes les horloges de l'espace entier.

Il existe de façon évidente une infinité de référentiels inertiels. En effet tout référentiel en mouvement rectiligne et uniforme par rapport à un référentiel inertiel donné est encore un référentiel inertiel. Mais, bien sûr, tous les référentiels ne sont pas inertiels. Soit  $\{t, \mathbf{x}\}$  un référentiel inertiel. Alors,

1. le référentiel accéléré  $\{t', \mathbf{x}'\}$  avec  $t' = t$  et

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{a}t^2 , \quad (2.6)$$

où  $\mathbf{a}$  est un vecteur accélération constant,

2. le référentiel en rotation  $\{t'', x'', y'', z''\}$  avec  $t'' = t$  et

$$x'' = x \cos(\omega t) + y \sin(\omega t) , \quad (2.7a)$$

$$y'' = -x \sin(\omega t) + y \cos(\omega t) , \quad (2.7b)$$

$$z'' = z , \quad (2.7c)$$

ne sont *pas* des référentiels inertiels. Les référentiels non inertiels sont les référentiels qui sont accélérés par rapport à un référentiel inertiel.

### C. Problème de l'origine de l'inertie

Pourquoi certains référentiels privilégiés dans la nature sont-ils des référentiels inertiels? Cette question a soulevé de nombreux débats philosophiques passionnés. La réponse donnée par Newton dans les *Principia* (1687) est qu'il existe un *espace absolu* et que les référentiels inertiels sont ceux qui sont soit immobile soit en mouvement rectiligne et uniforme par rapport à cet espace absolu. Cette réponse n'est pas très satisfaisante (quelle serait l'origine de l'espace absolu?) et a été contestée par des philosophes tels que Berkeley. Mais ce n'est qu'avec Mach (1893) qu'une explication plus satisfaisante a été proposée.

**Principe de Mach.** *Il n'y a pas d'espace absolu, mais c'est la distribution de l'ensemble de la matière dans l'univers, notamment les étoiles lointaines mais très nombreuses, mais aussi les masses proches, qui détermine ceux des référentiels qui sont inertiels.*

L'expérience du seau de Newton permet de comparer les points de vue de Newton et Mach. Le seau rempli d'eau est accroché à une corde initialement enroulée en torsade et que l'on laisse se dérouler, entraînant la rotation du seau. Le seau et l'eau sont d'abord

---

<sup>3</sup> Cette définition suppose que les coordonnées inertielles utilisées  $\{t, x^i\}$  sont cartésiennes.

immobiles (I), puis le seau commence à tourner alors que l'eau est encore immobile (II) — les filets d'eau ne sont pas encore entraînés par la viscosité avec la rotation du seau —, enfin l'eau entraînée par le seau est en rotation avec le seau et est donc immobile par rapport au seau (III). D'après Newton, la surface de l'eau prend une forme incurvée (car elle est soumise à des forces inertielles) quand l'eau est accélérée par rapport à l'espace absolu, c'est-à-dire dans la configuration (III) uniquement. D'après Mach, la surface s'incurve quand l'eau

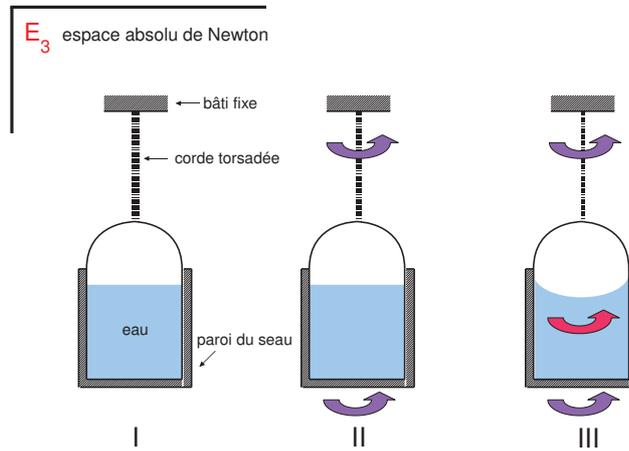


FIG. 3: Point de vue de Newton.

est accélérée par rapport à la distribution de matière dans l'univers, donnée par les étoiles lointaines et aussi les masses proches. Comme on peut négliger en général la contribution des masses proches il n'y a pas de différence avec Newton et l'eau s'incurve aussi dans (III) uniquement.

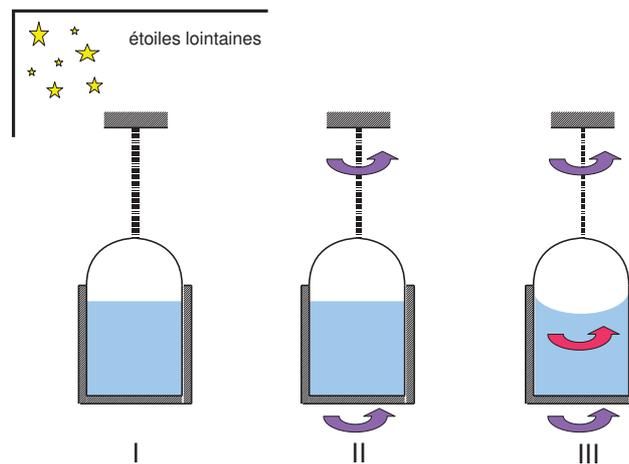


FIG. 4: Point de vue de Mach dans le cas où la masse du seau est négligeable.

Mais ceci n'est vrai que si les masses proches jouent un rôle négligeable, et notamment si la masse du seau est négligeable. Si ce n'est pas le cas, et si les parois du seau sont très épaisses de sorte que la contribution de la masse du seau soit très supérieure à celle de toutes

les autres masses dans l'univers (dans une expérience de pensée), la surface de l'eau doit s'incurver dans la configuration (II) où elle est en rotation par rapport au seau et non dans la configuration (III) où elle est en co-rotation avec le seau.

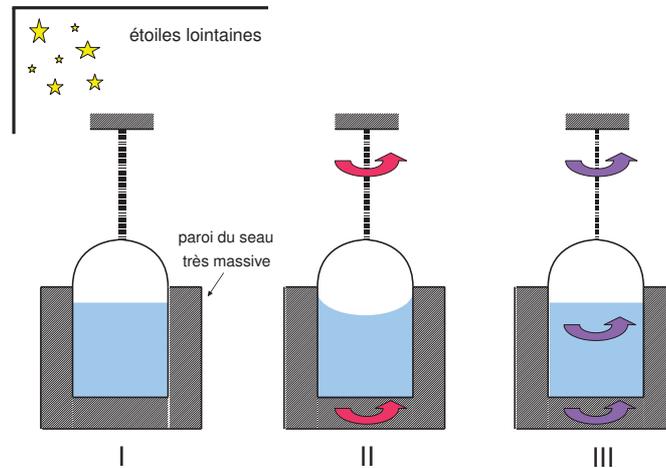


FIG. 5: Point de vue de Mach dans le cas où la masse du seau domine la masse des étoiles.

Ainsi, nous voyons que les points de vue de Newton et Mach peuvent être départagés, en principe, par une expérience de physique. Le principe de Mach est très certainement la réponse correcte au problème de l'origine de l'inertie, et nous verrons que la relativité générale incorpore essentiellement le principe de Mach.

#### D. Principe de relativité

Le principe de relativité est basé sur l'observation et l'expérience. Galilée est dans la cabine d'un bateau en mouvement rectiligne et uniforme par rapport au quai fixe — la surface de l'eau est supposée parfaitement plane — et essaye de déterminer la vitesse du bateau par une expérience confinée dans la cabine du bateau. Il remarque qu'un objet tombe au sol parfaitement verticalement, que des mouches semblent voler aléatoirement dans toutes les directions sans que la direction du mouvement du bateau joue un rôle privilégié, *etc.* Galilée conclue que le résultat des expériences dans la cabine du bateau est le même que pour celles réalisées à quai.

**Principe de relativité.** *Les lois de la nature prennent la même forme dans tous les référentiels inertiels. Autrement dit, le mouvement rectiligne et uniforme est indétectable. Il est impossible, par une expérience réalisée localement dans un laboratoire, de détecter une éventuelle vitesse (constante) du laboratoire.*

Les équations mathématiques décrivant les lois de la nature doivent donc être mathématiquement invariantes dans les transformations de coordonnées entre référentiels inertiels. Soit  $\Phi(t)$  une grandeur mathématique décrivant un phénomène dans un référentiel

inertiel de temps  $t$ , et satisfaisant à la loi d'évolution

$$\boxed{\frac{d}{dt}\Phi(t) = \mathcal{F}[\Phi(t)]}, \quad (2.8)$$

où  $\mathcal{F}$  est une certaine fonctionnelle de  $\Phi$ .<sup>4</sup> Alors le même phénomène sera décrit dans un autre référentiel inertiel de temps  $t'$  par  $\Phi'(t')$  satisfaisant à

$$\boxed{\frac{d}{dt'}\Phi'(t') = \mathcal{F}[\Phi'(t')]}, \quad (2.9)$$

où le point important est que  $\mathcal{F}$  est la *même* fonctionnelle que dans le premier référentiel.

Le principe de relativité ainsi énoncé en (2.8)–(2.9) n'est pas complet car il doit être complété par la donnée des lois mathématiques de transformation de coordonnées entre référentiels inertiels, ces lois impliquant notamment la fameuse loi d'addition des vitesses. On voit donc que l'on pourra avoir *a priori* plusieurs relativités possibles, chacune étant définie par des lois de transformation particulières.

### E. Relativité galiléenne

La relativité galiléenne est fondée sur les lois suivantes de transformation  $\{t, x^i\} \rightarrow \{t', x'^i\}$  entre référentiels inertiels. On a la translation dans le temps

$$\boxed{t' = t + b}, \quad (2.10)$$

où  $b$  est un temps initial constant, et la transformation de l'espace

$$\boxed{x'^i = R^i_j x^j - V^i t + a^i}, \quad (2.11)$$

où  $R^i_j$  est une matrice de rotation dont les coefficients sont constants, où  $V^i$  est un vecteur vitesse constant, et où  $a^i$  est une position initiale constante. On utilise la convention de sommation sur les indices répétés, ce qui signifie que  $R^i_j x^j$  dénote en fait  $\sum_{j=1}^3 R^i_j x^j$ . La matrice  $R^i_j$  satisfait la loi des matrices de rotation,  ${}^t R = R^{-1}$ , qui s'écrit en notation indicielle

$$\delta_{kl} R^k_i R^l_j = \delta_{ij}, \quad (2.12)$$

où  $\delta_{ij}$  désigne le symbole de Kronecker ou métrique euclidienne, qui donne grâce au théorème de Pythagore l'intervalle de distance en géométrie euclidienne,

$$l^2 = \delta_{ij}(x_2^i - x_1^i)(x_2^j - x_1^j) = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2. \quad (2.13)$$

**Exercice.** Vérifier que la rotation  $R^i_j$  d'axe  $\mathbf{n}$  (où  $\mathbf{n}$  est un vecteur unitaire,  $\mathbf{n}^2 = 1$ ) et d'angle  $\alpha$  autour de cet axe s'écrit

$$R^i_j = n^i n_j + (\delta_j^i - n^i n_j) \cos \alpha - \varepsilon^i_{jk} n^k \sin \alpha, \quad (2.14)$$

---

<sup>4</sup>  $\Phi(t)$  est par exemple le vecteur formé des composantes de position et de vitesse d'une particule, comme dans (2.19) plus bas.

où  $\delta_j^i$  est le symbole de Kronecker et où  $\varepsilon^i{}_{jk}$  est le symbole complètement antisymétrique, qui change de signe par transposition de toute paire d'indices, et qui est tel que  $\varepsilon_{123} = 1$ .

Les transformations (2.10)–(2.11) forment un groupe, appelé groupe de Galilée, qui a *dix paramètres*: trois angles d'Euler pour la matrice de rotation  $R^i{}_j$  (ou, de façon équivalente, deux composantes pour une direction unitaire  $\mathbf{n}$  et un angle de rotation  $\alpha$  autour de cette direction), trois composantes de vitesse  $V^i$ , trois positions initiales  $a^i$  et un temps initial  $b$ . L'isotropie de l'espace — toutes les directions sont équivalentes pour définir un référentiel inertiel — résulte de l'invariance par rapport au sous-groupe formé des rotations (c'est-à-dire  $t' = t$  et  $x'^i = R^i{}_j x^j$ ), et l'homogénéité de l'espace et du temps — tous les événements sont équivalents — résulte de l'invariance par rapport au sous-groupe des translations ( $t' = t + b$ ,  $x'^i = x^i + a^i$ ).

On sait par le théorème de Noether que à chaque invariance (définie au niveau du lagrangien) correspond une quantité conservée. Ainsi, une théorie invariante relativiste par rapport au groupe de Galilée (comme la loi newtonienne du mouvement de  $N$  corps) possédera *dix quantités conservées* associées aux dix paramètres du groupe de Galilée: une énergie associée à l'invariance par translation dans le temps, trois composantes d'impulsion pour l'invariance par translation dans l'espace, trois composantes de moment cinétique pour les rotations, et trois composantes pour le centre de masse pour les transformations “spéciales”  $x'^i = x^i - V^i t$ .

Le sous-groupe des transformations dites spéciales de Galilée est le sous-groupe à 3 paramètres associé au vecteur vitesse  $V^i$  seul,

$$t' = t, \quad (2.15a)$$

$$x'^i = x^i - V^i t. \quad (2.15b)$$

Le référentiel  $\{t', x'^i\}$  est donc animé de la vitesse  $V^i$  par rapport au référentiel  $\{t, x^i\}$ . On en déduit la loi usuelle d'addition des vitesses: la vitesse  $v'^i$  d'une particule relativement à  $\{t', x'^i\}$  est donnée en fonction de sa vitesse  $v^i$  dans le référentiel  $\{t, x^i\}$  par

$$v'^i = \frac{dx'^i}{dt'} = \frac{dx^i - V^i dt}{dt} = v^i - V^i. \quad (2.16)$$

Le groupe de Galilée, et donc le sous groupe des transformations spéciales (2.15), laisse invariantes les lois de la mécanique newtonienne. Par exemple le mouvement newtonien de  $N$  particules ponctuelles donné dans le référentiel  $\{t, x^i\}$  par la loi

$$m_A \frac{d^2 x_A^i(t)}{dt^2} = -G \sum_{B \neq A} m_A m_B \frac{x_A^i(t) - x_B^i(t)}{|\mathbf{x}_A(t) - \mathbf{x}_B(t)|^3}, \quad (2.17)$$

sera donné dans le référentiel  $\{t', x'^i\}$  par la même loi

$$m_A \frac{d^2 x_A'^i(t')}{dt'^2} = -G \sum_{B \neq A} m_A m_B \frac{x_A'^i(t') - x_B'^i(t')}{|\mathbf{x}'_A(t') - \mathbf{x}'_B(t')|^3}. \quad (2.18)$$

Si  $\Phi(t)$  désigne le vecteur d'espace des phases des  $N$  particules, c'est-à-dire

$$\Phi(t) = \left\{ x_A^i(t), \frac{dx_A^i(t)}{dt}, A = 1, \dots, N \right\}, \quad (2.19)$$

on en déduit immédiatement par comparaison de (2.17) à (2.8) la fonctionnelle  $\mathcal{F}$  correspondant au mouvement de  $N$  corps, et d'après (2.18) on vérifie bien que cette fonctionnelle est la même dans les deux référentiels inertiels.

Par contre, le groupe de Galilée ne laisse *pas* invariantes les lois de l'électromagnétisme ou équations de Maxwell. On pensait donc au XIX<sup>ème</sup> siècle que les équations de Maxwell ne sont valables que dans un référentiel privilégié qui réassocie en quelque sorte l'espace absolu de Newton et que l'on a appelé l'*ether*. Il était donc légitime de chercher à mesurer la vitesse de la Terre par rapport à l'éther en utilisant une expérience d'électromagnétisme. L'impossibilité expérimentale de mesurer la vitesse du mouvement de la Terre par des expériences d'interférométrie optique dont la plus fameuse est l'expérience de Michelson et Morley (1887), a conduit à l'abandon du principe de relativité galiléenne basé sur les lois de transformation (2.10)–(2.11) et de le remplacer par un nouveau principe de relativité fondé sur les lois de transformations qui laissent invariantes les équations de Maxwell.

### III. RELATIVITE RESTREINTE

La nouvelle relativité date de l'article séminal d'Einstein (1905). Le groupe de transformations entre référentiels inertiels qui laisse invariante les équations de Maxwell a été découvert par Lorentz et Poincaré. La vitesse de la lumière dans le vide reste donc invariante par changement de référentiel inertiel, et possède la valeur

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = 299\,792\,458 \text{ m/s} . \quad (3.1)$$

où  $\varepsilon_0$  et  $\mu_0$  dénotent la constante diélectrique et la perméabilité magnétique du vide.

#### A. Groupes de Lorentz et Poincaré

Soit  $\{x^\alpha\} = \{x^0, x^i\}$  un référentiel inertiel, où l'on pose  $x^0 = ct$  avec  $c$  la vitesse de la lumière constante (3.1), et où l'indice grec  $\alpha$  (et de même  $\beta, \gamma, \dots$ ) prend les valeurs dans l'espace-temps 0,1,2,3. La relativité restreinte postule que les lois de transformation de  $\{x^\alpha\} = \{ct, x, y, z\}$  vers un autre référentiel inertiel  $\{x'^\alpha\} = \{ct', x', y', z'\}$  s'écrivent

$$\boxed{x'^\alpha = \Lambda^\alpha_\beta x^\beta + a^\alpha} , \quad (3.2)$$

où  $a^\alpha$  est un vecteur à 4 composantes constant, et où  $\Lambda^\alpha_\beta$  est une matrice  $4 \times 4$  constante. Ici et partout on utilise la convention de sommation sur les indices. Donc par exemple  $\Lambda^\alpha_\beta x^\beta = \sum_{\beta=0}^3 \Lambda^\alpha_\beta x^\beta$ . Tous les indices apparaissant deux fois dans une expression (indices répétés) sont sommés. Dans le cas des indices grecs spatio-temporels l'un des indices répétés sera toujours en haut et l'autre en bas.

La matrice  $\Lambda^\alpha_\beta$  s'appelle une *matrice de Lorentz*. Elle n'est pas quelconque mais doit satisfaire aux contraintes

$$\boxed{\eta_{\alpha\beta} \Lambda^\alpha_\gamma \Lambda^\beta_\delta = \eta_{\gamma\delta}} , \quad (3.3)$$

où  $\eta_{\alpha\beta}$  désigne la métrique de Minkowski qui constitue une généralisation pour l'espace-temps de la métrique euclidienne  $\delta_{ij}$  et s'écrit

$$\eta_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \quad (3.4)$$

La métrique  $\eta_{\alpha\beta}$  de Minkowski est dite pseudo-euclidienne de signature  $-+++$  (noter la convention généralement utilisée par les "relativistes" pour la signature, qui est opposée de celle des physiciens des particules). La contrainte (3.3) est la propriété fondamentale des matrices de Lorentz.

**Exercice.** Calculer le résultat de l'action successive de deux transformations  $(\Lambda^\alpha_\beta, a^\alpha)$  et  $(\Lambda'^\alpha_\beta, a'^\alpha)$  dites de Poincaré. Vérifier que les lois de transformation (3.2) avec la contrainte (3.3) forment un groupe, appelé groupe de Poincaré.

Les transformations correspondant à  $a^\alpha = 0$  forment un sous-groupe du groupe de Poincaré appelé le groupe de Lorentz. Dans la suite on ne considèrera en fait que le sous-groupe de Lorentz dit propre, pour lequel les matrices  $\Lambda^\alpha_\beta$  sont telles que  $\Lambda^0_0 \geq 1$  et  $\det \Lambda = 1$ . On exclue ainsi les inversions d'espace ( $\Lambda^0_0 \geq 1$  et  $\det \Lambda = -1$ ) et les renversements dans le temps ( $\Lambda^0_0 \leq -1$  et  $\det \Lambda = -1$ ). Les lois de la physique ne sont probablement invariantes que sous le groupe de Lorentz propre.

## B. Notion d'intervalle

Soient  $\mathcal{P}_1$  et  $\mathcal{P}_2$  deux événements repérés dans un référentiel inertiel  $\{x^\alpha\}$  par leurs coordonnées  $\mathcal{P}_1 = (x_1^\alpha) = (ct_1, x_1, y_1, z_1)$  et  $\mathcal{P}_2 = (x_2^\alpha) = (ct_2, x_2, y_2, z_2)$ . Alors on appelle *intervalle* entre  $\mathcal{P}_1$  et  $\mathcal{P}_2$  l'expression

$$s^2 = \eta_{\alpha\beta}(x_2^\alpha - x_1^\alpha)(x_2^\beta - x_1^\beta) = -c^2(t_2 - t_1)^2 + (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2, \quad (3.5)$$

où  $\eta_{\alpha\beta}$  est la matrice de Minkowski (3.4). Si les coordonnées de  $\mathcal{P}_2$  diffèrent de celles de  $\mathcal{P}_1$  par des quantités infinitésimales,  $x_2^\alpha = x_1^\alpha + dx^\alpha$ , on écrira l'intervalle infinitésimal

$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta = -c^2dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2. \quad (3.6)$$

Noter que bien que l'intervalle soit écrit comme un carré  $s^2$  ou  $ds^2$ , il peut être positif, négatif ou nul. Il faut penser à l'intervalle comme le "carré" de la distance dans l'espace-temps entre les événements  $\mathcal{P}_1$  et  $\mathcal{P}_2$ . Cette distance au carré est une *forme quadratique* des différences de coordonnées, comme en géométrie euclidienne, voir (2.13). La seule différence est que cette forme quadratique n'est pas définie positive, mais a la signature  $-+++$ .

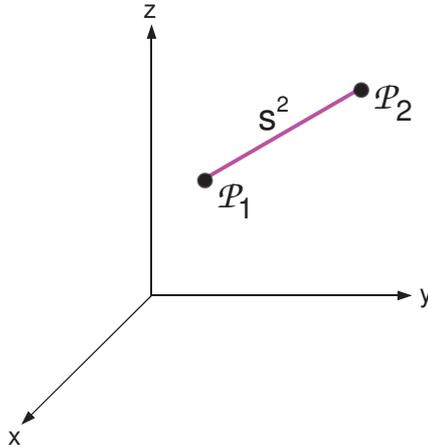


FIG. 6: Intervalle entre deux événements.

La propriété fondamentale du groupe de Poincaré (3.2)–(3.3) est de laisser la forme (et bien sûr la valeur numérique) de l'intervalle (3.5) entre deux événements *invariante* par changement de référentiel inertiel. En effet, dans un autre référentiel inertiel  $\{x'^\alpha\}$ , on aura  $\mathcal{P}_1 = (x_1'^\alpha)$  et  $\mathcal{P}_2 = (x_2'^\alpha)$  et l'intervalle sera

$$\begin{aligned} s'^2 &= \eta_{\alpha\beta}(x_2'^\alpha - x_1'^\alpha)(x_2'^\beta - x_1'^\beta) \\ &= \eta_{\alpha\beta} \Lambda^\alpha_\gamma \Lambda^\beta_\delta (x_2^\gamma - x_1^\gamma)(x_2^\delta - x_1^\delta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \eta_{\gamma\delta} (x_2^\gamma - x_1^\gamma) (x_2^\delta - x_1^\delta) \\
&= s^2 .
\end{aligned} \tag{3.7}$$

La deuxième égalité provient de (3.2) et la troisième de (3.3). Donc  $s^2$  est toujours donné par la même forme quadratique dans tous les référentiels inertiels, avec la même matrice de Minkowski donnée numériquement par (3.4). On admettra que les transformations de Poincaré sont les transformations inversibles les plus générales laissant invariantes la forme de l'intervalle.

C'est la propriété (3.7) qui montre que la valeur de la vitesse de la lumière  $c$  est la même dans tous les référentiels inertiels. En effet si un rayon lumineux se propage à la vitesse  $c$  de  $\mathcal{P}_1$  à  $\mathcal{P}_2$  dans le référentiel inertiel  $\{x^\alpha\}$  on a  $s^2 = 0$  donc  $s'^2 = 0$  d'après (3.7), et le rayon lumineux se propage aussi à la vitesse  $c$  dans le référentiel  $\{x'^\alpha\}$ .

On définit le *cône de lumière*  $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}$  issu d'un événement  $\mathcal{P}$  comme l'ensemble des événements qui sont reliés à  $\mathcal{P}$  par un intervalle nul,

$$\mathcal{C}_{\mathcal{P}} = \{\text{événements } \mathcal{L} \text{ tels que } s_{\mathcal{P}\mathcal{L}}^2 = 0\} . \tag{3.8}$$

Un intervalle nul sera dit du *genre lumière*; il correspond à une propagation à la vitesse  $c$ . A l'intérieur du cône de lumière  $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}$  on a les événements  $\mathcal{T}$  reliés à  $\mathcal{P}$  par un intervalle négatif  $s_{\mathcal{P}\mathcal{T}}^2 < 0$  dit du *genre temps* et correspondant à une propagation à une vitesse  $< c$ . A l'extérieur de  $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}$  on a les événements  $\mathcal{E}$  reliés à  $\mathcal{P}$  par un intervalle positif  $s_{\mathcal{P}\mathcal{E}}^2 > 0$  dit du *genre espace* et correspondant à une propagation à une vitesse  $> c$ .

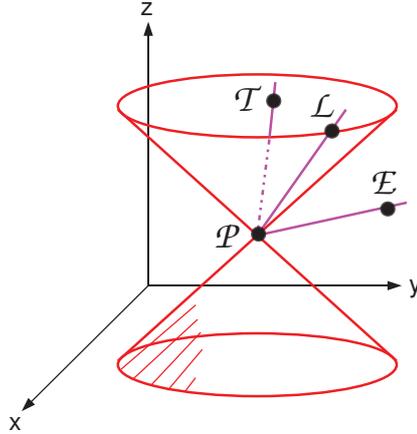


FIG. 7: Cône de lumière.

### C. Transformations spéciales de Lorentz

Le groupe de Poincaré (3.2)–(3.3) admet comme sous-groupes les translations d'espace-temps ( $x'^\alpha = x^\alpha + a^\alpha$ ) et les rotations d'espace ( $t' = t$ ,  $x'^i = R^i_j x^j$ ), exactement comme le groupe de Galilée. Il est clair en effet que la loi des rotations  ${}^tR = R^{-1}$  qui s'écrit (2.12) en utilisant la métrique euclidienne  $\delta_{ij}$  est un cas particulier de (3.3) si on complète la matrice  $R^i_j$  par les composantes spatio-temporelles  $R^i_0 = 0 = R^0_j$  et  $R^0_0 = 1$ . La contrainte (3.3) apparaît ainsi comme une loi des rotations généralisée pour les matrices de Lorentz.

De même, on a comme pour le groupe de Galilée des transformations *spéciales* de Lorentz, qui correspondent à des pures transformations de vitesse  $\mathbf{V} = (V^i)$ . Les composantes des transformations spéciales de Lorentz sont données explicitement par

$$\Lambda^0_0(\mathbf{V}) = \gamma, \quad (3.9a)$$

$$\Lambda^i_0(\mathbf{V}) = -\gamma \frac{V^i}{c}, \quad (3.9b)$$

$$\Lambda^0_j(\mathbf{V}) = -\gamma \frac{V_j}{c}, \quad (3.9c)$$

$$\Lambda^i_j(\mathbf{V}) = \delta_j^i + (\gamma - 1) \frac{V^i V_j}{\mathbf{V}^2}, \quad (3.9d)$$

avec la notation traditionnelle  $\gamma = (1 - \mathbf{V}^2/c^2)^{-1/2}$ . Noter l'expression alternative

$$\Lambda^i_j(\mathbf{V}) = \delta_j^i + \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \frac{V^i V_j}{c^2}. \quad (3.10)$$

**Exercice.** Justifier les expressions (3.9)–(3.10) en montrant que l'équation de contrainte sur les matrices de Lorentz (3.3) est satisfaite.

La transformation spéciale de Lorentz (3.9) est telle qu'elle “amène” une particule de vitesse  $V^i$  dans le référentiel inertiel  $\{x^\alpha\}$  au repos dans le référentiel inertiel  $\{x'^\alpha\}$ . En effet on vérifie facilement que si la vitesse d'une particule est  $dx^i/dt = V^i$  dans le référentiel  $\{x^\alpha\}$  alors sa vitesse dans le référentiel  $\{x'^\alpha\}$  est nulle,

$$V'^i = \frac{dx'^i}{dt'} = \frac{\Lambda^i_0(\mathbf{V})c + \Lambda^i_j(\mathbf{V})V^j}{\Lambda^0_0(\mathbf{V}) + \Lambda^0_k(\mathbf{V})V^k/c} = 0. \quad (3.11)$$

Bien sûr, toute transformation de Lorentz égale à la composition de  $\Lambda^\alpha_\beta(\mathbf{V})$  par une rotation spatiale est encore une transformation qui amène  $\mathbf{V}$  au repos. Une telle transformation différera de  $\Lambda^\alpha_\beta(\mathbf{V})$  uniquement dans ses composantes spatiales données par  $\Lambda'^i_j = \Lambda^i_k(\mathbf{V})R^k_j$ .

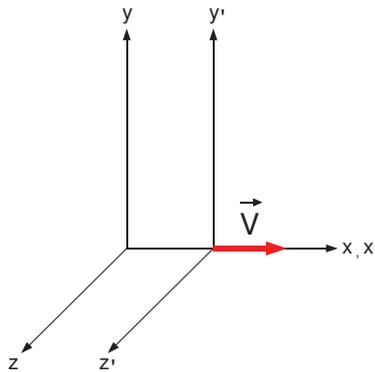


FIG. 8: Addition des vitesses selon la direction  $x$ .

Dans le cas où le référentiel  $\{x'^\alpha\} = \{ct', x', y', z'\}$  a une vitesse  $V$  par rapport au référentiel  $\{x^\alpha\} = \{ct, x, y, z\}$  qui est parallèle à l'axe  $x$ , la transformation spéciale de

Lorentz (3.9) s'écrit

$$t' = \gamma (t - V x/c^2) , \quad (3.12a)$$

$$x' = \gamma (x - V t) , \quad (3.12b)$$

$$y' = y , \quad (3.12c)$$

$$z' = z . \quad (3.12d)$$

La loi d'addition des vitesses d'une particule correspondant à cette transformation spéciale est alors

$$v' = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx - V dt}{dt - V dx/c^2} = \frac{v - V}{1 - V v/c^2} , \quad (3.13)$$

formule qui est à comparer avec la loi galiléenne d'addition des vitesses (2.16). Dans le cas d'un signal lumineux, ayant donc la vitesse  $v = c$  dans le référentiel  $\{t, x, y, z\}$ , on trouve d'après (3.13),

$$v' = \frac{c - V}{1 - V/c} = c , \quad (3.14)$$

c'est-à-dire la même vitesse  $c$  dans le référentiel  $\{t', x', y', z'\}$ .

**Exercice.** *Ecrire à partir de la transformation spéciale (3.9) la loi d'addition des vitesses dans le cas où la vitesse de la particule est orientée de façon quelconque.*

#### D. Temps propre

Le temps propre d'une particule (se déplaçant à vitesse inférieure à  $c$ ) est défini comme le temps qui s'écoule dans le référentiel inertiel dans lequel la particule est au repos à l'instant considéré. Soit une particule de vitesse instantanée  $v^i = dx^i/dt$ , non nécessairement constante, dans un référentiel inertiel  $\{x^\alpha\}$ . Alors la particule sera au repos à l'instant considéré dans le référentiel  $\{x'^\alpha\}$  transformé de  $\{x^\alpha\}$  par la transformation spéciale  $\Lambda^\alpha_\beta(\mathbf{v})$  donnée par (3.9). En effet nous avons vu dans (3.11) que  $\Lambda^\alpha_\beta(\mathbf{v})$  — avec  $\mathbf{v}$  la vitesse de la particule — a la propriété d'amener la particule au repos, car on a

$$dx'^i = \Lambda^i_0(\mathbf{v}) c dt + \Lambda^i_j(\mathbf{v}) dx^j = 0 , \quad (3.15)$$

le long de la trajectoire de la particule. Le temps propre est donc simplement le temps  $t'$  qui s'écoule dans le référentiel  $\{x'^\alpha\}$ . Il satisfait d'après (3.9) à

$$dt' = \Lambda^0_0(\mathbf{v}) dt + \Lambda^0_i(\mathbf{v}) dx^i/c = dt \sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}} . \quad (3.16)$$

Nous allons toujours dénoter par  $d\tau$  l'intervalle infinitésimal de temps propre d'une particule. Le résultat est donc

$$d\tau = dt \sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}} . \quad (3.17)$$

Cette formule montre que le temps de coordonnées  $dt$  est toujours *dilaté* par rapport au temps propre  $d\tau$ . L'effet conduit au célèbre paradoxe des jumeaux de Langevin.

A ce stade on reconnaît que le temps propre n'est rien d'autre que l'opposé de l'intervalle, à savoir  $d\tau^2 = -ds^2/c^2$  (qui est positif pour une trajectoire du genre temps), soit

$$\boxed{d\tau = \frac{1}{c} \sqrt{-\eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta}} . \quad (3.18)$$

On voit donc que l'intervalle  $ds^2$  qui avait été défini de façon mathématique a maintenant une interprétation physique. L'intervalle représente  $-c^2$  fois le temps propre, qui s'écoule dans le référentiel dans lequel la particule est momentanément au repos. Ceci est valable pour n'importe quel mouvement de particule, en mouvement uniforme ou accéléré de façon quelconque.

**Exercice.** *Montrer que la longueur mesurée d'une règle dans un référentiel en mouvement par rapport à la règle est toujours contractée relativement à sa longueur propre, telle qu'elle est mesurée dans le référentiel de repos de la règle.*

### E. Quadri-vitesse et quadri-accélération

Soit une particule (ou un observateur) en mouvement dans un référentiel inertiel  $\{x^\alpha\}$ , de trajectoire  $x^\alpha(\tau)$  que l'on suppose paramétrisée par le temps propre (3.17). On appelle quadri-vitesse de la particule le vecteur

$$u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\tau} . \quad (3.19)$$

Compte tenu de (3.18) le vecteur quadri-vitesse a une "norme" négative

$$u^2 = \eta_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta = -c^2 , \quad (3.20)$$

et est donc du genre temps, c'est-à-dire situé à l'intérieur du cône de lumière issu de l'évènement considéré. Le vecteur  $u^\alpha$  est unitaire si l'on fait  $c = 1$ .

Par dérivation de (3.20) on obtient

$$\eta_{\alpha\beta} a^\alpha u^\beta = 0 , \quad (3.21)$$

où la quadri-accélération de la particule est définie par

$$a^\alpha = \frac{du^\alpha}{d\tau} . \quad (3.22)$$

La quadri-accélération est donc orthogonale à la quadri-vitesse. C'est un vecteur du genre espace, situé à l'extérieur du cône de lumière. Comme  $d/d\tau = u^\beta \partial_\beta$  le long de la trajectoire de la particule, où  $\partial_\beta = \partial/\partial x^\beta$  est la dérivée partielle par rapport à la coordonnée  $x^\beta$ , on peut aussi écrire la quadri-accélération sous la forme

$$a^\alpha = u^\beta \partial_\beta u^\alpha . \quad (3.23)$$

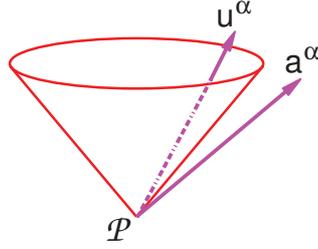


FIG. 9: La quadri-accélération est du genre espace.

## F. Dynamique relativiste

La quadri-impulsion d'une particule est définie par

$$p^\alpha = m u^\alpha , \quad (3.24)$$

où  $u^\alpha$  est la quadri-vitesse de la particule et  $m$  sa masse. Cette masse  $m$  dite "inertielle" ou masse au repos caractérise la quantité de matière et d'énergie de la particule indépendamment de son état de mouvement (c'est bien sûr une constante identique dans tous les référentiels). Les composantes de la quadri-impulsion définissent l'énergie de la particule<sup>5</sup>

$$E = p^0 c = \frac{m c^2}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2}} , \quad (3.25)$$

et son impulsion (ou quantité de mouvement) au sens habituel

$$p^i = \frac{m v^i}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2}} . \quad (3.26)$$

En utilisant l'expression (3.20) de la norme du vecteur quadri-vitesse on déduit facilement la relation fameuse en physique des particules

$$E^2 - \mathbf{p}^2 c^2 = m^2 c^4 . \quad (3.27)$$

Noter que cette relation est valable pour une particule de vitesse  $c$  et de masse nulle, et donne dans ce cas  $E = |\mathbf{p}| c$ .

On postule alors que la loi de la dynamique relativiste est donnée, dans tout référentiel inertiel  $\{x^\alpha\}$ , par

$$\boxed{\frac{dp^\alpha}{d\tau} = m a^\alpha = f^\alpha} , \quad (3.28)$$

où  $d\tau$  est le temps propre de la particule (3.17) et où  $f^\alpha$  est le quadri-vecteur force agissant sur la particule. Pour donner un sens à la loi (3.28) il faut bien sûr définir ce que l'on entend

<sup>5</sup> Il est possible d'interpréter la loi (3.25) en disant que la masse de la particule dépend de son état de mouvement par  $m(\mathbf{v}) = m/\sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2}$ , mais il vaut mieux ne garder qu'un seul concept de masse — la masse au repos constante  $m$ .

par  $f^\alpha$ . Pour cela on remarque que le membre de gauche de (3.28) se transforme sous la transformation de Poincaré (3.2) comme

$$\frac{dp'^\alpha}{d\tau'} = \Lambda^\alpha_\beta \frac{dp^\beta}{d\tau} . \quad (3.29)$$

En effet,  $d\tau$  est un invariant,  $d\tau' = d\tau$ , donc la quadri-vitesse (3.19) et la quadri-impulsion (3.24) se transforment comme la différentielle  $dx'^\alpha = \Lambda^\alpha_\beta dx^\beta$ , et, puisque  $\Lambda^\alpha_\beta$  est une matrice constante, on obtient (3.29). On définira alors le quadri-vecteur force  $f^\alpha$  par  $f^\alpha = \Lambda^\alpha_i(\mathbf{v})F^i$  où  $\Lambda^\alpha_\beta(\mathbf{v})$  est la transformation de Lorentz (3.9) associée à la vitesse  $\mathbf{v}$  de la particule, et où  $F^\alpha = (0, \mathbf{F})$  est l'expression de la force dans le référentiel propre de la particule, c'est-à-dire le référentiel inertiel dans lequel la particule est au repos à l'instant considéré. Ici  $\mathbf{F}$  représente l'expression usuelle de la force, par exemple  $\mathbf{F} = q \mathbf{E}$  dans le cas d'une force électrique. Comme les lois de transformation de Poincaré forment un groupe, il est clair qu'avec cette définition la quadri-force se transformera de façon analogue à (3.29), soit

$$f'^\alpha = \Lambda^\alpha_\beta f^\beta . \quad (3.30)$$

Il est évident d'après (3.29)–(3.30) que la forme de la loi de la dynamique (3.28) ainsi définie est la même dans tous les référentiels inertiels (en effet si  $ma^\alpha = f^\alpha$  alors on a aussi  $ma'^\alpha = f'^\alpha$ ) en accord avec le principe de relativité.

## IV. PRINCIPE D'EQUIVALENCE

La force gravitationnelle possède une propriété fondamentale, maintenant érigée en grand principe fondamental appelé le *principe d'équivalence*, qui la distingue de tous les autres forces dans la nature. Le mouvement de chute libre des corps est *universel*, indépendant de la masse et de la composition des corps. C'est Galilée qui a fait remarquer l'importance de cette "universalité" du mouvement de chute libre des corps (bien que son expérience fameuse du haut de la tour de Pise soit probablement apocryphe), mais c'est Einstein qui a donné à ce fait expérimental son statut définitif. Nous verrons que c'est la combinaison du principe d'équivalence et du principe de relativité restreinte qui conduit à la relativité générale.

### A. Masse inertielle et masse gravitationnelle

Deux concepts de masses (au moins) peuvent être distingués en physique gravitationnelle.

1. La masse inertielle  $m_i$  est le coefficient qui apparaît dans la deuxième loi de Newton

$$\mathbf{F} = m_i \mathbf{a} . \quad (4.1)$$

*Un corps soumis à une force extérieure  $\mathbf{F}$  acquiert une accélération  $\mathbf{a}$  proportionnelle à  $\mathbf{F}$ , le coefficient de proportionnalité dépend du corps en question et est noté  $1/m_i$ .*

2. La masse gravitationnelle  $m_g$  est le coefficient qui apparaît dans la loi de la gravitation

$$\mathbf{F}_g = m_g \mathbf{g} . \quad (4.2)$$

*Un champ de gravitation  $\mathbf{g}$  exerce sur un corps une force gravitationnelle  $\mathbf{F}_g$  proportionnelle à  $\mathbf{g}$ , le coefficient de proportionnalité dépend du corps et est noté  $m_g$ .*

La loi de la dynamique (4.1) est exactement la loi de la dynamique relativiste (3.28) écrite dans le référentiel propre de la particule. La masse inertielle est donc la masse qui apparaît dans les équations (3.24)–(3.28) — c'est l'équivalent en masse de l'énergie au repos des corps; donc  $E = m_i c^2$  pour un corps au repos. Par contre la masse gravitationnelle est une notion *a priori* très différente: c'est l'analogue gravitationnel de la charge électrique  $q$  et on pourrait en fait appeler  $m_g$  la charge gravitationnelle.

### B. Observation expérimentale de $m_i = m_g$

Un corps caractérisé par les masses  $m_i$  et  $m_g$  placé dans un champ de gravitation  $\mathbf{g}$  acquiert l'accélération

$$\boldsymbol{\gamma} = \frac{m_g}{m_i} \mathbf{g} , \quad (4.3)$$

d'après (4.1)–(4.2). *A priori*, en théorie de Newton, le rapport  $m_g/m_i$  devrait varier d'un corps à l'autre tout comme en électromagnétisme le rapport  $q/m$  varie d'un corps à l'autre. Donc l'accélération (4.3) devrait être différente d'un corps à l'autre, et devrait surtout dépendre de la composition interne du corps considéré.

Or, expérimentalement, on observe qu'il n'en est rien. Tous les corps, placés dans un même champ de gravitation, acquièrent la même accélération, indépendamment non seulement de la masse des corps mais (beaucoup plus remarquablement) de leur nature c'est-à-dire

de leur *composition interne*. Donc, pour des conditions initiales identiques, la trajectoire de tous les corps dans un champ de gravitation est la même. Ce fait expérimental, incompréhensible en théorie de Newton, montre que l'on peut toujours choisir, pour tous les corps, et avec un système d'unités approprié,

$$\boxed{m_i = m_g} . \quad (4.4)$$

Parmi les très nombreuses vérifications expérimentales de l'égalité  $m_i = m_g$  (Galilée avec des plans inclinés, Newton avec des pendules, ...) citons l'expérience d'Eötvös (1889). Cette expérience utilise un pendule de torsion sur lequel sont suspendus deux corps  $a$  et  $b$  de compositions différentes (par exemple une bille de bois et une bille de plomb).

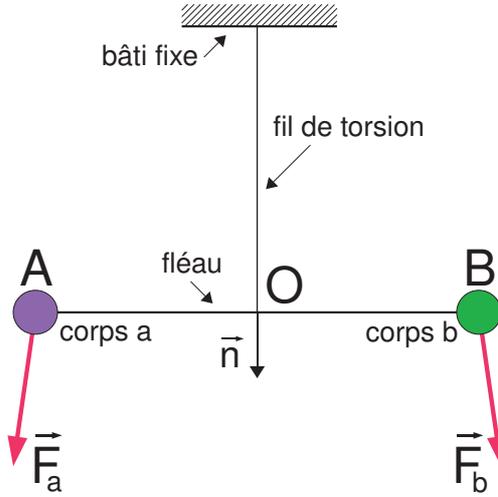


FIG. 10: Expérience d'Eötvös.

Soient  $\mathbf{F}_a$  et  $\mathbf{F}_b$  les forces auxquelles sont soumises les corps  $a$  et  $b$ . Ces forces exercent sur le fil par l'intermédiaire du fléau du pendule une tension  $\mathbf{T} = T\mathbf{n}$  et un couple  $\mathbf{C} = C\mathbf{n}$ , où  $\mathbf{n}$  dénote la direction unitaire du fil de torsion ( $|\mathbf{n}| = 1$ ). A l'équilibre, on a

$$\mathbf{T} = \mathbf{F}_a + \mathbf{F}_b , \quad (4.5a)$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{0A} \times \mathbf{F}_a + \mathbf{0B} \times \mathbf{F}_b , \quad (4.5b)$$

où  $O$  est le centre de gravité du fléau et  $A, B$  les positions des corps  $a, b$ . On en déduit le couple s'exerçant sur le fil,

$$\mathbf{C} = \frac{1}{|\mathbf{F}_a + \mathbf{F}_b|} (\mathbf{0A} - \mathbf{0B}) \cdot (\mathbf{F}_a \times \mathbf{F}_b) . \quad (4.6)$$

Pour trouver cette relation il suffit de multiplier scalairement  $\mathbf{C}$  et  $\mathbf{T}$ , en remarquant que  $\mathbf{C} \cdot \mathbf{T} = C|\mathbf{F}_a + \mathbf{F}_b|$ , et d'utiliser les expressions précédentes à l'équilibre. On vérifie que  $C = 0$  si  $\mathbf{F}_a$  est parallèle à  $\mathbf{F}_b$ . Les deux corps  $a$  et  $b$  sont soumis au champ gravitationnel  $\mathbf{g}$  de la Terre et au champ d'accélération inertielle  $\mathbf{c}$  de rotation de la Terre sur elle-même. Les forces  $\mathbf{F}_a$  et  $\mathbf{F}_b$  sont donc données par

$$\mathbf{F}_a = m_{ga} \mathbf{g} + m_{ia} \mathbf{c} , \quad (4.7a)$$

$$\mathbf{F}_b = m_{gb} \mathbf{g} + m_{ib} \mathbf{c} , \quad (4.7b)$$

où  $m_{ga}, m_{gb}$  sont les masses gravitationnelles des corps et  $m_{ia}, m_{ib}$  leurs masses inertielles. On a  $|\mathbf{c}| = R_T \omega^2 \sin \lambda$  où  $R_T$  est le rayon de la Terre. Au premier ordre dans la différence  $|(m_g/m_i)_a - (m_g/m_i)_b|$  supposée très petite et que l'on appelle quelquefois le paramètre d'Eötvös, on obtient alors

$$C \approx \frac{m_{ia}m_{ib}}{m_{ia} + m_{ib}} \left[ \left( \frac{m_g}{m_i} \right)_a - \left( \frac{m_g}{m_i} \right)_b \right] \frac{(\mathbf{0A} - \mathbf{0B}) \cdot (\mathbf{g} \times \mathbf{c})}{|\mathbf{g} + \mathbf{c}|} . \quad (4.8)$$

Une mesure de  $C$  permet donc de mesurer la différence des rapports  $m_g/m_i$  pour les corps

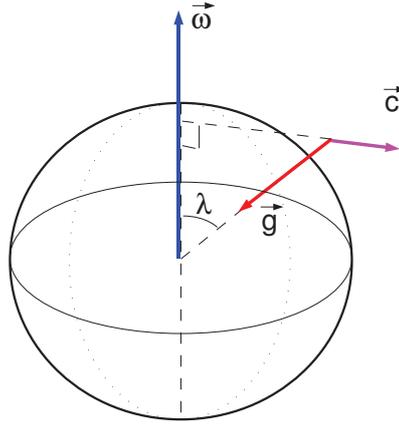


FIG. 11: Champ inertiel de la Terre.

*a, b.* Aucun  $C$  n'ayant été détecté, Eötvös a pu en conclure

$$\left| \left( \frac{m_g}{m_i} \right)_{\text{Platine}} - \left( \frac{m_g}{m_i} \right)_{\text{Bois}} \right| < 10^{-9} . \quad (4.9)$$

Les expériences plus récentes de Dicke (1964) et Braginsky (1972) ont atteint les précisions  $10^{-11}$  et  $10^{-12}$ . Des projets d'expériences par satellite: le satellite Microscope en développement au CNES et qui sera lancé vers 2010, et le projet STEP — Satellite Test of the Equivalence Principle, devraient atteindre la précision  $10^{-15} - 10^{-17}$ .

### C. Principe d'équivalence faible

Si réellement  $m_i = m_g$  pour tous les corps, alors on peut “effacer” les effets d'un champ de gravitation  $\mathbf{g}$  *statique et uniforme*, c'est-à-dire indépendant de  $t$  et  $\mathbf{x}$ , en se plaçant dans un référentiel uniformément accéléré. En effet faire  $m_i = m_g$  dans (4.3) donne dans le référentiel  $\{t, \mathbf{x}\}$  supposé cartésien,

$$\frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = \mathbf{g} . \quad (4.10)$$

Si l'on pose  $t' = t$  et  $\mathbf{x}' = \mathbf{x} - \frac{1}{2} \mathbf{g} t^2$  on obtient

$$\frac{d^2 \mathbf{x}'}{dt'^2} = \mathbf{0} . \quad (4.11)$$

Le nouveau référentiel  $\{t', \mathbf{x}'\}$  est donc exactement d'après (2.2) ce que nous avons appelé un référentiel inertiel, dans lequel le mouvement libre de tous les corps est rectiligne et uniforme, et où les effets de la gravitation ont disparu. On obtient ainsi une connection intéressante entre le principe d'équivalence et le principe d'inertie. Inversement, on peut dire qu'un

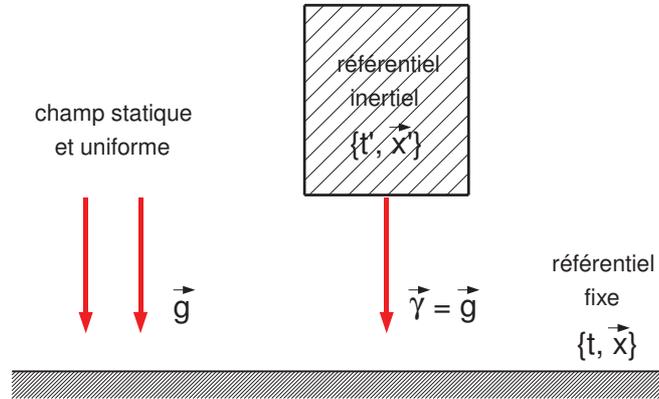


FIG. 12: Le champ gravitationnel est effacé dans le référentiel en chute libre.

champ gravitationnel  $\mathbf{g}$  statique et uniforme est *équivalent* à un référentiel accéléré dans le vide, d'accélération  $\gamma = -\mathbf{g}$ .

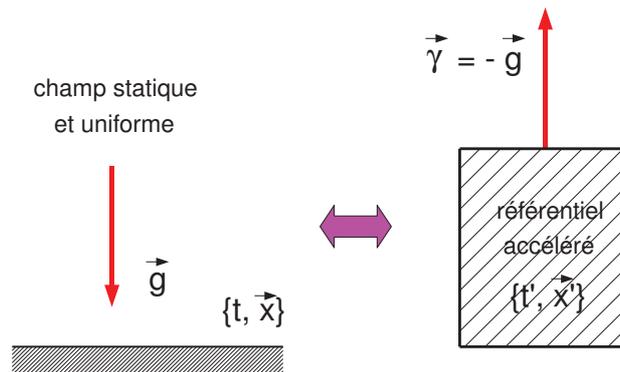


FIG. 13: Le champ gravitationnel est équivalent à un référentiel accéléré dans le vide.

Tout champ de gravitation peut-être considéré comme statique et uniforme dans une région assez petite de l'espace et pendant un laps de temps assez court, c'est-à-dire dans un petit voisinage de l'espace-temps. On est donc amené à poser le principe d'équivalence faible, qui est la traduction directe de l'observation expérimentale que  $m_i = m_g$ .

**Principe d'équivalence faible (PEf).** *En tout événement de l'espace-temps dans un champ de gravitation arbitraire, on peut choisir un référentiel dit localement inertiel tel que dans un voisinage de l'événement considéré le mouvement libre de tous les corps soit rectiligne et uniforme.*

## D. Principe d'équivalence d'Einstein

Les corps utilisés dans les expériences testant  $m_i = m_g$  comme l'expérience d'Eötvös ne sont pas ponctuels et leur masse-énergie inclue de nombreuses contributions distinctes, en particulier énergie de masse et énergie cinétique des constituants, l'énergie de liaison électromagnétique, énergie de liaison nucléaire des noyaux.

Donc, si réellement  $m_i = m_g$  pour tous les corps (avec  $m_i = E/c^2$ ), les diverses énergies doivent contribuer *séparément* de la même manière à  $m_i$  et à  $m_g$ , car les diverses énergies entrent dans des proportions différentes dans les différents corps. Ainsi, de l'expérience de Eötvös on a pu en conclure que l'énergie électromagnétique de liaison entre le proton et le neutron dans l'atome d'hydrogène contribue de la même façon à  $m_i$  et  $m_g$  avec la précision  $\approx 10^{-4}$ : une "boule" d'énergie électromagnétique est accélérée dans un champ de gravitation comme si sa masse gravitationnelle était  $m_g = m_i = E_{em}/c^2$ .

Les diverses énergies constituant les corps (mise à part l'énergie gravitationnelle elle-même) étant décrites par la relativité restreinte, on est conduit avec Einstein à postuler que la relativité restreinte reste valable dans le référentiel localement inertiel comme en l'absence de champ de gravitation.

**Principe d'équivalence d'Einstein (PEE).** *Dans le référentiel localement inertiel du principe d'équivalence faible, toutes les lois (non gravitationnelles) de la nature ont la forme donnée par la relativité restreinte.*

Par exemple, les équations de Maxwell pour l'électromagnétisme seront valables dans le référentiel localement inertiel. Mais on retrouvera toute la physique non-gravitationnelle habituelle: la constante de structure fine aura la valeur habituelle  $\alpha = 1/137$ , le rapport de masse entre le neutron et le proton vaudra 1.00138, *etc.* Nous donnerons en section V A une formulation mathématiquement précise du principe d'équivalence d'Einstein.

Les arguments précédents concernant les diverses énergies constitutives des corps montrent qu'il est probablement impossible de bâtir une théorie de la gravitation relativiste et complète, c'est-à-dire incorporant toutes les lois connues de la physique non-gravitationnelle, qui satisfasse au principe d'équivalence faible sans satisfaire au principe d'équivalence d'Einstein. En d'autres termes le principe d'équivalence faible est probablement équivalent au principe d'équivalence d'Einstein.

## E. Effet Einstein

L'effet Einstein (1911) est une conséquence directe de principe d'équivalence d'Einstein. La fréquence d'un photon émis lors d'une transition atomique dans une région de fort potentiel gravitationnel et reçu en un point d'une région de faible potentiel gravitationnel est plus basse (elle est "*décalée vers le rouge*") que la fréquence d'un photon émis lors de la même transition atomique au point de réception (dans la région de faible potentiel gravitationnel) et observée au même point.

Soit un photon émis lors de la transition atomique  $E_2 \rightarrow E_1$  en un point  $A$  d'un référentiel d'accélération constante  $\mathbf{a}$  vers un point  $B$  situé *dans la direction de l'accélération*  $\mathbf{a}$ . La fréquence du photon en  $A$  est donc  $\nu_A = (E_2 - E_1)/h$ . Soit  $d$  la distance entre  $A$  et  $B$  mesurée dans le référentiel accéléré. Pendant le temps de vol du photon de  $A$  à  $B$  la vitesse

du référentiel augmente de<sup>6</sup>

$$\Delta v = \frac{a d}{c} . \quad (4.12)$$

avec  $a = |\mathbf{a}|$ . L'observateur en  $B$  dans le référentiel accéléré verra donc le photon à une fréquence  $\nu_B$  décalée par *effet Doppler* par rapport à sa fréquence  $\nu_A$  à l'émission en  $A$ . Donc, par simple application de l'effet Doppler du premier ordre,

$$\frac{\nu_B}{\nu_A} = 1 - \frac{\Delta v}{c} = 1 - \frac{a d}{c^2} . \quad (4.13)$$

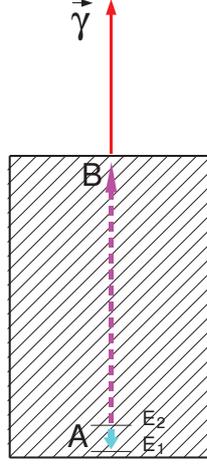


FIG. 14: Effet Doppler dans un référentiel accéléré.

D'après le principe d'équivalence d'Einstein, un champ de gravitation quelconque  $\mathbf{g}$  est équivalent localement au champ d'accélération  $\mathbf{a} = -\mathbf{g}$  y compris pour le résultat d'une expérience d'électromagnétisme. On en déduit immédiatement d'après (4.13) que dans un référentiel fixe mais en présence d'un champ de gravitation réel  $\mathbf{g}$ , on a l'effet d'Einstein

$$\boxed{\frac{\nu_B}{\nu_A} = 1 - \frac{g d}{c^2}} . \quad (4.14)$$

Ici  $\nu_A$  est la fréquence du photon à l'émission (au point de fort potentiel gravitationnel) et  $\nu_B$  est la fréquence à la réception (au point de faible potentiel gravitationnel). Intuitivement, le photon allant de  $A$  à  $B$  doit "lutter" pour s'échapper du champ de gravitation  $\mathbf{g}$ , il perd de l'énergie et sa fréquence diminue par  $\nu = E/h$ . De façon équivalente, les battements d'une horloge située en  $B$  sont *ralentis* par rapport à une horloge identique située en  $A$ . L'effet Einstein a été confirmé pour la première fois dans l'expérience de Pound et Rebka (1960). Une expérience de comparaison d'horloges entre le sol et une fusée en vol balistique a permis de mesurer l'effet avec la précision  $\approx 10^{-4}$ .

<sup>6</sup> On suppose que la vitesse de la lumière est égale à  $c$  dans le référentiel accéléré, ce qui n'est vrai qu'au premier ordre mais sera compatible avec l'application de l'effet Doppler du premier ordre dans (4.13).

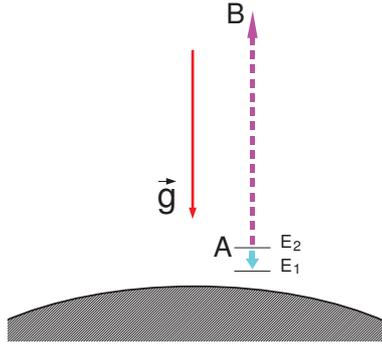


FIG. 15: Effet Einstein dans un champ de gravitation.

### F. Principe d'équivalence fort

Le principe d'équivalence d'Einstein résultait de la remarque que les diverses énergies internes des corps doivent contribuer également à  $m_i$  et à  $m_g$ . On peut se demander ce qu'il en est de l'énergie interne *gravitationnelle* elle-même. Si celle-ci contribue aussi également à  $m_i$  et à  $m_g$ , on dira que notre théorie de la gravitation (qui est encore à construire) satisfait au principe d'équivalence fort.

**Principe d'équivalence fort (PEF).** *Il est toujours possible d'éliminer un champ de gravitation extérieur en se plaçant dans un référentiel localement inertiel, dans lequel toutes les lois de la nature, y compris la loi gravitationnelle, prennent la même forme qu'en l'absence de champ extérieur.*

Ce principe dit que l'on peut réaliser une expérience comme la mesure de la constante gravitationnelle  $G$  en mesurant dans le référentiel localement inertiel la force gravitationnelle entre deux corps (expérience dite de Cavendish) et que le résultat sera le même que pour la mesure effectuée dans l'espace vide.

Le principe d'équivalence fort est nécessairement un peu "flou" car il invoque la loi gravitationnelle elle-même. Dans une théorie satisfaisant à ce principe le champ de gravitation gravite donc engendre lui-même des champs de gravitation secondaires. Une telle théorie de la gravitation est nécessairement non linéaire.

Contrairement au principe d'équivalence d'Einstein, le principe d'équivalence fort n'est *pas* équivalent au principe d'équivalence faible. C'est une propriété satisfaite par certaines théories de la gravitation. La relativité générale est l'une des seules théories de la gravitation, avec la théorie de Nordstrøm qui est une théorie purement scalaire, à satisfaire le principe d'équivalence fort.

L'expérience d'Eötvös ne permet pas de tester le principe d'équivalence fort car les corps utilisés (billes de platine ou de bois) ont une énergie interne gravitationnelle négligeable par rapport aux autres formes d'énergie. Pour tester le principe d'équivalence fort il faut utiliser des corps célestes.

Considérons le système Terre-Lune plongé dans le champ gravitationnel du Soleil, et supposons que la Terre et la Lune n'aient pas le même rapport  $m_g/m_i$ . Alors la Terre et la Lune vont être accélérées différemment vers le Soleil comme l'avaient déjà remarqué Newton et Laplace. Si l'on néglige la perturbation de marée du Soleil sur la Lune l'équation du

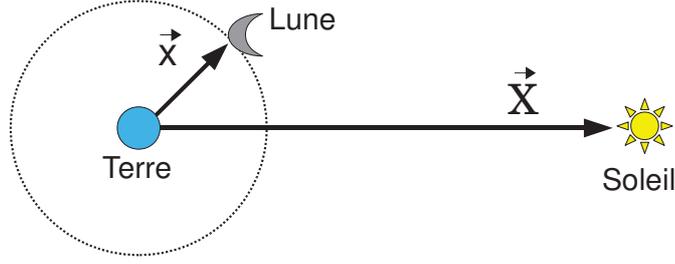


FIG. 16: Mouvement relatif de la Lune autour de la Terre.

mouvement relatif Terre-Lune ( $\mathbf{x}$  est le rayon-vecteur de la Terre à la Lune et  $\mathbf{X}$  celui de la Terre au Soleil) est

$$\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = -GM \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3} - \delta a \frac{\mathbf{X}}{|\mathbf{X}|}. \quad (4.15)$$

Le premier terme est l'accélération newtonienne habituelle ( $M$  représente une masse totale effective du système Terre-Lune), et le deuxième terme est une accélération supplémentaire dirigée vers le Soleil et donnée en amplitude par

$$\delta a = \frac{GM_S}{R_S^2} \left[ \left( \frac{m_g}{m_i} \right)_T - \left( \frac{m_g}{m_i} \right)_L \right], \quad (4.16)$$

en fonction de la masse  $M_S$  du Soleil et de sa distance  $R_S = |\mathbf{X}|$ , et de la différence des rapports  $m_g/m_i$  pour la Terre et la Lune.

**Exercice.** Démontrer par linéarisation de l'équation (4.15) au voisinage d'une orbite circulaire, c'est-à-dire ayant  $r = |\mathbf{x}| = r_0 + \delta r$  où  $\delta r$  est une petite perturbation de l'ordre de  $\delta a$  donné par (4.16), que la perturbation  $\delta r$  s'écrit

$$\delta r(t) = -\frac{3\delta a}{2\omega_L\omega_S} \cos[(\omega_L - \omega_S)t], \quad (4.17)$$

où  $\omega_L$  et  $\omega_S$  sont les fréquences apparentes de rotation de la Lune et du Soleil autour de la Terre,  $\omega_L \approx 2\pi/27$  jours et  $\omega_S = 2\pi/1$  an. Dans (4.17) on utilise le fait que  $\omega_S \ll \omega_L$ .

Le résultat (4.17) montre que l'orbite de la Lune est *polarisée* vers le Soleil, l'amplitude maximale de la polarisation étant donnée par

$$\delta r_{\max} = -\frac{3\delta a}{2\omega_L\omega_S}. \quad (4.18)$$

Pour tester le principe d'équivalence fort, on suppose que le rapport  $m_g/m_i$  des corps diffère de un par une petite contribution due à l'énergie gravitationnelle du corps, et donc du type

$$\frac{m_g}{m_i} = 1 + \frac{\eta}{c^2} \frac{\int \rho U d^3\mathbf{x}}{\int \rho d^3\mathbf{x}}, \quad (4.19)$$

où  $\eta$  est une certaine constante sans dimension mesurant la violation du principe d'équivalence fort, où  $U$  est le potentiel newtonien du corps,  $U = G \int \rho d^3\mathbf{x}'/|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ , où

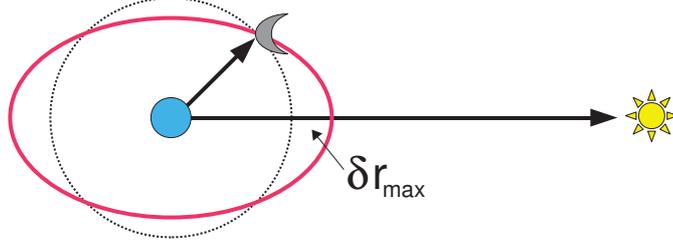


FIG. 17: Polarisation de l'orbite de la Lune vers le Soleil.

$\int \rho d^3\mathbf{x}$  est sa masse (indifféremment  $m_g$  ou  $m_i$  car le deuxième terme dans (4.19) est un petit terme), et où  $\int \rho U d^3\mathbf{x}$  est relié à son énergie gravitationnelle.<sup>7</sup> Négligeant l'énergie gravitationnelle de la Lune par rapport à celle de la Terre, et assimilant la Terre à une sphère homogène (masse  $m_T$ , rayon  $a_T$ ) on obtient alors, d'après (4.16),

$$\delta a = \frac{\eta}{c^2} \frac{GM_S}{R_S^2} \left( \frac{\int \rho U d^3\mathbf{x}}{\int \rho d^3\mathbf{x}} \right)_T = \frac{6}{5} \eta \frac{G^2 M_S m_T}{a_T R_S^2 c^2} = (5 \cdot 10^{-12} m/s^2) \eta . \quad (4.20)$$

L'amplitude maximale de la polarisation de l'orbite (4.17) est alors donnée par

$$\delta r_{\max} = -(14 \text{ mètres}) \eta . \quad (4.21)$$

Sachant que l'on connaît le mouvement de la Lune avec une précision de l'ordre de 5 cm par tirs laser et que aucune polarisation attribuable à cet effet n'a été observée, on en déduit un test du principe d'équivalence fort avec la précision

$$|\eta| < 3 \cdot 10^{-3} . \quad (4.22)$$

<sup>7</sup> En fait l'énergie gravitationnelle est négative et est traditionnellement dénotée  $\Omega = -\frac{1}{2} \int \rho U d^3\mathbf{x}$ .

## V. FORCES GRAVITATIONNELLES

### A. Référentiel localement inertiel

D'après le principe d'équivalence (dans sa version d'Einstein), il doit exister au voisinage de tout événement  $\mathcal{P}$  un référentiel localement inertiel  $\{X^\alpha\}$  (dépendant de l'événement  $\mathcal{P}$ )<sup>8</sup> dans lequel les lois de la physique en  $\mathcal{P}$  sont celles de la relativité restreinte. En particulier, l'intervalle (infinitésimal) de la relativité restreinte doit s'écrire, au point  $\mathcal{P}$  et dans les coordonnées  $X^\alpha$ , comme en (3.6), c'est-à-dire

$$ds^2|_{\mathcal{P}} = \eta_{\alpha\beta} dX^\alpha dX^\beta, \quad (5.1)$$

où  $\eta_{\alpha\beta}$  est la matrice de Minkowski (3.4).

Nous allons maintenant rendre plus précise l'idée intuitive que au voisinage de  $\mathcal{P}$  les lois de la physique diffèrent peu de celles données par la relativité restreinte. En particulier, nous allons postuler que, dans un voisinage du point  $\mathcal{P}$ , l'intervalle n'est pas exactement donné par (5.1) mais en diffère par des termes du *second* ordre dans la distance au point  $\mathcal{P}$ . Précisément, nous postulons que, dans un voisinage de  $\mathcal{P}$ , l'intervalle prend la forme

$$ds^2 = G_{\alpha\beta}(X) dX^\alpha dX^\beta, \quad (5.2)$$

où  $G_{\alpha\beta}(X)$  est une certaine matrice, définie dans l'espace-temps au voisinage de  $\mathcal{P}$ , et admettant en  $\mathcal{P}$  le développement de Taylor

$$G_{\alpha\beta}(X) = \eta_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 G_{\alpha\beta}}{\partial X^\gamma \partial X^\delta} \right|_{\mathcal{P}} \Delta X^\gamma \Delta X^\delta + \mathcal{O}(|\Delta X|^3), \quad (5.3)$$

où  $\Delta X^\gamma = X^\gamma - X_{\mathcal{P}}^\gamma$  dénote la différence de coordonnées entre le point en question et le point  $\mathcal{P}$ . On a donc, à la fois

$$\boxed{G_{\alpha\beta}|_{\mathcal{P}} = \eta_{\alpha\beta} \quad \text{et} \quad \left. \frac{\partial G_{\alpha\beta}}{\partial X^\gamma} \right|_{\mathcal{P}} = 0.} \quad (5.4)$$

La matrice  $G_{\alpha\beta}(X)$  étant en facteur du produit symétrique de différentielles  $dX^\alpha dX^\beta$  peut toujours être choisie symétrique,  $G_{\alpha\beta} = G_{\beta\alpha}$ .

On a maintenant avec (5.2)–(5.3) une formulation précise du référentiel localement inertiel et donc du principe d'équivalence d'Einstein: c'est un référentiel qui diffère d'un référentiel inertiel (dans lequel les lois de la relativité restreinte sont valables) par des termes du *second ordre* dans la distance de coordonnées à un événement donné. On montre qu'il est impossible de faire mieux que (5.3) dans le sens où imposer que le référentiel diffère d'un référentiel inertiel jusqu'au troisième ordre en  $\Delta X^\alpha$  revient à imposer que ce référentiel est en fait *globalement* inertiel et donc à retrouver la relativité restreinte.

### B. Forces gravitationnelles

Dans le référentiel localement inertiel  $\{X^\alpha\}$  défini autour de  $\mathcal{P}$ , les effets de la gravitation en  $\mathcal{P}$  sont rigoureusement effacés et sont "presque" effacés au voisinage de  $\mathcal{P}$ . L'expression

<sup>8</sup> En toute rigueur nous devrions donc dénoter le référentiel localement inertiel par  $\{X_{\mathcal{P}}^\alpha\}$ .

des forces gravitationnelles en  $\mathcal{P}$  s'obtient en considérant un référentiel qui n'est pas localement inertiel en  $\mathcal{P}$ . On introduit donc un référentiel arbitraire  $\{x^\mu\}$ ,<sup>9</sup> défini globalement sur l'espace-temps, et relié à  $\{X^\alpha\}$  par des transformations de coordonnées  $x^\mu(X^\alpha)$  arbitraires (mais supposées inversibles) — voir aussi (2.2),

$$x^\mu = x^\mu(X^\alpha) . \quad (5.5)$$

Pour isoler les effets qui sont spécifiquement dus à la gravitation, on suppose que dans le référentiel localement inertiel  $\{X^\alpha\}$ , une particule située en  $\mathcal{P}$  n'est soumise à aucune force non-gravitationnelle et que donc son mouvement libre est donné par

$$\frac{d^2 X^\alpha}{dp^2} = 0 . \quad (5.6)$$

Ici  $p$  est un certain paramètre (dit affine) le long de la trajectoire qui est tel que (5.6) soit vrai. Le nom de paramètre affine vient de ce que si  $p$  est un paramètre affine, alors tout paramètre  $q = ap + b$  est encore affine, c'est-à-dire que l'équation (5.6) est préservée. Dans le cas d'une particule massive (masse  $> 0$ ), on pourra prendre pour paramètre affine  $p$  le temps propre  $\tau$  de la particule satisfaisant à  $ds^2 = -c^2 d\tau^2$ . Il est en fait plus commode de considérer  $p$  comme un paramètre indéterminé que l'on pourra éliminer au profit de la coordonnée de temps pour trouver le mouvement de la particule. En effet on a  $d^2 X^0/dp^2 = 0$  et  $d^2 X^i/dp^2 = 0$  d'où par élimination de  $p$  au profit de  $T = X^0/c$  dans (5.6) on trouve facilement  $d^2 X^i/dT^2 = 0$  en accord avec la définition (2.5) du référentiel inertiel.

Passant au référentiel arbitraire  $\{x^\mu\}$  on obtient, en utilisant les règles élémentaires du calcul différentiel,

$$0 = \frac{d^2 X^\alpha}{dp^2} = \frac{d}{dp} \left( \frac{\partial X^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{dp} \right) = \frac{\partial X^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{d^2 x^\mu}{dp^2} + \frac{\partial^2 X^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{dx^\mu}{dp} \frac{dx^\nu}{dp} , \quad (5.7)$$

d'où l'équation

$$\boxed{\frac{d^2 x^\mu}{dp^2} + \Gamma_{\nu\rho}^\mu \frac{dx^\nu}{dp} \frac{dx^\rho}{dp} = 0} , \quad (5.8)$$

où le symbole  $\Gamma_{\nu\rho}^\mu$  désigne la quantité

$$\Gamma_{\nu\rho}^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial X^\alpha} \frac{\partial^2 X^\alpha}{\partial x^\nu \partial x^\rho} . \quad (5.9)$$

On appelle  $\Gamma_{\nu\rho}^\mu$  le *symbole de Christoffel*. Comme les dérivées partielles commutent (ce qu'on appelle parfois le lemme de Schwarz) cet objet est symétrique en  $\nu$  et  $\rho$ ,  $\Gamma_{\nu\rho}^\mu = \Gamma_{\rho\nu}^\mu$ .

Ainsi, dans le référentiel arbitraire  $\{x^\mu\}$ , le mouvement de la particule est donné par les équations (5.8) avec (5.9). D'après le principe d'équivalence, on est en droit d'interpréter ces équations comme les équations du mouvement dans un champ de gravitation quelconque, et donc d'interpréter le terme supplémentaire dans (5.8), qui apparaît comme un terme d'accélération inertielle, comme l'opposé d'un terme de force gravitationnelle (par unité de masse), c'est-à-dire comme l'opposé d'un *champ gravitationnel*. On peut obtenir une

<sup>9</sup> Dans la suite on s'efforcera de choisir les indices d'espace-temps grecs  $\mu, \nu, \rho, \dots$  pour un référentiel global quelconque, et les indices  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  lorsque le référentiel est localement inertiel.

expression plus parlante du champ gravitationnel en éliminant dans (5.8) le paramètre  $p$  au profit du temps  $t = x^0/c$ .

**Exercice.** Démontrer que l'accélération résultante est

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} = - \left( \Gamma_{\mu\nu}^i - \frac{dx^i}{dt} \Gamma_{\mu\nu}^0 \right) \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt} . \quad (5.10)$$

On pourra remarquer que  $d^2x^i/dt^2$  s'écrit sous la forme  $(dp/dt)(d/dp)[(dt/dp)^{-1}dx^i/dp]$  et développer la dérivée  $d/dp$ .

Ainsi, l'équation du mouvement (5.10) peut s'écrire  $\gamma^i = g^i$ , où  $\gamma^i$  est l'accélération ordinaire, et ce qui était le terme d'accélération inertielle joue maintenant le rôle de l'opposé du champ gravitationnel  $g^i$ . Cette équation ne dépend pas de la masse de la particule et n'est autre que l'équation (4.3) dans laquelle  $m_i = m_g$ . Le principe d'équivalence est donc maintenant mis en oeuvre dans ce formalisme de façon naturelle (mais bien sûr il reste un principe).

### C. Tenseur métrique

L'équation du mouvement (5.8)–(5.9) a l'inconvénient de faire référence à un référentiel intermédiaire qui est le référentiel localement inertiel entrant dans l'expression du symbole de Christoffel. Il nous faut maintenant exprimer cette équation au moyen d'un objet qui caractérise le référentiel global arbitraire  $\{x^\mu\}$  — le tenseur métrique.

Dans le référentiel arbitraire  $\{x^\mu\}$ , l'intervalle (5.2) s'écrit

$$ds^2 = G_{\alpha\beta}(X) dX^\alpha dX^\beta = G_{\alpha\beta}(X) \frac{\partial X^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial X^\beta}{\partial x^\nu} dx^\mu dx^\nu = g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu , \quad (5.11)$$

où l'on a introduit

$$g_{\mu\nu}(x) = \frac{\partial X^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial X^\beta}{\partial x^\nu} G_{\alpha\beta}(X) . \quad (5.12)$$

La matrice  $g_{\mu\nu}(x)$  s'appelle *tenseur métrique*. C'est l'objet fondamental qui permet de décrire le champ de gravitation. Nous verrons qu'il peut être vu comme une généralisation à dix composantes (car  $g_{\mu\nu}$  est une matrice  $4 \times 4$  symétrique donc possède *a priori* dix composantes indépendantes) du potentiel gravitationnel newtonien. Le mot tenseur se réfère à la loi de transformation entre référentiels (5.12) et sera précisé en section VI.

Le tenseur métrique (5.12) et ses dérivées peuvent être calculés au point  $\mathcal{P}$  autour duquel est défini le référentiel localement inertiel  $\{X^\alpha\}$  en utilisant le développement de Taylor (5.3). On obtient tout d'abord

$$g_{\mu\nu}|_{\mathcal{P}} = \frac{\partial X^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial X^\beta}{\partial x^\nu} \eta_{\alpha\beta} . \quad (5.13)$$

Notons que d'après le théorème de Sylvester, les nombres de valeurs propres  $> 0$  et  $< 0$  du tenseur métrique (5.13) sont les mêmes que pour la matrice de Minkowski  $\eta_{\alpha\beta}$ , c'est-à-dire trois valeurs propres  $> 0$  et une valeur propre  $< 0$ ; on dit que  $g_{\mu\nu}$  a la signature

- + ++ (comme pour  $\eta_{\alpha\beta}$ ). En particulier, le déterminant de la matrice  $g_{\mu\nu}$  est négatif,  $g = \det(g_{\mu\nu}) < 0$ .

Pour les dérivées  $\partial_\sigma g_{\mu\nu} = \partial g_{\mu\nu} / \partial x^\sigma$  on obtient, en utilisant (5.4),

$$\partial_\sigma g_{\mu\nu}|_{\mathcal{P}} = \left( \frac{\partial^2 X^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\sigma} \frac{\partial X^\beta}{\partial x^\nu} + \frac{\partial X^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial^2 X^\beta}{\partial x^\nu \partial x^\sigma} \right) \eta_{\alpha\beta}. \quad (5.14)$$

Cette relation permet de relier le symbole de Christoffel au tenseur métrique. En effet, on calcule facilement à partir de (5.13) et (5.14) la relation suivante

$$g^{\rho\sigma} [\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\mu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}]|_{\mathcal{P}} = 2 \frac{\partial x^\rho}{\partial X^\alpha} \frac{\partial^2 X^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu}, \quad (5.15)$$

où l'on a utilisé la matrice  $g^{\rho\sigma}$  inverse du tenseur métrique  $g_{\mu\nu}$ , dénotée avec des indices supérieurs, et satisfaisant  $g^{\rho\sigma} g_{\sigma\nu} = \delta_\nu^\rho$ .

**Exercice.** Vérifier en utilisant la loi de composition des dérivées partielles,

$$\frac{\partial X^\beta}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\nu}{\partial X^\gamma} = \delta_\gamma^\beta, \quad (5.16)$$

que l'expression de la matrice inverse  $g^{\rho\sigma}$  est

$$g^{\rho\sigma}|_{\mathcal{P}} = \frac{\partial x^\rho}{\partial X^\gamma} \frac{\partial x^\sigma}{\partial X^\delta} \eta^{\gamma\delta}, \quad (5.17)$$

où  $\eta^{\gamma\delta}$  est la matrice inverse de la matrice de Minkowski  $\eta_{\alpha\beta}$ , et a les mêmes composantes données par (3.4) que  $\eta_{\alpha\beta}$ . En déduire (5.15).

On reconnaît dans le membre de droite de (5.17) l'expression (5.9) du symbole de Christoffel. Ainsi on obtient la relation cherchée,

$$\boxed{\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \frac{1}{2} g^{\rho\sigma} [\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\mu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}]} \quad (5.18)$$

Cette formule ayant été démontrée en un évènement  $\mathcal{P}$  initialement arbitraire (le "centre" du référentiel localement inertiel), elle est vraie en tous points. Elle est aussi clairement vraie pour tout référentiel arbitraire  $\{x^\mu\}$ .

Il faut souligner que le symbole de Christoffel est un objet qui est nul dans la classe particulière des référentiels inertiels, car les dérivées premières de la métrique sont nulles par (5.4). Dans un référentiel localement inertiel en  $\mathcal{P}$  on a  $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha|_{\mathcal{P}} = 0$ . Le symbole de Christoffel n'a donc pas de signification "intrinsèque" c'est-à-dire définie indépendamment des coordonnées.

#### D. Lagrangien géodésique

L'équation du mouvement (5.8) ou (5.10) d'une particule dans un champ de gravitation arbitraire est maintenant exprimée, grâce à (5.18), uniquement à l'aide de quantités "appartenant" au référentiel  $\{x^\mu\}$  (le tenseur métrique  $g_{\mu\nu}$ ), sans référence à un référentiel localement inertiel intermédiaire. Cette équation s'appelle *équation des géodésiques*.

**Exercice.** En utilisant l'expression (5.18) du symbole de Christoffel dans l'équation (5.8) prouver qu'une forme équivalente de l'équation des géodésiques est

$$\boxed{\frac{d}{dp} \left( g_{\mu\nu} \frac{dx^\nu}{dp} \right) = \frac{1}{2} \partial_\mu g_{\nu\rho} \frac{dx^\nu}{dp} \frac{dx^\rho}{dp} .} \quad (5.19)$$

L'équation précédente est intéressante car elle se réécrit sous forme d'une équation de Lagrange, dans laquelle le paramètre affine  $p$  joue le rôle du temps,

$$\frac{d}{dp} \left( \frac{\partial L}{\partial(dx^\mu/dp)} \right) = \frac{\partial L}{\partial x^\mu} , \quad (5.20)$$

où  $L$  est ce qu'on appelle le *lagrangien géodésique* donné par

$$L \left( x, \frac{dx}{dp} \right) = \frac{1}{2} g_{\mu\nu}(x) \frac{dx^\mu}{dp} \frac{dx^\nu}{dp} = \frac{1}{2} \left( \frac{ds}{dp} \right)^2 . \quad (5.21)$$

Comme on a pu réécrire  $L$  à l'aide de l'intervalle, on voit que les trajectoires solutions de l'équation des géodésiques sont bien les lignes géodésiques de l'espace-temps, c'est-à-dire les lignes extrémalisant la distance carrée entre les événements au sens de l'intervalle  $ds^2$ . On peut en fait montrer que les géodésiques extrémalisent aussi la distance  $ds = \sqrt{\pm ds^2}$ .

Notons que l'on a pas besoin de connaître les symboles de Christoffel (5.18) pour écrire les équations des géodésiques sous la forme (5.19). Les équations (5.19) sont en général plus faciles à utiliser que les équations (5.8). Au contraire, les équations (5.19) permettent de *calculer* très simplement les Christoffels  $\Gamma_{\mu\nu}^\rho$  par comparaison avec (5.8); nous verrons en section XI C un exemple pratique de calcul des  $\Gamma_{\mu\nu}^\rho$  grâce à l'équation des géodésiques.

**Exercice.** Prouver qu'une intégrale première de l'équation des géodésiques (5.19) est

$$\boxed{\frac{1}{2} g_{\mu\nu}(x) \frac{dx^\mu}{dp} \frac{dx^\nu}{dp} = e ,} \quad (5.22)$$

où  $e$  est une constante le long de la trajectoire de la particule. On vérifiera directement que  $de/dp = 0$  est conséquence de l'équation des géodesiques (5.19).

Une autre façon d'obtenir (5.22) est de remarquer que le membre de gauche de (5.22) est en fait égal à l'“énergie” associée au lagrangien  $L$ , qui est donc constante le long des trajectoires. En effet, définissons le moment conjugué

$$\pi_\mu = \frac{\partial L}{\partial(dx^\mu/dp)} = g_{\mu\nu} \frac{dx^\nu}{dp} . \quad (5.23)$$

Alors le hamiltonien s'écrit par la transformation de Legendre

$$H = \pi_\mu \frac{dx^\mu}{dp} - L . \quad (5.24)$$

et l'on obtient immédiatement que en fait  $H = L$ . L'équation (5.22) apparaît donc comme l'intégrale de l'énergie  $H = e$  associée au lagrangien géodésique  $L$ . Attention au fait que la

constante  $e$  n'a rien à voir avec l'énergie de la particule — c'est simplement une constante reliée à la norme du vecteur unitaire  $u^\mu = dx^\mu/dp$  le long de la trajectoire ( $g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = 2e$ ), qui se trouve conservée par l'équation du mouvement. Le hamiltonien doit en fait être exprimé comme une fonction de  $x^\mu$  et de son moment conjugué  $\pi_\mu$ , donc

$$H(x, \pi) = \frac{1}{2} g^{\mu\nu}(x) \pi_\mu \pi_\nu . \quad (5.25)$$

La forme lagrangienne (5.19) de l'équation des géodésiques est très utile pour rechercher des quantités conservées dans le mouvement (hormis  $H = e$ ). Si les composantes de la métrique  $g_{\rho\sigma}$  ne dépendent pas d'une certaine coordonnée  $x^\mu$  — on dira que la coordonnée  $x^\mu$  est *ignorable* — alors on obtiendra par (5.19) une intégrale première du mouvement donnée par  $g_{\mu\nu}dx^\nu/dp = \text{const}$ , c'est-à-dire

$$\pi_\mu = \text{const} , \quad (5.26)$$

pour une métrique indépendante de  $x^\mu$ , où  $\pi_\mu$  est le moment conjugué de  $x^\mu$ . En pratique, pour obtenir le mouvement des particules, il faudra toujours commencer par rechercher d'éventuelles intégrales premières du mouvement du type (5.26), associées à des symétries de la métrique (le fait qu'une coordonnée soit ignorable). Dans tous les cas on aura l'intégrale du mouvement (5.22) qui est toujours valable même en l'absence de symétries.

### E. Quadri-vitesse et quadri-accélération

Soit une particule ordinaire (de masse  $m > 0$ ) en chute libre dans le champ de gravitation. On définit sa quadri-vitesse comme en relativité restreinte (voir la section III E) par

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} , \quad (5.27)$$

où  $d\tau$  est le temps propre

$$d\tau^2 = -\frac{1}{c^2} ds^2 = -\frac{1}{c^2} g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu . \quad (5.28)$$

Par comparaison avec (5.22) on voit que le paramètre  $p$  est relié à  $\tau$  par  $c\tau = \sqrt{-2e} p$ . Donc  $e < 0$  pour une particule ordinaire. La quadri-vitesse est donc du genre temps — située à l'intérieur du cône de lumière:

$$g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = -c^2 . \quad (5.29)$$

On peut alors comme en relativité restreinte introduire un espace  $\Pi$  à trois dimensions orthogonal à  $u^\mu$  qui représente l'espace "propre", ou espace de "simultanéité", de l'observateur de quadri-vitesse  $u^\mu$  dans lequel il fait des mesures spatiales. Cet espace est défini par l'ensemble des vecteurs  $V_\Pi^\mu = \perp_\nu^\mu V^\nu$ , où le projecteur perpendiculaire à  $u^\mu$  est défini par

$$\perp_\nu^\mu = \delta_\nu^\mu + \frac{1}{c^2} u^\mu u_\nu , \quad (5.30)$$

avec  $u_\nu = g_{\nu\rho} u^\rho$ . On a  $\perp_\nu^\mu u^\nu = 0$  donc  $V_\Pi^\mu u^\mu = 0$  pour tous les vecteurs de  $\Pi$  (et  $\perp_\nu^\mu$  est bien un projecteur, c'est-à-dire que  $\perp_\nu^\mu \perp_\rho^\nu = \perp_\rho^\mu$ ).

La quadri-accélération de la particule n'est *pas* égale, en général, à la dérivée de la quadri-vitesse par rapport au temps propre. D'après le principe d'équivalence, les champs de

gravitation sont équivalents localement à des champs d'accélération inertiels et doivent donc être inclus dans la définition de la quadri-accélération. La définition correcte en relativité générale est

$$a^\mu = \frac{du^\mu}{d\tau} + \Gamma_{\nu\rho}^\mu u^\nu u^\rho , \quad (5.31)$$

où  $\Gamma_{\nu\rho}^\mu$  est le symbole de Christoffel donné par (5.18). De la sorte, l'équation des géodésiques (5.8) [ou de façon équivalente (5.19)] s'écrit simplement

$$a^\mu = 0 . \quad (5.32)$$

L'équation des géodésiques représentant le mouvement libre des corps dans l'espace-temps (d'après le principe d'équivalence) se traduit par le fait que la quadri-accélération est nulle. En un certain sens le principe de relativité a été *généralisé* à tous les référentiels: le mouvement de tous les corps libres (non soumis à l'action de forces extérieures mais soumis à des champs d'accélération inertiels représentant les effets de la gravitation) est un mouvement non accéléré dans le sens où (5.32). Dans ce sens la définition (2.5) des référentiels inertiels en section II a été généralisée — c'est là l'origine du nom de relativité générale.

En présence de forces extérieures *autres* que la force gravitationnelle on aura une équation du type

$$m a^\mu = f^\mu , \quad (5.33)$$

où  $f^\mu$  est défini par transformation de coordonnée arbitraire  $\{X^\alpha\} \rightarrow \{x^\mu\}$  à partir de son expression  $F^\alpha = (0, \mathbf{F})$  dans un référentiel localement inertiel  $\{X^\alpha\}$  où la particule se trouve momentanément au repos (supposant que  $f^\mu$  est un tenseur, voir la section VI).

## VI. CALCUL TENSORIEL

### A. Notion de scalaire

En établissant l'expression de l'intervalle  $ds^2$  dans un référentiel arbitraire  $\{x^\mu\}$ , on a implicitement postulé l'invariance de la valeur *numérique* de  $ds^2$  lors du changement de référentiel  $\{X^\alpha\} \rightarrow \{x^\mu\}$  [voir (5.11)]. L'intervalle  $ds^2$  est ce qu'on appelle un *scalaire*, c'est-à-dire la donnée en chaque point de l'espace-temps d'un nombre (réel) ayant une valeur "intrinsèque", indépendante du choix d'un référentiel particulier. Si l'on repère les points de l'espace-temps à l'aide d'un référentiel  $\{x^\mu\}$ , alors le scalaire devient une certaine fonction des coordonnées  $x^\mu$ , par exemple  $ds^2(x)$ . Dans un autre référentiel  $\{x'^\mu\}$ , le scalaire sera donné par une autre fonction des nouvelles coordonnées, par exemple  $ds'^2(x')$ . La valeur numérique du scalaire est la même dans  $\{x^\mu\}$  et  $\{x'^\mu\}$ , donc

$$ds^2(x) = ds'^2(x') . \quad (6.1)$$

Cette valeur numérique commune est la valeur de  $ds^2$  au point repéré par  $x^\mu$  et  $x'^\mu$  dans les deux référentiels, c'est-à-dire l'évènement  $P = (x^\mu) = (x'^\mu)$  dans la notation (2.1). Plus généralement on appellera scalaire tout champ  $S(x)$  défini en tout point de l'espace-temps et tel que dans un changement arbitraire de référentiel  $\{x\} \rightarrow \{x'\}$  on ait

$$\boxed{S(x) = S'(x')} . \quad (6.2)$$

Il faut bien distinguer le postulat très naturel (6.2) d'invariance numérique avec le principe de relativité en section II, qui implique que non seulement la valeur numérique de l'intervalle mais surtout sa *forme* est la même dans tous les référentiels inertiels [et est donnée par l'expression minkowskienne (3.6)].

### B. Notions de vecteur et de tenseur

Un champ de quadri-vitesse de particules  $u^\mu = dx^\mu/d\tau$  a aussi un caractère "intrinsèque", qui peut être défini indépendamment du choix d'un référentiel particulier. Il faut voir le champ  $u^\mu$  comme un "champ de blé" sur l'espace-temps, où chaque épi de blé représente le vecteur vitesse d'une particule à la position de la particule et à un instant donné. Comme le temps propre  $d\tau$  est un scalaire (car  $d\tau^2 = -ds^2/c^2$ ), on déduit de la loi de transformation des différentielles  $dx'^\nu = (\partial x'^\nu / \partial x^\mu) dx^\mu$  que la quadri-vitesse se transforme dans le changement de référentiel  $\{x^\mu\} \rightarrow \{x'^\nu\}$  comme

$$u'^\nu(x') = \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} u^\mu(x) . \quad (6.3)$$

Un objet dont les composantes se transforment comme (6.3) s'appelle un *vecteur*. Le vecteur est appelé aussi vecteur contravariant, ou tenseur de variance  $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ .

On admettra que le tenseur métrique  $g_{\mu\nu}$  introduit en section V a aussi un caractère intrinsèque. Du fait que l'intervalle  $ds^2$  est un scalaire par (6.1), on déduit facilement que la loi de transformation de  $g_{\mu\nu}$  définie en (5.11) est

$$g'_{\rho\sigma}(x') = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\rho} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\sigma} g_{\mu\nu}(x) . \quad (6.4)$$

Un objet dont les composantes dans les différents référentiels sont reliées par une formule telle que (6.4) est appelé tenseur deux fois covariant ou de variance  $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ .

En toute généralité, on appelle tenseur de variance  $\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$  un objet dont les composantes  $T_{\rho\sigma\cdots}^{\mu\nu\cdots}(x)$  dans le référentiel  $\{x^\mu\}$  possèdent  $p$  indices supérieurs  $\mu\nu\cdots$  (dits contravariants) et  $q$  indices inférieurs  $\rho\sigma\cdots$  (dits covariants) et se transforment dans les changements de référentiels arbitraires  $\{x^\mu\} \rightarrow \{x'^\nu\}$  selon

$$\boxed{T_{\pi\varepsilon\cdots}^{\lambda\tau\cdots}(x') = \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\tau}{\partial x^\nu} \cdots \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\pi} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\varepsilon} \cdots T_{\rho\sigma\cdots}^{\mu\nu\cdots}(x)}, \quad (6.5)$$

où dans le membre de droite on a  $p$  facteurs pour les  $p$  indices contravariants et  $q$  facteurs pour les  $q$  indices covariants. On admet que le tenseur (6.5) représente un objet physique (comme l'épi de blé mais plus général) qui peut être défini de façon intrinsèque, indépendamment du choix des coordonnées.

### C. Exemples de tenseurs

Outre l'intervalle  $ds^2$  (qui est un scalaire ou tenseur  $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ), le vecteur quadri-vitesse (6.3) et le tenseur métrique (6.4), il existe de nombreux autres tenseurs.

1. Le *symbole de Kronecker*  $\delta_\mu^\nu$  est d'après (5.16) un tenseur  $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,

$$\delta_\mu^\nu = \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\mu} \delta_\sigma^\rho. \quad (6.6)$$

Ce tenseur a les *mêmes composantes numériques* dans tous les référentiels, données par  $\delta_\mu^\nu = \delta_\mu^\nu = 1$  si  $\mu = \nu$ , et  $= 0$  si  $\mu \neq \nu$ .

2. L'*inverse* du tenseur métrique est un tenseur  $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,

$$g'^{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\sigma} g^{\sigma\rho}(x), \quad (6.7)$$

ce qui se prouve à partir des lois (6.4) et (6.6).

3. Soit  $g$  le *déterminant* de la matrice  $g_{\mu\nu}$ ,  $g = \det(g_{\mu\nu})$ . D'après (6.4), on a  $g'(x') = J^2 g(x)$  où  $J$  est le déterminant de la matrice  $\partial x^\mu / \partial x'^\nu$ , appelé aussi *jacobien* de la transformation  $\{x^\mu\} \rightarrow \{x'^\nu\}$ . Comme on sait que l'élément de volume  $d^4x$  se transforme selon  $d^4x = |J|d^4x'$ , on en déduit que

$$\sqrt{-g'(x')} d^4x' = \sqrt{-g(x)} d^4x, \quad (6.8)$$

est un scalaire  $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  (rappelons que le déterminant  $g$  est  $< 0$ ).

4. On admettra que  $\sqrt{-g} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ , où  $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$  est le symbole complètement antisymétrique habituel (qui change de signe dans une transposition quelconque d'indices et a par exemple  $\varepsilon_{0123} = +1$ ) est un tenseur  $\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$  pour les transformations de jacobien  $J > 0$ ,

$$\sqrt{-g'(x')} \varepsilon_{\lambda\tau\pi\varepsilon} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\tau} \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\pi} \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\varepsilon} \sqrt{-g(x)} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}. \quad (6.9)$$

5. Notons aussi que le *tenseur nul*, égal à zéro dans tous les systèmes de coordonnées, est un tenseur de variance  $\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$  arbitraire car

$$0 = \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x'^{\tau}}{\partial x^{\nu}} \cdots \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x'^{\pi}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\varepsilon}} \cdots \times 0 . \quad (6.10)$$

Attention au fait que tous les objets portant des indices ne sont pas des tenseurs. Par exemple, le symbole de Christoffel  $\Gamma_{\mu\nu}^{\rho}$  défini par (5.18) n'est *pas* un tenseur [nous donnerons sa loi de transformation en (6.18)]. Etant nul dans un référentiel localement inertiel où les effets gravitationnels sont effacés, il devrait d'après (6.10) être nul dans tous les référentiels s'il était un tenseur. Ce n'est évidemment pas le cas car  $\Gamma_{\mu\nu}^{\rho}$  représente les effets des forces gravitationnelles qui s'exercent dans un référentiel global quelconque, et sa nullité dans un référentiel localement inertiel traduit simplement le principe d'équivalence.

#### D. Algèbre des tenseurs

On peut former des tenseurs nouveaux à partir de tenseurs anciens par les opérations algébriques suivantes (qui engendrent une algèbre pour l'espace des tenseurs).

1. Combinaison linéaire de tenseurs de mêmes variances, par exemple

$$T_{\rho}^{\mu\nu} = a R_{\rho}^{\mu\nu} + b S_{\rho}^{\mu\nu} . \quad (6.11)$$

2. Transposition d'indices de même variances,

$$T_{\sigma}^{\mu\nu\rho} = R_{\sigma}^{\nu\mu\rho} . \quad (6.12)$$

3. Multiplication tensorielle de tenseurs de variances quelconques,

$$T_{\nu}^{\mu\rho\sigma} = R_{\nu}^{\mu} S^{\rho\sigma} . \quad (6.13)$$

4. Contraction d'indices de variances différentes,

$$T_{\nu}^{\mu} = R_{\nu\rho}^{\mu\rho} = \delta_{\rho}^{\sigma} R_{\nu\sigma}^{\mu\rho} . \quad (6.14)$$

La contraction d'indice est en fait une multiplication avec le tenseur de Kronecker.

5. Abaissement et élévation d'indices à l'aide du tenseur métrique,<sup>10</sup>

$$T_{\mu}^{\cdot\nu} = g_{\mu\sigma} T^{\sigma\nu} , \quad (6.15a)$$

$$T^{\cdot\nu}_{\mu} = g^{\nu\rho} T_{\rho\mu} . \quad (6.15b)$$

Notons que dans (6.15) on garde par définition la même lettre pour désigner le nouveau tenseur. Comme  $\delta_{\mu}^{\nu} = g_{\mu\rho} g^{\rho\nu}$ , on a avec cette définition

$$g_{\mu}^{\nu} = \delta_{\mu}^{\nu} . \quad (6.16)$$

<sup>10</sup> Attention, si le tenseur  $T^{\mu\nu}$  ou  $T_{\mu\nu}$  dans le membre de droite de (6.15) n'est pas symétrique dans les indices  $\mu\nu$ , on doit indiquer par un point la place initiale de l'indice déplacé: en effet  $T_{\mu}^{\cdot\nu} \neq T_{\mu}^{\nu}$ , ou  $T^{\cdot\nu}_{\mu} \neq T_{\mu}^{\nu}$ .

## E. Dérivation covariante

Le vecteur quadri-vitesse  $u^\mu$  d'une particule est d'après (6.3) un tenseur  $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ . Le vecteur quadri-accélération  $a^\mu$  de la particule défini en (5.31) est aussi un tenseur  $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ . Ceci est évident de part la construction même de l'équation des géodésiques en section V, obtenue à partir du référentiel localement inertiel par passage à un référentiel  $\{x^\mu\}$  arbitraire. Si  $a^\mu$  n'était pas un tenseur, on pourrait l'annuler dans un référentiel particulier (et en un point donné) sans qu'il soit nul dans tous les référentiels. Cela contredirait l'équation de géodésiques dont on a vu qu'elle s'écrit  $a^\mu = 0$  dans *tous* les référentiels. Donc

$$\boxed{a'^{\nu}(x') = \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\mu}} a^{\mu}(x) .} \quad (6.17)$$

**Exercice.** Prouver la formule (6.17) par un calcul direct dans lequel on établira et utilisera la loi de transformation du symbole de Christoffel

$$\Gamma'_{\mu\nu}{}^{\rho}(x') = \frac{\partial x^{\pi}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\varepsilon}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\tau}} \Gamma_{\pi\varepsilon}^{\tau}(x) + \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\sigma}} \frac{\partial^2 x^{\sigma}}{\partial x'^{\mu} \partial x'^{\nu}} . \quad (6.18)$$

Le deuxième terme dans cette équation montre que  $\Gamma'_{\mu\nu}{}^{\rho}$  n'est pas un tenseur.

On définit la *dérivée covariante* du vecteur quadri-vitesse  $u^\mu$  de sorte que la quadri-accélération  $a^\mu$  apparaisse comme la dérivée covariante par rapport au temps propre de la quadri-vitesse, dans le sens où

$$\boxed{a^\mu = u^\nu \nabla_\nu u^\mu .} \quad (6.19)$$

La formule (6.19) apparaît comme la généralisation à des référentiels arbitraires de la formule de la relativité restreinte (3.23). Comme  $u^\mu$  et  $a^\mu$  sont des tenseurs  $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  on en déduit que l'objet  $\nabla_\nu u^\mu$  est un tenseur  $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ . On l'appelle dérivée covariante du vecteur  $u^\mu$  (par rapport à la coordonnée  $x^\nu$ ) et son expression se déduit facilement de (5.31):

$$\nabla_\nu u^\mu = \partial_\nu u^\mu + \Gamma_{\nu\rho}^\mu u^\rho . \quad (6.20)$$

Plus généralement, on peut montrer que si  $T_{\lambda\dots}^{\mu\dots}$  est un tenseur de variance  $\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$  quelconque, alors sa dérivée covariante  $\nabla_\nu T_{\lambda\dots}^{\mu\dots}$  est un tenseur de variance  $\begin{bmatrix} p \\ q+1 \end{bmatrix}$  donné par

$$\boxed{\nabla_\nu T_{\lambda\dots}^{\mu\dots} = \partial_\nu T_{\lambda\dots}^{\mu\dots} + \Gamma_{\nu\rho}^\mu T_{\lambda\dots}^{\rho\dots} + \dots - \Gamma_{\nu\lambda}^\rho T_{\rho\dots}^{\mu\dots} - \dots ,} \quad (6.21)$$

où les termes comprenant les  $\Gamma$  sont au nombre de  $p$  avec un signe  $+$  (un terme pour chaque indice contravariant) et au nombre de  $q$  avec un signe  $-$  (un terme pour chaque indice covariant). Si  $S$  est un scalaire  $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ , il n'y a pas de terme en  $\Gamma$ , et la dérivée covariante se réduit à la dérivée ordinaire. Donc si  $S$  est le scalaire (6.2) on a

$$\nabla_\nu S = \partial_\nu S , \quad (6.22)$$

qui définit un tenseur  $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ , ou covecteur. Si  $V_\mu$  est un covecteur  $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ , il y a un terme en  $\Gamma$  avec un signe  $-$ , et donc

$$\nabla_\nu V_\mu = \partial_\nu V_\mu - \Gamma_{\nu\mu}^\rho V_\rho , \quad (6.23)$$

qui est un tenseur  $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ . On prouve plus loin que la dérivée covariante satisfait la règle de Leibniz habituelle pour la composition des dérivations, voir (6.40).

**Exercice.** *Montrer, en utilisant la formule  $dg = gg^{\mu\nu}dg_{\mu\nu} = -gg_{\mu\nu}dg^{\mu\nu}$  donnant la différentielle du déterminant  $g = \det(g_{\mu\nu})$ , que*

$$\nabla_{\mu}V^{\mu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_{\mu}(\sqrt{-g} V^{\mu}) , \quad (6.24a)$$

$$\nabla_{\mu}F^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_{\mu}(\sqrt{-g} F^{\mu\nu}) + \Gamma_{\rho\sigma}^{\nu}F^{\rho\sigma} . \quad (6.24b)$$

Notamment, si  $F^{\rho\sigma}$  est antisymétrique par permutation des indices,  $F^{\rho\sigma} = -F^{\sigma\rho}$ , on voit que la formule (6.24b) se réduit au premier terme.<sup>11</sup>

Une propriété importante de la dérivation covariante (6.21), appelée théorème de Ricci, est que le tenseur métrique  $g_{\mu\nu}$  est à dérivée covariante nulle,

$$\boxed{\nabla_{\lambda}g_{\mu\nu} = \partial_{\lambda}g_{\mu\nu} - \Gamma_{\lambda\mu}^{\rho}g_{\nu\rho} - \Gamma_{\lambda\nu}^{\rho}g_{\mu\rho} = 0 .} \quad (6.25)$$

Le théorème de Ricci (6.25) se démontre directement à partir de l'expression (5.18) du symbole de Christoffel. Il permet d'abaisser et d'élever les indices au "travers" de la dérivation covariante, par exemple  $\nabla_{\lambda}T_{\mu}^{\cdot\nu} = g_{\mu\sigma}\nabla_{\lambda}T^{\sigma\nu}$ .

## F. Tenseur de Riemann

La dérivée covariante seconde, agissant sur un scalaire  $S$ , a la propriété d'être symétrique par permutation des indices,

$$\nabla_{\mu}\nabla_{\nu}S = \partial_{\mu}\partial_{\nu}S - \Gamma_{\mu\nu}^{\rho}\partial_{\rho}S = \nabla_{\nu}\nabla_{\mu}S , \quad (6.26)$$

car les dérivées ordinaires commutent et le symbole de Christoffel est symétrique,  $\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} = \Gamma_{\nu\mu}^{\rho}$ . Cependant cette propriété n'est pas vraie quand la dérivée seconde agit sur un tenseur de variance plus élevée, par exemple un vecteur  $V^{\lambda}$ . Dans ce cas, on peut montrer que le commutateur des dérivées covariantes agissant sur  $V^{\lambda}$  s'écrit (identité de Ricci)

$$(\nabla_{\mu}\nabla_{\nu} - \nabla_{\nu}\nabla_{\mu})V^{\lambda} = R^{\lambda}_{\cdot\sigma\mu\nu}V^{\sigma} \quad (6.27)$$

où  $R^{\lambda}_{\cdot\mu\sigma\nu}$  a l'expression explicite

$$\boxed{R^{\lambda}_{\cdot\mu\sigma\nu} = \partial_{\sigma}\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} - \partial_{\nu}\Gamma_{\mu\sigma}^{\lambda} + \Gamma_{\mu\nu}^{\rho}\Gamma_{\rho\sigma}^{\lambda} - \Gamma_{\mu\sigma}^{\rho}\Gamma_{\nu\rho}^{\lambda} .} \quad (6.28)$$

<sup>11</sup> C'est notamment le cas du tenseur de Faraday,  $F_{\mu\nu} = \nabla_{\mu}A_{\nu} - \nabla_{\nu}A_{\mu} = \partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu}$ . La formule précédente permet donc d'écrire les équations de Maxwell dans un champ de gravitation sous la forme

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_{\mu}(\sqrt{-g} F^{\mu\nu}) = -\mu_0 J^{\mu} ,$$

où  $F^{\mu\nu} = g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}F_{\rho\sigma}$  et  $J^{\mu}$  dénote le courant de charges.

Le membre de gauche de (6.27) étant un tenseur, et  $V^\lambda$  étant un vecteur arbitraire, on en déduit que  $R^\lambda_{\mu\sigma\nu}$  est un tenseur  $\left[ \begin{smallmatrix} 1 \\ 3 \end{smallmatrix} \right]$ , découvert par Riemann (1854) et appelé le *tenseur de Riemann* (parfois de Riemann-Christoffel) ou *tenseur de courbure*. Rappelons que le symbole de Christoffel n'est pas un tenseur — voir sa loi de transformation (6.18) — mais il se trouve de façon remarquable que la combinaison compliquée de dérivées et de produits de  $\Gamma$  donnée par (6.28) est un tenseur.

**Exercice.** Démontrer l'identité de Ricci et obtenir l'expression (6.28) du tenseur de Riemann (6.27).

Le tenseur de Riemann, très important dans la suite, satisfait à des identités algébriques et différentielles. Les identités algébriques résultent des symétries suivantes sur les indices (où on utilise la forme covariante du tenseur de Riemann  $R_{\mu\nu\rho\sigma} = g_{\mu\tau} R^\tau_{\nu\rho\sigma}$ ).

1. Antisymétrique des paires d'indices  $\mu\nu$  et  $\rho\sigma$ ,

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = -R_{\nu\mu\rho\sigma} = -R_{\mu\nu\sigma\rho} . \quad (6.29)$$

2. Symétrie par échange des paires  $\mu\nu$  et  $\rho\sigma$ ,

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = R_{\rho\sigma\mu\nu} . \quad (6.30)$$

3. Symétrie cyclique par rapport aux indices  $\nu\rho\sigma$ ,

$$R^\lambda_{\nu\rho\sigma} + R^\lambda_{\sigma\nu\rho} + R^\lambda_{\rho\sigma\nu} = 0 . \quad (6.31)$$

Ces identités réduisent à 20 le nombre de composantes indépendantes du tenseur de Riemann. L'identité différentielle s'appellent *identité de Bianchi* et jouent un rôle crucial dans la suite. Elle s'écrit

$$\boxed{\nabla_\lambda R^\mu_{\nu\rho\sigma} + \nabla_\rho R^\mu_{\nu\sigma\lambda} + \nabla_\sigma R^\mu_{\nu\lambda\rho} \equiv 0 ,} \quad (6.32)$$

qui comprend une symétrie cyclique par rapport aux indices  $\lambda\rho\sigma$  (voir exercice plus bas). Par contraction de cette identité, on obtient l'*identité d'Einstein*

$$\nabla_\nu E^{\mu\nu} \equiv 0 , \quad (6.33)$$

où  $E^{\mu\nu}$  est appelé le *tenseur d'Einstein*

$$\boxed{E^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R .} \quad (6.34)$$

Le tenseur d'Einstein est défini par les contractions suivantes du tenseur de Riemann,

$$R_{\mu\nu} = R^\lambda_{\mu\lambda\nu} , \quad (6.35a)$$

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} , \quad (6.35b)$$

(avec, bien sûr,  $R^{\mu\nu} = g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}R_{\rho\sigma}$ ), qui sont appelées respectivement *tenseur de Ricci*  $R_{\mu\nu}$  et *scalaire de Ricci*  $R$ . Notez que le tenseur de Ricci  $R_{\mu\nu}$  est en fait symétrique en  $\mu\nu$  de part la symétrie d'échange de paires en (6.30):

$$R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu} . \quad (6.36)$$

Il faut insister sur le fait que (6.32) et (6.33) sont des *identités*, c'est-à-dire sont identiquement vraies pour toutes métriques (on dénote une identité par le symbole  $\equiv$ ). Si l'on remplace dans ces identités le tenseur de Riemann par son expression (6.28) en fonction du symbole de Christoffel, puis le symbole de Christoffel en fonction de la métrique (5.18), on trouvera zéro *identiquement*.

## G. Equations tensorielles

Une équation tensorielle est une équation qui relie deux tenseurs de *même variance*  $\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$ , par exemple

$$T_{\sigma}^{\mu\nu}(x) = A_{\sigma}(x)K^{\mu\nu}(x) \quad \text{ou} \quad T_{\sigma}^{\mu\nu}(x) = \nabla_{\sigma}K^{\mu\nu}(x) , \quad (6.37)$$

où  $T_{\sigma}^{\mu\nu}$ ,  $A_{\sigma}$  et  $K^{\mu\nu}$  sont les composantes de tenseurs, ou bien encore

$$W_{\sigma\tau}^{\lambda\rho}(x) = 0 , \quad (6.38)$$

puisque l'on a vu que zéro est un tenseur de variance arbitraire. Une équation tensorielle est *covariante* dans le sens où elle garde la même forme dans tous les référentiels. Si elle s'exprime par (6.37) ou (6.38) dans le référentiel  $\{x\}$ , elle s'exprimera par

$$T'_{\sigma}{}^{\mu\nu}(x') = A_{\sigma}(x')K'^{\mu\nu}(x') \quad \text{ou} \quad T'_{\sigma}{}^{\mu\nu}(x') = \nabla'_{\sigma}K'^{\mu\nu}(x') \quad \text{ou} \quad W'_{\sigma\tau}{}^{\lambda\rho}(x') = 0 , \quad (6.39)$$

dans le référentiel  $\{x'\}$ , où les nouvelles composantes des tenseurs sont données par des transformations telles que (6.5). Si une équation tensorielle a été démontrée être vraie dans un système de coordonnées particulier, elle sera vraie dans *tous* les systèmes de coordonnées.

Il est très commode de démontrer les équations tensorielles en se plaçant dans un système de coordonnées localement inertielles  $X^{\alpha}$  en un point  $\mathcal{P}$  fixé mais arbitraire (voir la section V A). Dans un tel référentiel, la métrique  $G_{\alpha\beta}(X)$  se réduit en  $\mathcal{P}$  à la métrique de Minkowski  $\eta_{\alpha\beta}$ , et ses dérivées premières  $\partial G_{\alpha\beta}/\partial X^{\gamma}$  sont nulles en  $\mathcal{P}$  d'après (5.4). En particulier, tous les symboles de Christoffel  $\Gamma$  sont nuls (mais attention, leurs différentielles  $\partial\Gamma$  ne sont pas nulles), et la dérivée covariante  $\nabla_{\gamma}$  se réduit donc à la dérivée ordinaire  $\partial_{\gamma} = \partial/\partial X^{\gamma}$ . On évite ainsi, en se plaçant en coordonnées localement inertielles, de longs calculs.

Ainsi, comme  $\nabla_{\lambda}g_{\mu\nu}$  est un tenseur, et comme il se réduit à  $\partial_{\gamma}G_{\alpha\beta} = 0$  dans des coordonnées localement inertielles, on en déduit nécessairement  $\nabla_{\lambda}g_{\mu\nu} = 0$  dans tous les référentiels et l'on retrouve ainsi sans calculs le théorème de Ricci (6.25). De même, on peut obtenir immédiatement la règle de Leibniz pour la dérivée covariante,

$$\nabla_{\lambda}(T_{\nu\dots}^{\mu\dots}U_{\sigma\dots}^{\rho\dots}) = T_{\nu\dots}^{\mu\dots}(\nabla_{\lambda}U_{\sigma\dots}^{\rho\dots}) + (\nabla_{\lambda}T_{\nu\dots}^{\mu\dots})U_{\sigma\dots}^{\rho\dots} . \quad (6.40)$$

**Exercice.** Démontrer les identités de Bianchi (6.32) par passage dans un référentiel localement inertiel (les calculs sont très compliqués dans un référentiel quelconque).

## VII. RELATIVITE GENERALE

La relativité générale est la théorie de la gravitation basée sur le principe d'équivalence d'Einstein et sur des équations pour le champ de gravitation appelées équations d'Einstein. En relativité générale le champ de gravitation est entièrement et uniquement décrit par le tenseur métrique de l'espace-temps. Dans les théories alternatives de la gravitation on rajoute d'autres types de champs à la métrique (champ scalaire, vectoriel, *etc*). De ce point de vue la relativité générale est la théorie la plus simple que l'on puisse concevoir et qui soit compatible avec le principe d'équivalence.

### A. Tenseur énergie-impulsion de la matière

L'équation du mouvement dans un champ de gravitation d'une particule ponctuelle, ou plus généralement d'un fluide de particules ponctuelles sans interactions (pour simplifier), a été obtenue en section V à partir du principe d'équivalence d'Einstein. C'est l'équation des géodésiques qui s'écrit

$$a^\mu = u^\nu \nabla_\nu u^\mu = 0 , \quad (7.1)$$

où  $u^\mu$  et  $a^\mu$  désignent respectivement les champs de quadri-vitesse et de quadri-accélération du fluide de particules. Introduisons la densité de masse  $\rho$  des particules mesurée dans le référentiel de repos de particules, et satisfaisant à l'équation de conservation de la masse (ou équation de continuité)

$$\boxed{\nabla_\nu(\rho u^\nu) = 0 .} \quad (7.2)$$

La densité de masse  $\rho$  ainsi définie s'appelle densité de masse *propre* des particules. C'est un scalaire car c'est un nombre réel donné en chaque point de l'espace-temps, indépendamment d'un système de coordonnées. A partir de  $\rho$  on peut aussi définir ce qu'on appelle la densité de *coordonnées*,

$$\rho_* = \sqrt{-g} \frac{\rho u^0}{c} , \quad (7.3)$$

où  $g$  est le déterminant de la métrique et  $u^0$  la composante zéro de la quadri-vitesse. Utilisant (6.24a) on vérifie que  $\rho_*$  satisfait à l'équation de continuité habituelle,

$$\partial_t \rho_* + \partial_i(\rho_* v^i) = 0 , \quad (7.4)$$

où  $v^i = cu^i/u^0$  est la vitesse ordinaire des particules dans le référentiel considéré. La densité  $\rho_*$  n'est *pas* un scalaire car sa définition dépend du référentiel considéré — c'est la masse des particules contenues dans un volume unité de la grille de coordonnées. Pour démontrer (7.2) il suffit de remarquer que c'est une équation tensorielle et qu'elle se réduit à l'équation  $\partial_t \rho_* = 0$  dans un référentiel localement inertiel en co-mouvement avec les particules au point considéré.

L'équation du mouvement (7.1) peut alors se ré-écrire sous la forme de

$$\boxed{\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0 ,} \quad (7.5)$$

qui apparaît comme une loi de conservation dans le sens covariant, où  $T^{\mu\nu}$  désigne le *tenseur énergie-impulsion* des particules,

$$\boxed{T^{\mu\nu} = \rho u^\mu u^\nu .} \quad (7.6)$$

C'est bien un tenseur  $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$  car  $\rho$  est un scalaire  $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  et  $u^\mu$  un vecteur  $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ . On admettra qu'un champ de matière quelconque (fluide parfait, champ électromagnétique, *etc*) peut toujours être décrit par un tenseur énergie-impulsion tel que (7.6), satisfaisant aux équations (7.5).<sup>12</sup>

## B. Equations d'Einstein

On recherche les équations du champ de gravitation sous la forme d'équations tensorielles, valables dans tous les référentiels (*cf* section VI). Comme le champ de gravitation est décrit par les dix composantes indépendantes du tenseur métrique  $g_{\mu\nu}$  symétrique, il est naturel de rechercher dix équations de champ sous la forme de l'égalité de deux tenseurs symétriques de variance  $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ . La matière, source du champ de gravitation, est déjà décrite par un tel tenseur, à savoir  $T^{\mu\nu}[g]$  donné par (7.6) ou sa généralisation (notons que le tenseur de la matière dépend lui-même de la métrique  $g_{\rho\sigma}$ ). On est donc amené à *postuler*, très naturellement, des équations de champ du type

$$G^{\mu\nu}[g, \partial g, \partial^2 g, \dots] = \chi T^{\mu\nu}[g] \quad (7.7)$$

où  $G^{\mu\nu}$  est un certain tenseur, fonctionnelle du champ  $g_{\rho\sigma}$  et de ses dérivées partielles (notées  $\partial g, \partial^2 g, \dots$ ), et où  $\chi$  est une certaine constante de couplage. On voit tout de suite d'après l'équation du mouvement de la matière (7.5) que le tenseur  $G^{\mu\nu}$  doit nécessairement être à divergence covariante nulle. Supposons que le tenseur  $G^{\mu\nu}$ :

1. Satisfasse *identiquement* à la contrainte

$$\nabla_\nu G^{\mu\nu} \equiv 0, \quad (7.8)$$

2. Dépende de  $g_{\rho\sigma}$  et de ses dérivées partielles premières et secondes seulement,

$$G^{\mu\nu} = G^{\mu\nu}[g, \partial g, \partial^2 g], \quad (7.9)$$

3. Soit *nul* quand  $g_{\rho\sigma} = \eta_{\rho\sigma}$ .

Alors l'expression de  $G^{\mu\nu}$  découle du théorème suivant dû à Cartan (1922).

**Théorème.** *Le seul tenseur  $G^{\mu\nu}$  qui satisfait aux contraintes précédentes 1. à 3. est, à une constante multiplicative près que l'on incorpore dans la constante de couplage  $\chi$ , le tenseur d'Einstein donné par (6.34),*

$$G^{\mu\nu} = E^{\mu\nu}. \quad (7.10)$$

<sup>12</sup> Par exemple, le tenseur énergie impulsion du fluide parfait s'écrit

$$T^{\mu\nu} = \left( \frac{\varepsilon}{c^2} + p \right) u^\mu u^\nu + p g^{\mu\nu},$$

où  $\varepsilon$  est la densité d'énergie et  $p$  la pression du fluide parfait ( $\varepsilon$  et  $p$  sont des scalaires). La densité d'énergie est reliée à la densité de masse propre par  $\varepsilon = \rho c^2 (1 + \Pi/c^2)$  où  $\Pi$  est l'énergie interne du fluide.

Le fait d'imposer que  $G^{\mu\nu}$  ne dépende que de  $g$  et de ses dérivées premières et secondes est un peu arbitraire mais vient de ce que les équations de la physique sont des équations différentielles du deuxième ordre en général. Une justification possible de cette hypothèse est que le problème de l'évolution d'une solution pour le champ gravitationnel à partir de la donnée de conditions initiales à un instant initial est bien posé dans ce cas.

L'hypothèse  $G^{\mu\nu} = 0$  quand  $g_{\rho\sigma} = \eta_{\rho\sigma}$  implique que  $T^{\mu\nu} = 0$  quand il n'y a pas de champ de gravitation. Si l'on relâche cette hypothèse alors la solution la plus générale est donnée par le tenseur d'Einstein augmenté par un terme contenant la *constante cosmologique*  $\Lambda$ ,

$$G^{\mu\nu} = E^{\mu\nu} + \Lambda g^{\mu\nu} . \quad (7.11)$$

Les découvertes récentes en cosmologie ont permis de mesurer la constante cosmologique  $\Lambda$  qui se trouve être non nulle et joue probablement un rôle crucial pour l'évolution de l'Univers à très grande échelle. Par contre à l'échelle du système solaire ou d'une galaxie l'influence du terme en  $\Lambda$  est extrêmement faible. Par la suite, pour des applications "locales" comme dans le système solaire, on négligera la constante cosmologique.

C'est donc l'identité de Bianchi contractée ou identité d'Einstein (6.33) qui assure la consistance des équations d'Einstein avec la loi de conservation du tenseur de matière (7.5).<sup>13</sup> Comme l'identité de Bianchi est satisfaite identiquement, on voit que les équations de champ (7.18) *impliquent* (ou contiennent) les équations du mouvement (7.5) de la matière. Ceci est une propriété remarquable des équations d'Einstein, qui n'est par exemple pas vérifiée en électromagnétisme, où l'expression de la force de Lorentz est postulée indépendamment des équations de Maxwell.

### C. Limite newtonienne

En présence de champs de matière, il faut compléter les équations par la donnée de la valeur de la constante de couplage  $\chi$ . On détermine  $\chi$  en imposant que, dans la limite "non-relativiste", les équations d'Einstein se réduisent aux lois newtoniennes habituelles. Une telle limite, dite aussi "post-Newtonienne", considère que  $v/c$  est un petit paramètre, avec  $v$  une composante typique de la vitesse de coordonnée de la particule  $v^i = dx^i/dt$  (et  $t = x^0/c$ ). Formellement la limite non-relativiste revient à considérer que  $c \rightarrow +\infty$ .

Dans la limite non-relativiste, l'équation des géodésiques d'une particule (5.8) ou (5.10) avec (5.18) se réduit à

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} \simeq -c^2 \Gamma_{00}^i \simeq \frac{c^2}{2} \partial_i g_{00} . \quad (7.12)$$

En effet on peut prendre  $p = \tau$  qui se réduit à  $p \simeq t$ . Le symbole  $\simeq$  indique que l'on néglige des termes petits dans la limite  $c \rightarrow +\infty$ .

D'autre part, utilisant le fait que  $g_{\mu\nu} \simeq \eta_{\mu\nu}$ , les composantes 00 et  $ij$  du tenseur d'Einstein (6.34) s'écrivent

$$E^{00} = R^{00} - \frac{1}{2} g^{00} R \simeq R^{00} + \frac{1}{2} R , \quad (7.13a)$$

<sup>13</sup> Si l'on garde le terme de constante cosmologique dans (7.11) on a besoin aussi du théorème de Ricci (6.25) qui dit que  $\nabla_\nu g^{\mu\nu} \equiv 0$ .

$$E^{ij} = R^{ij} - \frac{1}{2} g^{ij} R \simeq R^{ij} - \frac{1}{2} \delta^{ij} R . \quad (7.13b)$$

Utilisant alors  $E^{ij} \simeq 0$  qui est conséquence du fait que  $T^{ij} \simeq 0$  pour des particules non relativistes (car  $T^{ij} \simeq \rho v^i v^j \ll \rho c^2$ ), il vient successivement  $R^{ii} \simeq \frac{3}{2} R$  et  $R \simeq 2R^{00}$  (en effet  $R \simeq -R^{00} + R^{ii}$ ) d'où  $E^{00} \simeq 2R^{00}$  et, d'après l'expression (6.28) du tenseur de Riemann,

$$E^{00} \simeq -\Delta g_{00} . \quad (7.14)$$

Comme  $T^{00} \simeq \rho c^2$  d'après (7.6), les équations d'Einstein s'écrivent dans la limite non-relativiste

$$\Delta g_{00} \simeq -\chi \rho c^2 . \quad (7.15)$$

On conclut de (7.12) et (7.15) que l'on retrouve l'équation newtonienne du mouvement  $d^2 x^i / dt^2 = \partial_i U$  et l'équation de Poisson  $\Delta U = -4\pi G \rho$  pour le potentiel gravitationnel newtonien  $U$ ,<sup>14</sup> à condition que la composante 00 de la métrique soit approximativement

$$\boxed{g_{00} \simeq -1 + \frac{2U}{c^2}} , \quad (7.16)$$

et que la constante de couplage  $\chi$  ait la valeur

$$\boxed{\chi = \frac{8\pi G}{c^4}} , \quad (7.17)$$

où  $G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{m}^3/\text{kg}/\text{s}^2$  est la constante newtonienne de la gravitation. C'est un fait remarquable que la théorie ainsi construite purement déductivement à partir du principe d'équivalence, en utilisant l'arsenal du calcul différentiel et du tenseur de Riemann, contienne finalement la physique gravitationnelle correcte donnée par la théorie de Newton (et donc toute la mécanique céleste du XIX<sup>ème</sup> siècle) dans le cas limite où  $c \rightarrow +\infty$ .<sup>15</sup>

Les équations d'Einstein, maintenant complètes, s'écrivent donc

$$\boxed{R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T^{\mu\nu}} . \quad (7.18)$$

Une forme équivalente de ces équations, où on utilise la trace  $T = g_{\mu\nu} T^{\mu\nu}$ , est

$$R^{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} \left( T^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} T \right) . \quad (7.19)$$

Dans le vide, les équations d'Einstein s'écrivent simplement

$$\boxed{R_{\mu\nu} = 0} . \quad (7.20)$$

<sup>14</sup> Nous choisissons  $U > 0$ . Pour une distribution de matière localisée  $U$  est donné par l'intégrale de Poisson

$$U(\mathbf{x}, t) = G \int d^3 \mathbf{x}' \frac{\rho(\mathbf{x}', t)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} .$$

<sup>15</sup> Einstein, depuis son article de 1913 avec le mathématicien Grossmann, était pleinement conscient que l'utilisation de la géométrie riemannienne lui permettrait de retrouver la bonne limite newtonienne.

## D. Interprétation géométrique de la relativité générale

La relativité générale et les équations d'Einstein (7.18) sont basées sur le tenseur de Riemann  $R^\lambda_{\mu\sigma\nu}$  apparaissant dans l'identité de Ricci (6.27). Le tenseur de Riemann a en fait été obtenu par Riemann non comme le tenseur apparaissant dans l'identité de Ricci, mais comme le tenseur qui caractérise les propriétés de courbure d'un espace riemannien quelconque à N dimensions (l'espace-temps à 4 dimensions dans notre cas). On a en effet le résultat suivant.

**Théoreme.** *L'espace-temps est plat, dans le sens où il existe un système global de coordonnées inertielles  $\{X^\alpha\}$  pour lequel l'intervalle a partout la forme minkowskienne de la relativité restreinte  $ds^2 = \eta_{\alpha\beta} dX^\alpha dX^\beta$ , si et seulement si le tenseur de Riemann est nul en tous points,*

$$R^\lambda_{\mu\sigma\nu} = 0 . \quad (7.21)$$

Le tenseur de Riemann décrit donc la courbure de l'espace-temps. Notons qu'il s'agit là de la courbure *intrinsèque* qui est mesurée par des observateurs confinés dans l'espace — par exemple des fourmis à deux dimensions vivant dans une surface courbe à deux dimensions —, et n'inclue pas les propriétés de courbure "*extrinsèque*" que pourrait avoir l'espace s'il était plongé dans un espace de dimensions supérieures et qui seraient mesurées par des observateurs vivant dans cet espace. Le tenseur de Riemann est la généralisation à N dimensions de la courbure de Gauss (1827) qui est le produit des courbures principales d'une surface à deux dimensions, et qui est la quantité mesurable par les fourmis à deux dimensions vivant dans la surface.

Les vrais champs de gravitation dans la nature, comme le champ de la Terre, ne peuvent se réduire globalement à des champs d'accélération, mais seulement localement d'après le principe d'équivalence (*cf* section IV). Les vrais champs de gravitation ont donc la propriété de courber, intrinsèquement, l'espace-temps. Leurs effets peuvent en fait être complètement interprétés en termes géométriques. Le mouvement des corps dans le champ de gravitation est simplement interprété comme un mouvement libre de corps dans un espace-temps ayant une géométrie courbe. Comme nous l'avons vu cette propriété fondamentale du champ de gravitation est la conséquence directe du principe d'équivalence. Elle resterait vraie, bien que quantitativement différente, dans d'autres théories de la gravitation satisfaisant au principe d'équivalence — par exemple des théories obtenues en relâchant une ou plusieurs des hypothèses du théorème de la section VII B, ou en rajoutant à la métrique  $g_{\mu\nu}$  d'autres champs pour décrire la gravitation (champ scalaire  $\phi$ , *etc*).

Ainsi, en relativité générale, la distribution de matière, de tenseur d'énergie-impulsion  $T^{\mu\nu}$ , engendre par les équations d'Einstein une courbure de l'espace-temps. La matière elle-même suit alors, par le principe d'équivalence, les lignes géodésiques de cet espace-temps, c'est-à-dire les lignes "de plus court chemin" qui extrêmatisent l'intervalle  $ds^2$  (voir la section V). En particulier, la distribution globale de matière dans l'univers détermine sa géométrie globale, et le principe d'équivalence détermine localement ceux des référentiels qui sont inertiels. On trouve que les référentiels localement inertiels sont fixes ou en mouvement uniforme (et, en particulier, ne sont *pas* en rotation) par rapport à la distribution moyenne de matière dans l'univers, incluant les étoiles lointaines, en accord avec le principe de Mach (section II).

Cependant, on remarque que les équations d'Einstein dans le vide,  $R_{\mu\nu} = 0$  d'après (7.20), sont moins restrictives que les conditions d'absence de champ gravitationnel qui s'écrivent  $R^\lambda_{\mu\sigma\nu} = 0$  (espace-temps minkowskien plat). Il peut donc *a priori* exister des champs de gravitation même en l'absence de matière, dans un univers vide.

### E. Forme quasi-linéaire des équations d'Einstein

La relativité générale est une théorie *non-linéaire*. Physiquement, cela est dû au fait que le champ de gravitation lui-même est source de champ de gravitation. Il possède en effet de l'énergie, donc de la masse inertielle (par  $m_i = E/c^2$ ), et donc par le principe d'équivalence ( $m_i = m_g$ ) peut ainsi graviter. En toute rigueur ceci est dû au fait que la relativité générale satisfait au principe d'équivalence au sens fort, cf section IV F. C'est pourquoi il est possible d'avoir des champs de gravitation qui sont eux-mêmes leur propre source, dans un espace vide.

On peut voir plus précisément la non-linéarité de la théorie en posant

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x) , \quad (7.22)$$

où  $\eta_{\mu\nu}$  est la métrique de Minkowski (3.4) et où  $h_{\mu\nu}(x)$  est une certaine perturbation, non nécessairement petite (on suppose en général que le référentiel  $\{x\}$  est cartésien). Il est commode aussi d'introduire les variables auxiliaires

$$\bar{h}^{\mu\nu} = h^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} h , \quad (7.23a)$$

$$h = \eta^{\rho\sigma} h_{\rho\sigma} . \quad (7.23b)$$

Alors on peut vérifier que les équations d'Einstein (7.18) admettent un développement non-linéaire infini en puissance de  $\bar{h}^{\mu\nu}$  et de ses dérivées (formellement).<sup>16</sup> Si l'on sépare les termes linéaires en  $\bar{h}^{\mu\nu}$ , on peut écrire les équations sous la forme

$$\boxed{\square \bar{h}^{\mu\nu} - \partial^\mu \bar{H}^\nu - \partial^\nu \bar{H}^\mu + \eta^{\mu\nu} \partial_\rho \bar{H}^\rho = -\frac{16\pi G}{c^4} [T^{\mu\nu} + t^{\mu\nu}(\bar{h})]} , \quad (7.24)$$

où  $\square = \eta^{\rho\sigma} \partial_\rho \partial_\sigma = -c^{-2} \partial_t^2 + \Delta$  est l'opérateur des ondes habituel ou *d'Alembertien*,<sup>17</sup> et

$$\bar{H}^\mu = \partial_\rho \bar{h}^{\mu\rho} . \quad (7.25)$$

Dans le membre de droite de (7.24) on observe que le tenseur de la matière  $T^{\mu\nu}$  est augmenté d'une contribution dépendant au moins *quadratiquement* de  $\bar{h}^{\rho\sigma}$  et de ses dérivées,

$$t^{\mu\nu}(\bar{h}) = O(\bar{h}^2) . \quad (7.26)$$

Les équations (7.24) représentent en fait les équations satisfaites par un champ de jauge  $\bar{h}^{\mu\nu}$  de *masse nulle* et *d'hélicité 2* (le graviton), et qui est en auto-interaction avec lui-même à cause du terme non-linéaire  $t^{\mu\nu}(\bar{h})$ .

<sup>16</sup> En effet les équations contiennent la métrique contravariante  $g^{\mu\nu}$  inverse de (7.22) qui admet un développement infini en  $h$ .

<sup>17</sup> L'opérateur  $\square$  fut introduit par d'Alembert dans son *Traité de dynamique* de 1743.

**Exercice.** Prouver l'équation (7.24) par linéarisation des équations d'Einstein (7.18). Montrer que le membre de gauche des équations (7.24) est invariant par la transformation de jauge

$$\bar{h}^{\mu\nu} \rightarrow \bar{h}^{\mu\nu} + \partial^\mu \xi^\nu + \partial^\nu \xi^\mu - \eta^{\mu\nu} \partial_\lambda \xi^\lambda, \quad (7.27)$$

où  $\xi^\mu$  est un vecteur quelconque. Prenant la divergence des deux membres de (7.24) montrer que l'on obtient une loi de conservation au sens habituel:

$$\boxed{\partial_\nu (T^{\mu\nu} + t^{\mu\nu}) = 0.} \quad (7.28)$$

L'invariance de jauge (7.27) résulte du fait que les équations d'Einstein gardent la même forme dans tous les systèmes de coordonnées, et  $\xi^\mu$  correspond à un changement de coordonnées  $\delta x^\mu = \xi^\mu$  "infinitésimal" à l'ordre  $\bar{h}$ . La loi de conservation (7.28) est rigoureusement équivalente à la loi de conservation au sens covariant (7.5), et permet d'interpréter  $t^{\mu\nu}$  comme l'énergie-impulsion du champ de gravitation lui-même dans le référentiel considéré. Mais attention au fait que  $t^{\mu\nu}$  n'est *pas* un tenseur. En effet par le principe d'équivalence il est impossible d'obtenir un tenseur qui décrive l'énergie-impulsion du champ de gravitation car celui-ci devrait être nul dans tout référentiel localement inertiel.

On peut utiliser l'invariance de jauge (7.27) pour choisir une jauge dite "harmonique", qui est analogue à la jauge de Lorentz en électromagnétisme, et dans laquelle

$$\boxed{\bar{H}^\mu = \partial_\nu \bar{h}^{\mu\nu} = 0.} \quad (7.29)$$

Dans cette jauge, les équations d'Einstein (7.24) s'écrivent simplement

$$\boxed{\square \bar{h}^{\mu\nu} = - \frac{16\pi G}{c^4} [T^{\mu\nu} + t^{\mu\nu}(\bar{h})].} \quad (7.30)$$

Sous cette forme, on voit que l'interaction gravitationnelle se propage (en première approximation) à la vitesse de la lumière  $c$ . On voit aussi que c'est la condition de jauge (7.29) qui assure la consistence avec l'équation du mouvement de la matière (7.28).

## VIII. TESTS CLASSIQUES

Les tests “classiques” sont des tests de la théorie dans le domaine (relativement limité) des champs gravitationnels faibles et lentement variables. Historiquement, ces tests ont semblé prouver par l’excellent accord quantitatif entre la théorie et l’observation que la relativité générale *est* la bonne théorie. Cependant, la valeur qualitative des tests classiques doit être un peu modérée par le fait que l’on sait maintenant que d’autres théories de la gravitation que la relativité générale sont aussi en accord avec ces tests.

### A. Approximation des champs faibles et lentement variables

Dans le système solaire par exemple, le champ de gravitation est uniformément “faible” car  $|h_{\mu\nu}| \simeq 2U/c^2 \lesssim 10^{-6}$  avec la notation (7.23) et le résultat (7.16),<sup>18</sup> et les vitesses des planètes et des petits corps sont “lentes” car  $|v/c| \lesssim 10^{-4}$ . Le champ gravitationnel étant faible, on peut utiliser les équations d’Einstein (7.30) dans la jauge harmonique (7.29), dans lesquelles on néglige tous les termes non-linéaires qui sont au moins quadratiques en  $\bar{h}$ , c’est-à-dire  $t^{\mu\nu}(\bar{h}) \simeq 0$ . D’autre part, les vitesses des planètes étant lentes, on peut négliger les retards dus à la propagation des ondes gravitationnelles de la source jusqu’au point “champ” où l’on effectue le calcul, et remplacer le d’Alembertien  $\square = \Delta - c^{-2}\partial_t^2$  par le Laplacien  $\Delta$ . Cette dernière approximation revient à considérer la limite post-newtonienne, dans la limite où  $c \rightarrow +\infty$ , car le terme de retard est d’ordre  $(v/c)^2$ .<sup>19</sup>

On a donc, approximativement,

$$\Delta \bar{h}^{\mu\nu} \simeq -\frac{16\pi G}{c^4} T^{\mu\nu} . \quad (8.1)$$

Avec la distribution de matière (7.6) et les définitions (7.22)–(7.23) on résoud facilement ces équations pour trouver la métrique

$$g_{00} \simeq -1 + \frac{2U}{c^2} , \quad (8.2a)$$

$$g_{0i} \simeq 0 , \quad (8.2b)$$

$$g_{ij} \simeq \delta_{ij} \left( 1 + \frac{2U}{c^2} \right) , \quad (8.2c)$$

où  $U$  est le potentiel newtonien satisfaisant à l’équation de Poisson  $\Delta U = -4\pi G\rho$ , et où on a négligé tous les termes qui sont d’ordre  $(v/c)^4$  dans  $g_{00}$  et  $g_{ij}$ , ainsi que  $g_{0i}$  qui est d’ordre  $(v/c)^3$ .

Dans un système de coordonnées  $\{t, r, \theta, \varphi\}$  où  $r, \theta, \varphi$  sont les coordonnées sphériques associées aux coordonnées spatiales  $\{x, y, z\} \equiv \{x^1, x^2, x^3\}$  utilisées dans (8.2),<sup>20</sup> la métrique

<sup>18</sup> Il est clair que le rapport sans dimension  $2U/c^2$  offre une mesure relativiste de l’intensité du champ gravitationnel.

<sup>19</sup> L’approximation post-newtonienne, pour laquelle les retards sont petits quand  $c \rightarrow +\infty$ , n’est valable que sur un domaine petit par rapport à la longueur d’onde gravitationnelle  $\lambda$ ; il faut donc que  $r \ll \lambda$ .

<sup>20</sup> Le référentiel  $\{t, r, \theta, \varphi\}$  est défini à partir du référentiel cartésien par les formules usuelles  $x = r \sin \theta \cos \phi$ ,  $y = r \sin \theta \sin \phi$ ,  $z = r \cos \theta$ .

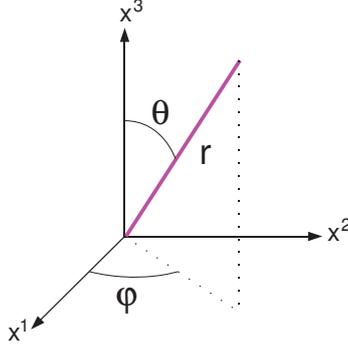


FIG. 18: Coordonnées sphériques  $\{r, \theta, \varphi\}$ .

s'écrit

$$g_{00} \simeq -1 + \frac{2U}{c^2} \quad (8.3a)$$

$$g_{rr} \simeq 1 + \frac{2U}{c^2} , \quad (8.3b)$$

$$g_{\theta\theta} \simeq \left(1 + \frac{2U}{c^2}\right) r^2 , \quad (8.3c)$$

$$g_{\varphi\varphi} \simeq \left(1 + \frac{2U}{c^2}\right) r^2 \sin^2 \theta . \quad (8.3d)$$

Les autres composantes sont zéro. Le potentiel est celui du Soleil (supposé à symétrie sphérique) donc

$$U = \frac{GM_{\odot}}{r} , \quad (8.4)$$

avec  $M_{\odot} = 2 \cdot 10^{30}$  kg. Ce potentiel est valable à l'extérieur du rayon du Soleil  $R_{\odot} = 7 \cdot 10^8$  m.

Ayant la métrique (8.2)–(8.3) le mouvement d'un photon ou d'une planète (supposée ponctuelle — sans structure interne) s'obtiendra en résolvant les équations du mouvement de chute libre dans le champ gravitationnel du Soleil, c'est-à-dire les équations des géodésiques que l'on écrit sous leur forme lagrangienne (5.19),

$$\frac{d}{dp} \left( g_{\lambda\mu} \frac{dx^{\mu}}{dp} \right) = \frac{1}{2} \partial_{\lambda} g_{\mu\nu} \frac{dx^{\mu}}{dp} \frac{dx^{\nu}}{dp} , \quad (8.5)$$

où  $p$  est un paramètre affine le long de la trajectoire du corps. Dans le cas d'un photon ce paramètre ne peut pas être le temps propre car celui-ci est nul pour des photons:  $e = 0$  dans (5.22). Dans tous les cas  $p$  est un paramètre pour lequel le mouvement est rectiligne et uniforme dans un référentiel localement inertiel, et qui sera éliminé des équations finales du mouvement.

## B. Déviation de la lumière par le Soleil

Le plus célèbre des “tests classiques” est celui de l'angle de déviation de la lumière en provenance d'une source lointaine (un quasar dans les mesures récentes), par le champ

de gravitation du Soleil. La prédiction théorique s'obtient en intégrant l'équation des géodésiques (8.5) avec  $e = 0$  dans l'intégrale première (5.22) qui exprime la constance de la norme de la quadri-vitesse le long de la trajectoire.

On écrit les équations (8.5) successivement pour  $x^\lambda = t, r, \theta, \varphi$  (dans les coordonnées sphériques centrées sur le Soleil) en se rappelant que l'une des équations peut être remplacée par l'équation (5.22). Il est avantageux de remplacer l'équation radiale pour  $r$ , qui est la plus compliquée, par l'intégrale première (5.22). D'autre part on se rappelle aussi que si les  $g_{\mu\nu}$  ne dépendent pas de l'une des coordonnées  $x^\lambda$  — qui est dite dans ce cas ignorable — on a immédiatement l'intégrale première  $\pi_\lambda = g_{\lambda\mu} dx^\mu / dp = \text{const}$  (voir section VD).

1. Equation pour  $\theta$ :

$$\frac{d}{dp} \left\{ \left( 1 + \frac{2U}{c^2} \right) r^2 \frac{d\theta}{dp} \right\} = \left( 1 + \frac{2U}{c^2} \right) r^2 \sin \theta \cos \theta \left( \frac{d\varphi}{dp} \right)^2, \quad (8.6)$$

qui a pour solution

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \quad (8.7)$$

La trajectoire est plane et on la choisit (après éventuellement une rotation du système d'axes) dans le plan équatorial du Soleil.

2. Equation pour  $t$ . Comme  $t$  est ignorable on a

$$\left( -1 + \frac{2U}{c^2} \right) \frac{dt}{dp} = \text{const}. \quad (8.8)$$

3. Equation pour  $\varphi$ . Comme  $\varphi$  est ignorable on a

$$\left( 1 + \frac{2U}{c^2} \right) r^2 \sin^2 \theta \frac{d\varphi}{dp} = \text{const}. \quad (8.9)$$

4. Intégrale de l'énergie avec  $e = 0$ :

$$\left( 1 + \frac{2U}{c^2} \right) \left[ dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right] = \left( 1 - \frac{2U}{c^2} \right) c^2 dt^2. \quad (8.10)$$

On déduit du rapport entre (8.9) et (8.8) la loi de conservation du moment cinétique (au premier ordre en  $U/c^2$ ),

$$r^2 \frac{d\varphi}{dt} = b \left( 1 - \frac{4U}{c^2} \right), \quad (8.11)$$

où  $b$  est une constante qui sera interprétée comme le paramètre d'impact de la trajectoire. Remplaçant dans l'équation (8.10) on obtient l'équation de la trajectoire  $r(\varphi)$  du photon au premier ordre en  $U/c^2$  sous la forme<sup>21</sup>

$$\left[ \frac{d}{d\varphi} \left( \frac{b}{r} \right) \right]^2 + \left( \frac{b}{r} \right)^2 = 1 + \frac{4U}{c^2}. \quad (8.12)$$

<sup>21</sup> La variable  $u = 1/r$ , très utile en mécanique céleste, s'appelle variable de Binet.

Avec l'expression du potentiel newtonien du Soleil (8.4) la solution de (8.12) est

$$\frac{b}{r} = \sin(\varphi - \varphi_0) + \frac{\alpha}{2}, \quad (8.13)$$

où  $\varphi_0$  est une direction initiale, et où  $\alpha$  est donné par

$$\alpha = \frac{4GM_\odot}{bc^2}. \quad (8.14)$$

La solution (8.13) représente une hyperbole dans le plan équatorial du Soleil de paramètre d'impact  $b$  et d'angle de déviation  $\alpha$  donné par (8.14). Les deux asymptotes de l'hyperbole, correspondant au photon dans les états "de diffusion" initial et final, sont données par  $\varphi - \varphi_0 = \pi + \alpha/2$  et  $\varphi - \varphi_0 = -\alpha/2$ .

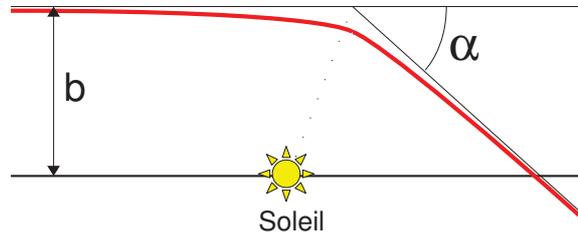


FIG. 19: Angle de déviation de la lumière par le Soleil.

Pour un photon "rasant" la surface du Soleil, on a  $b = R_\odot$  et on obtient l'angle de déviation

$$\alpha_{\max} = \frac{4GM_\odot}{R_\odot c^2} = 1.75'' \text{ d'arc}. \quad (8.15)$$

Cette valeur a été vérifiée expérimentalement avec une précision de  $\sim 10\%$  par l'observation d'étoiles au voisinage du bord solaire lors d'éclipses totales du Soleil (première vérification par Eddington en 1919). Actuellement la précision est de l'ordre de  $\sim 0.1\%$  par l'observation de quasars en interférométrie à très longue base (VLBI).

Notons que l'angle de déviation (8.14) vaut *deux* fois la valeur calculée en théorie de Newton, soit  $\alpha_{\max}/2 = 0.87''$  d'arc, car en effet si on considère la lumière comme faite de corpuscules de vitesse  $c$ , il y a bien une déviation de la lumière chez Newton. Le principe d'équivalence  $m_i = m_g$ , qui est posé "à la main" en théorie de Newton, fait que la trajectoire ne dépend pas de la masse des corpuscules de lumière. En fait on peut montrer que le facteur 4 dans l'expression (8.14) se décompose en "2+2", avec le premier 2 qui provient du principe d'équivalence,  $m_i = m_g$ , qui est vrai en relativité générale comme en théorie de Newton, et le second 2 qui est un effet supplémentaire dû à la courbure de l'espace en relativité générale. Cet effet supplémentaire montre que la théorie de Newton est exclue expérimentalement.

### C. Lentilles gravitationnelles

La lumière étant déviée par le champ gravitationnel de corps massifs, ceux-ci peuvent dans certains cas jouer le rôle de "lentille gravitationnelle", c'est-à-dire permettre des effets de multiplication d'images et d'amplification de la lumière. Ce phénomène était prévu depuis

longtemps (première suggestion par Einstein lui-même) et il a été découvert en astronomie en 1979.

Considérons une source de lumière S, un quasar par exemple, située (pour simplifier) à distance infinie. La lumière émise par S est déviée par un corps massif ou déflecteur (supposé ponctuel) D situé à l'origine des coordonnées, et est reçue par un observateur O. Il est évident d'après la symétrie du problème qu'il y a deux trajets possibles pour que la lumière issue de S soit reçue en O, qui sont les trajets 1 et 2 situés de part et d'autre du déflecteur D. Soient  $b_1$  et  $b_2$  les paramètres d'impact et  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  les angles de déflexion sur ces deux trajets. On a alors la situation suivante:

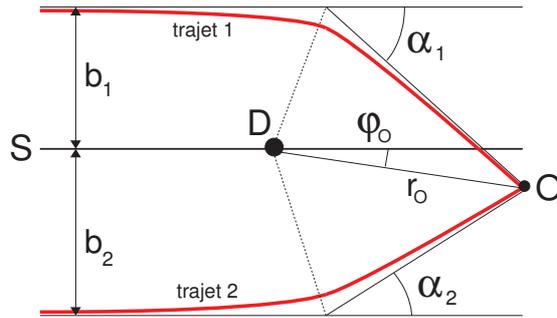
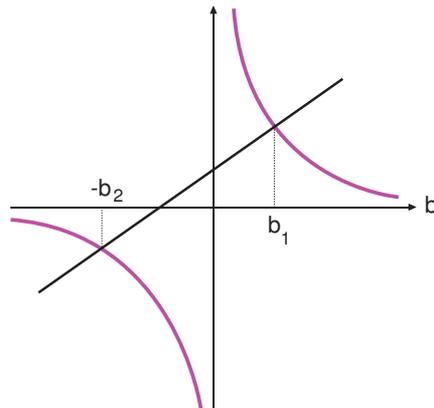


FIG. 20: Multiplication d'une image par un déflecteur ponctuel.

L'observateur O reçoit donc deux images de la source S. Soient  $r_O$  et  $\varphi_O$  les coordonnées de O, on aura d'après (8.13)

$$\frac{1}{2}\alpha(b) = \frac{1}{\cos \varphi_O + 1} \left( \frac{b}{r_O} - \sin \varphi_O \right), \quad (8.16)$$

où  $b = b_1$  sur le trajet 1, et  $b = -b_2$  sur le trajet 2, et où l'angle de déflexion d'après (8.14) est  $\alpha(b) = 4GM/(bc^2)$ ,  $M$  étant la masse du déflecteur.<sup>22</sup> Un diagramme dans lequel on représente les deux membres de l'égalité (8.16) en fonction du paramètre  $b$  (le membre de gauche variant comme  $1/b$  et le membre de droite étant une fonction linéaire de  $b$ ) illustre clairement l'existence des deux trajets de paramètres d'impact  $b_1$  et  $b_2$ . Dans le cas où



<sup>22</sup> L'angle  $\varphi_0$  dans la solution (8.13) est égal à  $-\alpha/2$  avec les conventions de la figure.

FIG. 21: Deux images sont produites par un défecteur ponctuel.

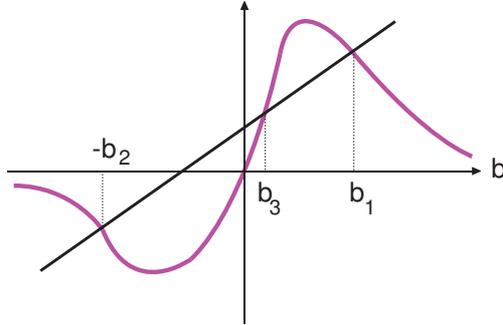


FIG. 22: Nombre impair d'images produites par un défecteur étendu.

le défecteur  $D$  est situé exactement sur la ligne joignant la source  $S$  à l'observateur  $O$ , il n'y a plus deux images mais, à cause de la symétrie du problème autour de la ligne  $SO$ , un anneau circulaire complet de lumière appelé *anneau d'Einstein*. Dans ce cas on a  $\varphi_O = 0$  dans (8.16) et l'anneau d'Einstein satisfait à  $b/r_O = \alpha(b)$ . Le rayon angulaire de l'anneau est bien sûr  $\alpha(b)$ , et le rayon du "tube" de lumière qui vient converger en  $O$  est appelé rayon d'Einstein,  $R_E = b$ . On a alors

$$R_E^2 = \frac{4GM}{c^2} r_O . \quad (8.17)$$

Des anneaux d'Einstein ont été observés en astronomie.

En pratique, les objets massifs défecteurs ne sont jamais ponctuels. Ce sont par exemple des galaxies ou des amas de galaxies dont la densité de matière s'étend très largement autour de la ligne de visée, et qui multiplient les images de quasars lointains. On peut montrer alors que la figure précédente se déforme typiquement en la figure suivante.

On voit donc apparaître une troisième image près de la ligne de visée. Dans des cas plus complexes de distribution de matière défectrice, on pourra avoir un grand nombre d'images, mais toujours en nombre *impair*. Cependant l'image centrale, au voisinage de la ligne de visée, est généralement très faible et difficilement observable (comme dans l'exemple fameux du quasar double).

Un deuxième effet important des lentilles gravitationnelles est l'effet d'amplification de l'intensité des images. L'amplification est d'autant plus importante que l'objet défecteur est proche de la ligne de visée  $SO$ . C'est cet effet qui est utilisé dans l'expérience EROS de recherche de matière noire par "micro-lensing". Le défecteur  $D$  est alors une hypothétique naine brune composant la matière noire du halo galactique, et la source  $S$  une étoile de fond appartenant au grand nuage de Magellan.

**Exercice.** Généraliser l'expression du rayon d'Einstein (8.17), qui est la distance minimale d'approche de la lumière à  $D$ , au cas où la source  $S$  est située à distance finie. On notera  $r_{SD}$  et  $r_{DO}$  les distances correspondantes sur la ligne de visée. Calculer l'ordre

de grandeur du rayon d'Einstein dans le cas de l'expérience EROS.

#### D. Effet Shapiro

L'effet Shapiro est un retard dû au champ gravitationnel dans les temps d'arrivée de photons ayant rasé la surface du Soleil. Non seulement la trajectoire de la lumière est déviée de l'angle (8.14), mais les photons sur leur trajectoire sont *ralentis* par le champ du Soleil. L'effet n'est pas du tout négligeable, et a été calculé et observé pour la première fois par Shapiro en 1964.<sup>23</sup> Son expérience a consisté à mesurer le temps d'aller-retour de photons radio émis sur Terre vers Mercure, réfléchis sur le sol de Mercure et renvoyés vers la Terre, lorsque la trajectoire des photons passe à proximité de la surface du Soleil.

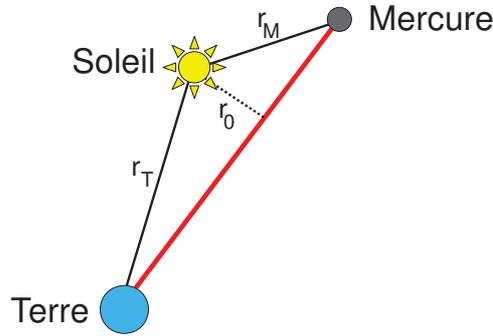


FIG. 23: Echo radar sur la surface de Mercure.

Pour calculer cet effet on élimine l'angle  $\varphi$  entre les équations (8.11) et (8.10) et on trouve, au premier ordre en  $U/c^2$ ,

$$\left(\frac{dr}{cdt}\right)^2 = \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right) \left\{1 - \frac{4U}{c^2} \left(1 + \frac{r_0}{r+r_0}\right)\right\}, \quad (8.18)$$

La constante  $r_0$  est la distance minimale d'approche de l'onde radio au Soleil (on utilise dans ce calcul la forme du potentiel  $U = GM_\odot/r$ , d'où  $U_0 = GM_\odot/r_0 = Ur/r_0$ ). Soient aussi  $r_T$  et  $r_M$  les distances de la Terre et de Mercure au Soleil, ces distances étant celles mesurées dans le référentiel associé à la métrique (8.3). Alors, par intégration de (8.18), on trouve que le temps  $T$  écoulé entre l'émission et la réception des photons sur Terre a l'expression

$$T = \frac{2}{c} \left\{ \sqrt{r_T^2 - r_0^2} + \sqrt{r_M^2 - r_0^2} + \frac{4GM_\odot}{c^2} \left( \sqrt{\frac{r_T - r_0}{r_T + r_0}} + \sqrt{\frac{r_M - r_0}{r_M + r_0}} \right) \right\}$$

<sup>23</sup> Curieusement, Einstein n'a jamais pensé à calculer cet effet. Ayant obtenu la trajectoire des photons au voisinage du Soleil et leur angle de déviation (8.14), il n'a apparemment jamais cherché à connaître le mouvement "horaire" des photons sur leur trajectoire, ce qui lui aurait donné l'effet de retard gravitationnel.

$$+ \frac{4GM_\odot}{c^2} \ln \left[ \frac{(r_T + \sqrt{r_T^2 - r_0^2})(r_M + \sqrt{r_M^2 - r_0^2})}{r_0^2} \right] \Bigg\} . \quad (8.19)$$

Les deux premiers termes représentent le temps qui se serait écoulé s'il n'y avait pas le Soleil. Les troisième et quatrième termes représentent un *retard* relativiste  $\Delta T$  à la réception des photons sur Terre (effet Shapiro). Dans le cas où Mercure est en conjonction supérieure par rapport à la Terre, et que donc les photons rasant la surface du Soleil ( $r_0 = R_\odot$  avec  $R_\odot \ll r_T$  et  $r_M$ ), on obtient

$$\Delta T = \frac{4GM_\odot}{c^3} \left[ \ln \left( \frac{4r_T r_M}{R_\odot^2} \right) + 2 \right] . \quad (8.20)$$

Avec  $r_T = 150 \cdot 10^6$  km et  $r_M = 58 \cdot 10^6$  km, la valeur de  $\Delta T$  est  $259 \mu\text{sec}$ , en bon accord avec l'expérience réalisée par Shapiro en 1964. L'expérience a été reprise en 1975 avec beaucoup plus de précision en utilisant, au lieu de la planète Mercure, la sonde Viking posée sur Mars.

### E. Précession du périhélie de Mercure

Jusqu'à présent, nous avons utilisé l'expression (8.2) de la métrique  $g_{\mu\nu}$  qui est suffisamment précise pour calculer le mouvement post-newtonien de *photons* (ou de particules de masse nulle). En effet, pour des photons de vitesse égale à  $\simeq c$ , les distances spatiales  $d\mathbf{x}^2$  sont du même ordre de grandeur que  $c^2 dt^2$ . Donc pour avoir l'intervalle  $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$  jusqu'à l'ordre post-newtonien  $1/c^2$ , il suffit d'obtenir chacun des coefficients  $g_{\mu\nu}$  avec la même précision  $1/c^2$ , ce qui avait été fait dans (8.2). La situation est différente dans le cas de corps massifs où l'on a  $c^2 dt^2 \gg d\mathbf{x}^2$  et où donc le coefficient de la métrique  $g_{00}$  doit être obtenu jusqu'à l'ordre  $1/c^4$  pour compenser le facteur  $c^2$  présent dans  $c^2 dt^2$ . L'ordre  $1/c^4$  dans  $g_{00}$  est un ordre non-linéaire et se calcule par exemple en utilisant dans les équations d'Einstein (7.24) l'énergie-impulsion  $t^{\mu\nu}$  du champ de gravitation lui-même. Nous admettons que l'expression correcte de  $g_{00}$  à l'ordre  $1/c^4$  est (dans le cas du champ engendré par un corps sphérique comme le Soleil)

$$g_{00} = -1 + \frac{2U}{c^2} - \frac{2U^2}{c^4} , \quad (8.21)$$

les autres coefficients  $g_{rr}$ ,  $g_{\theta\theta}$  et  $g_{\varphi\varphi}$  dans (8.2) [ou dans (8.3)] restant suffisamment précis.

Pour obtenir le mouvement post-newtonien de la planète Mercure autour du Soleil, il faut refaire le travail précédent, c'est-à-dire utiliser l'équation des géodésiques (8.5) avec son intégrale de l'énergie (où  $e < 0$  cette fois pour un corps massif) et les intégrales premières du mouvement correspondant aux coordonnées ignorables  $t$  et  $\varphi$ .

**Exercice.** *Montrer que l'équation de la trajectoire est*

$$\left( \frac{d}{d\varphi} \left( \frac{1}{r} \right) \right)^2 = \left( 1 - \frac{\Delta}{\pi} \right) \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r_A} \right) \left( \frac{1}{r_P} - \frac{1}{r} \right) , \quad (8.22)$$

où  $r_A$  et  $r_P$  sont donnés par  $r_A = a(1 + e)$  et  $r_P = a(1 - e)$ ,  $a$  et  $e$  étant deux constantes donnant le demi grand-axe et l'excentricité, et où

$$\Delta = \frac{6\pi GM_\odot}{c^2 a(1 - e^2)} . \quad (8.23)$$

En déduire la solution de l'équation (8.22) (au premier ordre en  $GM_{\odot}/c^2$ ) sous la forme

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \left[ \left(1 - \frac{\Delta}{2\pi}\right) (\varphi - \varphi_0) \right]} . \quad (8.24)$$

On s'assure facilement que cette solution décrit une ellipse de demi grand-axe  $a$  et d'excentricité  $e$  (avec  $r_A$  et  $r_P$  les rayons de l'aphélie et du périhélie) qui *précesse* à chaque rotation de l'angle  $\Delta$  donné par (8.23). Dans le cas de Mercure ( $a = 58 \cdot 10^6$  km,  $e = 0.2$ , période de révolution = 0.24 ans) l'angle de précession relativiste (8.23) a la valeur  $\Delta = 43''$  arc/siècle comme l'a calculé Einstein.

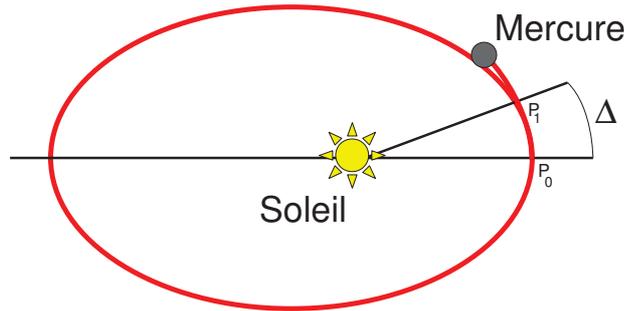


FIG. 24: Précession du périhélie de Mercure.

Dès 1845, Le Verrier avait montré que les perturbations gravitationnelles en théorie de Newton des autres planètes sur Mercure (essentiellement Jupiter, la plus massive, et Venus, la plus proche) impliquent une précession newtonienne de Mercure égale à  $\Delta_N = 532''$  arc/siècle. Le Verrier savait que la précession newtonienne de Mercure n'est pas en accord avec les observations d'un montant approximativement de l'ordre de  $40''$  arc/siècle ! Cette avance anormale du périhélie de Mercure était restée inexpiquée et avait alimenté de nombreuses spéculations, parmi lesquelles l'existence d'une nouvelle planète intérieure à l'orbite de Mercure (dénommée Vulcain par Le Verrier), la présence possible d'un anneau de matière zodiacale dans le plan de l'écliptique, et même une modification de la loi newtonienne en  $1/r^2$ . Ce n'est qu'avec Einstein en 1915 que l'on comprendra que les corrections purement relativistes au mouvement d'une planète sur une ellipse keplerienne impliquent une précession supplémentaire donnée par (8.23). La prédiction théorique pour la précession totale de Mercure est donc égale à  $\Delta_N + \Delta = 575''$  arc/siècle, et est parfaitement en accord avec les observations.

## IX. RAYONNEMENT GRAVITATIONNEL

### A. Equations d'ondes dans le vide

On a vu que les équations d'Einstein peuvent s'écrire, dans la jauge harmonique (7.29), sous la forme des équations d'onde (7.30). Négligeons dans ces équations tous les termes non-linéaires,  $t^{\mu\nu} \simeq 0$  (ce qui revient à supposer que le champ de gravitation est faible), et plaçons nous dans le cas du vide de matière,  $T^{\mu\nu} = 0$ . On a alors

$$\square \bar{h}^{\mu\nu} = 0 , \quad (9.1a)$$

$$\partial_\nu \bar{h}^{\mu\nu} = 0 , \quad (9.1b)$$

où  $\square = \eta^{\rho\sigma} \partial_\rho \partial_\sigma$  est l'opérateur des ondes, et où  $\bar{h}^{\mu\nu}$  est défini par (7.23). Dans la suite, on considérera que  $\bar{h}^{\mu\nu}$  (ou  $h^{\mu\nu}$ ) est le champ d'ondes gravitationnelles, se propageant sur l'espace-temps plat  $\eta_{\mu\nu}$ . Rappelons que le maniement des indices s'effectue à l'aide de la métrique plate.

Notons que le système de coordonnées dans lequel sont écrites les équations d'Einstein (9.1) n'est pas entièrement déterminé par la condition de jauge harmonique. En effet, on peut encore effectuer une transformation supplémentaire de jauge

$$\bar{h}^{\mu\nu} \rightarrow \bar{h}^{\mu\nu} + \partial^\mu \xi^\nu + \partial^\nu \xi^\mu - \eta^{\mu\nu} \partial_\lambda \xi^\lambda , \quad (9.2)$$

préservant la condition (9.1b). Il est facile de voir que le vecteur  $\xi^\mu$  doit pour cela satisfaire à l'équation des ondes

$$\square \xi^\mu = 0 . \quad (9.3)$$

### B. Décomposition du champ en ondes monochromatiques

Le champ  $\bar{h}^{\mu\nu}$  peut se décomposer, par transformée de Fourier, en ondes monochromatiques. On écrit

$$\bar{h}^{\mu\nu}(x) = \int d^4k A^{\mu\nu}(k) e^{ik_\lambda x^\lambda} , \quad (9.4)$$

où  $k_\lambda$  désigne le vecteur d'onde — on aura  $k_\lambda x^\lambda = \eta_{\mu\lambda} k^\mu x^\lambda$  où  $k^\mu = \eta^{\mu\nu} k_\nu$  — et  $A^{\mu\nu}(k)$  l'amplitude de chacune des ondes monochromatiques. Substituant (9.4) dans (9.1a), on obtient

$$k^2 \equiv \eta_{\mu\nu} k^\mu k^\nu = 0 . \quad (9.5)$$

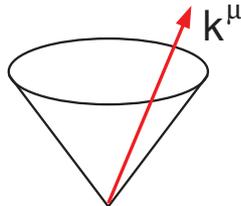


FIG. 25: Le vecteur d'onde est du genre lumière.

Le vecteur d'onde est donc du genre lumière, c'est-à-dire est tangent au cône de lumière: les ondes gravitationnelles se propagent à la vitesse  $c$ . De plus, remplaçant (9.4) dans (9.1b), on a la condition d'orthogonalité de l'amplitude avec le vecteur d'onde

$$A^{\mu\nu}k_\nu = 0 . \quad (9.6)$$

A ce stade on peut effectuer sur le champ une transformation de jauge de vecteur

$$\xi^\mu(x) = \int d^4k B^\mu(k) e^{ik_\lambda x^\lambda} , \quad (9.7)$$

où  $B^\mu$  est arbitraire. En effet, la condition (9.3) est automatiquement vérifiée grâce au fait que le vecteur d'onde est du genre lumière par (9.5).

### C. Jauge transverse et sans traces

Introduisons un quadrivecteur  $u^\mu$  constant (indépendant de  $x^\lambda$ ) et non orthogonal à  $k_\mu$  (c'est-à-dire  $k_\mu u^\mu \neq 0$ ). Ce vecteur peut-être par exemple le vecteur quadri-vitesse, de genre temps, d'un observateur détectant le rayonnement gravitationnel (étant du genre temps il ne pourra jamais être orthogonal à  $k_\mu$ ). Alors il existe une jauge, dite transverse et sans trace (TT), dans laquelle les composantes de l'amplitude satisfont, en plus de (9.6), à

$$A^{\mu\nu}u_\nu = 0 \quad (\text{condition de transversalité à } u^\mu) , \quad (9.8a)$$

$$A = \eta_{\mu\nu}A^{\mu\nu} = 0 \quad (\text{condition "sans trace"}) . \quad (9.8b)$$

**Exercice.** Démontrer l'existence de la jauge TT en effectuant, à partir d'une jauge harmonique quelconque dans laquelle l'amplitude est  $A_0^{\mu\nu}$ , la transformation de jauge (9.2) de vecteur (9.7). Montrer que  $B^\mu$  est relié à  $\bar{A}_0^{\mu\nu} = A_0^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}A_0$  par la formule

$$B^\mu = \frac{i}{k_\lambda u^\lambda} \left\{ \bar{A}_0^{\mu\nu} u_\nu - \frac{k^\mu}{2} \frac{\bar{A}_0^{\rho\sigma} u_\rho u_\sigma}{k_\tau u^\tau} \right\} . \quad (9.9)$$

### D. Les deux états de polarisation de l'onde

La jauge TT permet de compter le nombre de degrés de liberté, ou états de polarisation, d'une onde gravitationnelle dans le vide. Les 10 composantes de la matrice symétrique  $A^{\mu\nu}$  sont soumises aux 4 conditions (9.6), aux 3 conditions (9.8a) — 3 conditions et non 4 car l'une d'elles,  $A^{\mu\nu}u_\mu k_\nu = 0$ , est conséquence de (9.6) — et à 1 condition (9.8b). Une onde gravitationnelle dans le vide possède donc *deux* états de polarisation (comme l'onde électromagnétique). Dans le référentiel propre d'un observateur de quadri-vitesse  $u^\mu$ , on a  $u^0 = 1$  et  $u^i = 0$ , et les conditions (9.8) s'écrivent  $A^{\mu 0} = 0$  et  $A^{ii} = \delta_{ij}A^{ij} = 0$ . Le champ  $\bar{h}^{\mu\nu}$  satisfera  $\bar{h}^{\mu\nu} = h^{\mu\nu}$  (car  $h = 0$ ) et l'on aura

$$h_{00}^{\text{TT}} = h_{0i}^{\text{TT}} = 0 \quad (9.10a)$$

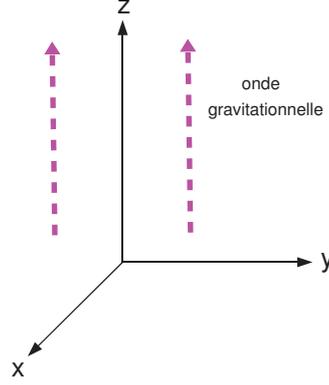


FIG. 26: Propagation le long de la direction  $z$ .

$$\square h_{ij}^{\text{TT}} = 0 \quad (9.10\text{b})$$

$$\partial_j h_{ij}^{\text{TT}} = 0 \quad (9.10\text{c})$$

$$h_{ii}^{\text{TT}} = 0, \quad (9.10\text{d})$$

où la mention TT rappelle que l'on est dans la jauge particulière TT. Si on considère une propagation dans la direction  $x^3 = z$ , par exemple, la matrice  $h_{ij}^{\text{TT}}$  sera fonction du temps retardé  $t - z/c$  uniquement, et sera donnée par

$$h_{ij}^{\text{TT}} = \begin{pmatrix} h_+(t - z/c) & h_\times(t - z/c) & 0 \\ h_\times(t - z/c) & -h_+(t - z/c) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (9.11)$$

où  $h_+$  et  $h_\times$  sont deux fonctions arbitraires de  $t - z/c$  décrivant les deux états de polarisation de l'onde. Pour déterminer par exemple que  $h_{xz}^{\text{TT}} = 0$  on écrit d'après (9.10c) que  $0 = \partial_x h_{xz}^{\text{TT}} + \partial_y h_{xy}^{\text{TT}} + \partial_z h_{xz}^{\text{TT}}$  d'où  $0 = \partial_z h_{xz}^{\text{TT}}$ . Donc  $h_{xz}^{\text{TT}}$  est nécessairement une constante que l'on prend égale à zéro en supprimant les parties statiques de l'onde. (Voir plus loin pour l'explication de la notation  $+$  et  $\times$ .)

### E. Coordonnées de Fermi

Considérons un système de masses initialement au repos (à l'instant zéro) et soumises à l'action de l'onde gravitationnelle  $h_{ij}^{\text{TT}}$ , sans autres sollicitations extérieures. Chacune des masses décrit dans l'espace-temps une ligne géodésique  $L$  donnée par les équations (5.8) ou (5.10).

Il est très commode d'introduire un nouveau système de coordonnées dit de Fermi (1922), qui permettra de décrire le mouvement des masses sous l'action de l'onde gravitationnelle de façon "quasi-newtonienne". Pour cela nous allons admettre que, en vertu du principe d'équivalence, on peut construire au voisinage de la ligne géodésique  $L_0$  de l'une des masses, qui sera appelée la masse centrale, un système de coordonnées de Fermi  $X^\alpha = \{cT, X^i\}$ , avec  $X^i = 0$  sur  $L_0$ , et tel que la déviation de la métrique à la métrique plate soit, à tout instant  $T$  le long de la ligne  $L_0$ , d'ordre  $\mathbf{X}^2$ . Ici  $T$  est le temps propre de la masse centrale.

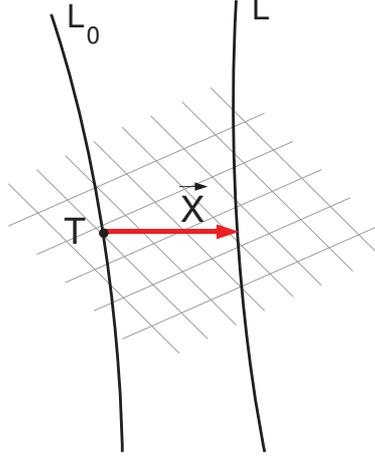


FIG. 27: Le système de coordonnées de Fermi.

On admet donc que la métrique dans ces coordonnées s'écrit, au voisinage de  $L_0$ ,

$$G_{\alpha\beta}(T, \mathbf{X}) = \eta_{\alpha\beta} + F_{\alpha\beta ij}(T)X^i X^j + \mathcal{O}(|\mathbf{X}|^3), \quad (9.12)$$

où les  $F_{\alpha\beta ij}(T)$  sont certaines fonctions du temps dans les coordonnées de Fermi.

**Exercice.** *Construire explicitement un système de coordonnées de Fermi  $\{T, \mathbf{X}\}$  en prenant pour  $T$  un paramètre affine le long de la ligne centrale  $L_0$  et en considérant, pour définir la coordonnée spatiale  $\mathbf{X}$ , une géodésique spatiale orthogonale à  $L_0$ .*

Notez la différence entre (9.12) et le système de coordonnées localement inertiel (5.3). Ici on a obtenu que les coordonnées sont localement inertielles au voisinage d'une ligne géodésique complète  $L_0$  (pas seulement au voisinage d'un seul événement  $\mathcal{P}$ ) et que les déviations sont d'ordre  $O(\mathbf{X}^2)$  dans les distances *spatiales* à la ligne centrale. Le système de coordonnées de Fermi (9.12) est celui qui se rapproche le plus de l'idée intuitive de référentiel en chute libre au cours du temps, dans lequel les effets de la gravitation sont effacés le long de toute une ligne d'univers. Ce système de coordonnées matérialise en fait l'ascenseur d'Einstein en chute libre dans le champ de gravitation.

## F. Action d'une onde gravitationnelle sur la matière

Une masse au voisinage de la masse centrale décrit une géodésique  $L$  séparée de  $L_0$  en coordonnées de Fermi par la distance spatiale  $X^i(T)$ . Nous allons obtenir l'accélération de cette masse, relativement à la masse centrale, au premier ordre en  $|\mathbf{X}|$ . Tout d'abord on montre que cette accélération est donnée par

$$\frac{d^2 X^i}{dT^2} = -c^2 \frac{\partial \Gamma_{00}^i}{\partial X^j}(T, \mathbf{0}) X^j = -c^2 R^i_{.0j0}(T, \mathbf{0}) X^j, \quad (9.13)$$

en fonction des composantes  $\Gamma_{00}^i$  et  $R^i_{.0j0}$  du symbole de Christoffel et du tenseur de Riemann en coordonnées de Fermi, évaluées sur la ligne centrale  $L_0$ . La première égalité résulte simplement de (5.10) dans laquelle on néglige tous les termes d'ordre  $\mathbf{X}^2$  [se rappelant que

les  $\Gamma$  sont nuls sur  $L_0$  à cause de (9.12)]. La seconde égalité résulte de l'expression (6.28) du tenseur de Riemann, et du fait que grâce à (9.12) on a  $\partial\Gamma_{0j}^i/\partial T = 0$  sur  $L_0$  (d'où  $R_{.0j0}^i$  se réduit à  $\partial\Gamma_{00}^i/\partial X^j$  sur  $L_0$ ). Utilisons ensuite la loi de transformation des tenseurs (6.5) pour montrer que les composantes  $R_{.0j0}^i$  du tenseur de Riemann en coordonnées de Fermi  $\{X^\alpha\}$  sont numériquement égales, au premier ordre en  $X^\alpha \equiv x^\alpha + O(h)$ , aux composantes  $R^{\text{TT}i}_{.0j0}$  en coordonnées TT  $\{x^\mu\}$ :

$$R_{.0j0}^i = \frac{\partial X^i}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x^\mu}{\partial X^0} \frac{\partial x^\nu}{\partial X^j} \frac{\partial x^\rho}{\partial X^0} R^{\text{TT}\lambda}_{.\mu\nu\rho} \approx R^{\text{TT}i}_{.0j0} \approx -\frac{1}{2c^2} \frac{\partial^2 h_{ij}^{\text{TT}}}{\partial t^2}. \quad (9.14)$$

La dernière égalité dans (9.14) est obtenue avec l'expression (6.28) du tenseur de Riemann dans laquelle on utilise (9.10). Finalement, (9.13) et (9.14) permettent d'écrire l'accélération cherchée sous la forme<sup>24</sup>

$$\frac{d^2 X^i}{dT^2} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h_{ij}^{\text{TT}}}{\partial t^2}(T, \mathbf{0}) X^j. \quad (9.15)$$

Il est à noter que cette accélération est valable dans les coordonnées de Fermi  $\{T, X^i\}$ , mais utilise l'expression du champ  $h_{ij}^{\text{TT}}(t, \mathbf{x})$  dans les coordonnées TT  $\{t, x^i\}$ , prise au temps  $T$  de Fermi et à la position  $\mathbf{X} = \mathbf{0}$  de la masse centrale. Noter aussi que l'accélération des masses en coordonnées TT est nulle ( $d^2 x^i/dt^2 = 0$ ), ce qui se prouve facilement à partir de (9.10) et de l'équation des géodésiques. Les coordonnées TT si elles ont été pratiques pour représenter le champ dans le vide à l'aide des deux polarisations  $h_+$  et  $h_\times$ , ne sont en fait pas commodes à utiliser pour décrire l'action de l'onde gravitationnelle sur la matière car elles "accompagnent" les masses dans leur mouvement. Les effets de l'onde en coordonnées TT se font sentir autrement, par des retards dans la propagation de signaux lumineux entre les masses. Au contraire, en coordonnées de Fermi, tous les effets de l'onde gravitationnelle sur les masses sont décrits par la petite force supplémentaire "newtonienne" apparaissant dans le membre de droite de (9.15). Cependant, l'accélération newtonienne (9.15) n'est valable que sur des distances  $|\mathbf{X}|$  faibles (en fait  $|\mathbf{X}| \ll \lambda$ , où  $\lambda$  est la longueur d'onde de l'onde gravitationnelle).

L'équation du mouvement (9.15) peut être facilement intégrée (en restant à l'ordre linéaire en  $h$ ), et l'on obtient à chaque instant la position instantanée de la masse,

$$\boxed{X^i(T) = X^i(0) + \frac{1}{2} h_{ij}^{\text{TT}}(T, \mathbf{0}) X^j(0)}, \quad (9.16)$$

où  $X^i(0)$  désigne sa position initiale, avant le passage de l'onde gravitationnelle. Dans le cas d'une onde se propageant dans la direction  $X^3 = Z$  des coordonnées de Fermi, on obtient d'après (9.11)

$$X(T) = X(0) + \frac{1}{2} h_+(T) X(0) + \frac{1}{2} h_\times(T) Y(0), \quad (9.17a)$$

$$Y(T) = Y(0) + \frac{1}{2} h_\times(T) X(0) - \frac{1}{2} h_+(T) Y(0), \quad (9.17b)$$

$$Z(T) = Z(0). \quad (9.17c)$$

<sup>24</sup> Une dérivation différente de ce résultat consiste à utiliser une équation, dite de *déviaton géodésique*, donnant directement la différence entre deux lignes géodésiques.

## G. Déformation d'un anneau de particules

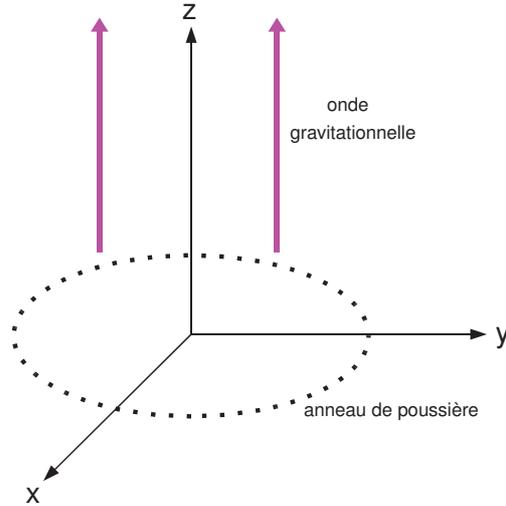


FIG. 28: Anneau de poussière dans le plan  $X, Y$ .

Soit un système de particules sans interactions (poussière) formant un anneau dans le plan  $XY$  initialement circulaire de rayon  $R$ , et soumis à l'action d'une onde gravitationnelle se propageant dans la direction  $Z$ . On suppose que l'onde est monochromatique de fréquence  $\omega$ , et s'écrit

$$h_+(T) = \Re [A_+ e^{-i\omega T}] , \quad (9.18a)$$

$$h_\times(T) = \Re [A_\times e^{-i\omega T}] , \quad (9.18b)$$

où  $A_+$  et  $A_\times$  sont des constantes (et  $\Re$  est la partie réelle). Les états de polarisation correspondant à  $A_+$  et  $A_\times$  sont dits *rectilignes*. On distingue aussi des états de polarisation *circulaires*. On a ( $A$  désignant une constante réelle)

1.  $A_+ = A$  ,  $A_\times = 0$  : polarisation rectiligne +,
2.  $A_+ = 0$  ,  $A_\times = A$  : polarisation rectiligne  $\times$ ,
3.  $A_\times = iA_+ = iA$  : polarisation circulaire droite,
4.  $A_\times = -iA_+ = -iA$  : polarisation circulaire gauche.

L'utilisation de (9.17) montre que l'anneau initialement circulaire se déforme sous l'action de l'onde en une *ellipse* pulsante à la fréquence  $\omega$  dans le cas d'une polarisation rectiligne, et tournante à la fréquence  $\omega/2$  dans le cas d'une polarisation circulaire. (Le nom de polarisation + et  $\times$  est évident sur les figures.)

**Exercice.** Montrer que les équations des ellipses sont

$$1. \text{ rectiligne } +: \left( \frac{X}{1 + \frac{A}{2} \cos \omega T} \right)^2 + \left( \frac{Y}{1 - \frac{A}{2} \cos \omega T} \right)^2 = R^2 , \quad (9.19a)$$

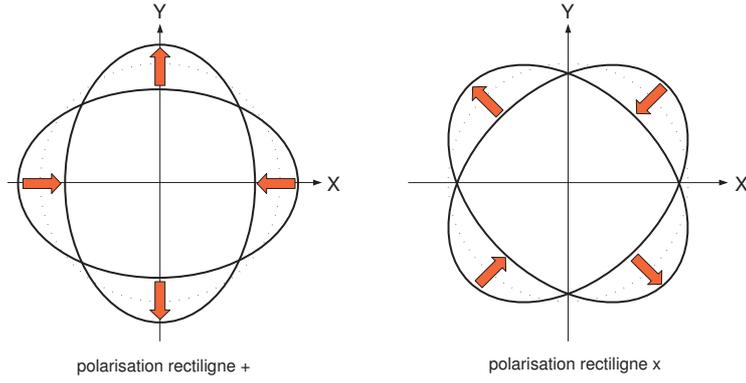


FIG. 29: Polarisation rectilignes.

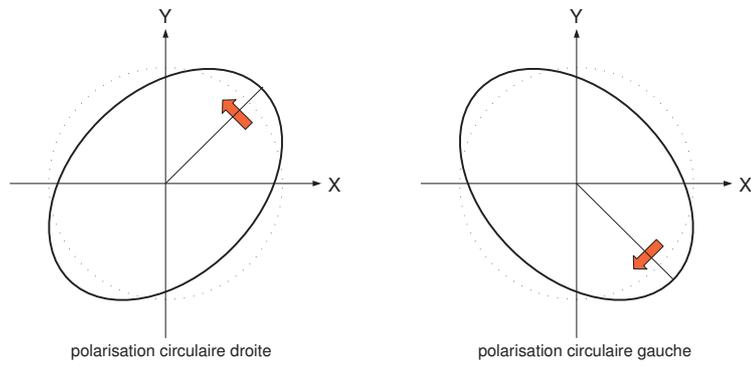


FIG. 30: Polarisation circulaires.

2. rectiligne  $\times$ : *idem* avec  $X \rightarrow \frac{X+Y}{\sqrt{2}}$ ,  $Y \rightarrow \frac{-X+Y}{\sqrt{2}}$ , (9.19b)

3. circulaire droite:  $\left( \frac{X \cos \frac{\omega T}{2} + Y \sin \frac{\omega T}{2}}{1 + \frac{A}{2}} \right)^2 + \left( \frac{-X \sin \frac{\omega T}{2} + Y \cos \frac{\omega T}{2}}{1 - \frac{A}{2}} \right)^2 = R^2$ , (9.19c)

4. circulaire gauche: *idem* avec  $T \rightarrow -T$ . (9.19d)

## H. Génération d'ondes gravitationnelles

Considérons une distribution de matière localisée dans l'espace (système isolé) et émettant des ondes gravitationnelles. On cherche à relier le champ d'ondes  $h_{ij}^{TT}$  à grandes distances du système (dans les coordonnées TT) aux composantes du tenseur énergie-impulsion  $T^{\mu\nu}$  du système. On supposera que les vitesses typiques dans le système sont  $v \ll c$  et que le champ est faible.

Il faut utiliser les équations d'Einstein (7.29)–(7.30) dans laquelle on néglige, puisque le champ est faible, les termes non linéaires ( $t^{\mu\nu} \approx 0$ ) et on garde  $T^{\mu\nu}$  comme source pour les ondes gravitationnelles:

$$\square \bar{h}^{\mu\nu} \approx -\frac{16\pi G}{c^4} T^{\mu\nu}. \quad (9.20)$$

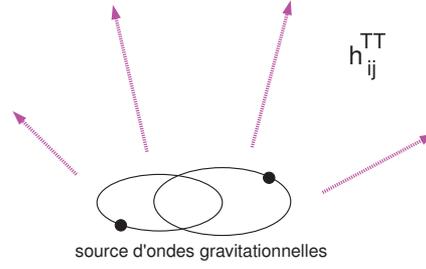


FIG. 31: Génération d'ondes gravitationnelles par une source isolée.

On a toujours la condition de jauge  $\partial_\nu \bar{h}^{\mu\nu} = 0$  qui implique  $\partial_\nu T^{\mu\nu} = 0$ , et que donc dans cette approximation la source des ondes ne réagit pas au champ de gravitation. La solution retardée de (9.20) s'écrit alors sous la forme classique

$$\bar{h}^{\mu\nu}(\mathbf{x}, t) = \frac{4G}{c^4} \int \frac{d^3\mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} T^{\mu\nu}(\mathbf{x}', t - \frac{1}{c}|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|). \quad (9.21)$$

A grandes distances du système,  $r = |\mathbf{x}| \gg |\mathbf{x}'|$ , on aura  $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^{-1} \approx r^{-1}$  et  $t - \frac{1}{c}|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| \approx t - \frac{r}{c} + \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}'}{c}$  où  $\mathbf{n} = \mathbf{x}/r$ , d'où (9.21) devient

$$\bar{h}^{\mu\nu}(\mathbf{x}, t) = \frac{4G}{c^4 r} \int d^3\mathbf{x}' T^{\mu\nu} \left( \mathbf{x}', t - \frac{r}{c} + \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}'}{c} \right). \quad (9.22)$$

La formule (9.22) est valable dès que le champ dans la source est faible. Nous allons maintenant utiliser l'hypothèse que les vitesses internes dans la source sont  $\ll c$ , ce qui revient techniquement à ne garder dans (9.22) que le terme dominant quand  $c \rightarrow +\infty$ . D'autre part il faut projeter la formule (9.22) sur un système de coordonnées TT (avec  $u^\mu = (1, \mathbf{0})$ ). On admettra que le résultat est donné par la 1<sup>ère</sup> formule du quadrupole

$$\boxed{h_{ij}^{\text{TT}}(\mathbf{x}, t) = \frac{2G}{c^4 r} P_{ijkl}(\mathbf{n}) \frac{d^2 Q_{kl}}{dt^2} \left( t - \frac{r}{c} \right)}, \quad (9.23)$$

où  $P_{ijkl}(\mathbf{n})$  est l'“opérateur de projection TT”

$$P_{ijkl}(\mathbf{n}) = (\delta_{ik} - n_i n_k)(\delta_{jl} - n_j n_l) - \frac{1}{2}(\delta_{ij} - n_i n_j)(\delta_{kl} - n_k n_l), \quad (9.24)$$

et où  $Q_{kl}(t)$  est le moment quadrupolaire (sans traces) *newtonien* du système

$$Q_{kl}(t) = \int d^3\mathbf{x} \rho(\mathbf{x}, t) \left[ x_k x_l - \frac{1}{3} \mathbf{x}^2 \delta_{kl} \right], \quad (9.25)$$

avec  $\rho$  la densité de matière newtonienne dans le système ( $\rho \approx T^{00}/c^2$ ). De même on admettra que la puissance totale émise par le système sous forme d'ondes gravitationnelles dans toutes les directions autour du système, qui peut être obtenue à partir de la formule du quadrupole (9.23) et des lois de conservation (7.28), est donné par la 2<sup>ème</sup> formule du quadrupole ou *formule du quadrupole d'Einstein*

$$\boxed{\left( \frac{dE}{dt} \right)^{\text{OG}} = \frac{G}{5c^5} \frac{d^3 Q_{ij}}{dt^3} \frac{d^3 Q_{ij}}{dt^3}}. \quad (9.26)$$

Les formules (9.23) et (9.26) montrent que, en première approximation, le rayonnement gravitationnel est quadrupolaire. Il n'existe ni rayonnement gravitationnel monopolaire (à cause de la conservation de la masse) ni rayonnement gravitationnel dipolaire. Ce deuxième fait est une conséquence directe du principe d'équivalence (dans sa forme faible  $m_i = m_g$ ), qui implique la conservation du dipole de masse  $\mathbf{D} = \Sigma m_g \mathbf{x}$  (tel que  $\frac{d\mathbf{D}}{dt} = \mathbf{P}$  où  $\mathbf{P} = \Sigma m_i \mathbf{v}$  est l'impulsion totale constante du système) et du dipole de courant  $\mathbf{C} = \Sigma m_g \mathbf{x} \times \mathbf{v} = \mathbf{L}$  (où  $\mathbf{L} = \Sigma m_i \mathbf{x} \times \mathbf{v}$  est le moment cinétique total constant du système). Ainsi, contrairement à ce qui se passe en électromagnétisme, les dipôles gravitationnels sont conservés et donc ne rayonnent pas.

Le formalisme du quadrupole peut être vu comme l'approximation *newtonienne* au rayonnement gravitationnel. En effet seules des notions newtoniennes sont utilisées dans les formules (9.23) et (9.26). La densité de masse et le moment quadrupolaire sont newtoniens, et les dérivées temporelles du quadrupole dans (9.23) et (9.26) sont à calculer en utilisant les lois newtoniennes du mouvement. Pour des sources d'ondes gravitationnelles très relativistes comme les systèmes binaires de trous noirs (section X), le formalisme du quadrupole ne sera pas assez précis, et il faudra inclure dans les formules (9.23) et (9.26) de nombreuses corrections post-newtoniennes.

## X. DETECTION DU RAYONNEMENT GRAVITATIONNEL

Une détection *indirecte* du rayonnement gravitationnel a été réalisée en 1979 grâce à l'observation du pulsar binaire PSR 1913+16. Les expériences VIRGO et LIGO, actuellement en commencement de prise de données, devraient permettre sa détection *directe* vers l'an 2010.

### A. Ordre de grandeur du rayonnement gravitationnel

Utilisons les formules du quadrupole (9.23) et (9.26) pour estimer l'ordre de grandeur de l'amplitude  $h$  et de la puissance  $\mathcal{P} = (dE/dt)^{\text{OG}}$  émises gravitationnellement par une machine de laboratoire.

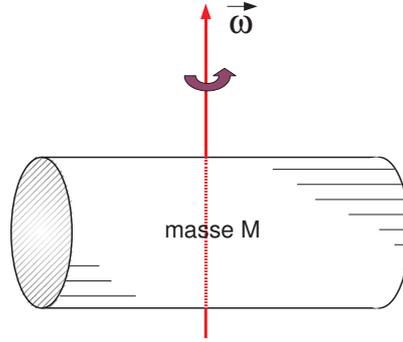


FIG. 32: Barre en rotation à la vitesse angulaire  $\omega$ .

Soit une barre de masse  $M$  et de longueur  $\ell$  en rotation autour d'un axe perpendiculaire à la barre à la vitesse angulaire  $\omega$ . Une composante typique du moment quadrupolaire sera  $Q \sim M\ell^2$  et l'on aura  $d^n Q/dt^n \sim M\ell^2\omega^n$ . Ainsi d'après (9.23) et (9.26) l'ordre de grandeur de  $h$  et  $\mathcal{P}$  sera

$$h \sim \frac{GM\ell^2\omega^2}{c^4 r}, \quad (10.1a)$$

$$\mathcal{P} \sim \frac{GM^2\ell^4\omega^6}{c^5}. \quad (10.1b)$$

Pour une barre d'acier de masse  $M = 500$  tonnes, de longueur  $\ell = 20$ m et tournant à la vitesse angulaire  $\omega = 5$  rad/s (vitesse limite de rupture par force centrifuge pour l'acier), on trouve

$$h \sim 10^{-38} \text{ à } r = 50 \text{ m}, \quad (10.2a)$$

$$\mathcal{P} \sim 10^{-32} \text{ W}. \quad (10.2b)$$

Le rayonnement gravitationnel émis par des objets "ordinaires" de laboratoire est donc extrêmement faible. En effet, d'après (9.16) on voit que  $h$  mesure typiquement la variation relative de longueur d'un détecteur au passage de l'onde:

$$\frac{h}{2} \sim \frac{\delta L}{L}. \quad (10.3)$$

Avec  $h \sim 10^{-38}$  et  $L \sim 1$  km,  $\delta L$  est de l'ordre de la longueur de Planck !

Il n'y a d'espoir de détecter le rayonnement que dans le cas de sources astrophysiques très relativistes et très massives. Pour un système binaire relativiste d'étoiles compactes (comme le pulsar binaire et son compagnon) avec  $M \sim 1M_\odot$ ,  $\ell \sim 10^6$  km et  $\omega \sim 2\pi/10$  h on trouve

$$\mathcal{P} \sim 10^{22} \text{ W} . \quad (10.4)$$

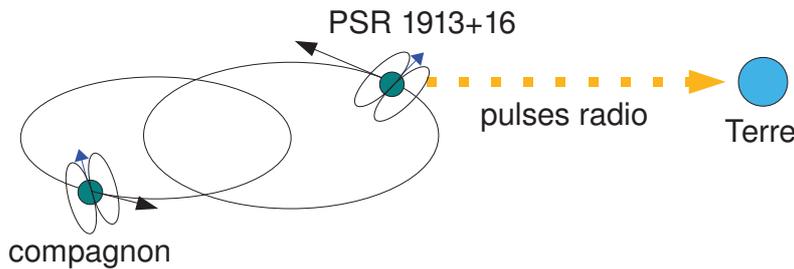
Dans le cas le plus extrême d'une source ultra-relativiste,  $\omega \sim c/\ell$ , et gravitationnellement liée,  $\omega^2 \sim GM/\ell^3$ , on obtient par la formule (10.1b),

$$\mathcal{P} \sim \frac{c^5}{G} = 3.63 \cdot 10^{52} \text{ W} . \quad (10.5)$$

Cette valeur énorme, qui ne dépend plus des caractéristiques de la source,<sup>25</sup> constitue probablement une limite supérieure à la puissance qu'une source *quelconque* peut émettre en rayonnement gravitationnel.

## B. Le pulsar binaire PSR 1913+16

L'année 1974 fut faste pour les "relativistes" avec la découverte par Hulse et Taylor d'un système extrêmement intéressant: le pulsar binaire PSR 1913+16, qui valut à ses découvreurs le prix Nobel en 1993. C'est un pulsar, c'est-à-dire une étoile à neutrons en rotation rapide sur elle-même (avec une période de 56 ms),<sup>26</sup> qui envoie à chaque rotation, tel un phare, du rayonnement électromagnétique radio en direction de la Terre. L'analyse des instants d'arrivée des pulses radio montre (grâce à leur décalage Doppler) que PSR 1913+16 est en orbite autour d'une étoile compagnon, très probablement une autre étoile à neutrons. L'orbite est une ellipse quasi-keplerienne de période orbitale  $P \simeq 7^{\text{h}}40^{\text{mn}}$ , d'excentricité  $e \simeq 0.617$  et de demi grand-axe  $a \simeq 10^6$  km. Les masses du pulsar et de son compagnon ( $m_p$  et  $m_c$ ) sont toutes deux environ égales à  $1.4 M_\odot$  (qui est la masse des étoiles à neutrons, proche de la masse de Chandrasekhar). PSR 1913+16 est un système passionnant car les effets relativistes jouent un rôle important dans sa dynamique. Par exemple, la précession relativiste  $\Delta$  du périastre de l'orbite, donnée par (8.23), est de l'ordre de 4 degrés par an, à comparer avec les 43" arc par siècle du périhélie de Mercure.



<sup>25</sup> Notons que  $\mathcal{P} = c^5/G$  représente en fait l'unité de Planck pour une puissance [voir (1.1)], c'est-à-dire une énergie par un temps; la puissance de Planck se trouve ne pas dépendre de la constante de Planck  $\hbar$ .

<sup>26</sup> Rappelons qu'une étoile à neutrons est un astre compact, formé essentiellement de neutrons avec une densité comparable à celle de la matière nucléaire, et dont la taille est à peu près celle de l'agglomération parisienne pour une masse de  $\sim 1.4 M_\odot$ .

FIG. 33: Le pulsar binaire PSR 1913+16.

Le système double formé par le pulsar et son compagnon émet du rayonnement gravitationnel, ce qui se traduit par une perte d'énergie orbitale, et donc par le rapprochement des deux étoiles l'une de l'autre, et une lente dérive de la période orbitale du mouvement  $P$ . En effet appliquons au système binaire la 3<sup>ème</sup> loi de Kepler (dite aussi "loi 1-2-3"),

$$(GM)^1 = \omega^2 a^3, \quad (10.6)$$

avec  $\omega = 2\pi/P$  et  $M = m_p + m_c$ . L'énergie totale du système binaire est donnée par  $E = -GM\mu/2a$  ( $\mu = m_p m_c / M$  est la masse réduite) d'où l'on en déduit que une perte d'énergie entraîne une décroissance de la période orbitale,

$$\frac{dP}{dt} = -\frac{3}{2} \frac{P}{E} \frac{dE}{dt}. \quad (10.7)$$

En première approximation le rayonnement gravitationnel est quadrupolaire. La perte d'énergie orbitale (moyennée sur une période  $P$ ), se calcule donc grâce à la formule du quadrupole d'Einstein donnant le flux de rayonnement à l'infini,

$$\left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle = -\left\langle \left( \frac{dE}{dt} \right)^{\text{OG}} \right\rangle, \quad (10.8)$$

en utilisant la formule (9.26) appliquée à un système de deux masses ponctuelles en mouvement sur une ellipse keplerienne. On trouve un résultat dû à Peters et Mathews (1963),

$$\boxed{\left\langle \frac{dP}{dt} \right\rangle = -\frac{192\pi}{5c^5} \left( \frac{2\pi G}{P} \right)^{5/3} \frac{m_p m_c}{(m_p + m_c)^{1/3}} \frac{1 + \frac{73}{24}e^2 + \frac{37}{96}e^4}{(1 - e^2)^{7/2}}}. \quad (10.9)$$

Dans le cas du pulsar binaire cette formule donne

$$\left\langle \frac{dP}{dt} \right\rangle = -2.4 \cdot 10^{-12} \text{ s/s}, \quad (10.10)$$

qui représente donc la décroissance de la période orbitale mesurée en secondes à chaque seconde. Cette prédiction purement théorique est en excellent accord (à mieux que 0.5% près) avec les observations effectuées par Taylor et ses collaborateurs. C'est une vérification remarquable, l'une des confirmations les plus importantes de la relativité générale, et l'une des mesures les plus précises effectuées en astronomie. Ce test apporte non seulement la preuve de l'existence du rayonnement gravitationnel tel qu'il est prédit par la relativité générale, mais il permet aussi d'écarter certaines théories alternatives de la gravitation que les tests classiques de section VIII ne permettent pas de distinguer, en régime de champs faibles et lentement variables, de la théorie einsteinienne.

### C. Sources astrophysiques de rayonnement gravitationnel

Il existe de nombreuses sources astrophysiques potentielles dont le rayonnement gravitationnel pourrait être détecté par les expériences actuelles VIRGO et LIGO. On s'attend à de fortes émissions de rayonnement gravitationnel dans le cas des sources astrophysiques suivantes.

1. *Effondrement gravitationnel des couches internes d'une supernova.* Les supernovæ, qui sont des explosions d'étoiles massives en fin de vie lorsqu'elles ont épuisé tout leur "combustible" nucléaire, ont longtemps été considérées comme des sources d'ondes gravitationnelles intéressantes, mais on sait maintenant qu'elles engendrent en fait peu de rayonnement. En effet l'effondrement des couches internes de la supernova, qui devrait être responsable de la production du rayonnement gravitationnel, est essentiellement sphérique, et d'après le théorème de Birkhoff en relativité générale (voir section XI C), le champ extérieur à une distribution sphérique de matière est donné par la solution de Schwarzschild qui est *statique* – il n'y a donc pas de rayonnement émis. Il y a donc de grosses incertitudes sur l'observabilité en rayonnement gravitationnel des supernovas, situées disons dans l'amas de la Vierge où leur nombre est suffisant.
2. *Fusions de systèmes binaires d'étoiles à neutrons et/ou de trous noirs.*<sup>27</sup> Les systèmes binaires sont très intéressants pour VIRGO et LIGO car leur dynamique est fortement asymétrique et ils engendrent beaucoup de rayonnement gravitationnel. On estime à quelques par an le nombre de coalescences de systèmes binaires d'étoiles à neutrons dans un rayon de 100 à 200 Mpc autour de notre galaxie. Dans les derniers instants avant la fusion finale, les deux objets compacts (étoiles à neutrons ou trous noirs) décrivent une orbite rapprochée qui a la forme d'une spirale circulaire rentrante à cause de la perte d'énergie liée à l'émission du rayonnement gravitationnel. C'est ce rayonnement que l'on observera sur Terre où il déformera l'espace-temps avec une amplitude relative de l'ordre de  $10^{-23}$  à la fréquence  $\sim 1000$  Hz (située au-dessus du bruit sismique terrestre). Au cours de la phase spiralante, la distance entre les deux étoiles diminue au cours du temps, et la fréquence orbitale du mouvement,  $\omega = 2\pi/P$  où  $P$  est la période, augmente. On peut montrer que l'évolution de l'orbite est adiabatique, dans le sens où le changement relatif de fréquence pendant une période correspondante reste faible,  $\dot{\omega}/\omega^2 \lesssim 0.1$ . Cette propriété d'adiabaticité permet de définir un schéma d'approximation très puissant en relativité générale, le développement post-newtonien, capable de décrire la spirale avec très grande précision. La précision actuelle des calculs post-newtoniens pour les binaires spiralantes est  $3PN \sim (v/c)^6$ . La phase de fusion proprement dite est calculée par des méthodes numériques.
3. *Rotation non-axisymétrique des étoiles à neutrons.* L'observation du taux de ralentissement des pulsars connus (leur  $\ddot{P}$  de spin) donne une limite supérieure à l'émission de rayonnement gravitationnel à cause du freinage de rayonnement. Il y a des espoirs de détection pour les étoiles à neutrons proches.
4. *Mouvement et chute d'étoiles dans un trou noir galactique géant.* L'amplitude est comparable à celle de la coalescence de binaire, mais la fréquence très basse, de l'ordre de  $10^{-4}$  Hz pour un trou noir de  $10^8 M_\odot$ , est située en dessous du bruit sismique terrestre et empêche toute détection au sol. Ces systèmes seront détectés dans l'espace (expérience LISA).
5. *Inflation et transitions de phases dans l'univers primordial.* Le rayonnement gravitationnel produit serait à fréquences très basses observables uniquement par des

---

<sup>27</sup> Le pulsar binaire PSR 1913+16 finira par fusionner avec son compagnon (à cause de la perte d'énergie due à l'émission de rayonnement gravitationnel) dans environ 350 millions d'années.

expériences dans l'espace.

De nombreuses autres sources sont envisagées. Mais pour la plupart, soit le taux d'émission de rayonnement est très incertain, soit l'existence même de la source est très incertaine.

#### D. Barres de Weber

Les détecteurs d'ondes gravitationnelles appelés barres de Weber (1960) sont des cylindres résonnants, généralement en aluminium, dont la fréquence fondamentale est de l'ordre de  $f \sim 1000$  Hz. Leur longueur est donc de l'ordre de  $L \sim v_S/f$  où  $v_S \sim 1$  km/s est la vitesse du son dans l'aluminium. Ainsi,  $L \sim 1$  m avec une masse  $M \sim 1$  tonne. Le cylindre est suspendu en son milieu, et les oscillations mécaniques des extrémités sont converties par un transducteur en signal électrique qui est amplifié et enregistré.

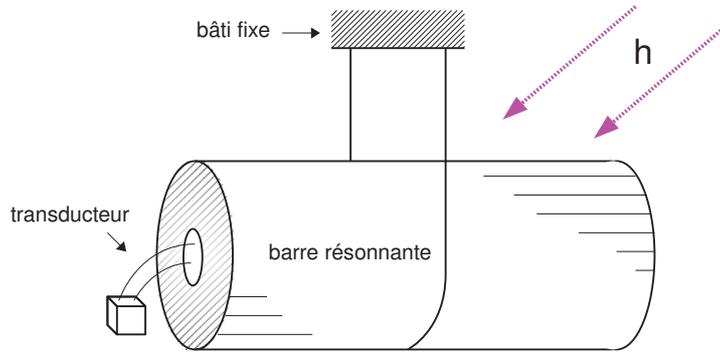


FIG. 34: La barre de Weber.

Le déplacement  $\delta L$  des extrémités de la barre est donné par une équation du type

$$\ddot{\delta L} + \Omega^2 \delta L = \frac{L}{2} \ddot{h}, \quad (10.11)$$

où  $\Omega = 2\pi f$  est la fréquence fondamentale de la barre et  $h$  l'amplitude de l'onde gravitationnelle. L'accélération produite par l'onde gravitationnelle dans le membre de droite de (10.11) résulte de (9.15). Pour une onde de fréquence  $\omega$ , on aura  $h = \Re(h_0 e^{i\omega t})$ , et donc  $\delta L = \Re(\delta L_0 e^{i\omega t})$  avec

$$\delta L_0 = \frac{Lh_0}{2} \frac{\omega^2}{\omega^2 - \Omega^2}. \quad (10.12)$$

Donc, si l'on choisit  $\Omega$  proche de la fréquence  $\omega$  escomptée pour l'onde gravitationnelle il y aura résonance et amplification du déplacement  $\delta L_0$  de la barre.

La source principale de bruit dans les barres de Weber est le bruit d'origine thermique (les modes de vibration de la barre sont soumis à des fluctuations d'énergie  $\approx kT$  où  $T$  est la température de la barre). On refroidit donc les barres, pour minimiser ce bruit, à des températures de quelques Kelvin.

A l'heure actuelle, les meilleures barres de Weber sont capables de détecter  $h \sim 10^{-18}$ . Cette valeur serait peut-être suffisante pour détecter une supernova proche (dans notre galaxie).

## E. Interféromètres à laser

De nouvelles expériences sont maintenant en fonctionnement pour tenter de détecter le rayonnement gravitationnel. Ces expériences sont fondées sur l'interférométrie à laser, et sont constituées de gigantesques interféromètres de Michelson (avec en général des cavités Fabry-Perot). Elles ambitionnent de former un réseau international, comprenant des interféromètres de grande taille, LIGO aux États-Unis dont les bras ont une longueur de 4 km, et VIRGO qui est construit près de Pise avec des bras de 3 km dans le cadre d'une collaboration franco-italienne. Le réseau comprend aussi des détecteurs de taille plus modeste, GEO à Hanovre et TAMA au Japon.

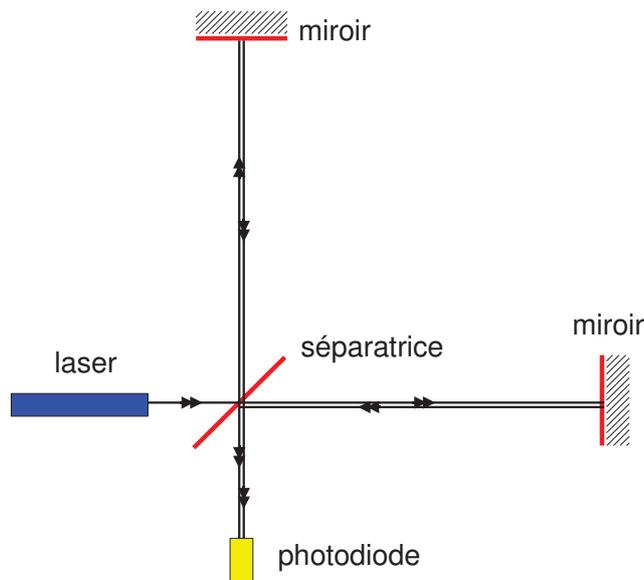


FIG. 35: Principe de l'interféromètre à laser.

Le grand intérêt de l'interférométrie à laser pour la détection des ondes gravitationnelles, est la bande de fréquence très large du détecteur, typiquement de  $\sim 10$  Hz à 1000 Hz pour VIRGO (on a vu que en revanche les barres de Weber ne peuvent détecter qu'au voisinage de la fréquence de résonance de la barre). L'interféromètre est idéalement adapté à la détection et à l'étude des fusions de systèmes binaires d'objets compacts (voir § 9.3).

Au passage de l'onde gravitationnelle, la longueur des bras 1 et 2 de l'interféromètre de Michelson-Morley oscille (voir par exemple la déformation de l'anneau de particules en § 8.7) et l'on peut mesurer à la sortie de l'appareil un déplacement du système de franges d'interférences. La longueur des bras  $L$  doit être choisie la plus grande possible (tout en restant petite par rapport à la longueur d'onde gravitationnelle,  $\lambda = 300$  km à 1000 Hz). On utilise quelquefois des "lignes à retard" dans lesquelles la lumière fait plusieurs allers et retours avant de revenir sur la séparatrice, mais la meilleure technique actuelle est basée sur des cavités Fabry-Pérot.

Les sources de bruit dans l'interféromètre sont le bruit sismique terrestre qui limite les possibilités de l'appareil en dessous d'une fréquence  $\sim 100$  Hz, le bruit thermique des miroirs à la température ambiante, et le bruit de photon dû au fait que les photons heurtent les miroirs un à un selon une statistique poissonnienne.

## XI. TROUS NOIRS

### A. Notion de rayon gravitationnel

Un raisonnement heuristique de Michell (1784) et Laplace (1798) conduit naturellement à la notion de rayon gravitationnel. Si la lumière est faite de corpuscules de vitesse  $c$  et de masse  $m > 0$ , alors celle-ci ne peut s'échapper d'un objet de masse  $M$  et de rayon  $r$  que si l'énergie cinétique des corpuscules est supérieure à leur énergie potentielle gravitationnelle (on utilise un raisonnement newtonien),

$$\frac{1}{2} mc^2 > \frac{GMm}{r}, \quad (11.1)$$

et donc si le rayon  $r$  de l'objet est supérieur à un rayon critique  $r_g$  donné par

$$r_g = \frac{2GM}{c^2}. \quad (11.2)$$

A l'inverse, tous les objets ayant  $r \leq r_g$  maintiennent la lumière "piégée" dans leur champ de gravitation, et sont donc invisibles (obscurs) pour un observateur à l'infini. Le rayon  $r_g$  s'appelle *rayon gravitationnel*; il vaut  $r_g \approx 3$  km dans le cas du Soleil, et  $r_g \approx 1$  cm dans le cas de la Terre. Nous allons voir que l'intuition de Laplace et Michell est essentiellement correcte.

### B. Existe-t-il des objets dont le rayon soit inférieur au rayon gravitationnel ?

A la densité ordinaire  $\rho \approx 1$  g/cm<sup>3</sup>, de tels objets auraient la masse énorme  $M \gtrsim 10^8 M_\odot$  (calculée par Laplace), et de tels objets de masse  $M \approx 1M_\odot$  auraient la densité énorme  $\rho \gtrsim 10^{16}$  g/cm<sup>3</sup>.

Tous les objets connus dans l'univers ayant des densités ordinaires ( $\rho \approx 1$  g/cm<sup>3</sup>) sont maintenus en équilibre contre leur "poids" gravitationnel soit par des forces de répulsion d'origine électromagnétique (c'est le cas des objets terrestres, des planètes, etc...) soit par pression de la radiation issue de réactions nucléaires au centre de l'objet (étoiles). On peut montrer que ces deux catégories d'objets, ayant des densités ordinaires, ne peuvent dépasser une certaine masse limite qui est bien en-dessous de la masse de  $10^8 M_\odot$  de Laplace.

En effet, dans le cas des objets maintenus en équilibre par répulsion électromagnétique, la masse limite, dite *masse de Fowler*, est de l'ordre de grandeur de la masse de Jupiter ( $\approx 10^{-3} M_\odot$ ). Au delà de la masse de Fowler, les objets maintenus électromagnétiquement deviennent des étoiles, c'est-à-dire que des réactions nucléaires s'allument en leur centre. Dans le cas des étoiles, la masse limite, dite *masse de Eddington* est de l'ordre de  $10^2 - 10^3 M_\odot$ . Au delà de la masse de Eddington, les étoiles deviennent instables et leurs couches externes sont "soufflées" par la pression de radiation trop intense. On pense donc qu'il ne peut exister dans l'univers d'objets de densité ordinaire ayant une masse  $\sim 10^8 M_\odot$  et dont le rayon soit inférieur au rayon gravitationnel. Cela ne pourrait donc être possible que pour des objets de très grande densité.

Que se passe-t-il lorsque dans une étoile de masse  $M \approx 1M_\odot$  les réactions nucléaires (essentiellement de type hydrogène  $\rightarrow$  hélium) s'arrêtent faute d'hydrogène ? Se peut-il que l'étoile s'effondre jusqu'à atteindre la densité de  $10^{16}$  g/cm<sup>3</sup> ? La théorie astrophysique

prédit les mécanismes suivants. Si la masse de l'étoile  $M$  est inférieure à une certaine masse critique, dite *masse de Chandrasekhar* (1930) et qui est égale à  $1.4M_{\odot}$ , alors l'étoile s'effondre sur elle-même jusqu'à former une étoile *naine blanche* de rayon  $r \approx 10^4$  km et de densité  $\rho \approx 10^6$  g/cm<sup>3</sup>. La naine blanche est maintenue contre la gravité par la pression d'un gaz dégénéré d'électrons (résultant du principe de Pauli). Si la masse de l'étoile  $M$  est comprise entre la masse de Chandrasekhar  $1.4M_{\odot}$  et une autre masse critique, dite *masse de Oppenheimer et Volkoff* (1939), dont la valeur moderne est de l'ordre de  $2 - 3M_{\odot}$ , c'est-à-dire si  $1.4M_{\odot} < M < 2 - 3M_{\odot}$ , alors l'étoile s'effondre sur elle-même jusqu'à former une *étoile à neutrons* de rayon  $r \approx 10$  km et de densité  $\rho \approx 10^{15}$  g/cm<sup>3</sup> (très proche de la valeur  $10^{16}$  g/cm<sup>3</sup>). L'étoile à neutrons est maintenue contre la gravité par la pression du gaz dégénéré de neutrons. Enfin, si  $M$  est supérieur à la masse de Oppenheimer et Volkoff, c'est-à-dire si  $M > 2 - 3M_{\odot}$ , alors *rien ne peut plus arrêter l'effondrement gravitationnel* (Oppenheimer et Snyder, 1939). L'étoile doit en principe s'effondrer sans fin sur elle-même, et donc atteindre et dépasser la densité  $\rho \approx 10^{16}$  g/cm<sup>3</sup> où son rayon devient inférieur à son rayon gravitationnel.

### C. La métrique de Schwarzschild

L'étude de l'effondrement gravitationnel nécessite de connaître le champ gravitationnel extérieur à une distribution donnée de matière (étoile). Le champ gravitationnel étant extérieur sera solution des équations d'Einstein du *vide*,

$$R_{\mu\nu} = 0 . \quad (11.3)$$

Supposons de plus que la distribution de matière, et donc le champ engendré par elle, possède la *symétrie sphérique*. Alors on a le théorème suivant (Schwarzschild 1916).

**Théoreme.** *Sous les deux hypothèses du champ dans le vide (11.3) et de la symétrie sphérique, il existe un système de coordonnées sphériques  $\{t, r, \theta, \varphi\}$  dans lequel le champ gravitationnel est donné par la métrique<sup>28</sup>*

$$ds^2 = - \left( 1 - \frac{2GM}{rc^2} \right) c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2GM}{rc^2}} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) , \quad (11.4)$$

où  $M$  est la masse totale de l'étoile (incluant son énergie interne gravitationnelle).

La métrique la plus générale à symétrie sphérique doit être fonction uniquement des invariants de rotation  $t$ ,  $r = |\mathbf{x}|$ ,  $dt$ ,  $\mathbf{x}.d\mathbf{x} = r dr$  et  $d\mathbf{x}^2 = dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$  et est donc du type

$$ds^2 = -B dt^2 + A dr^2 + 2C dr dt + D r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) , \quad (11.5)$$

où  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  sont 4 fonctions arbitraires de  $t$  et de  $r$  seuls. Nous allons réduire cette expression de l'intervalle par des changements de coordonnées successifs. Tout d'abord, la

<sup>28</sup> Le système de coordonnées  $\{t, r, \theta, \varphi\}$ , dit de Schwarzschild, est différent du système de coordonnées employé en section VIII pour les tests classiques, et sera précisé plus bas.

fonction  $D$  peut être ramenée à 1 en introduisant à la place de  $r$  la nouvelle coordonnée radiale

$$\bar{r} = r\sqrt{D(r,t)} . \quad (11.6)$$

Dans les nouvelles coordonnées  $\{t, \bar{r}, \theta, \varphi\}$ , la métrique a exactement la même forme que (11.5) mais avec de nouvelles fonctions  $\bar{A}$ ,  $\bar{B}$  et  $\bar{C}$ , et avec 1 en facteur du dernier terme, soit

$$ds^2 = -\bar{B}dt^2 + \bar{A}d\bar{r}^2 + 2\bar{C}d\bar{r}dt + \bar{r}^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) . \quad (11.7)$$

Ensuite, on réduit à zéro la fonction  $\bar{C}$  en introduisant un nouveau temps  $\bar{t}$  tel que

$$d\bar{t} = \alpha(\bar{r}, t) [\bar{B}(\bar{r}, t)dt - \bar{C}(\bar{r}, t)d\bar{r}] , \quad (11.8)$$

où on ajuste la fonction  $\alpha$  de manière que  $d\bar{t}$  soit une différentielle totale, c'est-à-dire

$$\frac{\partial}{\partial \bar{r}} [\alpha(\bar{r}, t)\bar{B}(\bar{r}, t)] = -\frac{\partial}{\partial t} [\alpha(\bar{r}, t)\bar{C}(\bar{r}, t)] . \quad (11.9)$$

Dans les coordonnées  $\{\bar{t}, \bar{r}, \theta, \varphi\}$ , on calcule alors que la métrique prend la même forme que (11.7) mais avec de nouvelles fonctions  $\bar{\bar{A}}$  et  $\bar{\bar{B}}$ , et avec  $\bar{\bar{C}} = 0$ . Supprimant toutes les barres sur les fonctions et sur les coordonnées, on a donc obtenu que la métrique à symétrie sphérique *la plus générale* (modulo un changement de coordonnées) dépend de *deux* fonctions  $A(r, t)$  et  $B(r, t)$  seulement, et s'écrit

$$ds^2 = -B(r, t)dt^2 + A(r, t)dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) . \quad (11.10)$$

Appliquons à la métrique (11.10) les équations d'Einstein du vide (11.3). Nous avons besoin des symboles de Christoffel  $\Gamma_{\mu\nu}^\rho$ , puis des composantes du tenseur de Ricci  $R_{\mu\nu}$ . Pour calculer les  $\Gamma_{\mu\nu}^\rho$ , on écrit les équations des géodésiques associées à la métrique (11.10) sous leur forme lagrangienne (5.19). Les  $\Gamma_{\mu\nu}^\rho$  se lisent alors par comparaison de ces équations avec les équations des géodésiques sous la forme (5.8). Cette méthode de calcul des  $\Gamma_{\mu\nu}^\rho$  est très rapide, et est applicable à n'importe quelle métrique. Les équations (5.19) pour la métrique (11.10) s'écrivent

$$\frac{d}{dp} \left( -B \frac{dt}{dp} \right) = -\frac{\dot{B}}{2} \left( \frac{dt}{dp} \right)^2 + \frac{\dot{A}}{2} \left( \frac{dr}{dp} \right)^2 , \quad (11.11a)$$

$$\frac{d}{dp} \left( A \frac{dr}{dp} \right) = -\frac{B'}{2} \left( \frac{dt}{dp} \right)^2 + \frac{A'}{2} \left( \frac{dr}{dp} \right)^2 + r \left( \frac{d\theta}{dp} \right)^2 + r \sin^2\theta \left( \frac{d\varphi}{dp} \right)^2 , \quad (11.11b)$$

$$\frac{d}{dp} \left( r^2 \frac{d\theta}{dp} \right) = r^2 \sin\theta \cos\theta \left( \frac{d\varphi}{dp} \right)^2 , \quad (11.11c)$$

$$\frac{d}{dp} \left( r^2 \sin^2\theta \frac{d\varphi}{dp} \right) = 0 , \quad (11.11d)$$

où le prime ' et le point  $\dot{\cdot}$  désignent respectivement la différentiation par rapport à  $r$  et  $t$ . Par comparaison de (11.11) avec (5.8) on en déduit tous les Christoffels

$$\Gamma_{tt}^t = \frac{\dot{B}}{2B} , \quad \Gamma_{tr}^t = \Gamma_{rt}^t = \frac{B'}{2B} , \quad \Gamma_{rr}^t = \frac{\dot{A}}{2B} , \quad (11.12a)$$

$$\Gamma_{tt}^r = \frac{B'}{2A}, \quad \Gamma_{tr}^r = \Gamma_{tr}^r = \frac{\dot{A}}{2A}, \quad \Gamma_{rr}^r = \frac{A'}{2A}, \quad \Gamma_{\theta\theta}^r = -\frac{r}{A}, \quad \Gamma_{\varphi\varphi}^r = -\frac{r \sin^2 \theta}{A}, \quad (11.12b)$$

$$\Gamma_{r\theta}^\theta = \Gamma_{\theta r}^\theta = \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{\varphi\varphi}^\theta = -\sin \theta \cos \theta, \quad (11.12c)$$

$$\Gamma_{r\varphi}^\varphi = \Gamma_{\varphi r}^\varphi = \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{\theta\varphi}^\varphi = \Gamma_{\varphi\theta}^\varphi = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}, \quad (11.12d)$$

les autres coefficients étant nuls. Dans cette comparaison il faut faire attention au fait que les symboles  $\Gamma$  ayant deux indices inférieurs différents apparaissent avec un facteur 2.

Pour calculer les  $R_{\mu\nu}$ , il n'y a malheureusement pas de méthode simple et il faut faire un calcul direct en remplaçant les  $\Gamma_{\mu\nu}^\rho$  dans le tenseur de Ricci (6.35a) avec (6.28). Les équations d'Einstein du vide s'écrivent alors

$$R_{tt} = -\frac{\ddot{A}}{2A} + \frac{\dot{A}^2}{4A^2} + \frac{\dot{B}\dot{A}}{4AB} + \frac{B''}{2A} - \frac{B'A'}{4A^2} + \frac{B'}{Ar} - \frac{B'^2}{4AB} = 0, \quad (11.13a)$$

$$R_{rr} = \frac{\ddot{A}}{2B} - \frac{\dot{B}\dot{A}}{4B^2} - \frac{\dot{A}^2}{4AB} + \frac{A'}{Ar} - \frac{B''}{2B} + \frac{B'^2}{4B^2} + \frac{A'B'}{4AB} = 0, \quad (11.13b)$$

$$R_{tr} = R_{rt} = \frac{\dot{A}}{Ar} = 0, \quad (11.13c)$$

$$R_{\theta\theta} = 1 - \frac{1}{A} + \frac{rA'}{2A^2} - \frac{rB'}{2AB} = 0, \quad (11.13d)$$

$$R_{\varphi\varphi} = \sin^2 \theta R_{\theta\theta} = 0, \quad (11.13e)$$

les autres composantes étant nulles. De (11.13c) on tire que  $A$  est indépendant du temps,  $\dot{A} = 0$ . Les équations se réduisent donc au système

$$-\frac{B''}{2A} + \frac{B'A'}{4A^2} - \frac{B'}{Ar} + \frac{B'^2}{4AB} = 0, \quad (11.14a)$$

$$\frac{B''}{2B} - \frac{B'^2}{4B^2} - \frac{A'B'}{4AB} - \frac{A'}{Ar} = 0, \quad (11.14b)$$

$$-1 + \frac{1}{A} - \frac{rA'}{2A^2} + \frac{rB'}{2AB} = 0, \quad (11.14c)$$

qui est équivalent à

$$(AB)' = 0, \quad (11.15a)$$

$$\left(\frac{r}{A}\right)' = 1. \quad (11.15b)$$

La solution générale est

$$A = \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1}, \quad B = f(t) \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right), \quad (11.16)$$

où  $M$  est une constante d'intégration, et  $f(t)$  une fonction du temps arbitraire. Finalement, cette fonction peut être ramenée à 1 par le changement de temps  $t \rightarrow t'$  avec  $dt' = \sqrt{f(t)}dt$ . On a ainsi prouvé que la métrique de Schwarzschild (11.4) est la solution la plus générale des équations d'Einstein du vide à symétrie sphérique.

Vérifions que la constante  $M$  est bien la masse de l'étoile centrale. La métrique (11.4) à grandes distances  $r \rightarrow +\infty$  s'écrit approximativement

$$ds^2 \approx - \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) c^2 dt^2 + \left(1 + \frac{2GM}{rc^2}\right) dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (11.17)$$

qui peut être transformé, en posant  $r = R + GM/c^2$ , en

$$ds^2 \approx - \left(1 - \frac{2GM}{Rc^2}\right) c^2 dt^2 + \left(1 + \frac{2GM}{Rc^2}\right) [dR^2 + R^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)]. \quad (11.18)$$

Par comparaison de (11.18) avec la métrique post-newtonienne (8.3), on voit que la métrique de Schwarzschild représente bien le champ extérieur à une étoile sphérique de masse  $M$ . Par exemple, c'est la masse qui serait mesurée par la loi de Kepler  $GM = \omega^2 a^3$  en observant l'orbite d'une planète autour de l'étoile.

Notons que le théorème que l'on vient de démontrer, qui s'appelle théorème de Birkhoff (1923), est remarquable car il prouve que le champ extérieur à une distribution de matière sphérique est toujours *statique*. Ceci est vrai même si la matière est en effondrement ou a par exemple un mouvement de pulsations radiales, du moment que l'on reste à l'extérieur et que la symétrie sphérique reste vraie. Le théorème de Birkhoff est à rapprocher du théorème de Gauss en théorie de Newton, et est lié au fait qu'il n'existe pas de rayonnement gravitationnel monopolaire (§ 8.8).

#### D. Effondrement gravitationnel

D'après le théorème de Birkhoff, le champ extérieur à l'étoile en train de s'effondrer (en maintenant sa symétrie sphérique) est donné par la métrique de Schwarzschild (11.4).

Notons que cette métrique est singulière en  $r = 0$  (le centre de l'étoile), et aussi en  $r = 2GM/c^2$ , c'est-à-dire précisément au *rayon gravitationnel*  $r_g$  qui avait été introduit en (11.2) par Michell et Laplace. Cependant, cette dernière singularité n'est qu'une "*singularité de coordonnées*", où le champ gravitationnel garde en fait une valeur finie, et qui doit être bien distinguée d'une *singularité de courbure* où le champ gravitationnel diverge. On peut rendre la métrique plus régulière en  $r = r_g$  en introduisant la nouvelle coordonnée temporelle "avancée"<sup>29</sup>

$$v = t + r + 2M \ln \left| \frac{r}{2M} - 1 \right|, \quad (11.19a)$$

$$dv = dt + \frac{dr}{1 - \frac{2M}{r}}. \quad (11.19b)$$

Les coordonnées  $\{v, r, \theta, \varphi\}$  s'appellent coordonnées d'Eddington-Finkelstein, et la métrique de Schwarzschild dans ces coordonnées devient

$$\boxed{ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dv^2 + 2dv dr + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)}. \quad (11.20)$$

<sup>29</sup> On pose dorénavant  $G = c = 1$ .

La métrique est maintenant finie au rayon gravitationnel  $r = r_g = 2M$ .

Pour étudier l'effondrement gravitationnel on va analyser les trajectoires de photons le long de la direction radiale, c'est-à-dire les trajectoires ayant  $\theta$  et  $\varphi$  constants. Celles-ci sont de deux types, les trajectoires sortantes, où la lumière est émise vers l'extérieur et pour lesquelles  $t - r \approx \text{const}$  donc  $dv \approx 2dr$  (à grandes distances de l'étoile), et les trajectoires entrantes qui ont  $t + r \approx \text{const}$  et en fait  $dv = 0$  exactement. Les équations de ces trajectoires sont données d'après (11.20) par

$$\frac{dv}{dr} = 0 \quad (\text{lumière entrante}), \quad (11.21a)$$

$$\frac{dv}{dr} = \frac{2}{1 - \frac{2M}{r}} \quad (\text{lumière sortante}). \quad (11.21b)$$

On peut vérifier que ces trajectoires sont des géodésiques. La structure causale de l'espace-temps de l'étoile en effondrement se déduit alors de (11.21). On peut la visualiser dans le diagramme d'Eddington-Finkelstein (où la coordonnée  $\theta$  supprimée).

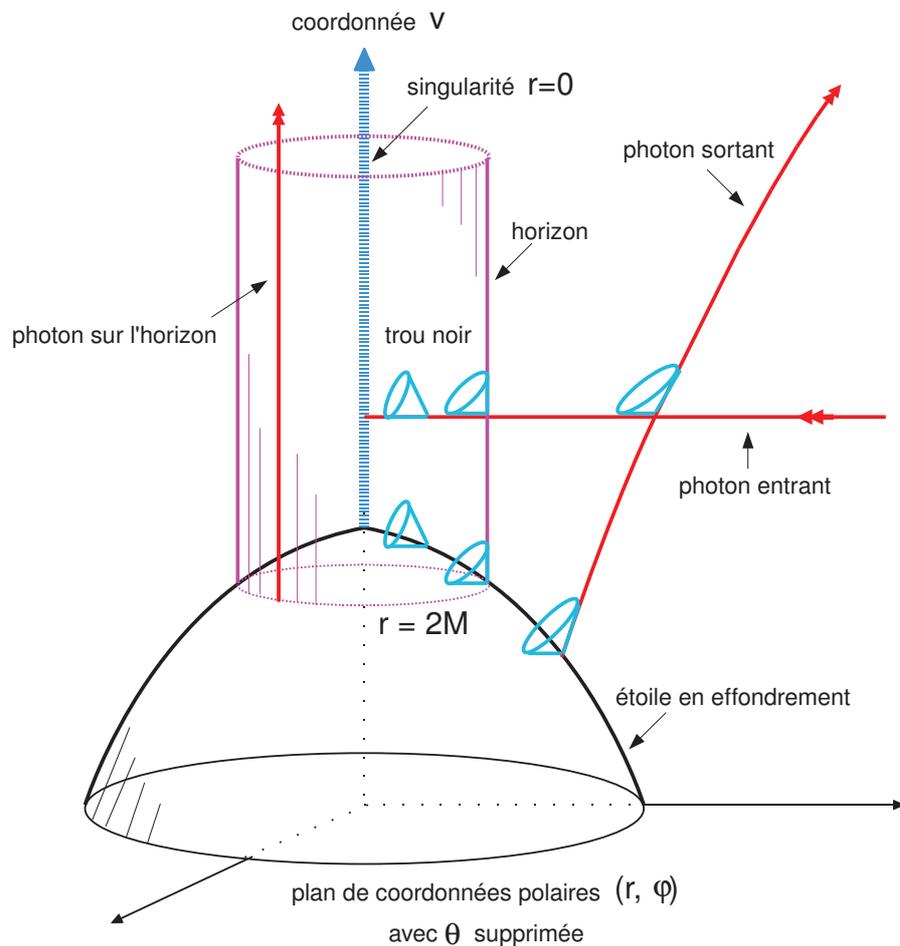


FIG. 36: Effondrement gravitationnel d'une étoile à symétrie sphérique.

L'étoile en effondrement atteint la ligne  $r = 0$  en un temps propre *fini*, tel qu'il est mesuré par des observateurs sur l'étoile. Pour l'observateur sur l'étoile il ne se passe rien de spécial

au passage au rayon gravitationnel  $r_g$ . D'autre part, on peut montrer que la luminosité de l'étoile vue de l'extérieur (à grandes distances de l'étoile) tend très rapidement vers zéro, avec la loi exponentielle

$$L = L_0 e^{-t/t_0} , \quad (11.22)$$

où  $t_0$  est le temps caractéristique

$$t_0 = 3\sqrt{3}M = (2.6 \cdot 10^{-5} \text{sec}) \left( \frac{M}{M_\odot} \right) . \quad (11.23)$$

L'étoile en effondrement devient donc très rapidement invisible.

La ligne  $r = 0$  après effondrement de l'étoile s'appelle *singularité*. C'est une vraie singularité "de courbure", où le champ gravitationnel est infini. Cela peut se voir en calculant un invariant de courbure, c'est-à-dire un scalaire formé avec les composantes du tenseur de Riemann. La courbure scalaire  $R$  n'est pas adéquate car elle est nulle par les équations d'Einstein (11.3). On peut calculer par exemple le Riemann au carré qui vaut

$$\boxed{R^{\mu\nu\rho\sigma} R_{\mu\nu\rho\sigma} = 48 \frac{M^2}{r^6} ,} \quad (11.24)$$

et qui manifestement diverge sur la singularité  $r = 0$ . On appelle *horizon* la surface  $r = r_g = 2M$  après effondrement. C'est une hyper-surface à trois dimensions qui est du genre lumière ou tangente au cône de lumière. Ceci se prouve grâce à (11.21b) qui admet comme solution  $r = r_g = 2M$ . L'horizon peut donc être vu comme le lieu des trajectoires géodésiques de photons "sortants" qui sont exactement "stabilisés" à  $r = 2M$  par le champ gravitationnel de l'étoile effondrée. Finalement la région intérieure à l'horizon est appelée *trou noir*. C'est la région de laquelle il est impossible d'envoyer un signal (même lumineux) à l'infini. En effet, dans le trou noir, les photons entrants *et* sortants tombent dans la singularité.

On admettra, avec Penrose (1969), que l'effondrement gravitationnel d'une étoile conduit toujours à la formation d'un trou noir, c'est-à-dire d'une région intérieure à une (hyper-)surface du genre lumière, l'horizon, pouvant contenir des singularités et de laquelle on ne peut communiquer avec l'extérieur.

### E. Extension maximale du trou noir de Schwarzschild

On a vu que la coordonnée  $v$  de Eddington-Finkelstein donnée par (11.19a) est une coordonnée avancée pour le mouvement des photons entrants. Il est maintenant utile de considérer aussi la coordonnée correspondante retardée  $u$ . Les coordonnées retardée et avancée  $u$  et  $v$  de Eddington-Finkelstein sont donc données par

$$u = t - r - 2M \ln \left| \frac{r}{2M} - 1 \right| , \quad (11.25a)$$

$$v = t + r + 2M \ln \left| \frac{r}{2M} - 1 \right| , \quad (11.25b)$$

où  $t, r$  sont les coordonnées de Schwarzschild utilisées dans (11.4). Définissons alors les nouvelles coordonnées

$$T = \frac{1}{2} \left[ e^{\frac{v}{4M}} - e^{-\frac{u}{4M}} \right] , \quad (11.26a)$$

$$R = \frac{1}{2} \left[ e^{\frac{v}{4M}} + e^{-\frac{u}{4M}} \right] . \quad (11.26b)$$

**Exercice.** Montrer que la métrique de Schwarzschild (11.4) dans les nouvelles coordonnées (11.26) devient

$$ds^2 = \frac{32M^3}{r(T, R)} e^{-\frac{r(T, R)}{2M}} (-dT^2 + dR^2) + r^2(T, R)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) , \quad (11.27)$$

où la coordonnée  $r(T, R)$  de Schwarzschild est donnée implicitement en fonction de  $T, R$  par

$$R^2 - T^2 = \left( \frac{r}{2M} - 1 \right) e^{\frac{r}{2M}} . \quad (11.28)$$

Le nouveau système de coordonnées  $(T, R, \theta, \varphi)$ , appelé système de coordonnées de Kruskal-Szekeres (1960), a des propriétés remarquables. Dans ces coordonnées, la singularité  $r = 0$  de Schwarzschild a pour équation  $T^2 - R^2 = 1$ . Il y a donc *deux* singularités:

$$T = (1 + R^2)^{1/2} \quad \text{et} \quad T = -(1 + R^2)^{1/2} . \quad (11.29)$$

De même la région “asymptotiquement plate” de Schwarzschild  $r \gg 2M$  est donnée par  $R^2 \gg T^2$ . Il y a donc *deux* régions asymptotiquement plates:

$$R \gg |T| \quad \text{et} \quad R \ll -|T| , \quad (11.30)$$

et, de façon similaire, *deux* horizons :  $R = \pm|T|$ . On a donc le diagramme de Kruskal-Szekeres.

Les régions (I) et (III) sont les deux régions asymptotiquement plates. Depuis l’une de ces régions, par exemple la région (I) où nous vivons, il est impossible de communiquer dans l’autre région (III) sans heurter la singularité. La région (II) est la région du trou noir. La région (IV) est la région du “trou blanc”. La région du trou noir (II) est la région d’où l’on ne peut envoyer de signal à l’infini. La région du “trou blanc” (IV) est la région d’où l’on ne peut recevoir de signal de l’infini.

Les cônes de lumière dans le diagramme de Kruskal-Szekeres sont à  $45^\circ$  exactement comme pour l’espace-temps de Minkowski. Ceci permet de bien comprendre la structure causale de l’espace-temps. En particulier, on voit que les deux singularités  $r = 0$  de Schwarzschild sont du genre *espace* et que les horizons “futur” et “passé”  $r = 2M, t = \pm\infty$  sont du genre *lumière*.

L’espace-temps de Kruskal-Szekeres est une solution exacte des équations d’Einstein du vide qui représente ce qu’on appelle l’extension maximale de l’espace-temps initial de Schwarzschild (11.4). Celui-ci n’était en fait qu’une partie de l’espace-temps complet, la région (I). De même, l’espace-temps de Eddington-Finkelstein ne représentait que les régions (I) et (II).

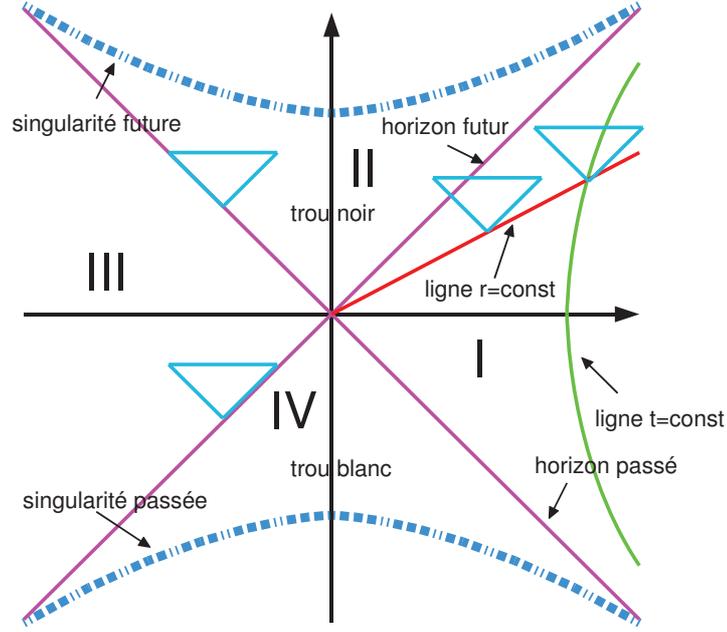


FIG. 37: L'extension maximale du trou noir de Schwarzschild.

## XII. DYNAMIQUE DES TROUS NOIRS

Sous le vocable de dynamique des trous noirs, on regroupe les phénomènes d'interaction et d'échanges d'énergie de trous noirs chargés et en rotation avec un environnement extérieur et/ou entre eux.

### A. Le trou noir de Kerr-Newman

Le trou noir de Schwarzschild (11.4) n'est qu'un cas particulier de trous noirs plus généraux. Le théorème suivant est appelé théorème d'unicité des trous noirs (Carter et Israel, années 1960).

**Théorème.** *Le trou noir le plus général, qui est solution du système couplé d'Einstein-Maxwell,<sup>30</sup> et qui soit stationnaire, est donné par la métrique*

$$ds^2 = -\frac{\Delta}{\rho^2} [dt - a \sin^2 \theta d\varphi]^2 + \frac{\sin^2 \theta}{\rho^2} [(r^2 + a^2)d\varphi - a dt]^2 + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \rho^2 d\theta^2, \quad (12.1)$$

Dans (12.1) on a posé

$$\Delta = r^2 - 2Mr + a^2 + Q^2, \quad (12.2a)$$

<sup>30</sup> C'est-à-dire  $R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R = 8\pi T^{\mu\nu}$ , où le tenseur d'énergie-impulsion du champ électromagnétique est donné par  $T^{\mu\nu} = F^{\mu\rho}F^{\nu}_{\rho} - \frac{1}{4}g^{\mu\nu}F^{\rho\sigma}F_{\rho\sigma}$ .

$$\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta . \quad (12.2b)$$

La métrique (12.1) avec (12.2) décrit en fait une famille de trous noirs, dits de Kerr-Newman, dépendante de 3 paramètres  $M$ ,  $Q$  et  $J$  qui sont:

1. La masse totale  $M$  du trou noir,
2. La charge électrique totale  $Q$ ,
3. Le moment cinétique total  $J$ .

Le paramètre  $a$  désigne le moment cinétique par unité de masse,

$$a = \frac{J}{M} . \quad (12.3)$$

Le trou noir de Kerr-Newman est donc un trou noir *chargé* et en *rotation*. Il possède une singularité de courbure à  $r = 0$  (qui a une structure plus compliquée que celle du trou noir de Schwarzschild), et un horizon donné par  $\Delta(r) = 0$ , c'est-à-dire par la surface d'équation  $r = r_+$  où

$$r_+ = M + \sqrt{M^2 - a^2 - Q^2} . \quad (12.4)$$

(Il existe aussi un autre horizon  $r = r_- = M - \sqrt{M^2 - a^2 - Q^2}$ , qui correspond à l'autre solution de  $\Delta(r) = 0$  et qui apparaît dans l'extension maximale du trou noir.) Pour que la métrique ait un horizon, et donc pour qu'elle représente un trou noir, il faut que les 3 paramètres  $M$ ,  $Q$ ,  $a$  satisfassent à la contrainte<sup>31</sup>

$$\boxed{a^2 + Q^2 \leq M^2} . \quad (12.5)$$

Quand  $a^2 + Q^2 = M^2$ , le trou noir est dit *maximal*.

Si  $Q = a = 0$ , la métrique (12.1) se réduit à la métrique de Schwarzschild (11.4). Si  $a = 0$ , on obtient la métrique de Reissner-Nordstrøm (découverte dans les années 20) qui décrit un trou noir statique et chargé. Si  $Q = 0$ , on obtient la métrique de Kerr (1963) qui décrit un trou noir non chargé et en rotation. Finalement, si  $M = Q = 0$  on retrouve la métrique plate de Minkowski mais dans un système de coordonnées dites sphéroïdales qui est différent des coordonnées sphériques habituelles.

## B. Ergosphère du trou noir en rotation

Pour un trou noir en rotation ( $a \neq 0$ ), il existe une région très intéressante autour du trou noir, qui est appelée *ergosphère* car c'est une région d'où l'on peut extraire de l'énergie du trou noir. L'ergosphère est délimitée à l'intérieur par l'horizon  $r = r_+$  et à l'extérieur par la surface  $r = r_0(\theta)$ . Cette dernière surface est appelée la *limite de staticité* et est telle que  $g_{tt} = 0$  dans (12.1). On calcule

$$r_0(\theta) = M + \sqrt{M^2 - Q^2 - a^2 \cos^2 \theta} . \quad (12.6)$$

<sup>31</sup> Cette inégalité est écrite dans les unités dites géométriques  $G = c = 4\pi\epsilon_0 = 1$  (auxquelles on peut rajouter  $\hbar = h/2\pi = 1$  pour des problèmes impliquant la mécanique quantique, et  $k = 1$  pour la physique statistique).

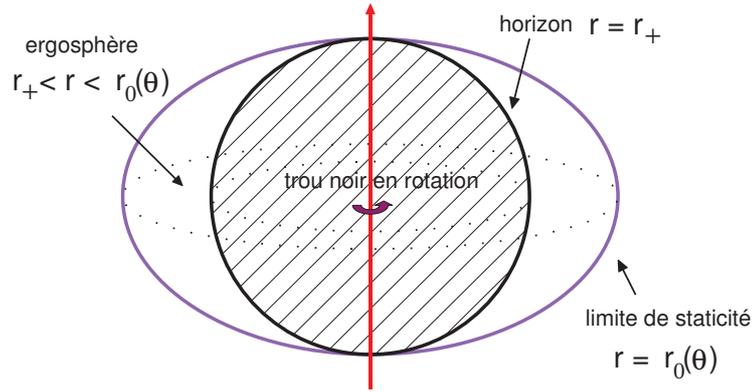


FIG. 38: L'ergosphère du trou noir en rotation.

A l'intérieur de la limite de staticité (12.6) un observateur ne peut rester immobile et est nécessairement entraîné par la rotation du trou noir dans le sens de la rotation, quelle que soit l'accélération qu'il essaie d'imprimer dans le sens contraire. Même si l'observateur essaie d'inverser ce mouvement d'entraînement par la rotation du trou noir à l'aide de fusées, quelque soit la puissance de ces fusées, il ne pourra jamais rester "statique". Cet effet peut être vu comme un cas extrême du principe de Mach (§ 1.3) selon lequel les masses en rotation entraînent avec elles les référentiels localement inertiels. Un schéma illustrant la structure de l'espace-temps au voisinage de l'ergosphère par les cônes de lumière vus "du dessus" sur l'axe des temps de l'espace-temps — on suppose que la dimension spatiale supprimée est  $\theta$  qui repère la position de l'axe de rotation  $\theta = 0$  — permet de mieux comprendre l'effet. Au

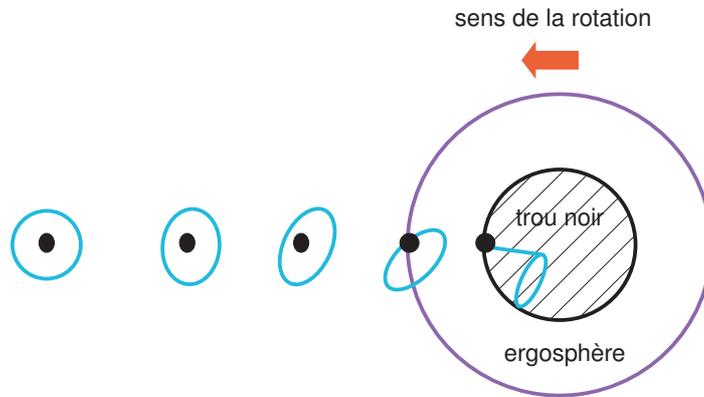


FIG. 39: L'ergosphère du trou noir en rotation.

fur et à mesure que l'on se rapproche du trou noir, les cônes de lumière sont de plus en plus incurvés vers la singularité centrale (comme pour le trou noir de Schwarzschild, cf. Fig. 36) mais, en plus, ils sont de plus en plus inclinés dans le sens de rotation du trou noir. A la limite de staticité, le vertex du cône de lumière vu du dessus (qui est indiqué par un point), sort du cône: les observateurs ne peuvent donc plus rester immobiles. A l'horizon le cône devient intérieur à l'horizon: tous les observateurs et les photons tombent vers la singularité.

### C. Le mécanisme de Penrose

L'ergosphère doit son nom au fait que cette région apparaît comme un réservoir d'énergie qu'il est, en principe, possible d'extraire. Ceci peut se montrer grâce à une expérience de pensée due à Penrose (1969). On lance, depuis l'infini, une particule test  $A$ , d'énergie  $E_A > 0$ , dans l'ergosphère du trou noir où on la fait exploser en deux particules  $B$  et  $C$ , avec (par conservation de l'énergie)  $E_A = E_B + E_C$ , de sorte que la particule  $B$  plonge dans l'horizon du trou noir et que la particule  $C$  ressorte de l'ergosphère et reparte à l'infini.

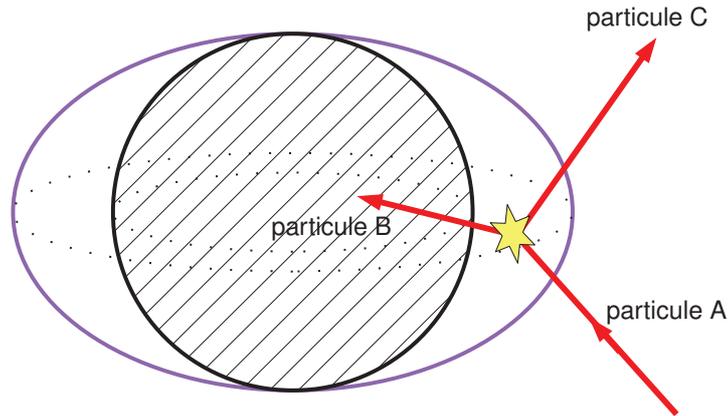


FIG. 40: Le mécanisme de Penrose.

Or on peut montrer que, dans l'ergosphère, l'énergie d'une particule peut être *négative* sur certaines orbites (qui restent confinées dans l'ergosphère). Ceci est directement lié au fait que dans l'ergosphère l'axe des temps "sort" du cône de lumière (voir le dernier schéma de § 11.2) et devient ainsi en fait du genre espace. Donc, en réglant judicieusement l'explosion de la particule  $A$  dans l'ergosphère, on peut s'arranger pour que la particule  $B$  plongeant dans le trou noir emprunte une orbite d'énergie négative,  $E_B < 0$ . La particule  $C$  qui repart à l'infini aura alors une énergie supérieure à celle qu'avait la particule  $A$  au départ,

$$E_C = E_A - E_B > E_A . \quad (12.7)$$

On a donc par ce mécanisme extrait de l'énergie au trou noir, et ainsi fait *décroître* sa masse  $M$ . Par conservation d'énergie, on aura la variation de masse du trou noir

$$\delta M = -\frac{1}{c^2}(E_C - E_A) . \quad (12.8)$$

### D. La formule de masse des trous noirs

Soit un trou noir de masse  $M$ , de charge  $Q$  et de moment cinétique  $J$  en interaction avec un environnement formé de particules comme dans le mécanisme de Penrose. Alors  $M$ ,  $Q$  et  $J$  subissent des variations  $\delta M$ ,  $\delta Q$  et  $\delta J$  à chaque fois que l'une des particules traverse l'horizon du trou noir. D'après ce que l'on a vu, on pourra avoir  $\delta M < 0$  pour certaines trajectoires de particules dans l'ergosphère, comme dans (12.8). Cependant, Christodoulou et Ruffini (1971) ont montré que la variation  $\delta M$  ne peut pas prendre des valeurs négatives

et arbitrairement grandes (certaines variations  $\delta J$  et  $\delta Q$  étant données), mais est limitée par une borne inférieure. Plus précisément, on a

$$\delta M \geq \frac{a \delta J + r_+ Q \delta Q}{r_+^2 + a^2}, \quad (12.9)$$

où  $r_+$  est donné par (12.4). De plus, on peut vérifier que cette inégalité se réécrit de façon équivalente en

$$\delta M_{\text{irr}} \geq 0, \quad (12.10)$$

(avec  $\delta M_{\text{irr}} = 0$  pour une transformation réversible) où  $M_{\text{irr}}$  est ce que l'on appelle la *masse irréductible* du trou noir qui est donnée par

$$M_{\text{irr}} = \frac{1}{2} \sqrt{r_+^2 + a^2} = \frac{1}{2} \left[ (M + \sqrt{M^2 - Q^2 - a^2})^2 + a^2 \right]^{1/2}. \quad (12.11)$$

Ainsi, dans un processus d'interaction du trou noir avec un environnement de particules, la masse irréductible augmente toujours au cours du temps.

La formule dite de masse des trous noirs, due à Christodoulou, s'obtient en calculant  $M$  en fonction de  $M_{\text{irr}}$  d'après (12.11). On trouve

$$\boxed{M^2 = \left( M_{\text{irr}} + \frac{Q^2}{4M_{\text{irr}}} \right)^2 + \frac{J^2}{4M_{\text{irr}}^2}}. \quad (12.12)$$

Cette formule clarifie la façon dont la masse-énergie  $M$  du trou noir se décompose en sa masse-énergie irréductible  $M_{\text{irr}}$  et en des énergies d'origine électromagnétique, *cf.* le terme  $Q^2/4M_{\text{irr}}$ , et rotationnelle, terme  $J^2/4M_{\text{irr}}^2$ . Notons que ces différentes énergies ne s'additionnent pas linéairement dans (12.12). On peut montrer que l'on peut extraire du trou noir jusqu'à 29% de sa masse-énergie sous forme rotationnelle, et jusqu'à 50% de sa masse-énergie sous forme électromagnétique. Lorsque toute l'énergie du trou noir de Kerr-Newman a été extraite, celui-ci devient un trou noir "mort" de Schwarzschild, ayant la masse irréductible  $M_{\text{irr}}$ .

### E. Théorème de Hawking

Un calcul direct montre que l'aire  $\mathcal{A}$  de la surface de l'horizon  $r = r_+$  du trou noir (à un instant  $t$  donné) est reliée à la masse irréductible  $M_{\text{irr}}$  par

$$\mathcal{A} = 16\pi M_{\text{irr}}^2. \quad (12.13)$$

**Exercice.** Démontrer (12.13) en utilisant l'expression de l'aire  $\mathcal{A} = \int \sqrt{\gamma} d\theta d\varphi$  où  $\gamma = g_{\theta\theta}g_{\varphi\varphi} - g_{\theta\varphi}^2$  est le déterminant de la métrique spatiale à l'horizon. On déduira (12.13) en utilisant les coefficients métriques (12.1).

Ainsi, le résultat de § 11.4 montre que dans un processus d'interaction du trou noir avec un environnement (de particules) l'aire de l'horizon du trou noir est une fonction croissante du temps:  $\mathcal{A} \nearrow$ . Ceci est un cas particulier d'un théorème général de Hawking (1976).

**Théoreme.** Dans un processus quelconque d'interaction de un ou plusieurs trous noirs entre eux et/ou avec un environnement, la somme des aires des surfaces des horizons des trous noirs est une fonction croissante du temps,

$$\sum_j \mathcal{A}_j \nearrow . \quad (12.14)$$

Par exemple considérons la coalescence de deux trous noirs 1 et 2 pour former un trou noir 3. Alors on doit avoir  $\mathcal{A}_3 > \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2$ .

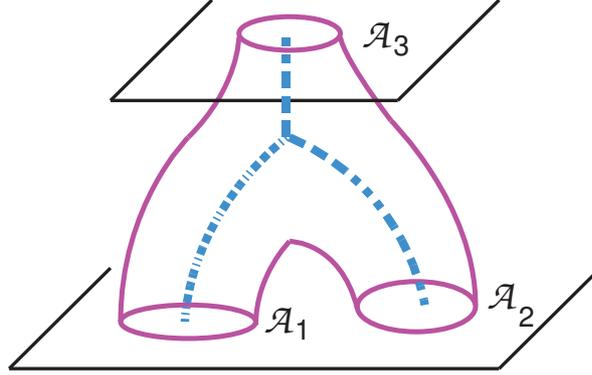


FIG. 41: Deux trous noirs en interaction.

### F. Évaporation quantique des trous noirs

D'après le théorème de Hawking, l'aire de l'horizon d'un trou noir ne peut jamais décroître. Mais ce résultat a été obtenu en relativité générale classique, où les champs ne sont pas quantifiés. Or, Hawking (1976) a aussi montré que, à cause d'effets *quantiques* (propagation de champs quantiques dans l'espace-temps classique du trou noir), un trou noir doit nécessairement rayonner avec un spectre de Planck, c'est-à-dire comme un corps noir, dont la température est donnée par

$$T = \frac{\hbar}{2\pi} g , \quad (12.15)$$

où  $g$  est la gravité de surface sur l'horizon du trou noir. Par exemple, la gravité de surface est  $g = M/r_g^2 = M/(2M)^2 = 1/(4M)$  dans le cas d'un trou noir de Schwarzschild. Dans (12.15) on fait  $k = 1$  où  $k$  est la constante de Boltzmann.

Ainsi, quantiquement, l'aire de l'horizon d'un trou noir isolé *décroît* jusqu'à ce que le trou noir disparaisse complètement. C'est le phénomène d'évaporation quantique du trou noir. Les temps typiques d'évaporation sont cependant extrêmement longs pour des trous noirs ordinaires car la température de Hawking (12.15) est extrêmement basse,

$$T = (6 \cdot 10^{-8} K) \left( \frac{M}{M_\odot} \right)^{-1} , \quad (12.16)$$

dans le cas d'un trou noir de Schwarzschild. Ce n'est que dans le cas de trous noirs de très petite masse (des "mini-trous noirs" qui pourraient être produits dans l'univers primordial) que le phénomène d'évaporation quantique devient important.

L'évaporation quantique du trou noir peut s'expliquer heuristiquement de la façon suivante. Considérons les fluctuations quantiques du vide d'un champ quantique de masse  $m$  se propageant au voisinage de l'horizon du trou noir (on se limite au cas d'un champ massif).

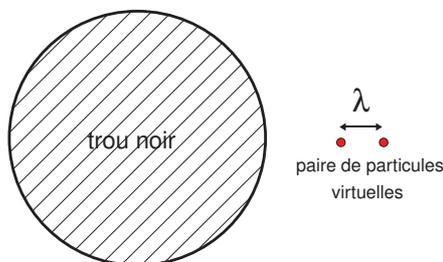


FIG. 42: Création de paire par un trou noir.

La séparation entre la particule et l'antiparticule d'une paire virtuelle du champ quantique est typiquement de l'ordre de la longueur de Compton

$$\lambda \sim \frac{\hbar}{m} . \quad (12.17)$$

L'énergie potentielle fournie par le champ de gravitation du trou noir à la paire virtuelle est typiquement

$$E \sim m g \lambda , \quad (12.18)$$

où  $g$  est la gravité de surface du trou noir. Il y aura création de paire par le champ de gravitation si  $E \geq 2m$ . Donc la masse des particules qui peuvent être créées par le champ n'excède pas la valeur supérieure  $m_{\text{sup}} \sim \hbar g$ . Maintenant on peut imaginer (de façon heuristique)

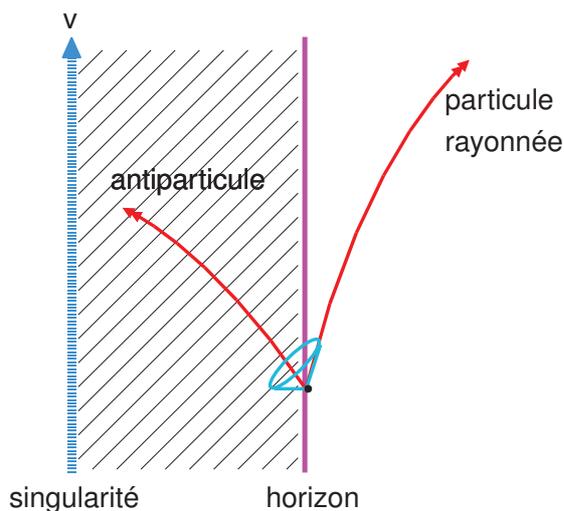


FIG. 43: Évaporation quantique d'un trou noir.

que, près de l'horizon, l'anti-particule créée tombe dans le trou noir et que la particule est rayonnée à l'infini. Alors la température du rayonnement à l'infini sera essentiellement celle associée à la plus grande masse créée, c'est-à-dire  $T \sim m_{\text{sup}}$ . On aura donc un rayonnement de température

$$T \sim \hbar g , \quad (12.19)$$

ce qui donne, en ordre de grandeur, la valeur (12.15) obtenue par Hawking.

### G. Thermodynamique des trous noirs

Soit un processus d'interaction d'un trou noir  $Q, J, \mathcal{A}$  (où  $\mathcal{A}$  est l'aire de l'horizon) avec un environnement, et soient  $\delta Q, \delta J, \delta \mathcal{A}$  les variations de  $Q, J, \mathcal{A}$  au cours du processus ( $\delta \mathcal{A} \geq 0$  par le théorème de Hawking). Alors en différentiant la formule de Christodoulou (12.12) dans laquelle on utilise (12.13), on obtient

$$\delta M = \Omega \delta J + \Phi \delta Q + \frac{g}{8\pi} \delta \mathcal{A} , \quad (12.20)$$

où  $\Omega$  et  $\Phi$  sont certaines expressions de  $J, Q, \mathcal{A}$  et où  $g$  est la gravité de surface du trou noir. Par analogie avec la 2<sup>ème</sup> loi de la thermodynamique, on est extrêmement tenté d'interpréter  $\Omega$  et  $\Phi$  respectivement comme la vitesse angulaire et le potentiel électrique du trou noir. Alors pour avoir une analogie complète avec la thermodynamique le dernier terme dans l'expression de  $\delta M$  devrait être le  $T \delta S$  habituel de la thermodynamique, soit

$$\frac{g}{8\pi} \delta \mathcal{A} = T \delta S . \quad (12.21)$$

Or on a vu que le trou noir rayonne quantiquement comme un corps noir à la température  $T = \hbar g / 2\pi$ , voir (12.15). On est donc conduit à associer au trou noir une *entropie*  $S$  donnée en fonction de l'aire de l'horizon  $\mathcal{A}$  par

$$\boxed{S = \frac{\mathcal{A}}{4\hbar}} . \quad (12.22)$$

Alors le théorème de Hawking  $\sum_j \mathcal{A}_j \nearrow$  s'interprète simplement comme le fait que l'entropie d'un ensemble de trous noirs augmente toujours au cours du temps,

$$\sum_j S_j \nearrow , \quad (12.23)$$

en accord avec le deuxième principe de la thermodynamique. Le fait que l'aire du trou noir joue le rôle d'une entropie avait été proposé par Beckenstein en 1972, mais ce n'est qu'avec la découverte du rayonnement de Hawking en 1976 que cette idée fut complètement justifiée et que l'on a pu calculer le coefficient  $1/4$  dans (12.22).

Il est probable que l'entropie du trou noir telle qu'elle vient d'être définie joue pour le trou noir exactement le même rôle que l'entropie statistique pour les systèmes thermodynamiques habituels. Comme en physique statistique on s'attend à ce que  $S$  admette une interprétation microscopique, avec  $S = k \ln W$  où  $W$  représente le nombre de façons distinctes (en mécanique quantique) de fabriquer un trou noir donné à partir de particules séparées. La température du trou noir peut donc s'interpréter classiquement. En particulier, on prévoit qu'un trou noir de température de Hawking  $T$  donnée par (12.15), et placé dans un bain thermique de température  $T_{\text{Th}}$ , doit baisser sa température en absorbant du rayonnement, ou doit augmenter sa température en rayonnant (quantiquement) jusqu'à ce que  $T$  égale  $T_{\text{Th}}$ .

### **XIII. BIBLIOGRAPHIE**

#### 1. Culture générale:

- La Science et l'Hypothèse, H. Poincaré, (Flammarion),
- Les trois premières minutes, S. Weinberg, (Flamingo),
- Les enfants d'Einstein, C.M. Will, (Inter Editions),
- A brief History of Time, S. Hawking, (Adam Hilger).

#### 2. Relativité restreinte:

- Cours de physique de Berkeley, Mécanique, pp. 310-425, (A. Colin),
- Gravitation and Cosmology, S. Weinberg, Chapitre 2, (Wiley).

#### 3. Relativité générale:

- Théorie des champs, L.N. Landau et E.M. Lifchitz, chapitres X, XI et XII, (Mir),
- Gravitation and Cosmology, S. Weinberg, (Wiley),
- Gravitation, C.W. Misner, K.S. Thorne and J.A. Wheeler, (Freeman),
- General Relativity, R.M. Wald, (U. of Chicago Press).