

Quelques rappels sur les condensats

- **Description en termes de champ moyen**
- **Longueurs caractéristiques**
- **Différents régimes**
- **Nuage thermique**
- **Comment sonder le condensat**
- **Modes de vibration du condensat sphérique**
- **Problèmes physiques**

Condensation de Bose-Einstein pour un gaz parfait

N bosons confinés dans un piège harmonique

(Fréquences de vibration $\omega_{0x}, \omega_{0y}, \omega_{0z}$)

Température critique T_C

$$k_B T_C = 0.94 \hbar \bar{\omega}_0 N^{1/3} \quad (1.1)$$

$$\bar{\omega}_0^3 = \omega_{0x} \omega_{0y} \omega_{0z} \quad (1.2)$$

Pour $T < T_C$, un nombre macroscopique de bosons se condense dans l'état fondamental du piège

$$N \gg 1 \quad \rightarrow \quad k_B T_C \gg \hbar \bar{\omega}_0$$

La condensation n'est pas un effet thermique trivial

Bosons en interaction

Hamiltonien H

$$H = \sum_{i=1}^N \left[\frac{\vec{p}_i^2}{2m} + V_{\text{ext}}(\vec{r}_i) \right] + \frac{1}{2} \sum_i \sum_{j \neq i} V(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) \quad (1.3)$$

$$V(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) = g \delta(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \quad (1.4)$$

$$g = \frac{4\pi\hbar^2}{m} a \quad (1.5)$$

a : Longueur de diffusion

$g \delta(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|)$: pseudopotentiel

Etat fondamental de H

Approximation par un état produit où tous les bosons sont dans le même état φ

$$|\psi\rangle = |\varphi(1)\rangle |\varphi(2)\rangle \dots \dots \dots |\varphi(N)\rangle \quad (1.6)$$

Quel est le meilleur état φ ?

Equation de Gross-Pitaevskii

Meilleur φ : celui qui minimise $\langle \psi | H | \psi \rangle / \langle \psi | \psi \rangle$

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V_{\text{ext}}(\vec{r}) \right] \varphi(\vec{r}) + (N-1) g |\varphi(\vec{r})|^2 \varphi(\vec{r}) = \mu \varphi(\vec{r}) \quad (1.7)$$

$\langle \varphi | \varphi \rangle = 1$ μ : potentiel chimique $N-1 \simeq N$

Chaque boson se déplace dans le potentiel de piégeage V_{ext} et dans le champ moyen créé par les $N-1$ autres

Equation de Gross-Pitaevskii dépendant du temps

$$i \hbar \frac{\partial}{\partial t} \varphi(\vec{r}, t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V_{\text{ext}}(\vec{r}, t) \right] \varphi(\vec{r}, t) + N g |\varphi(\vec{r}, t)|^2 \varphi(\vec{r}, t) \quad (1.8)$$

Linéarisation de l'équation de Gross-Pitaevskii

$$V_{\text{ext}}(\vec{r}, t) = V_0(\vec{r}) + \delta V(\vec{r}, t) \qquad H_0 = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V_0(\vec{r})$$

$\varphi_0(\vec{r})$: solution de l'équation de G-P pour $V_{\text{ext}}(\vec{r}, t) = V_0(\vec{r})$

$$\varphi(\vec{r}, t) = \tilde{\varphi}(\vec{r}, t) \exp(-i\mu t / \hbar)$$

$$\tilde{\varphi}(\vec{r}, t) = \varphi_0(\vec{r}) + \delta\varphi(\vec{r}, t) \qquad (1.9)$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \delta\varphi \\ \delta\varphi^* \end{pmatrix} = L_{GP} \begin{pmatrix} \delta\varphi \\ \delta\varphi^* \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \delta V \varphi_0 \\ -\delta V \varphi_0^* \end{pmatrix} \qquad (1.10)$$

$$L_{GP} = \begin{pmatrix} H_0 - \mu + 2Ng|\varphi_0|^2 & Ng\varphi_0^2 \\ -Ng(\varphi_0^*)^2 & -(H_0 - \mu + 2Ng|\varphi_0|^2) \end{pmatrix} \qquad (1.11)$$

Equations de Bogolubov-de Gennes

Autre forme équivalente de l'équation de Gross-Pitaevskii

$$\varphi(\vec{r}, t) = \sqrt{\rho(\vec{r}, t)} \exp [iS(\vec{r}, t)] \quad (1.12)$$

$\sqrt{\rho}$: module de φ S : phase

1 – Equation de continuité

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \vec{\nabla} \cdot \left[\rho \left(\frac{\hbar}{m} \vec{\nabla} S \right) \right] = 0 \quad (1.13)$$

Interprétation de $(\hbar / m) \vec{\nabla} S(\vec{r}, t)$ comme
un champ de vitesses $\vec{v}(\vec{r}, t)$

$$\vec{v}(\vec{r}, t) = \frac{\hbar}{m} \vec{\nabla} S(\vec{r}, t) \quad (1.14)$$

Champ irrotationnel : $\vec{\nabla} \times \vec{v} = \vec{0}$
sauf en des singularités (vortex)

Autre forme équivalente de l'équation de Gross-Pitaevskii (suite)

2 – Equation du mouvement du champ de vitesses

$$\hbar \frac{\partial}{\partial t} S = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\sqrt{\rho}} \Delta \sqrt{\rho} - \frac{\hbar^2}{2m} (\vec{\nabla} S)^2 - V_{\text{ext}} - g\rho \quad (1.15)$$

$$m \frac{\partial}{\partial t} \vec{v} = \vec{\nabla} \left[\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\sqrt{\rho}} \Delta \sqrt{\rho} - \frac{\hbar^2}{2m} (\vec{\nabla} S)^2 - V_{\text{ext}} - g\rho \right] \quad (1.16)$$

Analogie avec des équations hydrodynamiques.
Ici, le comportement hydrodynamique n'est pas dû
aux collisions, mais au champ moyen.

$$\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\sqrt{\rho}} \Delta \sqrt{\rho} : \text{« Terme de pression quantique »}$$

Longueurs caractéristiques

Longueur de diffusion a

Portée des interactions

Longueur de relaxation ξ ("Healing length")

Distance ξ pour laquelle l'énergie cinétique de confinement $\hbar^2 / 2m \xi^2$ est de l'ordre de l'énergie d'interaction $g \rho_0$ (ρ_0 : densité spatiale)

$$\xi = \frac{\hbar}{\sqrt{2m g \rho_0}} = \frac{1}{\sqrt{8\pi a \rho_0}} \quad (1.17)$$

Extension spatiale σ_0 de l'état fondamental du piège

$$\sigma_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m \omega_0}} \quad (1.18)$$

Limite de Thomas-Fermi

L'énergie cinétique de confinement dans l'état fondamental du piège est petite devant l'énergie d'interaction

$$\frac{\hbar^2}{2m\sigma_0^2} \ll g\rho_0 \simeq g \frac{N}{\sigma_0^3} = \frac{4\pi\hbar^2}{m} \frac{aN}{\sigma_0^3}$$
$$\frac{aN}{\sigma_0} \gg 1 \tag{1.19}$$

On peut alors négliger le terme d'énergie cinétique dans l'équation de G-P.

Cette équation devient une équation algébrique.

Forme du condensat à la limite de Thomas-Fermi

Forme de paraboloïde inversé pour $\rho(\vec{r})$

$$\rho(\vec{r}) = N |\varphi(\vec{r})|^2 = \frac{1}{g} \left[\mu - \frac{1}{2} m (\omega_{0x}^2 x^2 + \omega_{0y}^2 y^2 + \omega_{0z}^2 z^2) \right] \quad (1.20)$$

Dépendances en N

- ◆ du potentiel chimique μ : $\mu \propto N^{2/5}$
- ◆ du rayon du condensat R : $R \propto N^{1/5}$

La condition $a N / \sigma_0 \gg 1$ définissant la limite de T-F n'est pas incompatible avec

$$a^3 \rho_0 \simeq a^3 \frac{N}{\sigma_0^3} \ll 1$$

définissant un milieu dilué.

Equations hydrodynamiques à la limite de Thomas-Fermi

On peut négliger le terme de pression quantique dans l'équation d'évolution de \vec{v}

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \\ m \frac{\partial}{\partial t} \vec{v} + \vec{\nabla} \left[\frac{1}{2} m \vec{v}^2 + V_{\text{ext}} + g \rho \right] = \vec{0} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (1.21 \text{ a}) \\ (1.21 \text{ b}) \end{array}$$

La seconde équation à la forme de l'équation d'Euler de l'hydrodynamique

$$m \frac{\partial}{\partial t} \vec{v} + \vec{\nabla} \frac{1}{2} m \vec{v}^2 = m \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{v} = m \frac{d}{dt} \vec{v}$$

Le nuage thermique

Ordre de grandeur des dimensions

$$m \omega_0^2 R_{\text{th}}^2 \simeq k_B T \quad \rightarrow \quad R_{\text{th}}^2 \simeq \frac{k_B T}{m \omega_0^2}$$

Pour $T \simeq T_c$

$$R_{\text{th}}^2 \simeq \frac{k_B T_c}{m \omega_0^2} \simeq \frac{\hbar \omega_0}{m \omega_0^2} N^{1/3} \simeq \sigma_0^2 N^{1/3} \gg \sigma_0^2 \quad (1.22)$$

Le rayon du condensat vaut σ_0 en l'absence d'interactions et varie en $N^{1/5}$ à la limite de T-F.

Effet du champ moyen sur le nuage thermique

En l'absence d'interaction et pour $T \simeq T_c$

L'énergie cinétique et l'énergie potentielle sont égales et de l'ordre de $k_B T_c$

$$E_0 \simeq k_B T_c \simeq \hbar \omega_0 N^{1/3} \simeq m \omega_0^2 R_{\text{th}}^2$$

L'énergie d'interaction due au champ moyen vaut

$$W \simeq g \rho \simeq g \frac{N}{R_{\text{th}}^3}$$

Comparaison de E_0 **et** W

$$\frac{W}{E_0} \simeq \frac{gN}{m \omega_0^2 R_{\text{th}}^5} \simeq \frac{a N^{1/6}}{\sigma_0} \quad (1.23)$$

Effet du champ moyen

Récapitulation

Paramètre caractérisant l'effet du champ moyen

- sur le condensat

$$\chi_{\text{cond}} = \frac{aN}{\sigma_0} \quad (1.24)$$

- sur le nuage thermique

$$\chi_{\text{th}} = \frac{aN^{1/6}}{\sigma_0} \quad (1.25)$$

On peut avoir simultanément

$$\chi_{\text{cond}} \gg 1 \quad \chi_{\text{th}} \ll 1 \quad (1.26)$$

L'effet du champ moyen peut être important pour le condensat tout en restant négligeable pour le nuage thermique.

Collisions entre atomes dans le nuage thermique

- Section efficace de collision

$$\sigma_{\text{coll}} = 8\pi a^2 \quad (1.26)$$

- Libre parcours moyen

$$\ell \simeq \frac{1}{\sigma \rho_0} \quad (1.27)$$

- Temps entre collisions

$$\tau_{\text{coll}} \simeq \frac{\ell}{v} \simeq \frac{1}{\sigma_{\text{coll}} \rho_0 v} \quad (1.28)$$

- Nombre de collisions par période d'oscillation

$$\frac{1}{\omega_0 \tau_{\text{coll}}} \simeq \frac{\sigma_{\text{coll}} \rho_0 v}{\omega_0} \simeq \frac{R_{\text{th}}}{\ell} \propto \left(\frac{a N^{1/3}}{\sigma_0} \right)^2 \quad (1.29)$$

Régime sans collision et régime hydrodynamique

Régime sans collision (balistique)

$$\omega_0 \tau_{\text{coll}} \gg 1 \quad R_{\text{th}} \ll \ell \quad (1.30)$$

Régime hydrodynamique

$$\omega_0 \tau_{\text{coll}} \ll 1 \quad R_{\text{th}} \gg \ell \quad (1.31)$$

Dans le régime hydrodynamique, un équilibre thermodynamique local peut être atteint en chaque point du nuage.

Comment sonder le condensat

1. Diffusion d'une particule sonde

Photon, atome, neutron (pour He liquide)

Transfert au condensat

- d'une énergie $\hbar \omega$
- d'une impulsion $\hbar \vec{q}$

Observation des variations du nombre de particules diffusées quand on fait varier ω (à direction de \vec{q} fixée)

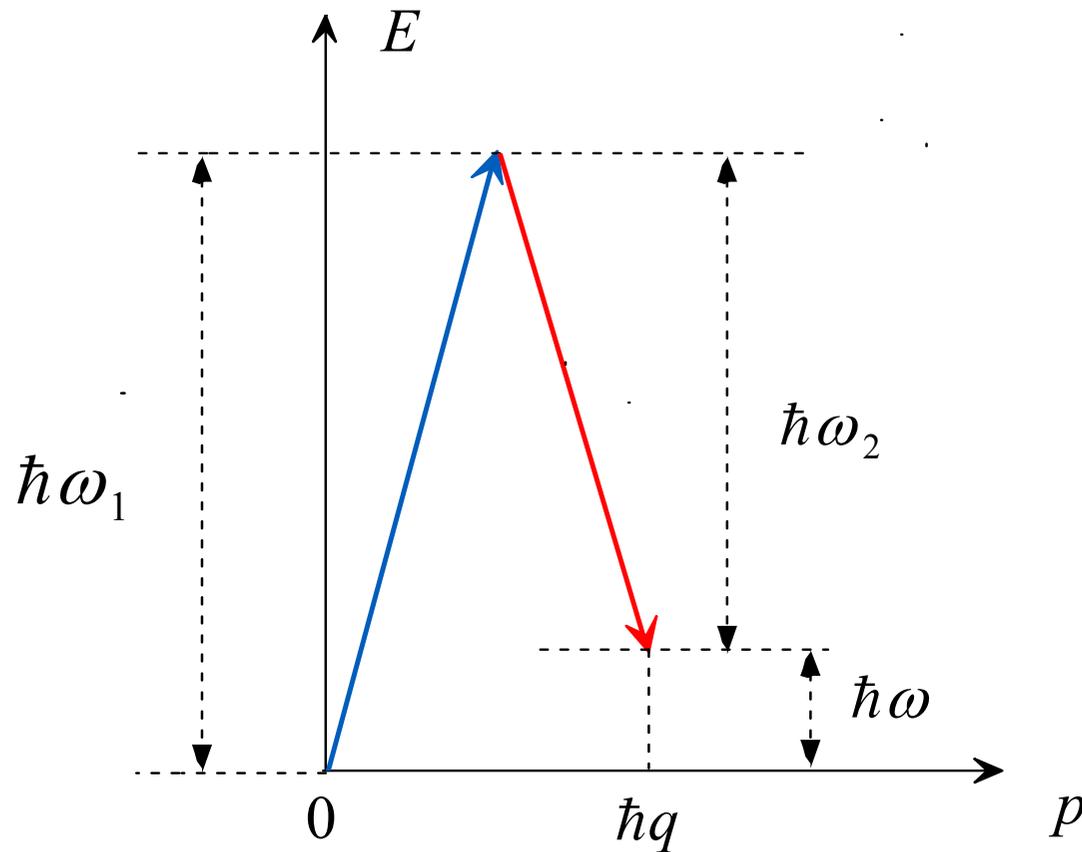
On détermine ainsi le spectre des excitations élémentaires du condensat

Facteur de structure dynamique $S(\vec{q}, \omega)$

Facteur de structure statique $S(\vec{q})$

Exemple : Diffusion de Bragg

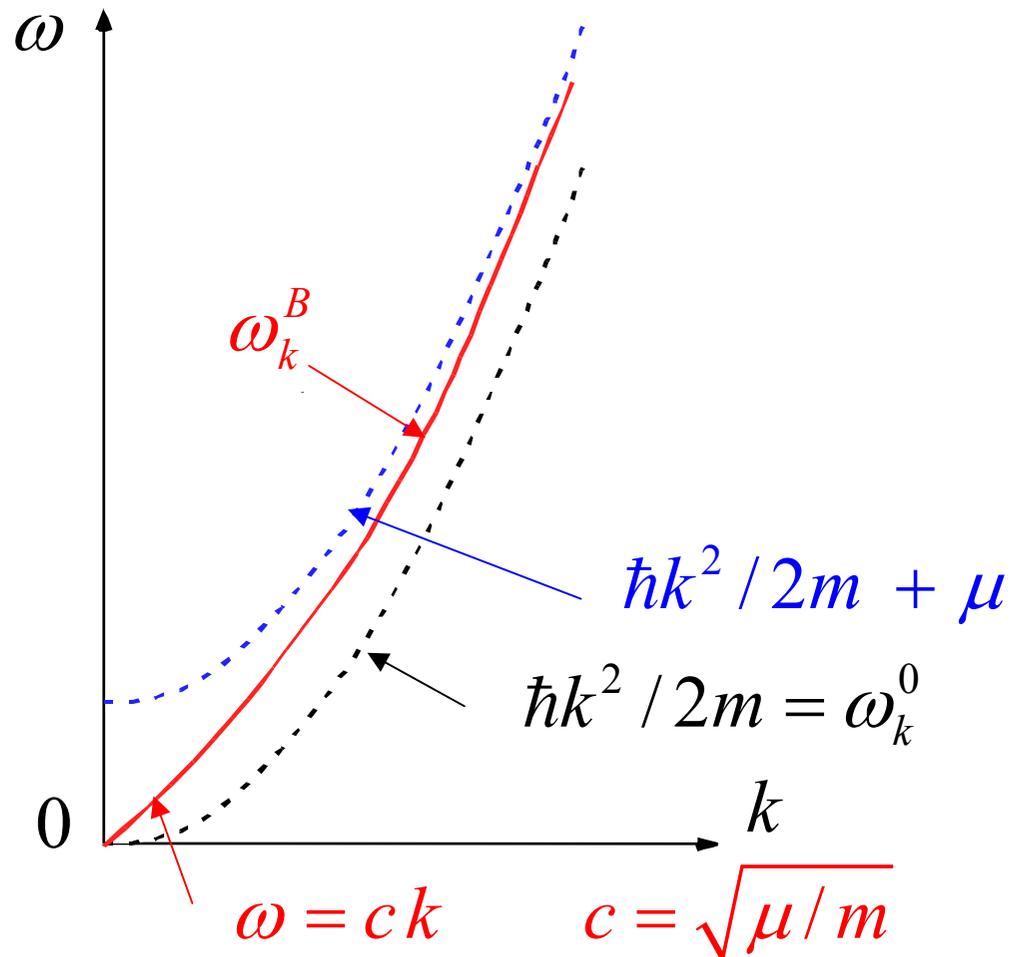
Absorption de \vec{k}_1, ω_1 et émission stimulée de \vec{k}_2, ω_2



Excitations élémentaires d'un condensat homogène

Théorie de Bogolubov

$$\hbar\omega_k^B = \sqrt{\hbar\omega_k^0 (\hbar\omega_k^0 + 2\mu)}$$



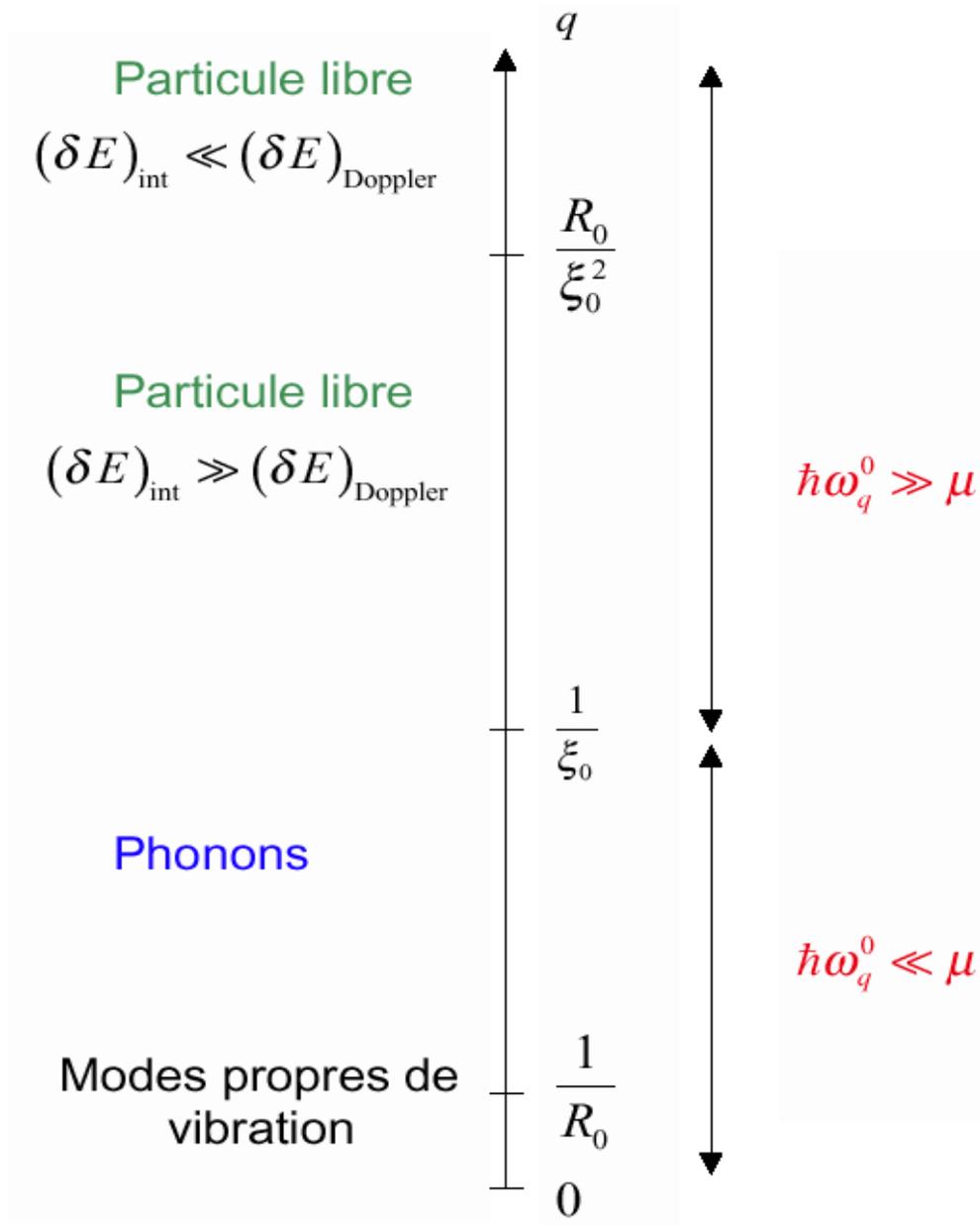
Divers régimes de diffusion suivant la valeur de q

R_0 : rayon du condensat

ξ_0 : Longueur de relaxation

$$(\delta E)_{\text{int}} = \mu$$

$$(\delta E)_{\text{Doppler}} = q \hbar^2 / mR_0$$



Diverses approximations

$q \gg q_D = R_0 / \xi_0^2$ Approximation d'impulsion

$S(\vec{q}, \omega)$ donne accès à la distribution des vitesses dans le condensat

$1/R_0 \ll q \ll q_D$ Approximation de densité locale

Superposition de spectres correspondant à des condensats homogènes. En chaque point \vec{r} , on a un condensat homogène de densité $\rho(\vec{r})$.

Elargissement inhomogène dû à une densité inhomogène spatialement.

$q \simeq q_D$ La largeur Doppler et la largeur due aux interactions s'ajoutent quadratiquement.

Comment sonder le condensat (suite)

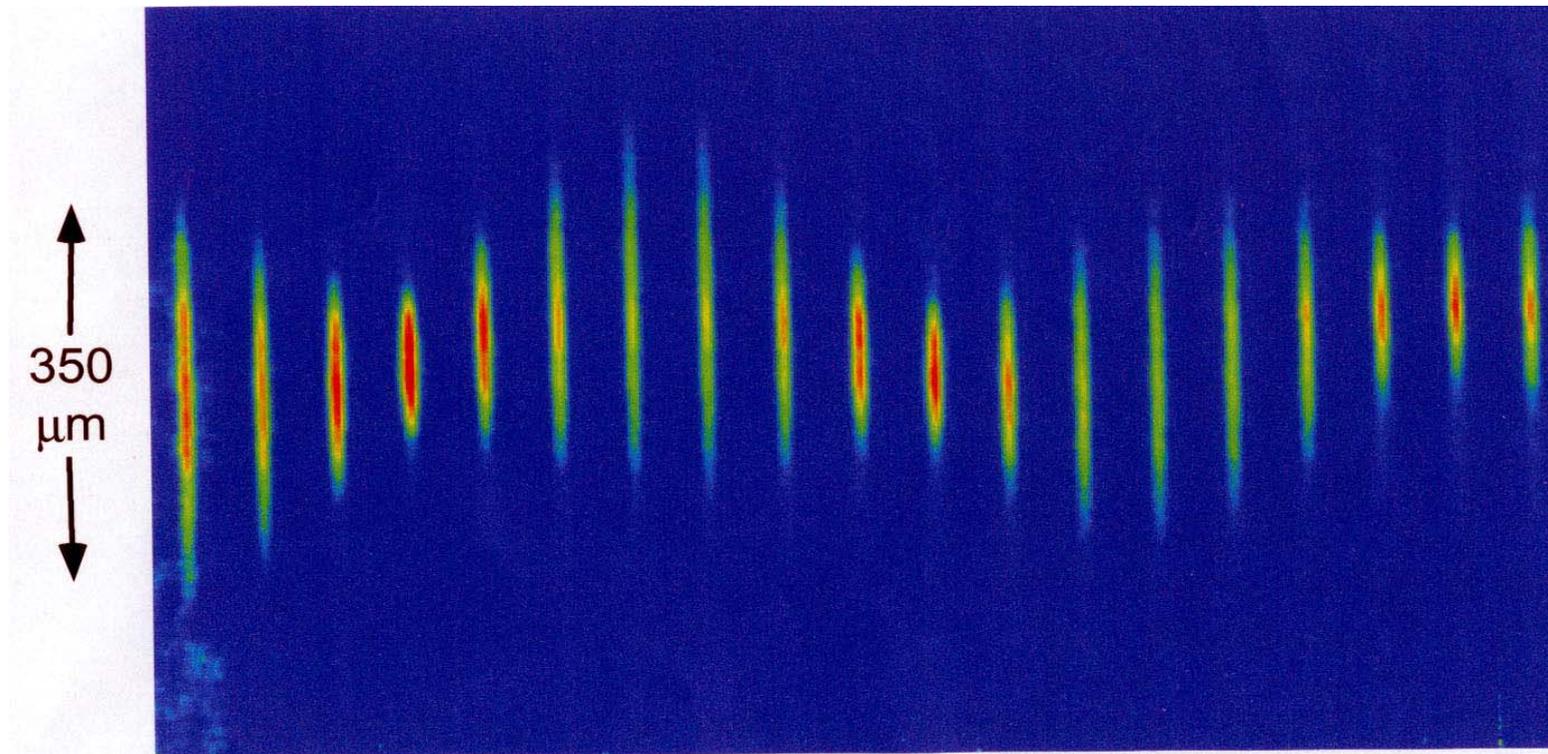
2. Etude des modes propres de vibration

- Excitation de ces modes propres de vibration par modification du potentiel de piégeage
- Mesure précise des fréquences de vibration par imagerie du condensat
 - après expansion balistique (absorption)
 - in situ (dispersion)

Démarche analogue à celle des méthodes d'étude spectroscopiques utilisées en physique atomique.

Détection non destructive des oscillations d'un condensat de sodium

Equipe de W. Ketterle à MIT



1 cliché toutes les 5 millisecondes

Que peut-on apprendre à partir de l'étude des modes propres de vibration

Position des résonances

- Comment change-t-elle avec l'importance des interactions

Transition du régime $\chi_{\text{cond}} \ll 1$ au régime $\chi_{\text{cond}} \gg 1$

- Comparaison avec les modes propres de vibration du nuage thermique

Signature de la condensation

Largeur des résonances

Mécanismes d'amortissement

Manifestations de la superfluidité

Méthodes de calcul des fréquences propres de vibration

- **Résolution numérique des équation de Bogolubov - de Gennes**

Equations valables aussi bien pour

$$\chi_{\text{cond}} \ll 1 \quad \text{que pour } \chi_{\text{cond}} \gg 1$$

- **Utilisation des équations hydrodynamiques pour ρ et \vec{v} (à la limite $\chi_{\text{cond}} \gg 1$)**
- **Introduction de facteurs de dilatation $b_i(t)$ pour un condensat dans un piège harmonique à la limite $\chi_{\text{cond}} \gg 1$**
Equations différentielles non linéaires pour les $b_i(t)$

- **Règles de somme**

Transition entre les régimes $\chi_{\text{cond}} \ll 1$ et $\chi_{\text{cond}} \gg 1$

Rappels sur les modes propres de vibration d'un condensat sphérique (à la limite $\chi_{\text{cond}} \gg 1$)

Linéarisation des équations hydrodynamiques

$$\rho = \rho_0 + \delta\rho \quad \vec{v} = \vec{v}_0 + \delta\vec{v} \quad S = S_0 + \delta S \quad (1.32)$$

$$\rho_0(\vec{r}) = \frac{1}{g} \left(\mu - \frac{1}{2} m \omega_0^2 r^2 \right) \quad \vec{v}_0 = \vec{0} \quad S_0 = -\mu t / \hbar \quad (1.33)$$

Valeurs à l'équilibre

$\delta\rho, \delta\vec{v} = (\hbar/m)\vec{\nabla}\delta S, \delta S$: Ecart à l'équilibre

Au 1^{er} ordre en $\delta\rho, \delta\vec{v}, \delta S$, les équations hydrodynamiques (1.15) (sans terme de pression quantique) et (1.21) deviennent

$$\partial\delta\rho/\partial t + \vec{\nabla} \cdot (\rho_0 \delta\vec{v}) = 0 \quad (1.34 \text{ a})$$

$$\hbar \partial\delta S/\partial t + g \delta\rho = 0 \quad (1.34 \text{ b})$$

$$m \partial\delta\vec{v}/\partial t + g \vec{\nabla} \delta\rho = 0 \quad (1.34 \text{ c})$$

Solution des équations hydrodynamiques linéarisées

S. Stringari, Phys. Rev. Lett. 77, 2360 (1996) – Voir aussi cours 1998-99

En éliminant $\delta\vec{v}$ entre (1.34 a) et (1.34 c), on obtient une équation aux dérivées partielles pour $\delta\rho$ dont on peut chercher les solutions normalisables. On trouve ainsi une série de modes propres de vibration

$$\rho = \rho_0 + \delta\rho_{n_r, \ell m} e^{-i\omega(n_r, \ell)t} + c.c. \quad (1.35)$$

$$\delta\rho_{n_r, \ell m} = P_{n_r, \ell}(r) r^\ell Y_\ell^m(\theta, \varphi) \quad \text{"Mode" } n_r, \ell, m \quad (1.36)$$

$P_{n_r, \ell}(r)$: polynôme pair en r de degré $2n_r$

n_r : nombre de noeuds de la dépendance radiale

$Y_\ell^m(\theta, \varphi)$: Harmonique sphérique

$$\omega(n_r, \ell) = \omega_0 \left[2n_r^2 + 2n_r\ell + 3n_r + \ell \right]^{1/2} \quad (1.37)$$

Ondes de surface : $n_r=0$

Par définition, les ondes de surface correspondent aux modes $n_r = 0, \ell, m$.

Pas de nœud dans la dépendance radiale

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta\rho_{0,\ell,m} = r^\ell Y_\ell^m(\theta, \varphi) \end{array} \right. \quad (1.38 \text{ a})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega(0, \ell) = \omega_0 \sqrt{\ell} \end{array} \right. \quad (1.38 \text{ b})$$

La dénomination « ondes de surface » est justifiée par les propriétés suivantes (démontrées plus loin):

- La densité de chaque élément du condensat est conservée au cours du mouvement de vibration.
- Ces ondes sont analogues aux ondes de gravité

Forme des équations hydrodynamiques linéarisées

L'équation (1.34 b) donne, compte tenu de (1.35) et de (1.38 a) :

$$\delta S = -i \frac{g}{\hbar \omega(0, \ell)} \delta \rho_{0, \ell, m} e^{-i\omega(0, \ell)t} = -i \frac{g}{\hbar \omega(0, \ell)} r^\ell Y_\ell^m e^{-i\omega(0, \ell)t} \quad (1.39)$$

On en déduit :

$$\delta \vec{v} = \frac{\hbar}{m} \vec{\nabla} \delta S = -i \frac{g}{m \omega(0, \ell)} \left(\vec{\nabla} r^\ell Y_\ell^m \right) e^{-i\omega(0, \ell)t} \quad (1.40)$$

Comme $r^\ell Y_\ell^m$ est un polynôme harmonique, $\Delta r^\ell Y_\ell^m = 0$. Donc

$$\vec{\nabla} \cdot \delta \vec{v} = -i \frac{g}{m \omega(0, \ell)} \left(\Delta r^\ell Y_\ell^m \right) e^{-i\omega(0, \ell)t} = 0 \quad (1.41)$$

Le champ de vitesses d'une onde de surface est donc non seulement irrotationnel, mais aussi de divergence nulle.

Forme des équations hydrodynamiques linéarisées (suite)

L'équation (1.34 c) est le gradient de (1.34 b) et n'apporte rien de nouveau. L'équation (1.34 a) donne:

$$\frac{\partial}{\partial t} \delta \rho + (\vec{\nabla} \rho_0) \cdot \delta \vec{v} + \rho_0 (\vec{\nabla} \cdot \delta \vec{v}) = \frac{\partial}{\partial t} \delta \rho + (\vec{\nabla} \rho_0) \cdot \delta \vec{v} = 0 \quad (1.42)$$

D'après (1.33), $\vec{\nabla} \rho_0 = -m \omega_0^2 \vec{r} / g$, et l'équation (1.42) s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial t} \delta \rho - \frac{m}{g} \omega_0^2 \vec{r} \cdot \delta \vec{v} = 0 \quad (1.43)$$

En utilisant $\vec{r} \cdot \vec{\nabla} = r (\partial / \partial r)$, (1.35), (1.38 a) et (1.40), on obtient :

$$\left[-i \omega(0, \ell) + i \frac{\omega_0^2 \ell}{\omega(0, \ell)} \right] r^\ell Y_\ell^m e^{-i \omega(0, \ell) t} = 0 \quad (1.44)$$

qui redonne $\omega(0, \ell) = \omega_0 \sqrt{\ell}$. Nous vérifions ainsi directement que

$$\delta \rho = r^\ell Y_\ell^m e^{-i \omega_0 \sqrt{\ell} t} \quad (1.45)$$

est bien une solution des équations linéarisées

Conservation de la densité

Dans (1.42) on peut remplacer $\delta\rho$ par $\rho = \rho_0 + \delta\rho$ puisque $\partial\rho_0 / \partial t = 0$. Par ailleurs, on peut remplacer $(\vec{\nabla}\rho_0) \cdot \delta\vec{v}$ par $(\vec{\nabla}\rho) \cdot \delta\vec{v}$, en négligeant des termes du 2 ordre en $(\vec{\nabla}\delta\rho) \cdot \delta\vec{v}$ on obtient ainsi :

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\rho = \frac{d}{dt}\rho = 0 \quad (1.46)$$

La dérivée totale de ρ est donc nulle. Quand on se déplace avec un élément du fluide au cours de la vibration, la densité du fluide ne change pas.

Le mouvement de vibration se fait donc à densité constante.
La compressibilité du condensat n'intervient pas.

Analogie avec des ondes de gravité

Les ondes de gravité à la surface de l'eau (sans contribution de la tension superficielle), obéissent à la loi de dispersion:

$$\omega^2 = k g \quad (1.47)$$

où g est l'accélération de la gravité.

(Voir Landau et Lifchitz, Mécanique des fluides, § 12)

Appliquons cette formule à la surface du condensat sphérique de rayon R , où la force extérieure, produite par le potentiel de piégeage vaut:

$$F = m \omega_0^2 R$$

L'équivalent de l'accélération de la gravité est ici le coefficient de m .

Analogie avec des ondes de gravité (suite)

Si l'on remplace dans (1.47) g par $\omega_0^2 R$, on obtient la relation de dispersion :

$$\omega^2 = k \omega_0^2 R \quad (1.48)$$

Introduisons alors l'impulsion

$$p = \hbar k$$

et le moment cinétique

$$R \times p = \ell \hbar$$

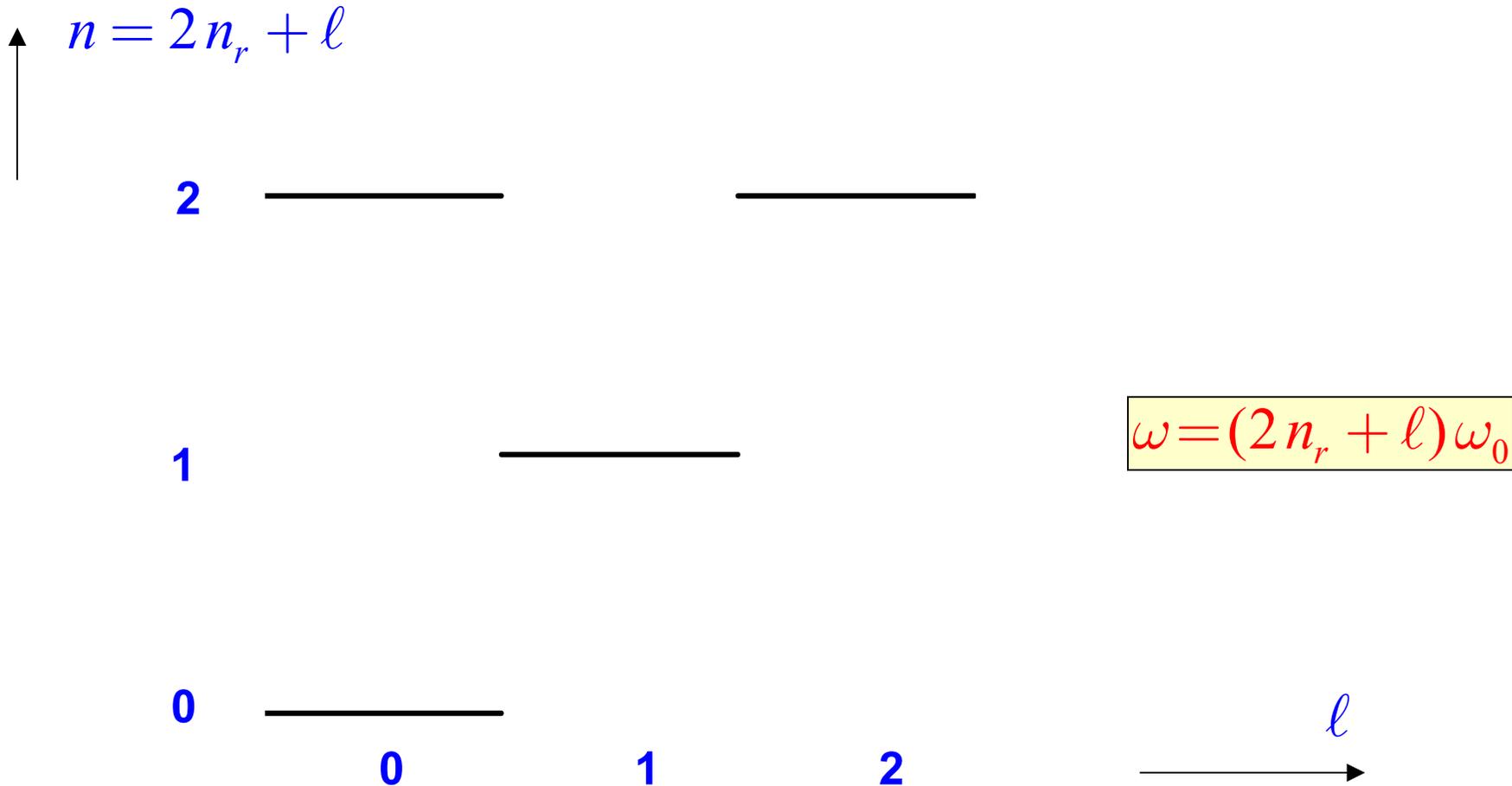
La relation (1.48) peut être réécrite sous la forme

$$\omega^2 = \ell \omega_0^2 \quad (1.49)$$

qui coïncide avec l'équation établie plus haut pour les ondes de surface d'un condensat sphérique.

Comparaison avec un gaz parfait de bosons

Niveaux d'énergie d'un oscillateur isotrope à 3 dimensions



Problèmes abordés dans les cours des années antérieures

- 1997-98** Condensation de Bose-Einstein d'un gaz parfait
- 1998-99** Description des interactions en termes de champ moyen
Equation de Gross-Pitaevskii
Théorie de Bogolubov
- 1999-2000** Propriétés de cohérence
Effets physiques liés à la phase de l'onde de matière associée au condensat
- 2000-2001** Réponse d'un condensat à divers types d'excitation
Facteurs de structure dynamique et statique.

Thème choisi pour le cours 2001-2002

Propriétés de rotation des condensats

- Comment se comporte un condensat quand on fait tourner le piège qui le contient?
- Moment d'inertie d'un condensat. Superfluidité.
- Modes « ciseaux ».
- Différences de comportement avec le nuage thermique aussi bien dans le régime sans collision que dans le régime hydrodynamique.
- Tourbillons quantiques. Quantification de la circulation de la vitesse.
- Comment détecter les tourbillons sur les modes propres de vibration du condensat

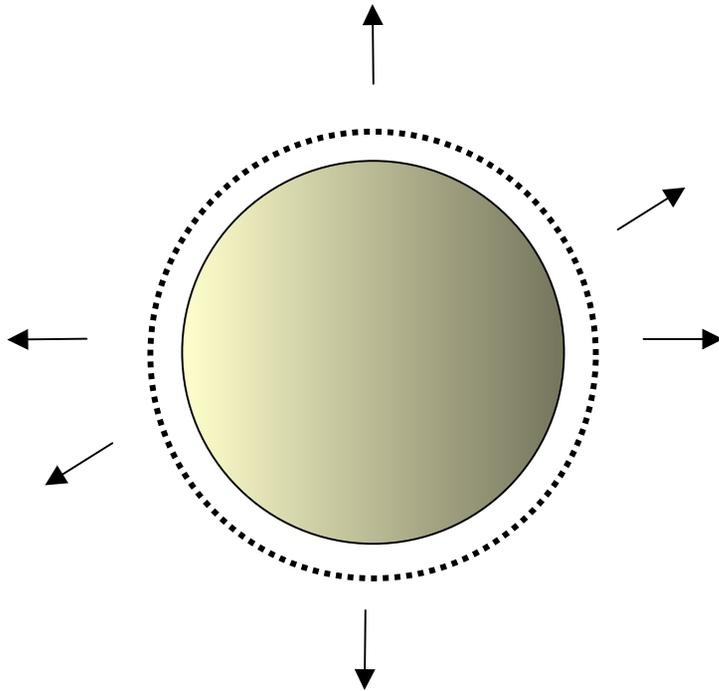
Modes propres de vibration d'un condensat

Étude par les règles de somme

- Structure des premiers modes de vibration
- Excitation par modification du potentiel de piégeage
- Densité spectrale $S(\omega)$
- Moments M_k de $S(\omega)$
- Expression des M_k sous forme de commutateurs
- Calcul des moments d'ordres les plus bas
- Application à l'étude des fréquences des modes propres de vibration les plus bas
- Discussion physique

Mode $n_r = 1, \ell = 0$

Mode de compression ou de respiration
Appelé aussi « monopole »



$$\omega_M = \omega(1, 0) = \omega_0 \sqrt{5} \quad (2.1)$$

$$P_{1,0}(r) = Ar^2 - B$$

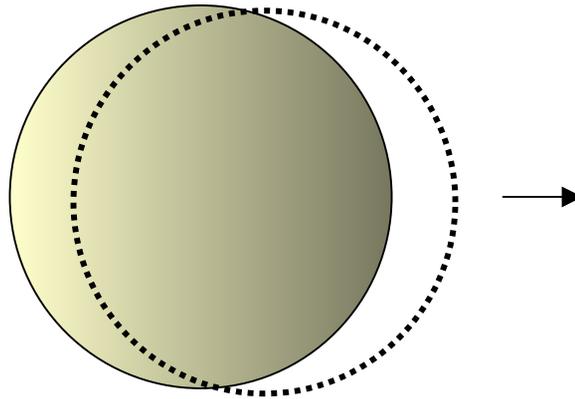
1 nœud radial

Le champ de vitesses pour un tel mode n'est pas de divergence nulle

$$\delta S \propto P_{1,0}(r) \quad \vec{v} \propto \vec{\nabla} \delta S \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{v} \propto \Delta P_{1,0}(r) \propto 6A$$

Mode $n_r = 0, \ell = 1$

(Vibration du centre de masse)



$$\omega_{CM} = \omega(0,1) = \omega_0 \quad (2.2)$$

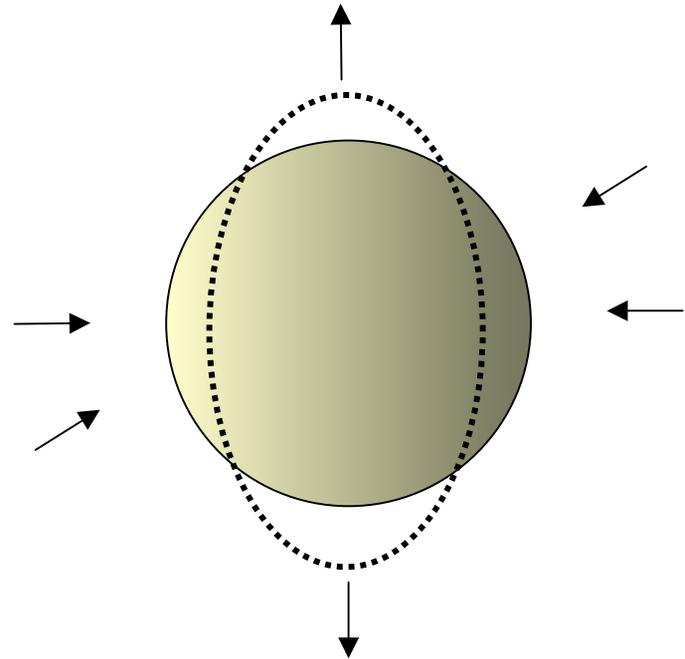
Modes de surface $n_r = 0, \ell = 2$

Appelés aussi modes « quadrupolaires »

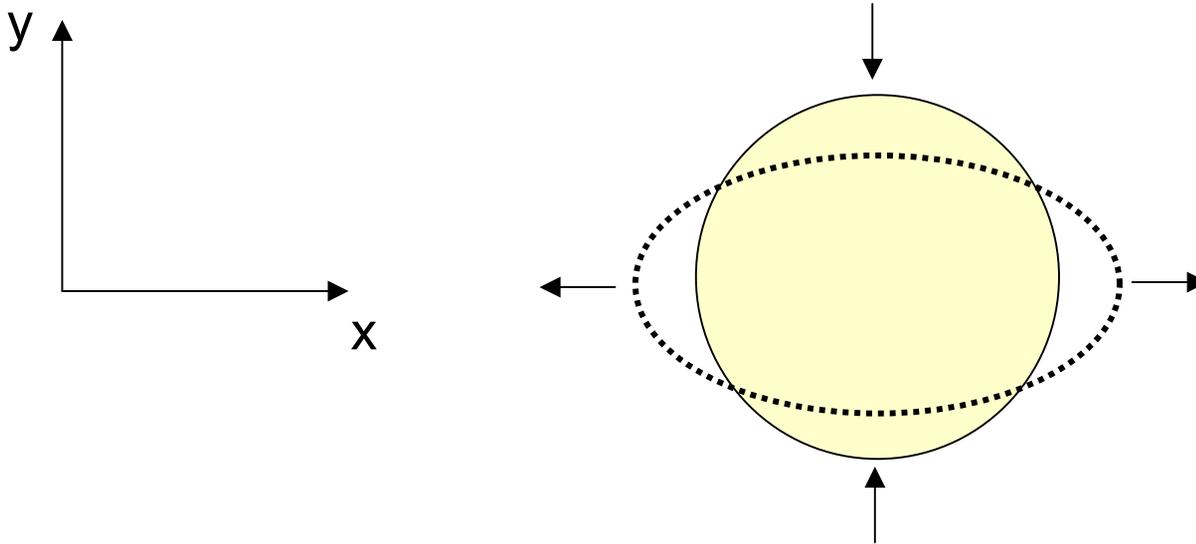
$$\omega_Q = \omega(0, 2) = \omega_0 \sqrt{2} \quad (2.3)$$

Mode $n_r = 0, \ell = 2, m = 0$

Mode quadrupolaire
respectant la symétrie
de révolution autour de Oz



Mode en $x^2 - y^2$ ($n_r = 0, \ell = 2, m = \pm 2$)



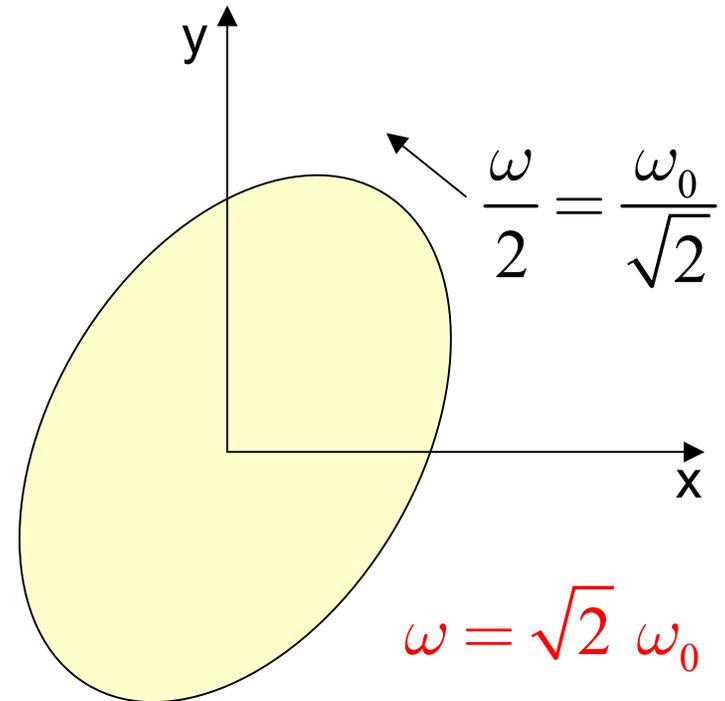
Déformation quadrupolaire dans le plan xOy.
Pas de changement sur Oz

Mode $n_r = 0, \ell = 2, m = 2$

$$\text{Re } r^2 Y_2^2(\theta, \varphi) e^{-i\omega t} = r_{\perp}^2 \cos(2\varphi - \omega t) \quad (2.4)$$

Déformation elliptique
tournant à la vitesse
angulaire $\omega/2$ dans le
plan xOy

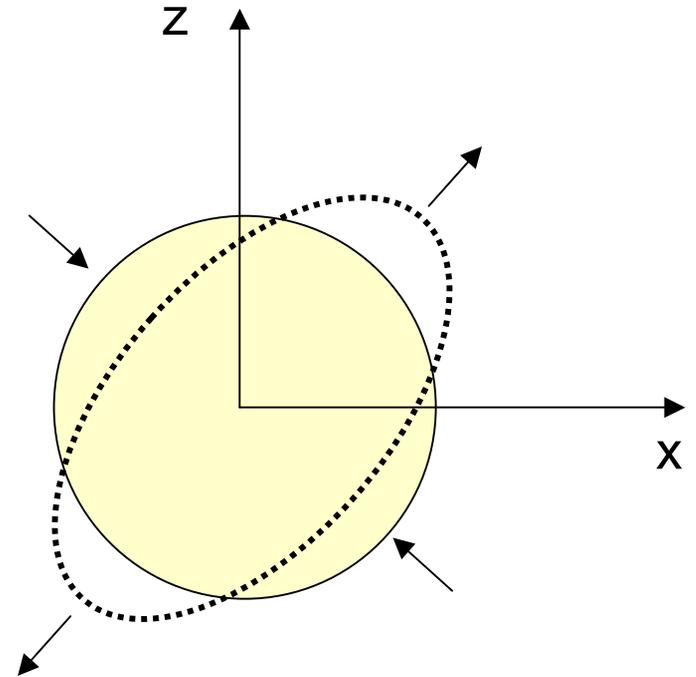
Au bout d'une demi-période
de rotation, on retrouve la
même ellipse



Le mode en $x^2 - y^2$ est une superposition
linéaire des modes $n = 0, \ell = 2, m = \pm 2$

Mode en xz ($n_r = 0, \ell = 2, m = \pm 1$)

Déformation elliptique
d'axes inclinés de 45°
par rapport à Ox et Oz .
Pas de changement
sur Oy .



Piège non sphérique à symétrie de révolution autour de Oz

$$V_{\text{ext}}(\vec{r}) = \frac{1}{2}m(\omega_{\perp}^2 r_{\perp}^2 + \omega_z^2 z^2) \quad (2.5)$$

$\omega_{\perp} \gg \omega_z$ condensat en forme de cigare

$\omega_{\perp} \ll \omega_z$ condensat en forme de crêpe

m reste un bon nombre quantique, mais non ℓ

$\delta \rho = r^2 Y_{\ell}^m(\theta, \varphi)$ reste cependant une solution
pour $\ell = 2$, $m = \pm 2$ et $m = \pm 1$

Ondes de surface

$$m = \pm 2 \quad \omega = \omega_{\perp} \sqrt{2} \quad (2.6)$$

$$m = \pm 1 \quad \omega = \sqrt{\omega_{\perp}^2 + \omega_z^2} \quad (2.7)$$

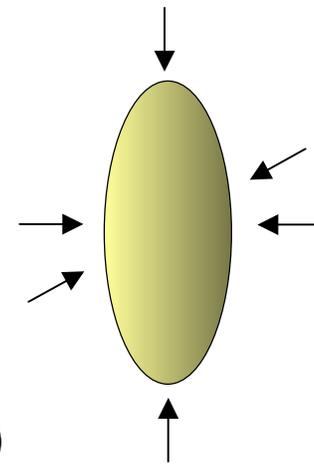
Modes m=0

Combinaisons linéaires de $r^2 Y_2^0$ et $r^2 Y_0^0$

Modes monopôle-quadropole de divergence non nulle

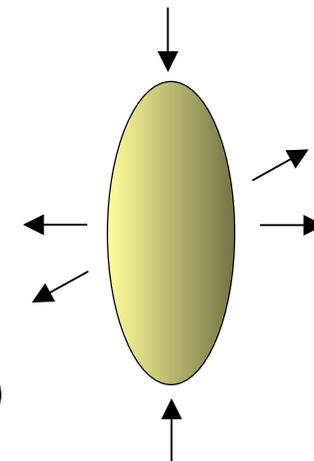
$$\omega^2 = 2\omega_{\perp}^2 + \frac{3}{2}\omega_z^2 + \frac{1}{2}\sqrt{9\omega_z^4 - 16\omega_z^2\omega_{\perp}^2 + 16\omega_{\perp}^4}$$

(2.8 a)



$$\omega^2 = 2\omega_{\perp}^2 + \frac{3}{2}\omega_z^2 - \frac{1}{2}\sqrt{9\omega_z^4 - 16\omega_z^2\omega_{\perp}^2 + 16\omega_{\perp}^4}$$

(2.8 b)



Potentiel de piégeage

$$V_{\text{ext}}(\vec{r}) = \frac{1}{2} m (\omega_{\perp}^2 r_{\perp}^2 + \omega_z^2 z^2) \quad r_{\perp}^2 = x^2 + y^2 \quad (2.9)$$

$\omega_{\perp} \gg \omega_z$ Condensat en forme de cigare

$\omega_{\perp} \ll \omega_z$ Condensat en forme de crêpe

$\omega_{\perp} = \omega_z$ Condensat sphérique

En modifiant les courants dans les bobines créant le champ de piégeage, on peut ajouter une perturbation

$$\delta V(\vec{r}, t) = \varepsilon \text{Re} r^{\ell} Y_{\ell}^m(\theta, \varphi) e^{-i\omega t} \quad \ell = 0, 1, 2 \quad (2.10)$$

susceptible d'exciter les modes propres de vibration les plus bas du condensat.

Excitation du mode de compression

$n_r = 1, \ell = 0, m = 0$ pour un condensat sphérique

$$\delta V(\vec{r}, t) = \varepsilon \operatorname{Re} r^2 e^{-i\omega t} \quad (2.11)$$

La perturbation qu'il faut ajouter à \hat{H} s'écrit $\hat{F}e^{-i\omega t} + h.c.$ avec

$$\hat{F} = \varepsilon \sum_{i=1}^N \hat{r}_i^2 \quad (2.12)$$

Cas d'une perturbation statique ($\omega=0$)

L'effet est de changer la fréquence propre du piège

$$\frac{1}{2} m \omega_0^2 r^2 \rightarrow \frac{1}{2} m \omega_0^2 r^2 + \varepsilon r^2 \quad (2.13)$$

$$\omega_0^2 \rightarrow (\omega_0 + \delta \omega)^2 \quad (2.14)$$

$$m \omega_0 \delta \omega \simeq \varepsilon \quad \delta \omega \simeq \frac{\varepsilon}{m \omega_0} \quad (2.15)$$

Excitation du mode $x^2 - y^2$

Condensat avec symétrie de révolution autour de $0z$

On augmente la raideur du piège le long de $0x$ et on la diminue le long de $0y$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} m \omega_{\perp}^2 (x^2 + y^2) &\rightarrow \frac{1}{2} m \left[(\omega_{\perp} + \delta \omega)^2 x^2 + (\omega_{\perp} - \delta \omega)^2 y^2 \right] \\ &\simeq \frac{1}{2} m \omega_{\perp}^2 (x^2 + y^2) + m \omega_{\perp} \delta \omega (x^2 - y^2) \end{aligned} \quad (2.16)$$

La perturbation qu'il faut ajouter à \hat{H} s'écrit $\hat{F} e^{-i\omega t} + h.c.$

$$\text{avec } \hat{F} = \varepsilon \sum_{i=1}^N (\hat{x}_i^2 - \hat{y}_i^2)$$

$$\varepsilon = m \omega_{\perp} \delta \omega \quad (2.17)$$

Excitation du mode $n_r = 0, \ell = 2, m = 2$

Condensat avec symétrie de révolution autour de Oz

On rend le potentiel transverse anisotrope en augmentant ω_x et en diminuant ω_y , et on fait tourner un tel potentiel autour de Oz

La perturbation qu'il faut ajouter à \hat{H} s'écrit $\hat{F}e^{-i\omega t} + h.c.$ avec :

$$\hat{F} = \varepsilon \sum_{i=1}^N \left(\hat{x}_i + i \hat{y}_i \right)^2 = \varepsilon \sum_{i=1}^N \hat{r}_{\perp i}^2 e^{2i\varphi_i} \quad (2.18)$$

La déformation du potentiel transverse, proportionnelle à $\varepsilon r_{\perp}^2 \cos(2\varphi - \omega t)$, tourne à la fréquence $\omega / 2$.

Densité spectrale $S(\omega)$

Quand on fait varier ω , on obtient une résonance toutes les fois que $\hbar\omega$ coïncide avec $E_n - E_0 = \hbar\omega_{n0}$, où E_0 est l'énergie du condensat (état fondamental $|\psi_0\rangle$ de \hat{H}) et E_n l'énergie d'un état excité $|\psi_n\rangle$.

La densité spectrale $S(\omega)$ est donc une somme de fonctions $\delta(\omega - \omega_{n0})$ avec des poids $|\langle\psi_n|\hat{F}|\psi_0\rangle|^2$.

$$S(\omega) = \sum_n \delta(\omega - \omega_{n0}) |\langle\psi_n|\hat{F}|\psi_0\rangle|^2 \quad (2.19)$$

Aucune approximation n'est faite
sur $|\psi_0\rangle, |\psi_n\rangle, E_0, E_n$

Moments de $S(\omega)$

Moments M_k d'ordre k

$$\begin{aligned} M_k &= \int_0^\infty S(\omega) \omega^k d\omega \\ &= \sum_n (\omega_{n0})^k \left| \langle \psi_n | \hat{F} | \psi_0 \rangle \right|^2 \\ &= \frac{1}{\hbar^k} \sum_k (E_n - E_0)^k \left| \langle \psi_n | \hat{F} | \psi_0 \rangle \right|^2 \end{aligned} \quad (2.20)$$

Définitions analogues à celles introduites dans le cours 2000-2001.

Dans l'étude de la diffusion d'une particule sonde, c'est la transformée de Fourier $\hat{\rho}(\vec{k})$ de la densité spatiale $\hat{\rho}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N \delta(\vec{r} - \hat{r}_i)$ qui figurait à la place de \hat{F} .

Autres expressions équivalentes des moments M_k

Les moments M_k peuvent être réécrits sous forme de valeurs moyennes d'opérateurs dans $|\psi_0\rangle$

Moment M_0

$$\begin{aligned} M_0 &= \int_0^\infty S(\omega) d\omega = \sum_n \left| \langle \psi_n | \hat{F} | \psi_0 \rangle \right|^2 \\ &= \langle \psi_0 | \hat{F}^\dagger \hat{F} | \psi_0 \rangle \end{aligned} \quad (2.21)$$

Moment M_1

$$M_1 = \frac{1}{2\hbar} \langle \psi_0 | [\hat{F}^\dagger, [\hat{H}, \hat{F}]] | \psi_0 \rangle \quad (2.22)$$

Démonstration de l'identité (2.22)

$$\begin{aligned}
 [\hat{F}^+, [\hat{H}, \hat{F}]] &= [\hat{F}^+, \hat{H}\hat{F} - \hat{F}\hat{H}] \\
 &= \hat{F}^+ \hat{H}\hat{F} + \hat{F}\hat{H}\hat{F}^+ - \hat{F}^+ \hat{F}\hat{H} - \hat{H}\hat{F}\hat{F}^+ \quad (2.23)
 \end{aligned}$$

L'utilisation de la relation de fermeture

$$\sum_n |\psi_n\rangle\langle\psi_n| = 1$$

et de l'équation aux n valeurs propres

$$\hat{H}|\psi_n\rangle = E_n|\psi_n\rangle$$

donne

$$\left\{ \begin{aligned}
 \langle\psi_0|\hat{F}^+\hat{H}\hat{F}|\psi_0\rangle &= \sum_n E_n |\langle\psi_n|\hat{F}|\psi_0\rangle|^2 \\
 \langle\psi_0|\hat{F}\hat{H}\hat{F}^+|\psi_0\rangle &= \sum_n E_n |\langle\psi_n|\hat{F}^+|\psi_0\rangle|^2 \\
 \langle\psi_0|\hat{F}^+\hat{F}\hat{H}|\psi_0\rangle &= E_0 \sum_n |\langle\psi_n|\hat{F}|\psi_0\rangle|^2 \\
 \langle\psi_0|\hat{H}\hat{F}\hat{F}^+|\psi_0\rangle &= E_0 \sum_n |\langle\psi_n|\hat{F}^+|\psi_0\rangle|^2
 \end{aligned} \right. \quad (2.24)$$

Utilisation des symétries

H est invariant par réflexion d'espace Π (réflexion par rapport à un plan vertical).

Les états $|\psi_n\rangle$ peuvent être choisis avec une parité bien définie

$$\hat{\Pi}|\psi_n\rangle = \pm|\psi_n\rangle$$

De même les opérateurs $F = r^\ell Y_\ell^m(\theta, \varphi)$ se transforment simplement par Π

$$\hat{\Pi}\hat{F}\hat{\Pi}^+ = \pm\hat{F}^+$$

On a donc

$$\langle\psi_n|\hat{F}|\psi_0\rangle = \langle\psi_n|\hat{\Pi}^+\hat{\Pi}\hat{F}\hat{\Pi}^+\hat{\Pi}|\psi_0\rangle = \pm\langle\psi_n|\hat{F}^+|\psi_0\rangle$$

et par suite

$$|\langle\psi_n|\hat{F}|\psi_0\rangle|^2 = |\langle\psi_n|\hat{F}^+|\psi_0\rangle|^2 \quad (2.25)$$

Démonstration de (2.22) (suite)

En utilisant (2.23), (2.24) et (2.25), on obtient

$$\begin{aligned} \langle \psi_0 | [\hat{F}^+, [\hat{H}, \hat{F}]] | \psi_0 \rangle &= \\ &= 2 \sum_n (E_n - E_0) |\langle \psi_n | \hat{F} | \psi_0 \rangle|^2 = 2 \hbar M_1 \end{aligned} \quad (2.26)$$

Ce qui démontre (2.22)

Expression de M_3

Des calculs analogues permettent de montrer que

$$M_3 = \frac{1}{2 \hbar^3} \langle \psi_0 | [[\hat{F}^+, \hat{H}], [\hat{H}, [\hat{H}, \hat{F}]]] | \psi_0 \rangle \quad (2.27)$$

Expression de M_{-1}

$$\begin{aligned} M_{-1} &= \sum_{n \neq 0} \hbar (E_n - E_0)^{-1} |\langle \psi_n | \hat{F} | \psi_0 \rangle|^2 \\ &= \hbar \sum_{n \neq 0} \frac{|\langle \psi_n | \hat{F} | \psi_0 \rangle|^2}{E_n - E_0} \end{aligned} \quad (2.28)$$

Susceptibilité statique χ_{st}

Supposons $\hat{F} = \hat{F}^+$ et ajoutons à \hat{H} la perturbation statique $\lambda \hat{F}$

Cette perturbation modifie $|\psi_0\rangle$ et la valeur moyenne de \hat{F} dans l'état ainsi perturbé varie de $\delta \langle \hat{F} \rangle$. Au 1^{er} ordre en λ

$$\delta \hat{F} = \lambda \chi_{st} \quad (2.29)$$

Calcul de la susceptibilité statique

Etat perturbé au premier ordre en λ

$$|\tilde{\psi}_0\rangle = |\psi_0\rangle + \lambda \sum_{n \neq 0} |\psi_n\rangle \frac{\langle \psi_n | \hat{F} | \psi_0 \rangle}{E_0 - E_n} \quad (2.30)$$

$$\begin{aligned} \delta \langle \hat{F} \rangle &= \langle \tilde{\psi}_0 | \hat{F} | \tilde{\psi}_0 \rangle - \langle \psi_0 | \hat{F} | \psi_0 \rangle \\ &\simeq 2\lambda \sum_{n \neq 0} \frac{|\langle \psi_n | \hat{F} | \psi_0 \rangle|^2}{E_0 - E_n} \end{aligned} \quad (2.31)$$

$$\chi_{\text{st}} = 2 \sum_{n \neq 0} \frac{|\langle \psi_n | \hat{F} | \psi_0 \rangle|^2}{E_0 - E_n} \quad (2.32)$$

Lien entre M_{-1} et χ_{st}

De (2.28) et (2.32) on déduit

$$M_{-1} = -\frac{\hbar}{2} \chi_{\text{st}} \quad (2.33)$$

Calcul de M_1 pour le mode de compression dans un piège sphérique

L'opérateur qui excite le mode de compression est

$$\hat{F} = \sum_{i=1}^N \hat{r}_i^2 \quad (2.34)$$

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\hat{p}_i^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega_0^2 \hat{r}_i^2 \right) + \frac{1}{2} \sum_i \sum_{j \neq i} g \delta(\hat{r}_i - \hat{r}_j) \quad (2.35)$$

Le seul terme de \hat{H} avec lequel \hat{F} ne commute pas est le terme d'énergie cinétique

$$[\hat{H}, \hat{F}] = \sum_i \left[\frac{\hat{p}_i^2}{2m}, \hat{r}_i^2 \right] = \sum_i \left[\frac{\hat{p}_{xi}^2}{2m}, \hat{x}_i^2 \right] + x \rightarrow y + x \rightarrow z$$

$$[\hat{p}_x^2, \hat{x}^2] = [\hat{p}_x^2, \hat{x}] \hat{x} + \hat{x} [\hat{p}_x^2, \hat{x}] = -2i\hbar [\hat{x} \hat{p}_x + \hat{p}_x \hat{x}] \quad (2.36)$$

$$[\hat{H}, \hat{F}] = -\frac{2i\hbar}{m} \sum_i [\hat{x}_i \hat{p}_{xi} + \hat{y}_i \hat{p}_{yi} + \hat{z}_i \hat{p}_{zi} - 3i\hbar] \quad (2.37)$$

Suite du calcul de M_1

$$[\hat{F}^+, [\hat{H}, \hat{F}]] = -\frac{2i\hbar}{m} \sum_{i=1}^N [\hat{x}_i^2 + \hat{y}_i^2 + \hat{z}_i^2, \hat{x}_i \hat{p}_{xi} + \hat{y}_i \hat{p}_{yi} + \hat{z}_i \hat{p}_{zi}] \quad (2.38)$$

$$[\hat{x}^2, \hat{x} \hat{p}_x] = 2i\hbar \hat{x}^2$$

$$[\hat{F}^+, [\hat{H}, \hat{F}]] = \frac{4\hbar^2}{m} \sum_{i=1}^N (\hat{x}_i^2 + \hat{y}_i^2 + \hat{z}_i^2) = \frac{4\hbar^2}{m} \sum_{i=1}^N \hat{r}_i^2 \quad (2.39)$$

On en déduit

$$\begin{aligned} M_1 &= \frac{1}{2\hbar} \langle \psi_0 | [\hat{F}^+, [\hat{H}, \hat{F}]] | \psi_0 \rangle \\ &= \frac{2\hbar}{m} \langle \psi_0 | \sum_{i=1}^N \hat{r}_i^2 | \psi_0 \rangle \\ &= \frac{4\hbar}{m^2 \omega_0^2} \langle \psi_0 | \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m \omega_0^2 \hat{r}_i^2 | \psi_0 \rangle = \frac{4\hbar}{m^2 \omega_0^2} \langle E_{\text{pot}} \rangle \end{aligned} \quad (2.40)$$

Relation exacte

Calcul de M_3 pour le mode de compression dans un piège sphérique

Mêmes types de calculs. Nous ne détaillerons ici que le calcul des nouveaux commutateurs rencontrés, faisant intervenir $\delta(\hat{r}_i - \hat{r}_j)$

$$\begin{aligned}
 [\hat{x}_i \hat{p}_{xi}, \delta(\hat{r}_i - \hat{r}_j)] &= [\hat{x}_i \hat{p}_{xi}, \delta(\hat{x}_i - \hat{x}_j)] \delta(\hat{y}_i - \hat{y}_j) \delta(\hat{z}_j - \hat{z}_j) \\
 [\hat{x}_i \hat{p}_{xi}, \delta(\hat{x}_i - \hat{x}_j)] &= \hat{x}_i \hat{p}_{xi} \delta(\hat{x}_i - \hat{x}_j) - \delta(\hat{x}_i - \hat{x}_j) \hat{x}_i \hat{p}_{xi} \\
 &= -i\hbar \hat{x}_i \left[\frac{\partial}{\partial x_i} \delta(\hat{x}_i - \hat{x}_j) \right] \tag{2.41}
 \end{aligned}$$

Groupons les termes i et j

$$[x_i p_{xi} + x_j p_{xj}, \delta(x_i - x_j)] = -i\hbar \left[x_i \frac{\partial}{\partial x_i} + x_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right] \delta(x_i - x_j) \tag{2.42}$$

Suite du calcul des commutateurs faisant intervenir $\delta(\vec{r}_i - \vec{r}_j)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j} \delta(x_i - x_j) &= -\frac{\partial}{\partial x_i} \delta(x_i - x_j) \\ \left(x_i \frac{\partial}{\partial x_i} + x_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \delta(x_i - x_j) &= (x_i - x_j) \frac{\partial}{\partial x_i} \delta(x_i - x_j) \\ &= (x_i - x_j) \frac{\partial}{\partial (x_i - x_j)} \delta(x_i - x_j) = -\delta(x_i - x_j) \end{aligned} \quad (2.43)$$

Compte tenu de l'identité entre distributions

$$x \delta'(x) = -\delta(x) \quad (2.44)$$

On obtient ainsi finalement

$$\left[\hat{x}_i \hat{p}_{xi} + \hat{x}_j \hat{p}_{xj}, \delta(\hat{r}_i - \hat{r}_j) \right] = i \hbar \delta(\hat{r}_i - \hat{r}_j) \quad (2.45)$$

Résultats du calcul de M_3

$$\begin{aligned} M_3 &= \frac{1}{2\hbar^3} \langle [[[\hat{F}^+, \hat{H}], [\hat{H}, [\hat{H}, \hat{F}]]]] \rangle \\ &= \frac{2\hbar}{m^2} [4\langle E_{\text{cin}} \rangle + 4\langle E_{\text{pot}} \rangle + 9\langle E_{\text{int}} \rangle] \end{aligned} \quad (2.46)$$

Théorème du viriel

(voir cours 1998-99, page V-6)

$$2\langle E_{\text{cin}} \rangle - 2\langle E_{\text{pot}} \rangle + 3\langle E_{\text{int}} \rangle = 0 \quad (2.47)$$

En combinant (2.46) et 2.47), on obtient

$$M_3 = \frac{4\hbar}{m^2} [5\langle E_{\text{pot}} \rangle - \langle E_{\text{cin}} \rangle] \quad (2.48)$$

Là encore, il s'agit d'une relation exacte.

Etude du moment M_3 dans 2 cas limites

1 – Gaz parfait de bosons (sans interactions)

$$\langle E_{\text{cin}} \rangle = \langle E_{\text{pot}} \rangle \quad (2.49)$$

L'équation (2.48) devient :

$$M_3 = \frac{16\hbar}{m^2} \langle E_{\text{pot}} \rangle \quad (2.50)$$

1 – Limite de Thomas-Fermi (interactions fortes)

$$\langle E_{\text{cin}} \rangle \ll \langle E_{\text{pot}} \rangle \quad (2.51)$$

On peut négliger le terme d'énergie cinétique dans l'équation (2.48) qui devient :

$$M_3 = \frac{20\hbar}{m^2} \langle E_{\text{pot}} \rangle \quad (2.52)$$

Calcul de M_{-1} pour le mode de compression dans un condensat sphérique

D'après (2.33), $M_{-1} = -\hbar \chi_{\text{st}} / 2$. Il faut donc calculer la susceptibilité statique χ_{st} apparaissant dans la réponse linéaire de $\hat{F} = \sum_{i=1}^N \hat{r}_i^2$ à la perturbation $\hat{V} = \varepsilon \hat{F}$

$$\delta \langle \hat{F} \rangle = \sum_{i=1}^N \delta \langle \hat{r}_i^2 \rangle = \varepsilon \chi_{\text{st}} \quad (2.53)$$

La perturbation associée à la compression $\omega_0 \rightarrow \omega_0 + \delta \omega_0$ revient à ajouter à \hat{H} la perturbation $\varepsilon \hat{F}$ où, d'après (2.15)

$$\varepsilon = m \omega_0 \delta \omega_0$$

On en déduit :

$$M_{-1} = -\frac{\hbar}{2m \omega_0} \frac{\sum_{i=1}^N \delta \langle \hat{r}_i^2 \rangle}{\delta \omega_0} = -\frac{N \hbar}{2m \omega_0} \frac{\partial \langle \hat{r}^2 \rangle}{\partial \omega_0} \quad (2.54)$$

Calcul de $\partial \langle \hat{r}^2 \rangle / \partial \omega_0$

Partons de l'équation de G-P indépendante du temps et introduisons les grandeurs sans dimensions

$$\begin{aligned} \xi &= r / \sqrt{\hbar / m \omega_0} & \vec{\nabla}_\xi &= \sqrt{\hbar / m \omega_0} \vec{\nabla}_r \\ \tilde{\varphi}(\xi) &= (\hbar / m \omega_0)^{3/4} \varphi(r) & \tilde{\mu} &= \mu / \hbar \omega_0 \end{aligned} \quad (2.55)$$

L'équation de G-P devient : $\frac{1}{2}(-\Delta_\xi + \xi^2) \tilde{\varphi} + \lambda |\tilde{\varphi}|^2 \tilde{\varphi} = \tilde{\mu} \tilde{\varphi}$

avec :

$$\lambda = g N \omega_0^{1/2} m^{3/2} \hbar^{-5/2} \quad (2.56)$$

Comme

$$\langle \hat{r}^2 \rangle = (\hbar / m \omega_0) \langle \hat{\xi}^2 \rangle \quad (2.57)$$

on en déduit

$$\frac{\partial \langle \hat{r}^2 \rangle}{\partial \omega_0} = -\frac{\hbar}{m \omega_0^2} \langle \hat{\xi}^2 \rangle + \frac{\hbar}{m \omega_0} \frac{\partial \langle \hat{\xi}^2 \rangle}{\partial \omega_0} = -\frac{\langle \hat{r}^2 \rangle}{\omega_0} + \frac{\hbar}{m \omega_0} \frac{\partial \langle \hat{\xi}^2 \rangle}{\partial \omega_0} \quad (2.58)$$

Calcul de $\partial \langle \hat{\xi}^2 \rangle / \partial \omega_0$

Comme l'équation de G-P ne dépend que de λ il en est de même de $\langle \hat{\xi}^2 \rangle = \int_0^\infty \xi^2 |\tilde{\varphi}(\xi)|^2 d\xi$. Donc

$$\frac{\partial \langle \hat{\xi}^2 \rangle}{\partial \omega_0} = \frac{\partial \langle \hat{\xi}^2 \rangle}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial \omega_0} \quad (2.59)$$

Pour la suite de la discussion, il est intéressant de relier $\partial \langle \hat{\xi}^2 \rangle / \partial \omega_0$ à $\partial \langle \hat{\xi}^2 \rangle / \partial N$

$$\frac{\partial \langle \hat{\xi}^2 \rangle}{\partial N} = \frac{\partial \langle \hat{\xi}^2 \rangle}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial N} \quad (2.60)$$

De (2.56), (2.59), (2.60), on déduit :

$$\frac{\partial \langle \hat{\xi}^2 \rangle}{\partial \omega_0} = \frac{\partial \langle \hat{\xi}^2 \rangle}{\partial N} \frac{\partial \lambda / \partial \omega_0}{\partial \lambda / \partial N} = \frac{N}{2\omega_0} \frac{\partial \langle \hat{\xi}^2 \rangle}{\partial N} \quad (2.61)$$

Expression de M_{-1} en fonction de $\partial \langle \hat{r}^2 \rangle / \partial N$

Reportons (2.61) dans (2.58). Il vient :

$$\frac{\partial \langle \hat{r}^2 \rangle}{\partial \omega_0} = -\frac{\langle \hat{r}^2 \rangle}{\omega_0} + \frac{\hbar N}{2m \omega_0^2} \frac{\partial \langle \hat{\xi}^2 \rangle}{\partial N} \quad (2.62)$$

Par ailleurs, on déduit de (2.57) que :

$$\frac{\partial \langle \hat{r}^2 \rangle}{\partial N} = \frac{\hbar}{m \omega_0} \frac{\partial \langle \hat{\xi}^2 \rangle}{\partial N} \quad (2.63)$$

de sorte que

$$\frac{\partial \langle \hat{r}^2 \rangle}{\partial \omega_0} = -\frac{1}{\omega_0} \left[\langle \hat{r}^2 \rangle - \frac{N}{2} \frac{\partial}{\partial N} \langle \hat{r}^2 \rangle \right] \quad (2.64)$$

Finalement, l'équation (2.54) donne :

$$M_{-1} = \frac{N \hbar}{2m \omega_0^2} \left[\langle \hat{r}^2 \rangle - \frac{N}{2} \frac{\partial}{\partial N} \langle \hat{r}^2 \rangle \right] \quad (2.65)$$

Etude du moment M_{-1} dans 2 cas limites

1 – Gaz parfait de bosons (sans interactions)

$\langle \hat{r}^2 \rangle$ ne dépend pas de N .

Donc, $\partial \langle \hat{r}^2 \rangle / \partial N = 0$, et par suite

$$M_{-1} = \frac{N \hbar}{2 m \omega_0^2} \langle \hat{r}^2 \rangle = \frac{\hbar}{m^2 \omega_0^4} \langle E_{\text{pot}} \rangle \quad (2.66)$$

1 – Limite de Thomas-Fermi (interactions fortes)

La dépendance en N de $\langle \hat{r}^2 \rangle$ est $N^{2/5}$

de sorte que $\frac{\partial \langle \hat{r}^2 \rangle}{\partial N} = \frac{2}{5} \frac{\langle \hat{r}^2 \rangle}{N}$ et par suite :

$$M_{-1} = \frac{N \hbar}{2 m \omega_0^2} \frac{4}{5} \langle \hat{r}^2 \rangle = \frac{4}{5} \frac{\hbar}{m^2 \omega_0^4} \langle E_{\text{pot}} \rangle \quad (2.67)$$

Application au calcul de la fréquence du mode monopolaire le plus bas

Dans un condensat sphérique, l'opérateur $\hat{F} e^{-i\omega t} + h.c.$ où $\hat{F} = \sum_{i=1}^N \hat{r}_i^2$ excite les modes $n_r, \ell = 0, m = 0$ où $n_r = 1, 2, 3 \dots$. Soient $\omega_{10}, \omega_{20}, \omega_{30} \dots$ les fréquences de ces modes, de poids proportionnels à $|F_{10}|^2, |F_{20}|^2, |F_{30}|^2 \dots$

où $F_{n0} = \langle \psi_n | \hat{F} | \psi_0 \rangle$. D'après les définitions de M_1, M_3

$$\frac{M_3}{M_1} = \frac{\omega_{10}^3 |F_{10}|^2 + \omega_{20}^3 |F_{20}|^2 + \omega_{30}^3 |F_{30}|^2 + \dots}{\omega_{10} |F_{10}|^2 + \omega_{20} |F_{20}|^2 + \omega_{30} |F_{30}|^2 + \dots} \quad (2.68)$$

$$= \omega_{10}^2 \frac{|F_{10}|^2 + (\omega_{20} / \omega_{10})^3 |F_{20}|^2 + (\omega_{30} / \omega_{10})^3 |F_{30}|^2 + \dots}{|F_{10}|^2 + (\omega_{20} / \omega_{10}) |F_{20}|^2 + (\omega_{30} / \omega_{10}) |F_{30}|^2 + \dots}$$

$\omega_{10} = \omega_M$ est la fréquence du mode monopolaire le plus bas. Par ailleurs, $\omega_{n0} > \omega_{10}$ pour $n = 2, 3, \dots$

Borne supérieure pour la fréquence ω_M du mode monopolaire le plus bas

Comme $(\omega_{n0} / \omega_{10})^3 > \omega_{n0} / \omega_{10}$ pour $n = 2, 3, \dots$
on déduit de (2.68) que :

$$\frac{M_3}{M_1} > \omega_{10}^2 = \omega_M^2 \quad (2.69)$$

La même démarche permet de montrer que

$$\frac{M_1}{M_{-1}} > \omega_{10}^2 = \omega_M^2 \quad (2.70)$$

Les rapports de 2 moments différant de 2 unités constituent donc des bornes supérieures pour ω_M^2

Cette borne supérieure peut coïncider avec ω_M^2 si $|F_{10}|^2 \gg |F_{n0}|^2$ pour $n = 2, 3, \dots$ c-à-d si la transition ayant la fréquence la plus basse « épuise » la règle de somme.

Cas où la transition de fréquence la plus basse épuise la règle de somme

L'équation (2.68) et l'équation analogue pour M_1/M_{-1} donnent

$$M_3 / M_1 \simeq M_1 / M_{-1} \simeq \omega_M^2 \quad (2.71)$$

Test de l'égalité $M_3 / M_1 \simeq \omega_M^2$

$$\frac{M_3}{M_1} = \omega_0^2 \frac{5 \langle E_{\text{pot}} \rangle - \langle E_{\text{cin}} \rangle}{\langle E_{\text{pot}} \rangle} \quad (2.72)$$

- Pour un gaz parfait de bosons, $\langle E_{\text{cin}} \rangle = \langle E_{\text{pot}} \rangle$ et on retrouve le résultat exact ($\omega_M = 2 \omega_0$):

$$M_3 / M_1 \simeq 4 \omega_0^2 \quad (2.73)$$

- A la limite de Thomas-Fermi, $\langle E_{\text{cin}} \rangle \ll \langle E_{\text{pot}} \rangle$, on retrouve le résultat exact ($\omega_M = \omega_0 \sqrt{5}$):

$$M_3 / M_1 \simeq 5 \omega_0^2 \quad (2.74)$$

Test de l'égalité $M_1 / M_{-1} \simeq \omega_M^2$

Pour un gaz parfait de bosons, nous avons d'après (2.40) et (2.66)

$$\frac{M_1}{M_{-1}} \simeq 4 \omega_0^2 \quad (2.75)$$

alors qu'à la limite de Thomas-Fermi les équations (2.40) et (2.67) donnent :

$$\frac{M_1}{M_{-1}} \simeq 5 \omega_0^2 \quad (2.76)$$

valeurs qui coïncident avec les résultats exacts correspondant à ces 2 limites

Le fait que M_3/M_1 et M_1/M_{-1} soient égaux dans les 2 cas limites et coïncident avec les valeurs exactes de ω_M donne confiance dans le fait que la règle de somme est épuisée par la transition de fréquence la plus basse.

Etude de M_3/M_1 dans le régime intermédiaire

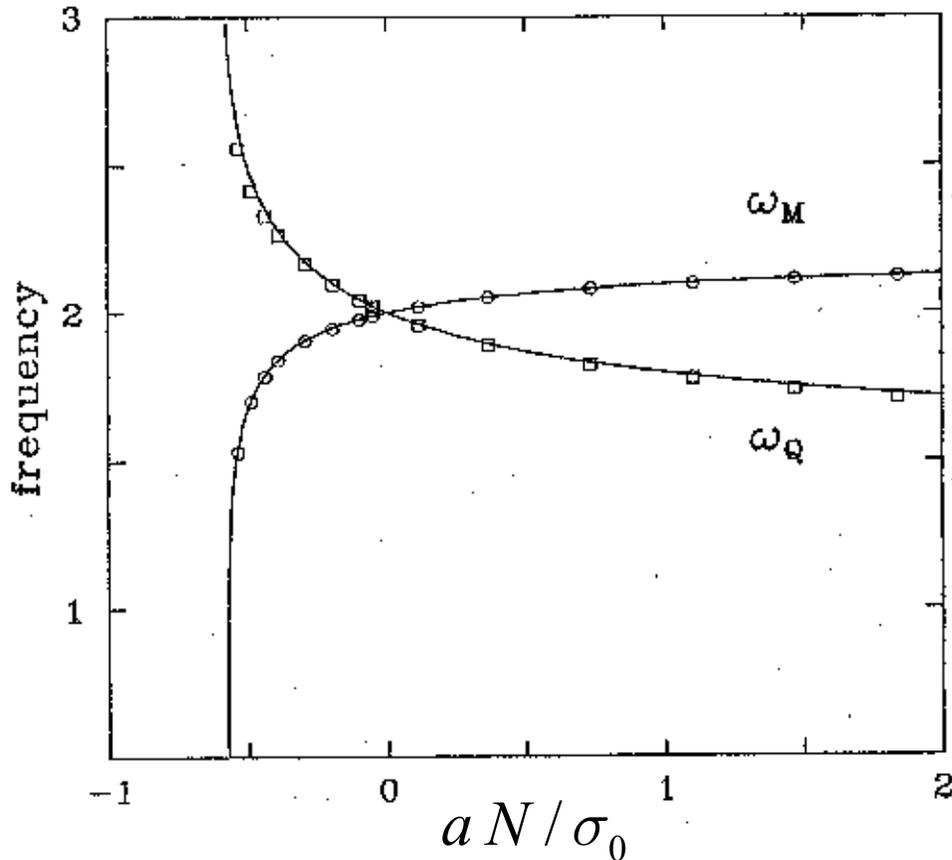
L'équation (2.72) donnant M_3/M_1 est exacte.

On peut, à partir de la résolution numérique de l'équation de G-P indépendante du temps, calculer $\langle E_{\text{pot}} \rangle$ et $\langle E_{\text{cin}} \rangle$ pour chaque valeur du paramètre $\chi_{\text{cond}} = N a / \sigma_0$ caractérisant la force des interactions

Le résultat ainsi obtenu pour M_3 / M_1 peut alors être comparé au résultat du calcul numérique de ω_M à partir des équations de Bogolubov- de Gennes, qui sont valables pour toutes les valeurs de χ_{cond} . Des calculs analogues peuvent être faits pour la fréquence ω_Q du mode quadrupolaire (voir plus loin).

Les résultats, présentés sur la figure 1 montrent un excellent accord entre les 2 méthodes de calcul, quel que soit χ_{cond}

Test de la méthode des moments



Courbes en traits pleins

Valeurs de ω_M et ω_Q calculées par la méthode des moments

Ronds et carrés

Résolution numérique des équations de Bogolubov-de Gennes

Figure 1 extraite de F. Dalfovo, S. Giorgini, L. Pitaevskii, S. Stringari
Rev. Mod. Phys. 71, 463 (1999)

Mode quadrupolaire en $x^2 - y^2$

La méthode des moments peut être aussi utilisée pour calculer la fréquence du mode quadrupolaire en $x^2 - y^2$, aussi bien pour un piège sphérique que pour un piège ayant une symétrie de révolution autour de Oz.

Les calculs sont très analogues aux calculs détaillés plus haut pour le mode monopolaire dans un piège sphérique et conduisent aux valeurs suivantes pour M_1 et M_3

$$M_1 = \frac{4\hbar}{m^2 \omega_{\perp}^2} \langle E_{\text{pot}} \rangle_{\perp} \quad (2.77)$$

$$M_3 = \frac{8\hbar}{m^2} \left(\langle E_{\text{cin}} \rangle_{\perp} + \langle E_{\text{pot}} \rangle_{\perp} \right) \quad (2.78)$$

Expression de ω_Q

Si l'on suppose que la transition de fréquence la plus basse épuise la règle de somme, on obtient :

$$\omega_Q^2 \simeq \frac{M_3}{M_1} = 2 \omega_{\perp}^2 \frac{\langle E_{\text{cin}} \rangle_{\perp} + \langle E_{\text{pot}} \rangle_{\perp}}{\langle E_{\text{pot}} \rangle_{\perp}} \quad (2.79)$$

La fréquence donnée par cette expression coïncide avec la valeur connue par ailleurs dans les 2 cas limites des interactions faibles et fortes :

$$\langle E_{\text{cin}} \rangle_{\perp} = \langle E_{\text{pot}} \rangle_{\perp} \rightarrow \omega_Q = 2 \hbar \omega_{\perp} \quad (2.80)$$

$$\langle E_{\text{cin}} \rangle_{\perp} \ll \langle E_{\text{pot}} \rangle_{\perp} \rightarrow \omega_Q = \hbar \omega_{\perp} \sqrt{2} \quad (2.81)$$

Elle est également en très bon accord avec la valeur numérique de ω_Q dans les régimes intermédiaires (Fig.1)

Condensat dans un piège tournant

Densité spatiale et champ de vitesses

Condensat contenu dans un piège décrit par

$$V_{\text{ext}}(\vec{r}) = \frac{1}{2}m(\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2)$$

On tourne le potentiel de piégeage V_{ext} autour de Oz à la vitesse angulaire Ω

- Quel est le régime stationnaire dans le référentiel tournant si un tel régime existe?
- Nouvelle forme spatiale du condensat?
- Allure du champ de vitesses?
- Influence des interactions ?

Les paramètres physiques importants décrivant la rotation

1. Anisotropie du piège

$$\varepsilon = \frac{\omega_x^2 - \omega_y^2}{\omega_x^2 + \omega_y^2} \quad (3.1)$$

Il sera d'autant plus facile d'entraîner le condensat que ε sera plus grand.

2. Vitesse angulaire de rotation Ω

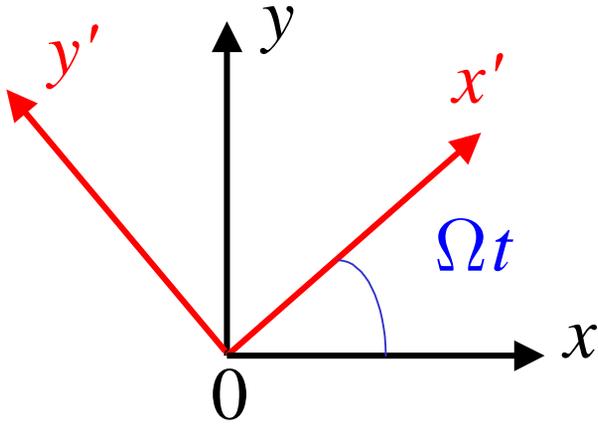
Comment varient les phénomènes en fonction de ε et Ω ?

Plan

- Rappels de mécanique classique sur les rotations
- Condensat de bosons sans interactions
 - Fonction d'onde de l'état fondamental
 - Densité spatiale et champ de vitesses
- Condensat à la limite de Thomas-Fermi
 - Equation de Gross-Pitaevskii dans le référentiel tournant
 - Interprétation des équations hydrodynamiques
 - Recherche d'une solution stationnaire dans le référentiel tournant

Rappels de mécanique classique

Référentiel du labo $x\ 0\ y$ et tournant $x'\ 0\ y'$



$$\vec{\Omega} = \Omega \vec{e}_z \quad (3.2)$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \Omega t & \sin \Omega t \\ -\sin \Omega t & \cos \Omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (3.3)$$
$$z' = z$$

Lagrangiens \mathcal{L} et \mathcal{L}'

Dans le référentiel du labo

Vitesse de la particule \vec{v}

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m \vec{v}^2 - V_{\text{ext}}(\vec{r}) \quad (3.4)$$

Dans le référentiel tournant

Vitesse \vec{v}'

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{\Omega} \times \vec{r}' \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}' &= \frac{1}{2} m (\vec{v}' + \vec{\Omega} \times \vec{r}')^2 - V_{\text{ext}}(\vec{r}') \\ &= \frac{1}{2} m \vec{v}'^2 + m \vec{v}' \cdot (\vec{\Omega} \times \vec{r}') + \frac{1}{2} m (\vec{\Omega} \times \vec{r}')^2 - V_{\text{ext}}(\vec{r}') \end{aligned} \quad (3.6)$$

Moments conjugués \vec{p} et \vec{p}'

Dans le référentiel du labo

$$\vec{p} = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \vec{v}} = m \vec{v} \quad (3.7)$$

Dans le référentiel tournant

$$\vec{p}' = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \vec{v}'} = m \vec{v}' + m (\vec{\Omega} \times \vec{r}') = \vec{p} \quad (3.8)$$

- \vec{p}' ne coïncide pas avec la quantité de mouvement $m \vec{v}'$ dans le référentiel tournant
- $\vec{p}' = \vec{p}$ coïncide avec $m \vec{v}$
- en mécanique quantique, l'opérateur $(\hbar/mi) \vec{\nabla}_{\vec{r}'}$ associé à \vec{p}' / m représente la vitesse dans le système du labo et non dans le référentiel tournant.

Hamiltoniens H et H'

$$H = \vec{p} \cdot \vec{v} - \mathcal{L} = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V_{\text{ext}}(\vec{r}) \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} H' &= \vec{p}' \cdot \vec{v}' - \mathcal{L}' \\ &= \frac{1}{2} m \vec{v}'^2 - \frac{1}{2} m (\vec{\Omega} \times \vec{r}')^2 + V_{\text{ext}}(\vec{r}') \\ &= \frac{1}{2m} \left[\vec{p}' - m(\vec{\Omega} \times \vec{r}') \right]^2 - \frac{1}{2} m (\vec{\Omega} \times \vec{r}')^2 + V_{\text{ext}}(\vec{r}') \\ &= \frac{\vec{p}'^2}{2m} + V_{\text{ext}}(\vec{r}') - \vec{p}' \cdot (\vec{\Omega} \times \vec{r}') \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\vec{p}' \cdot (\vec{\Omega} \times \vec{r}') = \vec{\Omega} \cdot (\vec{r}' \times \vec{p}') = \Omega \vec{e}_z \cdot (\vec{r}' \times \vec{p}') = \Omega L'_z \quad (3.11)$$

$$H' = \frac{\vec{p}'^2}{2m} + V_{\text{ext}}(\vec{r}') - \Omega L'_z \quad (3.12)$$

Moments cinétiques \vec{L} et \vec{L}'

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \quad (3.13)$$

$$\vec{L}' = \vec{r}' \times \vec{p}' = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{L} \quad (3.14)$$

Egalité entre vecteurs

Pour passer des composantes x, y aux composantes sur x', y' , il faut utiliser les formules de transformation (3.3)

\vec{L}' n'est pas le moment de la quantité de mouvement dans le référentiel tournant.

Equations du mouvement dans le référentiel tournant

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\vec{r}}' = \frac{\partial H'}{\partial \vec{p}'} = \frac{\vec{p}'}{m} - (\vec{\Omega} \times \vec{r}') \\ \dot{\vec{p}}' = -\frac{\partial H'}{\partial \vec{r}'} = -\vec{\nabla}_{\vec{r}'} V_{\text{ext}}(\vec{r}') + (\vec{p}' \times \vec{\Omega}) \end{array} \right. \quad (3.15)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\vec{r}}' = \frac{\partial H'}{\partial \vec{p}'} = \frac{\vec{p}'}{m} - (\vec{\Omega} \times \vec{r}') \\ \dot{\vec{p}}' = -\frac{\partial H'}{\partial \vec{r}'} = -\vec{\nabla}_{\vec{r}'} V_{\text{ext}}(\vec{r}') + (\vec{p}' \times \vec{\Omega}) \end{array} \right. \quad (3.16)$$

$$m \frac{d}{dt} (\vec{v}' + \vec{\Omega} \times \vec{r}') = -\vec{\nabla}_{\vec{r}'} V_{\text{ext}}(\vec{r}') + m [\vec{v}' + \vec{\Omega} \times \vec{r}'] \times \vec{\Omega} \quad (3.17)$$

$$m \frac{d}{dt} \vec{v}' = -\vec{\nabla}_{\vec{r}'} V_{\text{ext}}(\vec{r}') - 2m \vec{\Omega} \times \vec{v}' + \frac{1}{2} \vec{\nabla}_{\vec{r}'} m \Omega^2 r_{\perp}'^2 \quad (3.18)$$

$-2m \vec{\Omega} \times \vec{v}'$: Force de Coriolis

$\frac{1}{2} \vec{\nabla}_{\vec{r}'} m \Omega^2 r_{\perp}'^2$: Force centrifuge

Condensat de bosons sans interactions

Hamiltonien dans le référentiel tournant

$$\hat{H}' = \sum_{i=1}^N \hat{h}'(i) \quad (3.19)$$

$$\hat{h}' = \frac{\hat{p}'^2}{2m} + \frac{m}{2} \left(\omega_x^2 \hat{x}'^2 + \omega_y^2 \hat{y}'^2 + \omega_z^2 \hat{z}'^2 \right) - \Omega \left(\hat{x}' \hat{p}'_y - \hat{y}' \hat{p}'_x \right) \quad (3.20)$$

Tous les bosons sont condensés dans l'état fondamental de l'hamiltonien à 1 particule h

Il faut donc calculer la fonction d'onde de cet état.

2 calculs seront présentés:

- Calcul perturbatif à la limite $\Omega \ll \omega_x, \omega_y$
- Calcul exact pour Ω quelconque

Rappels sur l'oscillateur harmonique

$$\hat{h}_0 = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega_0^2 \hat{x}^2 \quad (3.21)$$

$$\begin{cases} \hat{x} = \frac{\sigma_0}{\sqrt{2}} (\hat{a}^+ + \hat{a}) \\ \hat{p} = \frac{i\hbar}{\sigma_0 \sqrt{2}} (\hat{a}^+ - \hat{a}) \end{cases} \quad (3.22) \quad \sigma_0 = \sqrt{\hbar/m\omega_0} \quad (3.23)$$

$$\varphi_0(x) = (\pi \sigma_0)^{-1/4} e^{-x^2/2\sigma_0^2} \quad (3.24.a)$$

$$\varphi_1(x) = (\pi \sigma_0)^{-1/4} \sqrt{2} \frac{x}{\sigma_0} e^{-x^2/2\sigma_0^2} \quad (3.24.b)$$

$$\langle x^2 \rangle = \sigma_0^2/2 = \hbar/2m\omega_0 \quad (3.25)$$

C.Cohen-Tannoudji, B.Diu, F.Laloë, Mécanique Quantique- chap.V

Etat fondamental perturbé (à la limite $\Omega \ll \omega_{x,y}$)

$$|\tilde{\varphi}_0\rangle = |\varphi_0\rangle - \Omega \sum_{n \neq 0} |\varphi_n\rangle \frac{\langle \varphi_n | \hat{l}'_z | \varphi_0 \rangle}{E_0 - E_n} \quad (3.26)$$

Réexprimons \hat{l}'_z en fonction de $\hat{a}_x, \hat{a}_x^+, \hat{a}_y, \hat{a}_y^+$. Seul le terme en $\hat{a}_x^+ \hat{a}_y^+$ donne un résultat non nul quand il agit sur $|\varphi_0\rangle$

$$\begin{aligned} \hat{l}'_z |\varphi_0\rangle &= (\hat{x}' \hat{p}'_y - \hat{y}' \hat{p}'_x) |\varphi_0\rangle \\ &= i \frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} \sigma_{0x} & -\sigma_{0y} \\ \sigma_{0y} & \sigma_{0x} \end{bmatrix} \hat{a}_x^+ \hat{a}_y^+ |n_x = 0, n_y = 0, n_z = 0\rangle \\ &= i \frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} \sqrt{\omega_y} & -\sqrt{\omega_x} \\ \sqrt{\omega_x} & \sqrt{\omega_y} \end{bmatrix} |n_x = 1, n_y = 1, n_z = 0\rangle \end{aligned} \quad (3.27)$$

$$|\hat{\varphi}_0\rangle = |0,0,0\rangle + \frac{i}{2} \frac{\Omega}{\sqrt{\omega_x \omega_y}} \frac{\omega_y - \omega_x}{\omega_y + \omega_x} |1,1,0\rangle \quad (3.28)$$

Fonction d'onde $\tilde{\varphi}_0(\vec{r}')$ associé a $|\tilde{\varphi}_0\rangle$

En utilisant (3.24.a) et (3.24.b) dans (3.28), on obtient

$$\tilde{\varphi}_0(x', y', z') = \varphi_0(x', y', z') \left[1 + i \frac{x' y'}{\sigma_{0x} \sigma_{0y}} \frac{\Omega}{\sqrt{\omega_x \omega_y}} \frac{\omega_y - \omega_x}{\omega_y + \omega_x} \right] \quad (3.29)$$

A l'ordre 1 inclus en Ω , cette expression peut être réécrite sous la forme

$$\hat{\varphi}_0(x', y', z') = \varphi_0(x', y', z') \exp\left(i \frac{m}{\hbar} \alpha x' y'\right) \quad (3.30)$$

où

$$\alpha = -\frac{\omega_x - \omega_y}{\omega_y + \omega_x} \Omega \quad (3.31)$$

L'effet de la rotation est donc de faire apparaître une phase $(m/\hbar)\alpha x' y'$ sur la fonction d'onde non perturbée $\varphi_0(x', y', z')$ sans changer son module

Interprétation du gradient de la phase

Comme $\vec{p}/m = \vec{p}'/m$ est la vitesse dans le référentiel du labo [voir la discussion suivant (3.8)],

$$\vec{J}(\vec{r}_0) = \frac{1}{2} \left[\delta(\vec{r}' - \vec{r}_0) \frac{\vec{p}'}{m} + \frac{\vec{p}'}{m} \delta(\vec{r}' - \vec{r}_0) \right] \quad (3.32)$$

est le courant au point \vec{r}_0 dans le référentiel du labo.

Sa valeur moyenne dans l'état $\tilde{\varphi}_0(\vec{r}', t)$ vaut

$$\langle \vec{J}(\vec{r}_0, t) \rangle = \frac{\hbar}{2mi} \left\{ \tilde{\varphi}_0^*(\vec{r}_0, t) [\vec{\nabla}' \tilde{\varphi}_0(\vec{r}_0, t)] - [\vec{\nabla}' \tilde{\varphi}_0^*(\vec{r}_0, t)] \tilde{\varphi}_0(\vec{r}_0, t) \right\} \quad (3.33)$$

Interprétation du gradient de la phase (suite)

De (3.30) on déduit aisément

$$\tilde{\varphi}_0^* (\vec{\nabla}' \tilde{\varphi}_0) - (\vec{\nabla}' \tilde{\varphi}_0^*) \tilde{\varphi}_0 = 2i\rho (\vec{\nabla}' S) \quad (3.34)$$

de sorte que

$$\langle \vec{J}(\vec{r}_0, t) \rangle = \rho(\vec{r}_0, t) \frac{\hbar}{m} \vec{\nabla}' S(\vec{r}_0, t) \quad (3.35)$$

Le gradient de la phase de la fonction d'onde décrivant le condensat dans le référentiel tournant est donc relié au champ de vitesse $\vec{v}(\vec{r}_0, t)$ dans le référentiel du labo et non dans le référentiel tournant

$$\frac{\hbar}{m} \vec{\nabla}' S(\vec{r}_0, t) = \vec{v}(\vec{r}_0, t) \quad (3.36)$$

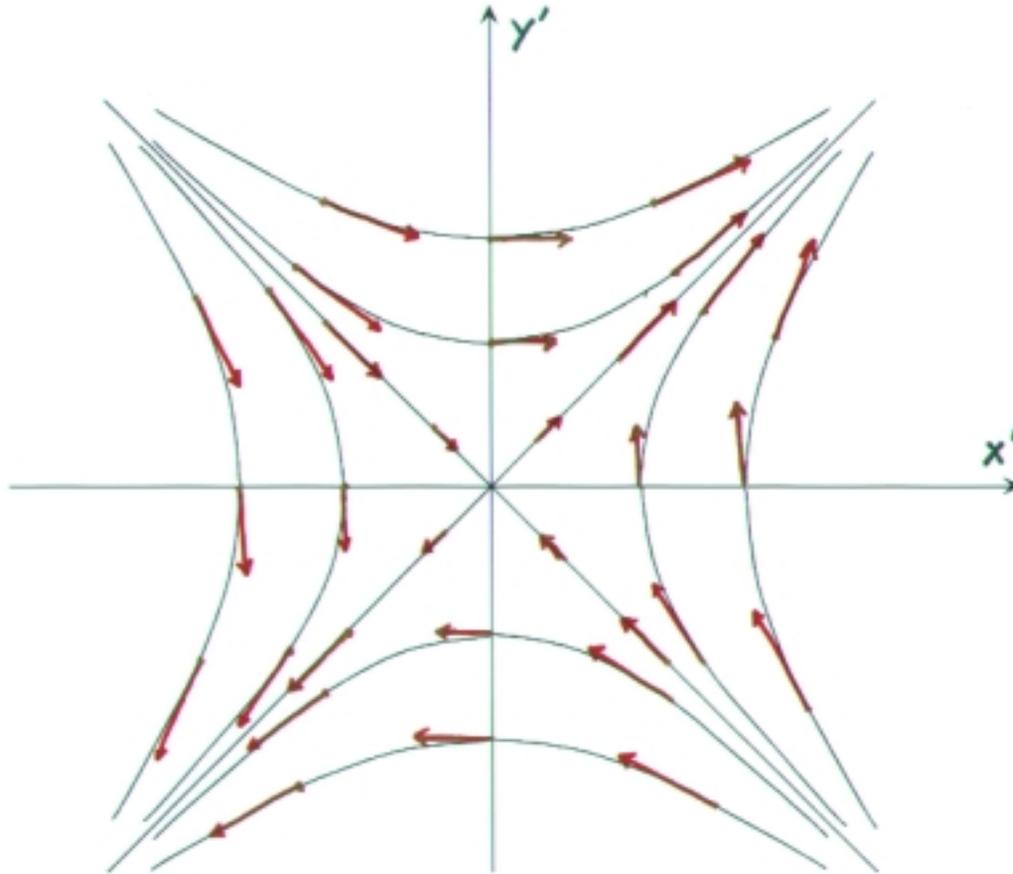
Champ de vitesses

$$\vec{v}(x', y', z') = \frac{\hbar}{m} \vec{\nabla}' \left(\frac{m}{\hbar} \alpha x' y' \right) = \alpha \vec{\nabla}' x' y' \quad (3.37)$$

$$\begin{cases} v_{x'} = \alpha y' \\ v_{y'} = \alpha x' \\ v_{z'} = 0 \end{cases} \quad (3.38)$$

Le champ de vitesses (3.38) est le champ de vitesses dans le référentiel du labo, décrit par ses composantes sur les axes $Ox'y'z'$ du référentiel tournant

Allure du champ de vitesses du condensat tournant

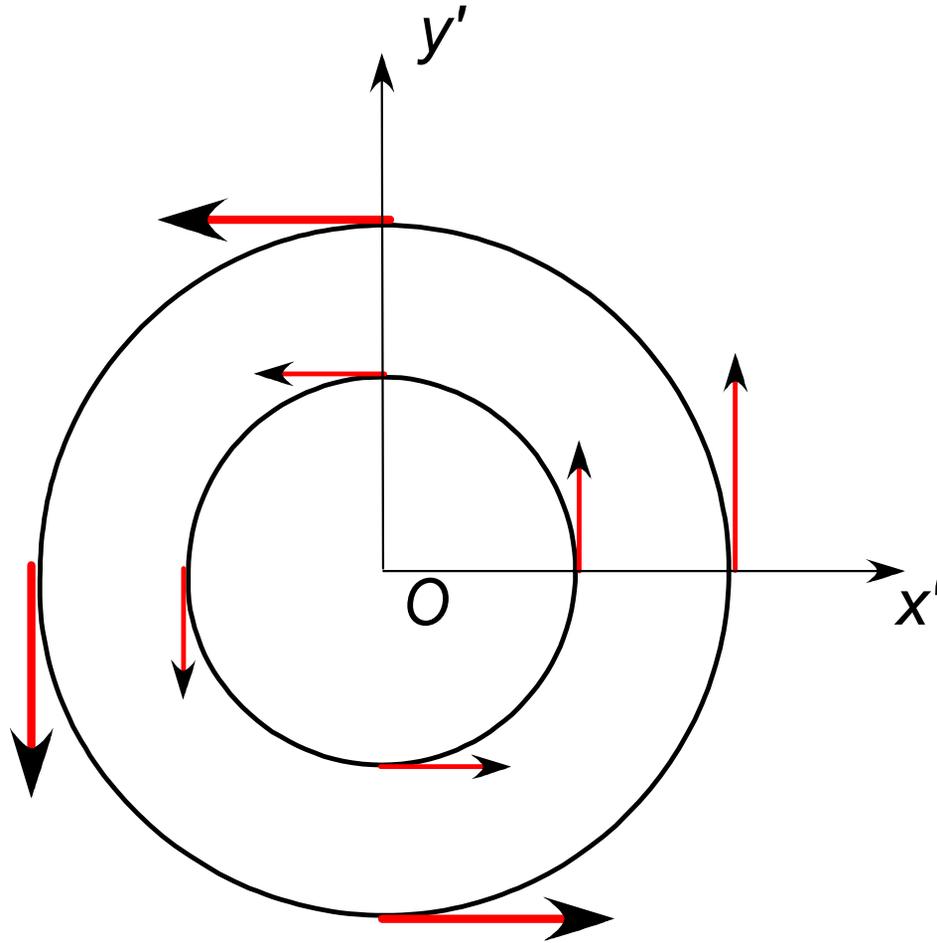


$$\vec{v} = \alpha \vec{\nabla}' x' y'$$

$$\begin{cases} v_{x'} = \alpha y' \\ v_{y'} = \alpha x' \\ v_{z'} = 0 \end{cases}$$

Figure III-1

Allure du champ de vitesses d'un corps solide tournant



$$\vec{v} = \Omega \vec{e}_z \times \vec{r}'$$

$$\begin{cases} v_{x'} = -\Omega y' \\ v_{y'} = \Omega x' \\ v_{z'} = 0 \end{cases}$$

Figure III-2

Allure du champ de vitesses du condensat tournant (suite)

- Le champ de vitesses du condensat tournant n'est pas celui d'un corps solide en rotation.
- La figure III-1 donne le champ des vitesses dans le laboratoire à un instant donné t .
Pour avoir le champ de vitesses à un autre instant t' , il faut tourner la figure III-1 d'un angle $\Omega(t'-t)$.
- Pour avoir le champ de vitesses dans le référentiel tournant, il faut, d'après (3.5), retrancher au champ de vitesses de la figure III-1 le champ :

$$-\vec{\Omega} \times \vec{r}'$$

Calcul exact de l'état fondamental pour Ω quelconque

L'hamiltonien $\hat{h} = \hat{h}_0 - \Omega \hat{l}'_z$ est une fonction quadratique de $\hat{x}', \hat{y}', \hat{p}'_x, \hat{p}'_y$, ou encore de $\hat{a}_x, \hat{a}_x^+, \hat{a}_y, \hat{a}_y^+$ qui peut toujours être diagonalisée.

Cherchons une fonction d'onde de l'état fondamental ayant la forme d'une gaussienne avec une fonction quadratique de x', y' en exposant

$$\tilde{\varphi}_0(x', y', z') = \exp \left\{ -\frac{m}{2\hbar} (\tilde{\omega}_x x'^2 + \tilde{\omega}_y y'^2 + \tilde{\omega}_z z'^2) + i \frac{m}{\hbar} \alpha x' y' \right\} \quad (3.39)$$

Peut-on à partir de l'équation aux valeurs propres déterminer $\tilde{\omega}_x, \tilde{\omega}_y, \tilde{\omega}_z, \alpha$?

Calcul de $\hat{h} \tilde{\varphi}_0(x', y', z')$

Le calcul de $\hat{h} \tilde{\varphi}_0(x', y', z')$ ne présente pas de difficultés et donne

$$\begin{aligned}
 \hat{h} \tilde{\varphi}_0(x', y', z') = & \frac{1}{2} \left[m(\omega_x^2 - \tilde{\omega}_x^2 - 2\Omega\alpha + \alpha^2) x'^2 \right. \\
 & + m(\omega_y^2 - \tilde{\omega}_y^2 + 2\Omega\alpha + \alpha^2) y'^2 + m(\omega_z^2 - \tilde{\omega}_z^2) z'^2 \\
 & + i m(\alpha \tilde{\omega}_x + \alpha \tilde{\omega}_y - \Omega \tilde{\omega}_y + \Omega \tilde{\omega}_x) x' y' \left. \right] \tilde{\varphi}_0(x', y', z') \\
 & + \frac{\hbar}{2} (\tilde{\omega}_x + \tilde{\omega}_y + \tilde{\omega}_z) \tilde{\varphi}_0(x', y', z') \tag{3.40}
 \end{aligned}$$

$\tilde{\varphi}_0(x', y', z')$ est donc une fonction propre de \hat{h} de valeur propre $\hbar(\tilde{\omega}_x + \tilde{\omega}_y + \tilde{\omega}_z)/2$ si les coefficients de $x'^2, y'^2, z'^2, x'y'$ du crochet de (3.40) sont nuls.

Expression de $\tilde{\omega}_x, \tilde{\omega}_y, \tilde{\omega}_z, \alpha$

$$\tilde{\omega}_x^2 = \omega_x^2 + \alpha^2 - 2\Omega\alpha$$

$$\tilde{\omega}_y^2 = \omega_y^2 + \alpha^2 + 2\Omega\alpha$$

$$\tilde{\omega}_z^2 = \omega_z^2$$

$$\alpha = -\Omega \frac{\tilde{\omega}_x - \tilde{\omega}_y}{\tilde{\omega}_x + \tilde{\omega}_y} \quad (3.41)$$

4 équations permettant de déterminer $\tilde{\omega}_x, \tilde{\omega}_y, \tilde{\omega}_z, \alpha$

La phase de la fonction d'onde a la même dépendance en $x'y'$ que pour des vitesses de rotation faibles.

Le champ de vitesses a donc la même structure

Le condensat a toujours les axes du piège comme axes de symétrie. Par contre, l'anisotropie du condensat change quand la vitesse de rotation augmente

Condensat à la limite de Thomas-Fermi

Equation de Gross-Pitaevskii dans le référentiel tournant

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \varphi(\vec{r}', t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta' \varphi(\vec{r}', t) + V_{\text{ext}}(\vec{r}') \varphi(\vec{r}', t) + g |\varphi(\vec{r}', t)|^2 \varphi(\vec{r}', t) - \frac{\hbar}{i} \Omega \left(x' \frac{\partial}{\partial y'} - y' \frac{\partial}{\partial x'} \right) \varphi(\vec{r}', t) \quad (3.42)$$

Le dernier terme, proportionnel à Ω , est le terme nouveau provenant du terme $-\Omega L'_z$ de l'hamiltonien à une particule

Notons que $V_{\text{ext}}(\vec{r}')$ en un point fixe \vec{r}' ne dépend plus du temps puisque le piège est fixe dans le référentiel tournant.

Equations hydrodynamiques à la limite de Thomas-Fermi

En reportant

$$\varphi(\vec{r}', t) = \sqrt{\rho(\vec{r}', t)} e^{iS(\vec{r}', t)} \quad (3.43)$$

dans (3.42) et l'équation complexe conjuguée, on obtient des équations hydrodynamiques pour ρ et S .

A la limite de Thomas-Fermi, il est légitime de négliger un terme dit de pression quantique proportionnel à $(\Delta\sqrt{\rho})/\sqrt{\rho}$.

Par rapport aux équations (1.13), (1.15) et (1-21) du cours I, apparaissent des nouveaux termes, proportionnels à Ω , et provenant du dernier terme de (3.42)

Nouvelle équation de continuité

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(\vec{r}', t) + \vec{\nabla}' \cdot \left\{ \rho(\vec{r}', t) \left[\frac{\hbar}{m} \vec{\nabla}' S(\vec{r}', t) - \vec{\Omega} \times \vec{r}' \right] \right\} = 0 \quad (3.44)$$

Interprétation de cette équation

Compte tenu de (3.5) et (3.36), on peut écrire

$$\frac{\hbar}{m} \vec{\nabla}' S(\vec{r}', t) - \vec{\Omega} \times \vec{r}' = \vec{v}'(\vec{r}', t) \quad (3.45)$$

où $\vec{v}'(\vec{r}, t)$ est le champ de vitesses dans le référentiel tournant.

L'équation de continuité (3.44) peut donc également s'écrire

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(\vec{r}', t) + \vec{\nabla}' \cdot [\rho(\vec{r}', t) \vec{v}'(\vec{r}', t)] = 0 \quad (3.46)$$

qui a bien la forme d'une équation de conservation dans le référentiel tournant.

Nouvelle équation d'Euler

Nouvelle équation d'évolution de la phase

(sans terme de pression quantique)

$$\hbar \frac{\partial S}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} (\vec{\nabla}' S)^2 - V_{\text{ext}} - g\rho + \hbar (\vec{\nabla}' S) \cdot (\vec{\Omega} \times \vec{r}') \quad (3.47)$$

Nouvelle équation du champ de vitesse

$$\vec{v} = \frac{\hbar}{m} \vec{\nabla}' S$$

$$m \frac{\partial}{\partial t} \vec{v} = \vec{\nabla}' \left[-\frac{1}{2} m \vec{v}^2 - V_{\text{ext}} - g\rho + m \vec{v} \cdot (\vec{\Omega} \times \vec{r}') \right] \quad (3.48)$$

Les dernier termes en Ω de (3.47) et (3.48) sont les termes nouveaux

Interprétation de l'équation d'Euler

Etablissons, à partir de (3.48) l'équation donnant la dérivée totale $d\vec{v}'/dt$ du champ de vitesses \vec{v}' dans le référentiel tournant

$$\frac{d}{dt} \vec{v}' = \frac{\partial}{\partial t} \vec{v}' + (\vec{v}' \cdot \vec{\nabla}') \vec{v}' \quad (3.49)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{v}'(\vec{r}', t) = \frac{\partial}{\partial t} [\vec{v}(\vec{r}', t) - \vec{\Omega} \times \vec{r}'] = \frac{\partial}{\partial t} \vec{v}(\vec{r}', t) \quad (3.50)$$

car \vec{r}' doit être considéré constant dans $\partial \vec{v}'(\vec{r}', t) / \partial t$

On déduit donc de (3.48), (3.50) et de (3.5)

$$m \frac{d}{dt} \vec{v}' = \vec{\nabla}' \left[-\frac{m}{2} (\vec{v}' + \vec{\Omega} \times \vec{r}')^2 - V_{\text{ext}} - g \rho + m (\vec{v}' + \vec{\Omega} \times \vec{r}') (\vec{\Omega} \times \vec{r}') \right] + m (\vec{v}' \cdot \vec{\nabla}') \vec{v}' \quad (3.51)$$

Interprétation de l'équation d'Euler (suite)

L'équation (3.51) peut être réécrite sous la forme

$$m \frac{d}{dt} \vec{v}' = -m \left(\frac{1}{2} \vec{\nabla} v'^2 - (\vec{v}' \cdot \vec{\nabla}') \vec{v}' \right) - \vec{\nabla} \left(V_{\text{ext}} + g\rho - \frac{1}{2} m \Omega^2 r_{\perp}'^2 \right) \quad (3.52)$$

Par ailleurs

$$\frac{1}{2} \vec{\nabla} (v'^2) - (\vec{v}' \cdot \vec{\nabla}') \vec{v}' = -(\vec{\nabla}' \times \vec{v}') \times \vec{v}' \quad (3.53)$$

$$\vec{\nabla}' \times \vec{v}' = \vec{\nabla}' \times \vec{v} - \vec{\nabla}' \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) = 0 - 2\vec{\Omega} = -2\vec{\Omega} \quad (3.54)$$

Le champ de vitesses \vec{v} est irrotationnel (gradient) mais non le champ de vitesse \vec{v}'

$$m \frac{d}{dt} \vec{v}' = -\vec{\nabla} \left(V_{\text{ext}} + g\rho - \frac{1}{2} m \Omega^2 r_{\perp}'^2 \right) - 2m \vec{\Omega} \times \vec{v}' \quad (3.55)$$

Equation de la dynamique dans le référentiel tournant avec la force centrifuge et la force de Coriolis

Récapitulation

Quand on réécrit les équations hydrodynamiques dans le référentiel tournant avec le champ de vitesses \vec{v}' dans ce référentiel, elles ont bien la structure habituelle

1 - Equation de conservation

2 - Equation de la dynamique avec toutes les forces apparaissant dans le référentiel tournant

Solution stationnaire de l'équation de G-P dans le référentiel tournant

Dans le référentiel tournant, le potentiel de piégeage ne dépend pas du temps. L'équation (3.42) admet donc des solutions stationnaires.

Il en est de même des équations hydrodynamiques (3.44) et (3.47) la limite de Thomas-Fermi.

Ces solutions stationnaires obéissent aux équations :

$$\vec{\nabla}' \cdot \rho [\vec{v} - \vec{\Omega} \times \vec{r}'] = (\vec{\nabla}' \rho) \cdot [\vec{v} - \vec{\Omega} \times \vec{r}'] + \rho \vec{\nabla}' \cdot [\vec{v} - \vec{\Omega} \times \vec{r}'] = 0 \quad (3.56.a)$$

$$\frac{\hbar^2}{2m} (\vec{\nabla}' S)^2 + V_{\text{ext}} + g\rho - \hbar (\vec{\nabla}' S) \cdot (\vec{\Omega} \times \vec{r}') = K \quad (3.56.b)$$

où K est une constante indépendante de x' , y' , z' .

Existence d'une solution quadratique en x',y',z'

Montrons qu'il existe une solution quadratique en x',y',z' pour la densité ρ et la phase S apparaissant dans les équations (3.56).

$$\rho(x', y', z') = \frac{1}{g} \left[\tilde{\mu} - \frac{m}{2} (\tilde{\omega}_x^2 x'^2 + \tilde{\omega}_y^2 y'^2 + \tilde{\omega}_z^2 z'^2 + 2\gamma x'y') \right] \quad (3.57.a)$$

$$S(x', y', z') = (m/2\hbar) (Ax'^2 + By'^2 + Cz'^2 + 2\alpha x'y') + D \quad (3.57.b)$$

La forme choisie pour ρ rappelle une forme de Thomas-Fermi avec un nouveau potentiel chimique $\tilde{\mu}$.

$\vec{v} = (\hbar/m) \vec{\nabla}' S$ a des composantes linéaires en x',y',z' .

Il n'y a pas de termes linéaires en x',y',z' à cause de l'invariance par réflexion par rapport à O, et pas de termes en $x'z', y'z'$ à cause de l'invariance par réflexion par rapport au plan xOy.

Démonstration de l'existence d'une telle solution

Dans les équations (3.56), V_{ext} est une fonction quadratique de x' , y' , z' :

$$V_{\text{ext}}(x', y', z') = \frac{1}{2}m(\omega_x^2 x'^2 + \omega_y^2 y'^2 + \omega_z^2 z'^2)$$

Si ρ et S sont donnés par les équations (3.57), tous les autres termes des équations (3.56) sont de fonctions quadratiques de x', y', z' sans termes linéaires.

En reportant (3.57) dans (3.56) et en annulant les coefficients des termes en x'^2 , y'^2 , z'^2 , $x'y'$ et les termes constants, on obtient 10 équations permettant de déterminer les 10 coefficients apparaissant dans (3.57).

Forme de la solution

- Champ de vitesses

$$\vec{v} = \frac{\hbar}{m} \vec{\nabla}' S = \begin{pmatrix} Ax' + \alpha y' \\ \alpha x' + By' \\ Cz' \end{pmatrix} \quad (3.58)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = A + B + C \quad (3.59)$$

- L'annulation du terme constant de (3.56.a) donne :

$$A + B + C = 0 \quad (3.60)$$

et donc :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \quad (3.61)$$

Le champ de vitesses correspondant à la solution quadratique cherchée est donc, non seulement irrotationnel, mais aussi de divergence nulle.

Forme de la solution (suite)

- L'annulation du coefficient du terme en z'^2 de (3.56.a) donne :

$$C = 0 \quad (3.62)$$

et par suite, compte tenu de (3.60)

$$A = -B \quad (3.63)$$

D'après (3.58), la vitesse est donc nulle le long de Oz

- L'annulation du coefficient du terme en $x'y'$ de (3.56.a) donne, compte tenu de (3.63)

$$\alpha = -\Omega \frac{\tilde{\omega}_x^2 - \tilde{\omega}_y^2}{\tilde{\omega}_x^2 + \tilde{\omega}_y^2} \quad (3.64)$$

- Les coefficients des termes en x'^2 et y'^2 de (3.56.a) et celui du terme en $x'y'$ de (3.57.b) s'annulent si

$$A = B = \gamma = 0 \quad (3.65)$$

Forme de la solution (suite)

- L'annulation du coefficient du terme en z'^2 de (3.56.b) donne :

$$\tilde{\omega}_z^2 = \omega_z^2 \quad (3.66)$$

- L'annulation des coefficients des terme en x'^2 et y'^2 de (3.56.b) donne :

$$\tilde{\omega}_x^2 = \omega_x^2 + \alpha^2 - 2\alpha\Omega \quad (3.67)$$

$$\tilde{\omega}_y^2 = \omega_y^2 + \alpha^2 + 2\alpha\Omega \quad (3.68)$$

- L'annulation du terme constant de (3.56.b) donne :

$$K = \tilde{\mu} \quad (3.68)$$

Le report de (3.56.b) dans le second membre de (3.47) montre alors que S varie en $\exp(-i\tilde{\mu}t/\hbar)$

- Le terme constant D de (3.57.b) est une phase globale arbitraire.

Récapitulation

Il existe une solution de l'équation de G-P à la limite de Thomas-Fermi qui s'écrit, dans le référentiel tournant :

$$\rho(x', y', z') = \frac{1}{g} \left[\tilde{\mu} - \frac{m}{2} (\tilde{\omega}_x^2 x'^2 + \tilde{\omega}_y^2 y'^2 + \tilde{\omega}_z^2 z'^2) \right] \quad (3.69)$$

$$\vec{v}(x', y', z') = \frac{\hbar}{m} \vec{\nabla}' S(x', y', z') = \alpha \vec{\nabla}' x' y' \quad (3.70)$$

Rappelons que \vec{v} est le champ de vitesses dans le référentiel du labo. L'équation (3.70) donne les composantes de ce champ de vitesses dans le référentiel tournant.

$\tilde{\omega}_x^2, \tilde{\omega}_y^2, \tilde{\omega}_z^2$ sont donnés par (3.67), (3.68), (3.66).

α est donné en fonction de $\Omega, \tilde{\omega}_x^2, \tilde{\omega}_y^2$ par (3.64).

Non-unicité de la solution

La solution quadratique ainsi trouvée n'est pas la seule solution de l'équation de G-P.

Pour le voir, il suffit de noter que le champ de vitesses (3.70) ne peut décrire une situation où un tourbillon (« vortex ») existerait à l'intérieur du condensat, situation observée expérimentalement.

Il existe donc d'autres solutions de l'équation de G-P qui n'ont pas la forme quadratique simple choisie ici

Forme de la densité spatiale

Aussi bien en présence qu'en absence d'interactions, la nouvelle densité spatiale ρ ne contient pas de termes en $x'y'$ et a donc toujours les axes du piège comme axes de symétrie [voir le module de la fonction d'onde équations (3.39) et l'équation (3.69)]

La densité spatiale a une forme Gaussienne en l'absence d'interactions et celle d'un parabolïde inversé à la limite de Thomas-Fermi

Pour des vitesses de rotation suffisamment élevées, $\tilde{\omega}_x^2$ et $\tilde{\omega}_y^2$ diffèrent de ω_x^2 et ω_y^2 , respectivement. Les forces liées à la rotation modifient l'asymétrie du condensat.

Existe-t-il un solution quadratique quelle que soit la vitesse de rotation?

La densité spatiale doit être normalisable et positive

Les valeurs obtenues pour $\tilde{\omega}_x^2$ et $\tilde{\omega}_y^2$ quand on résout les équations couplées (3.64), (3.67) et (3.68) doivent être positives (le paraboloïde doit être inversé et s'annuler en dehors du domaine où la densité spatiale est positive).

Les mêmes contraintes existent en l'absence d'interactions

Les valeurs obtenues pour $\tilde{\omega}_x^2$ et $\tilde{\omega}_y^2$ quand on résout les équations couplées (3.41) doivent elles aussi être positives. Par contre, quand cette condition est satisfaite, la Gaussienne est toujours positive

Champ de vitesses

Il est toujours donné par le gradient de la fonction $x'y'$ et a donc la même structure spatiale qu'en l'absence d'interactions (voir la figure III-1)

Alors que les équations donnant $\tilde{\omega}_x^2$ et $\tilde{\omega}_y^2$ en fonction de ω_x^2 , ω_y^2 , Ω et α ont la même structure en l'absence et en présence d'interactions [voir équations (3.41) et (3.67), (3.68)], il n'en est pas de même pour l'équation reliant α à $\tilde{\omega}_x$, $\tilde{\omega}_y$, Ω [voir équations (3.41) et (3.64)]

Référence

- 1 – A. Recati, F. Zambelli, S. Stringari, Phys. Rev. Lett. 86, 377 (2001)

Condensat dans un piège tournant Moment cinétique et moment d'inertie

Connaissant la fonction d'onde qui décrit le condensat dans le référentiel tournant (voir cours III), il est possible de calculer le moment cinétique du condensat tournant, aussi bien en l'absence qu'en présence d'interactions.

Un tel moment cinétique est proportionnel à la vitesse angulaire de rotation, le coefficient de proportionnalité n'étant autre, à la limite des faibles vitesses de rotation, que le moment d'inertie du condensat.

Nous allons montrer que le moment d'inertie d'un condensat est beaucoup plus faible que celui d'un système classique ou celui d'un nuage thermique de bosons non condensés, ce qui constitue une manifestation spectaculaire de la superfluidité du condensat.

Plan

- 1. Moment cinétique du condensat**
- 2. Limite des faibles vitesses de rotation.
Moment d'inertie**
- 3. Différences avec d'autres systèmes physiques**
 - Gaz parfait classique
 - Gaz parfait de bosons partiellement condensé
- 4. Evolution des phénomènes quand la vitesse de rotation augmente**
 - Etude de quelques valeurs particulières des paramètres de la rotation
 - Excitation des ondes de surface

Moment cinétique du condensat

$$\langle \hat{L}_z \rangle = N \int d^3 r' \varphi_0^* (\vec{r}') \left[x' \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial y'} - y' \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x'} \right] \varphi_0 (\vec{r}') \quad (4.1)$$

En effet, $(\hbar/i)\vec{\nabla}'$ est l'opérateur associé à l'impulsion \vec{p}' dans le référentiel tournant, qui coïncide avec la quantité de mouvement $\vec{p} = m\vec{v}$ dans le référentiel du labo [voir l'équation (3.8)].

$$\langle \hat{L}_z \rangle = N m \int d^3 r' \left[x' J_{y'} (\vec{r}') - y' J_{x'} (\vec{r}') \right] \quad (4.2)$$

où \vec{J} est le courant

$$\vec{J}(\vec{r}') = \rho(\vec{r}') \vec{v}(\vec{r}') = \alpha \rho(\vec{r}') \vec{\nabla}(x'y') \quad (4.3)$$

de composantes

$$\{ \alpha \rho(\vec{r}') y', \alpha \rho(\vec{r}') x', 0 \} \quad (4.4)$$

Moment cinétique du condensat (suite)

En reportant (4.4) dans (4.2), on obtient :

$$\langle \hat{L}_z \rangle = N m \alpha \int d^3 r' \varphi_0^* (\vec{r}') [x'^2 - y'^2] \varphi_0 (\vec{r}') = N m \alpha \langle x'^2 - y'^2 \rangle \quad (4.5)$$

Bosons sans interactions

Utilisons l'expression (3.41) de α et le fait que $\langle x'^2 \rangle \propto (\tilde{\omega}_x)^{-1}$, $\langle y'^2 \rangle \propto (\tilde{\omega}_y)^{-1}$ [voir (3.25)]. Il vient :

$$\begin{aligned} \langle \hat{L}_z \rangle &= -N m \langle x'^2 - y'^2 \rangle \frac{\langle x'^2 \rangle^{-1} - \langle y'^2 \rangle^{-1}}{\langle x'^2 \rangle^{-1} + \langle y'^2 \rangle^{-1}} \Omega \\ &= N m \langle x'^2 + y'^2 \rangle \left(\frac{\langle x'^2 - y'^2 \rangle}{\langle x'^2 + y'^2 \rangle} \right)^2 \Omega = N m \langle x'^2 + y'^2 \rangle \left(\frac{\tilde{\omega}_x - \tilde{\omega}_y}{\tilde{\omega}_x + \tilde{\omega}_y} \right)^2 \Omega \end{aligned} \quad (4.6)$$

Bosons en interaction à la limite de Thomas-Fermi

Il faut maintenant utiliser l'expression (3.64) de α et le fait que, pour une densité spatiale ayant la forme d'un paraboloïde inversé, $\langle x'^2 \rangle \propto (\tilde{\omega}_x)^{-2}$, $\langle y'^2 \rangle \propto (\tilde{\omega}_y)^{-2}$.

Il vient ainsi:

$$\begin{aligned} \langle \hat{L}_z \rangle &= -N m \langle x'^2 - y'^2 \rangle \frac{\langle x'^2 \rangle^{-1} - \langle y'^2 \rangle^{-1}}{\langle x'^2 \rangle^{-1} + \langle y'^2 \rangle^{-1}} \Omega \\ &= N m \langle x'^2 + y'^2 \rangle \left(\frac{\langle x'^2 - y'^2 \rangle}{\langle x'^2 + y'^2 \rangle} \right)^2 \Omega = N m \langle x'^2 + y'^2 \rangle \left(\frac{\tilde{\omega}_x^2 - \tilde{\omega}_y^2}{\tilde{\omega}_x^2 + \tilde{\omega}_y^2} \right)^2 \Omega \end{aligned} \quad (4.7)$$

Définition générale du moment d'inertie

- Système physique dans un piège tournant à la fréquence angulaire Ω
- Dans le référentiel tournant, il faut ajouter à l'hamiltonien la perturbation $-\Omega \hat{L}_z$
- A cause de cette perturbation, il apparaît un moment cinétique moyen $\langle \hat{L}_z \rangle$ qui, à l'ordre 1 en Ω , vaut $\langle \hat{L}_z \rangle = \Theta \Omega$

Θ est par définition le moment d'inertie

Calcul du moment d'inertie

Les expressions (4.6) et (4.7) du moment cinétique contiennent déjà la fréquence de rotation Ω .

A l'ordre le plus bas en Ω , il suffit de remplacer dans (4.6) et (4.7) $\tilde{\omega}_x$ et $\tilde{\omega}_y$ par leurs valeurs d'ordre le plus bas en Ω , qui d'après (3.41), (3.64), (3.67) et (3.68), ne sont autres que ω_x et ω_y

Il est intéressant également d'exprimer le moment d'inertie ainsi obtenu en fonction du moment d'inertie qui serait celui de la même densité spatiale tournant de manière rigide

$$\Theta_{\text{rig}} = N m \langle x'^2 + y'^2 \rangle \quad (4.8)$$

Expressions du moment d'inertie

Bosons sans interactions

$$\Theta = \Theta_{\text{rig}} \left(\frac{\omega_x - \omega_y}{\omega_x + \omega_y} \right)^2 \quad (4.9)$$

Bosons en interaction à la limite de Thomas-Fermi

$$\Theta = \Theta_{\text{rig}} \left(\frac{\omega_x^2 - \omega_y^2}{\omega_x^2 + \omega_y^2} \right)^2 \quad (4.10)$$

Dans les 2 cas étudiés, le moment d'inertie obtenu est beaucoup plus faible que la valeur rigide.

Il est intéressant de comparer ce résultat à celui attendu pour d'autres systèmes non condensés, comme des gaz classiques ou des nuages thermiques

Moment d'inertie d'un gaz classique

Dans le référentiel tournant, l'hamiltonien est indépendant du temps et le gaz atteint un état d'équilibre thermodynamique décrit par la densité classique (dans l'espace des phases)

$$f = \frac{1}{Z} \exp \left\{ -\beta \sum_{i=1}^N [h_0(i) - \Omega L'_{zi}] \right\} \quad (4.11)$$

$$h_0 = \frac{1}{2m} (p'_x{}^2 + p'_y{}^2 + p'_z{}^2) + \frac{m}{2} (\omega_x^2 x'^2 + \omega_y^2 y'^2 + \omega_z^2 z'^2) \quad (4.12)$$

$$L'_z = x' p'_y - y' p'_x$$

$$\beta = \frac{1}{kT} \quad Z = \text{fonction de partition} \quad (4.13)$$

A l'ordre 1 inclus en Ω

$$f = f_0 \left[1 + \beta \Omega \sum_i L'_{zi} \right] \quad Z = Z_0 \quad (4.14)$$

f_0, Z_0 : valeurs de f et Z pour $\Omega = 0$

Valeur moyenne de L_z (à l'ordre 1 inclus en Ω)

$$\begin{aligned} \langle L'_z \rangle &= \beta \Omega \int \cdots \int d^3 r'_i dp'_i f_0 \left(\sum_i L'^2_{zi} \right) \\ &= \beta \Omega N \langle L'^2_z \rangle = \beta \Omega N \langle (x' p'_y - y' p'_x)^2 \rangle_0 \end{aligned} \quad (4.15)$$

$\langle \rangle_0$: valeur moyenne dans l'état f_0

Comme

$$\langle p'_x p'_y \rangle_0 = 0 \quad \langle p'_x \rangle^2 = \langle p'_y \rangle^2 = m k_B T = m \beta^{-1} \quad (4.16)$$

$$\langle L'_z \rangle = \Omega \sum_{i=1}^N m \langle x_i'^2 + y_i'^2 \rangle_0 = \Omega \Theta_{\text{rig}} \quad (4.17)$$

Le moment d'inertie a la valeur d'un corps rigide

Moment d'inertie d'un gaz parfait de bosons

Motivations de cette étude

Le calcul perturbatif du moment cinétique est relativement facile.

Si le gaz est partiellement condensé, on peut évaluer les contributions respectives du condensat et du nuage thermique et mettre ainsi directement en évidence les différences de comportement.

Calcul perturbatif de $\langle \hat{L}_z \rangle$

Au lieu de calculer la structure du champ de vitesses dans l'état fondamental perturbé, puis d'en déduire $\langle \hat{L}'_z \rangle$, puis Θ , nous allons ici directement calculer le moment cinétique moyen des N bosons à partir de leur état perturbé $|\tilde{\varphi}_0\rangle$

$$\langle \hat{L}'_z \rangle = \langle \tilde{\varphi}_0 | \hat{L}'_z | \tilde{\varphi}_0 \rangle \quad (4.18)$$

$$|\tilde{\varphi}_0\rangle = |\varphi_0\rangle - \Omega \sum_{n \neq 0} |\varphi_n\rangle \frac{\langle \varphi_n | \hat{L}'_z | \varphi_0 \rangle}{E_0 - E_n} \quad (4.19)$$

$$\langle \tilde{\varphi}_0 | \hat{L}'_z | \tilde{\varphi}_0 \rangle \simeq 2\Omega \sum_{n \neq 0} \frac{|\langle \varphi_n | \hat{L}'_z | \varphi_0 \rangle|^2}{E_n - E_0} \quad (4.20)$$

Généralisation

Au lieu de supposer initialement le système dans l'état fondamental $|\varphi_0\rangle$ de l'hamiltonien \hat{H}_0 des N bosons, on peut le supposer dans un mélange statistique des états propres $|\varphi_m\rangle$ de \hat{H}_0 avec des poids π_m . L'expression généralisant (4.20) est alors

$$\langle \hat{L}'_z \rangle = 2\Omega \sum_{n \neq m} \sum_m \pi_m \frac{|\langle \varphi_n | \hat{L}_z | \varphi_m \rangle|^2}{E_n - E_m} \quad (4.21)$$

Les valeurs des π_m dépendent de l'équilibre thermodynamique considéré (canonique, grand canonique)

Transformation de l'expression de $\langle \hat{L}'_z \rangle$

Supposons qu'on trouve un opérateur A tel que

$$\langle \varphi_n | \hat{A} | \varphi_m \rangle = \frac{\langle \varphi_n | \hat{L}'_z | \varphi_m \rangle}{E_n - E_m} \quad (4.22)$$

Un tel opérateur \hat{A} permet alors d'écrire :

$$2 \frac{|\langle \varphi_n | \hat{L}'_z | \varphi_m \rangle|^2}{E_n - E_m} = \langle \varphi_m | \hat{L}'_z | \varphi_n \rangle \langle \varphi_n | \hat{A} | \varphi_m \rangle - \langle \varphi_m | \hat{A} | \varphi_n \rangle \langle \varphi_n | \hat{L}'_z | \varphi_m \rangle \quad (4.23)$$

La sommation sur n fait alors apparaître la relation de fermeture et conduit à :

$$\langle \hat{L}'_z \rangle = \Omega \sum_m \pi_m \langle \varphi_m | [\hat{L}'_z, \hat{A}] | \varphi_m \rangle = \Omega \langle [\hat{L}'_z, \hat{A}] \rangle \quad (4.24)$$

Calcul de \hat{A}

L'équation (4.22) de définition de \hat{A} est équivalente à

$$\langle \varphi_n | \hat{H}_0 \hat{A} - \hat{A} \hat{H}_0 | \varphi_m \rangle = \langle \varphi_n | \hat{L}'_z | \varphi_m \rangle \quad (4.25)$$

c-à-d, comme $|\varphi_m\rangle$ et $|\varphi_n\rangle$ sont quelconques

$$[\hat{H}_0, \hat{A}] = \hat{L}'_z \quad (4.26)$$

Pour trouver la solution de (4.26), il suffit de remarquer que \hat{H}_0 et \hat{L}'_z étant des fonctions quadratiques de $\hat{x}, \hat{y}, \hat{p}_x, \hat{p}_y$, \hat{A} doit être aussi une fonction quadratique qui mélange x et y

$$\hat{A} = \sum_{i=1}^N (a \hat{x}'_i \hat{y}'_i + b \hat{p}'_{xi} \hat{p}'_{yi} + c \hat{x}'_i \hat{p}'_{yi} + d \hat{y}'_i \hat{p}'_{xi}) \quad (4.27)$$

Expression de \hat{A}

Reportons (4.27) dans (4.28). Le calcul des commutateurs avec les divers termes de \hat{H}_0 ne présente pas de difficultés. L'identification du résultat obtenu avec \hat{L}'_z détermine a, b, c, d ,

$$\hat{A} = -\frac{i}{\hbar} \frac{1}{\omega_x^2 - \omega_y^2} \sum_{i=1}^N \left[(\omega_x^2 + \omega_y^2) \hat{x}'_i \hat{y}'_i + \frac{2}{m} \hat{p}'_{xi} \hat{p}'_{yi} \right] \quad (4.28)$$

expression qui n'a de sens que si ω_x est différent de ω_y

Calcul de $[\hat{L}'_z, \hat{A}]$

Le calcul du commutateur de \hat{A} écrit en (4.28) avec

$$\hat{L}'_z = \sum_i (\hat{x}'_i \hat{p}'_{yi} - \hat{y}'_i \hat{p}'_{xi}) \text{ donne}$$

$$[\hat{L}'_z, \hat{A}] = \frac{1}{\omega_x^2 - \omega_y^2} \sum_{i=1}^N \left[m(\omega_x^2 + \omega_y^2) (\hat{y}'_i{}^2 - \hat{x}'_i{}^2) + \frac{2}{m} (\hat{p}'_{yi}{}^2 - \hat{p}'_{xi}{}^2) \right] \quad (4.29)$$

Expression de $\langle \hat{L}'_z \rangle$

Elle est obtenue par report de (4.29) dans (4.24)

Comme l'opérateur densité du système est diagonal dans la base d'énergie (mélange statistique d'états propres de \hat{H}_0), seuls les éléments diagonaux de \hat{x}'^2 , \hat{y}'^2 , \hat{p}'^2_x , \hat{p}'^2_y apparaissent, de sorte qu'on peut utiliser les relations :

$$\langle \hat{p}'^2_x \rangle = m^2 \omega_x^2 \langle \hat{x}'^2 \rangle \quad \langle \hat{p}'^2_y \rangle = m^2 \omega_y^2 \langle \hat{y}'^2 \rangle \quad (4.30)$$

ce qui permet finalement d'écrire

$$\Theta = \frac{\langle \hat{L}'_z \rangle}{\Omega} = \frac{m N}{\omega_x^2 - \omega_y^2} \left[(\omega_x^2 + \omega_y^2) (\langle \hat{y}'^2 \rangle - \langle \hat{x}'^2 \rangle) + 2 (\omega_y^2 \langle \hat{y}'^2 \rangle - \omega_x^2 \langle \hat{x}'^2 \rangle) \right] \quad (4.31)$$

Contributions respectives du condensat et du nuage thermique

En dessous de la température critique T_C , N_0 particules sont condensées dans l'état fondamental $|\varphi_0\rangle$ de \hat{H}_0 . Les $N-N_0$ autres particules forment le nuage thermique.

$$\Theta = \Theta_{\text{cond}} + \Theta_{\text{th}} \quad (4.32)$$

$$\Theta_{\text{cond}} = \frac{m N_0}{\omega_x^2 - \omega_y^2} \left[(\omega_x^2 + \omega_y^2) \left(\langle \hat{y}'^2 \rangle_0 - \langle \hat{x}'^2 \rangle_0 \right) \right] + 2 \left(\omega_y^2 \langle \hat{y}'^2 \rangle_0 - \omega_x^2 \langle \hat{x}'^2 \rangle_0 \right) \quad (4.33)$$

$$\Theta_{\text{th}} = \frac{m (N - N_0)}{\omega_x^2 - \omega_y^2} \left[(\omega_x^2 + \omega_y^2) \left(\langle \hat{y}'^2 \rangle_{\text{th}} - \langle \hat{x}'^2 \rangle_{\text{th}} \right) \right] + 2 \left(\omega_y^2 \langle \hat{y}'^2 \rangle_{\text{th}} - \omega_x^2 \langle \hat{x}'^2 \rangle_{\text{th}} \right) \quad (4.34)$$

$\langle \rangle_0$ ($\langle \rangle_{\text{th}}$): moyenne dans le condensat (nuage thermique)

Calcul de Θ_{cond}

Rappelons que [voir (3.25)]:

$$\langle \hat{x}'^2 \rangle_0 = \frac{\hbar}{2m\omega_x} \quad \langle \hat{y}'^2 \rangle_0 = \frac{\hbar}{2m\omega_y} \quad (4.35)$$

On en déduit:

$$\begin{aligned} \Theta_{\text{cond}} &= \frac{N_0 \hbar}{2} \left[\left(\frac{\omega_x^2 + \omega_y^2}{\omega_x^2 - \omega_y^2} \right) \left(\frac{1}{\omega_y} - \frac{1}{\omega_x} \right) + \frac{2}{\omega_x^2 - \omega_y^2} (\omega_y - \omega_x) \right] \\ &= \frac{N_0 \hbar}{2} \frac{1}{\omega_x + \omega_y} \left[\frac{\omega_x^2 + \omega_y^2}{\omega_x \omega_y} - 2 \right] = \frac{N_0 \hbar}{2} \left(\frac{1}{\omega_y} + \frac{1}{\omega_x} \right) \left(\frac{\omega_y - \omega_x}{\omega_y + \omega_x} \right)^2 \end{aligned} \quad (4.36)$$

$$\Theta_{\text{cond}} = N_0 m \left(\langle x'^2 + y'^2 \rangle_0 \right) \left(\frac{\langle x'^2 - y'^2 \rangle_0}{\langle x'^2 + y'^2 \rangle_0} \right)^2 \quad (4.37)$$

On retrouve le résultat déjà obtenu en (4.6) ou (4.9)

Densité spatiale du nuage thermique

Voir cours 1996-97, page V-3, équation (5.14)

$$\rho_{\text{th}}(\vec{r}) = \frac{1}{\lambda_{\text{dB}}^3} g_{3/2} \left[z \exp \left\{ -V_{\text{ext}}(\vec{r}) / k_B T \right\} \right] \quad (4.38)$$

$$\lambda_{\text{dB}} = \sqrt{\frac{2\pi\hbar^2}{m k_B T}} \quad (4.39)$$

Longueur d'onde de de Broglie thermique

z Fugacité (égale à 1 pour $T = T_C$) (4.40)

$$g_\alpha(x) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{x^l}{l^\alpha} \quad \text{Fonction de Bose} \quad (4.41)$$

$$V_{\text{ext}}(\vec{r}) = \frac{1}{2} m (\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2)$$

Expression de $\langle \hat{x}'^2 \rangle_{\text{th}}$

$$\langle \hat{x}'^2 \rangle_{\text{th}} = \frac{\int d^3 r' \rho_{\text{th}}(r') x'^2}{\int d^3 r' \rho_{\text{th}}(r')} \quad (4.42)$$

Développons la fonction de Bose $g_{3/2}$. Les intégrales sur x', y', z' se factorisent.

Après le changement de variables

$$u^2 = \frac{\ell m \omega_x^2 x'^2}{k_B T} \quad v^2 = \frac{\ell m \omega_x^2 y'^2}{k_B T} \quad w^2 = \frac{\ell m \omega_x^2 z'^2}{k_B T} \quad (4.43)$$

on fait apparaître, au numérateur $g_4(z)$, au dénominateur $g_3(z)$, et les intégrales:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} u^2 du = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \quad (4.44)$$

Résultat obtenu pour $\langle \hat{x}'^2 \rangle_{\text{th}}$ et $\langle \hat{y}'^2 \rangle_{\text{th}}$

$$\langle \hat{x}'^2 \rangle_{\text{th}} = \frac{k_B T}{m \omega_x^2} \frac{g_4(z)}{g_3(z)} \quad (4.45.a)$$

$$\langle \hat{y}'^2 \rangle_{\text{th}} = \frac{k_B T}{m \omega_y^2} \frac{g_4(z)}{g_3(z)} \quad (4.45.b)$$

Pour $T \gg T_C$, $z \ll 1$, $g_4(z)/g_3(z) \simeq 1$

On retrouve le résultat bien connu donné par l'équipartition de l'énergie:

$$\langle \hat{x}'^2 \rangle_{\text{th}} = k_B T / m \omega_x^2 \quad \langle \hat{y}'^2 \rangle_{\text{th}} = k_B T / m \omega_y^2 \quad (4.46)$$

Pour $T < T_C$, $z = 1$, $g_4(z)/g_3(z) < 1$

Le nuage se contracte
Effet de la statistique de Bose

Calcul de Θ_{th}

Reportons (4.45.a) et (4.45.b) dans (4.34)

Le dernier terme du crochet s'annule et il vient:

$$\begin{aligned}\Theta_{\text{th}} &= m(N - N_0) \left(\frac{1 / \langle \hat{x}'^2 \rangle_{\text{th}} + 1 / \langle \hat{y}'^2 \rangle_{\text{th}}}{1 / \langle \hat{x}'^2 \rangle_{\text{th}} - 1 / \langle \hat{y}'^2 \rangle_{\text{th}}} \right) \left(\langle \hat{y}'^2 \rangle_{\text{th}} - \langle \hat{x}'^2 \rangle_{\text{th}} \right) \\ &= m(N - N_0) \left(\langle \hat{y}'^2 \rangle_{\text{th}} + \langle \hat{x}'^2 \rangle_{\text{th}} \right) = \Theta_{\text{rig}}\end{aligned}\quad (4.47)$$

Les $N - N_0$ particules non condensées tournent
comme un corps rigide

Récapitulation

Quand on fait tourner un piège contenant un gaz parfait de bosons partiellement condensé,

- Les $N-N_0$ bosons non condensés tournent comme un corps rigide, même quand ω_x tend vers ω_y
- Le condensat est beaucoup moins entraîné et a un moment d'inertie beaucoup plus petit, qui tend vers 0 quand ω_x tend vers ω_y

Manifestation spectaculaire de la superfluidité du condensat

Evolution des phénomènes quand la vitesse de rotation augmente

Les paramètres qui décrivent l'anisotropie du condensat tournant et son champ de vitesses

$$\tilde{\omega}_x^2, \tilde{\omega}_y^2, \alpha \quad (4.48)$$

dépendent de la vitesse de rotation Ω et du coefficient

$$\varepsilon = \frac{\omega_x^2 - \omega_y^2}{\omega_x^2 + \omega_y^2} \quad (4.49)$$

caractérisant l'anisotropie du piège.

Étudions les variations de ces divers paramètres quand Ω augmente.

Equation donnant α

Etudions plus particulièrement le cas de bosons en interaction à la limite de Thomas-Fermi.

Repartons des équations (3.67), (3.68) et (3.64) du cours III

$$\tilde{\omega}_x^2 = \omega_x^2 + \alpha^2 - 2\alpha\Omega \quad (4.50)$$

$$\tilde{\omega}_y^2 = \omega_y^2 + \alpha^2 + 2\alpha\Omega \quad (4.51)$$

$$\alpha = -\Omega \frac{\tilde{\omega}_x^2 - \tilde{\omega}_y^2}{\tilde{\omega}_x^2 + \tilde{\omega}_y^2} \quad (4.52)$$

Equation donnant α (suite)

Reportons (4.50) et (4.51) dans (4.52). Il vient :

$$\alpha = -\Omega \frac{\omega_x^2 - \omega_y^2 - 4\alpha\Omega}{\omega_x^2 + \omega_y^2 + 2\alpha^2} \quad (4.53)$$

qui peut encore s'écrire

$$2\alpha^3 + \alpha(\omega_x^2 + \omega_y^2 - 4\Omega^2) + \Omega(\omega_x^2 - \omega_y^2) = 0 \quad (4.54)$$

Equation du troisième degré

Les seules racines acceptables sont celles qui donnent

$$\tilde{\omega}_x^2 \geq 0 \quad \tilde{\omega}_y^2 \geq 0$$

Etude de quelques cas limites

Limite $\Omega \ll \omega_x, \omega_y$

L'équation (4.54) n'a alors qu'une racine égale, à l'ordre le plus bas en Ω à :

$$\alpha \simeq - \frac{\omega_x^2 - \omega_y^2}{\omega_x^2 + \omega_y^2} \Omega \quad (4.55)$$

D'après (4.50), (4.51) et (4.52), $\tilde{\omega}_x$ et $\tilde{\omega}_y$ ne diffèrent de ω_x et ω_y que par des termes en Ω^2 .

L'anisotropie du condensat change donc très peu aux faibles vitesses de rotation

Limite $\Omega \gg \omega_x, \omega_y$

L'équation (4.54) a alors une racine qui, à l'ordre le plus bas en $1/\Omega$, vaut :

$$\alpha \simeq + \frac{1}{4\Omega} (\omega_x^2 - \omega_y^2) \quad (4.56)$$

Les équations (4.50) et (4.51) donnent alors :

$$\tilde{\omega}_x^2 \simeq \tilde{\omega}_y^2 \simeq \frac{1}{2} (\omega_x^2 + \omega_y^2) \quad (4.57)$$

La rotation très rapide du piège fait ainsi apparaître un potentiel effectif isotrope, faisant intervenir la moyenne des 2 raideurs sur Ox et Oy.

Noter le changement de signe de α quand on passe de la valeur (4.55) à la valeur (4.56).

Cas d'un piège isotrope ($\omega_x = \omega_y$)

Pour $\Omega \leq \omega_x / \sqrt{2}$

L'équation (4.54) n'a qu'une seule racine

$$\alpha = 0 \quad (4.58)$$

Pour $\omega_x / \sqrt{2} < \Omega \leq \omega_x$

L'équation (4.54) a trois racines :

$$\alpha = 0 \quad (4.59)$$

$$\alpha = \pm \sqrt{2\Omega^2 - \omega_x^2} \quad (4.60)$$

Pour $\Omega = \omega_x$

La racine $\alpha = \omega_x$ conduit à $\tilde{\omega}_x = 0$, la racine $\alpha = -\omega_x$ à $\tilde{\omega}_y = 0$.

Pour $\Omega > \omega_x$

Les racines (4.60) ne sont plus acceptables car elles conduisent à $\tilde{\omega}_x^2$ ou $\tilde{\omega}_y^2$ négatif.

Valeurs possibles de α en fonction de Ω / ω_x pour $\omega_x = \omega_y$

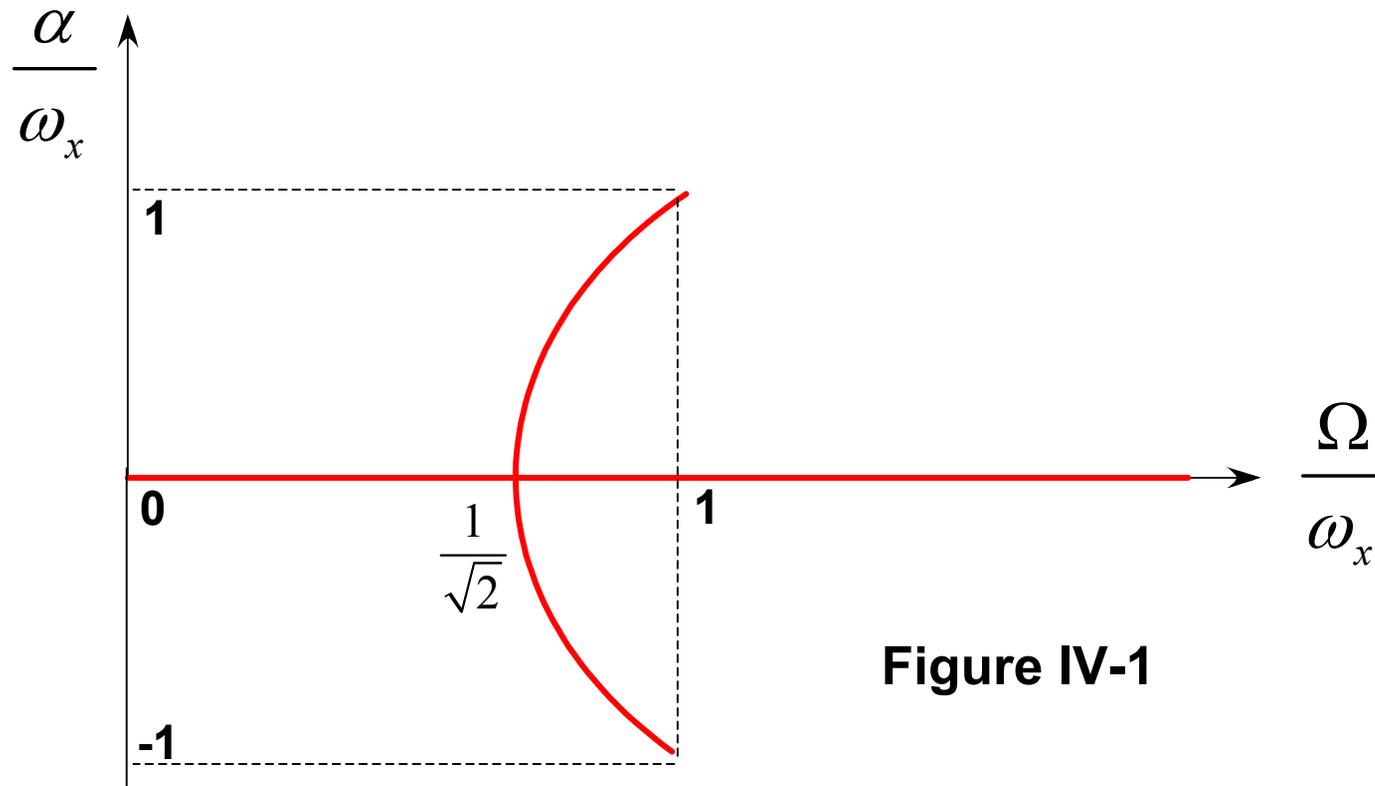
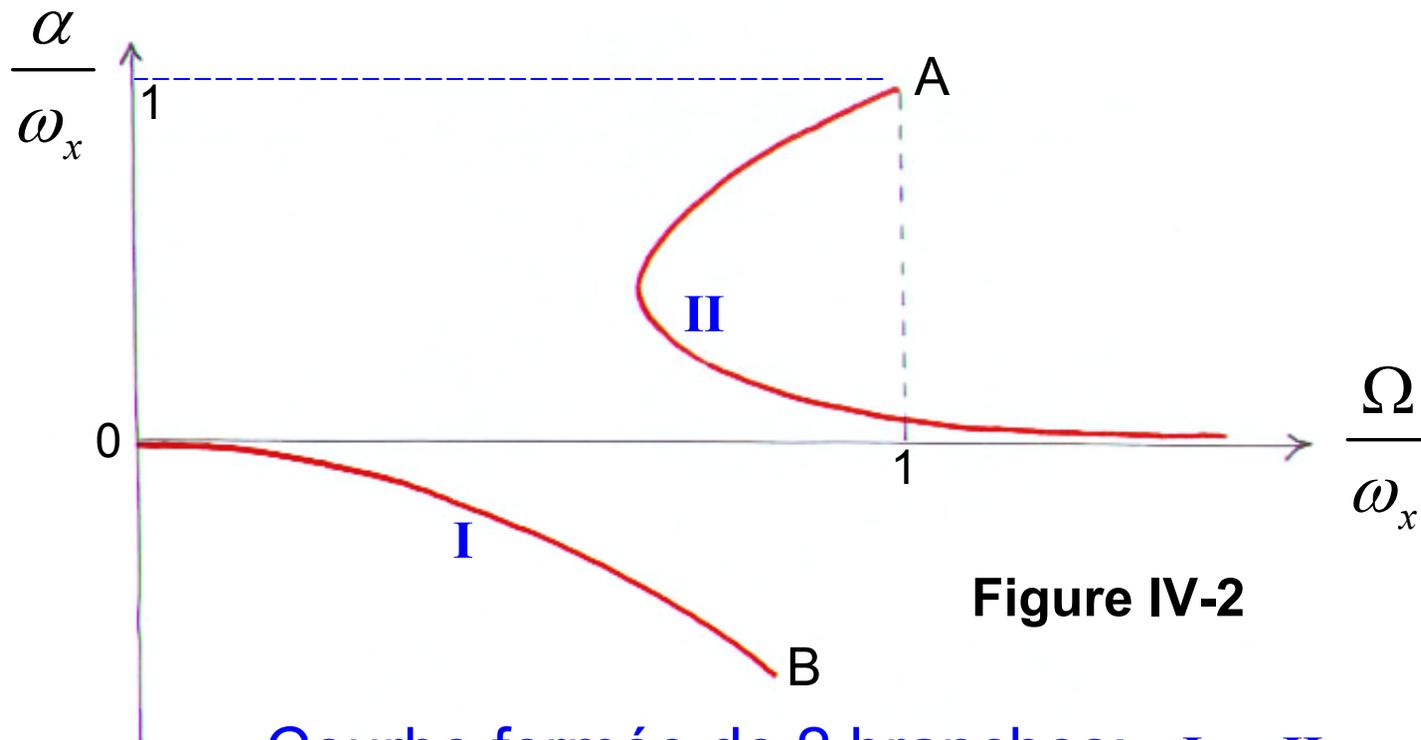


Figure IV-1

Bifurcation et brisure spontanée de symétrie quand Ω atteint la valeur $\omega_x / \sqrt{2}$

L'interprétation physique sera donnée ultérieurement

**Allure de la courbe donnant α en fonction de Ω/ω_x
pour $\omega_x \neq \omega_y$ ($\omega_x > \omega_y$)**



Courbe formée de 2 branches: I , II

-Changement de signe pour $\Omega \rightarrow \infty$

-Point A $\Omega = \omega_x$ $\alpha = \omega_x$ solution de (4.54) $\tilde{\omega}_x = 0$

-Point B $\Omega = \omega_y$ $\alpha = -\omega_y$ solution de (4.54) $\tilde{\omega}_y = 0$

Évolution de l'anisotropie du condensat

D'après (4.52), α / Ω est proportionnel à l'anisotropie du condensat

$$- \frac{\tilde{\omega}_x^2 - \tilde{\omega}_y^2}{\tilde{\omega}_x^2 + \tilde{\omega}_y^2} \quad (4.61)$$

Comme la concavité de la branche I de la figure IV-2 est dirigée vers le bas, l'anisotropie du piège augmente quand Ω croît à partir de 0

Notons que si on diminue Ω à partir d'une grande valeur (branche II), l'anisotropie du condensat a un signe opposé au précédent.

Interprétation de la bifurcation apparaissant pour $\varepsilon = 0$

Le condensat reste isotrope tant que $\Omega < \omega_x / \sqrt{2}$ et peut ensuite devenir très anisotrope quand Ω atteint et dépasse cette valeur.

Un tel phénomène correspond à l'excitation résonnante du mode de surface $n_r = 0$, $\ell = 2$, $m = 2$ qui consiste en une déformation elliptique tournant à la vitesse $\omega_0 / \sqrt{2}$ dans le plan xOy (voir T-42 . Ici $\omega_0 = \omega_x = \omega_v$)

Transfert d'énergie et de moment cinétique du piège tournant au condensat

Considérons le piège tournant et le condensat comme un système global isolé

État initial

- Piège de moment d'inertie I tournant à la vitesse angulaire Ω_i
- Condensat dans l'état fondamental

État final

- Piège tournant à la vitesse Ω_f
- Excitation élémentaire créée dans le condensat

Energie : $E = \hbar\omega(\ell)$ Moment cinétique : $L_z = \hbar\ell$

Équations de conservation

Énergie

$$\frac{1}{2}I \Omega_i^2 = \frac{1}{2}I \Omega_f^2 + \hbar\omega(\ell) \quad (4.62)$$

Moment cinétique

$$I \Omega_i = I \Omega_f + \hbar\ell \quad (4.63)$$

De (4.63), on déduit

$$\Omega_f = \Omega_i - \frac{\hbar\ell}{I} \quad (4.64)$$

qui, reporté dans (4.62) donne

$$\frac{(\hbar\ell)^2}{2I} - \hbar\ell\Omega_i = -\hbar\omega(\ell) \quad (4.65)$$

$$\Omega_i = \frac{\omega(\ell)}{\ell} + \frac{\hbar\ell}{2I} \quad (4.66)$$

Limite $I \rightarrow \infty$

Le piège est un objet macroscopique et il faut faire tendre I vers l'infini.

L'équation (4.66) montre que le transfert résonnant d'énergie et de moment cinétique du piège tournant au condensat n'est possible que si

$$\Omega_i \geq \frac{\omega(\ell)}{\ell} \quad (4.67)$$

Pour une onde de surface quadrupolaire

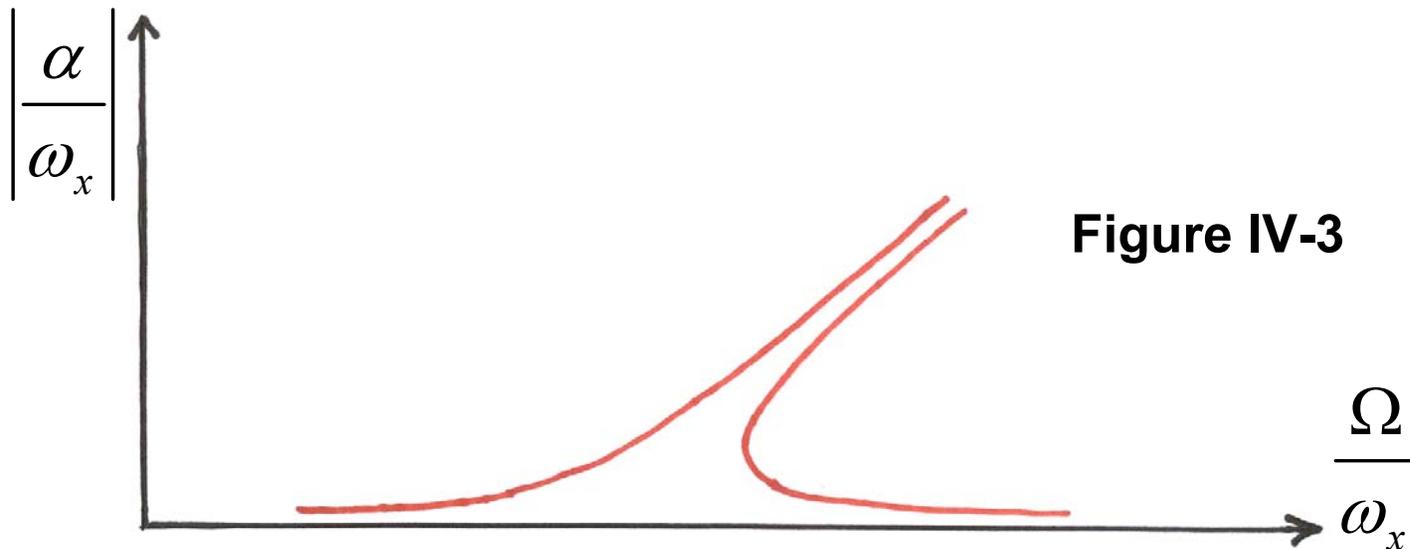
$$\ell = 2 \quad \omega(\ell) = \omega_0 \sqrt{2} \quad \omega(\ell)/\ell = \omega_0 / \sqrt{2}$$

On retrouve bien la condition $\Omega \geq \omega_0 / \sqrt{2}$

Analogie avec la vitesse critique apparaissant pour un transfert résonnant d'énergie et de quantité de mouvement à un superfluide.

Analogie avec la résonance d'un oscillateur non linéaire

Si, sur la courbe de la figure IV-2, on porte en ordonnées le module de α et non α , on obtient, pour $\varepsilon \ll 1$, une courbe ayant l'allure suivante



qui rappelle celle décrivant la résonance d'un oscillateur non linéaire dont la fréquence dépend de l'amplitude.

Autres problèmes intéressants

Stabilité dynamique

Les régimes stationnaires décrits par les branches de la figure IV-2 peuvent être dynamiquement instables, un faible écart à l'équilibre pouvant croître et diverger (voir références 1, 4)

Par exemple, le mouvement du centre de masse du condensat, indépendant des interactions, n'est stable que si

$$\Omega < \omega_y \quad \text{ou} \quad \Omega > \omega_x$$

Nucléation de tourbillons

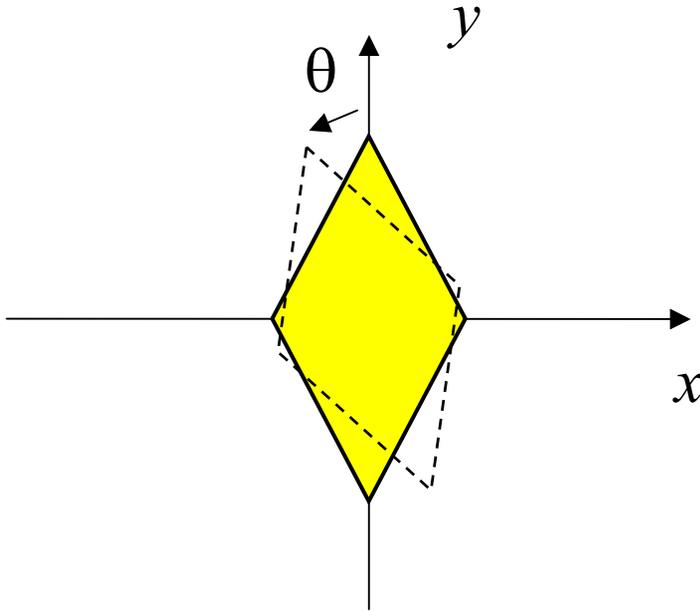
L'excitation résonnante du mode de surface $\ell = 2, m = 2$ au voisinage de $\omega_x / \sqrt{2}$ semble jouer un rôle important (voir référence 5)

Références

(reprise et suite de T-116)

- 1 - A. Recati, F. Zambelli, S. Stringari, Phys. Rev. Lett. 86, 377 (2001)
- 2 - J. Garcia-Ripoll, V. Pérez-Garcia, arXiv:cond-mat/0003451 v2
- 3 - S. Stringari, Phys. Rev. Lett. 76, 1405 (1996)
- 4 - S. Sinha, Y. Castin, Phys. Rev. Lett. 87, 190402 (2001)
- 5 - K. Madison, F. Chevy, V. Bretin, J. Dalibard, Phys. Rev. Lett. 86, 4443 (2001)

Oscillations d'un corps solide autour d'une position d'équilibre



Corps solide de moment
d'inertie I écarté d'un
petit angle θ par rapport
à sa position d'équilibre
le long de Oy

Moment Γ des forces de rappel

$$\Gamma = -C \theta \quad (5.1)$$

C : Constante de rappel

Fréquence d'oscillation

Une fois lâché, le système effectue un mouvement autour de Oz décrit par l'équation de la dynamique

$$I \frac{d^2 \theta}{dt^2} = \Gamma = -C \theta \quad (5.2)$$

Oscillations angulaires de fréquence

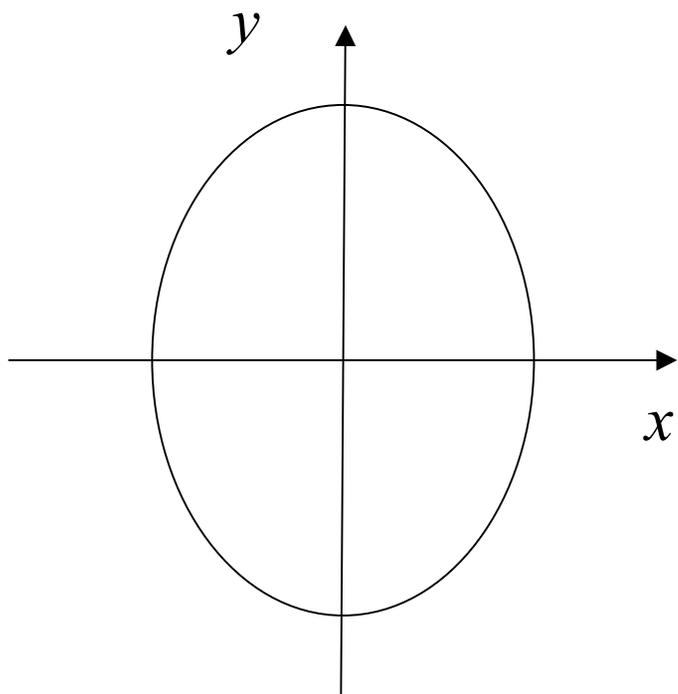
$$\omega = \sqrt{\frac{C}{I}} \quad (5.3)$$

Si la constante de rappel C tend vers 0, la fréquence d'oscillation tend aussi vers 0.

Peut-on observer des phénomènes analogues sur un condensat ?

Condensat dans un piège légèrement anisotrope dans le plan xOy

ω_x un peu plus grand que ω_y



Condensat légèrement allongé le long de Oy .

Si l'on tourne le condensat d'un petit angle à partir de sa position d'équilibre, le moment des forces de rappel va être d'autant plus petit que l'anisotropie initiale est plus petite.

Problèmes posés

Une fois lâché à partir d'une position légèrement tournée par rapport à sa position d'équilibre

- Le condensat va-t-il osciller angulairement en gardant la même forme?
- A quelle fréquence?
- Cette fréquence d'oscillation angulaire va-t-elle tendre vers 0 quand l'anisotropie du piège tend vers 0?

Problèmes étudiés dans la référence 6

Plan

1. Existence d'un mode de vibration en $\lambda_0 \mathbf{xy} \cos \omega t$ et calcul de la fréquence de vibration ω
2. Existence d'un « mode ciseaux » pour λ_0 suffisamment petit où le condensat oscille angulairement sans se déformer
3. Discussion physique. Manifestations de la superfluidité du condensat
4. Différence de comportement avec celui d'un nuage thermique
5. Etudes expérimentales

Modes de vibration en xy

Potentiel de piégeage

$$V_{\text{ext}}(\vec{r}) = \frac{m}{2} \left[\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2 \right] \quad (5.4)$$

$$\omega_x^2 = \omega_0^2 (1 + \varepsilon) \quad \omega_y^2 = \omega_0^2 (1 - \varepsilon) \quad (5.5)$$

Limite de Thomas-Fermi atteinte.

Nous allons montrer que

$$\delta \rho = \lambda_0 x y \cos \omega t \quad (5.6)$$

est une solution des équations hydrodynamiques linéarisées, calculer ω , et étudier l'allure du mode de vibration en fonction de λ_0 .

Équations hydrodynamiques linéarisées

(voir T-26)

$$\rho = \rho_0 + \delta \rho \qquad \rho_0 = \frac{1}{g} [\mu - V_{\text{ext}}(\vec{r})] \qquad (5.7)$$

$$S = S_0 + \delta S \qquad S_0 = -\mu t / \hbar \qquad (5.8)$$

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \delta v \qquad \vec{v}_0 = \vec{0} \qquad (5.9)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \hbar \frac{\partial}{\partial t} \delta S = -g \delta \rho \end{array} \right. \qquad (5.10)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} m \frac{\partial}{\partial t} \delta \vec{v} = -g \vec{\nabla} \delta \rho \end{array} \right. \qquad (5.11)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} \delta \rho = -\vec{\nabla} \cdot (\rho_0 \delta \vec{v}) \end{array} \right. \qquad (5.12)$$

Existence d'une solution en $x y$

Le report de (5.6) dans (5.10) donne

$$\delta S = -\frac{g \lambda_0}{\hbar \omega} x y \sin \omega t \quad (5.13)$$

$$\delta \vec{v} = \frac{\hbar}{m} \vec{\nabla} \delta S = -\frac{g \lambda_0}{m \omega} \sin \omega t \vec{\nabla} (x y) \quad (5.14)$$

$$\delta v_x = -\frac{g \lambda_0}{m \omega} y \sin \omega t$$

$$\delta v_y = -\frac{g \lambda_0}{m \omega} x \sin \omega t \quad (5.15)$$

$$\delta v_z = 0$$

Même structure du champ de vitesses que celles trouvées dans les cours III et IV

Existence d'une solution en $x y$ (suite)

L'équation (5.12) s'écrit encore

$$\frac{\partial}{\partial t} \delta \rho = -(\vec{\nabla} \rho_0) \cdot \delta \vec{v} - \rho_0 \vec{\nabla} \cdot \delta \vec{v} \quad (5.16)$$

Comme $\Delta(x y) = 0$, on déduit de (5.13) et (5.14)

$$\vec{\nabla} \cdot \delta \vec{v} = 0 \quad (5.17)$$

L'onde $x y$ est une onde de surface.

Le dernier terme de (5.16) est nul, et on obtient, compte tenu de (5.7) et (5.15)

$$-\omega \lambda_0 x y \sin \omega t = -\frac{\lambda_0}{\omega} (\omega_x^2 + \omega_y^2) x y \sin \omega t \quad (5.18)$$

Fréquence propre du mode en xy

L'équation (5.18) est satisfaite si

$$\omega^2 = \omega_x^2 + \omega_y^2 = 2\omega_0^2 \quad (5.19)$$

Nous avons ainsi démontré qu'il existe une onde de surface en xy de fréquence propre

$$\omega = \omega_0 \sqrt{2} \quad (5.20)$$

Pour la suite de la discussion il sera utile de poser

$$\lambda_0 = -\frac{m \omega_0^2 \gamma_0}{g} \quad (5.21)$$

Évolution de la densité spatiale

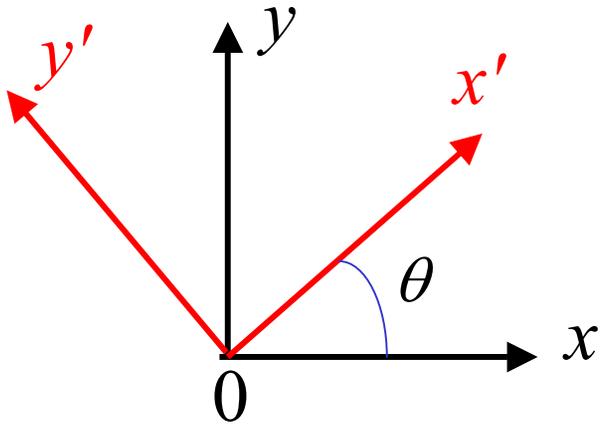
La densité spatiale (5.7) s'écrit, compte tenu de (5.6) et (5.21)

$$\rho(\vec{r}, t) = \frac{1}{g} \left\{ \mu - \frac{m \omega_0^2}{2} \left[(1 + \varepsilon) x^2 + (1 - \varepsilon) y^2 + 2\gamma_0 x y \cos \omega t \right] - \frac{m \omega_z^2}{2} z^2 \right\} \quad (5.22)$$

Dans le plan $x O y$, la densité spatiale a une forme elliptique

Cherchons les axes de cette ellipse en prenant de nouveaux axes Ox' et Oy' déduits Ox et Oy par une rotation d'angle θ autour de Oz

Changement d'axes



$$\begin{cases} x = x' \cos \theta - y' \sin \theta \\ y = x' \sin \theta + y' \cos \theta \end{cases} \quad (5.23)$$

Pour trouver les axes de symétrie du condensat, il suffit de reporter (5.23) dans l'expression (5.22) de la densité spatiale et d'annuler le terme en $x' y'$

Axes de symétrie du condensat

Coefficient du terme en x'^2 de ρ

$$-\frac{m\omega_0^2}{g} \left[\frac{1}{2}(1+\varepsilon)\cos^2\theta + \frac{1}{2}(1-\varepsilon)\sin^2\theta + \gamma(t)\sin\theta\cos\theta \right] \quad (5.24)$$

Coefficient du terme en y'^2 de ρ

$$-\frac{m\omega_0^2}{g} \left[\frac{1}{2}(1+\varepsilon)\sin^2\theta + \frac{1}{2}(1-\varepsilon)\cos^2\theta + \gamma(t)\sin\theta\cos\theta \right] \quad (5.25)$$

Coefficient du terme en $x'y'$ de ρ

$$-\frac{m\omega_0^2}{g} \left[-2\varepsilon\sin\theta\cos\theta + \gamma(t)(\cos^2\theta - \sin^2\theta) \right] \quad (5.26)$$

On a posé

$$\gamma(t) = \gamma_0 \cos \omega t \quad (5.27)$$

Axes de symétrie du condensat (suite)

L'annulation du coefficient du terme en $x' y'$ donne l'angle $\theta(t)$ entre les axes du condensat et les axes Ox et Oy du piège à l'instant t

$$\tan 2\theta(t) = \frac{\gamma(t)}{\varepsilon} = \frac{\gamma_0}{\varepsilon} \cos \omega t \quad (5.28)$$

Cas où $\gamma_0 \ll \varepsilon$

$$\theta \ll 1 \quad \theta \simeq \frac{\gamma_0}{2\varepsilon} \cos \omega t = \frac{\gamma(t)}{2\varepsilon} \quad (5.29)$$

Cas où $1 \gg \gamma_0 \gg \varepsilon$

Pour les valeurs de t telles que $\cos \omega t$ est de l'ordre de 1

$$\theta \simeq \pi / 4 \quad (5.30)$$

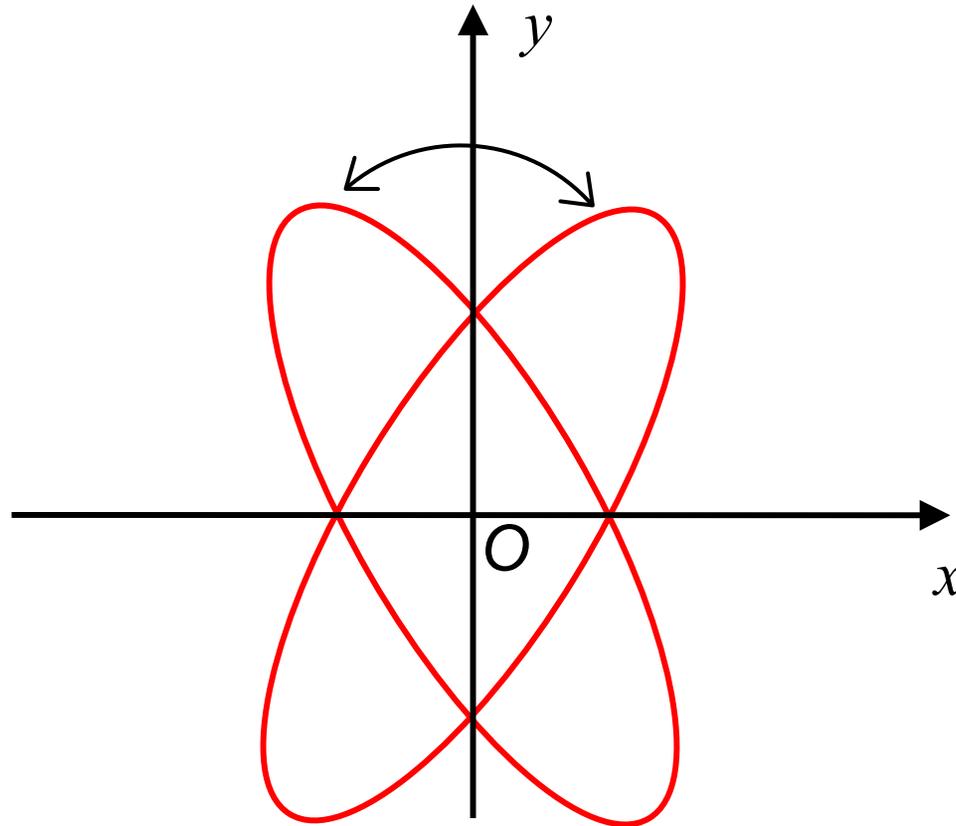
Cas où $\gamma_0 \ll \varepsilon$

Le report de (5.29) dans (5.24) et (5.25) montre que les coefficients de x'^2 et y'^2 ne dépendent de γ_0/ε que par des termes au moins d'ordre 2. On peut donc écrire:

$$\rho(\vec{r}', t) \simeq \frac{1}{g} \left\{ \mu - \frac{m \omega_0^2}{2} \left[(1 + \varepsilon) x'^2 + (1 - \varepsilon) y'^2 \right] - \frac{m \omega_z^2}{2} z'^2 \right\} \quad (5.31)$$

La densité spatiale tourne donc d'un petit angle θ , d'ordre 1 en γ_0/ε , sans changer de forme à cet ordre, θ étant une fonction périodique du temps.

Modes ciseaux



L'oscillation pendulaire de faible amplitude du condensat autour de O_x rappelle celle d'une aiguille aimantée.

Comment exciter le mode ciseaux

On tourne les axes du piège d'un petit angle θ_0

On attend que le condensat atteigne un état équilibre

On ramène brusquement les axes du piège à leur position initiale

Le condensat effectue alors une oscillation angulaire sans changement de forme autour des nouveaux axes.

Modes ciseaux - Récapitulation

Oscillation angulaire

$$\theta(t) = \theta_0 \cos \omega t \quad (5.32)$$

$$\text{Amplitude:} \quad \theta_0 = \gamma_0 / 2 \varepsilon \quad (5.33)$$

$$\text{Fréquence:} \quad \omega = \omega_0 \sqrt{2} \quad (5.34)$$

Vitesse angulaire instantanée

$$\Omega(t) = d\theta(t) / dt = -\Omega_0 \sin \omega t \quad (5.35)$$

$$\Omega_0 = -\omega \theta_0 \quad (5.36)$$

Anisotropie ε du piège

$$\varepsilon = (\omega_x^2 - \omega_y^2) / (\omega_x^2 + \omega_y^2) \quad (5.37)$$

$$\omega_x^2 + \omega_y^2 = 2\omega_0^2 \quad \omega_x^2 - \omega_y^2 = 2\varepsilon \omega_0^2 \quad (5.38)$$

Modes ciseaux – Récapitulation (suite)

Champ de vitesses

$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \frac{\omega_0^2}{\omega} \gamma_0 \sin \omega t \begin{pmatrix} y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} = -\varepsilon \Omega(t) \begin{pmatrix} y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.39)$$

On a utilisé (5.15), (5.21), (5.23), (5.24), (5.35), (5.36)

Densité spatiale

- Donnée par (5.31) dans le système d'axes Ox', Oy'
- Même forme que la distribution $\rho_0(x, y, z)$ d'un condensat à l'équilibre

Cas où $1 \gg \gamma_0 \gg \varepsilon$

- Quand $\cos\omega t$ a un module de l'ordre de 1, il est légitime de négliger les terme en ε de (5.24) et (5.25)

Dans le système d'axes Ox', Oy' tourné d'un angle $\pi/4$ par rapport au précédent la densité spatiale s'écrit

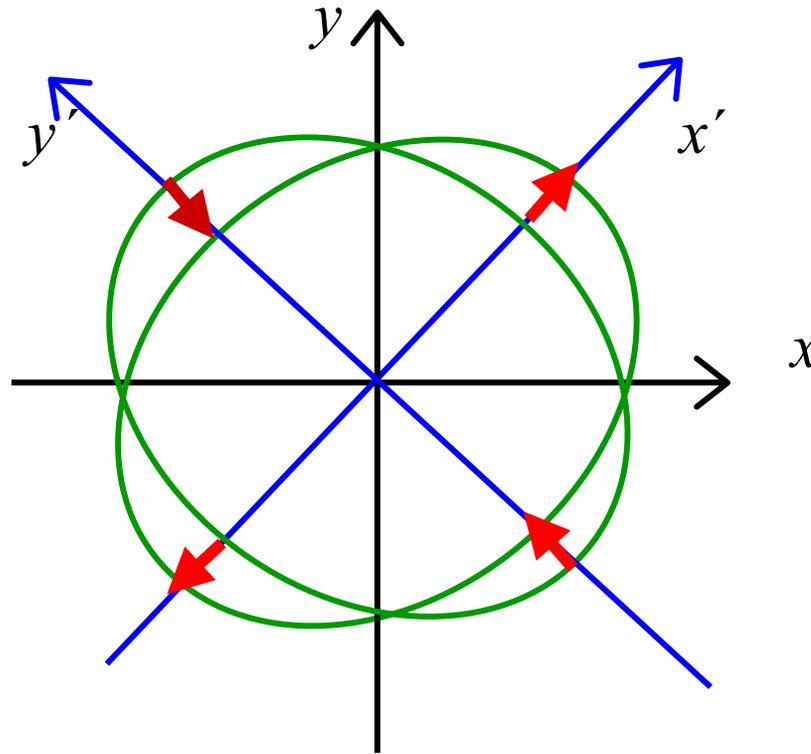
$$\rho(\vec{r}', t) = \frac{1}{g} \left\{ \mu - \frac{m\omega_0^2}{2} \left[(1 + \gamma(t)) x'^2 + (1 - \gamma(t)) y'^2 \right] - \frac{m\omega_z^2}{2} z'^2 \right\} \quad (5.40)$$

Déformation quadrupolaire par rapport aux axes Ox', Oy'

- Quand $\cos\omega t$ est très petit, on retrouve l'anisotropie du condensat à l'équilibre, d'axes Ox et Oy

Couplage entre les modes quadrupolaires xy et x^2-y^2

Allure de l'oscillation pour $\gamma_0 \gg \varepsilon$



Au cours de l'oscillation, le condensat change de forme en passant par une forme légèrement anisotrope d'axes Ox et Oy . Situation très différente de celle du mode ciseaux.

Discussion physique

La fréquence du mode ciseaux ne dépend pas de l'anisotropie ε du piège et reste la même quand ε tend vers 0

Comme la densité spatiale et le champ de vitesses sont connus à tout instant [voir équations (5.31) et (5.39)], il est possible de calculer toutes les grandeurs physiques caractérisant la rotation du condensat

On peut ainsi étudier la dépendance en ε du moment des forces agissant sur le condensat et du moment cinétique de ce condensat

Moment des forces de rappel

Force de piégeage

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} V_{\text{ext}}(\vec{r}) \quad (5.41)$$

$$\begin{cases} F_x = -m \omega_0^2 (1 + \varepsilon) x \\ F_y = -m \omega_0^2 (1 - \varepsilon) y \\ F_z = -m \omega_z^2 z \end{cases} \quad (5.42)$$

Composante z du moment de ces forces

$$\begin{aligned} \Gamma_z &= \int d^3 r \rho(\vec{r}) (x F_y - y F_x) \\ &= 2 m \omega_0^2 \varepsilon \int d^3 r \rho(\vec{r}) x y \\ &= 2 m \omega_0^2 \varepsilon N \langle x y \rangle = m \omega^2 \varepsilon N \langle x y \rangle \end{aligned} \quad (5.43)$$

Calcul de $\langle x y \rangle$

Utilisons (5.23) pour passer des variables x, y aux variables x', y' . Il vient:

$$N \langle x y \rangle = \int d^3 r' \rho(\vec{r}') \left[(x'^2 - y'^2) \frac{\sin 2\theta}{2} + x' y' \cos 2\theta \right] \quad (5.44)$$

Pour le mode ciseaux, $\theta \ll 1$, et $\rho(\vec{r}')$ admet les axes Ox' et Oy' comme axes de symétrie, de sorte que $\langle x' y' \rangle = 0$. De plus, $\rho(\vec{r}')$ a la même forme dans les nouveaux axes que $\rho_0(\vec{r})$ dans les anciens.

Donc :

$$\langle x y \rangle = \langle x^2 - y^2 \rangle_0 \theta \quad (5.45)$$

où $\langle \rangle_0$ désigne la moyenne dans l'état du condensat à l'équilibre

Moment de forces de rappel (suite)

Le report de (5.45) dans (5.43) donne:

$$\Gamma_z(t) = N m \omega^2 \varepsilon \theta(t) \langle x^2 - y^2 \rangle_0 \quad (5.46)$$

Pour un condensat à la limite de Thomas-Fermi, $\langle x^2 \rangle_0$ et $\langle y^2 \rangle_0$ sont proportionnels à ω_x^{-2} et ω_y^{-2} , respectivement. Il s'ensuit, d'après (5.38), que Γ_z est proportionnel à $\varepsilon (\omega_x^2 - \omega_y^2)$, donc au carré ε^2 de l'anisotropie du piège

Le moment des forces de rappel tend donc vers 0 comme ε^2 quand ε tend vers 0

Moment cinétique

Compte tenu de (5.39)

$$\begin{aligned}\langle L_z \rangle &= m \int d^3 r \rho(\vec{r}) (x v_y - y v_x) \\ &= -m \varepsilon \Omega(t) \int d^3 r \rho(\vec{r}) (x^2 - y^2)\end{aligned}\tag{5.47}$$

Le passage aux variables x' , y' donne pour l'intégrale

$$\begin{aligned}\int d^3 r' \rho(\vec{r}') \left[(x'^2 - y'^2) \cos 2\theta - 2x'y' \sin 2\theta \right] \\ \simeq N \langle x^2 - y^2 \rangle_0\end{aligned}\tag{5.48}$$

de sorte que finalement

$$\langle L_z \rangle = -N m \varepsilon \Omega(t) \langle x^2 - y^2 \rangle_0\tag{5.49}$$

Moment cinétique (suite)

Le même facteur de réduction $\varepsilon \langle x^2 - y^2 \rangle_0$ apparaît dans la constante C du couple de rappel [voir (5.46)] et dans le moment cinétique (5.49)

C'est la raison pour laquelle la fréquence du mode ciseaux reste élevée et indépendante de ε

Notons d'ailleurs que, compte tenu de (5.32), (5.35) et (5.36), les équations (5.46) et (5.49) donnent

$$\Gamma_z(t) = \frac{d}{dt} \langle L_z(t) \rangle \quad (5.50)$$

qui n'est autre que l'équation de la dynamique

Moment d'inertie

C'est le coefficient de proportionnalité entre $\langle L_z \rangle$ et $\Omega(t)$.

De (5.49) on déduit :

$$\begin{aligned}\Theta &= -N m \varepsilon \langle x^2 - y^2 \rangle_0 \\ &= -N m \frac{\omega_x^2 - \omega_y^2}{\omega_x^2 + \omega_y^2} \langle x^2 - y^2 \rangle_0 \\ &= N m \langle x^2 + y^2 \rangle_0 \left(\frac{\langle x^2 - y^2 \rangle_0}{\langle x^2 + y^2 \rangle_0} \right)^2 = \Theta_{\text{rig}} \varepsilon^2\end{aligned}\tag{5.51}$$

On retrouve le même facteur de réduction ε^2 par rapport à la valeur rigide que dans le cours IV

C'est cette réduction du moment d'inertie due à la superfluidité qui explique les caractéristiques originales du mode ciseaux

Remarque

Il n'était pas évident a priori de retrouver ici le même résultat que celui obtenu dans les cours III et IV

- La rotation du condensat n'est plus ici imposée par une rotation du piège. Elle est une conséquence de la dynamique du mode.
- La vitesse de rotation n'est pas constante comme dans les cours III et IV. Elle est modulée à la fréquence propre du mode

Différences de comportement avec celui d'autres systèmes

Gaz parfait de bosons partiellement condensés

Nous allons montrer, avec des arguments simples, que le mode ciseaux a une fréquence élevée pour le condensat, alors qu'il a également une composante de fréquence basse (tendant vers 0 quand ε tend vers 0) pour le nuage thermique

Pour une étude plus détaillée des modes ciseaux du nuage thermique, dans les divers régimes de collisions, voir la référence 6

Méthode suivie ici

Pour exciter le mode ciseaux en $x y$, on peut ajouter au potentiel de piégeage une perturbation en $x y$

$$\delta V = \lambda x y \cos \omega t \quad (5.52)$$

Une telle perturbation est résonnante quand ω coïncide avec la fréquence de Bohr correspondant à une paire de niveaux du système entre lesquels cette perturbation a un élément de matrice non nul. Ces fréquences de résonance ne sont autres que les fréquences des modes ciseaux

Transitions excitées par la perturbation

Les niveaux d'énergie dans le piège sont caractérisés par 3 nombres quantiques:

$$n_x, n_y, n_z \quad \text{entiers } \geq 0$$

La perturbation $x y$ est une combinaison linéaire de:

$$\hat{a}_x^+ \hat{a}_y^+, \hat{a}_x \hat{a}_y, \hat{a}_x \hat{a}_y^+, \hat{a}_x^+ \hat{a}_y$$

induisant des transitions:

$$\Delta n_x = \Delta n_y = \pm 1 \quad \Delta n_x = -\Delta n_y = \pm 1$$

Les fréquences propres de ces transitions sont:

$$\pm(\omega_x + \omega_y) \quad \pm(\omega_x - \omega_y)$$

Excitation du condensat

Les atomes sont tous dans l'état $|0,0,0\rangle$, et la seule transition pouvant être excitée est vers l'état $|1,1,0\rangle$

Une seule fréquence pour le mode ciseaux, $\omega_x + \omega_y$, qui ne tend pas vers 0 quand ε tend vers 0

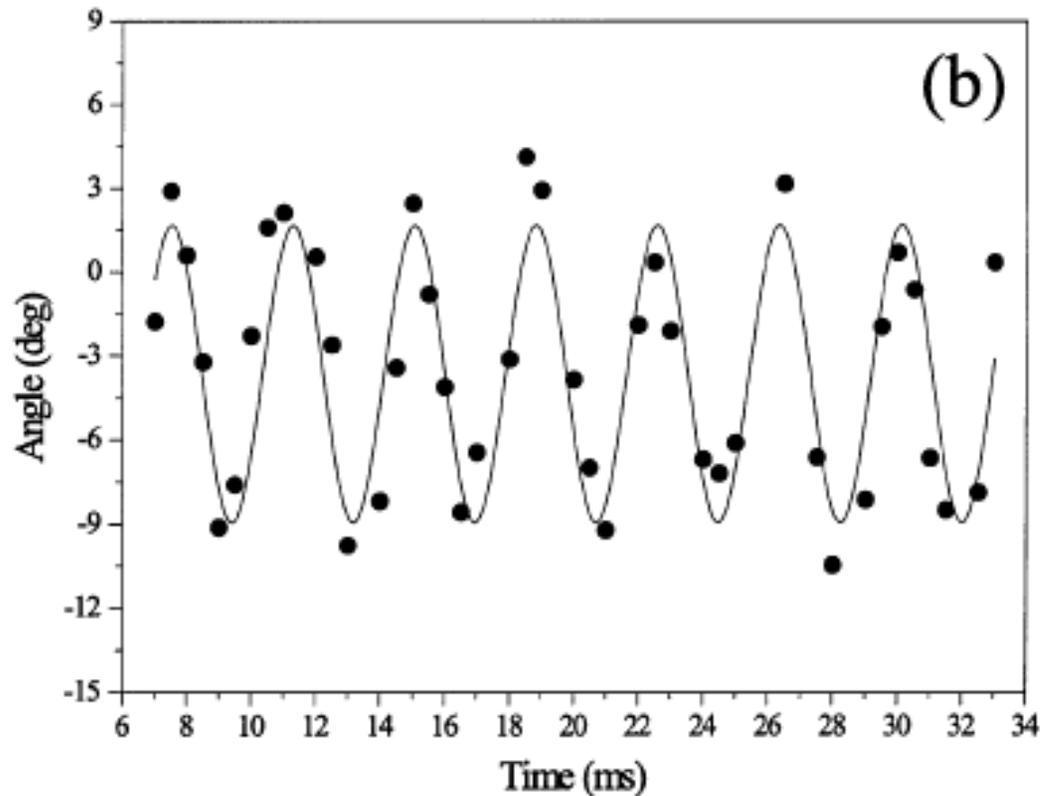
Excitation du nuage

Les atomes sont dans des états $|n_x, n_y, n_z\rangle$, avec n_x, n_y, n_z non nuls

Des nouvelles transitions $|n_x, n_y, n_z\rangle \rightarrow |n_x \pm 1, n_y \mp 1, n_z\rangle$ apparaissent avec des fréquences basses $\pm(\omega_x - \omega_y)$ qui tendent vers 0 quand $\varepsilon \rightarrow 0$

Etudes expérimentales

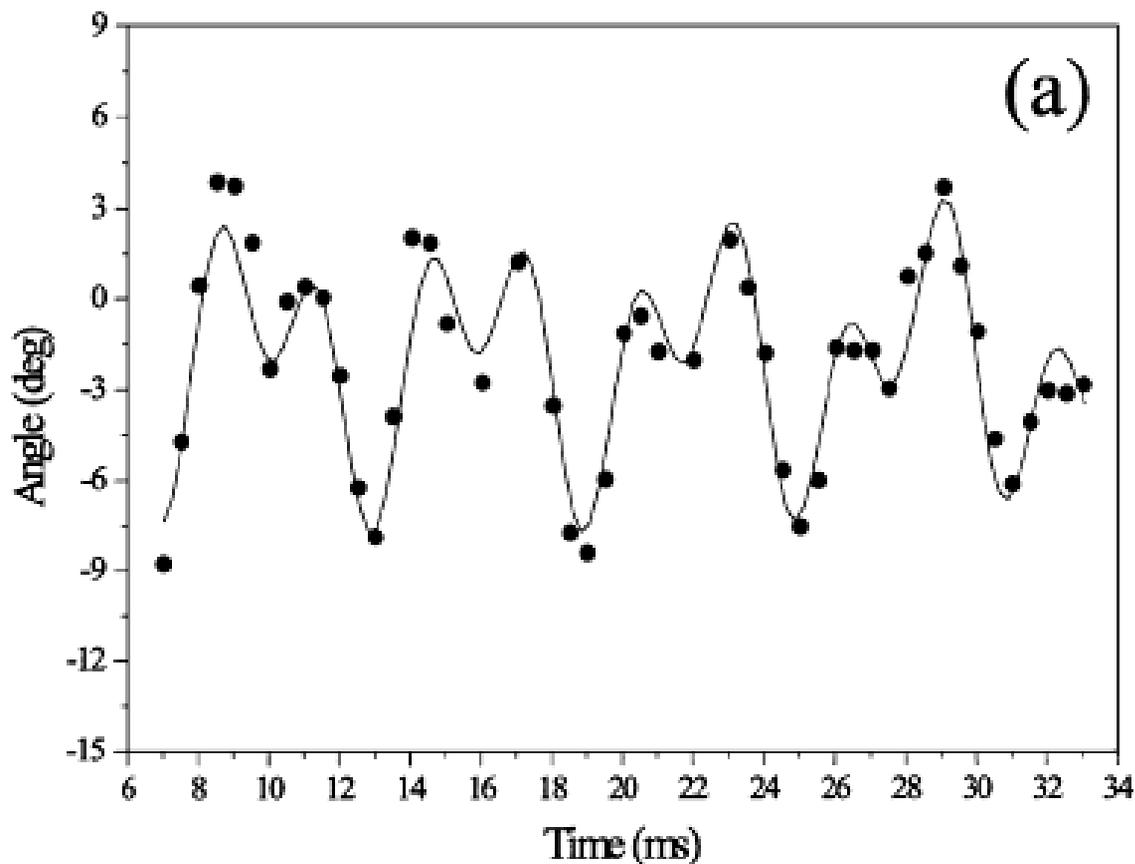
Référence 7



Observation du mode ciseaux sur un condensat de Rb⁸⁷
Une seule fréquence élevée (265.6 ± 0.8 Hz) apparaît, en bon accord avec la prédiction théorique (265 ± 2 Hz)

Etudes expérimentales (suite)

Référence 7



Observation du mode ciseaux sur un nuage thermique de Rb^{87} . Deux fréquences d'évolution apparaissent, en bon accord avec les prédictions théoriques

Références

(Suite de T-156)

6. D. Guéry-Odelin, S. Stringari, Phys. Rev. Lett. 83, 4452 (1999)
Voir aussi les références données dans cette lettre à d'autres travaux en physique nucléaire mettant en évidence des modes ciseaux
7. O. Marago, S. Hopkins, J. Arlt, E. Hodby, G. Hechenblaikner, C. Foot, Phys. Rev. Lett. 84, 2056 (2000)

Tourbillon quantique

Condensat de Bose-Einstein où tous les bosons sont condensés dans un même état quantique de moment cinétique

$$L_z = m \hbar \quad m = 1, 2, \dots \quad (6.1)$$

Ne pas confondre un tourbillon où tous les bosons ont un moment cinétique non nul et une excitation élémentaire de moment cinétique $m \hbar$ d'un condensat ordinaire où tous les autres atomes ont un moment cinétique nul.

Problèmes qui seront abordés

Structure du tourbillon

- Fonction d'onde
- Densité spatiale et champ de vitesses

Énergie de l'état à un tourbillon

par rapport à l'état sans tourbillon

Stabilité thermodynamique

L'état d'un tourbillon peut-il être l'état fondamental dans un récipient tournant. Vitesse de rotation critique

Comment détecter un tourbillon ?

Plan

1. Tourbillon dans un condensat homogène

- Quantification de la circulation de la vitesse
- Dimension du cœur
- Energie par unité de longueur

2. Tourbillon dans un condensat inhomogène

- Gaz parfait dans un piège harmonique
- Gaz de bosons à la limite de Thomas-Fermi

3. Énergie du tourbillon dans un récipient tournant

- Cas d'un gaz parfait
- Importance des interactions

Tourbillon quantique dans un condensat homogène

Forme de la fonction d'onde

Axe de rotation : Oz

Coordonnées cylindriques

$$r_{\perp}, z, \varphi$$

Comme

$$L_z = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \varphi} \tag{6.2}$$

La fonction d'onde d'un tourbillon $m=1$ est nécessairement de la forme

$$\psi(r_{\perp}, z, \varphi) = \chi(r_{\perp}, z) e^{i\varphi} \tag{6.3}$$

Équation de Gross Pitaevskii

Laplacien en coordonnées cylindriques

$$\Delta = \frac{1}{r_{\perp}} \frac{\partial}{\partial r_{\perp}} r_{\perp} \frac{\partial}{\partial r_{\perp}} + \frac{1}{r_{\perp}^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (6.4)$$

Équations de G-P pour χ

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2M} \left(\frac{1}{r_{\perp}} \frac{\partial}{\partial r_{\perp}} r_{\perp} \frac{\partial}{\partial r_{\perp}} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + \frac{\hbar^2}{2M r_{\perp}^2} \right] \chi(r_{\perp}, z) + g \chi^2(r_{\perp}, z) \chi(r_{\perp}, z) = \mu \chi(r_{\perp}, z) \quad (6.5)$$

$\frac{\hbar^2}{2M r_{\perp}^2}$: Potentiel centrifuge imposant à la fonction d'onde $\chi(r_{\perp}, z)$ de s'annuler en $r_{\perp}=0$

Allure de la fonction d'onde

Pas de dépendance en z

pour minimiser l'énergie totale

Dépendance radiale

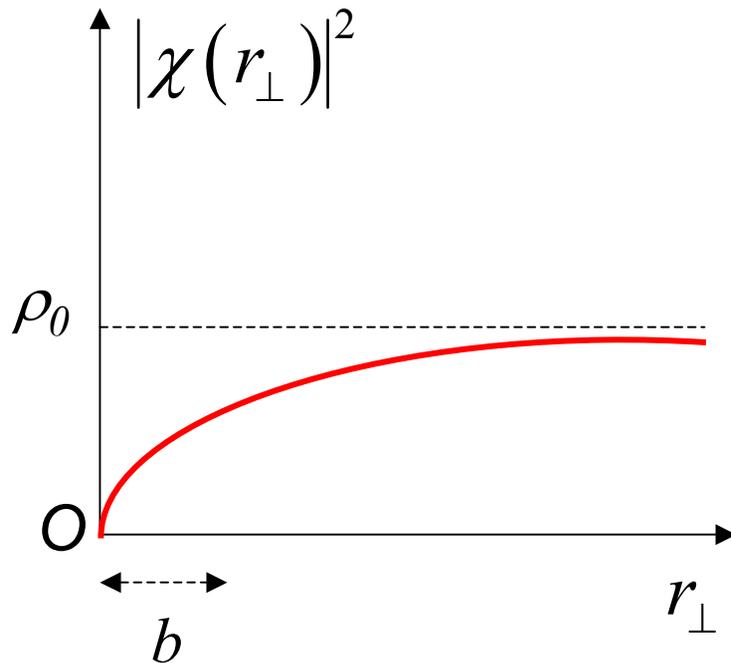


Figure VI-1

- A cause du potentiel centrifuge, la densité spatiale s'annule sur l'axe Oz. Quand on s'éloigne de cet axe, elle croît sur une zone de largeur b_0 et tend vers une constante
- b_0 : dimension du « cœur » du tourbillon

Dépendance en φ

Associée à l'existence d'un moment cinétique non nul le long de $0 z$

Phase de la fonction d'onde

La fonction radiale est réelle et le facteur de phase ne provient que de la dépendance en φ

$$S(r_{\perp}, \varphi) = S(\varphi) = \varphi \quad (6.6)$$

Gradient de S en coordonnées cylindriques

$$\begin{cases} (\vec{\nabla} S)_{r_{\perp}} = \partial S / \partial r_{\perp} = 0 \\ (\vec{\nabla} S)_z = \partial S / \partial z = 0 \\ (\vec{\nabla} S)_{\varphi} = \partial S / r_{\perp} \partial \varphi = 1 / r_{\perp} \end{cases} \quad (6.7)$$

Champ de vitesses

$$\vec{v} = \frac{\hbar}{M} \vec{\nabla} S \quad (6.8)$$

D'après (6.7), seule la composante azimutale de la vitesse est non nulle et vaut

$$v_z = v_{r_\perp} = 0, \quad v_\varphi = \frac{\hbar}{M r_\perp} \quad (6.9)$$

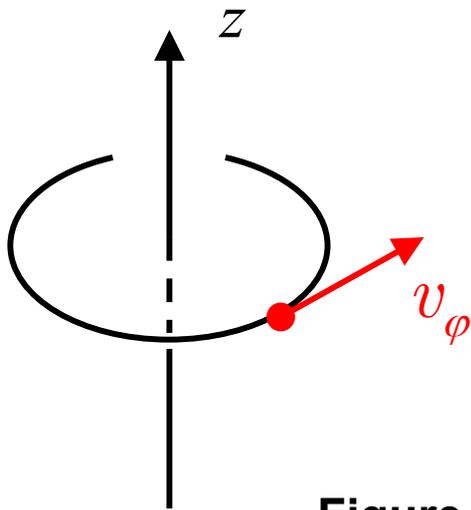


Figure VI-2

Même symétrie que celle du champ de vitesses d'un corps solide en rotation.

Mais le module de la vitesse décroît quand on s'éloigne de l'axe au lieu de croître.

Quantification de la circulation de la vitesse

D'après (6.9), la circulation de la vitesse sur un cercle d'axe Oz et de rayon r_{\perp} vaut

$$2\pi r_{\perp} v_{\varphi} = 2\pi \hbar / M = h / M \quad (6.10)$$

Ce résultat est en fait valable pour la circulation sur un contour fermé C quelconque entourant Oz. En effet, comme la vitesse est un gradient et reste finie en tout point hors de l'axe

$$\oint_C \vec{v} \cdot d\vec{\ell} = \frac{\hbar}{M} \oint_C \vec{\nabla} S \cdot d\vec{\ell} = \frac{\hbar}{M} \delta S \quad (6.11)$$

où δS est la variation de S le long du contour

Quantum de circulation

Comme S est une phase et que la fonction d'onde a une seule valeur en chaque point, on a

$$S = 2\pi m \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (6.12)$$

de sorte que

$$\oint_C \vec{v} \cdot d\vec{\ell} = 2\pi m \frac{\hbar}{M} = m\kappa \quad (6.13)$$

où

$$\kappa = \frac{h}{M} \quad (6.14)$$

est le quantum de circulation.

L'entier m caractérise le moment cinétique

$$L_z = m\hbar \quad (6.15)$$

Rotationnel de la vitesse

En tout point hors de l'axe, la vitesse est finie. Comme c'est un gradient,

$$\vec{\nabla} \times \vec{v} = \vec{0} \quad \text{pour} \quad \vec{r}_\perp \neq \vec{0} \quad (6.16)$$

Ce résultat n'est plus valable sur l'axe où la vitesse diverge. Le rotationnel de la vitesse a donc une singularité sur l'axe.

De l'équation (6.13), on déduit

$$\vec{\nabla} \times \vec{v} = m\kappa \delta^{(2)}(\vec{r}_\perp) \vec{e}_z \quad (6.17)$$

Le flux de (6.17) à travers la surface contenue à l'intérieur de tout contour C entourant l'axe Z redonne bien la circulation calculée en (6.13)

Analogie avec le champ magnétique d'un courant rectiligne

Le champ de vitesses (6.9) a la même dépendance spatiale que celle du champ magnétique créé par un courant rectiligne le long de Oz. Un parallèle étroit peut être établi entre les équations gouvernant les 2 champs

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{j}{\epsilon_0 c^2} \delta^2(\vec{r}) \vec{e}_z$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{v} = m \kappa \delta^2(\vec{r}_\perp) \vec{e}_z$$

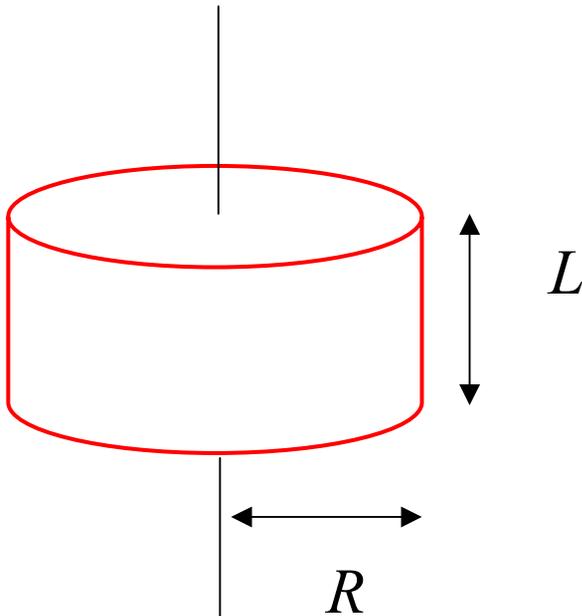
(6.18a)

(6.18b)

Le fait que le champ de vitesses soit de divergence nulle se vérifie aisément à partir de (6.9)

Estimation de la taille du cœur du tourbillon

Supposons le condensat contenu dans un boite cylindrique très longue (d'axe Oz et de rayon R) et considérons une tranche de longueur L



- Sans tourbillon, le condensat est homogène dans ce volume avec une densité spatiale ρ_0
- Si un tourbillon apparaît, un creux de densité (cœur) de rayon b apparaît, de sorte de la densité à l'extérieur du cœur augmente de $\delta\rho_0$

Argument variationnel pour estimer la taille b du coeur

L'apparition du tourbillon se traduit par une augmentation d'énergie δE due à plusieurs effets

- Variation de l'énergie d'interaction due à la variation de densité spatiale
- Variation de l'énergie cinétique radiale due à la variation radiale de la densité
- Variation de l'énergie cinétique azimutale due au champ de vitesses du tourbillon

Nous allons estimer δE en fonction de b et déterminer pour quelle valeur de b δE est en minimal.

Variation de l'énergie d'interaction

$$\delta E_{\text{int}} = \frac{1}{2} g \iiint_V [\rho^2(\vec{r}) - \rho_0^2] d^3 r \quad (6.19)$$

$\rho(\vec{r})$: densité en présence du tourbillon

ρ_0 : densité en l'absence

comme

$$\iiint_V d^3 r \rho(\vec{r}) = \rho_0 \iiint_V d^3 r = \rho_0 V \quad (6.20)$$

$$\begin{aligned} \delta E_{\text{int}} &= \frac{1}{2} g \iiint_V d^3 r [\rho(\vec{r}) - \rho_0]^2 \\ &\simeq \frac{1}{2} g \pi b^2 L \rho_0^2 + \frac{1}{2} g \pi (R^2 - b^2) L [(\rho_0 + \delta \rho_0)^2 - \rho_0^2] \end{aligned} \quad (6.21)$$

où $\delta \rho_0$ (à l'extérieur du cœur) est estimé par

$$\pi b^2 L \rho_0 \simeq \pi (R^2 - b^2) L \delta \rho_0 \quad (6.22)$$

Variation de l'énergie d'interaction (suite)

comme

$$R \gg b \quad (6.23)$$

l'équation (6.22) donne

$$\delta \rho_0 = \rho_0 b^2 / R^2 \quad (6.24)$$

qui reporté dans (6.21) conduit à

$$\delta E_{\text{int}} \simeq g \pi b^2 L \rho_0^2 \quad (6.25)$$

Énergie cinétique radiale

$$\delta E_{\text{cin.rad}} \simeq \pi b^2 L \rho_0 \frac{\hbar^2}{2 M b^2} \simeq \pi \rho_0 \frac{\hbar^2}{M} L \quad (6.26)$$

Indépendante de L

Énergie cinétique azimutale

$$\begin{aligned} E_{\text{cin.az}} &\simeq \rho_0 L \int_b^R 2\pi r_{\perp} dr_{\perp} \frac{1}{2} M v_{\perp}^2 \\ &= \pi \rho_0 L \frac{\hbar^2}{M} \text{Log} \frac{R}{b} \end{aligned} \quad (6.27)$$

L'annulation de la densité quand r_{\perp} s'approche de 0 à l'intérieur du cœur empêche la divergence de l'intégrale et introduit une borne inférieure physique.

Récapitulation

$$\frac{\delta E(b)}{L} \simeq g \pi b^2 \rho_0^2 + \pi \frac{\hbar^2}{M} \rho_0 \left[1 + \text{Log} \frac{R}{b} \right] \quad (6.28)$$

Ordre de grandeur de b

Le premier terme de (6.28) croît avec b alors que le second décroît. Il y a donc une valeur optimale pour b pour laquelle la variation d'énergie due au tourbillon est minimale.

$$\frac{d}{db} \delta E(b) = 0 \quad (6.29)$$

$$2gb\rho_0^2 - \frac{\hbar^2}{M} \frac{\rho_0}{b} = 0 \quad (6.30)$$

On en déduit

$$b \simeq \sqrt{\frac{\hbar^2}{2Mg\rho_0}} = \sqrt{\frac{1}{8\pi\rho_0 a}} = \xi_0 \quad (6.31)$$

Le rayon du cœur est donc de l'ordre de la longueur de relaxation ("healing length")

Etude quantitative

L'équation (6.5) peut se réécrire

$$\frac{d^2}{dr_{\perp}^2} + \frac{1}{r_{\perp}} \frac{d}{dr_{\perp}} \chi(r_{\perp}) + \left(\frac{2M\mu}{\hbar^2} - \frac{1}{r_{\perp}^2} \right) \chi(r_{\perp}) - \frac{2Mg}{\hbar^2} \chi^3(r_{\perp}) = 0 \quad (6.32)$$

Pour r_{\perp} très grand, χ^2 se réduit à $\tilde{\rho}_0$, où $\tilde{\rho}_0$ est la densité spatiale asymptotique (loin du cœur). Les 2 premiers termes de (6.32) sont alors négligeables, car χ varie très peu. De même, le terme en $1/r_{\perp}^2$ tend vers 0. On obtient ainsi

$$\mu = g\chi^2 = g\tilde{\rho}_0 = \frac{4\pi\hbar^2}{M} a \tilde{\rho}_0 \quad (6.33)$$

équation qui relie le potentiel chimique à la densité asymptotique.

Utilisation de variables sans dimensions

Posons

$$s = r_{\perp} / \tilde{\xi}_0 \quad (6.34)$$

où

$$\tilde{\xi}_0 = 1 / \sqrt{8\pi a \tilde{\rho}_0} \approx 1 / \sqrt{8\pi a \rho_0} = \xi_0 \quad (6.35)$$

ξ_0 étant la longueur de relaxation

$$\chi(s) = \sqrt{\tilde{\rho}_0} f(s) \quad (6.36)$$

L'équation (6.32) devient

$$\left(\frac{d^2}{ds^2} + \frac{1}{s} \frac{d}{ds} \right) f(s) + \left(1 - \frac{1}{s^2} \right) f(s) - f^3(s) = 0 \quad (6.37)$$

Équation différentielle non linéaire dont la solution a des comportements simples pour s petit et s grand

Comportement pour $s \ll 1$

$f(s)$ s'annule en $s=0$. Donc $f(s)$ est petit pour $s \ll 1$ et le terme cubique $f^3(s)$ est négligeable devant les autres. Sans ce dernier terme, l'équation (6.37) devient une équation différentielle linéaire dont la solution est la fonction de Bessel $J_1(s)$

$$f(s) \underset{s \rightarrow 0}{\simeq} J_1(s) \propto s \quad (6.38)$$

Comportement pour $s \gg 1$

$f(s)$ varie très peu et les 2 premiers termes de (6.37) peuvent être négligés ce qui donne

$$f(s) \underset{s \rightarrow \infty}{\simeq} \left(1 - \frac{1}{s^2}\right)^{1/2} \simeq 1 - \frac{1}{2s^2} \quad (6.39)$$

Calcul numérique de $f(\xi = s)$

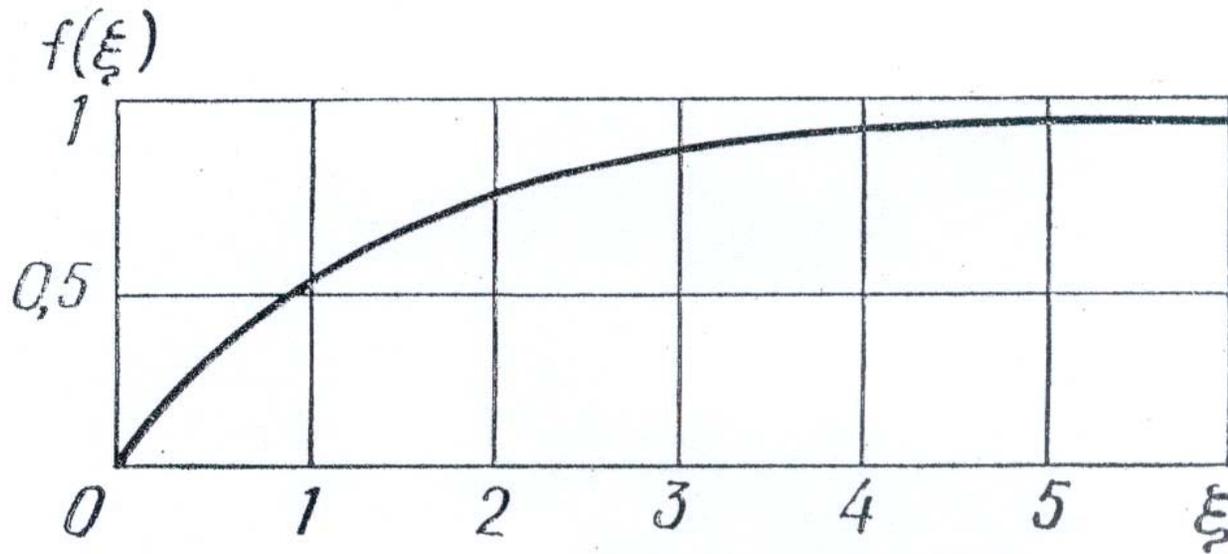


Figure VI-3

Figure extraite de la référence 9 (chapitre III)

Energie E / L du tourbillon par unité de longueur

L'étude précédente montre que la taille du cœur est déterminée par la longueur de relaxation. L'ordre de grandeur de l'énergie cinétique azimutale est obtenu en remplaçant dans (6.27) b par ξ_0 .

Connaissant $f(s)$, il est possible de calculer plus précisément les diverses énergies (cinétique radiale, cinétique azimutale, interaction). Le résultat du calcul numérique est :

$$\frac{E}{L} = \pi \rho_0 \frac{\hbar^2}{M} \text{Log} \left(1.46 \frac{R}{\xi_0} \right) \quad (6.40)$$

(voir références 9,10,11,14)

Tourbillons $m > 1$

Les résultats précédents, établis pour un tourbillon $m=1$ se généralisent aisément à un tourbillon $m > 1$

$f(s)$ se comporte à l'origine comme la fonction de Bessel $J_m(s)$ et l'équation (6.38) doit être remplacée par

$$f(s) \underset{s \rightarrow 0}{\simeq} J_m(s) \propto s^m \quad (6.38)'$$

De même, l'équation (6.39) doit être remplacée par

$$f(s) \underset{s \rightarrow \infty}{\simeq} \left(1 - \frac{m^2}{s^2}\right)^{1/2} \simeq 1 - \frac{m^2}{2s^2} \quad (6.39)'$$

Enfin, l'énergie (6.40) doit être multipliée par m^2 , le facteur numérique à l'intérieur du Log n'étant plus égal à 1.46, mais à 0.59 pour $m=2$, 0.38 pour $m=3$ (voir réf.14)

Tourbillon quantique dans un condensat inhomogène

N atomes dans le potentiel de piégeage

$$V_{ext}(\vec{r}) = \frac{1}{2}M(\omega_{\perp}^2 r_{\perp}^2 + \omega_z^2 z^2) \quad (6.41)$$

Symétrie de révolution autour de 0_z

$$\sigma_{0_{\perp}} = \sqrt{\frac{\hbar}{M\omega_{\perp}}} \quad (6.42a)$$

$$\sigma_{0_z} = \sqrt{\frac{\hbar}{M\omega_z}} \quad (6.42b)$$

Tous les atomes sont condensés dans un état de moment cinétique \hbar

La dépendance en φ de la fonction d'onde est toujours donnée par l'équation (6.3).

Il faut rajouter le terme $V_{ext}(r_{\perp}, z)\chi(r_{\perp}, z)$ dans le membre de gauche de (6.5).

Cas d'un gaz parfait (Tourbillon $m=1$)

Les N atomes ne sont pas condensés dans l'état fondamental $|n_x = 0, n_y = 0, n_z = 0\rangle$, mais dans la superposition linéaire

$$\frac{1}{\sqrt{2}}|n_x = 1, n_y = 0, n_z = 0\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|n_x = 0, n_y = 1, n_z = 0\rangle \quad (6.43)$$

dont la fonction d'onde s'écrit (voir T.87)

$$(\pi \sigma_{0\perp})^{-1/2} (\pi \sigma_{0z})^{-1/4} \frac{\sqrt{2}}{\sigma_{0\perp}} (x + iy) e^{-r_{\perp}^2/2\sigma_{0\perp}^2} e^{-z^2/2\sigma_{0z}^2} \quad (6.44)$$

comme

$$x + iy = r_{\perp} e^{i\varphi} \quad (6.45)$$

L'état (6.44) a bien un moment cinétique $+\hbar$. Son énergie, par rapport à celle du fondamental vaut

$$E = \hbar \omega_{\perp} \quad (6.46)$$

Condensat à la limite de Thomas-Fermi

Si $\xi_0 \ll R_\perp$, le cœur du tourbillon a peu d'influence sur la frontière du condensat

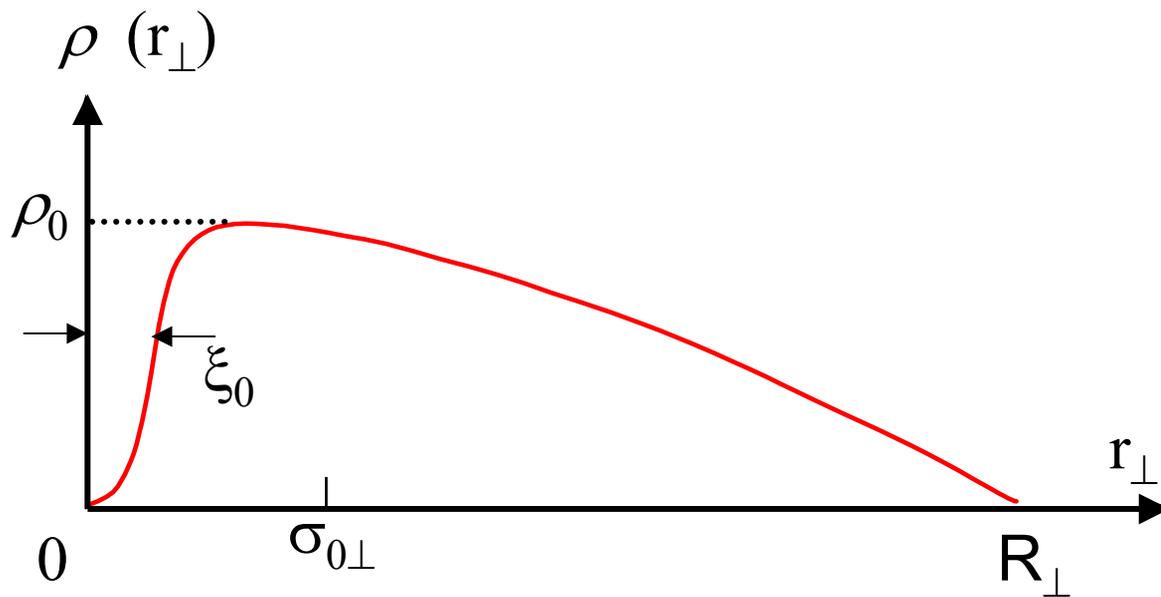


Figure VI-4

$$\xi_0 = \frac{1}{\sqrt{8\pi a \rho_0}}$$

$$\sigma_{0\perp} = \sqrt{\frac{\hbar}{M \omega_\perp}}$$

$$\mu = g \rho_0$$

$$\frac{1}{2} M \omega_\perp^2 R_\perp^2 = \mu$$

(6.47)

Hiérarchie des diverses longueurs

$$\frac{\xi_0^2}{\sigma_{0\perp}^2} = \frac{1}{8\pi a \rho_0} \frac{M \omega_{\perp}}{\hbar} = \frac{M}{8\pi \hbar^2 a \rho_0} \hbar \omega_{\perp} = \frac{\hbar \omega_{\perp}}{2\mu} \ll 1 \quad (6.48)$$

$$\frac{1}{2} M \omega_{\perp}^2 R_{\perp}^2 = \mu = g \rho_0 = \frac{4\pi \hbar^2}{M} a \rho_0 = \frac{\hbar^2}{2M} \frac{1}{\xi_0^2} \quad (6.49)$$

$$R_{\perp}^2 = \frac{\hbar^2}{M^2 \omega_{\perp}^2} \frac{1}{\xi_0^2} = \frac{\sigma_{0\perp}^4}{\xi_0^2} \quad (6.50)$$

$$\frac{\sigma_{0\perp}^2}{R_{\perp}^2} = \frac{\xi_0^2}{\sigma_{0\perp}^2} \ll 1 \quad (6.51)$$

$$\xi_0 \ll \sigma_{0\perp} \ll R_{\perp} \quad (6.52)$$

Étude numérique

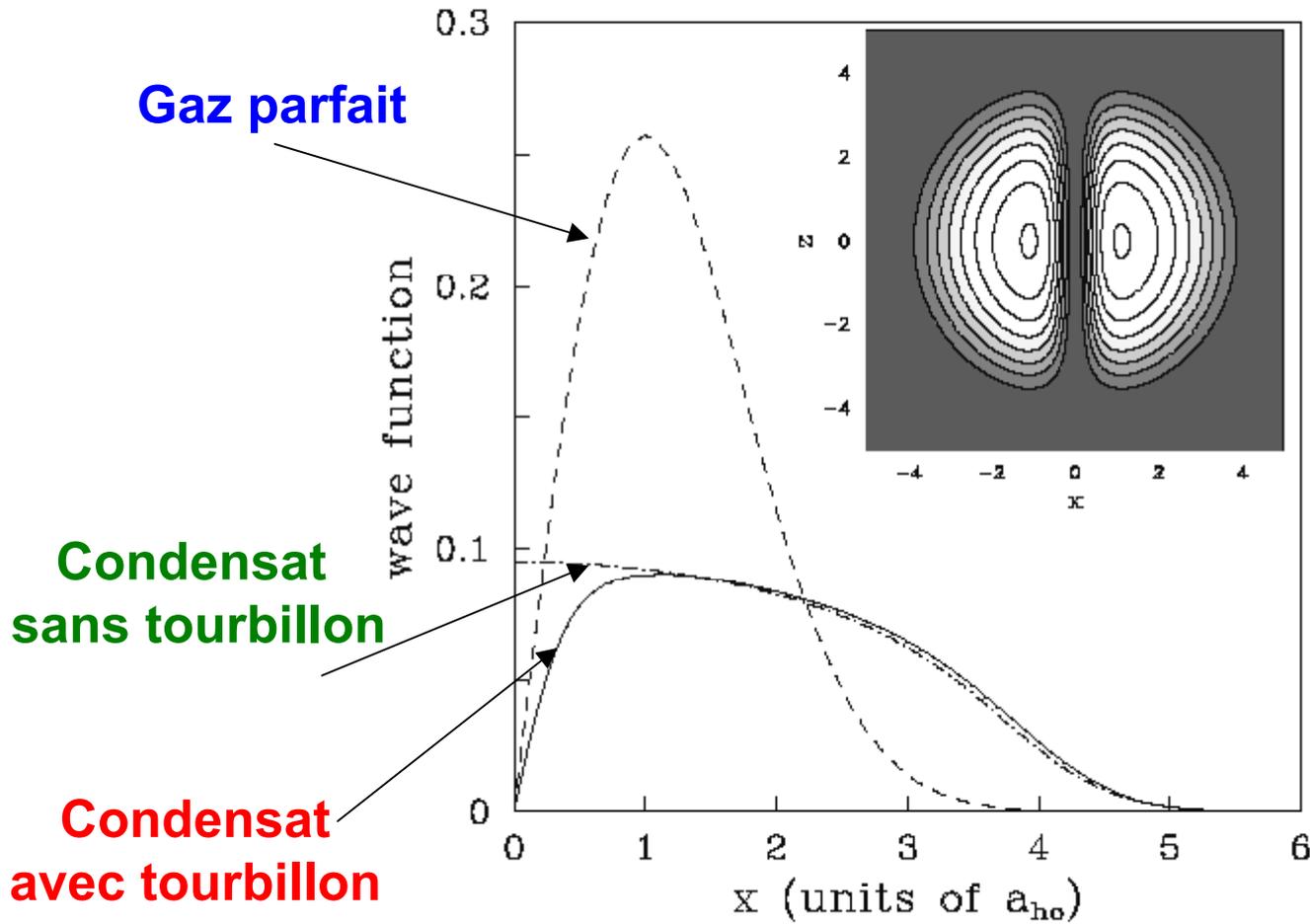


Figure VI-5

Figure extraite de la référence 8

Énergie du tourbillon

Étude qualitative

Repartons de l'équation (6.40) et remplaçons dans cette équation R par R_{\perp}

Comme le nombre d'atomes par unité de longueur est de l'ordre de $\pi R_{\perp}^2 \rho_0$, l'ordre de grandeur de l'énergie par atome dans un condensat de rayon R_{\perp} avec un tourbillon $m=1$ est

$$E_{\text{at}} \simeq \frac{\hbar^2}{M R_{\perp}^2} \text{Log} \frac{R_{\perp}}{\xi_0} \quad (6.53)$$

Cette énergie est évaluée par rapport à l'énergie du condensat sans tourbillon.

Comparaison avec le gaz parfait

Dans un gaz parfait avec 1 tourbillon $m=1$, chaque atome a une énergie supplémentaire

$$(E_{\text{at}})_{GP} = \hbar \omega_{\perp} \quad (6.54)$$

La comparaison de (6.53) et (6.54) donne

$$\frac{E_{\text{at}}}{(E_{\text{at}})_{GP}} \simeq \frac{\hbar}{M \omega_{\perp}} \frac{1}{R_{\perp}^2} \text{Log} \frac{R_{\perp}}{\xi_0} = \frac{\sigma_{0\perp}^2}{R_{\perp}^2} \text{Log} \frac{R_{\perp}}{\xi_0} \quad (6.55)$$

Quand N croît, le terme en Log a une croissance logarithmique en $\text{Log} N$ alors que le premier terme décroît en loi de puissance. Pour un condensat à la limite de Thomas-Fermi, on a donc

$$E_{\text{at}} < \hbar \omega_{\perp} \quad (6.56)$$

Expression analytique approchée pour l'énergie du tourbillon (à la limite de Thomas-Fermi)

(référence 12)

Condensat piégé radialement, mais libre sur Oz

Dimension radiale : R_{\perp}

On suppose $R_{\perp} \gg \xi_0$

Il est commode alors de considérer 2 zones distinctes, de largeurs différentes, et d'évaluer séparément leurs contributions à l'énergie

- Zone $0 \leq r_{\perp} \leq d$ avec $\xi_0 \ll d \ll R_{\perp}$
- Zone $d \leq r_{\perp} \leq R_{\perp}$

Contribution de la zone $0 \leq r_{\perp} \leq d$

La densité spatiale n'a pas encore commencé à décroître à cause du piégeage. Il est alors légitime d'utiliser l'expression (6.40) établie pour un condensat homogène, à condition de remplacer R par d

$$E_1 / L = \pi \rho_0 \left(\hbar^2 / M \right) \text{Log} (1.46 d / \xi_0) \quad (6.57)$$

Contribution de la zone $d \leq r_{\perp} \leq R_{\perp}$

Par rapport au condensat sans tourbillon, l'énergie nouvelle qui apparaît est essentiellement l'énergie cinétique azimutale

$$E_2 / L = \int_d^{R_{\perp}} 2 \pi r dr M \rho(r) v^2(r) / 2 \quad (6.58)$$

En utilisant (6.9) pour $v(r)$ et $\rho(r) = \rho_0 \left(1 - r^2 / R_{\perp}^2 \right)$, on obtient

$$E_2 / L = \pi \rho_0 \left(\hbar^2 / M \right) \left[\left(\text{Log} R_{\perp} / d \right) - 1/2 \right] \quad (6.59)$$

Résultat final

La somme de (6.57) et (6.59) donne :

$$\frac{E}{L} = \pi \rho_0 \frac{\hbar^2}{M} \text{Log} \frac{0.866 R_{\perp}}{\xi_0} \quad (6.60)$$

Condensat également piégé le long de Oz

Longueur du condensat : $2 Z_0$

Si $Z_0 \gg \xi_0$, on peut appliquer le résultat (6.60) pour les diverses tranches dz comprises entre Z_0 et $-Z_0$

$$E = \pi \frac{\hbar^2}{M} \int_{-Z_0}^{+Z_0} dz \rho(z) \text{Log} \frac{0.866 R_{\perp}(z)}{\xi_0(z)} \quad (6.61)$$

avec

$$\rho(z) = \rho_0 \left(1 - \frac{z^2}{Z_0^2} \right) \quad R_{\perp}(z) = R_{\perp} \left(1 - \frac{z^2}{Z_0^2} \right)^{1/2} \quad \xi(z) = \frac{1}{\sqrt{8\pi a \rho_0(z)}}$$

Résultat final pour l'énergie du condensat

$$E = \frac{4\pi \hbar^2}{3 M} \rho_0 Z_0 \text{Log} \frac{0.671 R_{\perp}}{\xi_0} \quad (6.62)$$

Nombre d'atomes

$$\begin{aligned} N &= \int d^3r \rho(r) = \rho_0 \int d^3r \left(1 - \frac{r_{\perp}^2}{R_{\perp}^2} - \frac{z^2}{Z_0^2} \right) \\ &= \frac{8\pi}{15} \rho_0 R_{\perp}^2 Z_0 \end{aligned} \quad (6.63)$$

Energie par atome

$$E_{\text{at}} = \frac{E}{N} = \frac{5}{2} \frac{\hbar^2}{M R_{\perp}^2} \text{Log} \frac{0.671 R_{\perp}}{\xi_0} \quad (6.64)$$

Stabilité thermodynamique dans un piège tournant

Supposons que le piège contenant le condensat tourne à la fréquence Ω

Dans le référentiel tournant à Ω où le piège est statique, il faut ajouter à l'hamiltonien le terme $-\Omega \hat{L}_z$. Si le condensat contient un tourbillon de moment cinétique $+\hbar$, l'énergie par atome change d'une quantité $-\hbar\Omega$

Alors que l'énergie de l'état à 1 tourbillon est supérieure à celle de l'état sans tourbillon quand le piège ne tourne pas, elle peut lui devenir inférieure si

$$E_{\text{at}} - \hbar \Omega < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Omega > \Omega_{\text{crit}} = E_{\text{at}} / \hbar \quad (6.65)$$

L'état à 1 tourbillon peut devenir l'état thermodynamique stable si la vitesse de rotation est suffisamment élevée

Vitesse angulaire critique

Gaz parfait

Les équations (6.46) et (6.65) donnent :

$$\Omega_{\text{crit}} = \omega_{\perp} \quad (6.66)$$

L'état à 1 tourbillon devient l'état thermodynamique stable si Ω est supérieur à ω_{\perp} . Mais la force centrifuge est alors supérieure à la force de piégeage.

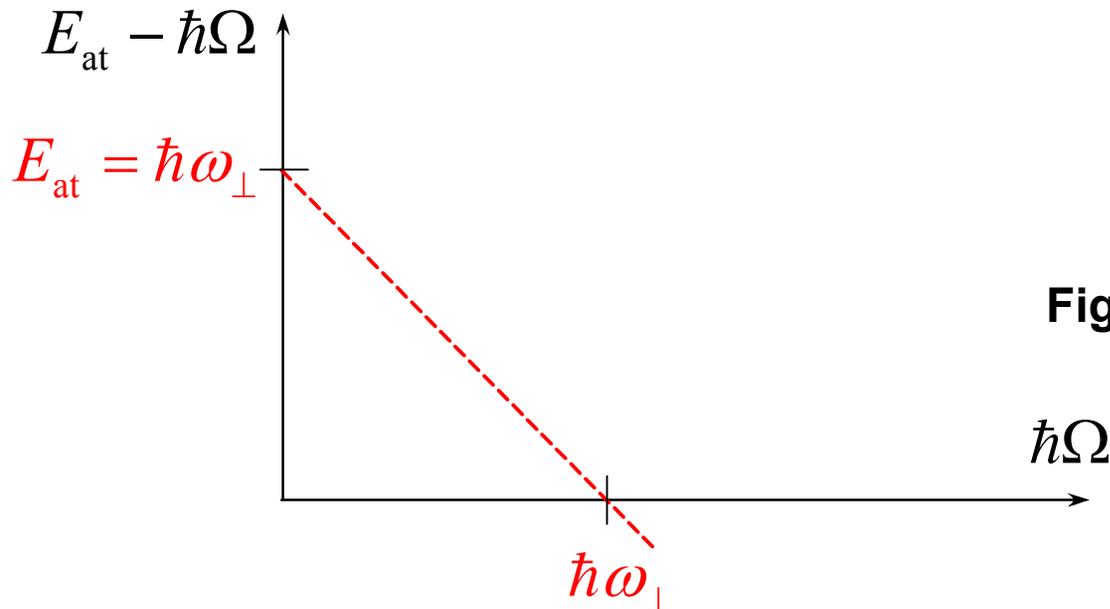


Figure VI-6

Vitesse angulaire critique (suite)

Limite de Thomas-Fermi

D'après (6.56)

$$\Omega_{\text{crit}} < \omega_{\perp} \quad (6.67)$$

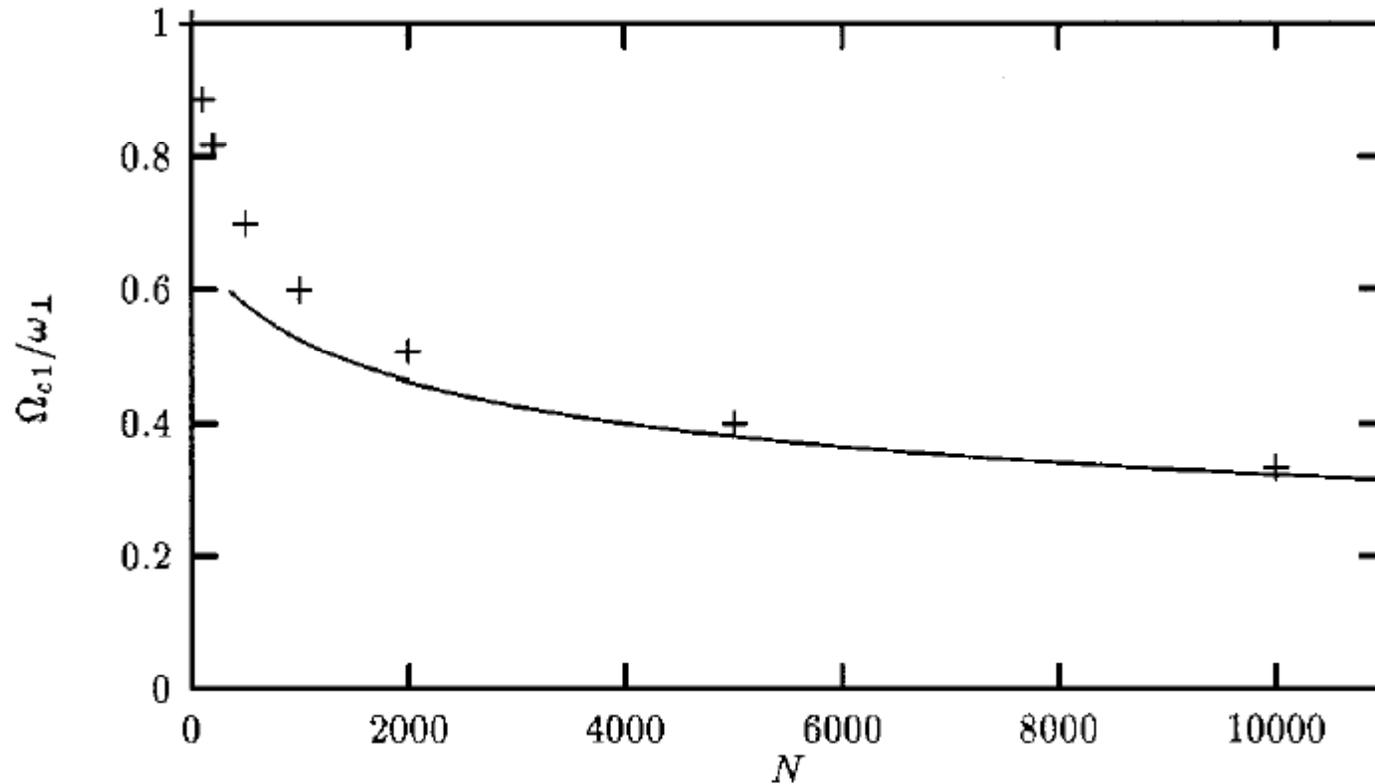
et la difficulté précédente disparaît

L'utilisation de (6.64) permet d'obtenir une expression analytique pour la fréquence critique

$$\Omega_{\text{crit}} = \frac{E_{\text{at}}}{\hbar} = \frac{5}{2} \frac{\hbar}{M R_{\perp}^2} \text{Log} \frac{0.671 R_{\perp}}{\xi_0} \quad (6.68)$$

qui peut être comparée au résultat d'un calcul numérique (voir la figure VI-7)

Variations de la fréquence critique avec N



+ : Résultats d'un calcul numérique

Figure VI-7

Courbe en traits pleins : expression (6.64)

Figure extraite de la référence 12

Références

(Suite de T-156 et 192)

- 8 - F. Dalfovo, S. Giorgini, L. Pitaevskii, S. Stringari, Rev. Mod. Phys. 71, 463 (1999).
- 9 - E. Lifchitz, L. Pitaevskii, « Physique Statistique », 2^{ème} partie, Editions Mir.
- 10 - E. Gross, Nuovo Cimento, 20, 454 (1961).
- 11 - L. Pitaevskii, Zh. Eksp. Teor. Fiz. 40, 646 (1961)
[Sov. Phys. JETP. 13, 451 (1961)]
- 12 - E. Lundh, C. Pethick, H. Smith, Phys. Rev. A55, 2126 (1997)
- 13 - A. Fetter, A. Svidzinsky, cond-mat/0102003
- 14 - R. Pathria, « Statistical Mechanics », Pergamon (1972)

Tourbillons quantiques et modes propres de vibration

Peut-on détecter la présence d'un tourbillon quantique dans un condensat par une modification des fréquences des modes propres de vibration ?

Importance d'une méthode spectroscopique pour détecter et étudier les tourbillons.

Les mesures des fréquences des modes propres de vibration sont en effet assez précises.

Plan

- Principe de la méthode
- Ordres de grandeur
- Calcul de la modification des fréquences de vibration par la méthode des règles de somme (pour un condensat à la limite de Thomas-Fermi)
- Calcul plus précis valable également pour les faibles densités
- Etude d'autres géométries de piégeage

Principe de la méthode

Condensat ayant la symétrie de révolution autour de Oz

Fréquence radiale ω_{\perp} et axiale ω_z

Considérons les 2 modes quadrupolaires de surface $m = \pm 2$, de fréquences

$$\omega_{+} = \omega_Q (m = + 2) \quad \omega_{-} = \omega_Q (m = - 2) \quad (7.1)$$

Déformations elliptiques tournant dans des sens opposés avec des vitesses angulaires $\omega_{\pm} / 2$ (voir T-42)

Ces 2 vitesses angulaires sont-elles modifiées par la présence d'un tourbillon d'axe Oz ?

Principe de la méthode (suite)

En l'absence de tourbillon

Le système est invariant par renversement du sens du temps. Il s'ensuit que

$$\omega_+ = \omega_- = \omega_Q \quad (7.2)$$

Les 2 déformations elliptiques $m = \pm 2$ tournent avec des vitesses angulaires $\pm \omega_Q / 2$

Le mode en $x^2 - y^2$ est une superposition linéaire des modes $m = \pm 2$. La relation (7.2) entraîne que ce mode est un déformation quadrupolaire d'axes fixes et de fréquence ω_Q double de la fréquence de rotation des ellipses.

Principe de la méthode (suite)

En présence de tourbillon d'axe Oz

Le système n'est plus invariant par renversement du sens du temps. Le champ de vitesses du tourbillon est, suivant le signe de m , soit parallèle, soit antiparallèle au champ de vitesses de l'excitation élémentaire $m = \pm 2$

$$\omega_+ - \omega_- = \delta\omega \neq 0 \quad (7.3)$$

La bissectrice de l'angle formé par les grands axes des 2 ellipses tournant dans des sens opposés à $\omega_+ / 2$ et $\omega_- / 2$ tourne à la fréquence angulaire

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\omega_+}{2} - \frac{\omega_-}{2} \right) = \frac{\omega_+ - \omega_-}{4} \quad (7.4)$$

Principe de la méthode (suite)

Mode en $x^2 - y^2$ en présence d'un tourbillon

Superposition linéaire des modes $m = \pm 2$

La déformation quadrupolaire ne vibre plus avec des axes fixes, mais avec des axes qui tournent à la vitesse $(\omega_+ - \omega_-) / 4$, la fréquence de vibration étant $(\omega_+ + \omega_-) / 2$

Expérimentalement, on introduit une déformation quadrupolaire sur le condensat. On la coupe brusquement et on observe l'évolution ultérieure du condensat.

Ordre de grandeur de $\delta \omega$

$$\frac{\delta \omega}{\omega} \simeq \frac{v}{c} \quad (7.5)$$

ω : Fréquence du mode quadrupolaire

v : Vitesse due au tourbillon

c : Vitesse du son

$$v \simeq \frac{1}{2\pi R} \frac{h}{M} = \frac{\hbar}{M R} \quad (7.6)$$

La circulation de la vitesse est quantifiée

$$c \simeq \sqrt{\frac{\mu}{M}} \quad (7.7)$$

μ : Potentiel chimique

Ordre de grandeur de $\delta \omega$ (suite)

A la limite de Thomas-Fermi

$$\frac{1}{2} M \omega_0^2 R^2 = \mu \quad (7.8)$$

$$R \simeq \frac{1}{\omega_0} \sqrt{\frac{2\mu}{M}} \simeq \frac{c}{\omega_0} \quad (7.9)$$

Par ailleurs

$$\omega \simeq \omega_0 \quad (7.10)$$

De (7.5), (7.6), (7.7), (7.10), on déduit alors

$$\delta \omega \simeq \omega_0 \frac{v}{c} \simeq \omega_0 \frac{\hbar}{M R c} \simeq \frac{\hbar}{M R^2} \quad (7.11)$$

L'équation (7.6) montre que le \hbar apparaissant dans (7.11) est le moment cinétique ℓ_z du tourbillon. Donc

$$\delta \omega \simeq \frac{\ell_z}{M R^2} \quad (7.12)$$

Remarque

Les calculs précédents permettent aussi de comprendre pourquoi les fréquences des modes propres de vibration (voir cours I et II) ne dépendent que des fréquences propres du piège et non des interactions (décrites par la longueur de diffusion a) et du nombre N de bosons. On peut en effet écrire la relation de dispersion

$$\omega \simeq c q \simeq \frac{c}{R} \quad (7.13)$$

où c 'est la vitesse du son, et q le vecteur d'onde, de l'ordre de l'inverse du rayon R

Remarque (suite)

La relation (7.9) montre que c/R ne dépend que de ω_0 , compte tenu de la relation (7.8) entre R et μ .

On peut aussi utiliser les relations (6.29) et (6.41) du cours 1998-99 (pages VI-8 et VI-9)

$$\mu = \frac{\hbar\omega_0}{2} \left(15 \frac{aN}{\sigma_0} \right)^{2/5} \quad R = \sigma_0 \left(15 \frac{aN}{\sigma_0} \right)^{1/5}$$

avec

$$\sigma_0 = \sqrt{\hbar/M\omega_0}$$

Comme c est proportionnel à $\mu^{1/2}$, le numérateur et le dénominateur de (7.13) ont la même dépendance en $(aN)^{1/5}$ qui se simplifie dans le rapport

Opérateurs excitant les modes $m = \pm 2$

$$\hat{F}_{\pm} e^{-i\omega t} + h \cdot c \quad (7.14)$$

$$\hat{F}_{\pm} = \sum_{k=1}^N \hat{f}_{\pm}(\vec{r}_k) \quad (7.15)$$

$$\hat{f}_{\pm} = (\hat{x} \pm i \hat{y})^2 \quad (7.16)$$

Densités spectrales $S_{\pm}(E)$

$$S_{\pm}(E) = \sum_n \left| \langle \psi_n | \hat{F}_{\pm} | \psi_0 \rangle \right|^2 \delta(E - E_{n0}) \quad (7.17)$$

$|\psi_0\rangle$: état du condensat, d'énergie E_0 contenant ou non un tourbillon

$|\psi_n\rangle$: état excité, d'énergie E_n
 $E_{n0} = E_n - E_0 \quad (7.18)$

Moments des densités spectrales

Définition

Dans ce qui suit nous désirons comparer les poids et les fréquences des modes $m = \pm 2$

Plutôt que de considérer séparément les moments d'ordre p de $S_+(E)$ et $S_-(E)$ nous introduisons les quantités

$$\begin{aligned} m_p^\pm &= \int_{-\infty}^{+\infty} dE E^p [S_+(E) \pm S_-(E)] \\ &= \sum_n (E_n - E_0)^p \left[\left| \langle \psi_n | \hat{F}_+ | \psi_0 \rangle \right|^2 \pm \left| \langle \psi_n | \hat{F}_- | \psi_0 \rangle \right|^2 \right] \end{aligned} \tag{7.19}$$

Etude de m_0^-

Expression en fonction de la valeur moyenne d'un commutateur

$$m_0^- = \langle \psi_0 | [\hat{F}_-, \hat{F}_+] | \psi_0 \rangle \quad (7.20)$$

Démonstration de (7.20)

$$\begin{aligned} m_0^- &= \langle \psi_0 | \hat{F}_- \hat{F}_+ - \hat{F}_+ \hat{F}_- | \psi_0 \rangle \\ &= \sum_n \left[|\langle \psi_n | \hat{F}_+ | \psi_0 \rangle|^2 - |\langle \psi_n | \hat{F}_- | \psi_0 \rangle|^2 \right] \end{aligned}$$

Etude de m_0^-

Comme \hat{F}_+ commute avec \hat{F}_- l'équation (7.20) entraîne

$$m_0^- = 0 \quad (7.21)$$

Hypothèse de 2 transitions prédominantes

Supposons qu'une seule transition de fréquence ω_+ (respectivement ω_-), épuise les règles de somme sur \hat{F}_+ (respectivement \hat{F}_-)

$$S_+(E) \simeq \sigma^+ \delta(E - \hbar \omega_+) \quad (7.22a)$$

$$S_-(E) \simeq \sigma^- \delta(E - \hbar \omega_-) \quad (7.22b)$$

σ^+ : "poids" de la transition ω_+

σ^- : "poids" de la transition ω_-

Hypothèse d'autant mieux vérifiée que l'excitation est plus collective, c-à-d que N est plus grand.

Conséquence de cette hypothèse

Le report des équations (7.22) dans (7.19) donne

$$m_0^- = \sigma^+ - \sigma^- \quad (7.23)$$

$$m_1^+ = \sigma^+ \hbar \omega_+ + \sigma^- \hbar \omega_- \quad (7.24)$$

$$m_2^- = \sigma^+ \hbar^2 \omega_+^2 - \sigma^- \hbar^2 \omega_-^2 \quad (7.25)$$

Le résultat (7.21) montre alors que

$$\sigma^+ = \sigma^- \quad (7.26)$$

Les 2 transitions à ω_{\pm} ont même poids.

On déduit alors de (7.24), (7.25), (7.26) que

$$\frac{m_2^-}{m_1^+} = \frac{\hbar^2 (\omega_+^2 - \omega_-^2)}{\hbar (\omega_+ + \omega_-)} = \hbar (\omega_+ - \omega_-) \quad (7.27)$$

Intérêt de la méthode des moments

Comme tous les moments, m_2^- et m_1^+ peuvent être mis sous la forme de valeurs moyennes de commutateurs dans l'état fondamental du système.

Ces commutateurs peuvent être calculés exactement à partir des relations de commutations canoniques

Si l'hypothèse des 2 transitions prédominantes est valable, le rapport m_2^- / m_1^+ permet alors d'accéder à l'écart de fréquence entre les 2 modes $m = \pm 2$

Etude de m_1^+

Expression en fonction de la valeur moyenne d'un commutateur

$$m_1^+ = \langle \psi_0 | [\hat{F}_-, [\hat{H}, \hat{F}_+]] | \psi_0 \rangle \quad (7.28)$$

Démonstration de (7.28)

$$\begin{aligned} [\hat{F}_-, [\hat{H}, \hat{F}_+]] &= \hat{F}_- \hat{H} \hat{F}_+ + \hat{F}_+ \hat{H} \hat{F}_- - \hat{F}_- \hat{F}_+ \hat{H} - \hat{H} \hat{F}_+ \hat{F}_- \\ \langle \psi_0 | [\hat{F}_-, [\hat{H}, \hat{F}_+]] | \psi_0 \rangle &= \\ &+ \sum_n E_n \left\{ |\langle \psi_n | \hat{F}_+ | \psi_0 \rangle|^2 + |\langle \psi_n | \hat{F}_- | \psi_0 \rangle|^2 \right\} \\ &- E_0 \sum_n \left\{ |\langle \psi_n | \hat{F}_+ | \psi_0 \rangle|^2 + |\langle \psi_n | \hat{F}_- | \psi_0 \rangle|^2 \right\} \\ &= \sum_n (E_n - E_0) \left[|\langle \psi_n | \hat{F}_+ | \psi_0 \rangle|^2 + |\langle \psi_n | \hat{F}_- | \psi_0 \rangle|^2 \right] = m_1^+ \end{aligned}$$

Etude de m_1^+ (suite)

Calcul de la valeur moyenne du commutateur

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^N \left[\frac{\hat{p}_i^2}{2M} + V_{ext}(\hat{\vec{r}}_i) \right] + \frac{1}{2} \sum_i \sum_{j \neq i} g \delta(\hat{\vec{r}}_i - \hat{\vec{r}}_j)$$
$$V_{ext}(\vec{r}_i) = \frac{M}{2} \left[\omega_{\perp}^2 (x_i^2 + y_i^2) + \omega_z^2 z_i^2 \right] \quad (7.29)$$

Les seuls termes de H ne commutant pas avec F_+ et F_- sont les termes d'énergie cinétique

Résultat du calcul de m_1^+

$$m_1^+ = \frac{8N\hbar^2}{M} \langle \hat{r}_{\perp}^2 \rangle_0 = \frac{8N\hbar^2}{M} \langle \hat{x}^2 + \hat{y}^2 \rangle_0 \quad (7.30)$$

$\langle \rangle_0$: valeur moyenne dans la fonction d'onde $\varphi_0(\vec{r})$ (normée à 1) décrivant le condensat

Etude de m_2^-

Expression en fonction de commutateurs

$$m_2^- = \langle \psi_0 | \left[\left[\hat{F}_-, \hat{H} \right], \left[\hat{H}, \hat{F}_+ \right] \right] | \psi_0 \rangle \quad (7.31)$$

Le commutateur multiple apparaissant en (7.31) donne naissance à 3 types de termes

$\hat{F}_- \hat{H}^2 \hat{F}_+, \quad \hat{F}_+ \hat{H}^2 \hat{F}_-$	Termes en E_n^2
$\hat{H} \hat{F}_- \hat{F}_+ \hat{H}, \quad \hat{H} \hat{F}_+ \hat{F}_- \hat{H}$	Termes en E_0^2
$\hat{H} \hat{F}_+ \hat{H} \hat{F}_-, \hat{H} \hat{F}_- \hat{H} \hat{F}_+, \hat{F}_+ \hat{H} \hat{F}_- \hat{H}, \hat{F}_- \hat{H} \hat{F}_+ \hat{H}$	Termes en $E_0 E_n$

Le regroupement de ces termes permet de faire apparaître $(E_0 - E_n)^2$, puis m_2^-

Résultats du calcul des commutateurs

$$m_{\pm}^{-} = \frac{16\hbar^3 N}{M^2} \langle \hat{x} \hat{p}_y - \hat{y} \hat{p}_x \rangle_0 = \frac{16\hbar^3 N}{M^2} \langle \hat{\ell}_z \rangle_0 \quad (7.32)$$

Résultat final pour $\omega_+ - \omega_-$

Le report de (7.30) et (7.32) dans (7.27) donne finalement

$$\omega_+ - \omega_- = \frac{2}{M \langle r_{\perp}^2 \rangle} \langle \hat{\ell}_z \rangle_0 \quad (7.33)$$

résultat en accord avec l'ordre de grandeur calculé en (7.12)

Cas d'un gaz parfait

Motivations de cette étude

Le calcul des fréquences des modes de surface $m=+2$ et -2 pour un condensat de bosons sans interactions possédant un tourbillon est simple et peut être fait sans approximations

Les résultats obtenus permettent de tester l'hypothèse des 2 transitions prédominantes faite plus haut quand le condensat n'est pas à la limite de Thomas-Fermi et, éventuellement, de la compléter.

Quanta circulaires droits et gauches

Seuls, les degrés de liberté transverses sont à considérer. Les états à 1 particule sont donc les états d'un oscillateur harmonique isotrope à 2 dimensions qui peuvent être classés par les nombres quantiques n_d et n_g , nombre de quanta circulaires droits et gauches (réf. 18)

$$\begin{cases} \hat{a}_d^+ = (\hat{a}_x^+ + i\hat{a}_y^+)/\sqrt{2} & \hat{a}_g^+ = (\hat{a}_x^+ - i\hat{a}_y^+)/\sqrt{2} \\ \hat{a}_d = (\hat{a}_x - i\hat{a}_y)/\sqrt{2} & \hat{a}_g = (\hat{a}_x + i\hat{a}_y)/\sqrt{2} \end{cases} \quad (7.34)$$

$$\hat{H}_0 = \hbar \omega_{\perp} \left(\hat{a}_d^+ \hat{a}_d + \hat{a}_g^+ \hat{a}_g + \frac{1}{2} \right) \quad (7.35)$$

$$\hat{L}_Z = \hbar (\hat{a}_d^+ \hat{a}_d - \hat{a}_g^+ \hat{a}_g) \quad (7.36)$$

État du condensat

Tous les bosons sont condensés dans l'état le plus bas de moment cinétique $+\hbar$ c'est-à-dire dans l'état

$$|0_g, 1_d\rangle = |n_g = 0, n_d = 1\rangle \quad (7.37)$$

Expression des opérateurs $\hat{x} \pm i \hat{y}$

$$\begin{aligned} \hat{x} &= \frac{\sigma_{0\perp}}{\sqrt{2}} (\hat{a}_x + \hat{a}_x^+) \\ \hat{y} &= \frac{\sigma_{0\perp}}{\sqrt{2}} (\hat{a}_y + \hat{a}_y^+) \end{aligned} \quad \sigma_{0\perp} = \sqrt{\frac{\hbar}{m \omega_{\perp}}} \quad (7.38)$$

$$\hat{x} + i \hat{y} = \sigma_{0\perp} (\hat{a}_g + \hat{a}_d^+) \quad (7.39)$$

$$\hat{x} - i \hat{y} = \sigma_{0\perp} (\hat{a}_g^+ + \hat{a}_d) \quad (7.40)$$

Excitation des modes $m = \pm 2$ à partir de l'état à un tourbillon

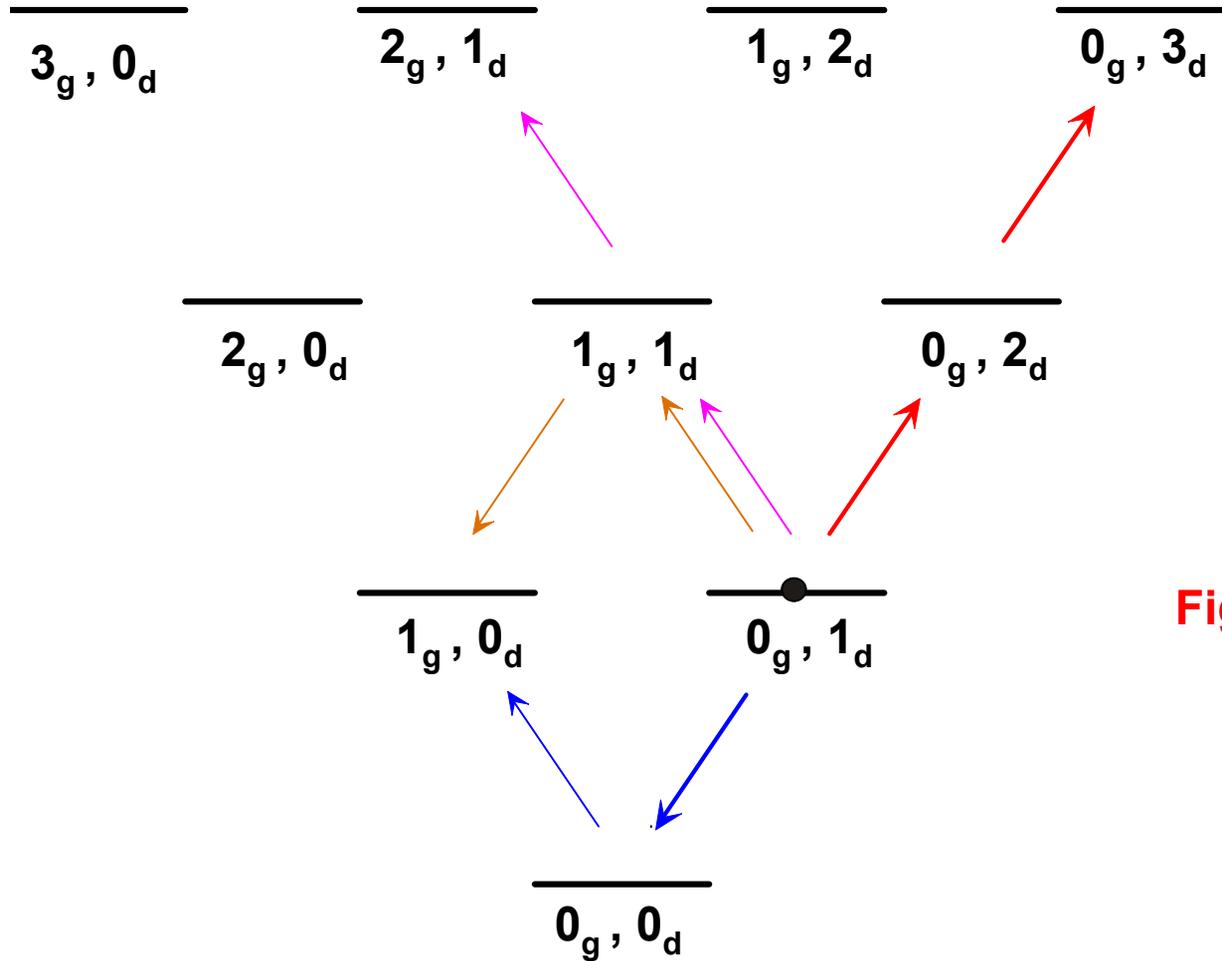


Figure VII-1

Transition excitée par f_+

$$\begin{aligned}
 (\hat{x} + i \hat{y}) |0_g, 1_d\rangle &= \sigma_{0\perp} (\hat{a}_g + \hat{a}_d^+) |0_g, 1_d\rangle \\
 &= \sigma_{0\perp} \sqrt{2} |0_g, 2_d\rangle
 \end{aligned}
 \tag{7.41}$$

$$\begin{aligned}
 \hat{f}_+ |0_g, 1_d\rangle &= (\hat{x} + i \hat{y})^2 |0_g, 1_d\rangle \\
 &= \sigma_{0\perp} \sqrt{2} (\hat{x} + i \hat{y}) |0_g, 2_d\rangle = \sigma_{0\perp}^2 \sqrt{2} (\hat{a}_d^+ + \hat{a}_g) |0_g, 2_d\rangle \\
 &= \sigma_{0\perp}^2 \sqrt{6} |0_g, 3_d\rangle
 \end{aligned}
 \tag{7.42}$$

Une seule transition est excitée par f_+

$$\text{Fréquence : } \omega_+ = 2 \omega_{\perp}
 \tag{7.43}$$

$$\text{Poids : } 6 \sigma_{0\perp}^4
 \tag{7.44}$$

Transitions excitées par \hat{f}_-

$$\begin{aligned}(\hat{x} + i \hat{y})|0_g, 1_d\rangle &= \sigma_{0\perp} (\hat{a}_g^+ + \hat{a}_d)|0_g, 1_d\rangle \\ &= \sigma_{0\perp} (|1_g, 1_d\rangle + |0_g, 0_d\rangle)\end{aligned}\tag{7.45}$$

$$\begin{aligned}\hat{f}_-|0_g, 1_d\rangle &= (\hat{x} + i \hat{y})^2|0_g, 1_d\rangle \\ &= \sigma_{0\perp}^2 (\hat{a}_g^+ + \hat{a}_d)(|1_g, 1_d\rangle + |0_g, 0_d\rangle) \\ &= \sigma_{0\perp}^2 [\sqrt{2}|2_g, 1_d\rangle + (1+1)|1_g, 0_d\rangle]\end{aligned}\tag{7.46}$$

2 états finals possibles

2 transitions de fréquences différentes peuvent être excitées par \hat{f}_-

Fréquences et poids des 2 transitions pouvant être excitées par f_{\perp}

- Etat final $|2_g, 1_d\rangle$
Fréquence $\omega_{\text{up}}^- = 2\omega_{\perp}$
Poids $\sigma_{\text{up}}^- = 2\sigma_{0\perp}^4$

(7.47)

- Etat final $|1_g, 0_d\rangle$
Fréquence $\omega_{\text{down}}^- = 0$
Poids $\sigma_{\text{down}}^- = 4\sigma_{0\perp}^4$

(7.48)

Amélioration de l'hypothèse des 2 transitions prédominantes

Quand les interactions sont faibles, il n'est donc plus légitime de considérer qu'une seule transition épuise la règle de somme sur $S_-(E)$

Une approximation meilleure que (7.22) consiste donc à poser

$$\begin{cases} S_+(E) = \sigma^+ \delta(E - \hbar \omega_+) \\ S_-(E) = \sigma_{\text{up}}^- \delta(E - \hbar \omega_{\text{up}}^-) + \sigma_{\text{down}}^- \delta(E - \hbar \omega_{\text{down}}^-) \end{cases} \quad (7.49)$$

et à essayer de déterminer les paramètres apparaissant dans (7.49) à partir des moments

Moments d'ordre supérieur

Les 3 moments calculés plus haut ne sont plus suffisants pour déterminer les fréquences et poids des 3 transitions intervenant dans l'équation (7.49)

Trois moments supplémentaires doivent être calculés pour avoir suffisamment d'équations permettant de déterminer les 6 inconnues des équations (7.49). Leur expression, tirée de la référence 15, est donnée ci-dessous

$$\begin{aligned} m_3^+ &= \frac{16 \hbar^4 \omega_{\perp}^2}{M} N \langle r_{\perp}^2 \rangle \left[1 + \frac{\langle E_{\text{cin}\perp} \rangle}{\langle E_{\text{pot}\perp} \rangle} \right] \\ m_4^- &= \frac{64 \hbar^5 \omega_{\perp}^2}{M^2} N \langle \hat{\ell}_z \rangle \\ m_5^+ &= \frac{32 \hbar^6 \omega_{\perp}^4}{M} N \langle r_{\perp}^2 \rangle \left[1 + 3 \frac{\langle E_{\text{cin}\perp} \rangle}{\langle E_{\text{pot}\perp} \rangle} + \frac{\langle E_{\text{int}} \rangle}{16 \langle E_{\text{pot}\perp} \rangle} \right] \end{aligned} \quad (7.50)$$

Etude numérique

Principe

A partir de la résolution numérique de l'équation de G-P indépendante du temps décrivant le condensat à l'équilibre, il est possible de calculer les valeurs moyennes des énergies cinétique transverse, potentielle transverse, et d'interaction apparaissant dans les équations (7.50). Ce calcul est fait pour diverses valeurs du paramètre χ_{cond} caractérisant l'importance des interactions (voir T-14, Eq.1.24).

Le report de ces résultats dans les équations (7.50) donne alors les valeurs des 3 nouveaux moments.

6 équations analogues à (7.23), (7.24), (7.25), peuvent alors être écrites avec le choix (7.49) des densités spectrales.

A partir de ces équations, les fréquences et les poids des 3 transitions apparaissant dans (7.49) peuvent être déterminés.

Etude numérique (suite)

Résultats

(pour un condensat sphérique)

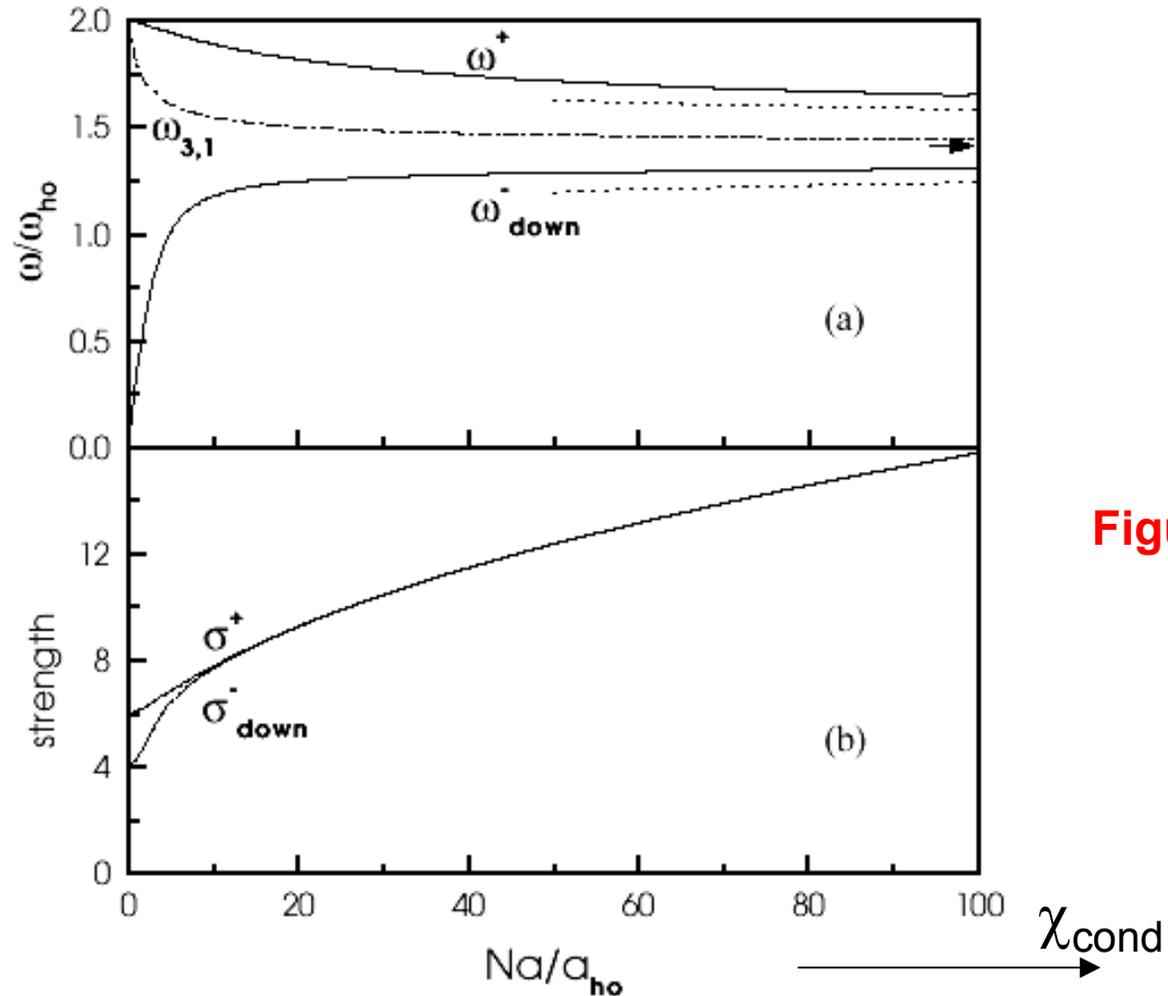


Figure VII-2

Figure extraite de la référence 15

Commentaires sur la figure VII-2

Les résultats concernant ω_-^{up} et σ_-^{up} ne sont pas reportés sur la figure car le poids de cette transition devient très rapidement négligeable quand χ_{cond} croit.

Dès que χ_{cond} atteint des valeurs de l'ordre de 100, les poids des 2 transitions restantes deviennent égaux et leurs fréquences très proches des valeurs

$$\omega_{\pm} = \omega_{\perp} \sqrt{2} \pm \delta\omega/2 \quad (7.51)$$

où $\delta\omega$ est en accord avec le résultat (7.33). Ces valeurs asymptotiques sont représentées par les lignes en pointillés de la figure VII-2. La courbe en traits tirets est la fréquence des modes en l'absence de tourbillon

L'approximation des 2 transitions prédominantes est donc très satisfaisante, sauf pour χ_{cond} très petit

Etude d'autres géométries de piégeage

Condensat contenu dans un récipient de forme torique

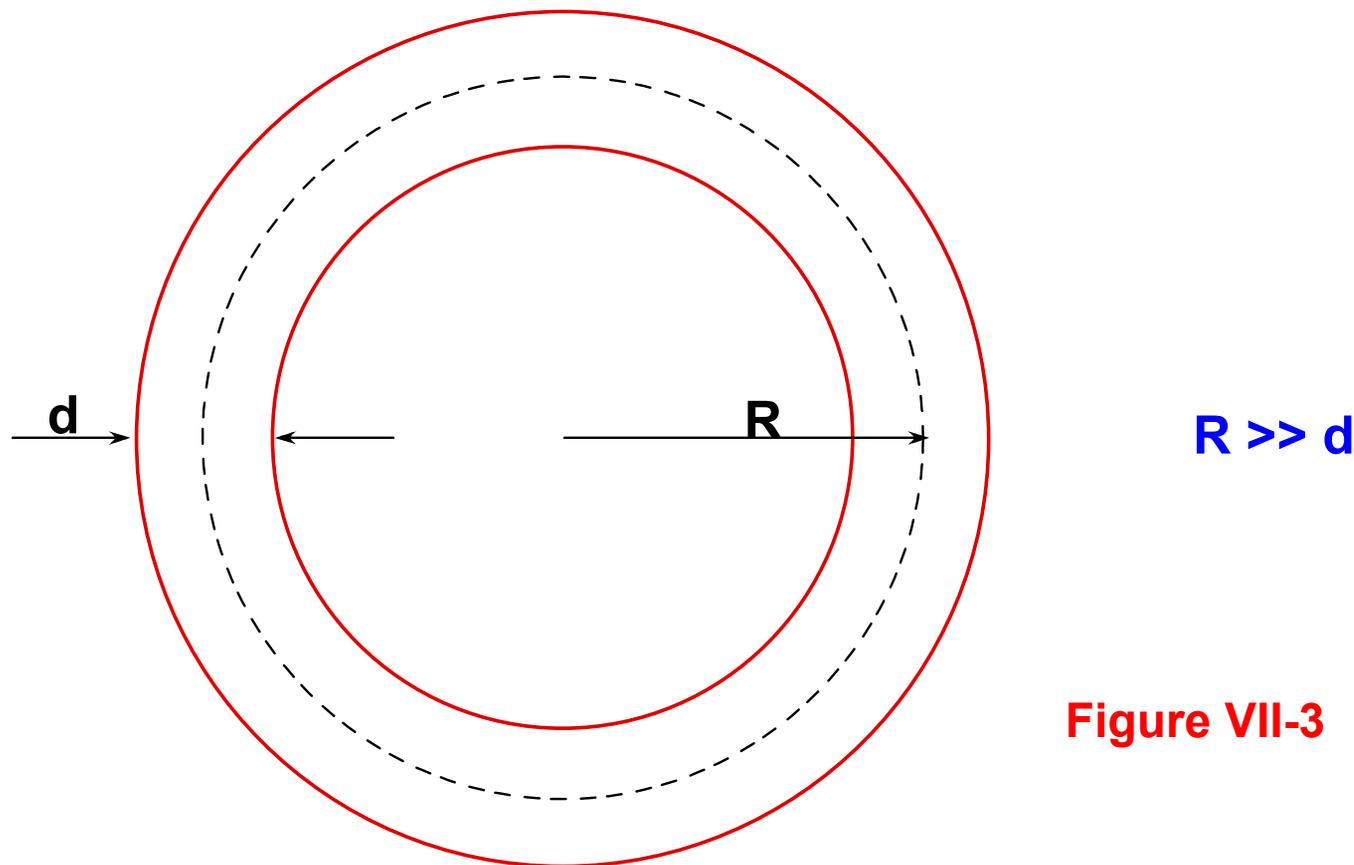


Figure VII-3

Problème analysé dans la référence 17
à partir de la théorie de Bogolubov

Problèmes abordés

- Un tourbillon $m=1$ correspond à un mouvement de rotation d'ensemble du condensat à la vitesse

$$v = \frac{\hbar}{M R} \quad (7.52)$$

- Les modes $m = \pm 2$ sont des modes de compression longitudinaux (phonons), de forme elliptique, donc de longueur d'onde $2 \pi R / 2 = \pi R$, se propageant à la vitesse c du son

En l'absence de tourbillon

$$\omega_+ = \omega_- = 2 \pi \frac{c}{\lambda} = 2 \frac{c}{R} \quad (7.53)$$

- Pour étudier la modification de ces fréquences due à la présence d'un tourbillon, la méthode des moments introduite plus haut est directement applicable

Expression des divers opérateurs

Hamiltonien non perturbé

Se réduit au terme d'énergie cinétique

$$\hat{H}_0 = \sum_{i=1}^N \hat{h}_0(i) \quad \hat{h}_0 = -\frac{\hbar^2}{2MR^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \quad (7.54)$$

Dans cette expression R est considéré comme un nombre car seul le mouvement azimutal est excité

En fait, il s'agit d'un problème à une dimension, où la seule variable est la variable φ

Opérateurs d'excitation des modes $m = \pm 2$

$$(\hat{x} \pm i \hat{y})^2 = R^2 e^{\pm 2i\varphi} \quad (7.55)$$

Ici R est un nombre. On peut donc prendre

$$\hat{F}_{\pm} = \sum_{i=1}^N \hat{f}_{\pm}(i) \quad \hat{f}_{\pm} = e^{\pm 2i\varphi} \quad (7.56)$$

Quelques commutateurs utiles

Ils interviennent dans l'expression des 3 premiers moments

$$\left[\frac{d}{d\varphi}, e^{\pm 2i\varphi} \right] = \pm 2i e^{\pm 2i\varphi} \quad (7.57)$$

$$\begin{aligned} \left[\frac{d^2}{d\varphi^2}, e^{\pm 2i\varphi} \right] &= \frac{d}{d\varphi} \left[\frac{d}{d\varphi}, e^{\pm 2i\varphi} \right] + \left[\frac{d}{d\varphi}, e^{\pm 2i\varphi} \right] \frac{d}{d\varphi} \\ &= \frac{d}{d\varphi} [\pm 2i e^{\pm 2i\varphi}] + [\pm 2i e^{\pm 2i\varphi}] \frac{d}{d\varphi} \\ &= -4 e^{\pm 2i\varphi} \pm 4i e^{\pm 2i\varphi} \frac{d}{d\varphi} \end{aligned} \quad (7.58)$$

Calcul des 3 premiers moments

Calcul de m_0^-

$$m_0^- = N \left\langle \left[\hat{f}_-, \hat{f}_+ \right] \right\rangle = N \left\langle \left[e^{-2i\varphi}, e^{+2i\varphi} \right] \right\rangle = 0 \quad (7.59)$$

Calcul de m_1^+

$$\left[\hat{h}_0, \hat{f}_+ \right] = -\frac{\hbar^2}{2MR^2} \left[\frac{d^2}{d\varphi^2}, e^{+2i\varphi} \right] = \frac{2\hbar^2}{MR^2} \left[e^{+2i\varphi} - i e^{+2i\varphi} \frac{d}{d\varphi} \right]$$

$$\left[\hat{f}_-, \left[\hat{h}_0, \hat{f}_+ \right] \right] = \frac{2\hbar^2}{MR^2} \left[e^{-2i\varphi}, e^{+2i\varphi} - i e^{+2i\varphi} \frac{d}{d\varphi} \right]$$

$$\left[e^{-2i\varphi}, e^{+2i\varphi} - i e^{+2i\varphi} \frac{d}{d\varphi} \right] = 1 - i \frac{d}{d\varphi} - e^{+2i\varphi} \left(1 - i \frac{d}{d\varphi} \right) e^{-2i\varphi} = 2$$

On en déduit

$$m_1^+ = N \left\langle \left[\hat{f}_-, \left[\hat{h}_0, \hat{f}_+ \right] \right] \right\rangle = \frac{4N\hbar^2}{MR^2} \quad (7.60)$$

Calcul des 3 premiers moments (suite)

Calcul de m_2^-

$$\left[\hat{h}_0, \hat{f}_+ \right] = \frac{2\hbar^2}{M R^2} \left[e^{+2i\varphi} - i e^{+2i\varphi} \frac{d}{d\varphi} \right]$$

$$\left[\hat{f}_-, \hat{h}_0 \right] = -\frac{2\hbar^2}{M R^2} \left[e^{-2i\varphi} + i e^{-2i\varphi} \frac{d}{d\varphi} \right]$$

$$\begin{aligned} \left[\left[\hat{f}_-, \hat{h}_0 \right], \left[\hat{h}_0, \hat{f}_+ \right] \right] &= -\frac{4\hbar^4}{M^2 R^4} \left[e^{-2i\varphi} + i e^{-2i\varphi} \frac{d}{d\varphi}, e^{+2i\varphi} - i e^{+2i\varphi} \frac{d}{d\varphi} \right] \\ &= -\frac{16\hbar^4}{M^2 R^4} i \frac{d}{d\varphi} \end{aligned}$$

Comme

$$\hat{\ell}_z = \frac{\hbar}{i} \frac{d}{d\varphi} \quad (7.61)$$

on en déduit

$$m_2^- = \frac{16 N \hbar^3}{M^2 R^4} \left\langle \hat{\ell}_z \right\rangle \quad (7.62)$$

Expression de l'écart de fréquence

Comme plus haut, faisons l'approximation des 2 transitions prédominantes.

On peut alors utiliser l'équation (7.27) et obtenir, compte tenu de (7.60) et (7.62) :

$$\begin{aligned}\omega_+ - \omega_- &= \frac{1}{\hbar} \frac{m_2^-}{m_1^+} \\ &= \frac{\frac{16\hbar^2}{M^2 R^4} \langle \hat{\ell}_z \rangle}{\frac{4\hbar^2}{M R^2}} = \frac{4 \langle \hat{\ell}_z \rangle}{M R^2}\end{aligned}\quad (7.63)$$

expression qui rappelle beaucoup (7.33)

Discussion physique

Le raisonnement utilisé plus haut pour calculer l'ordre de grandeur de $\delta\omega$ s'applique ici de manière quantitative, car R a une valeur bien définie.

Le déplacement de fréquence de chaque onde s'écrit, compte tenu des expressions (7.52) et (7.53) de v et ω

$$\begin{aligned}\delta\omega &= \frac{\omega_+ - \omega_-}{2} \\ &= \omega \frac{v}{c} = \frac{2c}{R} \frac{\hbar}{M R c} = \frac{2\hbar}{M R^2}\end{aligned}\tag{7.64}$$

On retrouve exactement le même résultat qu'en (7.63) (pour un tourbillon $m=1$)

Références

(Suite de T-156, T-192 et T-232)

- 15 - F. Zambelli, S. Stringari, Phys.Rev.Lett. 81, 1754 (1998).
- 16 - Une autre approche hydrodynamique, conduisant aux mêmes résultats, est présentée dans :
A. Svidzinsky, A. Fetter, cond-mat/9803181
- 17 - D. Rokhsar, cond-mat/9709212.
- 18 - C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, F. Laloë, « Mécanique Quantique », Hermann, Paris (1973), Complément D_{VI}

Modes propres de vibration d'un gaz classique d'atomes piégés

- Atomes piégés dans un potentiel harmonique
- Gaz classique (pas de dégénérescence quantique
cas d'un nuage thermique de bosons pour $T \gg T_C$)
- Étude des modes propres de vibration d'un tel système
 - Fréquences propres
 - Taux d'amortissement

Deux régimes extrêmes

1. Régime sans collisions

Le libre parcours moyen entre deux collisions est beaucoup plus grand que la dimension du nuage.

L'atome oscille plusieurs fois dans le piège avant de subir une collision.

2. Régime hydrodynamique

Situation opposée où l'atome subit plusieurs collisions pendant une période d'oscillation.

Un équilibre thermodynamique local peut être atteint en chaque point.

Motivations d'une telle étude

Comparer le comportement du nuage thermique à celui du condensat étudié dans les cours antérieurs

Ne pas se contenter de décrire le nuage thermique comme un gaz parfait d'atomes

Tenir compte des collisions entre atomes et étudier l'évolution des phénomènes quand on passe progressivement du régime sans collisions au régime hydrodynamique

Méthode suivie (référence 19)

- Partir de l'équation de Boltzmann décrivant l'évolution de la distribution dans l'espace des phases sous l'effet des collisions binaires entre atomes.
- En déduire l'équation d'évolution des valeurs moyennes de grandeurs physiques reliées aux modes propres de vibration étudiés.
- Ces valeurs moyennes sont en général couplées aux valeurs moyennes d'autres grandeurs physiques.

Ensemble d'équations d'évolution couplées qu'il faut essayer de résoudre avec certaines approximations

Plan

- Équation de Boltzmann
- Équation d'évolution des valeurs moyennes.
- Grandeurs conservées au cours des collisions
- Etude d'un premier exemple simple
- Etude des modes ciseaux. Fréquences des modes propres de vibration et taux d'amortissement
- Transition du régime sans collision au régime hydrodynamique

Équation de Boltzmann

Voir référence 20 et cours 1996-97 pages VI-1 à VI-4

Équation donnant l'évolution temporelle de la distribution $f(\vec{r}, \vec{v}_1, t)$ dans l'espace des phases

$$\frac{\partial}{\partial t} f(\vec{r}, \vec{v}_1, t) + \vec{v}_1 \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}} f(\vec{r}, \vec{v}_1, t) - \frac{1}{M} \left(\vec{\nabla}_{\vec{r}} V_{\text{ext}}(\vec{r}) \right) \cdot \left(\vec{\nabla}_{\vec{v}_1} f(\vec{r}, \vec{v}_1, t) \right) = I_{\text{coll}} [f] \quad (8.1)$$

$$I_{\text{coll}} [f] = \frac{\sigma_0}{4\pi} \int d^2\Omega' d^3v_2 |\vec{v}_2 - \vec{v}_1| [f(\vec{v}'_1) f(\vec{v}'_2) - f(\vec{v}_1) f(\vec{v}_2)] \quad (8.2)$$

Collision $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 \rightarrow \vec{v}'_1 + \vec{v}'_2$

$\sigma_0 = 8\pi a^2$: section efficace

Ω' : angle solide dans la direction de $\vec{v}'_1 - \vec{v}'_2$

Description de la collision dans le système du centre de masse

Fig. 2, p. VI-2 du cours 96-97 avec les notations de la référence 19

\vec{C} : Vitesse du centre de masse

$\vec{V} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$: Vitesse relative avant collision

$\vec{V}' = \vec{v}'_1 - \vec{v}'_2$: Vitesse relative après collision

$$\vec{v}_1 = \vec{C} + \frac{\vec{V}}{2} \quad \vec{v}_2 = \vec{C} - \frac{\vec{V}}{2}$$

$$\vec{v}'_1 = \vec{C} + \frac{\vec{V}'}{2} \quad \vec{v}'_2 = \vec{C} - \frac{\vec{V}'}{2}$$

$$|\vec{V}| = |\vec{V}'|$$

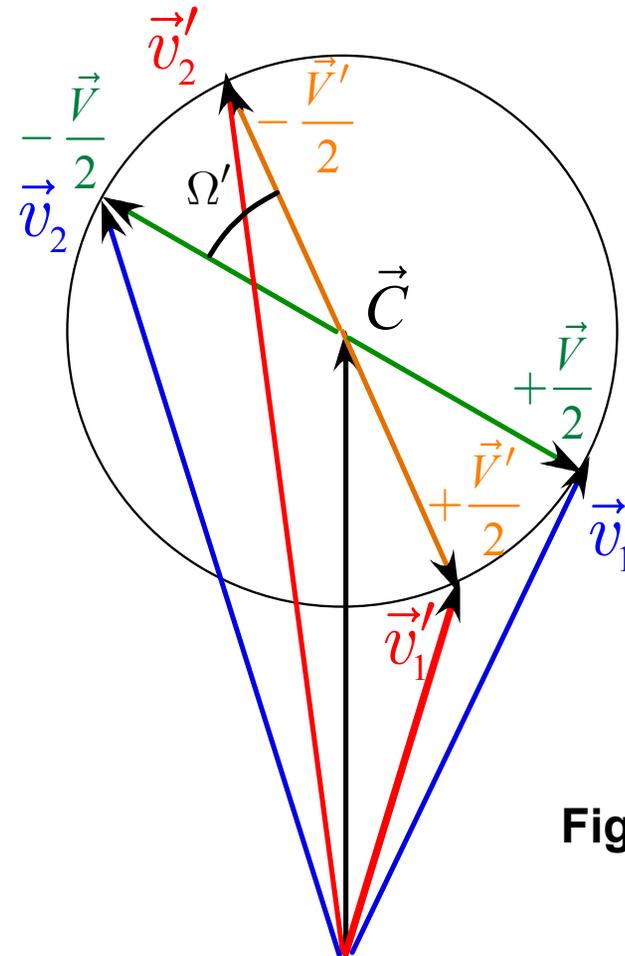


Figure VIII-1

Remarques

Nous utilisons ici les notations de la référence 19

[Par rapport au cours 1996-97](#)

- La collision est décrite par les vitesses et non par les impulsions
- La collision intervenant dans I_{coll} est

$$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 \rightarrow \vec{v}'_1 + \vec{v}'_2$$

au lieu de

$$\vec{p}_3 + \vec{p}_4 \rightarrow \vec{p}_1 + \vec{p}_2$$

- $f(\vec{r}, \vec{v})$ est normalisée à N, alors que c'était $f(\vec{r}, \vec{p})/h^3$ qui avait cette normalisation

Évolution des valeurs moyennes

Grandeur physique $\chi(\vec{r}, \vec{v})$

$$\langle \chi(\vec{r}, \vec{v}, t) \rangle = \frac{1}{N} \int d^3r d^3v \chi(\vec{r}, \vec{v}) f(\vec{r}, \vec{v}, t) \quad (8.3)$$

$$\frac{d}{dt} \langle \chi(\vec{r}, \vec{v}, t) \rangle = \frac{1}{N} \int d^3r d^3v_1 \chi(\vec{r}, \vec{v}_1) \frac{\partial}{\partial t} f(\vec{r}, \vec{v}_1, t) \quad (8.4)$$

Reportons (8-1) dans (8-4). Les termes de la première ligne de (8-1) se transforment aisément par intégrations par parties. On obtient ainsi

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \chi \rangle - \langle \vec{v} \cdot (\vec{\nabla}_{\vec{r}} \chi) \rangle + \frac{1}{M} \langle (\vec{\nabla}_{\vec{r}} V_{\text{ext}}) \cdot (\vec{\nabla}_{\vec{v}} \chi) \rangle = \\ = \left(\frac{\partial}{\partial t} \langle \chi \rangle \right)_{\text{coll}} \end{aligned} \quad (8.5)$$

Évolution des valeurs moyennes due aux collisions

$$\left(\frac{d}{dt} \langle \chi \rangle \right)_{\text{coll}} = \frac{1}{N} \int d^3 r d^3 v_1 \chi(\vec{r}, \vec{v}_1) \left(\frac{\partial}{\partial t} f(\vec{r}, \vec{v}_1, t) \right)_{\text{coll}} \quad (8.6)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} f(\vec{r}, \vec{v}_1, t) \right)_{\text{coll}} = \frac{\sigma_0}{4\pi} \int d^2 \Omega' d^3 v_2 |\vec{v}_2 - \vec{v}_1| [f(\vec{v}_1') f(\vec{v}_2') - f(\vec{v}_1) f(\vec{v}_2)] \quad (8.7)$$

$$\left(\frac{d}{dt} \langle \chi \rangle \right)_{\text{coll}} = \frac{\sigma_0}{4\pi N} \int d^2 \Omega' d^3 r d^3 v_1 d^3 v_2 \times \chi(\vec{r}, \vec{v}_1) |\vec{v}_2 - \vec{v}_1| [f(\vec{v}_1') f(\vec{v}_2') - f(\vec{v}_1) f(\vec{v}_2)] \quad (8.8)$$

Autre expression équivalente à (8-8)

L'équation (8-6) peut être réécrite sous la forme

$$\left(\frac{d}{dt} \langle \chi \rangle \right)_{\text{coll}} = \frac{1}{N} \int d^3 r d^3 v_2 \chi(\vec{r}, \vec{v}_2) \left(\frac{\partial}{\partial t} f(\vec{r}, \vec{v}_2, t) \right)_{\text{coll}} \quad (8.9)$$

c-à-d encore, en permutant les indices 1 et 2 dans (8-7) et en reportant l'expression ainsi obtenue dans (8-9) [Notons que Ω' ne change pas dans cette permutation]

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt} \langle \chi \rangle \right)_{\text{coll}} &= \frac{\sigma_0}{4\pi N} \int d^2 \Omega' d^3 r d^3 v_1 d^3 v_2 \times \\ &\quad \times \chi(\vec{r}, \vec{v}_2) |\vec{v}_2 - \vec{v}_1| [f(\vec{v}'_1) f(\vec{v}'_2) - f(\vec{v}_1) f(\vec{v}_2)] \end{aligned} \quad (8.10)$$

Notons que $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}'_1, \vec{v}'_2$ ont les mêmes valeurs dans les termes à intégrer de (8-8) et (8-10)

Utilisation des symétries des collisions

- Invariance par renversement du sens du temps. Si

$$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 \rightarrow \vec{v}'_1 + \vec{v}'_2 \quad (8.11)$$

est une collision possible, il en est de même de :

$$(-\vec{v}'_1) + (-\vec{v}'_2) \rightarrow (-\vec{v}_1) + (-\vec{v}_2) \quad (8.12)$$

- Invariance par réflexion d'espace. Si la collision (8-12) est possible, il en est de même de :

$$\vec{v}'_1 + \vec{v}'_2 \rightarrow \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \quad (8.13)$$

- On a par ailleurs [voir équations (6-5) et (6-8) du cours 1996-97]

$$d^3v'_1 d^3v'_2 = d^3v_1 d^3v_2 \quad (8.14)$$

Autre expression équivalente à (8-8)

Considérons la collision (8-13) et réécrivons (8-6) sous la forme

$$\left(\frac{d}{dt} \langle \chi \rangle \right)_{\text{coll}} = \frac{1}{N} \int d^3 r d^3 v'_1 \chi(\vec{r}, \vec{v}'_1) \left(\frac{\partial}{\partial t} f(\vec{r}, \vec{v}'_1, t) \right)_{\text{coll}} \quad (8.15)$$

c-à-d encore en permutant \vec{v}_1 et \vec{v}'_1 , \vec{v}_2 et \vec{v}'_2 dans (8-7) et en reportant l'expression ainsi obtenue dans (8-15)

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt} \langle \chi \rangle \right)_{\text{coll}} &= \frac{\sigma_0}{4\pi N} \int d^2 \Omega' d^3 r d^3 v'_1 d^3 v'_2 \times \\ &\times \chi(\vec{r}, \vec{v}'_1) |\vec{v}'_2 - \vec{v}'_1| [f(\vec{v}_1) f(\vec{v}_2) - f(\vec{v}'_1) f(\vec{v}'_2)] \end{aligned} \quad (8.16)$$

Là encore, ce sont les mêmes valeurs de \vec{v}_1 \vec{v}'_1 \vec{v}_2 \vec{v}'_2 qui apparaissent dans le terme à intégrer de (8-16)

Autre expression équivalente à (8-8) (suite)

L'utilisation de (8-14), de

$$|\vec{v}_1 - \vec{v}_2| = |\vec{v}'_1 - \vec{v}'_2| \quad (8.17)$$

(voir Fig VIII-1) donne alors

$$\left(\frac{d}{dt} \langle \chi \rangle \right)_{\text{coll}} = \frac{\sigma_0}{4\pi N} \int d^2\Omega' d^3r d^3v_1 d^3v_2 \times \quad (8.18)$$
$$\times \chi(\vec{r}, \vec{v}'_1) |\vec{v}_2 - \vec{v}_1| [f(\vec{v}_1)f(\vec{v}_2) - f(\vec{v}'_1)f(\vec{v}'_2)]$$

Un calcul analogue donnerait

$$\left(\frac{d}{dt} \langle \chi \rangle \right)_{\text{coll}} = \frac{\sigma_0}{4\pi N} \int d^2\Omega' d^3r d^3v_1 d^3v_2 \times \quad (8.19)$$
$$\times \chi(\vec{r}, \vec{v}'_2) |\vec{v}_2 - \vec{v}_1| [f(\vec{v}_1)f(\vec{v}_2) - f(\vec{v}'_1)f(\vec{v}'_2)]$$

Récapitulation

Finalemment, nous avons obtenu 4 expressions différentes, mais équivalentes, pour la vitesse de variation de la valeur moyenne d'une grandeur physique due aux collisions :

Équations (8-8), (8-10), (8-18) et (8-19). La somme de ces 4 équations, divisée par 4, donne

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt} \langle \chi \rangle \right)_{\text{coll}} &= \frac{\sigma_0}{16\pi N} \int d^2\Omega' d^3r d^3v_1 d^3v_2 \times \\ &\times [\chi(\vec{r}, \vec{v}_1) + \chi(\vec{r}, \vec{v}_2) - \chi(\vec{r}, \vec{v}'_1) - \chi(\vec{r}, \vec{v}'_2)] \times \\ &\times |\vec{v}_2 - \vec{v}_1| [f(\vec{v}'_1)f(\vec{v}'_2) - f(\vec{v}_1)f(\vec{v}_2)] \end{aligned} \quad (8.20)$$

Conséquence

Si la grandeur physique étudiée est conservée au cours de la collision, c-à-d si

$$\chi(\vec{r}, \vec{v}_1) + \chi(\vec{r}, \vec{v}_2) = \chi(\vec{r}, \vec{v}'_1) + \chi(\vec{r}, \vec{v}'_2) \quad (8.21)$$

alors

$$\left(\frac{d}{dt} \langle \chi \rangle \right)_{\text{coll}} = 0 \quad (8.22)$$

Expression générale des grandeurs conservées

$$\chi(\vec{r}, \vec{v}) = a(\vec{r}) + \vec{b}(\vec{r}) \cdot \vec{v} + c(\vec{r}) v^2 \quad (8.23)$$

Les collisions sont en effet locales et conservent $\vec{v}_1 + \vec{v}_2$ (impulsion totale) de même que $v_1^2 + v_2^2$ (énergie totale)

Étude d'un premier exemple simple

Mode monopolaire dans un piège sphérique

$$V_{\text{ext}}(\vec{r}) = \frac{1}{2} M \omega_0^2 r^2 \quad (8.24)$$

Pour étudier le mode monopolaire, il convient d'étudier l'évolution de la valeur moyenne de

$$\chi(\vec{r}, \vec{v}) = r^2 \quad (8.25)$$

Dans l'équation (8-5) apparaissent

$$\vec{\nabla}_{\vec{r}} V_{\text{ext}}(\vec{r}) = M \omega_0^2 \vec{r} \quad (8.26)$$

$$\vec{\nabla}_{\vec{r}} r^2 = 2 \vec{r} \quad \vec{\nabla}_{\vec{v}} r^2 = \vec{0} \quad (8.27)$$

Le dernier terme de (8-5) est nul car r^2 est conservé au cours de la collision [voir(8-23)]

Equation d'évolution de $\langle r^2 \rangle$

Le report de (8-26) et (8-27) dans (8-5) donne, compte tenu de l'annulation du dernier terme de (8-5)

$$\frac{d}{dt} \langle r^2 \rangle = 2 \langle \vec{r} \cdot \vec{v} \rangle \quad (8.28)$$

Comme l'évolution de $\langle r^2 \rangle$ est couplée à celle de $\langle \vec{r} \cdot \vec{v} \rangle$, il faut étudier l'évolution de $\langle \vec{r} \cdot \vec{v} \rangle$

Equation d'évolution de $\langle \vec{r} \cdot \vec{v} \rangle$

$$\vec{\nabla}_{\vec{r}} (\vec{r} \cdot \vec{v}) = \vec{v} \quad \vec{\nabla}_{\vec{v}} (\vec{r} \cdot \vec{v}) = \vec{r} \quad (8.29)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} \langle \vec{r} \cdot \vec{v} \rangle \right)_{\text{coll}} = 0 \quad (8.30)$$

car $\vec{r} \cdot \vec{v}$ est une grandeur conservée. Finalement

$$\frac{d}{dt} \langle \vec{r} \cdot \vec{v} \rangle = \langle v^2 \rangle - \omega_0^2 \langle r^2 \rangle \quad (8.31)$$

Equation d'évolution de $\langle v^2 \rangle$

Il faut l'étudier car, d'après (8-31), l'évolution de $\langle \vec{r} \cdot \vec{v} \rangle$ est couplée à celle de $\langle v^2 \rangle$

$$\vec{\nabla}_{\vec{r}} (v^2) = \vec{0} \quad \vec{\nabla}_{\vec{v}} (v^2) = 2\vec{v} \quad (8.32)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} \langle v^2 \rangle \right)_{\text{coll}} = 0 \quad (8.33)$$

car v^2 est une grandeur conservée. On obtient

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle v^2 \rangle = -2 \omega_0^2 \langle \vec{r} \cdot \vec{v} \rangle \quad (8.34)$$

Il n'apparaît pas de nouvelles grandeurs. On obtient un système fermé de 3 équations couplées.

Conclusion sur le mode monopolaire dans un piège sphérique

Les 3 équations (8-28), (8-31) et (8-34) forment un système de 3 équations différentielles linéaires couplées, ayant une solution oscillante non amortie, de fréquence.

$$\omega = 2 \omega_0 \quad (8.35)$$

Dans un piège harmonique isotrope, le mode monopolaire de compression d'un gaz classique n'est pas amorti et garde la même fréquence quel que soit le régime de collisions.

Noter la différence entre le résultat (8.35) et celui obtenu pour un condensat à la limite de Thomas-Fermi (voir T-38, Eq. 2-1)

Modes ciseaux pour un gaz classique

Motivations de cette étude

Essayer de comprendre comment les modes ciseaux d'un gaz classique évoluent quand on passe du régime sans collisions (étudié dans le cours V) au régime hydrodynamique

Pour cela, on va suivre la même démarche que précédemment en étudiant l'évolution des valeurs moyennes de grandeurs physiques liées au mode xy

Le calcul sera cependant plus compliqué que celui présenté plus haut car certaines grandeurs physiques couplées à xy ne sont pas conservées au cours de la collision

Evolution de $\langle xy \rangle$

- Comme dans le cours V, on prend

$$V_{\text{ext}} = \frac{M}{2} \left[\omega_0^2 (1 + \varepsilon) x^2 + \omega_0^2 (1 - \varepsilon) y^2 + \omega_z^2 z^2 \right] \quad (8.36)$$

de sorte que

$$\vec{\nabla} V_{\text{ext}} / M = \left\{ \omega_0^2 (1 + \varepsilon) x, \omega_0^2 (1 - \varepsilon) y, \omega_z^2 z \right\} \quad (8.37)$$

- Comme le mode ciseaux est en $x y$, il convient d'étudier l'évolution de

$$\chi_1 = x y \quad (8.38)$$

xy est conservé au cours des collisions [voir (8.23)], et

$$\vec{\nabla}_{\vec{r}} (x y) = \{y, x, 0\} \quad \vec{\nabla}_{\vec{v}} (x y) = \vec{0} \quad (8.39)$$

- L'équation (8.5) s'écrit donc :

$$\partial \langle x y \rangle / \partial t = \langle \chi_2 \rangle \quad (8.40)$$

où

$$\chi_2 = x v_y + y v_x \quad (8.41)$$

Evolution de $\langle x v_y + y v_x \rangle$

Cette grandeur est elle aussi conservée au cours des collisions et un calcul très analogue au précédent donne

$$\partial \langle x v_y + y v_x \rangle / \partial t = 2 \langle v_x v_y \rangle - 2 \omega_0^2 \langle x y \rangle \quad (8.42)$$

En plus de xy , on voit apparaître une nouvelle grandeur

$$\chi_4 = v_x v_y \quad (8.43)$$

Evolution de $\langle v_x v_y \rangle$

A la différence des précédentes, cette nouvelle grandeur n'est pas conservée au cours des collisions et un nouveau terme doit donc être ajouté dans son équation d'évolution

$$\begin{aligned} (\partial \langle \chi_4 \rangle / \partial t)_{\text{coll}} &= \frac{\sigma_0}{16\pi N} \int d^2\Omega' d^3r d^3v_1 d^3v_2 \times \\ &\times [\chi_4(\vec{r}, \vec{v}_1) + \chi_4(\vec{r}, \vec{v}_2) - \chi_4(\vec{r}, \vec{v}'_1) - \chi_4(\vec{r}, \vec{v}'_2)] \times \\ &\times |\vec{v}_2 - \vec{v}_1| [f(\vec{v}'_1) f(\vec{v}'_2) - f(\vec{v}_1) f(\vec{v}_2)] \end{aligned} \quad (8.44)$$

Evolution de $\langle v_x v_y \rangle$ (suite)

L'équation (8.5) donne

$$\vec{\nabla}_{\vec{r}}(v_x v_y) = \vec{0} \quad \vec{\nabla}_{\vec{v}}(v_x v_y) = \{v_y, v_x, 0\} \quad (8.45)$$

$$\begin{aligned} \partial \langle v_x v_y \rangle / \partial t = & -\omega_0^2 \langle x v_y + y v_x \rangle - \varepsilon \omega_0^2 \langle x v_y - y v_x \rangle \\ & + \left(\partial \langle v_x v_y \rangle / \partial t \right)_{\text{coll}} \end{aligned} \quad (8.46)$$

On voit apparaître une nouvelle grandeur

$$\chi_3 = x v_y - y v_x \quad (8.47)$$

Evolution de $\langle x v_y - y v_x \rangle$

Cette grandeur est conservée au cours des collisions et l'équation (8.5) donne

$$\partial \langle x v_y - y v_x \rangle / \partial t = 2 \varepsilon \omega_0^2 \langle x y \rangle \quad (8.48)$$

Il n'apparaît plus de nouvelle grandeur physique. Il faut donc essayer de résoudre le système d'équations couplées (8.40), (8.42), (8.46) et (8.48)

Approximation sur le terme décrivant l'effet de collisions

Il faut trouver une expression approchée pour le dernier terme de (8.46)

A l'équilibre thermodynamique, la distribution de vitesses est isotrope et

$$\langle v_x v_y \rangle = 0 \quad (8.49)$$

Si cette valeur moyenne n'est pas nulle, cela signifie donc que la distribution de vitesses n'est pas isotrope. L'effet des collisions est de faire disparaître cette anisotropie et de la faire tendre vers zéro avec un temps de relaxation τ qui est de l'ordre de grandeur du temps entre collisions

Une approximation raisonnable consiste donc à écrire

$$\left(\frac{\partial \langle v_x v_y \rangle}{\partial t} \right)_{\text{coll}} = -\frac{1}{\tau} \langle v_x v_y \rangle \quad (8.50)$$

Traitement plus précis

Un traitement plus précis, décrit en détail dans la référence 19, consiste à postuler une forme particulière anisotrope pour la fonction de distribution f (« ansatz ») et à l'utiliser ensuite dans l'équation (8.44)

Au lieu de prendre une distribution isotrope en vitesses, on prend une distribution contenant une déformation en $v_x v_y$

$$\exp\{-Mv^2 / 2k_B T\} \Rightarrow \exp\{-M[v^2 + \alpha v_x v_y] / 2k_B T\} \quad (8.51)$$

où α est un paramètre sans dimension

A l'ordre le plus bas en α (faible anisotropie), la fonction de distribution f peut être réécrite

$$f(\vec{r}, \vec{v}, t) = f_0(\vec{r}, \vec{v}, t) \left(1 - \alpha \frac{M v_x v_y}{2k_B T} \right) \quad (8.52)$$

où f_0 est la distribution d'équilibre

Traitement plus précis (suite)

Calcul de $\langle v_x v_y \rangle$

Avec la nouvelle fonction de distribution (8.52), on obtient

$$\langle v_x v_y \rangle = -\alpha (M / 2 k_B T) \langle v_x^2 v_y^2 \rangle_0 \quad (8.53)$$

car le terme d'ordre 0 de (8.52) donne 0

$\langle \rangle_0$: Valeur moyenne à l'équilibre

La factorisation de f_0 à l'équilibre et le théorème de l'équipartition de l'énergie donnent alors

$$\langle v_x^2 v_y^2 \rangle_0 = (k_B T / M)^2 \quad (8.54)$$

de sorte que

$$\langle v_x v_y \rangle = -\alpha k_B T / 2M \quad (8.55)$$

Il apparaît ainsi clairement que la valeur moyenne de $v_x v_y$ est proportionnelle au paramètre α caractérisant l'anisotropie de la distribution de vitesses

Calcul approché du temps de relaxation

Reportons (8.52) dans (8.44). On obtient l'équation

$$\left(\partial \langle v_x v_y \rangle / \partial t\right)_{\text{coll}} = \alpha K = -\frac{1}{\tau} \langle v_x v_y \rangle \quad (8.56)$$

où l'on a utilisé (8.55) et posé

$$\frac{1}{\tau} = \frac{2M}{k_B T} K \quad (8.57)$$

Dans (8.57) K est une intégrale multiple qui peut être calculée analytiquement

Pour les détails d'un tel calcul, voir l'appendice de la référence 19. En fait, cette référence étudie, non pas les modes ciseaux, mais les modes quadrupolaires d'un gaz piégé dans un potentiel de symétrie cylindrique. Mais le principe du calcul est le même que celui considéré ici et on peut montrer par des arguments de symétrie que la valeur de τ est la même

Expression obtenue pour τ

Le calcul explicite de l'intégrale multiple apparaissant quand on reporte (8.52) dans (8.44) conduit à

$$\tau = \frac{5}{\gamma_{\text{coll}}} \quad (8.58)$$

où γ_{coll} est le taux de collisions élastiques donné par

$$\gamma_{\text{coll}} = \frac{n(0) v_{\text{th}} \sigma_0}{2} \quad (8.59)$$

$n(0)$ est la densité spatiale au centre du piège et

$$\sigma_0 = 8\pi a^2 \quad v_{\text{th}} = \sqrt{8k_B T / \pi M} \quad (8.60)$$

la section efficace de collision élastique

Récapitulation

Le report de l'expression approchée (8.56) dans (8.46) donne le système suivant d'équations couplées

$$\begin{aligned} \partial \langle \chi_1 \rangle / \partial t &= \langle \chi_2 \rangle \\ \partial \langle \chi_2 \rangle / \partial t &= 2 \langle \chi_4 \rangle - 2 \omega_0^2 \langle \chi_1 \rangle \\ \partial \langle \chi_3 \rangle / \partial t &= 2 \varepsilon \omega_0^2 \langle \chi_1 \rangle \\ \partial \langle \chi_4 \rangle / \partial t &= -\omega_0^2 \langle \chi_2 \rangle - \varepsilon \omega_0^2 \langle \chi_3 \rangle - \langle \chi_4 \rangle / \tau \end{aligned} \quad (8.61)$$

Cherchons une solution de (8.61) de la forme

$$\langle \chi_i \rangle = c_i \exp(i \omega t) \quad (8.62)$$

Les équations (8.61) deviennent

$$\begin{aligned} i \omega c_1 &= c_2 \\ i \omega c_2 &= 2 c_4 - 2 \omega_0^2 c_1 \\ i \omega c_3 &= 2 \varepsilon \omega_0^2 c_1 \\ i \omega c_4 &= -\omega_0^2 c_2 - \varepsilon \omega_0^2 c_3 - c_4 / \tau \end{aligned} \quad (8.63)$$

Fréquences propres des modes ciseaux

Le système d'équations (8.63) n'admet de solutions non nulles que si le déterminant correspondant est nul. On obtient ainsi l'équation

$$\omega^4 - 4\omega_0^2 \omega^2 + 4\varepsilon^2 \omega_0^4 + \frac{\omega}{i\tau} (\omega^2 - 2\omega_0^2) = 0 \quad (8.64)$$

qui donne les fréquences propres des modes ciseaux

Régime sans collisions (limite $\omega \tau \rightarrow \infty$)

le second terme de (8.64) est négligeable.

Régime hydrodynamique (limite $\omega \tau \rightarrow 0$)

le premier terme de (8.64) est négligeable.

Régime sans collisions

L'équation

$$\omega^4 - 4\omega_0^2 \omega^2 + 4\varepsilon^2 \omega_0^4 = 0 \quad (8.65)$$

donnant les fréquences des modes dans cette limite a 2 racines

$$\omega_{SC1} = \omega_x + \omega_y = \omega_0 \left[\sqrt{1 + \varepsilon} + \sqrt{1 - \varepsilon} \right] \quad (8.66)$$

$$\omega_{SC2} = \omega_x - \omega_y = \omega_0 \left[\sqrt{1 + \varepsilon} - \sqrt{1 - \varepsilon} \right] \quad (8.67)$$

On retrouve les résultats obtenus dans le cours V pour un gaz parfait

Notons que ces racines sont réelles. Il n'y a aucun amortissement.

Régime hydrodynamique

Il faut maintenant utiliser l'équation

$$\omega(\omega^2 - 2\omega_0^2) = 0 \quad (8.68)$$

qui a 2 racines

$$\omega_{HD1} = \omega_0\sqrt{2} \quad (8.69)$$

$$\omega_{HD2} = 0 \quad (8.70)$$

Là également, il n'y a pas d'amortissement

Finalemnt, l'équation (8.64) peut être réécrite

$$\left[\omega^2 - \omega_{SC1}^2\right]\left[\omega^2 - \omega_{SC2}^2\right] + \frac{1}{i\omega\tau}\left[\omega^2 - \omega_{HD1}^2\right]\left[\omega^2 - \omega_{HD2}^2\right] = 0 \quad (8.71)$$

Régime intermédiaire

Étudions l'évolution du mode propre de vibration passant de ω_{SD1} à ω_{HD1} quand τ tend vers 0.

Supposons ε très petit de sorte que

$$\omega_{SC1} \gg \omega_{SC2} \quad (8.72)$$

Par ailleurs

$$\omega_{HD1} \gg \omega_{HD2} \quad (8.73)$$

Quand ω varie de ω_{SC1} à ω_{HD1} , on peut alors, compte tenu de (8.72) et (8.73), négliger ω_{SC2}^2 et ω_{HD2}^2 devant ω^2 dans (8.71) qui devient

$$\omega^2 - \omega_{SC1}^2 + \frac{1}{i\omega\tau} (\omega^2 - \omega_{HD1}^2) = 0 \quad (8.74)$$

Régime intermédiaire (suite)

L'équation (8.74) peut être réécrite

$$\begin{aligned}\omega^2 \left(1 - \frac{i}{\omega\tau} \right) &= \omega_{SC1}^2 - \frac{i}{\omega\tau} \omega_{HD1}^2 \\ &= \left(1 - \frac{i}{\omega\tau} \right) \omega_{SC1}^2 - \frac{i}{\omega\tau} \left(\omega_{HD1}^2 - \omega_{SC1}^2 \right)\end{aligned}\quad (8.75)$$

c-à-d encore

$$\omega^2 = \omega_{SC1}^2 + \frac{\omega_{HD1}^2 - \omega_{SC1}^2}{1 + i\omega\tau}\quad (8.76)$$

Quant τ décroît de l'infini à zéro, on retrouve bien que ω varie ω_{SC1} à ω_{HD1} .

On constate aussi que le taux d'amortissement n'est plus nul dans le régime intermédiaire.

Taux d'amortissement

Séparons les parties réelle et imaginaire de ω

$$\omega = \omega_r + i\Gamma \quad (8.77)$$

Le report de (8.77) dans (8.76) donne (si $\omega_r \gg \Gamma$)

$$\Gamma \simeq \frac{\tau}{2} \frac{\omega_{SC1}^2 - \omega_{HD1}^2}{1 + (\omega_r \tau)^2} \quad (8.78)$$

Le taux d'amortissement, nul pour τ infini, croît quand τ décroît, passe par un maximum pour $\omega_r \tau$ de l'ordre de 1, puis décroît de nouveau et s'annule quand τ s'annule.

Si l'on porte, en abscisses ω_r , en ordonnées Γ on obtient une courbe dont l'allure est représentée sur la figure VIII-2.

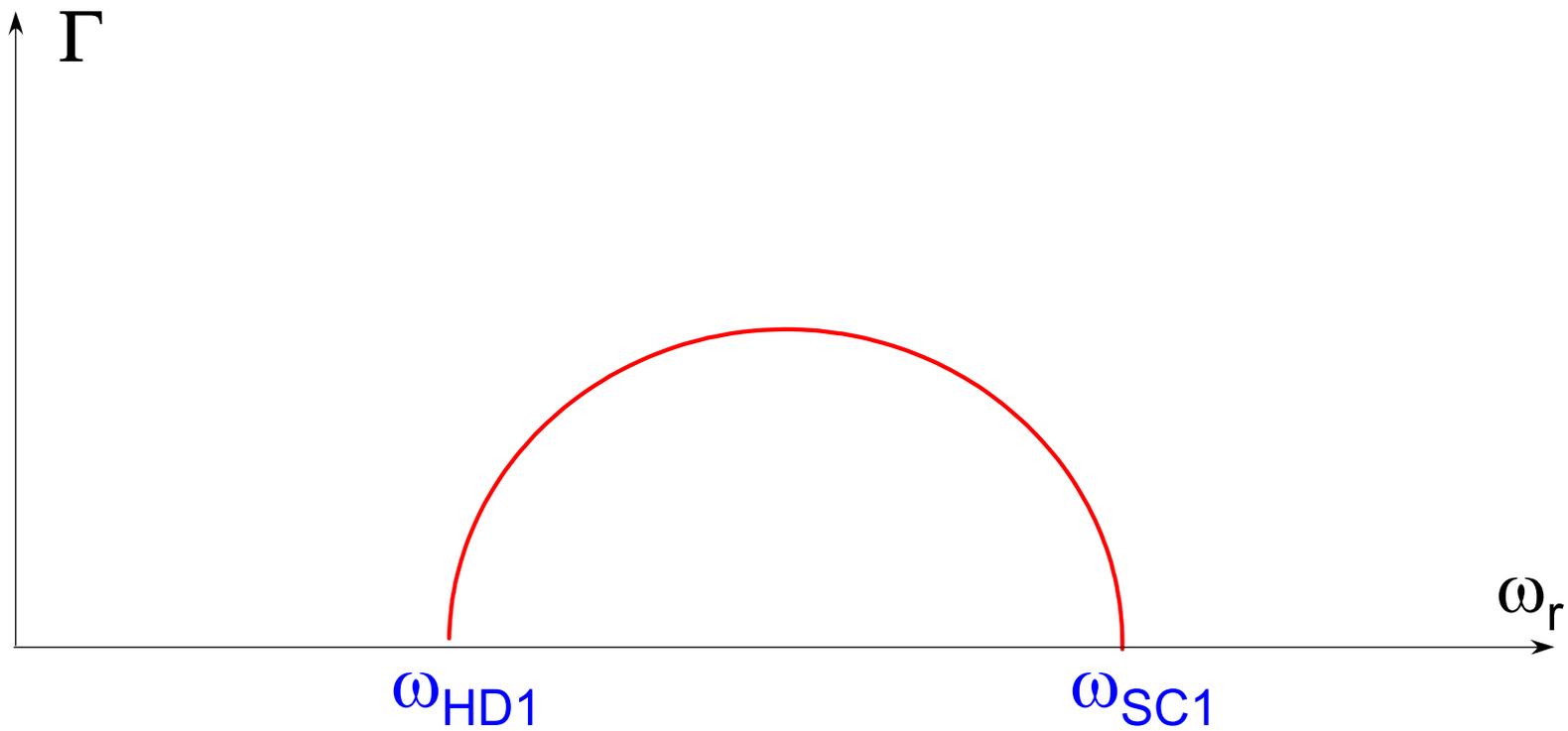


Figure VIII-2

Comparaison avec les résultats d'un calcul de dynamique moléculaire

Dans la référence 19, une expression analogue à (8.76) est obtenue pour la fréquence des modes $m=0$ (monopôle-quadrupôle) dans un piège à symétrie cylindrique.

Les figures VIII-3 et VIII-4 donnent les variations avec τ des paramètres Γ et ω_r définis en (8.77) (Courbes en traits pleins des figures).

Les points avec barres d'erreur représentent les résultats d'un calcul numérique basé sur une simulation de dynamique moléculaire portant sur $N = 2 \times 10^4$ atomes. Le très bon accord donne confiance dans les approximations à la base de la dérivation de (8.76)

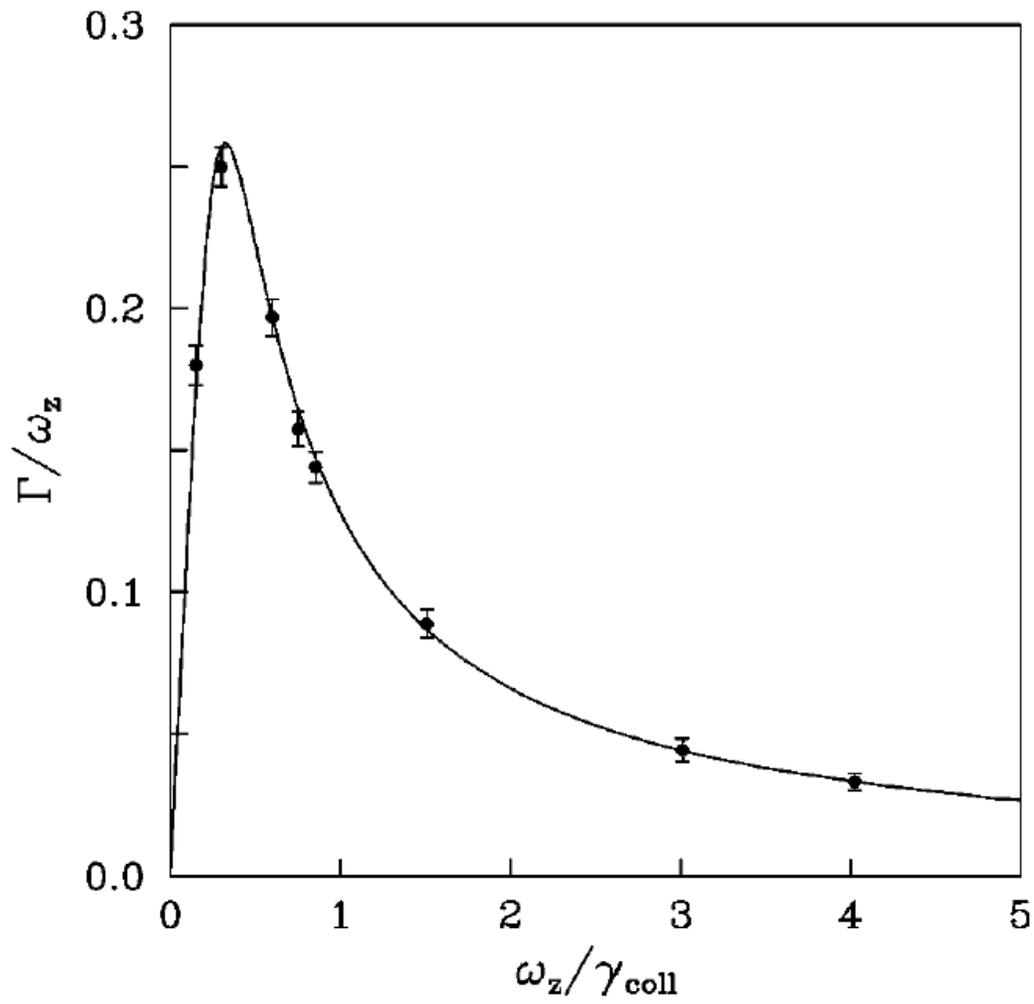


Figure VIII-3
[extraite de (19)]

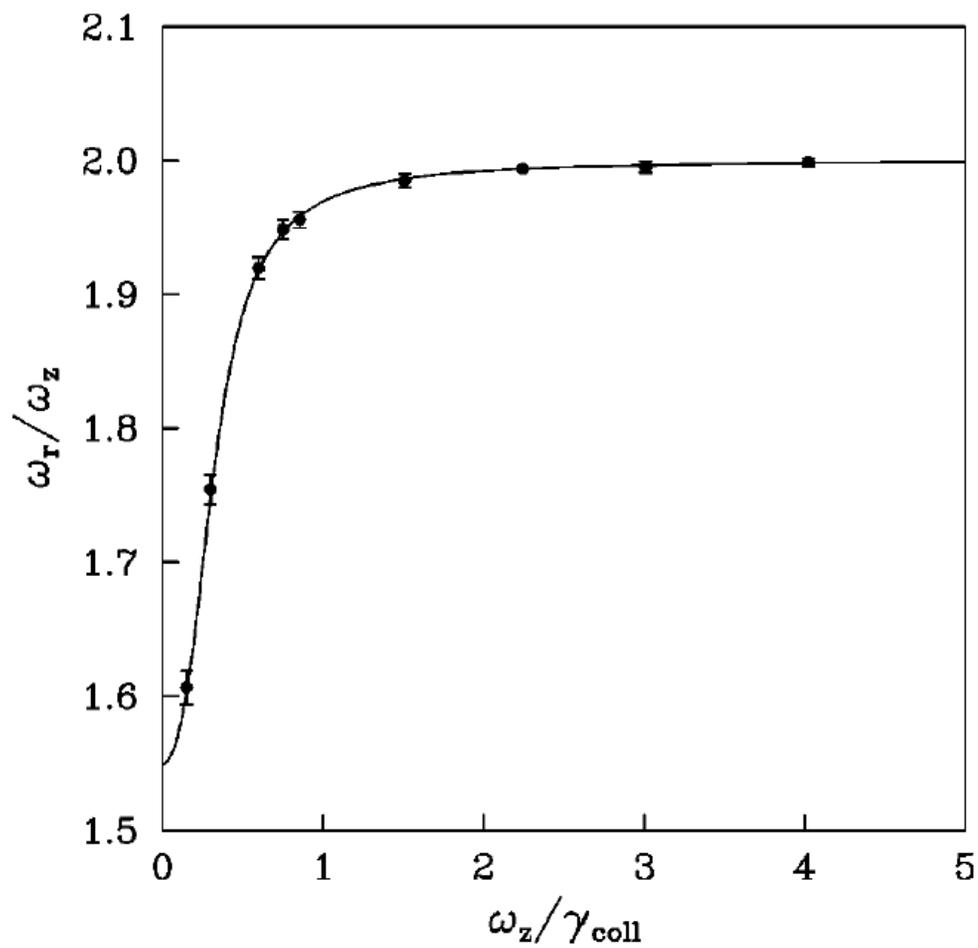


Figure VIII-4
[extraite de (19)]

Références

(Suite de T-156, T-192, T-232 et T-273)

- 19 - D. Guéry-Odelin, F. Zambelli, J. Dalibard, S. Stringari, Phys.Rev. A 60, 4851 (1999).
- 20 - K.Huang, « Statistical Mechanics », 2nd edition (Wiley, New York 1987)
- 21 - Une autre approche au problème des modes propres de vibration d'un nuage thermique est présentée dans :
U. Al Khawaja, C. Pethick, H. Smith, J. of Low Temp. Phys. 118, 127 (2000)

Modes de vibration d'un gaz de bosons piégés

Limite hydrodynamique pour $T > T_c$

Système étudié

- Gaz de bosons piégés dans un potentiel harmonique
On tient compte de la statistique de Bose

- Le système n'est pas condensé

$$T > T_c \quad (9.1)$$

- Le taux de collisions est très élevé

$$\gamma_{\text{coll}} \gg \omega \Leftrightarrow \omega\tau \ll 1 \quad (9.2)$$

de sorte qu'un équilibre thermodynamique local peut être atteint en tout point

Motivations de cette étude

- Le cours précédent étudiait un gaz classique. Ici on essaie de tenir compte de la statistique de Bose-Einstein. Quels sont les modes de vibration du nuage thermique qui en dépendent ?
- Le cours précédent ne précisait rien sur le champ de vitesses. Peut-on calculer sa structure et la comparer à celle du champ de vitesses des modes de vibration du condensat ?
- Intérêt d'étudier en détail la limite hydrodynamique qui semble pouvoir être observée sur de nouveaux systèmes (He métastable)

Méthode suivie

(références 22 et 23)

- Partir de l'équation de Boltzmann avec une fonction de distribution décrivant un équilibre thermodynamique local caractérisé par

- une température locale $T(\vec{r}, t)$
- une vitesse moyenne locale $\vec{v}(\vec{r}, t)$
- un potentiel chimique local $\mu(\vec{r}, t)$

ayant des valeurs très peu différentes des valeurs à l'équilibre

$$T_0, \quad \vec{v}_0 = \vec{0}, \quad \mu_0(\vec{r}) = \mu - V_{\text{ext}}(\vec{r}) \quad (9.3)$$

5 fonctions inconnues à déterminer

Méthode suivie (suite)

- Écrire les équations d'évolution de 5 grandeurs physiques conservées au cours des collisions
 - Densité locale de particules
 - Densité locale de courant
 - Densité locale d'énergie cinétique
- Déduire de ces équations une équation aux dérivées partielles pour le champ de vitesses correspondant au mode de vibration étudié.

Plan

- Exemples de grandeurs locales
- Équation de Boltzmann incluant les effets de la statistique
- Lois de conservation locales
- Dérivations d'une équation aux dérivées partielles pour le champ de vitesses
- Etude de quelques modes propres de vibration

Équilibre thermodynamique local

Equilibre atteint à la limite hydrodynamique

Fonction de distribution (statistique de Bose-Einstein)

$$f(\vec{r}, \vec{p}, t) = \frac{1}{\exp\left\{\frac{[\vec{p} - M\vec{v}(\vec{r}, t)]^2 / 2M - \mu(\vec{r}, t)}{k_B T(\vec{r}, t)}\right\} - 1} \quad (9.4)$$

f : nombre d'occupation d'une cellule de l'espace des phases de volume h^3

Nombre dN de particules dans l'élément de volume $d^3 r d^3 p$

$$dN = \frac{d^3 r d^3 p}{h^3} f(\vec{r}, \vec{p}, t) \quad (9.5)$$

Équilibre thermodynamique local (suite)

Déviations par rapport à l'équilibre complet

(aucune mode de vibration excité)

$$\left\{ \begin{array}{l} T(\vec{r}, t) = T_0 + \delta T(\vec{r}, t) \end{array} \right. \quad (9.6a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{v}(\vec{r}, t) = \vec{0} + \delta \vec{v}(\vec{r}, t) \end{array} \right. \quad (9.6b)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu(\vec{r}, t) = \mu_0(\vec{r}) + \delta \mu(\vec{r}, t) \end{array} \right. \quad (9.6c)$$

$$\mu_0(\vec{r}) = \mu - V_{\text{ext}}(\vec{r}) \quad (9.7)$$

Fugacité

$$z(\vec{r}, T) = \exp\{\mu(\vec{r}, t)/k_B T(\vec{r}, t)\} \quad (9.8)$$

Quelques valeurs moyennes locales

1 - Densité spatiale locale $n(\vec{r}, t)$

$$n(\vec{r}, t) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int d^3p f(\vec{r}, \vec{p}, t) \quad (9.9)$$

Utilisons (9.8) pour réécrire (9.4) sous la forme

$$f = \frac{z e^{-\delta \vec{p}^2 / 2M k_B T}}{1 - z e^{-\delta \vec{p}^2 / 2M k_B T}} = \sum_{\ell=1}^{\infty} z^{\ell} e^{-\ell \delta \vec{p}^2 / 2M k_B T} \quad (9.10)$$

où

$$\delta \vec{p}(\vec{r}, t) = \vec{p} - M \vec{v}(\vec{r}, t) \quad (9.11)$$

est la déviation de \vec{p} par rapport à l'impulsion moyenne $M \vec{v}(\vec{r}, t)$

Densité spatiale locale (suite)

L'intégrale sur p de (9.10) est élémentaire et donne

$$n(\vec{r}, t) = \frac{1}{\Lambda(\vec{r}, t)^3} g_{3/2}[z(\vec{r}, t)] \quad (9.12)$$

où

$$\Lambda(\vec{r}, t) = \sqrt{\frac{2\pi\hbar^2}{M k_B T(\vec{r}, t)}} \quad (9.13)$$

est la longueur d'onde de de Broglie locale et

$$g_{3/2}(z) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{z^\ell}{\ell^{3/2}} \quad (9.14)$$

la fonction de Bose d'indice 3/2.

2 - Courant local $\vec{j}(\vec{r}, t)$

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int d^3p \frac{\vec{p}}{M} f(\vec{r}, \vec{p}, t) \quad (9.15)$$

Utilisons (9.11) pour exprimer \vec{p} en fonction de $M \vec{v}$ et $\delta \vec{p}$. Comme la moyenne locale de $\delta \vec{p}$ est nulle, on obtient

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = n(\vec{r}, t) \vec{v}(\vec{r}, t) \quad (9.16)$$

A l'ordre le plus bas par rapport aux déviations à l'équilibre complet [voir (9.6)], on peut écrire

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = n_0(\vec{r}) \vec{v}(\vec{r}, t) \quad (9.17)$$

où $n_0(\vec{r})$ est la densité spatiale de l'équilibre.

3 - Energie cinétique locale $\varepsilon(\vec{r}, t)$

$$\varepsilon(\vec{r}, t) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int d^3p \frac{p^2}{2M} f(\vec{r}, p, t) \quad (9.18)$$

Un calcul analogue au précédent donne

$$\varepsilon(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} M n(\vec{r}, t) \bar{v}^2(\vec{r}, t) + \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int d^3p \frac{\delta \bar{p}^2}{2M} f(\vec{r}, \bar{p}, t) \quad (9.19)$$

Le calcul du second terme de (9.19) au moyen de (9.10) est élémentaire et conduit à

$$\varepsilon(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} M n(\vec{r}, t) \bar{v}^2(\vec{r}, t) + \frac{3}{2} k_B T(\vec{r}, t) n(\vec{r}, t) \frac{g_{5/2}(z)}{g_{3/2}(z)} \quad (9.20)$$

Le premier terme de (9.20), d'ordre 2 en \bar{v} , peut être négligé

$$\varepsilon(\vec{r}, t) \simeq \frac{3}{2} k_B T(\vec{r}, t) n(\vec{r}, t) \frac{g_{5/2}(z)}{g_{3/2}(z)} \quad (9.21)$$

Intérêt des valeurs moyennes locales qui viennent d'être introduites

Réécrivons ces moyennes locales sous la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} n(\vec{r}, t) = \langle \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \rangle \\ \vec{j}(\vec{r}_0, t) = \langle \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \vec{p} / M \rangle \\ \varepsilon(\vec{r}_0, t) = \langle \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \vec{p}^2 / 2M \rangle \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (9.22.a) \\ (9.22.b) \\ (9.22.c) \end{array}$$

Où la moyenne $\langle \rangle$ est globale (sur r et p) et définie comme en (8.3)

$$\langle \chi \rangle = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int d^3r d^3p \chi(\vec{r}, \vec{p}) f(\vec{r}, \vec{p}, t) \quad (9.23)$$

Toutes les grandeurs apparaissant en (9.22) sont de la forme (8.23) et sont donc conservées au cours des collisions. Le terme de collision de l'équation de Boltzmann ne contribue donc pas à leur évolution.

Structure de l'équation de Boltzmann

Analogue à (8.1). On prend ici les variables position et impulsion au lieu de position et vitesse et f/h^3 est normalisé à N

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} f(\vec{r}, \vec{p}_1, t) = & -\frac{\vec{p}_1}{M} \vec{\nabla}_{\vec{r}} f(\vec{r}, \vec{p}_1, t) + [\vec{\nabla}_{\vec{r}} V_{\text{ext}}(\vec{r})] \cdot [\vec{\nabla}_{\vec{p}_1} f(\vec{r}, \vec{p}_1, t)] \\ & + I_{\text{coll}}(f) \end{aligned} \quad (9.24)$$

Pour tenir compte de la statistique de Bose

$$f(\vec{p}'_1) f(\vec{p}'_2) - f(\vec{p}_1) f(\vec{p}_2) \quad (9.25)$$

est remplacé dans le terme de collision de (9.9) par

$$\begin{aligned} & f(\vec{p}'_1) f(\vec{p}'_2) [f(\vec{p}_1) + 1] [f(\vec{p}_2) + 1] - \\ & - f(\vec{p}_1) f(\vec{p}_2) [f(\vec{p}'_1) + 1] [f(\vec{p}'_2) + 1] \end{aligned} \quad (9.26)$$

Grandeurs conservées au cours des collisions

Le changement de forme de (9.25) à (9.26), du terme apparaissant dans l'intégrale de collision ne modifie pas la démonstration donnée dans le cours VIII pour les grandeurs obéissant à (8.21)

Pour toutes les grandeurs conservées au cours des collisions, le dernier terme de (9.9), $I_{\text{coll}}(f)$, ne contribue pas à l'évolution des moyennes.

Pour obtenir l'évolution de n, \vec{j}, ε , il suffit donc de multiplier les 2 membres de (9.24) par $1, \vec{p}/M, p^2/2M$, puis d'intégrer sur p , en ignorant le dernier terme, $I_{\text{coll}}(f)$

Équation de conservation

Les intégrales sur p se calculent aisément (après une intégration par parties) et donnent à l'ordre 1 inclus en $\vec{v}(\vec{r}, t)$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} n(\vec{r}, t) = -\vec{\nabla} \cdot [n_0(\vec{r}) \vec{v}(\vec{r}, t)] \end{array} \right. \quad (9.27)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Mn_0(\vec{r}) \frac{\partial}{\partial t} \vec{v}(\vec{r}, t) = -[\vec{\nabla} P(\vec{r}, t) + n(\vec{r}, t) \vec{\nabla} V_{\text{ext}}(\vec{r})] \end{array} \right. \quad (9.28)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon(\vec{r}, t) = -\vec{\nabla} \cdot \left[\frac{5}{3} \varepsilon_0(\vec{r}) \vec{v}(\vec{r}, t) \right] - n_0(\vec{r}) \vec{v}(\vec{r}, t) \cdot \vec{\nabla} V_{\text{ext}}(\vec{r}) \end{array} \right. \quad (9.29)$$

où la pression P et $\varepsilon_0(\vec{r})$ sont définis par

$$\vec{P}(\vec{r}, t) = 2\varepsilon(\vec{r}, t)/3 \quad (9.30)$$

$$\varepsilon_0(\vec{r}) = \frac{3}{2} k_B T_0 n_0(\vec{r}) \frac{g_{5/2}(z_0)}{g_{3/2}(z_0)} \quad (9.31)$$

Interprétation physique

Équation 9.27

La variation de la densité d'atomes en \vec{r} résulte de la compétition entre flux entrant et flux sortant.

Équation 9.28

Equation de la dynamique pour le mouvement du fluide en \vec{r} sous l'effet des forces de pression interne et de piégeage.

Équation 9.29

Variation de la densité d'énergie en \vec{r} , due à une compétition entre flux entrant et flux sortant et au travail des forces de piégeage.

Contraintes imposées par l'équilibre global

Pour un condensat à l'équilibre les densités locales de particules et d'énergie sont constantes et la vitesse moyenne locale est nulle.

Les équations (9.27) et (9.29) sont satisfaites.

Par contre, l'équation (9.28) donne une condition qui doit être satisfaite à l'équilibre

$$\vec{\nabla} P_0(\vec{r}) + n_0(\vec{r}) \vec{\nabla} V_{\text{ext}}(\vec{r}) = \vec{0} \quad (9.32)$$

Utilisons (9.8), (9.12), (9.21), (9.30) pour montrer qu'une telle équation est bien satisfaisante à l'équilibre

Démonstration de (9.32)

$$P_0(\vec{r}) = 2\varepsilon_0(\vec{r})/3 = \frac{k_B T_0}{\Lambda_0^3} g_{5/2}(z_0) \quad \Lambda_0 = \Lambda(T_0)$$

$$z_0(\vec{r}) = \exp\{[\mu - V_{\text{ext}}(\vec{r})]/k_B T_0\}$$

$$\vec{\nabla}_{z_0} = \frac{z_0}{k_B T_0} [-\vec{\nabla} V_{\text{ext}}(\vec{r})] \quad z_0 \frac{d}{dz_0} g_{5/2}(z_0) = g_{3/2}(z_0)$$

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} P_0(\vec{r}) &= -\frac{1}{\Lambda_0^3} g_{3/2}(z_0) [-\vec{\nabla} V_{\text{ext}}(\vec{r})] \\ &= -n_0(\vec{r}) [-\vec{\nabla} V_{\text{ext}}(\vec{r})] \end{aligned}$$

C.Q.F.D.

Équation aux dérivées partielles pour le champ de vitesse

De (9.29) et (9.30) on déduit

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} P(\vec{r}, t) = & -\frac{5}{3} \vec{\nabla} \cdot [P_0(\vec{r}) \vec{v}(\vec{r}, t)] \\ & -\frac{2}{3} n_0(\vec{r}) \vec{v}(\vec{r}, t) \cdot \vec{\nabla} V_{\text{ext}}(\vec{r}) \end{aligned} \quad (9.33)$$

En prenant la dérivée temporelle des 2 membres de (9.28) et en utilisant (9.27) et (9.33), on obtient

$$\begin{aligned} M n_0(\vec{r}) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{v}(\vec{r}, t) = & \frac{5}{3} \vec{\nabla} \{ \vec{\nabla} \cdot [P_0(\vec{r}) \vec{v}(\vec{r}, t)] \} \\ & + \frac{2}{3} \vec{\nabla} \{ n_0(\vec{r}) \vec{v}(\vec{r}, t) \cdot \vec{\nabla} V_{\text{ext}}(\vec{r}) \} \\ & + \{ \vec{\nabla} \cdot [n_0(\vec{r}) \vec{v}(\vec{r}, t)] \} \vec{\nabla} V_{\text{ext}}(\vec{r}) \end{aligned} \quad (9.34)$$

Équation aux dérivées partielles pour le champ de vitesses (suite)

En utilisant (9.32) et le fait (démontré plus loin - voir T-22) que $\vec{\nabla} n_0(\vec{r})$ est parallèle à $\vec{\nabla} V_{\text{ext}}(\vec{r})$, on peut dériver de l'équation (9.34) l'équation suivante pour le champ de vitesses

$$\begin{aligned} M \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{v}(\vec{r}, t) &= \frac{5}{3} k_B T_0 \frac{g_{5/2}(z_0)}{g_{3/2}(z_0)} \vec{\nabla} [\vec{\nabla} \cdot \vec{v}(\vec{r}, t)] \\ &\quad - \vec{\nabla} [\vec{v}(\vec{r}, t) \cdot \vec{\nabla} V_{\text{ext}}(\vec{r})] \\ &\quad - \frac{2}{3} [\vec{\nabla} \cdot \vec{v}(\vec{r}, t)] \vec{\nabla} V_{\text{ext}}(\vec{r}) \end{aligned} \quad (9.35)$$

(voir T-335 à T-337)

Démonstration de (9.35)

- Première ligne de (9.34)

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot [P_0 \vec{v}] &= \vec{\nabla} P_0 \cdot \vec{v} + P_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{v} \\ \frac{5}{3} \vec{\nabla} \{ \vec{\nabla} \cdot [P_0 \vec{v}] \} &= \frac{5}{3} \vec{\nabla} [\vec{\nabla} P_0 \cdot \vec{v}] + \frac{5}{3} \vec{\nabla} [P_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{v}] \\ &= \frac{5}{3} \vec{\nabla} [\vec{v} \cdot \vec{\nabla} P_0] + \frac{5}{3} (\vec{\nabla} P_0) (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) + \frac{5}{3} P_0 \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{v})\end{aligned}\quad (9.36)$$

- Deuxième ligne de (9.34). Utilisons (9.32)

$$\frac{2}{3} \vec{\nabla} \{ n_0 \vec{v} \cdot \vec{\nabla} V_{\text{ext}} \} = -\frac{2}{3} \vec{\nabla} (\vec{v} \cdot \vec{\nabla} P_0) \quad (9.37)$$

- Somme des deux premières lignes de (9.34)

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} [\vec{v} \cdot \vec{\nabla} P_0] + \underbrace{\frac{5}{3} (\vec{\nabla} P_0) (\vec{\nabla} \cdot \vec{v})}_{-\frac{5}{3} n_0 (\vec{\nabla} V_{\text{ext}}) (\vec{\nabla} \cdot \vec{v})} + \frac{5}{3} P_0 \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{v})\end{aligned}\quad (9.38)$$

Démonstration de (9.35) (suite)

- Troisième ligne de (9.34)

$$\vec{\nabla} \cdot (n_0 \vec{v}) = (\vec{\nabla} n_0) \cdot \vec{v} + n_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{v}$$

$$\left[\vec{\nabla} \cdot (n_0 \vec{v}) \right] \vec{\nabla} V_{\text{ext}} = \left[(\vec{\nabla} n_0) \cdot \vec{v} \right] \vec{\nabla} V_{\text{ext}} + n_0 (\vec{\nabla} V_{\text{ext}}) (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) \quad (9.39)$$

- Transformation du premier terme de (9.38)

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot (\vec{v} \cdot \vec{\nabla} P_0) &= -\vec{\nabla} \left[n_0 \vec{v} \cdot \vec{\nabla} V_{\text{ext}} \right] \\ &= -(\vec{v} \cdot \vec{\nabla} V_{\text{ext}}) \vec{\nabla} n_0 - n_0 \vec{\nabla} (\vec{v} \cdot \vec{\nabla} V_{\text{ext}}) \end{aligned} \quad (9.40)$$

- $\vec{\nabla} n_0$ et $\vec{\nabla} V_{\text{ext}}$ sont parallèles

$$\vec{\nabla} n_0 = \frac{1}{\Lambda_0^3} \frac{d g_{3/2}(z_0)}{d z_0} \vec{\nabla} z_0 = -\frac{z_0}{\Lambda_0^3 k_B T_0} \frac{d g_{3/2}(z_0)}{d z_0} \vec{\nabla} V_{\text{ext}} \quad (9.41)$$

On peut donc écrire

$$(\vec{v} \cdot \vec{\nabla} V_{\text{ext}}) \vec{\nabla} n_0 = (\vec{v} \cdot \vec{\nabla} n_0) \vec{\nabla} V_{\text{ext}} \quad (9.42)$$

Démonstration de (9.35) (suite)

En ajoutant (9.38) [où le premier terme est remplacé par (9.40)] et (9.39) et en utilisant (9.42), on obtient

$$\begin{aligned} M n_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{v} = & \frac{5}{3} P_0 \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) \\ & - n_0 \vec{\nabla} (\vec{v} \cdot \vec{\nabla} V_{\text{ext}}) \\ & - \frac{2}{3} n_0 (\vec{\nabla} \vec{v}) \vec{\nabla} V_{\text{ext}} \end{aligned} \quad (9.43)$$

Il suffit alors de diviser les 2 membres de (9.43) par n_0 et d'utiliser (9.30) et (9.31) pour obtenir (9.35)

Cas simple d'un gaz homogène

Le potentiel de piégeage est alors nul et les 2 dernières lignes de (9.35) disparaissent.

L'équation (9.35) admet alors des solutions longitudinales

$$\vec{v}(\vec{r}, t) \propto \vec{k} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad (9.44)$$

En reportant (9.44) dans (9.35) on obtient la loi de dispersion des phonons

$$\omega = ck \quad (9.45)$$

avec

$$c^2 = \frac{5}{3} \frac{k_B T_0}{M} \frac{g_{5/2}(z_0)}{g_{3/2}(z_0)} \quad (9.46)$$

Vitesse du son dans un gaz de bosons homogène

Gaz classique non dégénéré ($T \gg T_c$)

on a alors $z_0 \ll 1$ et par suite

$$g_{5/2}(z_0) \approx g_{3/2}(z_0) \approx z_0 \quad (9.47)$$

de sorte que

$$c_{\text{class}}^2 = \frac{5}{3} \frac{k_B T_0}{M} \quad (9.48)$$

C'est la loi de Laplace

Gaz de bosons près de la dégénérescence

On a alors $z \approx 1$ et par suite

$$c^2 = \frac{5}{3} \frac{k_B T_0}{M} \frac{g_{5/2}(1)}{g_{3/2}(1)} = 0.51 c_{\text{class}}^2 \quad (9.49)$$

Modes avec champ de vitesses de divergence nulle

La première et troisième ligne de (9.35) sont alors nulles et on obtient :

$$M \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{v}(\vec{r}, t) = -\vec{\nabla} \left[\vec{v}(\vec{r}, t) \cdot \vec{\nabla} V_{\text{ext}}(\vec{r}) \right] \quad (9.50)$$

Le seul terme de (9.35) qui dépend de la statistique (via la fugacité z_0) est le premier. Il s'ensuit que les modes avec champ de vitesses de divergence nulle ont les mêmes propriétés que les modes d'un champ classique, que la température soit très supérieure à T_C ou très proche de T_C

Il en est d'ailleurs de même des champs de vitesses dont la divergence est spatialement uniforme, puisque le premier terme de (9.35) est alors nul

Exemples de tels modes

1 – Modes en $\vec{\nabla} r^\ell Y_\ell^\ell(\theta, \varphi)$

dans un potentiel à symétrie de révolution autour de Oz

$$V_{\text{ext}}(\vec{r}) = \frac{1}{2} M (\omega_\perp^2 r_\perp^2 + \omega_z^2 z^2) \quad (9.51)$$

$r^\ell Y_\ell^\ell$ est proportionnel à $(x + i y)^\ell$ qui est un polynôme harmonique de Laplacien nul. Donc, on a bien :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} \propto \Delta (x + i y)^\ell = 0 \quad (9.52)$$

Montrons que le champ de vitesses

$$\vec{v}(\vec{r}, t) = e^{i\omega t} \vec{\nabla} (x + i y)^\ell \quad (9.53)$$

satisfait bien (9.50) et calculons ω

1 – Modes en $\vec{\nabla} r^\ell Y_\ell^\ell(\theta, \varphi)$ (suite)

De (9.53) on déduit les composantes de la vitesse

$$\vec{v} = e^{i\omega t} \ell (x + i y)^{\ell-1} \{1, i, 0\} \quad (9.54)$$

et de (9.51) celles du gradient de V_{ext}

$$V_{\text{ext}} = M \{ \omega_\perp^2 x, \omega_\perp^2 y, \omega_z^2 z \} \quad (9.55)$$

de sorte que :

$$\vec{v} \cdot \vec{\nabla} V_{\text{ext}} = e^{i\omega t} M \ell \omega_\perp^2 (x + i y)^\ell \quad (9.56)$$

En reportant (9.54) et (9.56) dans (9.50), on obtient

$$-M \omega^2 e^{i\omega t} \vec{\nabla} (x + i y)^\ell = -M \ell \omega_\perp^2 e^{i\omega t} \vec{\nabla} (x + i y)^\ell \quad (9.57)$$

équation qui est bien satisfaite si

$$\omega = \omega_\perp \sqrt{\ell} \quad (9.58)$$

Exemples de tels modes (suite)

2 – Modes en $\vec{\nabla} r^\ell Y_\ell^{\ell-1}(\theta, \varphi)$

Le principe du calcul est le même

$$r^\ell Y_\ell^{\ell-1} \propto (x + i y)^{\ell-1} z \quad (9.59)$$

qui est bien un polynôme harmonique

$$\vec{v} = e^{i\omega t} (x + i y)^{\ell-2} \{ (\ell-1)z, i(\ell-1)z, x + i y \} \quad (9.60)$$

$$\vec{v} \cdot \vec{\nabla} V_{\text{ext}} = e^{i\omega t} M (x + i y)^{\ell-1} z [(\ell-1)\omega_\perp^2 + \omega_z^2] \quad (9.61)$$

Le report de (9.60) et (9.61) dans (9.50) donne

$$\begin{aligned} -M \omega^2 e^{i\omega t} \vec{\nabla} (x + i y)^{\ell-1} z = \\ -M [(\ell-1)\omega_\perp^2 + \omega_z^2] e^{i\omega t} \vec{\nabla} (x + i y)^{\ell-1} z \end{aligned} \quad (9.62)$$

équation satisfaite si

$$\omega = \sqrt{(\ell-1)\omega_\perp^2 + \omega_z^2} \quad (9.63)$$

Comparaison avec un condensat

Etablissons l'équation équivalente à (9.35) pour un condensat à la limite de Thomas-Fermi et piégé dans le potentiel (9.51)

Les équations hydrodynamiques linéarisées [voir (5.11) et (5.12) par exemple] s'écrivent

$$\frac{\partial}{\partial t} \delta \rho = -\vec{\nabla} \cdot (\rho_0 \vec{v}) = -\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \rho_0 - \rho_0 (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) \quad (9.64)$$

$$M \frac{\partial}{\partial t} \vec{v} = -g \vec{\nabla} \delta \rho \quad (9.65)$$

avec

$$\rho_0(\vec{r}) = [\mu - V_{\text{ext}}(\vec{r})] / g \quad (9.66)$$

A partir de ces 3 équations, on déduit alors

$$M \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{v} = -\vec{\nabla} [\vec{v} \cdot \vec{\nabla} V_{\text{ext}}] + \vec{\nabla} \{ [\mu - V_{\text{ext}}] (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) \} \quad (9.67)$$

Comparaison avec un condensat (suite)

Pour un mode de vibration du condensat avec champ de vitesses de divergence nulle, le dernier terme de (9.67) est nul et on obtient :

$$M \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{v} = -\vec{\nabla} \left[\vec{v} \cdot \vec{\nabla} V_{\text{ext}} \right] \quad (9.68)$$

équation qui coïncide avec (9.50)

On en déduit le résultat important suivant : pour un mode de vibration avec champ de vitesses de divergence nulle, le champ de vitesses a la même structure

- pour un gaz classique
- pour un gaz de bosons, même proche de la dégénérescence
- pour un condensat à la limite de Thomas-Fermi

La raison profonde est que de telles vibrations se font à densité constante et ne dépendent pas de la compressibilité du fluide (voir cours I)

Mode monopolaire dans un piège sphérique

Montrons que :

$$\vec{v} = e^{i\omega t} \vec{r} \quad (9.69)$$

est une solution de (9.35) et calculons ω

Notons tout d'abord que :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 3 e^{i\omega t} \neq 0 \quad (9.70)$$

de sorte que le champ de vitesses (9.69) n'est pas de divergence nulle. Par contre, le gradient de (9.70) est nul, et donc aussi le premier terme de (9.35)

Par ailleurs, pour un piège sphérique de fréquence ω_0 , et pour le champ de vitesses (9.69)

$$\vec{\nabla} V_{\text{ext}}(\vec{r}) = M \omega_0^2 \vec{r} \quad (9.71)$$

$$\vec{v} \cdot \vec{\nabla} V_{\text{ext}} = e^{i\omega t} M \omega_0^2 r^2 \quad (9.72)$$

Mode monopolaire dans un piège sphérique (suite)

Reportons (9,69), (9,70), (9,71) et (9,72) dans (9,35).

Il vient :

$$-M \omega^2 e^{i\omega t} \vec{r} = -4M \omega_0^2 e^{i\omega t} \vec{r} \quad (9.73)$$

ce qui montre que (9.69) est bien une solution et donne :

$$\omega = 2\omega_0 \quad (9.74)$$

Ce résultat est bien cohérent avec celui démontré dans le cours VIII (voir T-293), à savoir que le mode monopolaire dans un piège sphérique n'est pas amorti et garde la même fréquence, $2\omega_0$, quel que soit le régime de collisions

Mode $m = 0$ dans un piège à symétrie cylindrique

Dans un tel piège, l n'est plus un bon nombre quantique, et le mode $m = 0$ (« monopôle-quadrupôle ») est une superposition des modes $l = 2, m = 0$ et $l = 0, m = 0$. Cherchons donc une solution de (9.35) de la forme

$$\vec{v} = e^{i\omega t} \vec{\nabla} \left[\alpha (x^2 + y^2) + \beta z^2 \right] \quad (9.75)$$

La divergence de (9.75) est non nulle, mais le gradient de cette divergence est nul, de sorte que le dernier terme de (9.35) est nul. Les 2 autres termes de (9.35) se calculent aisément, et on trouve que (9.75) est une solution de (9.35) si α et β satisfont les équations

$$\begin{aligned} \alpha (20 \omega_{\perp}^2 - 6 \omega^2) + 4 \beta \omega_{\perp}^2 &= 0 \\ 8 \alpha \omega_z^2 + \beta (16 \omega_z^2 - 6 \omega^2) &= 0 \end{aligned} \quad (9.76)$$

Mode $m = 0$ dans un piège à symétrie cylindrique (suite)

En écrivant que le déterminant associé au système (9.76) est nul, on obtient une équation du second degré en ω^2 dont les racines sont :

$$\omega^2 = \frac{1}{3} \left[5\omega_{\perp}^2 + 4\omega_z^2 \pm \sqrt{25\omega_{\perp}^4 + 16\omega_z^4 - 32\omega_{\perp}^2\omega_z^2} \right] \quad (9.77)$$

Dans un piège très anisotrope, où

$$\omega_{\perp} \gg \omega_z \quad (9.78)$$

la solution (9.77) de fréquence la plus basse est égale à

$$\omega \simeq \omega_z \sqrt{12/5} = 1.55 \omega_z \quad (9.79)$$

Il est intéressant de comparer cette solution à la solution correspondante pour un condensat à la limite de Thomas Fermi. L'équation 2.8.b de T-45 donne

$$\omega \simeq \omega_z \sqrt{5/2} = 1.58 \omega_z \quad (9.80)$$

Références

(Suite de T-156, T-192, T-232, T-273 et T-314)

- 22 - A. Griffin, W-C. Wu, S. Stringari, Phys.Rev.Lett. 78, 1838 (1997).
- 23 - L. Kadanoff, G. Baym, « Quantum Statistical Mechanics », (Benjamin, New York, 1962), Chap. 6.
- 24 - Une autre approche au problème des modes propres de vibration d'un nuage de bosons à la limite hydrodynamique est présentée dans : Yu. Kagan, E. Surkov, G. Shlyapnikov, Phys. Rev. A 55, R18 (1997).