

Résumé du cours 1999-2000

Le cours de l'année 1999-2000 a poursuivi l'étude, entreprise au cours des deux années antérieures, de la condensation de Bose-Einstein de gaz atomiques ultrafroids. Il a porté plus particulièrement sur l'étude des propriétés de cohérence des condensats.

La première séance est consacrée à un rapide survol des résultats essentiels exposés au cours des deux années antérieures : caractéristique du phénomène de condensation pour un gaz parfait de bosons ; importance des interactions entre atomes et description des collisions binaires entre atomes ultrafroids au moyen de la longueur de diffusion ; théories de champ moyen permettant de décrire la structure et la dynamique des condensats au moyen de l'équation de Gross-Pitaevskii ; théorie de Bogolubov permettant de donner une description plus précise des condensats, en particulier de leurs excitations élémentaires ; limite de Thomas-Fermi et limite hydrodynamique conduisant à des équations plus simples.

Le thème choisi pour le cours 1999-2000 est également précisé et l'organisation générale de ce cours esquissée.

Propriétés de cohérence d'un condensat

Les deux premières séances du cours de cette année sont consacrées à une discussion générale des problèmes qui seront étudiés. En quel sens peut-on dire qu'un condensat est un objet cohérent ? Quelles fonctions permettent de caractériser les propriétés de cohérence d'un condensat ?

Pour progresser dans la compréhension de ces problèmes, il est utile de s'inspirer des études faites sur la cohérence des champs optiques. On commence par rappeler l'expression de quelques états importants du champ de rayonnement quantique : états de Fock correspondant à un nombre N de photons bien défini, états cohérents correspondant à des superpositions linéaires d'états avec des valeurs de N différentes, et se rapprochant le plus possible d'un état classique d'amplitude et de phase bien définies ; mélanges statistiques d'états cohérents de même amplitude et de phase équipartie entre 0 et 2π . On introduit ensuite la fonction de corrélation $G^{(1)}(\bar{r}, \bar{r}')$ qui caractérise les corrélations existant entre les valeurs du champ entre deux points différents \bar{r} et \bar{r}' et qui détermine le contraste des franges d'interférence obtenues en superposant les champs issus de \bar{r} et \bar{r}' . En fait, $G^{(1)}(\bar{r}, \bar{r}')$ ne caractérise pas entièrement le champ et il faut introduire des fonctions de corrélation d'ordre supérieur, $G^{(2)}(\bar{r}, \bar{r}')$, $G^{(3)}(\bar{r}, \bar{r}', \bar{r}'')$, pour préciser les corrélations d'intensité en des points différents. On rappelle enfin les résultats du calcul de ces fonctions de corrélation dans quelques cas simples : champ optique gaussien, ce qui permet d'introduire la notion de longueur de cohérence et de discuter l'effet de groupement de photons, découvert par Hanbury Brown et Twiss ; champ optique cohérent, pour lequel toutes les fonctions de corrélation se factorisent en produits de fonctions de $\bar{r}, \bar{r}', \bar{r}'' \dots$

Par analogie avec l'optique, il est possible alors d'introduire des fonctions de corrélation pour un système de bosons. Les opérateurs champs électriques $\hat{E}^+(\vec{r})$ et $\hat{E}^-(\vec{r})$ sont remplacés par les opérateurs $\hat{\Psi}(\vec{r})$ et $\hat{\Psi}^+(\vec{r})$ qui détruisent ou créent un boson au point \vec{r} . Ces opérateurs champs peuvent être écrits sous forme d'une combinaison linéaire d'opérateurs \hat{a}_i et \hat{a}_i^+ qui détruisent ou créent un boson dans l'un quelconque des états $\varphi_i(\vec{r})$ d'une base orthonormée d'états. Un état de Fock du système de bosons correspond à un nombre bien défini N de bosons dans le même état $\varphi_o(\vec{r})$. Un état cohérent est une superposition linéaire d'états de N différents, qui n'a pas de sens physique clair car, à la différence des photons, les bosons ne peuvent pas être émis ou absorbés, de sorte que toutes les observables physiques commutent avec l'opérateur nombre de particules \hat{N} . Par contre, un mélange statistique d'états cohérents de bosons, d'amplitude bien définie et de phase équipartie entre 0 et 2π , peut s'écrire encore comme un mélange statistique d'états de Fock, qui a un sens physique très clair. Par analogie avec l'optique, on peut également introduire des fonctions de corrélation $G^{(1)}, G^{(2)}, G^{(3)} \dots$ pour un système de bosons, sous la forme de la valeur moyenne d'un produit de 2, 4, 6...opérateurs champs rangés dans l'ordre normal. Ces fonctions de corrélation sont calculées simplement dans un état de Fock, qui décrit assez bien un condensat de Bose-Einstein où N bosons sont condensés dans le même état $\varphi_o(\vec{r})$.

Un autre calcul intéressant est celui de la fonction de corrélation $G^{(1)}(\vec{r}, \vec{r}')$ pour un gaz de N bosons en équilibre thermodynamique à la température T dans une boîte, ou dans un piège harmonique. En l'absence d'interactions, le calcul est très simple et permet de suivre analytiquement l'évolution de $G^{(1)}(\vec{r}, \vec{r}')$ quand on augmente N à T fixée. Pour N très petit, le gaz n'est pas dégénéré et on trouve que $G^{(1)}(\vec{r}, \vec{r}')$ tend vers 0 quand la distance $|\vec{r} - \vec{r}'|$ devient supérieure à la longueur d'onde de de Broglie thermique λ_T . Quand N croît, la portée spatiale de $G^{(1)}(\vec{r}, \vec{r}')$ croît et devient infinie quand N dépasse la valeur critique correspondant au seuil de condensation. La condensation de Bose-Einstein se traduit donc par l'apparition d'un ordre spatial à très longue portée. La modification des résultats précédents sous l'effet des interactions est discutée simplement à partir de la théorie de Bogolubov. On montre enfin comment le théorème de Wick permet de calculer simplement les fonctions de corrélation d'ordre supérieur pour un système de N bosons en équilibre thermodynamique et de les exprimer sous forme d'un produit de fonctions de corrélation $G^{(1)}$.

Quelques remarques sont alors présentées sur les fluctuations ΔN_0 du nombre de particules condensées dans un condensat de Bose-Einstein. Si l'on décrit ce condensat par un état de Fock N_0 , on a bien sûr $\Delta N_0 = 0$. Par contre, dans une description grand canonique on trouve que, en l'absence d'interactions, ΔN_0 est très grand et peut-être de l'ordre du nombre moyen $\langle \hat{N}_0 \rangle$ de particules condensées. Cette différence entre les deux prédictions est en fait artificielle. On montre qu'elle disparaît lorsqu'on tient compte des interactions, ΔN_0 devenant beaucoup plus petit et de l'ordre de $\sqrt{\langle \hat{N}_0 \rangle}$.

Ce chapitre du cours se termine par une revue des études expérimentales des fonctions de corrélation $G^{(2)}$ et $G^{(3)}$ pour des condensats de Bose-Einstein (l'étude de $G^{(1)}$ sera présentée de

manière beaucoup plus détaillée dans des chapitres ultérieurs). La fonction $G^{(2)}(\bar{r}, \bar{r})$ apparaît dans l'énergie d'interaction U d'un condensat, somme des énergies d'interaction d'une paire de bosons quand ils sont très proches l'un de l'autre. La mesure de U est faite sur l'énergie libérée après expansion balistique du condensat. La fonction $G^{(3)}(\bar{r}, \bar{r}, \bar{r})$ intervient dans l'expression des taux de collisions inélastiques à trois corps, collisions qui apparaissent quand trois bosons sont très proches l'un de l'autre. Les expériences correspondantes réalisées au M.I.T. et à Boulder, sont décrites successivement. Les résultats observés sont en accord satisfaisant avec les prédictions théoriques faites sur un état de Fock. Ils diffèrent nettement de ceux prévus pour un gaz peu dégénéré dont la température T est très supérieure à la température critique T_c .

Phase relative de deux condensats

La phase absolue d'un condensat n'a pas de sens physique. Par contre, la différence de phase entre deux points d'un même condensat a un sens physique bien défini. De même, on peut s'intéresser à la différence de phase entre deux condensats différents. Le chapitre suivant du cours est consacré à la description d'états de deux condensats présentant une phase relative φ bien définie.

Le premier exemple d'état de phase relative φ bien définie est construit de la manière suivante. Soient $\psi_a(\bar{r})$ et $\psi_b(\bar{r})$ deux états normés à une particule. Considérons l'état $\psi(\bar{r}) = \alpha\psi_a(\bar{r}) + \beta\psi_b(\bar{r})e^{-i\varphi}$ où α et β sont supposés réels avec $\alpha^2 + \beta^2 = 1$. Une particule dans l'état $\psi(\bar{r})$ est dans une superposition linéaire des états ψ_a et ψ_b avec une phase relative φ bien définie. On introduit alors un état $|N, \varphi\rangle$ de N bosons, où tous les N bosons sont dans l'état ψ précédent. Le formalisme de la seconde quantification, utilisant les opérateurs de création \hat{a}^+ et \hat{b}^+ d'un boson dans l'état $\psi_a(\bar{r})$ et $\psi_b(\bar{r})$ est particulièrement commode pour décrire l'état des N bosons qui s'écrit :

$$|N, \varphi\rangle = (1/\sqrt{N!}) \left[\alpha\hat{a}^+ + \beta\hat{b}^+ e^{-i\varphi} \right]^N |0\rangle$$

où $|0\rangle$ est le vide de particules. En développant l'état précédent, on montre alors que l'état de phase relative $|N, \varphi\rangle$ est une superposition linéaire d'états où n_a bosons sont dans l'état ψ_a , n_b bosons dans l'état ψ_b , avec $n_a + n_b = N$. Alors que $n_a + n_b$ est fixé, $n_a - n_b$ varie d'un état de la superposition à l'autre, la dispersion $\Delta(N_a - N_b)$ sur les valeurs de $n_a - n_b$ étant proportionnelle à \sqrt{N} . L'existence d'une phase relative φ bien définie entre les deux condensats se traduit donc par une incertitude sur la différence $n_a - n_b$ du nombre de particules présentes dans chaque condensat. La phase relative φ apparaît ainsi comme la variable conjuguée de $\hat{N}_a - \hat{N}_b$.

Les propriétés précédentes se manifestent également dans un autre type d'état où la phase relative φ est bien définie. On considère un produit de deux états cohérents $|Ae^{i\varphi_a}\rangle$ et $|Be^{i\varphi_b}\rangle$ relatifs à deux " modes " $\psi_a(\bar{r})$ et $\psi_b(\bar{r})$, A et B étant deux amplitudes réelles et φ_a, φ_b deux phases. On introduit alors un mélange statistique d'états produits $|Ae^{i\varphi_a}\rangle \otimes |Be^{i\varphi_b}\rangle$, où A et B sont fixes, φ_a équipartie entre 0 et 2π , $\varphi_a - \varphi_b$ restant fixe et égal à φ . Un tel mélange est appelé état cohérent relatif, de phase relative φ bien définie. On montre que l'opérateur densité correspondant $\hat{\rho}_{AB}(\varphi)$ n'a

d'éléments de matrice non nuls qu'entre états n_a, n_b et n'_a, n'_b ayant le même nombre total de particules ($n_a + n_b = n'_a + n'_b$), mais que $n_a - n_b$ peut varier ($n_a - n_b \neq n'_a - n'_b$), ce qui montre là encore l'existence d'une dispersion sur $\hat{N}_a - \hat{N}_b$ quand φ est bien définie.

Interférences entre deux condensats

Le cours se poursuit par la description et l'analyse d'une expérience d'interférence réalisée récemment au M.I.T. dans l'équipe de W. Ketterle. Le principe de l'expérience consiste à partir de deux condensats piégés dans deux puits potentiels différents et séparés spatialement. On coupe brusquement les pièges, les deux condensats tombent en subissant une expansion balistique qui leur permet de se recouvrir. La densité d'atomes dans la zone de recouvrement est mesurée et fait apparaître l'existence de franges d'interférence.

On commence par présenter un calcul simple du signal de détection, en supposant que chaque condensat est décrit initialement par un état cohérent. On néglige pour simplifier les interactions entre atomes. Chacun des deux condensats demeure dans un état cohérent relatif aux " modes " $\psi_1(\vec{r}, t)$ ou $\psi_2(\vec{r}, t)$, se déduisant par évolution temporelle des modes initiaux $\psi_1(\vec{r}, 0)$ et $\psi_2(\vec{r}, 0)$. Le signal de détection apparaît alors comme celui résultant de l'interférence entre deux ondes de matière $\sqrt{N_1}\psi_1(\vec{r}, t)e^{i\varphi_1}$ et $\sqrt{N_2}\psi_2(\vec{r}, t)e^{i\varphi_2}$ où $\sqrt{N_1}$, $\sqrt{N_2}$, φ_1 , φ_2 sont les modules et phases des deux états initiaux. Si l'on prend pour $\psi_1(\vec{r}, 0)$ et $\psi_2(\vec{r}, 0)$ des fonctions d'ondes gaussiennes, on peut calculer simplement l'évolution au cours de l'expansion balistique et en déduire toutes les caractéristiques des franges d'interférence. Les résultats sont inchangés si l'on prend pour état initial un état cohérent relatif de phase relative $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ bien définie.

Les résultats expérimentaux de l'équipe du M.I.T. sont alors présentés et comparés aux prédictions théoriques. Une analyse plus quantitative, tenant compte des interactions et basée sur l'équation de Gross-Pitaevskii, est également introduite. L'accord satisfaisant entre la théorie et l'expérience démontre clairement la possibilité de faire interférer les ondes de de Broglie atomiques issues de 2 condensats différents.

Emergence d'une phase relative sous l'effet des processus de détection

Deux condensats indépendants n'ont pas en général une phase relative bien définie. Le problème se pose donc de comprendre comment on peut néanmoins observer des franges d'interférence dans la zone de recouvrement des deux condensats.

La réponse à cette question est que c'est le processus de détection lui-même qui, au fur et à mesure que les atomes sont détectés, fait apparaître une phase relative entre les deux condensats. Bien sûr, la valeur de cette phase relative change aléatoirement d'une réalisation expérimentale à l'autre.

Considérons par exemple le cas simple de deux condensats se trouvant chacun dans un état de Fock. Dans un tel état, la dispersion de $N_1 - N_2$ est nulle. Lorsque les processus de détection commencent, chaque atome détecté a une certaine amplitude de probabilité de provenir du condensat 1, et une autre du condensat 2. Chaque détection fait donc apparaître une dispersion sur $N_1 - N_2$. On conçoit alors que l'augmentation progressive de cette dispersion au fur et à mesure que les atomes sont détectés fasse diminuer corrélativement la dispersion sur la phase relative φ .

Pour préciser cette idée de manière plus quantitative, on calcule alors la probabilité $P(x_1, x_2, \dots, x_k)$ de détecter, au cours d'une réalisation expérimentale, un atome en x_1 , puis un atome en x_2, \dots puis un atome en x_k . Un tel calcul est effectué en utilisant la description générale des processus dissipatifs en termes de sauts quantiques. Chaque détection d'un atome correspond en effet à un saut quantique. On montre ainsi que la probabilité $P(x_1, x_2, \dots, x_k)$ est reliée très simplement aux fonctions de corrélation d'ordre k des opérateurs champ quantiques du système de bosons.

Une première manière d'exploiter le résultat précédent est alors présentée. A partir de la probabilité $P(x_1, x_2, \dots, x_k)$, calculée dans le cas où l'état des deux condensats est un produit d'états de Fock, on effectue des simulations numériques, de type Monte-Carlo, d'une réalisation expérimentale où les atomes sont détectés les uns après les autres. On constate bien effectivement que les positions des divers atomes détectés, apparaissant tout à fait aléatoires au début, se concentrent progressivement sur des franges brillantes séparées par des franges sombres.

Une autre approche, plus analytique, consiste à essayer de comprendre à partir de $P(x_1, x_2, \dots, x_k)$ la manière dont la distribution $W(\varphi)$ des valeurs possibles de la phase relative φ , initialement equipartie entre 0 et 2π , évolue au cours du temps, au fur et à mesure que les atomes sont détectés, et s'affine de plus en plus autour d'une valeur donnée. Un tel calcul est présenté, en prenant pour état initial des deux condensats, un mélange statistique d'états cohérents relatifs $\hat{\rho}_{AB}(\varphi)$ avec une phase relative φ répartie suivant une distribution $W(\varphi)$ initialement uniforme entre 0 et 2π . La simplicité des calculs effectués sur des états cohérents permet de faire une étude analytique de ce problème et de montrer que la largeur de la distribution $W(\varphi)$ de la phase relative décroît en $1/\sqrt{N}$ où N est le nombre d'atomes détectés.

Brouillage de la phase relative entre deux condensats sous l'effet des interactions

Dans les calculs précédents, les interactions entre bosons sont négligées. On présente alors une étude simple de leur effet dans le cadre d'une théorie de champ moyen tenant compte des interactions à l'intérieur de chaque condensat 1 et 2. Par contre, on continue à négliger les interactions entre atomes du condensat 1 et atomes du condensat 2. On suppose en effet que les deux condensats sont initialement bien séparés spatialement et on étudie l'évolution de leur phase relative, bien définie initialement, avant qu'ils n'aient eu le temps de se recouvrir.

La grandeur physique étudiée est la fonction de corrélation $G^{(1)}(\vec{r}_1, 0; \vec{r}_2, t)$ caractérisant les corrélations entre l'opérateur champ au point \vec{r}_1 du condensat 1 à l'instant 0 et l'opérateur champ au

point \vec{r}_2 du condensat 2, à un instant ultérieur t . En l'absence d'interactions, $G^{(1)}$ évolue à une seule fréquence et ne présente pas d'amortissement. La présence d'interactions à l'intérieur de chaque condensat fait apparaître un ensemble de fréquences d'évolution légèrement différentes réparties sur une plage $\Delta\omega$. Les battements entre ces diverses fréquences vont entraîner un amortissement de la cohérence spatiale, existant initialement entre les deux condensats, au bout d'un temps $T_{coh} = 1/\Delta\omega$, appelé temps de cohérence de la phase relative. Par ailleurs, comme les nombres d'atomes N_1 et N_2 de chaque condensat sont discrets, les diverses fréquences d'évolution réparties à l'intérieur de la plage $\Delta\omega$ sont séparées par des intervalles $\delta\omega$ à peu près égaux. Il s'ensuit qu'au bout d'un temps de récurrence $T_{rec} = 1/\delta\omega$, beaucoup plus long que le temps de cohérence T_{coh} car $\Delta\omega \gg \delta\omega$, les battements entre les diverses fréquences d'évolution vont être de nouveaux constructifs et faire réapparaître la cohérence spatiale qui existait initialement entre les deux condensats. Les deux temps T_{coh} et T_{rec} sont calculés en fonction des divers paramètres physiques du problème.

Mesure de la longueur de cohérence d'un condensat

Le cours se poursuit par la description d'une série d'expériences qui ont permis d'établir que la longueur de cohérence d'un condensat est de l'ordre de l'extension spatiale de ce condensat.

Les théories de champ moyen prédisent que, lorsque la température T est très inférieure à la température critique T_C , tous les N atomes sont condensés dans le même état quantique décrit par une fonction d'onde réelle $\psi_0(\vec{r})$, solution de l'équation de Gross-Pitaevskii. Les calculs mentionnés plus haut des fonctions de corrélation permettent alors de montrer que $G^{(1)}(\vec{r}, \vec{r}') = N \psi_0(\vec{r})\psi_0(\vec{r}')$. On en déduit que $G^{(1)}(\vec{r}, \vec{r}')$ reste non nul pour \vec{r} et \vec{r}' séparés par une distance de l'ordre de la dimension du condensat. Peut-on vérifier expérimentalement une telle prédiction ?

Expérience du M.I.T.

La première expérience décrite a été réalisée au M.I.T. dans l'équipe de W. Ketterle. Elle utilise le fait que la cohérence spatiale globale $G(\vec{a}) = \int d^3r G^{(1)}(\vec{r}, \vec{r} + \vec{a})$, définie comme la somme de toutes les cohérences spatiales entre couples de points \vec{r} et $\vec{r} + \vec{a}$ séparés de \vec{a} , est la transformée de Fourier de la distribution d'impulsion $P(\vec{p})$. Le principe de l'expérience consiste à mesurer la distribution d'impulsion $P(\vec{p})$ des atomes condensés, et en particulier la largeur Δp de $P(\vec{p})$. Comme $P(\vec{p})$ est la transformée de Fourier de $G(\vec{a})$, la largeur de $G(\vec{a})$, c'est-à-dire la longueur de cohérence du condensat, est de l'ordre de $\hbar/\Delta p$. Il faut donc comparer $\hbar/\Delta p$ à l'extension spatiale du condensat.

Pour mesurer $P(\vec{p})$, on pourrait songer à utiliser des méthodes de temps de vol. En fait, à cause des interactions répulsives entre atomes, les atomes sont accélérés au cours de la phase d'expansion balistique et leurs vitesses changent. Les méthodes de temps de vol ne donnent donc pas accès à la distribution des impulsions (ou des vitesses) dans le condensat.

La méthode suivie par l'équipe du M.I.T. pour mesurer $P(\vec{p})$ consiste à utiliser des méthodes optiques, basées sur des transitions par effet Raman stimulé entre deux états fondamentaux de même nombre quantique interne, mais différant par leur vitesse. De telles transitions ont été déjà utilisées pour mesurer des distributions de vitesse, et sont connues sous le nom d'effet Compton stimulé ou de résonances induites par le recul. Comme pour le calcul de l'effet Compton, les conditions de conservation de l'énergie totale et de l'impulsion totale conduisent à une relation simple entre l'écart de fréquence des deux lasers induisant la transition Raman stimulée et la vitesse initiale de l'atome. Dans le cas d'un condensat, il faut de plus tenir compte de l'effet des interactions entre atomes, qui entraîne que dans l'état final de la transition Raman, l'atome n'est pas soumis au même champ moyen que dans l'état initial. Une telle correction est évaluée de manière approchée. On calcule également la transformée de Fourier de la solution de l'équation de Gross-Pitaevskii à la limite de Thomas-Fermi, ce qui permet finalement de préciser ce que doit être la distribution d'impulsion des atomes condensés, si une telle équation décrit correctement le condensat.

Les résultats expérimentaux sont alors présentés, analysés en détail et comparés aux prédictions théoriques. On trouve effectivement que la largeur Δp de la distribution d'impulsion mesurée, corrigée de l'effet des interactions, est en très bon accord avec celle liée à l'extension spatiale finie du condensat. La longueur de cohérence du condensat est donc bien de l'ordre de son extension spatiale.. La même méthode peut être appliquée pour mesurer la distribution des vitesses pour un nuage thermique et pour le nuage obtenu après l'expansion balistique suivant une coupure du piège. On vérifie bien que dans ce dernier cas la distribution des vitesses est beaucoup plus large que pour le condensat, à cause de l'accélération due aux interactions dans la phase d'expansion.

Expérience de Gaithersburg

Une deuxième étude expérimentale de la longueur de cohérence d'un condensat, réalisée par l'équipe de W. Phillips à Gaithersburg, est ensuite présentée. Le principe de l'expérience consiste à réaliser deux "copies" identiques du même condensat, séparées de \vec{a} , puis à mesurer leur intégrale de recouvrement, qui n'est autre que la cohérence spatiale globale $G(\vec{a})$ définie plus haut. Au lieu de mesurer la distribution d'impulsion $P(\vec{p})$ qui n'est autre que la transformée de Fourier de $G(\vec{a})$, on mesure ici directement $G(\vec{a})$.

Pour préparer une "copie" d'un condensat, la méthode suivie consiste à utiliser, comme dans l'expérience précédente, une transition par effet Raman stimulé entre deux états fondamentaux de même nombre quantique interne mais de vitesses différentes. Mais, à la différence de l'expérience du M.I.T. où les impulsions laser qui induisent la transition Raman sont longues, on utilise ici des impulsions très brèves. De manière plus précise, la durée τ des impulsions est très petite devant \hbar/E_R (où $E_R = \hbar^2 k^2 / 2m$ est l'énergie de recul) dans l'expérience de Gaithersburg, alors qu'elle est très longue devant \hbar/E_R dans l'expérience du M.I.T. L'interprétation physique des différences entre ces deux régimes est discutée en détail. On établit en particulier un parallèle avec les différences qui

existent entre le régime de Raman Nath et le régime de Bragg dans les expériences de diffraction d'un jet atomique par une onde laser stationnaire.

L'expérience de Gaithersburg utilise en fait une succession de deux impulsions Raman très brèves, séparées par un intervalle de temps Δt . La première impulsion crée deux copies du condensat initial s'éloignant de ce condensat, vers la droite et vers la gauche, avec des vitesses $\pm 2\hbar k/m$, où $\hbar k$ est l'impulsion des photons. La deuxième impulsion Raman crée deux autres copies du condensat, identiques aux deux premières et séparées d'elles d'une distance $a = 2\hbar k\Delta t/m$. Les deux copies qui s'éloignent vers la droite avec la vitesse $+2\hbar k/m$ sont séparées de a et interfèrent. Le nombre d'atomes qui l'éloignent vers la droite est sensible à leur interférence, et donc à l'intégrale de recouvrement $G(a)$. Il suffit de recommencer l'expérience, avec d'autres valeurs de Δt , donc de a , pour mesurer ainsi $G(a)$ point par point.

Les résultats expérimentaux sont présentés et analysés. On décrit en particulier les précautions prises pour corriger les fluctuations de l'efficacité du transfert Raman d'une impulsion à l'autre. Comme dans l'expérience du M.I.T., les résultats observés montrent que la longueur de cohérence du condensat est de l'ordre de son extension spatiale.

Expérience de Munich

La troisième expérience décrite a été réalisée à Munich dans l'équipe de T. Hansch. Le principe de l'expérience consiste à extraire deux ondes de matière de deux points différents du condensat, séparés d'une distance a . On observe alors les interférences entre ces deux ondes de matière une fois qu'elles ont quitté le condensat dont elles sont issues. L'étude des variations avec a du contraste des franges d'interférence permet de déterminer le degré de cohérence entre les deux ondes de matière, et par suite la cohérence spatiale entre les deux points sources.

Pour extraire une onde de matière d'un condensat, la méthode utilisée à Munich consiste à induire des transitions de radiofréquence entre le sous-niveau Zeeman piégeant dans lequel les atomes condensés se trouvent et un autre sous niveau Zeeman non piégeant ou expulsant, pour lequel les variations de l'énergie Zeeman avec la position dans le champ magnétique inhomogène du piège ne font pas apparaître de puits de potentiel. De tels "coupleurs de sortie" ont déjà été réalisés par d'autres équipes, mais ces équipes utilisaient généralement des impulsions de radiofréquence brèves et intenses, de manière à expulser tous les atomes du condensat, indépendamment de leur position. Le spectre de Fourier d'une impulsion très brève est en effet suffisamment large pour permettre de satisfaire la condition de résonance entre états piégeant et non piégeant en tous les points du condensat. De plus, les fluctuations temporelles du champ magnétique du piège sont alors moins gênantes car elles ne font pas sortir de la plage de résonance, très large. L'équipe de Munich a par contre utilisé des impulsions de radiofréquence peu intenses et très longues. La plage de résonance est alors très étroite et les atomes expulsés proviennent d'une zone d'altitude bien définie dans le condensat. Il faut bien sûr que le champ magnétique du piège soit très stable pour que la zone d'expulsion ne varie pas d'une impulsion à l'autre. On décrit la configuration de champs magnétiques utilisée à Munich, appelée "piège QUIC" qui permet de réaliser un tel objectif.

Pour extraire deux ondes de matière du condensat, il suffit alors d'appliquer deux impulsions de fréquences différentes ω et ω' , pour lesquelles les conditions de résonance sont satisfaites à des altitudes différentes z et z' . En faisant varier ω et ω' , on fait varier z et z' . L'observation des franges d'interférence entre les deux ondes de matière sortantes montrent que le contraste des franges est d'autant plus élevé que $|z - z'|$ est plus petit. On mesure ainsi directement $G^{(1)}(z, z')$. Les observations expérimentales sont en très bon accord avec les prédictions théoriques calculées à partir de l'équation de Gross-Pitaevskii, ce qui montre là encore que la longueur de cohérence du condensat est de l'ordre de son extension spatiale.

Phase relative de deux condensats simultanément présents dans le même piège

La dernière séance du cours 1999/2000 est consacrée à la description d'expériences réalisées à Boulder dans l'équipe de E. Cornell et C. Wieman, et portant sur des mélanges de deux condensats d'atomes de rubidium 87 préparés dans les niveaux hyperfins $F=1$ et $F=2$. Plusieurs questions sont abordées. Comment préparer et détecter de tels mélanges ? Quelle est leur dynamique sous l'effet des interactions entre atomes ? Peut-on les préparer avec une phase relative bien définie et suivre l'évolution ultérieure de cette phase ?

Une première méthode pour préparer un mélange de deux condensats dans les états $F=2, m_F=2$ (état appelé 2) et $F=1, m_F=-1$ (état appelé 1) consiste à utiliser le "refroidissement sympathique". On piège simultanément des atomes de rubidium 87 dans ces deux états. Comme le moment magnétique de l'état 2 est deux fois plus grand que celui de l'état 1, le piège est plus confinant pour les atomes dans l'état 2 et le nuage d'atomes dans l'état 1 s'étend plus loin. L'évaporation radiofréquence enlève préférentiellement les atomes dans l'état 1, à l'extrémité du nuage. Les collisions entre les atomes dans l'état 2 et les atomes dans l'état 1 ainsi refroidis diminuent la température des atomes dans l'état 2 et on arrive finalement à obtenir deux condensats. Une telle méthode mise en œuvre avec succès sur le rubidium à Boulder ne peut être généralisée aux autres alcalins. Le refroidissement sympathique d'atomes préparés dans des niveaux hyperfins différents ne peut en effet fonctionner que si les collisions d'échange de spin, qui sont des collisions inélastiques, sources de pertes d'atomes, restent négligeables devant les collisions élastiques permettant le refroidissement sympathique. Ceci est réalisé pour le rubidium 87 à cause d'une coïncidence accidentelle entre les longueurs de diffusion a_s et a_T des potentiels singulet et triplet de spin, conduisant à une interférence destructive pour l'amplitude d'échange de spin. Une telle circonstance favorable ne se produit pas pour les autres alcalins.

Une autre méthode permettant de préparer un mélange de deux condensats et ne reposant pas sur les refroidissement sympathique a été également mise en œuvre à Boulder. Elle consiste à partir d'un condensat d'atomes dans l'état 1. Une transition à deux photons, microonde et radiofréquence, couple alors de manière résonnante un tel état à l'état 2. Suivant la durée de l'impulsion (impulsion $\pi, \pi/2$), on peut ainsi réaliser un condensat dans l'état 2 ou une superposition de deux condensats dans les états 1 et 2.

Une première série d'expériences réalisées en suivant cette méthode a consisté à étudier la dynamique des deux condensats sous l'effet de leurs interactions. Une excitation optique appropriée permet de les détecter séparément. On présente les résultats obtenus ainsi qu'une interprétation théorique basée sur les équations de Gross-Pitaevskii couplées décrivant les deux condensats et permettant de déterminer les conditions conduisant à un mélange ou à une séparation de ces deux condensats.

Une autre série d'expériences a porté sur l'étude de la phase relative entre les deux condensats. Une première impulsion $\pi/2$ prépare les deux condensats avec une phase relative bien définie. Une deuxième impulsion $\pi/2$ appliquée un intervalle de temps T après permet de lire la nouvelle valeur de la phase relative. On observe ainsi en fonction de T des franges d'interférence sur les signaux de détection, analogues aux franges de Ramsey dans le domaine temporel. La diminution du contraste de ces franges quand T augmente reflète le brouillage de la phase relative. Les temps de cohérence correspondants se révèlent être remarquablement longs. On présente des analyses théoriques permettant d'interpréter un tel résultat et généralisant le traitement du brouillage de la phase relative donnée plus haut à des situations où il faut tenir compte des interactions, non seulement à l'intérieur de chaque condensat, mais également entre les deux condensats.

Thème général choisi pour le cours 2000-2001

Le cours portera sur l'étude des réponses d'un condensat à divers types d'excitations permettant de sonder ses propriétés : diffusion d'un atome, diffusion d'un photon..

Plusieurs régimes seront considérés . Le régime linéaire tout d'abord, où l'excitation est suffisamment faible pour que son effet puisse être calculé perturbativement. La réponse du système est alors caractérisée par diverses fonctions, comme les facteurs de structure dynamique et statique, la polarisabilité dynamique. Ces fonctions seront étudiées pour des condensats homogènes et inhomogènes. Pour des excitations plus fortes, des corrélations apparaissent entre les diffusions successives, donnant naissance à des effets collectifs, comme la superradiance, l'amplification d'ondes de matière...

Des expériences récentes étudiant ces divers effets seront également passées en revue.

Réponse d'un condensat à divers types d'excitations

Expériences envisagées

On envoie une particule (atome, photon...) sur le condensat, et on observe comment elle est diffusée par le condensat.

On sonde ainsi les propriétés du condensat : structure spatiale, spectre d'excitations élémentaires, durées de vie de ces excitations...

Généralité d'une telle méthode

Importance des expériences de diffusion (neutrons, rayonnement synchrotron...) pour l'investigation des propriétés d'un système à N corps.

Les divers régimes

- Régime linéaire
- Régime non linéaire

Régime linéaire

Excitation suffisamment faible pour que la réponse du condensat puisse être analysée perturbativement.

Chaque processus de diffusion n'influence pas les suivants.

Pas de diffusion multiple.

Chaque nouvelle particule sonde va être diffusée par un condensat non perturbé.

Régime non linéaire

Les excitations élémentaires créées dans le condensat par une particule sonde vivent assez longtemps pour influencer les diffusions suivantes .

Corrélations entre les diffusions successives.

Apparition de phénomènes collectifs : superradiance, amplification...

Fonctions importantes caractérisant le régime linéaire

Facteur de structure dynamique $S(\vec{q}, \omega)$

$\hbar\vec{q}$: Transfert d'impulsion

$\hbar\omega$: Transfert d'énergie

de la particule sonde vers le condensat lors de la diffusion.

$S(\vec{q}, \omega)$ caractérise l'aptitude du condensat à absorber cette impulsion et cette énergie.

$S(\vec{q}, \omega)$ dépend uniquement des propriétés du système des N atomes du condensat, et non du potentiel d'interaction entre ces atomes et la particule sonde.

$S(\vec{q}, \omega)$ décrit l'effet des interférences entre les amplitudes de diffusion provenant des divers atomes du condensat.

$S(\vec{q}, \omega)$ caractérise en fait les fluctuations spatio-temporelles du condensat.

Facteur de structure statique $S(\vec{q})$

$$S(\vec{q}) = \frac{1}{N} \int d\omega S(\vec{q}, \omega)$$

Si l'on peut négliger les variations de $|\vec{q}|$ sur l'étendue des variations de ω , $S(\vec{q})$ caractérise la section efficace de diffusion du condensat dans la direction de \vec{q} , indépendamment de ω .

Fonction de réponse linéaire $\chi_{BA}(t)$

Caractérise la réponse du condensat observée sur la grandeur B du condensat quand ce dernier est soumis à une perturbation proportionnelle à la grandeur A .

Polarisabilité dynamique $\tilde{\chi}_{BA}(\omega)$

Caractérise la réponse de B à une perturbation sinusoïdale de fréquence ω sur la grandeur A .

Densités spatiales à un et deux corps

Importance de ces observables

Grandeurs du condensat couplées couplées à l'excitation qui les sonde.

Expression en première quantification

Densité spatiale à un corps

$$\hat{\rho}_I(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N \delta(\vec{r} - \hat{r}_i)$$

$\langle \hat{\rho}_I(\vec{r}) \rangle$ est la densité de probabilité de trouver un atome quelconque au point \vec{r} .

Densité spatiale à deux corps

$$\hat{\rho}_{II}(\vec{r}, \vec{r}') = \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i} \delta(\vec{r} - \hat{r}_i) \delta(\vec{r}' - \hat{r}_j)$$

$\langle \hat{\rho}_{II}(\vec{r}, \vec{r}') \rangle$ est la densité de probabilité de trouver un atome quelconque en \vec{r} et un autre atome en \vec{r}' .

Exemples de problèmes où apparaît la densité spatiale à un corps

Exemple 1

Diffusion d'une particule sonde, de position \vec{R} , interagissant avec les atomes du condensat, de positions \vec{r}_i , par un potentiel $U(\vec{R} - \hat{r}_i)$ dépendant de $\vec{R} - \hat{r}_i$.

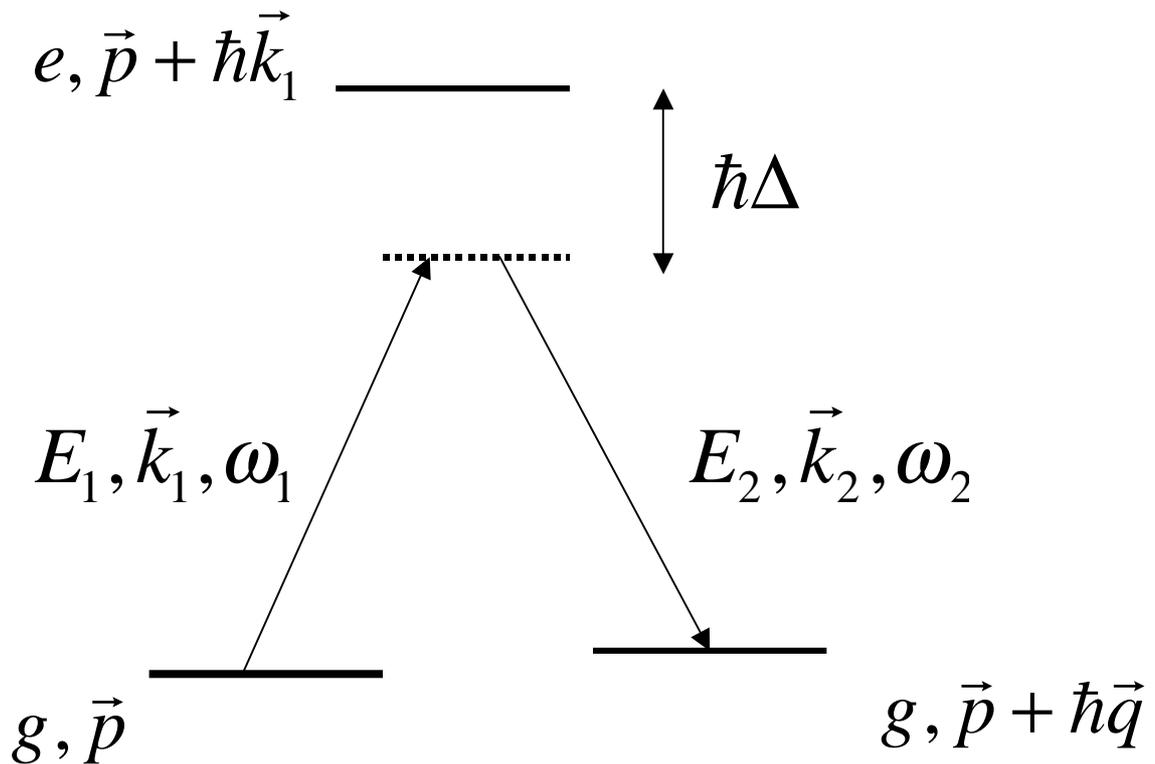
Hamiltonien d'interaction

$$\begin{aligned}\hat{H}_{\text{int}} &= \sum_{i=1}^N U(\vec{R} - \hat{r}_i) \\ &= \int d^3 r U(\vec{R} - \vec{r}) \sum_{i=1}^N \delta(\vec{r} - \hat{r}_i) \\ &= \int d^3 r U(\vec{R} - \vec{r}) \hat{\rho}_I(\vec{r})\end{aligned}$$

Exemple 2 : Diffusion de Bragg

Absorption d'un photon \vec{k}_1, ω_1 .

Emission stimulée d'un photon \vec{k}_2, ω_2



$$\vec{q} = \vec{k}_1 - \vec{k}_2 \quad \omega = \omega_1 - \omega_2 \quad |\omega| \ll \Delta$$

$$\frac{DE_1}{\hbar} = \Omega_1 \quad \frac{DE_2}{\hbar} = \Omega_2$$

D : Moment dipolaire électrique e-g

Ω_1, Ω_2 : Fréquences de Rabi

Amplitude du processus Raman

$$\begin{aligned} & \frac{DE_1}{2} \exp i(\vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \omega_1 t) \frac{1}{\hbar \Delta} \frac{DE_2}{2} \exp -i(\vec{k}_2 \cdot \vec{r} - \omega_2 t) \\ &= \frac{\hbar \omega_R}{2} \exp i(\vec{q} \cdot \vec{r} - \omega t) \end{aligned}$$

ω_R : Fréquence de Rabi effective du processus Raman stimulé.

$$\frac{\hbar \omega_R}{2} = \frac{DE_1}{2} \frac{1}{\hbar \Delta} \frac{DE_2}{2} = \frac{\hbar^2 \Omega_1 \Omega_2}{4 \hbar \Delta}$$

$$\omega_R = \Omega_1 \Omega_2 / 2 \Delta$$

Hamiltonien d'interaction

$$\begin{aligned} \hat{H}_{\text{int}} &= \frac{\hbar \omega_R}{2} \sum_{i=1}^N \exp i(\vec{q} \cdot \hat{\vec{r}}_i - \omega t) + h.c. \\ &= \frac{\hbar \omega_R}{2} \int d^3 r \exp i(\vec{q} \cdot \vec{r} - \omega t) \sum_{i=1}^N \delta(\vec{r} - \hat{\vec{r}}_i) + h.c. \\ &= \frac{\hbar \omega_R}{2} \int d^3 r \exp i(\vec{q} \cdot \vec{r} - \omega t) \hat{\rho}_I(\vec{r}) + h.c. \end{aligned}$$

Conclusions tirées de ces 2 exemples

Les interactions avec une particule sonde (atome, photon...) sont locales : elles ne dépendent que des positions \vec{r}_i des atomes du condensat.

Toute interaction locale est décrite par un Hamiltonien d'interaction où apparaît la densité spatiale à un corps $\hat{\rho}_I(\vec{r})$, ou sa transformée de Fourier spatiale.

Récapitulation

Exemple 1

$$\hat{H}_{\text{int}} = \int d^3r U(\vec{R} - \vec{r}) \hat{\rho}_I(\vec{r})$$

Exemple 2

$$\hat{H}_{\text{int}} = \frac{\hbar\omega_R}{2} e^{-i\omega t} \int d^3r e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} \hat{\rho}_I(\vec{r}) + h.c.$$

Transformée de Fourier de $\hat{\rho}_I(\vec{r})$

Base d'ondes planes avec des conditions aux limites périodiques dans un cube de côté L .

$$\hat{\rho}_I(\vec{k}) = \hat{\rho}_{\vec{k}} = \int d^3r e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \hat{\rho}_I(\vec{r})$$

$$\hat{\rho}_I(\vec{r}) = \frac{1}{L^3} \sum_{\vec{k}} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} \hat{\rho}_{\vec{k}}$$

De $\hat{\rho}_I(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N \delta(\vec{r} - \hat{\vec{r}}_i)$, on déduit :

$$\hat{\rho}_{\vec{k}} = \sum_{i=1}^N \exp(i\vec{k} \cdot \hat{\vec{r}}_i)$$
$$\hat{\rho}_{\vec{k}}^+ = \sum_{i=1}^N \exp(-i\vec{k} \cdot \hat{\vec{r}}_i) = \hat{\rho}_{-\vec{k}}$$

Pour l'exemple 2, \hat{H}_{int} s'écrit :

$$\hat{H}_{\text{int}} = \frac{\hbar\omega_R}{2} \sum_{i=1}^N \exp i(\vec{q} \cdot \hat{\vec{r}}_i - \omega t) + h.c.$$
$$= \frac{\hbar\omega_R}{2} \left[\hat{\rho}_{\vec{q}} e^{-i\omega t} + \hat{\rho}_{\vec{q}}^+ e^{+i\omega t} \right]$$

Seconde quantification

Base d'états individuels

$$\{|\varphi_\alpha\rangle\} \quad \langle\varphi_\beta|\varphi_\alpha\rangle = \delta_{\beta\alpha}$$

Espace de Fock

Base $\{|n_1, n_2, \dots, n_\alpha, \dots\rangle\}$ définie par les nombre d'occupation $n_1, n_2, \dots, n_\alpha, \dots$ des états $|\varphi_1\rangle, |\varphi_2\rangle, \dots, |\varphi_\alpha\rangle, \dots$

Pour des bosons, $n_\alpha = 0, 1, 2, \dots$

Vide de particules : $|0\rangle = |0_1, 0_2, \dots, 0_\alpha, \dots\rangle$

Opérateurs de création et d'annihilation

\hat{a}_α^+ crée un boson dans l'état $|\varphi_\alpha\rangle$

\hat{a}_α détruit un boson dans l'état $|\varphi_\alpha\rangle$

Relations de commutation

$$[\hat{a}_\alpha, \hat{a}_\beta^+] = \delta_{\alpha\beta}$$

Opérateurs champ

Changement de base

$$\{|\varphi_\alpha\rangle\} \rightarrow \{|\vec{r}\rangle\}$$

$$|\vec{r}\rangle = \sum_{\alpha} |\varphi_\alpha\rangle \langle \varphi_\alpha | \vec{r} \rangle = \sum_{\alpha} \varphi_\alpha^*(\vec{r}) |\varphi_\alpha\rangle$$

Introduction des opérateurs champ

$$\hat{\Psi}^+(\vec{r}) = \sum_{\alpha} \varphi_\alpha^*(\vec{r}) \hat{a}_\alpha^+$$

$$\hat{\Psi}(\vec{r}) = \sum_{\alpha} \varphi_\alpha(\vec{r}) \hat{a}_\alpha$$

$\hat{\Psi}^+(\vec{r})$ agissant sur le vide donne l'état à une particule :

$$\sum_{\alpha} \varphi_\alpha^*(\vec{r}) |1_\alpha\rangle = \sum_{\alpha} \varphi_\alpha^*(\vec{r}) |\varphi_\alpha\rangle = |\vec{r}\rangle$$

$\hat{\Psi}^+(\vec{r})$ crée un boson au point \vec{r}

$\hat{\Psi}(\vec{r})$ détruit un boson au point \vec{r}

De $[\hat{a}_\alpha, \hat{a}_\beta^+] = \delta_{\alpha\beta}$, on déduit :

$$[\hat{\Psi}(\vec{r}), \hat{\Psi}^+(\vec{r}')] = \delta(\vec{r} - \vec{r}')$$

Observables

Observables symétriques à une particule

$$\hat{F} = \sum_{i=1}^N \hat{f}(i)$$

$$\hat{F} = \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \langle \varphi_{\beta} | \hat{f} | \varphi_{\alpha} \rangle \hat{a}_{\beta}^+ \hat{a}_{\alpha}$$

Observables symétriques à deux particules

$$\hat{G} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i} \hat{g}(i, j)$$

$$\hat{G} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \sum_{\gamma} \sum_{\delta} \hat{a}_{\delta}^+ \hat{a}_{\gamma}^+ \hat{a}_{\beta} \hat{a}_{\alpha}$$

$$\langle \varphi_{\delta}(1) \varphi_{\gamma}(2) | \hat{g}(1, 2) | \varphi_{\beta}(2) \varphi_{\alpha}(1) \rangle$$

On pourrait aussi utiliser la base $\{ | \vec{r} \rangle \}$ et les opérateurs champ $\hat{\Psi}$ et $\hat{\Psi}^+$

Expression de $\hat{\rho}_I(\vec{r})$ et $\hat{\rho}_{II}(\vec{r}, \vec{r}')$ en seconde quantification

$$\begin{aligned}\hat{\rho}_I(\vec{r}) &= \sum_{i=1}^N \delta(\vec{r} - \hat{r}_i) \\ &= \hat{\Psi}^+(\vec{r}) \hat{\Psi}(\vec{r})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{\rho}_{II}(\vec{r}, \vec{r}') &= \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i} \delta(\vec{r} - \hat{r}_i) \delta(\vec{r}' - \hat{r}_j) \\ &= \hat{\Psi}^+(\vec{r}) \hat{\Psi}^+(\vec{r}') \hat{\Psi}(\vec{r}') \hat{\Psi}(\vec{r})\end{aligned}$$

Relation entre $\hat{\rho}_I(\vec{r})$ et $\hat{\rho}_{II}(\vec{r}, \vec{r}')$

En utilisant les relations de commutation entre $\hat{\Psi}^+$ et $\hat{\Psi}$, on obtient :

$$\hat{\rho}_{II}(\vec{r}, \vec{r}') = \hat{\rho}_I(\vec{r}) \hat{\rho}_I(\vec{r}') - \delta(\vec{r} - \vec{r}') \hat{\rho}_I(\vec{r})$$

Expression de $\hat{\rho}_{\vec{q}}$

Première quantification

$$\hat{\rho}_{\vec{q}} = \sum_{i=1}^N e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}_i}$$

Deuxième quantification

En utilisant la base $\{|\vec{k}\rangle\}$ des ondes planes $L^{-3/2} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}$, on obtient :

$$\hat{\rho}_{\vec{q}} = \sum_{\vec{k}} \sum_{\vec{k}'} \hat{a}_{\vec{k}'}^+ \hat{a}_{\vec{k}} \langle \vec{k}' | e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}} | \vec{k} \rangle$$

$$\langle \vec{k}' | e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}} | \vec{k} \rangle = \frac{1}{L^3} \underbrace{\int d^3 r e^{i[\vec{k} + \vec{q} - \vec{k}'] \cdot \vec{r}}}_{L^3 \delta_{\vec{k}', \vec{k} + \vec{q}}} = \delta_{\vec{k}', \vec{k} + \vec{q}}$$

$$\hat{\rho}_{\vec{q}} = \sum_{\vec{k}} \hat{a}_{\vec{k} + \vec{q}}^+ \hat{a}_{\vec{k}}$$

Une propriété importante de $\hat{\rho}_{\vec{q}}$

$\hat{\rho}_{\vec{q}}$ est un opérateur de translation globale du système de bosons d'une quantité $\hbar\vec{q}$ dans l'espace des impulsions.

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^N \hat{p}_i$$

$$\hat{\rho}_{\vec{q}} = \sum_{i=1}^N e^{i\vec{q} \cdot \hat{r}_i}$$

$$[\vec{P}, \hat{\rho}_{\vec{q}}] = \hbar\vec{q} \sum_{i=1}^N e^{i\vec{q} \cdot \hat{r}_i} = \hbar\vec{q} \hat{\rho}_{\vec{q}}$$

$$\hat{P} \hat{\rho}_{\vec{q}} = \hat{\rho}_{\vec{q}} \left(\hat{P} + \hbar\vec{q} \right)$$

Agissant sur un état d'impulsion globale \vec{p} du système de bosons, $\hat{\rho}_{\vec{q}}$ crée un nouvel état d'impulsion $\vec{p} + \hbar\vec{q}$.

Facteurs de structure et polarisabilités d'un condensat Propriétés générales

Buts de ce cours

- Introduire un certain nombre de grandeurs physiques caractérisant la réponse linéaire d'un condensat à une excitation.
- Etudier les propriétés générales de ces grandeurs physiques et les relations qui existent entre elles.
- Les résultats obtenus seront appliqués dans les chapitres suivants à des condensats homogènes et inhomogènes.

Plan

1. Taux de diffusion pour la particule sonde (T-17 à T-22)

- Amplitude de diffusion
- Probabilité de diffusion par unité de temps

2. Facteur de structure dynamique (T-23 à T-28)

- Définition
- Interprétation en termes de répartition spectrale
- Interprétation en termes de fonctions de corrélation
- Calcul dans un cas simple

3. Facteur de structure statique (T-29 à T-33)

- Approximation quasi-statique
- Définition. Interprétation en termes d'intensité totale diffusée dans un direction donnée.
- Interprétation en termes de fonctions de corrélation

4. Polarités dynamique et statique (T-34 à T-41)

- Définition de la polarité dynamique.
- Un exemple important
- Polarité statique

5. Moments et règles de somme (T-42 à T-47)

- Définition des moments.
- Expressions équivalentes.
- Règles de somme

Quelques références (T-48)

Amplitude de diffusion

Exemple 1 du cours

$$\hat{H}_{\text{int}} = \int d^3 r U(\hat{R} - \vec{r}) \hat{\rho}_I(\vec{r})$$

Considérons un processus de diffusion au cours duquel :

- la particule sonde passe d'un état initial d'impulsion $\hbar\vec{k}_i$ et d'énergie ε_i à un état final d'impulsion $\hbar\vec{k}_f$ et d'énergie ε_f .
- le système de N bosons passe d'un état initial ψ_i , d'énergie E_i à un état final ψ_f , d'énergie E_f .

L'amplitude de diffusion fait intervenir l'élément de matrice :

$$\langle \vec{k}_f, \psi_f | \hat{H}_{\text{int}} | \vec{k}_i, \psi_i \rangle$$

Exemple 1 (suite)

Transformée de Fourier de U :

$$\mathcal{U}_{\vec{k}} = \int d^3 r e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} U(\vec{r})$$

En utilisant : $\hat{\rho}_I(\vec{r}) = \frac{1}{L^3} \sum_{\vec{q}} e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}} \hat{\rho}_{\vec{q}}$

on peut réécrire \hat{H}_{int} sous la forme :

$$\begin{aligned} \hat{H}_{\text{int}} &= \int d^3 r U(\hat{R} - \vec{r}) \hat{\rho}_I(\vec{r}) \\ &= \sum_{\vec{q}} e^{-i\vec{q}\cdot\hat{R}} \hat{\rho}_{\vec{q}} \frac{1}{L^3} \int d^3 r e^{-i\vec{q}\cdot(\vec{r}-\hat{R})} U(\vec{r}) \\ &= \sum_{\vec{q}} \frac{1}{L^3} \mathcal{U}_{\vec{q}} e^{-i\vec{q}\cdot\hat{R}} \hat{\rho}_{\vec{q}} \end{aligned}$$

Dans l'élément de matrice de \hat{H}_{int} apparaît :

$$\langle \vec{k}_f | e^{-i\vec{q}\cdot\hat{R}} | \vec{k}_i \rangle = \delta_{\vec{q}, \vec{k}_i - \vec{k}_f}$$

Finalemment , pour l'exemple 1, l'élément de matrice de \hat{H}_{int} s'écrit :

$$\langle \vec{k}_f, \psi_f | \hat{H}_{\text{int}} | \vec{k}_i, \psi_i \rangle = \frac{1}{L^3} \mathcal{U}_{\vec{q}} \langle \psi_f | \hat{\rho}_{\vec{q}} | \psi_i \rangle$$

avec $\vec{q} = \vec{k}_i - \vec{k}_f$

Taux de transition (règle d'or de Fermi)

$$w = \frac{2\pi}{\hbar L^6} |\mathcal{U}_{\vec{q}}|^2 \left| \langle \psi_f | \hat{\rho}_{\vec{q}} | \psi_i \rangle \right|^2 \delta(E_f - E_i - \hbar\omega)$$

avec :

$$\vec{q} = \vec{k}_i - \vec{k}_f \quad \hbar\omega = \varepsilon_i - \varepsilon_f$$

Si l'on ne détermine pas l'état final du système de bosons, il faut sommer sur f :

$$w = \frac{2\pi}{\hbar L^6} \sum_f |\mathcal{U}_{\vec{q}}|^2 \left| \langle \psi_f | \hat{\rho}_{\vec{q}} | \psi_i \rangle \right|^2 \delta(E_f - E_i - \hbar\omega)$$

Exemple 2

$$\hat{H}_{\text{int}} = \frac{\hbar\omega_R}{2} \left[\hat{\rho}_{\vec{q}} e^{-i\omega t} + \hat{\rho}_{\vec{q}}^+ e^{+i\omega t} \right]$$

Processus Raman stimulé correspondant à l'absorption d'un photon \vec{k}_1, ω_1 et à l'émission stimulée d'un photon \vec{k}_2, ω_2 , le système de N bosons passant d'un état initial ψ_i , d'énergie E_i à un état final ψ_f , d'énergie E_f .

$$\langle \vec{k}_2, \omega_2; \psi_f | \hat{H}_{\text{int}} | \vec{k}_1, \omega_1; \psi_i \rangle = \frac{\hbar\omega_R e^{-i\omega t}}{2} \langle \psi_f | \hat{\rho}_{\vec{q}} | \psi_i \rangle$$

Taux de transition :

$$w = \frac{2\pi}{\hbar} \times$$

$$\sum_f (\hbar\omega_R / 2)^2 \left| \langle \psi_f | \hat{\rho}_{\vec{q}} | \psi_i \rangle \right|^2 \delta(E_f - E_i - \hbar\omega)$$

avec : $\vec{q} = \vec{k}_1 - \vec{k}_2$, $\hbar\omega = \hbar\omega_1 - \hbar\omega_2$

Recapitulation : structure de l'amplitude de transition.

Produit de deux termes

Le premier terme ($\mathcal{U}_{\vec{q}}$ pour l'exemple 1, $\hbar\omega_R/2$ pour l'exemple 2) ne dépend que du potentiel d'interaction de la particule sonde avec un atome cible.

Il serait le même pour la diffusion de la particule sonde par un seul atome cible et apparaît donc dans la section efficace de diffusion d'un seul atome cible.

Le second terme, $\langle \psi_f | \hat{\rho}_{\vec{q}} | \psi_i \rangle$, dépend des états initial et final du système de N bosons. Il décrit l'effet des interférences entre les diffusions des différents atomes de la cible.

Lien avec l'expérience

On mesure la perte d'impulsion $\hbar\vec{q} = \hbar(\vec{k}_i - \vec{k}_f)$ et la perte d'énergie $\hbar\omega = \varepsilon_i - \varepsilon_f$ de la particule sonde.

On connaît donc \vec{q} et ω .

On connaît par ailleurs la section efficace de diffusion par une seule particule cible.

On connaît donc $\mathcal{U}_{\vec{q}}$ ou $\hbar\omega_R/2$.

La mesure du taux de diffusion par le système de bosons permet donc de déterminer une grandeur physique caractéristique de ce système :

$$\sum_f \left| \langle \psi_f | \hat{\rho}_{\vec{q}} | \psi_i \rangle \right|^2 \delta(E_f - E_i - \hbar\omega)$$

Facteur de structure dynamique $S(\vec{q}, \omega)$

Définition

- Pour un système de Bosons dans l'état initial $|\psi_i\rangle$:

$$S(\vec{q}, \omega) = \sum_f \left| \langle \psi_f | \hat{\rho}_{\vec{q}} | \psi_i \rangle \right|^2 \delta \left(\frac{E_f - E_i}{\hbar} - \omega \right)$$

- Généralisation immédiate à un mélange statistique d'états $|\psi_i\rangle$ avec des poids π_i . Il faut ajouter $\sum_i \pi_i$

Interprétation en termes de spectre

$S(\vec{q}, \omega)$ est un spectre formé d'une série de fonctions delta

- centrées aux fréquences de Bohr $\omega_{fi} = (E_f - E_i) / \hbar$ du système de bosons.

- avec des intensités $\left| \langle \psi_f | \hat{\rho}_{\vec{q}} | \psi_i \rangle \right|^2$

Interprétation en termes de fonctions de corrélation

$$\delta(\omega_{fi} - \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{i(E_f - E_i - \hbar\omega)t/\hbar}$$

$$S(\vec{q}, \omega) = \sum_f \left| \langle \psi_f | \hat{\rho}_{\vec{q}} | \psi_i \rangle \right|^2 \delta(\omega_{fi} - \omega)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{-i\omega t} \times$$

$$\sum_f \underbrace{\langle \psi_i | \hat{\rho}_{\vec{q}}^+ | \psi_f \rangle \langle \psi_f | \hat{\rho}_{\vec{q}} | \psi_i \rangle e^{i(E_f - E_i)t/\hbar}}_{\langle \psi_f | e^{i\hat{H}t/\hbar} \hat{\rho}_{\vec{q}} e^{-i\hat{H}t/\hbar} | \psi_i \rangle}$$

$$S(\vec{q}, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{-i\omega t} \langle \psi_i | \hat{\rho}_{\vec{q}}^+(t=0) \hat{\rho}_{\vec{q}}(t) | \psi_i \rangle$$

Transformée de Fourier temporelle de la valeur moyenne dans ψ_i d'un produit de 2 opérateurs $\hat{\rho}_{\vec{q}}^+(t=0)$ et $\hat{\rho}_{\vec{q}}(t)$ pris, dans le point de vue de Heisenberg, à des instants différents.

Interprétation en termes de fonctions de corrélation (suite)

Comme la transformée de Fourier d'un produit de convolution est un produit de transformées de Fourier, $S(\vec{q}, \omega)$ peut encore être considéré comme la transformée de Fourier spatio-temporelle (en \vec{r} et en t) de :

$$\int d^3 r' \langle \psi_i | \hat{\rho}_I(\vec{r}', t = 0) \hat{\rho}_I(\vec{r}' + \vec{r}, t) | \psi_i \rangle$$

Corrélations entre les fluctuations de densité du système de bosons en 2 points différents séparés de \vec{r} et à 2 instants différents.

Etude par diffusion de particules ou de photons de la dynamique des fluctuations d'un système de N atomes.

Calcul de $S(\vec{q}, \omega)$ dans un cas simple

N bosons sans interactions dans l'état :

$$|\psi_i\rangle = |n_i, \dots, n_\alpha, \dots\rangle$$

$\{|\varphi_\alpha\rangle\}$: base orthonormée d'états à une particule, d'énergies ε_α

$$\hat{\rho}_{\vec{q}} = \sum_{i=1}^N e^{i\vec{q} \cdot \hat{r}_i} = \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \hat{a}_{\beta}^+ \hat{a}_{\alpha} \langle \varphi_{\beta} | e^{i\vec{q} \cdot \hat{r}} | \varphi_{\alpha} \rangle$$

$$\hat{\rho}_{\vec{q}} |\psi_i\rangle = \hat{\rho}_{\vec{q}} |n_1, \dots, n_\alpha, \dots, n_\beta, \dots\rangle =$$

$$\sum_{\alpha} n_{\alpha} \langle \varphi_{\alpha} | e^{i\vec{q} \cdot \hat{r}} | \varphi_{\alpha} \rangle |n_1, \dots, n_{\alpha}, \dots, n_{\beta}, \dots\rangle +$$

$$\sum_{\alpha} \sum_{\beta \neq \alpha} \sqrt{n_{\alpha} (n_{\beta} + 1)} \langle \varphi_{\beta} | e^{i\vec{q} \cdot \hat{r}} | \varphi_{\alpha} \rangle$$

$$|n_1, \dots, n_{\alpha} - 1, \dots, n_{\beta} + 1, \dots\rangle$$

$|\psi_i\rangle$ et $|\psi_f\rangle$ doivent être identiques ou différer par 2 nombres d'occupation.

Expression obtenue pour $S(\vec{q}, \omega)$

Aux 2 types d'états pour ψ_f correspondent 2 types de termes pour $S(\vec{q}, \omega)$

$$S(\vec{q}, \omega) = S_{el}(\vec{q}) \delta(\omega) + S_{inel}(\vec{q}, \omega)$$

$$\begin{aligned} S_{el}(\vec{q}) &= \left| \langle \psi_i | \hat{\rho}_{\vec{q}} | \psi_i \rangle \right|^2 \\ &= \left| \sum_{\alpha} n_{\alpha} \langle \varphi_{\alpha} | e^{i\vec{q} \cdot \hat{r}} | \varphi_{\alpha} \rangle \right|^2 \\ &= \left| \int d^3r \langle \psi_i | \hat{\rho}_I(\vec{r}) | \psi_i \rangle e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}} \right|^2 \end{aligned}$$

$$S_{inel}(\vec{q}, \omega) = \sum_{\alpha} \sum_{\beta \neq \alpha} n_{\alpha} (n_{\beta} + 1) \times$$

$$\left| \langle \varphi_{\beta} | e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}} | \varphi_{\alpha} \rangle \right|^2 \delta \left[\omega - \frac{\epsilon_{\beta} - \epsilon_{\alpha}}{\hbar} \right]$$

Discussion physique

Premier terme : $S_{el}(\vec{q})\delta(\omega)$

Diffusion élastique sans changement d'état du système cible de bosons.

Pas de changement d'énergie de la particule sonde diffusée

$S_{el}(\vec{q})$ est le module carré de la transformée de Fourier de la densité spatiale moyenne dans l'état initial ψ_i .

Deuxième terme : $S_{inel}(\vec{q}, \omega)$

Diffusion inélastique : Un boson passe de l'état φ_α à l'état φ_β , ce qui nécessite un transfert d'énergie $\hbar\omega = \varepsilon_\beta - \varepsilon_\alpha$ de la part de la particule sonde.

$n_\alpha(n_\beta + 1)$; Facteur bosonique

Approximation quasi-statique

L'énergie $\hbar\omega$ perdue par la particule sonde au cours de la diffusion sert à créer des excitations élémentaires dans le système cible.

L'énergie initiale E_{in} de la particule sonde est supposée très grande devant $\hbar\omega$.

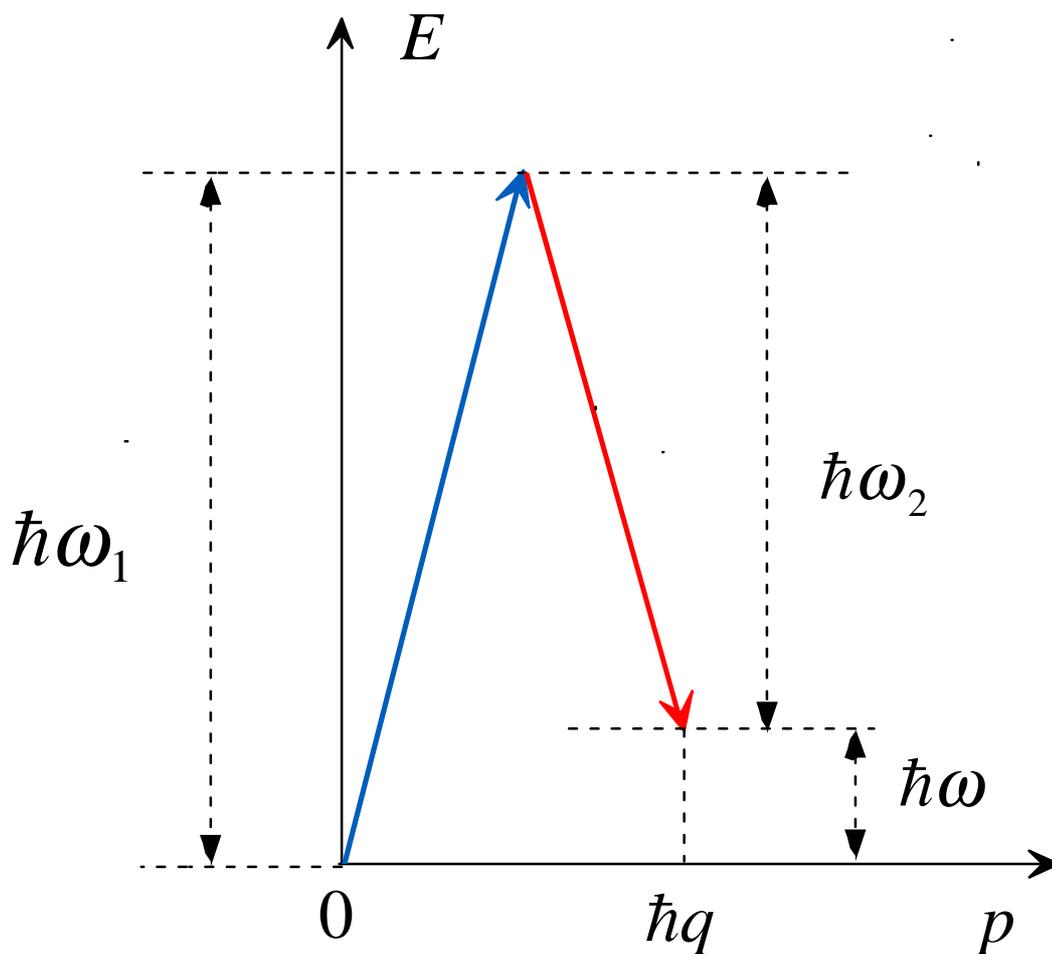
Quand E_{in} diminue de $\hbar\omega$, le module de l'impulsion de la particule sonde varie donc très peu, et on peut négliger la variation du transfert d'impulsion $\hbar\vec{q}$ quand ω varie sur l'étendue du spectre des excitations.

Le transfert d'impulsion $\hbar\vec{q}$ est essentiellement déterminé par l'angle θ entre les impulsions initiale et finale de la particule sonde.

Exemple de la diffusion de Bragg

Absorption de \vec{k}_1, ω_1 et émission stimulée de \vec{k}_2, ω_2

\vec{k}_2 et \vec{k}_1 de directions opposées



$$\omega_1, \omega_2 \gg \omega \Rightarrow \hbar q \approx 2\hbar\omega_1 / c$$

On peut négliger les variations de q quand on fait varier ω

Facteur de structure statique $S(\vec{q})$

Définition

$$S(\vec{q}) = \frac{1}{N} \int d\omega S(\vec{q}, \omega)$$

Interprétation (dans le cadre de l'approximation quasi-statique)

Intensité totale diffusée par atome cible dans la direction de \vec{q}

Expression équivalente pour $S(\vec{q})$

$$S(\vec{q}, \omega) = \sum_f \left| \langle \psi_f | \hat{\rho}_{\vec{q}} | \psi_i \rangle \right|^2 \delta \left[\omega - \frac{E_f - E_i}{\hbar} \right]$$

$$\begin{aligned} S(\vec{q}) &= \frac{1}{N} \sum_f \left| \langle \psi_f | \hat{\rho}_{\vec{q}} | \psi_i \rangle \right|^2 \\ &= \frac{1}{N} \sum_f \langle \psi_i | \hat{\rho}_{\vec{q}}^+ | \psi_f \rangle \langle \psi_f | \hat{\rho}_{\vec{q}} | \psi_i \rangle \\ &= \frac{1}{N} \langle \psi_i | \hat{\rho}_{\vec{q}}^+ \hat{\rho}_{\vec{q}} | \psi_i \rangle \end{aligned}$$

Interprétation en termes de fonctions de corrélation

$\hat{\rho}_{\vec{q}}^+ \hat{\rho}_{\vec{q}}$ est un produit de 2 transformées de Fourier (T.F.).

C'est donc la T.F. d'un produit de convolution.

$$S(\vec{q}) = \frac{1}{N} \langle \psi_i | \hat{\rho}_{\vec{q}}^+ \hat{\rho}_{\vec{q}} | \psi_i \rangle$$

est donc la T.F. spatiale (par rapport à \vec{r} de

$$\frac{1}{N} \int d^3 r' \langle \psi_i | \hat{\rho}_I(\vec{r}') \hat{\rho}_I(\vec{r}' + \vec{r}) | \psi_i \rangle$$

D'après T-14, $\hat{\rho}_I(\vec{r}') \hat{\rho}_I(\vec{r}' + \vec{r}) = \dagger$

$$\hat{\rho}_I(\vec{r}') \delta(\vec{r}) + \hat{\rho}_{II}(\vec{r}', \vec{r}' + \vec{r})$$

$S(\vec{q})$ est donc la T.F. spatiale de

$$\delta(\vec{r}) + \frac{1}{N} \int d^3 r' \langle \psi | \hat{\rho}_{II}(\vec{r}', \vec{r}' + \vec{r}) | \psi \rangle$$

Importance de $S(\vec{q})$

On mesure $S(\vec{q})$ pour diverses orientations de \vec{q} en étudiant les variations correspondantes du nombre total de particules sondes diffusées.

Par T.F. inverse (et après soustraction de 1), on en déduit la quantité

$$\int d^3 r' \langle \psi_i | \hat{\rho}_{II}(\vec{r}', \vec{r}' + \vec{r}) | \psi_i \rangle$$

probabilité de trouver 2 atomes différents du système cible séparés de \vec{r}

Fonction importante relative au système cible caractérisant les corrélations, à un instant donné, entre les positions des divers atomes.

Polarisabilité dynamique

Notations

Systeme S - Hamiltonien \hat{H}_0

$$\hat{H}_0 |\psi_n\rangle = E_n |\psi_n\rangle$$

Etat initial : état fondamental $|\psi_0\rangle$

$$\omega_{n0} = (E_n - E_0)/\hbar$$

Perturbation sinusoïdale

$$\hat{H}_{int}(t) = \frac{\lambda}{2} [\hat{A} e^{-i\omega t} + \hat{A}^+ e^{i\omega t}]$$

λ : constante réelle

Perturbation branchée adiabatiquement entre $t = -\infty$ et $t = 0$ pour éviter les régimes transitoires $e^{\pm i\omega t} \rightarrow e^{\pm i\omega t} e^{\eta t}$ avec $\eta \rightarrow 0_+$

Valeur moyenne $\langle \hat{B} \rangle$ de \hat{B} dans l'état perturbé à l'ordre 1 en λ :

$$\langle \hat{B}(t) \rangle = \frac{\lambda}{2} [\chi_{BA}(\omega) e^{-i\omega t} + \chi_{BA^+}(-\omega) e^{i\omega t}]$$

χ : Polarisabilité dynamique

Equation de Schrödinger

$$i \hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = [\hat{H}_0 + \hat{H}_{int}(t)] |\psi(t)\rangle$$

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n c_n(t) e^{-iE_n t/\hbar} |\psi_n\rangle$$

Ordre 0 en λ

$$c_0(t) = 1 \quad c_n(t) = 0 \quad \text{si} \quad n \neq 0$$

Ordre 1 en λ (on suppose $\langle \psi_0 | \hat{A} | \psi_0 \rangle = 0$)

$$\dot{c}_n(t) = -\frac{i\lambda}{2\hbar} \left[e^{i(\omega_{n0} - \omega - i\eta)t} A_{n0} + e^{i(\omega_{n0} + \omega - i\eta)t} A_{n0}^+ \right]$$

$$A_{n0} = \langle \psi_n | \hat{A} | \psi_0 \rangle$$

$$c_n(t) = \frac{\lambda}{2\hbar} \left[\frac{e^{i(\omega_{n0} - \omega)t}}{\omega - \omega_{n0} + i\eta} A_{n0} - \frac{e^{i(\omega_{n0} + \omega)t}}{\omega + \omega_{n0} - i\eta} A_{n0}^+ \right]$$

En reportant dans $|\psi(t)\rangle$, on obtient

$$e^{iE_0 t/\hbar} |\psi(t)\rangle = |\psi_0\rangle + \sum_{n \neq 0} (\lambda / 2\hbar) \times$$

$$\left[\frac{e^{-i\omega t}}{\omega - \omega_{n0} + i\eta} A_{n0} - \frac{e^{i\omega t}}{\omega + \omega_{n0} - i\eta} A_{n0}^+ \right] |\psi_n\rangle$$

Calcul de $\langle \hat{B}(t) \rangle$ (à l'ordre 1 en λ)

En reportant l'expression ainsi obtenue de $|\psi(t)\rangle$ dans $\langle \hat{B}(t) \rangle = \langle \psi(t) | \hat{B} | \psi(t) \rangle$,

on obtient (on suppose $B_{00}=0$)

$$\langle \hat{B}(t) \rangle = \frac{\lambda}{2} \left[\chi_{BA}(\omega) e^{-i\omega t} + \chi_{BA^+}(-\omega) e^{i\omega t} \right]$$

$$\chi_{BA}(\omega) = \frac{1}{\hbar} \sum_{n \neq 0} \left[\frac{B_{0n} A_{n0}}{\omega - \omega_{n0} + i\eta} - \frac{A_{0n} B_{n0}}{\omega + \omega_{n0} + i\eta} \right]$$

$$\chi_{BA^+}(-\omega) = \frac{1}{\hbar} \sum_{n \neq 0} \left[\frac{A_{0n}^+ B_{n0}}{\omega - \omega_{n0} - i\eta} - \frac{B_{0n} A_{n0}^+}{\omega + \omega_{n0} - i\eta} \right]$$

Remarque

Les états excités $|\psi_n\rangle$ de \hat{H}_0 forment en général un spectre continu. La limite $\eta \rightarrow 0_+$ ne pose pas alors de problème. Si \hat{H}_0 a un vrai état discret $|\psi_d\rangle$, le branchement adiabatique est impossible pour $\omega = \omega_{d0}$

Un exemple important

Perturbation d'un condensat

par un potentiel $U_0 \cos(\vec{q} \cdot \vec{r} - \omega t)$ de vecteur d'onde \vec{q} et de fréquence ω

$$\begin{aligned}\hat{H}_{int} &= \sum_{i=1}^N U_0 \cos(\vec{q} \cdot \hat{\vec{r}}_i - \omega t) \\ &= \frac{U_0}{2} \left(\sum_i e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}_i} \right) e^{-i\omega t} + h.c. \\ &= \frac{U_0}{2} \left[\hat{\rho}_{\vec{q}} e^{-i\omega t} + \hat{\rho}_{\vec{q}}^+ e^{i\omega t} \right]\end{aligned}$$

On a ici $\lambda = U_0$ $\hat{A} = \hat{\rho}_{\vec{q}}$

Cas de la diffusion de Bragg.

Réponse cherchée

On cherche l'onde de densité moyenne de même vecteur d'onde \vec{q} et de même fréquence ω induite dans le condensat par une telle excitation.

$\langle B \rangle$ est donc la composante de $\langle \rho_I(\vec{r}) \rangle$
variant en $\exp[\pm i(\vec{q} \cdot \vec{r} - \omega t)]$

Composante (\vec{q}, ω) de $\langle \hat{\rho}_I(\vec{r}) \rangle$

$$\hat{\rho}_I(\vec{r}) = L^{-3} \sum_{\vec{k}} \hat{\rho}_{\vec{k}} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} \quad (\text{voir T-10})$$

La composante \vec{q} de $\langle \hat{\rho}_I(\vec{r}) \rangle$ provient de

$$L^{-3} \langle \hat{\rho}_{-\vec{q}} \rangle e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}} = L^{-3} \langle \hat{\rho}_{\vec{q}}^+ \rangle e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}}$$

puisque $\hat{\rho}_{-\vec{q}} = \hat{\rho}_{\vec{q}}^+$. On a donc : $\hat{B} = L^{-3} \hat{\rho}_{\vec{q}}^+$

Récapitulation : Pour calculer la composante (\vec{q}, ω) de la réponse en densité à une excitation $U_0 \cos(\vec{q} \cdot \vec{r} - \omega t)$, il faut prendre :

$$\lambda = U_0 \quad \hat{A} = \hat{\rho}_{\vec{q}} \quad \hat{B} = L^{-3} \hat{\rho}_{\vec{q}}^+$$

La susceptibilité concernée est $\chi_{\hat{\rho}_{\vec{q}}^+ \hat{\rho}_{\vec{q}}}$

Conclusion L'excitation $U_0 \cos(\vec{q} \cdot \vec{r} - \omega t)$ produit une onde de densité moyenne

$$\frac{U_0}{2L^3} \chi_{\hat{\rho}_{\vec{q}}^+ \hat{\rho}_{\vec{q}}}(\omega) e^{i(\vec{q} \cdot \vec{r} - \omega t)} + c.c.$$

Notation plus simple pour $\chi_{\hat{\rho}_{\vec{q}}^+ \hat{\rho}_{\vec{q}}}(\omega)$

$$\chi_{\hat{\rho}_{\vec{q}}^+ \hat{\rho}_{\vec{q}}}(\omega) = \chi(\vec{q}, \omega)$$

Fonction de réponse "densité-densité"

Expression de $\chi(\vec{q}, \omega)$

$$\begin{aligned} \chi(\vec{q}, \omega) &= \frac{1}{\hbar} \sum_{n \neq 0} \left[\frac{(\hat{\rho}_{\vec{q}}^+)_{0n} (\hat{\rho}_{\vec{q}})_{n0}}{\omega - \omega_{n0} + i\eta} - \frac{(\hat{\rho}_{\vec{q}})_{0n} (\hat{\rho}_{\vec{q}}^+)_{n0}}{\omega + \omega_{n0} + i\eta} \right] \\ &= \sum_{n \neq 0} \left[\frac{|\langle \psi_n | \hat{\rho}_{\vec{q}} | \psi_0 \rangle|^2}{\hbar\omega - E_n + E_0 + i\eta} - \frac{|\langle \psi_n | \hat{\rho}_{\vec{q}}^+ | \psi_0 \rangle|^2}{\hbar\omega + E_n - E_0 + i\eta} \right] \end{aligned}$$

Cas d'un système invariant

- par réflexion d'espace
- ou par renversement du temps

On a alors

$$|\langle \psi_n | \hat{\rho}_{\vec{q}} | \psi_0 \rangle|^2 = |\langle \psi_n | \hat{\rho}_{\vec{q}}^+ | \psi_0 \rangle|^2$$

et par suite

$$\chi(\vec{q}, \omega) = \sum_{n \neq 0} |\langle \psi_n | \hat{\rho}_{\vec{q}} | \psi_0 \rangle|^2 \frac{2(E_n - E_0)}{\hbar^2 (\omega + i\eta)^2 - (E_n - E_0)^2}$$

Limite $\omega \rightarrow 0$

Excitation statique $U_0 \cos \vec{q} \cdot \vec{r}$

$\chi(\vec{q}, 0)$ décrit alors la réponse statique en densité.

Apparition d'une onde de densité moyenne de vecteur d'onde \vec{q}

$$\frac{U_0}{2L^3} \chi(\vec{q}, 0) e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}} + cc. = \frac{U_0}{L^3} \chi(\vec{q}, 0) \cos(\vec{q} \cdot \vec{r})$$

$\chi(\vec{q}, 0)$: Susceptibilité statique

$$\chi(\vec{q}, 0) = - \sum_{n \neq 0} \frac{|\langle \psi_n | \hat{\rho}_{\vec{q}} | \psi_0 \rangle|^2 + |\langle \psi_n | \hat{\rho}_{\vec{q}}^+ | \psi_0 \rangle|^2}{E_n - E_0}$$

Pour un système invariant par réflexion d'espace ou de temps

$$\chi(\vec{q}, 0) = -2 \sum_{n \neq 0} \frac{|\langle \psi_n | \hat{\rho}_{\vec{q}} | \psi_0 \rangle|^2}{E_n - E_0}$$

Remarque

En toute rigueur, la réponse statique en $\cos(\vec{q} \cdot \vec{r})$ fait intervenir aussi la limite $\omega \rightarrow 0$ de la réponse $(\vec{q}, -\omega)$ en $\cos(\vec{q} \cdot \vec{r} + \omega t)$, proportionnelle à $\chi_{\hat{\rho}_{\vec{q}}^+ \hat{\rho}_{\vec{q}}^+}$

Mais on montrera plus loin que, pour un condensat homogène (ou d'extension spatiale $R \gg q^{-1}$), on a

$$\chi_{\hat{\rho}_{\vec{q}}^+ \hat{\rho}_{\vec{q}}^+} = 0$$

de sorte qu'il suffit de considérer $\chi_{\hat{\rho}_{\vec{q}}^+ \hat{\rho}_{\vec{q}}^-}$ comme nous le faisons ici

Moments de $S(\vec{q}, \omega)$

Définition du moment d'ordre k

$$m_k(\vec{q}) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\vec{q}, \omega) \omega^k d\omega$$

Expression de $m_k(\vec{q})$

$$S(\vec{q}, \omega) = \sum_n \left| \langle \psi_n | \hat{\rho}_{\vec{q}} | \psi_0 \rangle \right|^2 \delta \left(\omega - \frac{E_n - E_0}{\hbar} \right)$$

$$m_k(\vec{q}) = \sum_n \left| \langle \psi_n | \hat{\rho}_{\vec{q}} | \psi_0 \rangle \right|^2 \times$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta \left(\omega - \frac{E_n - E_0}{\hbar} \right) \omega^k d\omega$$

$$m_k(\vec{q}) = \sum_n \left| \langle \psi_n | \hat{\rho}_{\vec{q}} | \psi_0 \rangle \right|^2 \left(\frac{E_n - E_0}{\hbar} \right)^k$$

Comme $S(\vec{q}, \omega)$ est une densité spectrale

$$\langle \omega^k \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} S(\vec{q}, \omega) \omega^k d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} S(\vec{q}, \omega) d\omega} = \frac{m_k}{m_0}$$

Expression équivalente pour $m_0(\vec{q})$

$$m_0(\vec{q}) = \sum_n \left| \langle \psi_n | \hat{\rho}_{\vec{q}} | \psi_0 \rangle \right|^2 = \langle \psi_0 | \hat{\rho}_{\vec{q}}^+ \hat{\rho}_{\vec{q}} | \psi_0 \rangle$$

$$m_0(\vec{q}) = N S(\vec{q})$$

Expression équivalente pour $m_1(\vec{q})$

(Système invariant par P ou T)

$$m_1(\vec{q}) = \frac{1}{2\hbar} \langle \psi_0 | \left[\hat{\rho}_{\vec{q}}^+, [\hat{H}_0, \hat{\rho}_{\vec{q}}] \right] | \psi_0 \rangle$$

Démonstration

$$\begin{aligned} \left[\hat{\rho}_{\vec{q}}^+, [\hat{H}_0, \hat{\rho}_{\vec{q}}] \right] &= \hat{\rho}_{\vec{q}}^+ \hat{H}_0 \hat{\rho}_{\vec{q}} + \hat{\rho}_{\vec{q}} \hat{H}_0 \hat{\rho}_{\vec{q}}^+ \\ &\quad - \hat{\rho}_{\vec{q}}^+ \hat{\rho}_{\vec{q}} \hat{H}_0 - \hat{H}_0 \hat{\rho}_{\vec{q}} \hat{\rho}_{\vec{q}}^+ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \psi_0 | \hat{\rho}_{\vec{q}}^+ \hat{H}_0 \hat{\rho}_{\vec{q}} | \psi_0 \rangle &= \sum_n E_n \left| \langle \psi_n | \hat{\rho}_{\vec{q}} | \psi_0 \rangle \right|^2 \\ &= \langle \psi_0 | \hat{\rho}_{\vec{q}} \hat{H}_0 \hat{\rho}_{\vec{q}}^+ | \psi_0 \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \psi_0 | \hat{\rho}_{\vec{q}}^+ \hat{\rho}_{\vec{q}} \hat{H}_0 | \psi_0 \rangle &= E_0 \sum_n \left| \langle \psi_n | \hat{\rho}_{\vec{q}} | \psi_0 \rangle \right|^2 \\ &= \langle \psi_0 | \hat{H}_0 \hat{\rho}_{\vec{q}} \hat{\rho}_{\vec{q}}^+ | \psi_0 \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \psi_0 | [, [,]] | \psi_0 \rangle &= 2 \sum_n (E_n - E_0) \left| \langle \psi_n | \hat{\rho}_{\vec{q}} | \psi_0 \rangle \right|^2 \\ &= 2\hbar m_1(\vec{q}) \quad \text{CQFD} \end{aligned}$$

Généralisation

On démontrerait de même

$$\hbar^2 m_2(\vec{q}) = \langle \psi_0 | \left[\hat{\rho}_{\vec{q}}^+, \hat{H}_0 \right] \left[\hat{H}_0, \hat{\rho}_{\vec{q}} \right] | \psi_0 \rangle$$

$$\hbar^3 m_3(\vec{q}) = \frac{1}{2} \left\langle \left[\left[\hat{\rho}_{\vec{q}}^+, \hat{H}_0 \right], \left[\hat{H}_0, \left[\hat{H}_0, \hat{\rho}_{\vec{q}} \right] \right] \right] \right\rangle$$

Moment d'ordre -1 : $m_{-1}(\vec{q})$

La méthode précédente ne s'applique pas pour

$$m_{-1}(\vec{q}) = \hbar \sum_{n \neq 0} \frac{|\langle \psi_n | \hat{\rho}_{\vec{q}} | \psi_0 \rangle|^2}{E_n - E_0}$$

En comparant avec (T-39) on voit alors que

$$m_{-1}(\vec{q}) = -\frac{\hbar}{2} \chi(\vec{q}, 0)$$

Le moment d'ordre -1 est relié à la susceptibilité statique.

Comment aller plus loin ?

$\hat{\rho}_{\vec{q}} = \sum_{i=1}^N e^{i\vec{q}\cdot\hat{r}_i}$ ne dépend que des opérateurs de positions.

Si, dans \hat{H}_0 , le seul terme dépendant des opérateurs impulsions \hat{p}_i est l'énergie

cinétique $\hat{K} = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i^2 / 2m$, on peut

remplacer \hat{H}_0 par \hat{K} dans tous les commutateurs. Il faut alors calculer les commutateurs $[\hat{K}, \hat{\rho}]$

Exemple : calcul de $m_1(\vec{q})$

$$[A^2, B] = A[A, B] + [A, B]A$$

$$[\hat{p}_i^2, e^{i\vec{q}\cdot\hat{r}_i}] = \hat{p}_i \cdot [\hat{p}_i, e^{i\vec{q}\cdot\hat{r}_i}] + [\hat{p}_i, e^{i\vec{q}\cdot\hat{r}_i}] \cdot \hat{p}_i$$

$$[\hat{p}_i, F(\hat{r}_i)] = -i\hbar \vec{\nabla} F(\hat{r}_i)$$

$$[\hat{p}_i^2, e^{i\vec{q}\cdot\hat{r}_i}] = \hbar \vec{q} \cdot [\hat{p}_i e^{i\vec{q}\cdot\hat{r}_i} + e^{i\vec{q}\cdot\hat{r}_i} \hat{p}_i]$$

On en déduit

$$\left[e^{-i\vec{q}\cdot\hat{r}_i}, \left[\hat{p}_i^2, e^{i\vec{q}\cdot\hat{r}_i} \right] \right] = \\ \hbar \vec{q} \cdot (\hbar \vec{q} + \hbar \vec{q}) = 2\hbar^2 q^2$$

et par suite

$$\left[\hat{\rho}_{\vec{q}}^+, \left[\hat{H}_0, \hat{\rho}_{\vec{q}} \right] \right] = \sum_{i=1}^N \left[e^{-i\vec{q}\cdot\hat{r}_i}, \left[\frac{\hat{p}_i^2}{2m}, e^{i\vec{q}\cdot\hat{r}_i} \right] \right] \\ = N \frac{\hbar^2 q^2}{m}$$

Compte tenu de (T-43), il vient

$$m_1(\vec{q}) = N \frac{\hbar q^2}{2m}$$

Relation exacte moyennant les hypothèses

- Invariance de \hat{H}_0 / P ou T
- Pas de termes dépendant des \vec{p}_i autres que l'énergie cinétique dans \hat{H}_0

Règle de somme analogue à celle de la physique atomique

Intérêt de telles règles de somme

1–Relations exactes, indépendantes de la connaissance exacte du spectre de \hat{H}_0

Permettent de tester des modèles approchés.

2–Permettent d'évaluer des caractéristiques du spectre $S(\vec{q}, \omega)$

Centre $\langle \omega \rangle$

$$\langle \omega \rangle = \frac{m_1}{m_0}$$

Largeur $\Delta\omega$

$$\begin{aligned} (\Delta\omega)^2 &= \left\langle (\omega - \langle \omega \rangle)^2 \right\rangle = \langle \omega^2 \rangle - \langle \omega \rangle^2 \\ &= \frac{m_2}{m_0} - \left(\frac{m_1}{m_0} \right)^2 \end{aligned}$$

Quelques références générales

1. L. Van Hove, Phys. Rev. **95**, 249 (1954)
2. P. Nozières, D. Pines, The theory of quantum liquids, Volumes I and II, Advanced Book Classics, Addison Wesley, 1990.
3. C. Cohen-Tannoudji, Compléments de Mécanique Quantique, Cours de 2ème année de 3ème cycle, 1966, p.167, Notes de cours rédigées par S. Haroche, disponibles sur le WEB à l'adresse : www.phys.ens.fr (cliquer sur séminaires et cours, puis sur cours donnés par des membres du département).

Facteurs de structure et polarisabilités d'un condensat homogène. Superfluidité

Buts de ce cours

- Illustrer les résultats généraux du chapitre précédent en les explicitant pour un condensat homogène contenu dans une boîte de côté L .
- Calculer les diverses grandeurs physiques caractérisant la réponse d'un tel système à une excitation : polarisabilités statique et dynamique ; facteurs de structure. La polarisabilité statique sera calculée à partir de l'équation de Gross-Pitaevskii. Les excitations élémentaires intervenant dans les propriétés dynamiques seront déterminées dans le cadre de la théorie de Bogolubov dont les résultats essentiels sont brièvement rappelés.
- Vérifier que les grandeurs physiques ainsi calculées satisfont les règles de somme établies dans le chapitre précédent.
- Etudier la diffusion d'un atome sonde par le condensat, et en particulier la section efficace totale de diffusion. Montrer que cette section efficace s'annule quand la vitesse de l'atome sonde est inférieure à une certaine valeur critique et mettre ainsi en évidence le phénomène de superfluidité.

Plan

1. Propriétés statiques (T-49 à T-53)

- Equation de Gross-Pitaevskii.
- Polarisation statique

2. Brefs rappels sur la théorie de Bogolubov (T-54 à T-63)

- Principe du calcul approché des excitations élémentaires.
- Hamiltonien approché.
- Etude des excitations élémentaires
- Structure de l'état fondamental.

3. Facteurs de structure (T-64 à T-74)

- Calcul du facteur de structure dynamique dans le cadre de la théorie de Bogolubov.
- Calcul du facteur de structure statique. Etude des diverses limites. Discussion physique.
- Polarisation dynamique
- Règles de somme

4. Diffusion d'un atome sonde par le condensat (T-75 à T-89)

- Calcul de la section efficace totale de diffusion.
- Etude des variations de cette section efficace avec la vitesse de l'atome sonde.
- Discussion physique . Phénomène de superfluidité.

Quelques références (T-90)

Condensats homogènes

- Pas de potentiel de piégeage
- Densité spatiale indépendante de \vec{r}
- Conditions aux limites périodiques dans un cube de côté L

Hamiltonien \hat{H}

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^N \frac{\hat{p}_i^2}{2m} + \frac{1}{2} \sum_i \sum_{j \neq i} V(\hat{r}_i - \hat{r}_j)$$

$$V(\hat{r}_i - \hat{r}_j) = g \delta(\hat{r}_i - \hat{r}_j) \quad \text{Pseudo-potentiel}$$

$$g = \frac{4\pi\hbar^2}{m} a \quad a : \text{Longueur de diffusion}$$

Etat fondamental de \hat{H}

Méthode variationnelle.

Quel est le meilleur état produit

$$|\psi_0\rangle = |\varphi(1)\rangle \dots |\varphi(i)\rangle \dots |\varphi(N)\rangle$$

où tous les atomes sont dans le même état φ ?

Equation de Gross-Pitaevskii

La recherche du minimum de

$$E(\varphi) = \frac{\langle \psi_0 | \hat{H} | \psi_0 \rangle}{\langle \psi_0 | \psi_0 \rangle}$$

conduit à l'équation suivante pour φ

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \varphi(\vec{r}) + (N-1)g |\varphi(\vec{r})|^2 \varphi(\vec{r}) = \mu \varphi(\vec{r})$$

Le second terme décrit l'interaction de chaque atome avec le champ moyen créé par les $N-1$ autres.

Solution

$$\varphi(\vec{r}) = 1/L^{3/2}$$

Densité uniforme $\rho_0 = N/L^3$

$$\mu = g \frac{N-1}{L^3} \simeq g \frac{N}{L^3} = g \rho_0$$

μ : Potentiel chimique

Susceptibilité statique $\chi(q)$

(à la limite $q \rightarrow 0$)

Exemple simple de calcul ne nécessitant pas de connaître les états excités de \hat{H} .

Le système est soumis à une perturbation extérieure faible $U_0 \cos q x$ qui donne naissance à une modulation spatiale de densité, linéaire en U_0 . D'après la définition de $\chi(q)$ (voir T- 40).

$$\rho_0 \rightarrow \rho_0 + L^{-3} U_0 \chi(q) \cos q x$$

Nous voulons ici calculer $\lim_{q \rightarrow 0} \chi(q)$ pour utiliser ensuite un tel résultat dans la règle de somme

$$m_{-1}(q) = -\frac{\hbar}{2} \chi(q)$$

(voir T- 44)

Principe du calcul

Sous l'effet de la force appliquée $-\vec{\nabla} U_0 \cos q x$, les atomes s'accroissent à certains endroits et la densité moyenne dépend de x .

Au sein du fluide, règne une pression

$$P(x) = \frac{1}{2} g \rho(x)^2 \text{ [en plus de la "pression}$$

quantique" liée à l'énergie de confinement et négligeable quand $q \rightarrow 0$, plus

précisément quand $\hbar^2 q^2 / 2 m \ll g \rho_0$]. Voir cours 98-99 pages IX-10, IX-11.

Un équilibre statique sera atteint quand la force moyenne par particule liée au gradient de $P(x)$

$$-\frac{1}{\rho(x)} \vec{\nabla} P(x) = -g \vec{\nabla} \rho(x)$$

compense la force extérieure

$$-\vec{\nabla} U_0 \cos q x$$

Autre méthode plus directe

Utilisation de l'équation de $G - P$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \varphi(x) + U_0 \cos qx \varphi(x) + Ng |\varphi(x)|^2 \varphi(x) = \mu \varphi(x)$$

Le premier terme peut être négligé à la limite $q \rightarrow 0$ (Thomas-Fermi)

L'équation de $G - P$ devient

$$U_0 \cos qx + Ng |\varphi(x)|^2 = \mu$$

ce qui redonne bien, compte tenu de

$N |\varphi(x)|^2 = \rho(x)$ et $\vec{\nabla} \mu = 0$, la condition d'équilibre statique

$$-\vec{\nabla} U_0 \cos qx - g \vec{\nabla} \rho(x) = 0$$

On obtient alors, en posant

$$\rho(x) = \rho_0 + L^{-3} U_0 \chi(q) \cos qx$$

$$\lim_{q \rightarrow 0} \chi(q) = -\frac{L^3}{g} = \frac{-N}{g \rho_0} = \frac{-N}{\mu}$$

Propriétés dynamiques

La méthode variationnelle précédente ne donne que l'état fondamental du condensat et ses déformations sous l'effet d'une perturbation statique de grande longueur d'onde.

Pour calculer les facteurs de structure et les polarisabilités, il faut connaître les états excités de \hat{H} et leurs énergies.

Nous allons effectuer un tel calcul en utilisant la théorie de Bogolubov.

Théorie de Bogolubov (ref.4)

Diagonalisation approchée de \hat{H} à la limite

$T \ll$ Température critique T_c

$\rho_0 a^3 \ll 1$: Milieu dilué

Pour un condensat homogène, cette approche donne des résultats analytiques.

\hat{H} en seconde quantification

Base $\left\{ \left| \vec{k}_i \right\rangle \right\}$ des ondes planes $L^{-3/2} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$

$$\hat{\Psi}(\vec{r}) = \sum_{\vec{k}} \frac{1}{L^{3/2}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \hat{a}_{\vec{k}} \quad \hat{\Psi}^+(\vec{r}) = \sum_{\vec{k}} \frac{1}{L^{3/2}} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \hat{a}_{\vec{k}}^+$$

$$\hat{H} = \sum_{\vec{k}} \varepsilon_k \hat{a}_{\vec{k}}^+ \hat{a}_{\vec{k}} + \hat{V}_{\text{int}} \quad \varepsilon_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \hbar \omega_k^0$$

$$\hat{V}_{\text{int}} = \frac{1}{2} \int d^3 r \int d^3 r' \hat{\Psi}^+(\vec{r}) \hat{\Psi}^+(\vec{r}') V(\vec{r} - \vec{r}') \hat{\Psi}(\vec{r}') \hat{\Psi}(\vec{r})$$

$$= \frac{g}{2L^3} \sum_{\vec{k}_1} \sum_{\vec{k}_2} \sum_{\vec{k}} \hat{a}_{\vec{k}_1}^+ \hat{a}_{\vec{k}_2}^+ \hat{a}_{\vec{k}_2+\vec{k}} \hat{a}_{\vec{k}_1-\vec{k}}$$

$$\hat{\rho}_{\vec{q}} = \sum_{\vec{k}} \hat{a}_{\vec{k}+\vec{q}}^+ \hat{a}_{\vec{k}} \quad (\text{voir T-15})$$

Transformation de cet Hamiltonien utilisant le fait que

$$\langle \hat{a}_0^+ \hat{a}_0 \rangle \gg \sum_{\vec{k} \neq \vec{0}} \langle \hat{a}_{\vec{k}}^+ \hat{a}_{\vec{k}} \rangle$$

Hamiltonien approché \hat{H}_{eff}

-On néglige tous les termes de \hat{H} qui contiennent moins de 2 opérateurs \hat{a}_0 ou \hat{a}_0^+

-On remplace \hat{a}_0 et \hat{a}_0^+ par \sqrt{N}

Traitement spécial pour le terme

$$\begin{aligned}\hat{I}_0 &= \frac{g}{2L^3} \hat{a}_0^+ \hat{a}_0^+ \hat{a}_0 \hat{a}_0 \\ &= \frac{g}{2L^3} \hat{a}_0^+ (\hat{a}_0 \hat{a}_0^+ - 1) \hat{a}_0 = \frac{g}{2L^3} \left[(\hat{a}_0^+ \hat{a}_0)^2 - \hat{a}_0^+ \hat{a}_0 \right]\end{aligned}$$

On remplace $\hat{a}_0^+ \hat{a}_0$ par $N - \sum_{\vec{k} \neq \vec{0}} \hat{a}_{\vec{k}}^+ \hat{a}_{\vec{k}}$

$$I_0 = \frac{g}{2L^3} \left[N(N-1) - 2N \sum_{\vec{k} \neq \vec{0}} \hat{a}_{\vec{k}}^+ \hat{a}_{\vec{k}} \right]$$

On obtient ainsi pour \hat{H}_{eff}

$$\begin{aligned}\hat{H}_{eff} &= \frac{1}{2} g \rho_0 N + \sum_{\vec{k} \neq \vec{0}} \varepsilon_k \hat{a}_{\vec{k}}^+ \hat{a}_{\vec{k}} \\ &+ \frac{1}{2} g \rho_0 \sum_{\vec{k} \neq \vec{0}} \left[\hat{a}_{\vec{k}}^+ \hat{a}_{\vec{k}} + \hat{a}_{-\vec{k}}^+ \hat{a}_{-\vec{k}} + \hat{a}_{\vec{k}}^+ \hat{a}_{-\vec{k}}^+ + \hat{a}_{\vec{k}} \hat{a}_{-\vec{k}} \right]\end{aligned}$$

Structure de \hat{H}_{eff}

Fonction quadratique de $\hat{a}_{\vec{k}}$ et $\hat{a}_{\vec{k}}^+$ qui peut être diagonalisée par introduction de modes normaux de vibration

Equation de Heisenberg pour $\hat{a}_{\vec{k}}$

$$i\hbar\dot{\hat{a}}_{\vec{k}} = \left[\hat{a}_{\vec{k}}, \hat{H}_{eff} \right] = \partial\hat{H}_{eff} / \partial\hat{a}_{\vec{k}}^+$$

$$i\hbar\dot{\hat{a}}_{\vec{k}} = (\varepsilon_k + g\rho_0)\hat{a}_{\vec{k}} + g\rho_0\hat{a}_{-\vec{k}}^+$$

L'évolution de $\hat{a}_{\vec{k}}$ est couplée à celle de $\hat{a}_{-\vec{k}}^+$.
On calcule donc

$$i\hbar\dot{\hat{a}}_{-\vec{k}}^+ = \left[\hat{a}_{-\vec{k}}^+, \hat{H}_{eff} \right] = -\partial\hat{H}_{eff} / \partial\hat{a}_{-\vec{k}}$$

$$i\hbar\dot{\hat{a}}_{-\vec{k}}^+ = -(\varepsilon_k + g\rho_0)\hat{a}_{-\vec{k}}^+ - g\rho_0\hat{a}_{\vec{k}}$$

Systeme fermé de 2 équations linéaires couplées pour $\hat{a}_{\vec{k}}$ et $\hat{a}_{-\vec{k}}^+$ dont on peut chercher les valeurs propres et les vecteurs propres.

Modes normaux

Fréquences propres

Valeurs propres de la matrice

$$\frac{1}{\hbar} \begin{pmatrix} \varepsilon_k + g\rho_0 & g\rho_0 \\ -g\rho_0 & -(\varepsilon_k + g\rho_0) \end{pmatrix}$$

On obtient $\pm \hbar\omega_k^B$ avec

$$\hbar\omega_k^B = \sqrt{\varepsilon_k(\varepsilon_k + 2g\rho_0)} = \sqrt{\hbar\omega_k^0(\hbar\omega_k^0 + 2\mu)}$$

Vecteurs propres

$$\hat{b}_{\vec{k}} = u_k \hat{a}_{\vec{k}} + v_k \hat{a}_{-\vec{k}}^+$$

$$\hat{b}_{-\vec{k}}^+ = v_k \hat{a}_{\vec{k}} + u_k \hat{a}_{-\vec{k}}^+$$

où u_k et v_k sont réels, ne dépendent que de $k = |\vec{k}|$ et sont normalisés de telle sorte que

$$\left[\hat{b}_{\vec{k}}, \hat{b}_{\vec{k}}^+ \right] = 1$$

ce qui donne

$$u_k^2 - v_k^2 = 1$$

Vecteurs propres (suite)

Comme $u_k^2 - v_k^2 = 1$, nous poserons

$$u_k = \cosh \theta_k \quad v_k = \sinh \theta_k$$

On trouve alors pour θ_k le résultat

$$\tanh 2\theta_k = \frac{g\rho_0}{\varepsilon_k + g\rho_0} = \frac{\mu}{\hbar\omega_k^0 + \mu}$$

Récapitulation

$$\hat{b}_{\vec{k}} = \cosh \theta_k \hat{a}_{\vec{k}} + \sinh \theta_k \hat{a}_{-\vec{k}}^+$$

$$\hat{b}_{-\vec{k}}^+ = \sinh \theta_k \hat{a}_{\vec{k}} + \cosh \theta_k \hat{a}_{-\vec{k}}^+$$

L'inversion de ce système donne

$$\hat{a}_{\vec{k}} = \cosh \theta_k \hat{b}_{\vec{k}} - \sinh \theta_k \hat{b}_{-\vec{k}}^+$$

$$\hat{a}_{-\vec{k}}^+ = -\sinh \theta_k \hat{b}_{\vec{k}} + \cosh \theta_k \hat{b}_{-\vec{k}}^+$$

Expression de \hat{H}_{eff} en fonction de $\hat{b}_{\vec{k}}$ et $\hat{b}_{\vec{k}}^+$

$$\hat{H}_{eff} = E_0 + \sum_{\vec{k}} \hbar\omega_k^B \hat{b}_{\vec{k}}^+ \hat{b}_{\vec{k}}$$

Interprétation physique

Opérateurs $\hat{b}_{\vec{k}}$ et $\hat{b}_{\vec{k}}^+$

Détruisent et créent une excitation élémentaire de vecteur d'onde \vec{k} et d'énergie ω_k^B

Relation de dispersion

$$\hbar\omega_k^B = \sqrt{\hbar\omega_k^0 (\hbar\omega_k^0 + 2\mu)}$$

Limite $\hbar\omega_k^0 \ll \mu$

$$\hbar\omega_k^B \simeq \sqrt{2\hbar\omega_k^0 \mu} = \sqrt{\frac{\hbar^2 k^2}{m} \mu}$$

$$\omega_k^B \simeq c k$$

$$c = \sqrt{\mu/m}$$

Les excitations élémentaires sont des phonons se propageant à la vitesse

$$c = \sqrt{\mu/m}$$

Limite $\hbar\omega_k^0 \gg \mu$

$$\begin{aligned}\hbar\omega_k^B &= \hbar\omega_k^0 \sqrt{1 + \frac{2\mu}{\hbar\omega_k^0}} \\ &\simeq \hbar\omega_k^0 + \mu\end{aligned}$$

Les excitations élémentaires sont de type particule libre avec une correction en énergie égale à μ .

Valeur k_0 de k séparant les 2 régimes

$$\hbar\omega_{k_0}^0 = \mu$$

$$\frac{\hbar^2 k_0^2}{2m} = g\rho_0 = \frac{4\pi\hbar^2}{m} a\rho_0$$

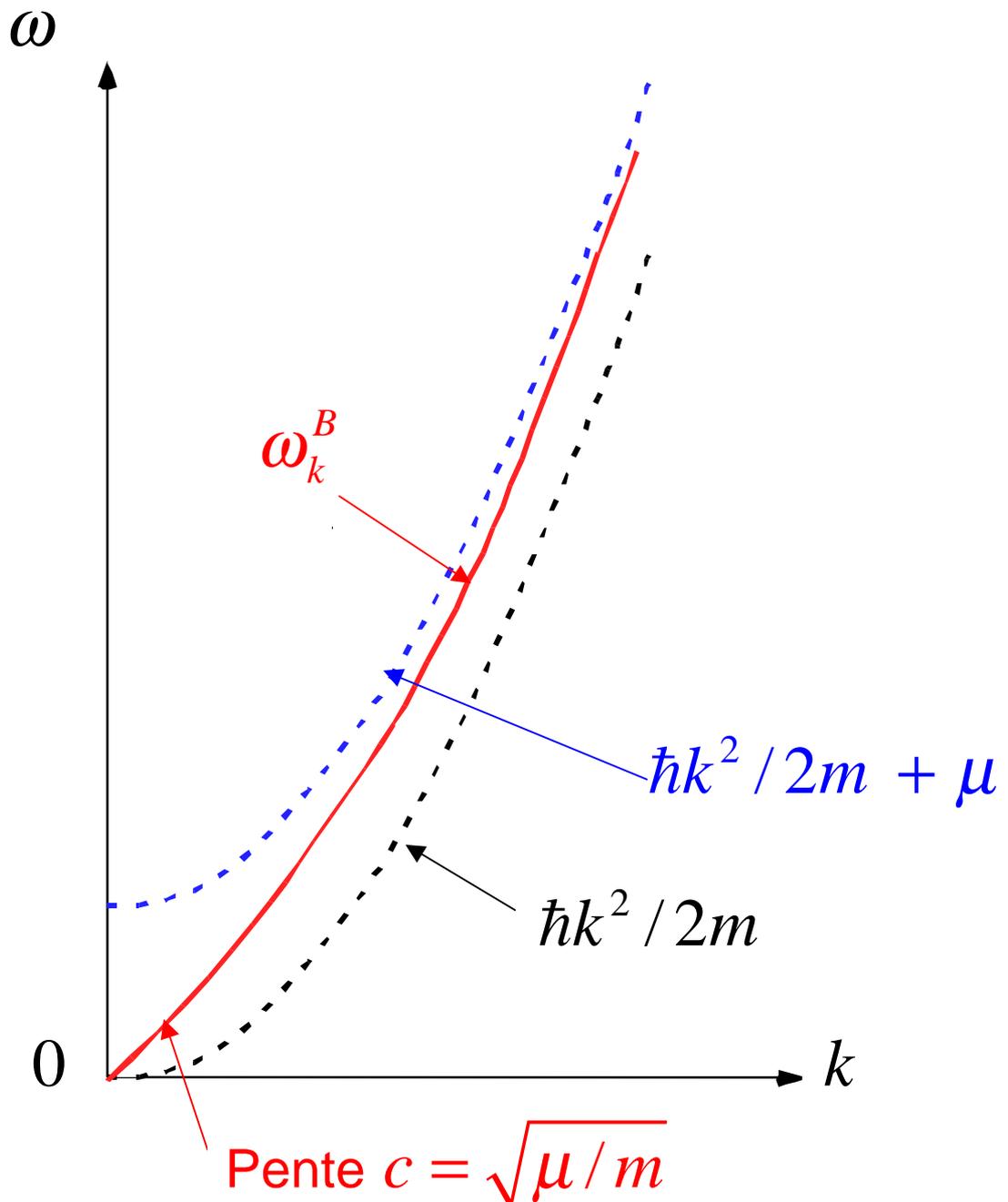
$$k_0^2 = 8\pi a\rho_0 = 1/\xi_0^2$$

$$\xi_0 = \frac{1}{\sqrt{8\pi a\rho_0}}$$

Longueur de relaxation ("Healing length")

Relation de dispersion

$$\hbar\omega_k^B = \sqrt{\hbar\omega_k^0(\hbar\omega_k^0 + 2\mu)}$$



Nouvel état fondamental

Energie E_0 (voir ref.4)

$$\frac{E_0}{N} = \frac{1}{2} g \rho_0 \left[1 + \frac{128}{15\sqrt{\pi}} (\rho_0 a^3)^{1/2} \right]$$

Fonction d'onde $|\psi_0\rangle$

$$\text{Satisfait } \hat{b}_{\vec{k}} |\psi_0\rangle = 0 \quad \forall \vec{k} \neq \vec{0}$$

$$\left[\cosh \theta_k \hat{a}_{\vec{k}} + \sinh \theta_k \hat{a}_{-\vec{k}}^+ \right] |\psi_0\rangle = 0$$

Structure de $|\psi_0\rangle$

$$|\psi_0\rangle = \alpha |n_0 = N, 0, 0, \dots\rangle$$

$$+ \sum_{\vec{k} \neq \vec{0}} \beta_{\vec{k}} |n_0 = N - 2, \dots, n_{\vec{k}} = 1, n_{-\vec{k}} = 1, 0 \dots\rangle$$

+...

Excitation virtuelle de paires $\vec{k}, -\vec{k}$ quand 2 atomes $\vec{k} = \vec{0}$ interagissent (conservation de l'impulsion totale)

Facteur de structure $S(\vec{q}, \omega)$

Expression générale (voir T-31)

$$S(\vec{q}, \omega) = \sum_f \left| \langle \psi_f | \hat{\rho}_{\vec{q}} | \psi_0 \rangle \right|^2 \delta \left(\omega - \frac{E_f - E_i}{\hbar} \right)$$

$|\psi_0\rangle$ est l'état fondamental. Décrit un condensat homogène d'impulsion totale nulle.

$\hat{\rho}_{\vec{q}}$ translate l'impulsion globale du système de $\hbar \vec{q}$ (voir T-16).

Dans la théorie de Bogobulov, il n'y a qu'un seul état excité d'impulsion $\hbar \vec{q}$, dont l'énergie vaut $\hbar \omega_q^B$

$$|\psi_{\vec{q}}\rangle = \hat{b}_{\vec{q}}^+ |\psi_0\rangle$$

Par suite, la somme sur f figurant dans l'expression de $S(\vec{q}, \omega)$ ne contient qu'un seul terme $|\psi_f\rangle = |\psi_{\vec{q}}\rangle$

Expression équivalente pour $\left| \langle \psi_{\vec{q}} | \hat{\rho}_{\vec{q}} | \psi_0 \rangle \right|^2$

$$\begin{aligned} \left| \langle \psi_{\vec{q}} | \hat{\rho}_{\vec{q}} | \psi_0 \rangle \right|^2 &= \langle \psi_0 | \hat{\rho}_{\vec{q}}^+ | \psi_{\vec{q}} \rangle \langle \psi_{\vec{q}} | \hat{\rho}_{\vec{q}} | \psi_0 \rangle \\ &= \sum_{\vec{q}'} \langle \psi_0 | \hat{\rho}_{\vec{q}}^+ | \psi_{\vec{q}'} \rangle \langle \psi_{\vec{q}'} | \hat{\rho}_{\vec{q}} | \psi_0 \rangle \end{aligned}$$

Les termes $\vec{q}' \neq \vec{q}$ donnent en effet une contribution nulle à cause de la conservation globale de l'impulsion. On peut donc écrire

$$\left| \langle \psi_{\vec{q}} | \hat{\rho}_{\vec{q}} | \psi_0 \rangle \right|^2 = \langle \psi_0 | \hat{\rho}_{\vec{q}}^+ \hat{\rho}_{\vec{q}} | \psi_0 \rangle$$

et par suite

$$S(\vec{q}, \omega) = \langle \psi_0 | \hat{\rho}_{\vec{q}}^+ \hat{\rho}_{\vec{q}} | \psi_0 \rangle \delta(\omega - \omega_q^B)$$

$$\begin{aligned} S(\vec{q}) &= \frac{1}{N} \int d\omega S(\vec{q}, \omega) \\ &= \frac{1}{N} \langle \psi_0 | \hat{\rho}_{\vec{q}}^+ \hat{\rho}_{\vec{q}} | \psi_0 \rangle \end{aligned}$$

Dans le spectre $S(\vec{q}, \omega)$, il n'y a donc qu'une seule raie

- Centrée en ω_q^B
- De poids $N S(\vec{q})$

Expression approchée de $\hat{\rho}_{\vec{q}}$

$$\hat{\rho}_{\vec{q}} = \sum_{\vec{k}} \hat{a}_{\vec{k}+\vec{q}}^+ \hat{a}_{\vec{k}} \quad (\text{voir T-15})$$

Pour être cohérent avec les approximations faites dans la théorie de Bogobulov, il ne faut conserver dans $\hat{\rho}_{\vec{q}}^+ \hat{\rho}_{\vec{q}}$ que les termes contenant au moins 2 opérateurs \hat{a}_0 ou \hat{a}_0^+ , et remplacer ces opérateurs par \sqrt{N} .

Ceci revient à négliger dans $\hat{\rho}_{\vec{q}}$ et $\hat{\rho}_{\vec{q}}^+$ tous les termes contenant moins d'un opérateur \hat{a}_0 ou \hat{a}_0^+

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_{\vec{q}} &= \sum_{\vec{k}} \hat{a}_{\vec{k}+\vec{q}}^+ \hat{a}_{\vec{k}} \\ &\simeq \hat{a}_{\vec{q}}^+ \hat{a}_0 + \hat{a}_0^+ \hat{a}_{-\vec{q}} \\ &\simeq \sqrt{N} (\hat{a}_{\vec{q}}^+ + \hat{a}_{-\vec{q}}) \\ \hat{\rho}_{\vec{q}}^+ &\simeq \sqrt{N} (\hat{a}_{\vec{q}} + \hat{a}_{-\vec{q}}^+) \end{aligned}$$

Calcul de $S(\vec{q})$

En réexprimant $\hat{a}_{\vec{q}}^+$ et $\hat{a}_{-\vec{q}}$ en fonction de $\hat{b}_{\vec{q}}^+$ et $\hat{b}_{-\vec{q}}$ (voir T-59) on obtient

$$\begin{aligned}\hat{\rho}_{\vec{q}} &\simeq \sqrt{N} (\hat{a}_{\vec{q}}^+ + \hat{a}_{-\vec{q}}) \\ &= \sqrt{N} \left[(\cosh \theta_q - \sinh \theta_q) \hat{b}_{\vec{q}}^+ \right. \\ &\quad \left. + (\cosh \theta_q - \sinh \theta_q) \hat{b}_{-\vec{q}} \right]\end{aligned}$$

Comme $\hat{b}_{-\vec{q}} |\psi_0\rangle = 0$ (voir T-63)

$$\hat{\rho}_{\vec{q}} |\psi_0\rangle = \sqrt{N} (\cosh \theta_q - \sinh \theta_q) \hat{b}_{\vec{q}}^+ |\psi_0\rangle$$

et par suite

$$\begin{aligned}S(\vec{q}) &= \frac{1}{N} \langle \psi_0 | \hat{\rho}_{\vec{q}}^+ \hat{\rho}_{\vec{q}} | \psi_0 \rangle \\ &= (\cosh \theta_q - \sinh \theta_q)^2 \langle \psi_0 | \hat{b}_{\vec{q}} \hat{b}_{\vec{q}}^+ | \psi_0 \rangle \\ &= (\cosh \theta_q - \sinh \theta_q)^2\end{aligned}$$

compte tenu de $\hat{b}_{\vec{q}} \hat{b}_{\vec{q}}^+ = 1 - \hat{b}_{\vec{q}}^+ \hat{b}_{\vec{q}}$

et de $\hat{b}_{\vec{q}} |\psi_0\rangle = 0$

Calcul de $S(\vec{q})$ (suite)

$$\tanh 2\theta_q = \frac{g\rho}{\varepsilon_q + g\rho} = \frac{\mu}{\hbar\omega_q^0 + \mu} \quad (\text{voir T-59})$$

$$\begin{aligned} (\cosh \theta_q - \sinh \theta_q)^2 &= \cosh 2\theta_q - \sinh 2\theta_q \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - \tanh^2 2\theta_q}} (1 - \tanh 2\theta_q) \\ &= \sqrt{\frac{1 - \tanh 2\theta_q}{1 + \tanh 2\theta_q}} = \sqrt{\frac{\hbar\omega_q^0}{\hbar\omega_q^0 + 2\mu}} \end{aligned}$$

En utilisant

$$\hbar\omega_q^B = \sqrt{\hbar\omega_q^0 (\hbar\omega_q^0 + 2\mu)}$$

on obtient finalement

$$S(q) = \frac{\omega_q^0}{\omega_q^B}$$

Etude des diverses limites

Limite $q \rightarrow \infty$ $\hbar\omega_q^0 \gg \mu$

On a alors (voir T-61)

$$\hbar\omega_q^B \simeq \hbar\omega_q^0 + \mu \simeq \hbar\omega_q^0$$

et par suite

$$S(\vec{q}) = \frac{\omega_q^0}{\omega_q^B} \underset{q \rightarrow \infty}{\simeq} 1$$

Même résultat que pour $g = 0$ c'est à dire pour un gaz parfait de bosons.

Limite $q \rightarrow 0$ $\hbar\omega_q^0 \ll \mu$

On a alors (voir T-60)

$$\omega_q^B = c q \quad \text{avec} \quad c = \sqrt{\mu/m}$$

$$S(\vec{q}) = \frac{\omega_q^0}{\omega_q^B} \underset{q \rightarrow 0}{\simeq} \frac{\hbar q^2 / 2m}{c q} = \frac{\hbar q}{2m c}$$

$S(\vec{q})$ tend vers 0, linéairement en q quand $q \rightarrow 0$

Conclusion

L'annulation de $S(\vec{q})$ quand $q \rightarrow 0$ est une conséquence des interactions. Elle n'existe pas pour un gaz parfait.

Cette annulation apporte des informations sur la structure de $|\psi_0\rangle$.

Les 2 termes $\hat{a}_{\vec{q}}^+ \hat{a}_0$ et $\hat{a}_0^+ \hat{a}_{-\vec{q}}$ conservés dans l'expression de $\hat{\rho}_{\vec{q}}$ (voir T-66) couplent les 2 états $|n_0 = N, 0, 0\dots\rangle$ et $|n_0 = N - 2, n_{+\vec{q}} = +1, n_{-\vec{q}} = +1, 0\dots\rangle$ apparaissant dans le développement de $|\psi_0\rangle$ (voir T-63) au même état final $|n_0 = N - 1, n_{+\vec{q}} = +1, 0, 0\dots\rangle$.

Les 2 amplitudes correspondantes interfèrent destructivement quand $\vec{q} \rightarrow 0$

Résultats attendus pour la diffusion de Bragg

En faisant varier l'écart ω entre les fréquences des 2 lasers qui induisent la transition, on s'attend à trouver une seule résonance étroite, centrée en $\omega = \omega_q^B$, dont l'intensité $S(\vec{q})$ décroît quand $q \rightarrow 0$.

En fait, les expériences de MIT ont été réalisées sur des condensats piégés (inhomogènes).

Des corrections apparaissent alors par rapport aux prédictions précédentes, qui seront étudiées dans un chapitre ultérieur.

Vérification des règles de somme

1. Règle de somme sur m_1

$$m_1(\vec{q}) = N \hbar q^2 / 2m \quad (\text{voir T-46})$$

Dans la théorie de Bogolubov, il y a un seul état excité d'énergie $\hbar\omega_q^B$ pour un vecteur d'onde \vec{q} donné. Donc

$$\begin{aligned} m_1^B(q) &= |\langle \psi_{\vec{q}} | \hat{\rho}_{\vec{q}} | \psi_0 \rangle|^2 \omega_q^B = \langle \psi_0 | \hat{\rho}_{\vec{q}}^+ \hat{\rho}_{\vec{q}} | \psi_0 \rangle \omega_q^B \\ &= N S(\vec{q}) \omega_q^B = N \frac{\omega_q^0}{\omega_q^B} \omega_q^B = N \frac{\hbar q^2}{2m} \end{aligned}$$

La règle de somme est bien satisfaite

2. Règle de somme sur m_{-1}

$$m_{-1}(\vec{q}) = -\hbar\chi(\vec{q}, 0)/2 = N\hbar/2\mu$$

d'après (T-44) et (T-53). Or,

$$\begin{aligned} m_{-1}^B(\vec{q}) &= \frac{NS(\vec{q})}{\omega_q^B} = \frac{N\omega_q^0}{(\omega_q^B)^2} = \\ &= N \frac{\hbar q^2 / 2m}{c^2 q^2} = \frac{N\hbar}{2mc^2} = \frac{N\hbar}{2\mu} \end{aligned}$$

Ici aussi, règle de somme satisfaite

Polarisabilité dynamique

Un condensat homogène possède la symétrie P (réflexion d'espace).

Cette symétrie entraîne que

$$\left| \langle \psi_n | \hat{\rho}_{\vec{q}} | \psi_0 \rangle \right|^2 = \left| \langle \psi_n | \hat{\rho}_{\vec{q}}^+ | \psi_0 \rangle \right|^2$$

L'expression (T-39) de $\chi_{\hat{\rho}_{\vec{q}}^+ \hat{\rho}_{\vec{q}}} = \chi(\vec{q}, \omega)$ est donc valable.

Comme il n'y a qu'un seul état excité couplé à $|\psi_0\rangle$ par $\hat{\rho}_{\vec{q}}$, l'expression (T-39) devient

$$\begin{aligned} \chi(\vec{q}, \omega) &= NS(\vec{q}) \frac{2\hbar\omega_q^B}{\hbar^2\omega^2 - \hbar^2(\omega_q^B)^2} \\ &= N \frac{2\hbar\omega_q^0}{\hbar^2\omega^2 - \hbar^2(\omega_q^B)^2} \end{aligned}$$

Annulation de $\chi_{\hat{\rho}_{\vec{q}}^+ \hat{\rho}_{\vec{q}}^+}$

D'après (T-36), l'expression de $\chi_{\hat{\rho}_{\vec{q}}^+ \hat{\rho}_{\vec{q}}^+}$ fait intervenir le produit suivant d'éléments de matrice

$$\langle \psi_0 | \hat{\rho}_{\vec{q}}^+ | \psi_n \rangle \langle \psi_n | \hat{\rho}_{\vec{q}}^+ | \psi_0 \rangle$$

$\hat{\rho}_{\vec{q}}^+ = \hat{\rho}_{-\vec{q}}$ translate l'impulsion de $-\hbar \vec{q}$

$\langle \psi_n | \hat{\rho}_{\vec{q}}^+ | \psi_0 \rangle$ n'est donc non nul que si

$$p_n - p_0 = -\hbar \vec{q}.$$

De même, $\langle \psi_0 | \hat{\rho}_{\vec{q}}^+ | \psi_n \rangle$ n'est non nul que si

$$p_0 - p_n = -\hbar \vec{q}.$$

Comme $\vec{q} \neq \vec{0}$, ces 2 conditions sont incompatibles et $\chi_{\hat{\rho}_{\vec{q}}^+ \hat{\rho}_{\vec{q}}^+} = 0$.

Il s'ensuit qu'une excitation $U_0 \cos(\vec{q} \cdot \vec{r} - \omega t)$ ne donne naissance qu'à une onde en $\cos(\vec{q} \cdot \vec{r} - \omega t)$. Aucune onde en $\cos(\vec{q} \cdot \vec{r} + \omega t)$ ne peut apparaître.

Diffusion d'un atome sonde par le condensat - Superfluidité

Motivations d'un tel calcul

Etudier la section efficace totale de diffusion σ d'un atome sonde (et non plus d'un photon) par le condensat.

Montrer que σ s'annule quand la vitesse de l'atome est inférieure à une certaine valeur critique. Etudier ainsi le phénomène de superfluidité sur une sonde microscopique.

Distinguer, dans la décroissance de σ , la contribution du phénomène de superfluidité et celle de la réduction du facteur de structure statique $S(\vec{q})$.

Lien avec une expérience récente réalisée au MIT (ref.5)

L'atome sonde, de vitesse v , est obtenu par diffusion Raman stimulée d'un atome du condensat vers un autre niveau Zeeman non piégeant.

L'atome ainsi obtenu est discernable des atomes condensés et peut donc être considéré comme un atome sonde. Sa vitesse peut être réglée en faisant varier l'angle entre les 2 faisceaux laser induisant la transition Raman.

L'expérience est réalisée sur un condensat piégé.

Les calculs présentés ici sont relatifs à un condensat homogène (non piégé). Ils sont plus simples et permettent de dégager les idées physiques importantes.

(voir aussi refs.7 et 8)

Calcul de la section efficace de diffusion

Hamiltonien d'interaction (voir T-18)

$$\hat{H}_{\text{int}} = \sum_{\vec{q}} \frac{1}{L^3} \mathcal{U}_{\vec{q}} e^{-i\vec{q} \cdot \hat{R}} \hat{\rho}_{\vec{q}}$$

\hat{R} : Position de l'atome cible

$\mathcal{U}_{\vec{q}}$: TF du potentiel d'interaction

$$\mathcal{U}_{\vec{q}} = \int d^3 r e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}} U(\vec{r})$$

Nous prendrons : $U(\vec{r}) = \frac{4\pi\hbar^2}{m} a \delta(\vec{r})$

a : Longueur de diffusion pour les collisions atome sonde- atome du condensat

$$\mathcal{U}_{\vec{q}} = \frac{4\pi\hbar^2}{m} a$$

$$\hat{H}_{\text{int}} = \frac{4\pi\hbar^2}{mL^3} a \sum_{\vec{q}'} e^{-i\vec{q}' \cdot \hat{R}} \hat{\rho}_{\vec{q}'}$$

Etat initial $|\vec{k}, \psi_0\rangle$

Atome sonde dans l'état $|\vec{k}\rangle$

Condensat dans l'état ψ_0

$$E_{\text{in}} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + E_0$$

Etat final $|\vec{k} - \vec{q}, \psi_{\vec{q}}\rangle$

Atome sonde dans l'état $|\vec{k} - \vec{q}\rangle$

Condensat dans l'état $\psi_{\vec{q}}$

$$E_{\text{fin}} = \frac{\hbar^2 (\vec{k} - \vec{q})^2}{2m} + E_0 + \hbar\omega_q^B$$

Règle d'or de Fermi

$$\Gamma = \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{\vec{q}} \left| \langle \vec{k} - \vec{q}, \psi_{\vec{q}} | \hat{H}_{\text{int}} | \vec{k}, \psi_0 \rangle \right|^2 \delta(E_{\text{in}} - E_{\text{fin}})$$

$$\sum_{\vec{q}} = \frac{L^3}{(2\pi)^3} \int q^2 dq d\Omega$$

Elément de matrice de \hat{H}_{int}

$$\begin{aligned} \langle \vec{k} - \vec{q}, \psi_{\vec{q}} | \hat{H}_{\text{int}} | \vec{k}, \psi_0 \rangle &= \frac{4\pi\hbar^2}{mL^3} a \times \\ &\underbrace{\langle \vec{k} - \vec{q} | e^{-i\vec{q}\cdot\vec{R}} | \vec{k} \rangle}_{=1} \langle \psi_{\vec{q}} | \hat{\rho}_{\vec{q}} | \psi_0 \rangle \end{aligned}$$

Taux de diffusion Γ

$$\left| \langle \psi_{\vec{q}} | \hat{\rho}_{\vec{q}} | \psi_0 \rangle \right|^2 = N S(\vec{q}) = N \frac{\omega_q^0}{\omega_q^B}$$

$$\delta(E_{\text{in}} - E_{\text{fin}}) = \delta(\hbar\omega - \hbar\omega_q^B) = \frac{1}{\hbar} \delta(\omega - \omega_q^B)$$

$$\omega = \frac{\hbar k^2}{2m} - \frac{\hbar(\vec{k} - \vec{q})^2}{2m} = \frac{\hbar\vec{k}\cdot\vec{q}}{m} - \frac{\hbar q^2}{2m}$$

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{32\pi^3\hbar^2}{m^2L^3} a^2 \frac{N}{L^3} \sum_{\vec{q}} \frac{\omega_q^0}{\omega_q^B} \delta(\omega - \omega_q^B) \\ &= \frac{4\hbar^2}{m^2} a^2 \rho_0 \int q^2 dq d\Omega \frac{\omega_q^0}{\omega_q^B} \delta(\omega - \omega_q^B) \end{aligned}$$

Section efficace de diffusion σ

$$\Gamma = \rho_0 v \sigma$$

$v = \hbar k / m$: Vitesse de l'atome sonde.

De l'expression de Γ on déduit

$$\sigma = \sigma_0 F$$

$\sigma_0 = 4\pi a^2$: Section efficace correspondant à la longueur de diffusion a

F : Facteur correctif lié au fait que l'atome sonde est diffusé par un condensat.

$$\begin{aligned} F &= \frac{\hbar^2}{\pi m^2} \frac{1}{v} \int q^2 dq d\Omega \frac{\omega_q^0}{\omega_q^B} \delta(\omega - \omega_q^B) \\ &= 2 \frac{\hbar^2}{m^2} \frac{1}{v} \int_0^\infty q^2 dq \int_{-1}^{+1} du \frac{\omega_q^0}{\omega_q^B} \delta\left(v q u - \frac{\hbar q^2}{2m} - \omega_q^B\right) \end{aligned}$$

On a posé

$$u = \cos \theta$$

θ : Angle entre \vec{q} et \vec{v}

Deux contributions au facteur F

1- Terme ω_q^0 / ω_q^B provenant du facteur de structure statique $S(\vec{q})$.

Décroit quand $q \rightarrow 0$

Diminution de l'aptitude du condensat à absorber l'impulsion $\hbar q$ quand $q \rightarrow 0$

2- Argument de la fonction delta

Ne s'annule pas quand la vitesse v de l'atome sonde est inférieure à une valeur critique. F est alors identiquement nul.

Explication de Landau du phénomène de superfluidité (ref.6): La relation de dispersion des excitations élémentaires du condensat ne permet pas un transfert résonnant d'énergie et d'impulsion de la part de la particule sonde. Le mouvement de la particule sonde n'est alors pas affecté.

Argument de la fonction delta

S'annule en principe quand

$$u = \cos \theta = \left(\frac{\hbar q}{2m} + \frac{\omega_q^B}{q} \right) \frac{1}{v}$$

La courbe donnant ω_q^B en fonction de q est une courbe concave vers le haut partant de 0 avec une pente c (voir T-12). Il s'ensuit que :

$$\frac{\omega_q^B}{q} \geq c$$

Par ailleurs, $q = |\vec{q}|$ est positif. Donc,

$$u \geq \frac{\omega_q^B}{q} \frac{1}{v} \geq \frac{c}{v}$$

Si $v < c$, la solution de l'équation donnant u est plus grande que 1 et ne peut convenir pour un cosinus. L'argument de la fonction delta ne peut alors pas s'annuler dans l'intervalle $[-1, +1]$ admissible pour u et F est, dans ce cas, identiquement nul.

$$v < c$$

Pas d'interaction possible pour l'atome sonde.

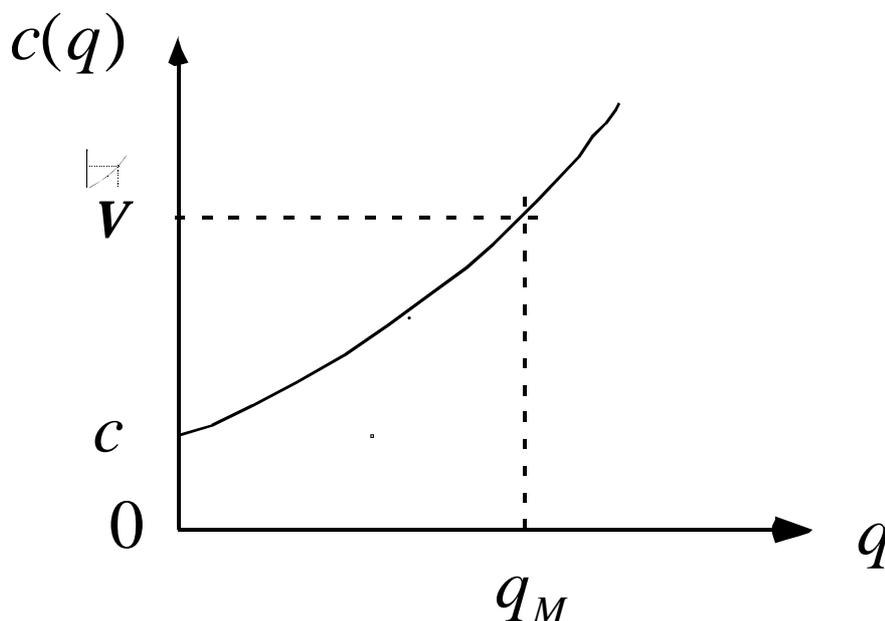
La vitesse critique de l'atome sonde au dessous de laquelle il y a superfluidité est donc la vitesse du son $c = \sqrt{\mu / m}$.

$$v > c$$

Posons :

$$c(q) = \frac{\hbar q}{2m} + \frac{\omega_q^B}{q} = \frac{\hbar q}{2m} + \sqrt{\left(\frac{\hbar q}{2m}\right)^2 + c^2}$$

L'équation $u = c(q) / v$ a une solution acceptable (c-à-d inférieure à 1) pour toute valeur de $0 \leq q \leq q_M$ avec $c(q_M) = v$.



Courbe polaire donnant q en fonction de θ .

$$u = \cos \theta = c(q) / v$$

Pour une valeur de $v \geq c$, q varie de 0 à q_M (voir la figure de T-84).

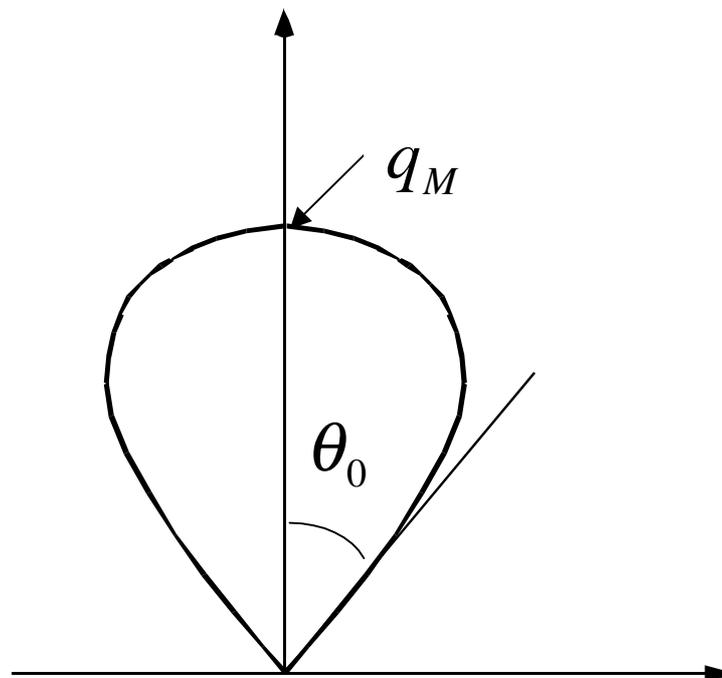
Pour $q = 0$, $c(q = 0) = c$, et par suite

$$\cos \theta_0 = c / v$$

A la limite $v \gg c$, θ_0 est très proche de $\pi / 2$.

Quand $q = q_M$, $u = 1$ et θ vaut 0.

θ décroît donc de façon monotone quand q croît de 0 à q_M



Forme de feuille de trèfle

Limite $v \gg c$

On a alors $\theta_0 \cong \pi / 2$ et $c(q) \cong \hbar q / m$ de sorte que l'équation polaire de la courbe $q = f(\theta)$ devient :

$$q \cong \frac{mv}{\hbar} \cos \theta$$

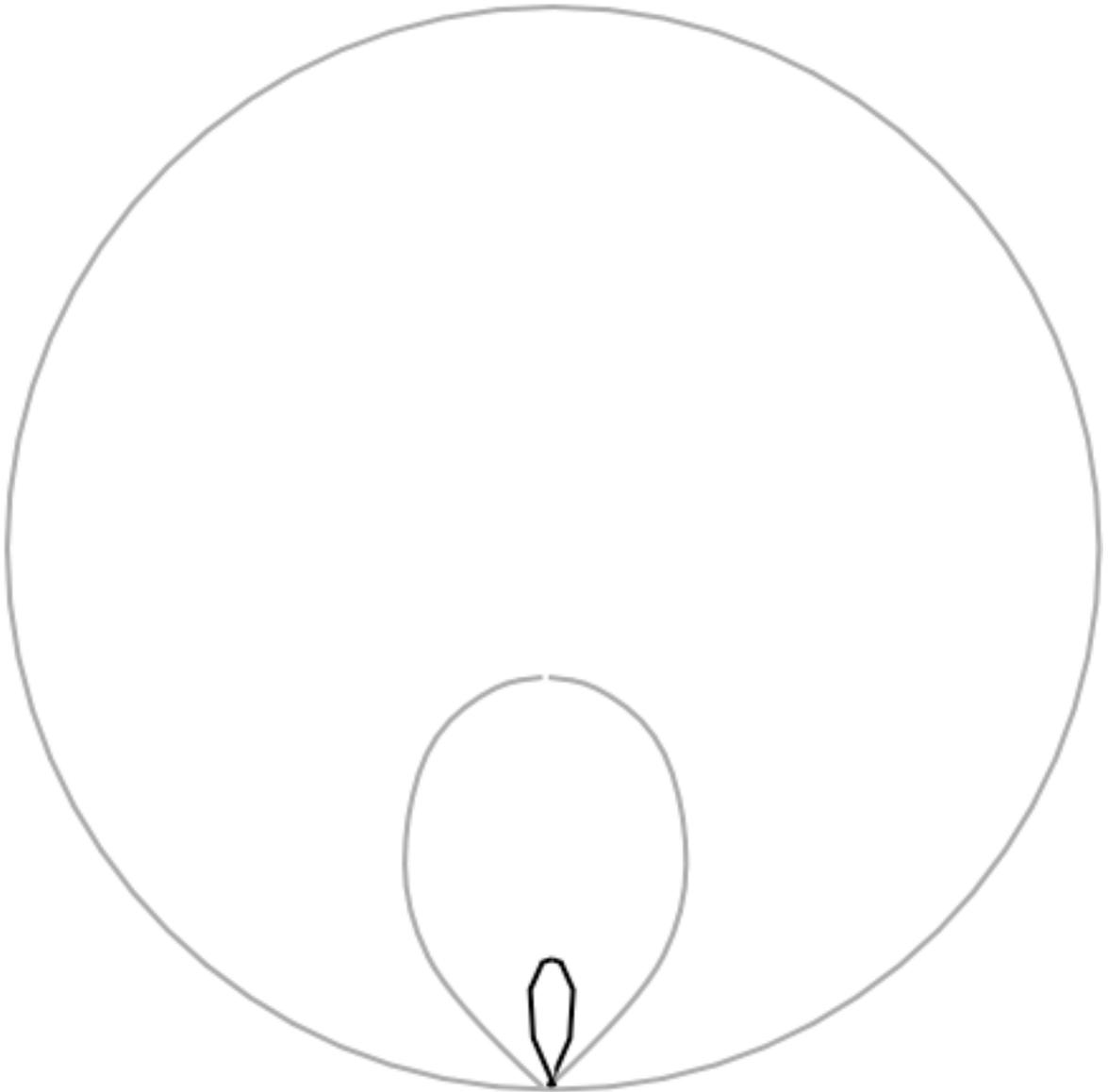
La feuille de trèfle devient un cercle de diamètre mv / \hbar

Interprétation

L'atome sonde crée dans la condensat une excitation de grand q , donc de type particule, qui a en fait la même masse que l'atome sonde (les 2 atomes ne diffèrent que par le niveau Zeeman).

La collision se produit donc entre un atome de vitesse v et un atome de même masse de vitesse nulle. La conservation de l'énergie et de l'impulsion totales entraîne alors que les vitesses finales des 2 atomes sont perpendiculaires et sur un cercle de diamètre v .

Réduction de l'espace des phases à l'approche du seuil de superfluidité



La feuille de trèfle, initialement circulaire quand $v \gg c$, devient de plus en plus étroite et de moins en moins longue quand v diminue et disparaît quand $v = c$.

Retour au calcul de F

1-Intégrale sur u

- Si $v < c$, F est identiquement nul.
- Si $v > c$, l'argument de la fonction delta s'annule pour une valeur u_q de u tant que q reste compris entre 0 et q_M .

L'intégrale sur u donne alors :

$$\int_{-1}^{+1} \delta [qv(u - u_q)] = \frac{1}{qv}$$

2-Intégrale sur q

Elle s'effectue entre 0 et q_M , et donne :

$$\begin{aligned} F &= \frac{2\hbar^2}{m^2 v^2} \int_0^{q_M} dq \, q \frac{\omega_k^0}{\omega_k^B} \\ &= \frac{2\hbar^2}{m^2 v^2} \int_0^{q_M} dq \, q \frac{\hbar q / 2m}{\sqrt{(\hbar q / 2m)^2 + c^2}} \end{aligned}$$

Changement de variables

Posons : $\frac{\hbar q}{2mc} = x = \sinh \alpha$. Il vient :

$$\begin{aligned} F &= \frac{8c^2}{v^2} \int_0^{x_M} dx \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} \\ &= \frac{2c^2}{v^2} \left[\sinh 2\alpha_M - 2\alpha_M \right] \end{aligned}$$

De $\hbar q_M / 2m + \sqrt{(\hbar q_M / 2m)^2 + c^2} = v$, on déduit en posant :

$$\eta = v / c$$

$$x_M + \sqrt{1+x_M^2} = \eta$$

$$\sinh \alpha_M = \frac{\eta^2 - 1}{2\eta} \quad \cosh \alpha_M = \frac{\eta^2 + 1}{2\eta}$$

$$\sinh 2\alpha_M = 2 \sinh \alpha_M \cosh \alpha_M = \frac{\eta^4 - 1}{2\eta^2}$$

$$e^{\theta_M} = \cosh \theta_M + \sinh \theta_M = \eta$$

$$\theta_M = \log \eta$$

Résultat final

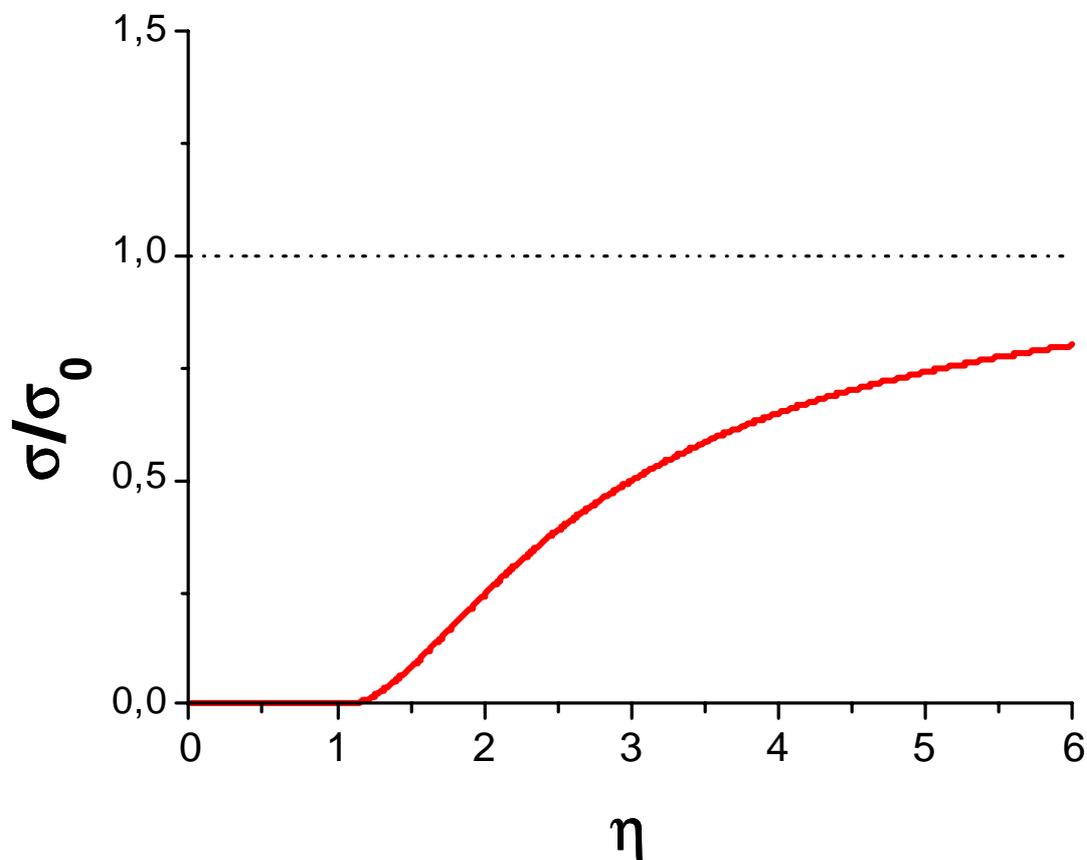
$$F = F(\eta) = \frac{2}{\eta^2} \left[\frac{\eta^4 - 1}{2\eta^2} - 2 \log \eta \right]$$

$$= 1 - \frac{1}{\eta^4} - \frac{4}{\eta^2} \log \eta$$

$$\sigma = \sigma_0 F(\eta)$$

avec $\eta = v/c$ et $\sigma_0 = 4\pi a^2$

Rappelons que pour $\eta < 1$, $F \equiv 0$



Références (suite de T-48)

4. Pour la théorie de Bogolubov, voir le cours 98-99, Pages VII-1 à VIII-10, et references in.
5. A.Chikkatur, A.Görlitz, D.Stamper-Kurn, S.Inouye, S.Gupta, W.Ketterle, Phys.Rev.Lett. **85**, 483 (2000)
6. L.Landau, J.Phys. (USSR) **5**, 71 (1941)
7. E.Timmermans, R.Côté, Phys.Rev.Lett. **80**, 3419 (1998)
8. Z.Idziaszek, K.Rzazewski, M.Wilkens, J.Phys. **B32**, L205 (1999)

Facteurs de structure d'un condensat inhomogène.
Buts de ce cours

- Calculer les facteurs de structure dynamique et statique pour un condensat inhomogène piégé dans un potentiel harmonique.
- Préciser les différences apparaissant par rapport au condensat homogène étudié dans le chapitre précédent et liées à plusieurs facteurs : apparition d'une nouvelle longueur caractéristique dans le problème, le rayon du condensat ; inhomogénéité spatiale de la densité d'atomes ; distribution de vitesses de largeur finie.
- Introduire un certain nombre d'approximations correspondant à divers domaines dans l'échelle des valeurs du nombre d'onde q . Etudier pour chacun de ces domaines l'allure du spectre de diffusion.
- Les résultats obtenus seront utilisés dans le chapitre suivant pour interpréter des résultats expérimentaux récents.

Plan
1. Caractérisation du condensat inhomogène (T-91 à T-93)

- Potentiel de piégeage
- Limite de Thomas-Fermi
- Rayon du condensat et nombre total d'atomes

2. Quelques repères sur l'échelle des valeurs de q (T-94 à T-98)

- Inverse du rayon du condensat : $1/R_0$.
- Inverse de la longueur de relaxation (« healing length ») : $1/\xi_0$.
- Valeur de q pour laquelle le déplacement Doppler est de l'ordre de celui dû aux interactions : $q_D = R_0/\xi_0^2$

3. Domaine $q \gg q_D$. Approximation d'impulsion (T-99 à T-106)

- Approximation consistant à négliger le déphasage dû aux interactions
- Calcul du facteur de structure dynamique
- Discussion physique. Vélocimétrie Doppler

Référence (T-106)

Condensat inhomogène

Piège harmonique anisotrope

Potentiel de piégeage

$$V(x, y, z) = \frac{1}{2} m \left[\omega_{0x}^2 x^2 + \omega_{0y}^2 y^2 + \omega_{0z}^2 z^2 \right]$$

Limite de Thomas-Fermi

On suppose le nombre N d'atomes suffisamment grand pour que

$$\frac{Na}{\sigma} \gg 1$$

a : Longueur de diffusion

$$\sigma = \sqrt{\hbar / m \bar{\omega}_0} \quad \bar{\omega}_0 = \left[\omega_{0x} \omega_{0y} \omega_{0z} \right]^{1/3}$$

σ : Extension moyenne de la fonction d'onde de l'état fondamental du piège.

On peut alors négliger le terme d'énergie cinétique dans l'équation de $G - P$ qui devient une équation algébrique (voir Cours 1988-99)

Equation de G-P approchée

$$V(\vec{r})\psi(\vec{r}) + g|\psi(\vec{r})|^2\psi(\vec{r}) = \mu\psi(\vec{r})$$

$$g = 4\pi\hbar^2 a / m$$

$$\mu = \text{Potentiel chimique} = g\rho_0$$

$$\rho_0 = |\psi(\vec{r} = \vec{0})|^2 \quad \text{Densité spatiale au centre du piège } \vec{r} = \vec{0} \quad \text{où } V = 0$$

Densité spatiale $\rho(\vec{r})$

Compte tenu de l'expression de V l'équation de G-P approchée conduit à l'expression suivante pour $\rho(\vec{r})$

$$\rho(\vec{r}) = \rho_0 \left[1 - \left(\frac{x}{x_0} \right)^2 - \left(\frac{y}{y_0} \right)^2 - \left(\frac{z}{z_0} \right)^2 \right]$$

où x_0, y_0, z_0 sont définis par

$$\frac{1}{2} m \omega_{0x}^2 x_0^2 = \frac{1}{2} m \omega_{0y}^2 y_0^2 = \frac{1}{2} m \omega_{0z}^2 z_0^2 = \mu$$

Changement de variables

$$\tilde{x} = x / x_0 \quad \tilde{y} = y / y_0 \quad \tilde{z} = z / z_0$$

\vec{r} : Vecteur de composantes $\{\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}\}$

$$\begin{aligned} \rho(\vec{r}) &= \rho_0 (1 - \tilde{x}^2 - \tilde{y}^2 - \tilde{z}^2) \\ &= \rho_0 (1 - \tilde{r}^2) \end{aligned}$$

$\rho(\vec{r})$ ne dépend que de \tilde{r}^2

\tilde{r} varie entre 0 et 1 ($\rho \geq 0$)

Expression de N

$$\begin{aligned} N &= \iiint dx dy dz \rho(x, y, z) \\ &= x_0 y_0 z_0 \iiint d\tilde{x} d\tilde{y} d\tilde{z} \rho_0 (1 - \tilde{r}^2) \\ &= 4\pi x_0 y_0 z_0 \rho_0 \int_0^1 \tilde{r}^2 (1 - \tilde{r}^2) d\tilde{r} \\ &= \frac{8\pi}{15} \rho_0 x_0 y_0 z_0 \end{aligned}$$

Quelques repères importants sur l'échelle des valeurs de q

Inverse du rayon du condensat $1 / R_0$

Un rayon moyen peut être défini pour le condensat par

$$R_0 = (x_0 y_0 z_0)^{1/3}$$

On se limite ici à des excitations du condensat de longueur d'onde grande devant R_0

$$q \gg \frac{1}{R_0}$$

Les excitations ayant des valeurs de q de l'ordre de $1 / R_0$ correspondent aux premiers modes propres de vibration du condensat étudiés dans le cours 1998-99.

Inverse de la longueur de relaxation ξ_0

("Healing length")

$$\xi_0 = \frac{1}{\sqrt{8\pi\rho_0 a}}$$

$$q \gg \frac{1}{\xi_0} \Leftrightarrow \hbar \omega_q^0 \gg \mu$$

$$q \ll \frac{1}{\xi_0} \Leftrightarrow \hbar \omega_q^0 \ll \mu$$

Pour un condensat homogène ces 2 limites correspondent respectivement à des excitations de type particule libre pour la première, de type phonon pour la deuxième.

Pour la plupart des condensats

$$\xi_0 \ll R_0$$

Donc,

$$\frac{1}{\xi_0} \gg \frac{1}{R_0}$$

Comparaison du déplacement Doppler et de celui dû aux interactions

(pour $q \gg 1 / \xi_0$)

Dans un condensat homogène,

l'énergie des excitations élémentaires de vecteur d'onde q vaut (pour $q \gg 1 / \xi_0$)

$$\frac{\hbar^2 q^2}{2m} + \mu$$

(voir T-81)

Le déplacement dû aux interactions vaut donc

$$(\delta E)_{\text{int}} \simeq \mu$$

Par ailleurs, dans un condensat homogène, les particules sont condensées dans un état de vitesse nulle.

Il n'y a pas alors d'effet Doppler lors de la diffusion d'une particule sonde.

Dans un condensat inhomogène,

il y a une dispersion de vitesses liée à l'extension spatiale finie R_0 du condensat

$$\delta v \simeq \frac{\hbar}{m R_0}$$

Le spectre de diffusion subit donc, pour un transfert d'impulsion $\hbar \vec{q}$, un déplacement Doppler de l'ordre de

$$(\delta E)_{Doppler} \simeq \hbar q \delta v \simeq \frac{\hbar^2 q}{m R_0}$$

Valeur q_D de q pour laquelle

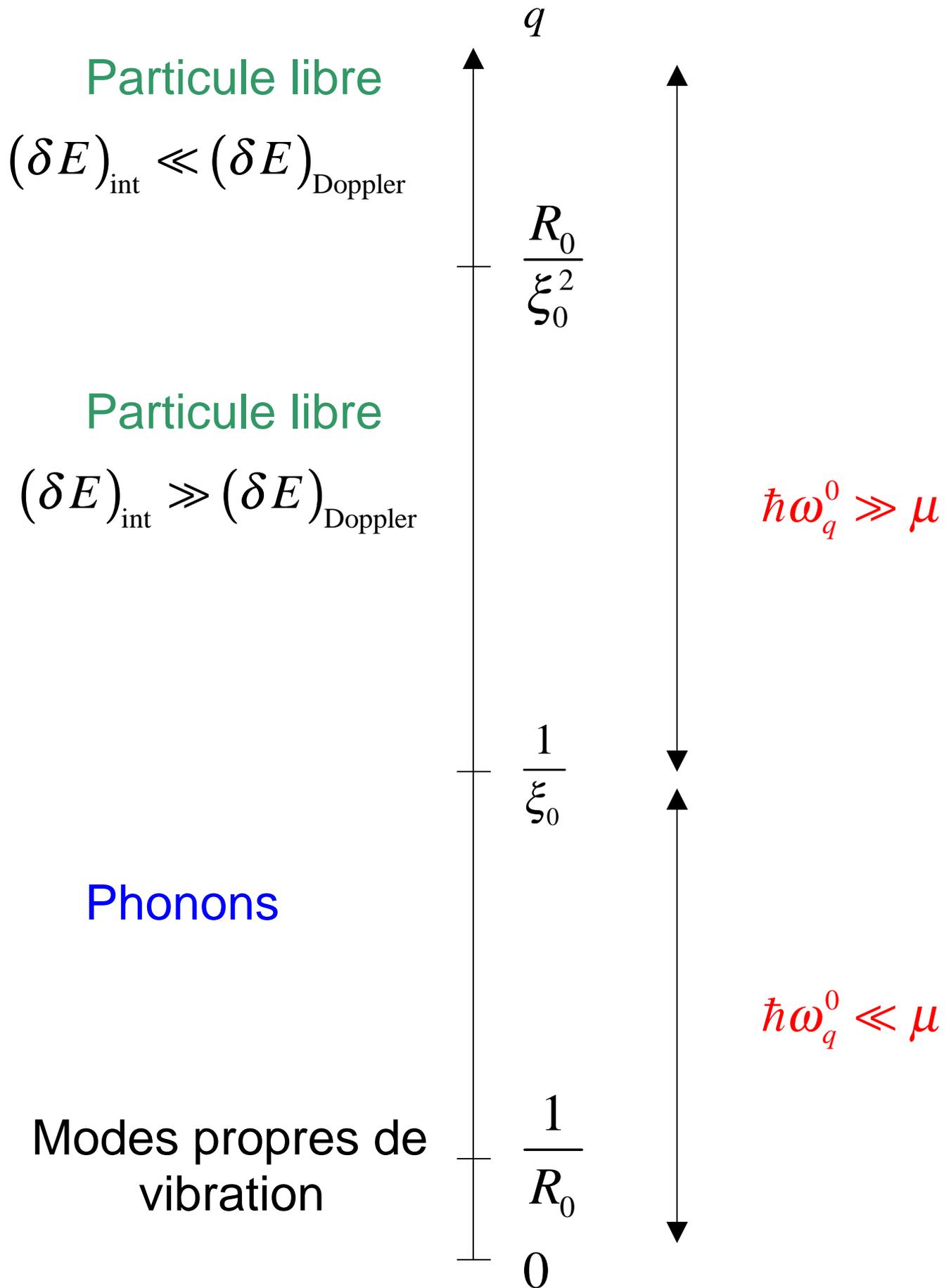
$$(\delta E)_{int} \simeq (\delta E)_{Doppler}$$

$$\frac{\hbar^2 q_D}{m R_0} \simeq \mu = g \rho_0 = \frac{4\pi \hbar^2}{m} a \rho_0$$

$$q_D \simeq 4\pi a \rho_0 R_0 \simeq R_0 / \xi_0^2$$

$$q_D = \frac{R_0}{\xi_0^2} = \frac{1}{\xi_0} \frac{R_0}{\xi_0} \gg \frac{1}{\xi_0}$$

Récapitulation



Limite des grands vecteurs d'onde

$$q \gg R_0 / \xi_0^2$$

Autre interprétation de $q \gg R_0 / \xi_0^2$

Comme $\hbar \omega_q^0 \gg \mu$, l'excitation créée par la particule sonde est de type particule et a une énergie $(\hbar q^2 / 2m) + \mu$.

Le second terme μ , dû aux interactions est plus petit que le premier.

L'atome cible ainsi excité a une vitesse de l'ordre de $\hbar q / m$ et quitte le condensat de rayon R_0 au bout d'un temps

$$\tau \simeq \frac{R_0}{\hbar q / m} = \frac{mR_0}{\hbar q}$$

L'effet des interactions décrit par μ n'est ressenti par cet atome que durant le temps τ passé à l'intérieur du condensat.

Déphasage ϕ dû aux interactions

L'atome cible excité par la particule sonde acquiert donc un déphasage ϕ dû aux interactions de l'ordre de

$$\phi = \frac{\mu \tau}{\hbar} \simeq \frac{m R_0}{\hbar^2 q} \mu$$

Remplaçons μ par $g \rho_0 = 4\pi \hbar^2 a \rho_0 / m$

Il vient

$$\phi \simeq \frac{4\pi a \rho_0 R_0}{q} \simeq \frac{R_0}{q \xi_0^2}$$

La condition $q \gg R_0 / \xi_0^2$ est donc équivalente à $\phi \ll 1$.

$$q \gg R_0 / \xi_0^2 \Leftrightarrow \phi \ll 1$$

Conclusion

Quand $q \gg R_0 / \xi_0^2$, l'excitation créée par la particule sonde peut être considérée comme libre. L'effet des interactions sur son évolution est négligeable.

Déphasages absolu et relatif

Dans tout le domaine $q \gg 1 / \xi_0$

On a $\omega_q^0 \tau \gg \mu \tau / \hbar$

Le déphasage dû aux interactions, $\mu \tau / \hbar$, est beaucoup plus petit que celui dû à l'évolution libre $\omega_q^0 \tau$.

Si en plus $q \gg R_0 / \xi_0^2 \gg 1 / \xi_0$

Le déphasage dû aux interactions est non seulement petit en valeur relative par rapport à celui dû aux interactions.

Il est aussi petit en valeur absolue.

Par contre, pour $R_0 / \xi_0^2 \gg q \gg 1 / \xi_0$

Le déphasage $\mu \tau / \hbar$, tout en étant petit devant $\omega_q^0 \tau$, est grand en valeur absolue.

Transformée de Fourier de $S(\vec{q}, \omega)$

(par rapport à ω)

Rappelons que (voir T-24)

$$S(\vec{q}, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau e^{-i\omega\tau} \langle \psi_0 | \hat{\rho}_{\vec{q}}^+(\tau=0) \hat{\rho}_{\vec{q}}(\tau) | \psi_0 \rangle$$

$$\hat{\rho}_{\vec{q}} = \sum_{\vec{k}} \hat{a}_{\vec{k}+\vec{q}}^+ \hat{a}_{\vec{k}} \quad \hat{\rho}_{\vec{q}}^+ = \sum_{\vec{k}'} \hat{a}_{\vec{k}'}^+ \hat{a}_{\vec{k}'+\vec{q}}$$

$$\hat{\rho}_{\vec{q}}(\tau) = e^{i\hat{H}\tau/\hbar} \hat{\rho}_{\vec{q}} e^{-i\hat{H}\tau/\hbar}$$

Dans l'expression précédente \hat{H} est l'hamiltonien total.

τ est le temps de corrélation des fluctuations de $\hat{\rho}$, de l'ordre du temps mis par l'excitation créée par la sonde pour quitter le condensat.

Comme $\mu\tau/\hbar \ll 1$, on peut donc dans $\hat{\rho}_{\vec{q}}(\tau)$ remplacer \hat{H} par l'hamiltonien \hat{H}_0 sans interactions.

Une telle approximation est appelée « approximation d'impulsion »

(« impulse approximation »)

Calcul de $e^{i\hat{H}_0\tau/\hbar} \hat{\rho}_{\vec{q}} e^{-i\hat{H}_0\tau/\hbar}$

$$\hat{H}_0 = \sum_{\vec{k}} \hbar \omega_k^0 \hat{a}_{\vec{k}}^+ \hat{a}_{\vec{k}} \quad \omega_k^0 = \frac{\hbar k^2}{2m}$$

$$e^{i\hat{H}_0\tau/\hbar} \hat{a}_{\vec{k}} e^{-i\hat{H}_0\tau/\hbar} = \hat{a}_{\vec{k}} e^{-i\omega_k^0\tau}$$

$$e^{i\hat{H}_0\tau/\hbar} \hat{\rho}_{\vec{q}} e^{-i\hat{H}_0\tau/\hbar} = \sum_{\vec{k}} \hat{a}_{\vec{k}+\vec{q}}^+ \hat{a}_{\vec{k}} e^{i(\omega_{\vec{k}+\vec{q}}^0 - \omega_{\vec{k}}^0)\tau}$$

$$\omega_{\vec{k}+\vec{q}}^0 - \omega_{\vec{k}}^0 = \frac{\hbar (\vec{k} + \vec{q})^2}{2m} - \frac{\hbar k^2}{2m}$$

$$= \frac{\hbar q^2}{2m} + \frac{\hbar \vec{k}}{m} \cdot \vec{q}$$

$S(\vec{q}, \omega)$ est donc la transformée de Fourier temporelle de

$$\sum_{\vec{k}} \sum_{\vec{k}'} \exp \left\{ i \left[\frac{\hbar q^2}{2m} + \frac{\hbar \vec{k}}{m} \cdot \vec{q} \right] \tau \right\} \times$$

$$\langle \psi_0 | \hat{a}_{\vec{k}'}^+ \hat{a}_{\vec{k}'+\vec{q}} \hat{a}_{\vec{k}+\vec{q}}^+ \hat{a}_{\vec{k}} | \psi_0 \rangle$$

Calcul de $\langle \psi_0 | \hat{a}_{\vec{k}'}^+ \hat{a}_{\vec{k}'+\vec{q}} \hat{a}_{\vec{k}+\vec{q}}^+ \hat{a}_{\vec{k}} | \psi_0 \rangle$

$$\hat{a}_{\vec{k}'+\vec{q}} \hat{a}_{\vec{k}+\vec{q}}^+ = \delta_{\vec{k}\vec{k}'} + \hat{a}_{\vec{k}+\vec{q}}^+ \hat{a}_{\vec{k}'+\vec{q}}$$

Considérons alors le terme

$$\langle \psi_0 | \hat{a}_{\vec{k}'}^+ \hat{a}_{\vec{k}+\vec{q}}^+ \hat{a}_{\vec{k}'+\vec{q}} \hat{a}_{\vec{k}} | \psi_0 \rangle$$

$|\psi_0\rangle$ décrit l'état du condensat.

$\hat{a}_{\vec{k}} |\psi_0\rangle$ n'est différent de zéro que si k n'est pas trop grand devant $1/R_0$, largeur en q de ψ_0 .

De même, $\langle \psi_0 | \hat{a}_{\vec{k}'}^+$ n'est non nul que si $k' \lesssim 1/R_0$. On a alors nécessairement $|\vec{k}' + \vec{q}| \gg 1/R_0$.

$\hat{a}_{\vec{k}'+\vec{q}}$ commute avec $\hat{a}_{\vec{k}}$. Agissant sur $|\psi_0\rangle$ il donne 0 car ψ_0 ne contient pas d'état de vecteur d'onde $\gg 1/R_0$.

Le terme considéré plus haut est donc négligeable.

Finalement, seul subsiste le terme $\delta_{\vec{k}\vec{k}'}$ dans

$$\langle \psi_0 | \hat{a}_{\vec{k}'}^+ \hat{a}_{\vec{k}'+\vec{q}} \hat{a}_{\vec{k}+\vec{q}}^+ \hat{a}_{\vec{k}} | \psi_0 \rangle$$

$S(\vec{q}, \omega)$ est donc la T.F. temporelle de

$$\sum_{\vec{k}} \exp \left\{ i \left[\frac{\hbar q^2}{2m} + \frac{\hbar \vec{k}}{m} \cdot \vec{q} \right] \tau \right\} \times \\ \langle \psi_0 | \hat{a}_{\vec{k}}^+ \hat{a}_{\vec{k}} | \psi_0 \rangle$$

et s'écrit

$$S(\vec{q}, \omega) = \sum_{\vec{k}} \delta \left[\omega - \frac{\hbar q^2}{2m} - \frac{\hbar \vec{k}}{m} \cdot \vec{q} \right] \langle \psi_0 | \hat{a}_{\vec{k}}^+ \hat{a}_{\vec{k}} | \psi_0 \rangle$$

Spectre Doppler

- centré à la fréquence de recul

$$\omega_q^0 = \hbar q^2 / 2m$$

- de largeur déterminée par la répartition des vitesses $\vec{v} = \hbar \vec{k} / m$ dans le condensat

$$\left(\hbar \vec{k} / m \right) \cdot \vec{q} = \vec{q} \cdot \vec{v} = \text{Déplacement Doppler}$$

Conclusion pour le domaine $q \gg R_0 / \xi_0^2$

A suffisamment haute énergie, plus précisément quand $q \gg R_0 / \xi_0^2$, le spectre de diffusion $S(\vec{q}, \omega)$ donne la répartition des vitesses dans le condensat et n'est pas affecté par les interactions.

Vélocimétrie Doppler

Remarque

Le calcul précédent ne suppose pas que l'état fondamental $|\psi_0\rangle$ du système est calculé en négligeant les interactions.

$\langle \psi_0 | \hat{a}_{\vec{k}}^+ \hat{a}_{\vec{k}} | \psi_0 \rangle$ donne la répartition des valeurs de \vec{k} , donc de $\vec{v} = \hbar \vec{k} / m$, dans l'état fondamental exact $|\psi_0\rangle$

Référence (suite de T-90)

9. F. Zambelli, L. Pitaevskii, D.M. Stamper-Kurn, S. Stringari, Phys.Rev. **A61**, 063608 (2000) et references in.

Facteurs de structure d'un condensat inhomogène.
(suite et fin)

Buts de ce cours (pour mémoire)

- Calculer les facteurs de structure dynamique et statique pour un condensat inhomogène piégé dans un potentiel harmonique.
- Préciser les différences apparaissant par rapport au condensat homogène étudié dans le chapitre précédent et liées à plusieurs facteurs : apparition d'une nouvelle longueur caractéristique dans le problème, le rayon du condensat ; inhomogénéité spatiale de la densité d'atomes ; distribution de vitesses de largeur finie.
- Introduire un certain nombre d'approximations correspondant à divers domaines dans l'échelle des valeurs du nombre d'onde q . Etudier pour chacun de ces domaines l'allure du spectre de diffusion.
- Les résultats obtenus seront utilisés dans le chapitre suivant pour interpréter des résultats expérimentaux récents.

Plan (suite du plan de la page IV-1)

4. **Domaine** $1/R_0 \ll q \ll q_D$ **Approximation de densité locale** (T-107 à T-121)

- Approximation de densité locale. Expression du facteur de structure dynamique.
- Calcul du facteur de structure dynamique. Forme du spectre.
- Facteur de structure statique.
- Expression du facteur de structure statique à la limite $\omega_q^0 \gg \tilde{\mu}$
- Barycentre et largeur du spectre à la limite $\omega_q^0 \gg \tilde{\mu}$
- Expression du facteur de structure statique à la limite $\omega_q^0 \ll \tilde{\mu}$
- Barycentre et largeur du spectre à la limite $\omega_q^0 \ll \tilde{\mu}$
- Récapitulation des résultats obtenus

5. **Domaine** $q \approx q_D$ (T-122 à T-131)

- Méthodes utilisées pour étudier ce domaine.
- Hamiltonien approché décrivant les états excités du système.
- Moment d'ordre 1 du spectre.
- Moment d'ordre 2 du spectre.
- Récapitulation et conclusion.

Références Reprise et suite de T-106 : T- 132

Limite $1/R_0 \ll q \ll R_0/\xi_0^2$

Le déplacement Doppler est négligeable devant le déplacement dû aux interactions.

Il est alors légitime de négliger le mouvement des atomes lié à leur confinement spatial dans le volume de piégeage de rayon de l'ordre de R_0 .

Approximation de densité locale

Le condensat est considéré comme une juxtaposition de condensats localement homogènes et au repos.

En chaque point \vec{r} , on peut considérer un condensat homogène de densité $\rho(\vec{r})$, dont les facteurs de structure dynamique et statique sont donnés par les expressions établies au chapitre précédent.

Facteur de structure dynamique à l'approximation de densité locale

$$S_{LDA}(\vec{q}, \omega) = \int d^3r \rho(\vec{r}) \frac{\omega_q^0}{\omega_q^B(\vec{r})} \delta[\omega - \omega_q^B(\vec{r})]$$

$$\omega_q^0 = \hbar q^2 / 2m$$

$$\omega_q^B(\vec{r}) = \sqrt{\omega_q^0 \left[\omega_q^0 + \frac{2g\rho(\vec{r})}{\hbar} \right]}$$

Le passage des variables x, y, z aux variables $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$ donne, compte tenu de $N = 8\pi \rho_0 x_0 y_0 z_0 / 15$ (voir T-93) :

$$S_{LDA}(\vec{q}, \omega) = N \frac{15}{2} \int_0^1 d\tilde{r} \tilde{r}^2 (1 - \tilde{r}^2) \times \frac{\omega_q^0}{\omega_q^B(\tilde{r})} \delta[\omega - \omega_q^B(\tilde{r})]$$

$$\omega_q^B(\tilde{r}) = \sqrt{\omega_q^0 \left[\omega_q^0 + 2\tilde{\mu} (1 - \tilde{r}^2) \right]}$$

$$\tilde{\mu} = \mu / \hbar = g\rho_0 / \hbar$$

Calcul de $S_{LDA}(\vec{q}, \omega)$

Posons : $\omega_q^B(\tilde{r}) = \Omega(\tilde{r})$ et effectuons le changement de variables $\tilde{r} \rightarrow \Omega$. Il vient

$$\Omega^2 = \omega_q^0 \left[\omega_q^0 + 2\tilde{\mu}(1 - \tilde{r}^2) \right]$$

$$\Omega d\Omega = -2\tilde{\mu}\omega_q^0 \tilde{r} d\tilde{r} \quad 1 - \tilde{r}^2 = \frac{\Omega^2 - (\omega_q^0)^2}{2\tilde{\mu}\omega_q^0}$$

Quand \tilde{r} varie de 0 à 1, Ω varie de

$$\omega_{\max} = \sqrt{\omega_q^0 (\omega_q^0 + 2\tilde{\mu})} \quad \text{à} \quad \omega_{\min} = \omega_q^0$$

$$S_{LDA}(\vec{q}, \omega) = N \frac{15}{8} \int_{\omega_{\min}}^{\omega_{\max}} d\Omega \times$$

$$\frac{\Omega^2 - (\omega_q^0)^2}{\tilde{\mu}^2 \omega_q^0} \sqrt{1 - \frac{\Omega^2 - (\omega_q^0)^2}{2\tilde{\mu}\omega_q^0}} \delta(\omega - \Omega)$$

$$S_{LDA}(\vec{q}, \omega) = \frac{15N}{4\tilde{\mu}} \frac{\omega^2 - \omega_{\min}^2}{\omega_{\max}^2 - \omega_{\min}^2} \sqrt{\frac{\omega_{\max}^2 - \omega^2}{\omega_{\max}^2 - \omega_{\min}^2}}$$

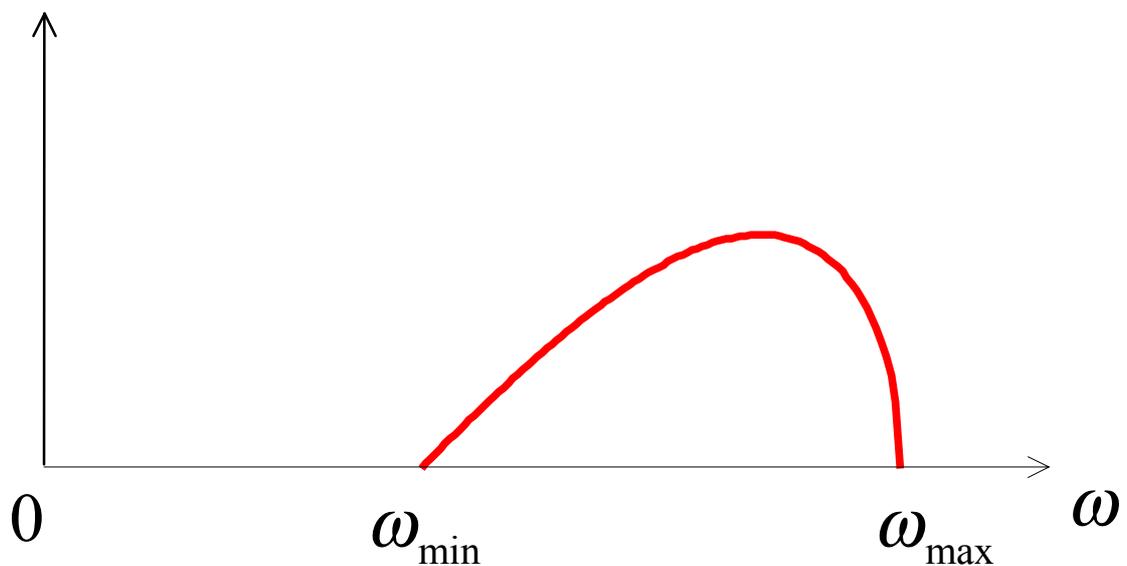
Propriétés de $S_{LDA}(\vec{q}, \omega)$

- Homogène à l'inverse d'une fréquence.
- Proportionnel au nombre d'atomes N
- Ne dépend pas de la direction de \vec{q} même si le piège est anisotrope
- N'est différent de 0 que pour

$$\omega_{\min} \leq \omega \leq \omega_{\max}$$

- Forme asymétrique

$$S_{LDA}(\vec{q}, \omega)$$



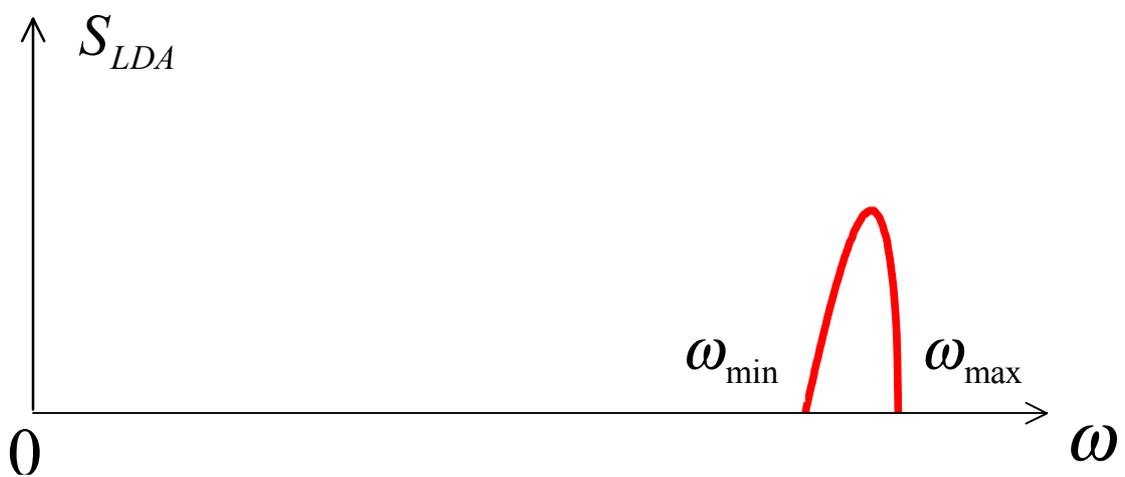
Limites

$$\omega_q^0 \gg \tilde{\mu} \quad \text{et} \quad \omega_q^0 \ll \tilde{\mu}$$

$$\frac{\omega_{\max}^2 - \omega_{\min}^2}{\omega_{\min}^2} = \frac{2\tilde{\mu}\omega_q^0}{\omega_{\min}^2} = 2\frac{\tilde{\mu}}{\omega_q^0}$$

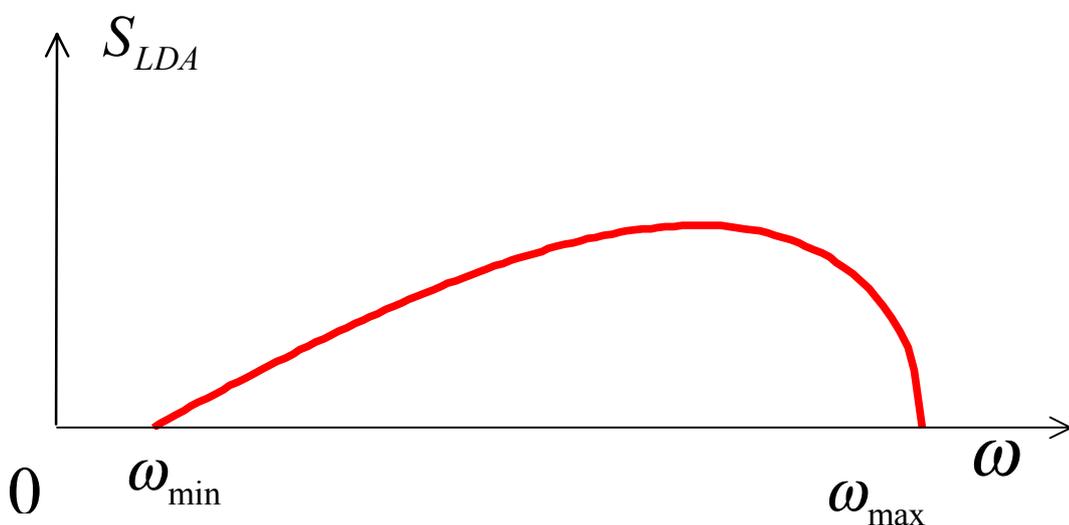
$$\omega_q^0 \gg \tilde{\mu}$$

La largeur du spectre est très petite devant l'abscisse de son barycentre



$$\omega_q^0 \ll \tilde{\mu}$$

La largeur du spectre est de l'ordre de l'abscisse de son barycentre



Autre écriture de $S_{LDA}(\vec{q}, \omega)$

Posons :

$$\frac{\omega^2 - \omega_{\min}^2}{\omega_{\max}^2 - \omega_{\min}^2} = u$$

On a alors :

$$\frac{\omega_{\max}^2 - \omega^2}{\omega_{\max}^2 - \omega_{\min}^2} = 1 - u$$

$$S_{LDA}(\vec{q}, \omega) = \frac{15N}{4\tilde{\mu}} u \sqrt{1-u}$$

Quand ω varie de ω_{\min} à ω_{\max} , u varie de 0 à 1.

Autres relations utiles.

$$\begin{aligned}\omega^2 &= \omega_{\min}^2 + (\omega_{\max}^2 - \omega_{\min}^2)u \\ &= (\omega_q^0)^2 + 2\tilde{\mu}\omega_q^0 u\end{aligned}$$

$$\omega^2 = (\omega_q^0)^2 [1 + \alpha]u$$

avec

$$\alpha = 2\tilde{\mu} / \omega_q^0$$

Facteur de structure statique à l'approximation de densité locale

$$S_{LDA}(\vec{q}) = \frac{1}{N} \int d\omega S_{LDA}(\vec{q}, \omega)$$

$$S_{LDA}(\vec{q}, \omega) = \frac{15N}{4\tilde{\mu}} u \sqrt{1-u}$$

$$\omega^2 = (\omega_q^0)^2 [1 + \alpha u] \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{2\tilde{\mu}}{\omega_q^0}$$

$$2\omega d\omega = \alpha (\omega_q^0)^2 du$$

$$d\omega = \alpha \frac{(\omega_q^0)^2}{2\omega} du = \alpha \omega_q^0 \frac{1}{2\sqrt{1+\alpha u}} du$$

$$S_{LDA}(\vec{q}) = \frac{15}{4} \int_0^1 du \frac{u \sqrt{1-u}}{\sqrt{1+\alpha u}}$$

$S_{LDA}(\vec{q})$ ne dépend de q que par l'intermédiaire de

$$\alpha = \frac{2\tilde{\mu}}{\omega_q^0} = \frac{4m\tilde{\mu}}{\hbar q^2}$$

Facteur de structure statique $S_{LDA}(\vec{q})$

à la limite $\omega_q^0 \gg \tilde{\mu}$

On a alors $\alpha \ll 1$ et par suite

$$\sqrt{1 + \alpha u} \simeq 1 + (\alpha/2)u$$

$$\begin{aligned} S_{LDA}(\vec{q}) &\simeq \frac{15}{4} \int_0^1 du \frac{u\sqrt{1-u}}{1 + (\alpha/2)u} \\ &\simeq \frac{15}{4} \int_0^1 du \left[u\sqrt{1-u} - (\alpha/2)u^2\sqrt{1-u} \right] \end{aligned}$$

Des intégrations par parties donnent :

$$\int_0^1 du u \sqrt{1-u} = 4/15$$

$$\int_0^1 du u^2 \sqrt{1-u} = 16/105$$

de sorte que

$$S_{LDA}(\vec{q}) \simeq \frac{15}{4} \left[\frac{4}{15} - \frac{\alpha}{2} \frac{16}{105} \right] = 1 - \frac{4}{7} \frac{\tilde{\mu}}{\omega_q^0}$$

$$\boxed{\tilde{\mu} \ll \omega_q^0 \quad \Rightarrow \quad S_{LDA}(\vec{q}) \simeq 1 - \frac{4}{7} \frac{\tilde{\mu}}{\omega_q^0}}$$

Barycentre du spectre

à la limite $\omega_q^0 \gg \tilde{\mu}$

D'après (T-47), $\langle \omega \rangle = m_1(\vec{q}) / m_0(\vec{q})$

Par, ailleurs, d'après (T-43) et (T-46)

$$m_0(\vec{q}) = N S(\vec{q})$$

$$m_1(\vec{q}) = N \hbar q^2 / 2m = N \omega_q^0$$

En remplaçant $S(\vec{q})$ par l'expression de $S_{LDA}(\vec{q})$ trouvée plus haut, on obtient :

$$\langle \omega \rangle = \frac{\omega_q^0}{1 - \frac{4}{7} \frac{\tilde{\mu}}{\omega_q^0}} \simeq \omega_q^0 \left[1 + \frac{4}{7} \frac{\tilde{\mu}}{\omega_q^0} \right] = \omega_q^0 + \frac{4}{7} \tilde{\mu}$$

Pour un condensat homogène dont la densité spatiale serait égale à la densité ρ_0 au centre du piège, on aurait (voir T-61) :

$$\langle \omega \rangle = \omega_q^B \underset{\omega_q^0 \gg \tilde{\mu}}{\simeq} \omega_q^0 + g \rho_0 / \hbar = \omega_q^0 + \tilde{\mu}$$

Le facteur 4/7 trouvé plus haut provient de la moyenne spatiale de ρ inférieure à ρ_0 .

Largeur du spectre

à la limite $\omega_q^0 \gg \tilde{\mu}$

De l'ordre de $\omega_{\max} - \omega_{\min}$ (voir première figure de T-111)

Or, d'après (T-109), quand $\omega_q^0 \gg \tilde{\mu}$,

$$\omega_{\max} - \omega_{\min} \simeq \omega_q^0 + \tilde{\mu} - \omega_q^0 = \tilde{\mu}$$

La largeur du spectre est donc de l'ordre de $\tilde{\mu}$. Un calcul plus précis du second moment de ω est possible à partir de l'expression de $S_{LDA}(\vec{q}, \omega)$ et donne :

$$\Delta\omega = \sqrt{8/147} \tilde{\mu}$$

Finalem^{ent}, par rapport à un condensat homogène, l'inhomogénéité spatiale de la densité spatiale $\rho(\vec{r})$ conduit à un spectre qui n'est pas infiniment étroit, mais qui a une largeur de l'ordre de $\tilde{\mu}$. De plus, le déplacement du barycentre par rapport à ω_q^0 est inférieur à la valeur $\tilde{\mu}$ obtenue pour la valeur maximale ρ_0 de ρ .

Facteur de structure statique $S_{LDA}(\vec{q})$

à la limite $\omega_q^0 \ll \tilde{\mu}$

On a alors $\alpha \gg 1$ et par suite

$$\sqrt{1 + \alpha u} \simeq \sqrt{\alpha u}$$

$$\begin{aligned} S_{LDA}(\vec{q}) &\simeq \frac{15}{4} \int_0^1 du \frac{u \sqrt{1-u}}{\sqrt{\alpha u}} \\ &\simeq \frac{15}{4\sqrt{\alpha}} \int_0^1 du \sqrt{u(1-u)} \end{aligned}$$

Un changement de variables $u = \cos^2 \theta$ et une intégration par parties permet d'obtenir

$$\int_0^1 du \sqrt{u(1-u)} = \pi / 8$$

de sorte que l'on obtient finalement

$$S_{LDA}(\vec{q}) \simeq \frac{15}{4} \frac{\hbar q}{2m} \sqrt{\frac{m}{\mu}} \frac{\pi}{8} = \frac{\hbar q}{2m \bar{c}}$$

où

$$\bar{c} = \frac{32}{15\pi} \sqrt{\frac{\mu}{m}} = \frac{32}{15\pi} c < c$$

Barycentre du spectre ($\omega_q^0 \ll \bar{\mu}$)

La même méthode de calcul donne :

$$\langle \omega \rangle = \frac{m_1(\vec{q})}{m_0(\vec{q})} = \frac{\omega_q^0}{S_{LDA}(\vec{q})} = \bar{c}q$$

Pour un condensat homogène dont la densité spatiale serait égale à la densité ρ_0 au centre du piège, on aurait (voir T-60) :

$$\langle \omega \rangle = \omega_q^B \underset{\omega_q^0 \ll \bar{\mu}}{\simeq} cq$$

La moyenne spatiale de ρ est inférieure à ρ_0 dans un piège inhomogène, d'où le facteur $32/15\pi$ de réduction de \bar{c} par rapport à c .

Largeur du spectre

La deuxième figure de T-111 montre que cette largeur est de l'ordre de l'abscisse du barycentre, c'est à dire de l'ordre de $\bar{c}q$.

Récapitulation des résultats pour un condensat inhomogène

Par rapport à un condensat homogène, le spectre de diffusion a une largeur non nulle.

1. Pour les très grandes valeurs de q

($q \gg q_D$) le spectre est essentiellement un spectre Doppler.

Le rayon fini R_0 du condensat entraîne une dispersion de vitesses liée au confinement spatial et donc un élargissement Doppler.

La vitesse moyenne est par contre nulle et le barycentre du spectre n'est pas déplacé par rapport à la fréquence de recul ω_q^0 .

2. Pour des valeurs plus faibles de q

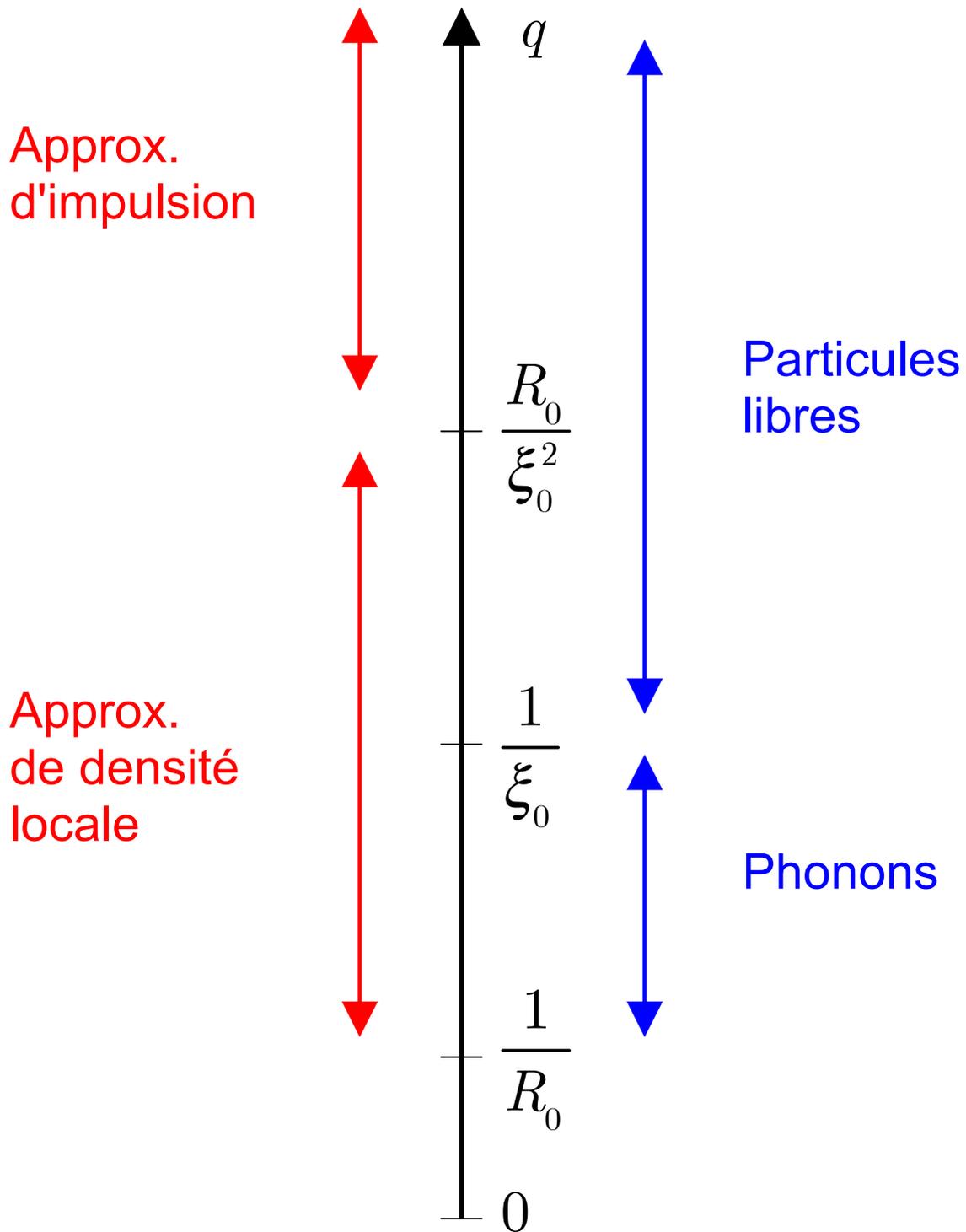
($1 / R_0 \ll q \ll q_D$), la forme du spectre est essentiellement déterminée par les interactions.

Chaque zone du condensat est le siège d'excitations élémentaires dont la fréquence dépend de la densité spatiale au point considéré.

L'inhomogénéité spatiale de la densité d'atomes entraîne une inhomogénéité spatiale de la fréquence du spectre correspondant aux diverses zones du condensat.

Le barycentre du spectre est donné par la moyenne spatiale de ces fréquences, la largeur du spectre par la dispersion de ces fréquences autour de la valeur moyenne.

Récapitulation des approximations



Etude du domaine $q \approx q_D = \frac{R_0}{\xi_0^2}$

La largeur Doppler et la largeur due aux interactions sont du même ordre de grandeur.

Situation rencontrée expérimentalement.

Les approximations d'impulsion et de densité locale sont inapplicables car elles négligent l'un ou l'autre effet.

2 méthodes

- Etude des moments d'ordre 1 et 2 du spectre de diffusion à partir d'un Hamiltonien approché décrivant les excitations élémentaires (réf.12)
- Approximation eikonale effectuée sur une expression du spectre déduite de la généralisation du traitement de Bogolubov à un condensat inhomogène (réf.9).

Seule, la 1ère méthode sera présentée ici.
Méthode des moments

Fonction d'onde de l'état fondamental

Solution de l'équation de G-P

Fonctions propres $\psi_0(\vec{r})$ du
"Hamiltonien" \hat{H}_0

$$\hat{H}_0 = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{r}) + g\rho(\hat{r})$$

$$\rho(\hat{r}) = N |\psi_0(\hat{r})|^2$$

Excitations élémentaires

La condition $q \simeq q_D$ implique $q \gg 1/\xi_0$
puisque $q_D \gg 1/\xi_0$.

On a donc $\hbar\omega_q^0 \gg \mu$ et les excitations
élémentaires sont de type particule libre.

Si $\rho(\vec{r})$ était uniforme et égal à ρ_0 , les
énergies de ces excitations élémentaires
seraient égales aux valeurs propres de \hat{H}_0
augmentées de $g\rho_0$ (voir T-61)

Hamiltonien approché décrivant les excitations élémentaires

Dans l'esprit de l'approximation de densité locale, il semble raisonnable d'ajouter à \hat{H}_0 la perturbation $g\rho(\hat{\vec{r}})$ dépendant maintenant de $\hat{\vec{r}}$ pour décrire l'effet des interactions.

Par contre, on ne néglige pas le terme d'énergie cinétique $\hat{p}^2 / 2m$ pour garder dans la théorie l'effet du mouvement des atomes.

L'hamiltonien approché \hat{H}_{exc} utilisé pour décrire les excitations est donc

$$\hat{H}_{\text{exc}} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{\vec{r}}) + 2g\rho(\hat{\vec{r}})$$

avec toujours $\rho(\vec{r}) = N |\psi_0(\vec{r})|^2$

$\psi_0(\vec{r})$ étant la solution de l'équation G-P.

Poids de la transition reliant

ψ_0 à l'état excité ψ_f

Utilisant l'expression de $\hat{\rho}_{\vec{q}}$ en première quantification

$$\hat{\rho}_{\vec{q}} = \sum_{i=1}^N e^{i\vec{q}\cdot\hat{r}_i}$$

On trouve que ce poids est proportionnel à

$$\left| \langle \psi_f | e^{i\vec{q}\cdot\hat{r}} | \psi_0 \rangle \right|^2$$

Moment d'ordre k de l'énergie E_f de l'état excité ψ_f

$$\begin{aligned} m_k(E_f) &= \sum_f E_f^k \left| \langle \psi_f | e^{i\vec{q}\cdot\hat{r}} | \psi_0 \rangle \right|^2 \\ &= \sum_f \left| \langle \psi_0 | e^{-i\vec{q}\cdot\hat{r}} | \psi_f \rangle \langle \psi_f | e^{i\vec{q}\cdot\hat{r}} | \psi_0 \rangle \right| E_f^k \\ &= \langle \psi_0 | e^{-i\vec{q}\cdot\hat{r}} \left(\hat{H}_{\text{exc}} \right)^k e^{+i\vec{q}\cdot\hat{r}} | \psi_0 \rangle \end{aligned}$$

On a utilisé

$$\hat{H}_{\text{exc}} | \psi_f \rangle = E_f | \psi_f \rangle$$

Calcul de $e^{-i\vec{q}\cdot\hat{\vec{r}}}\hat{H}_{\text{exc}}e^{i\vec{q}\cdot\hat{\vec{r}}}$

Le seul terme de \hat{H}_{exc} qui ne commute pas avec $\hat{\vec{r}}$ est le terme d'énergie cinétique. En utilisant les relations de commutations entre $\hat{\vec{p}}$ et $\hat{\vec{r}}$, on obtient

$$\begin{aligned}e^{-i\vec{q}\cdot\hat{\vec{r}}}\hat{\vec{p}}e^{i\vec{q}\cdot\hat{\vec{r}}} &= \hat{\vec{p}} + e^{-i\vec{q}\cdot\hat{\vec{r}}}\left[\hat{\vec{p}}, e^{i\vec{q}\cdot\hat{\vec{r}}}\right] \\ &= \hat{\vec{p}} + \hbar\vec{q}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}e^{-i\vec{q}\cdot\hat{\vec{r}}}\frac{\hat{\vec{p}}^2}{2m}e^{i\vec{q}\cdot\hat{\vec{r}}} &= \frac{1}{2m}\left[\hat{\vec{p}} + \hbar\vec{q}\right]^2 \\ &= \frac{\hat{\vec{p}}^2}{2m} + \frac{\hbar^2q^2}{2m} + \hbar\vec{q}\cdot\frac{\hat{\vec{p}}}{m}\end{aligned}$$

et par suite

$$\begin{aligned}e^{-i\vec{q}\cdot\hat{\vec{r}}}\hat{H}_{\text{exc}}e^{i\vec{q}\cdot\hat{\vec{r}}} &= \hat{H}_0 + g\rho(\hat{\vec{r}}) \\ &\quad + \frac{\hbar^2q^2}{2m} + \hbar\vec{q}\cdot\frac{\hat{\vec{p}}}{m}\end{aligned}$$

Moment d'ordre 1 de l'énergie

$E_f - E_0$ de la transition $\psi_0 \leftrightarrow \psi_f$

$$m_1(E_f - E_0) = m_1(E_f) - m_1(E_0)$$

$$\begin{aligned} m_1(E_f) &= \langle \psi_0 | e^{-i\vec{q}\cdot\hat{r}} \hat{H}_{\text{exc}} e^{i\vec{q}\cdot\hat{r}} | \psi_0 \rangle \\ &= E_0 + \frac{\hbar^2 q^2}{2m} + \langle g \rho(\hat{r}) \rangle + \left\langle \hbar \vec{q} \cdot \frac{\hat{p}}{m} \right\rangle \end{aligned}$$

Les symboles $\langle \rangle$ signifient valeur moyenne dans l'état ψ_0 . Comme $\langle \hat{p} \rangle = \vec{0}$ le dernier terme est nul

$$m_1(E_f) = E_0 + \hbar^2 q^2 / 2m + \langle g \rho(\hat{r}) \rangle$$

$$m_1(E_0) = \sum_f E_0 \left| \langle \psi_f | e^{i\vec{q}\cdot\hat{r}} | \psi_0 \rangle \right|^2 = E_0$$

$$m_1(E_f - E_0) = \hbar^2 q^2 / 2m + \langle g \rho(\hat{r}) \rangle$$

$\hbar^2 q^2 / 2m =$ Energie de recul

$\langle g \rho(\hat{r}) \rangle =$ Moyenne spatiale dans ψ_0 du déplacement dû aux interactions.

Moment d'ordre 2 de l'énergie $E_f - E_0$ de la transition $\psi_0 \leftrightarrow \psi_f$

$$\begin{aligned} m_2(E_f - E_0) &= \sum_f (E_f - E_0)^2 \left| \langle \psi_f | e^{i\vec{q}\cdot\hat{r}} | \psi_0 \rangle \right|^2 \\ &= m_2(E_f) + E_0^2 - 2E_0 m_1(E_f) \end{aligned}$$

Calcul de $m_2(E_f)$

$$\begin{aligned} m_2(E_f) &= \langle \psi_0 | e^{-i\vec{q}\cdot\hat{r}} \hat{H}_{\text{exc}}^2 e^{i\vec{q}\cdot\hat{r}} | \psi_0 \rangle \\ &= \langle \psi_0 | \left[e^{-i\vec{q}\cdot\hat{r}} \hat{H}_{\text{exc}} e^{i\vec{q}\cdot\hat{r}} \right]^2 | \psi_0 \rangle \end{aligned}$$

Utilisons les résultats de T-126 pour

$$e^{-i\vec{q}\cdot\hat{r}} \hat{H}_{\text{exc}} e^{i\vec{q}\cdot\hat{r}}$$

Par ailleurs, comme ψ_0 a une parité bien définie, les valeurs moyennes dans ψ_0 de tous les termes linéaires en \hat{p} (termes impairs) sont nulles.

Expression de $m_2(E_f)$

$$m_2(E_f) = \left(E_0 + \frac{\hbar^2 q^2}{2m} \right)^2 + g^2 \left\langle \left[\rho(\hat{r}) \right]^2 \right\rangle \\ + \left\langle \left[\hbar \vec{q} \cdot \frac{\vec{p}}{m} \right]^2 \right\rangle + 2 \left(E_0 + \frac{\hbar^2 q^2}{2m} \right) \left\langle g \rho(\hat{r}) \right\rangle$$

Par ailleurs, d'après (T-127)

$$2E_0 m_1(E_f) = 2E_0 \left(E_0 + \frac{\hbar^2 q^2}{2m} \right) + 2E_0 \left\langle g \rho(\hat{r}) \right\rangle$$

Expression de $m_2(E_f - E_0)$

$$m_2(E_f - E_0) = m_2(E_f) + E_0^2 - 2E_0 m_1(E_f) \\ = \frac{\hbar^4 q^4}{4m^2} + g^2 \left\langle \left[\rho(\hat{r}) \right]^2 \right\rangle + \left\langle \left[\hbar \vec{q} \cdot \frac{\vec{p}}{m} \right]^2 \right\rangle \\ + 2 \frac{\hbar^2 q^2}{2m} \left\langle g \rho(\hat{r}) \right\rangle$$

Variance de $E_f - E_0$

$$\left[\Delta(E_f - E_0) \right]^2 = m_2(E_f - E_0) - \left[m_1(E_f - E_0) \right]^2$$

D'après (T-127)

$$\begin{aligned} \left[m_1(E_f - E_0) \right]^2 &= \frac{\hbar^4 q^4}{4m^2} + \left[\langle g\rho(\hat{r}) \rangle \right]^2 \\ &\quad + 2 \frac{\hbar^2 q^2}{2m} \langle g\rho(\hat{r}) \rangle \end{aligned}$$

On en déduit finalement, compte tenu de T-129

$$\begin{aligned} \left[\Delta(E_f - E_0) \right]^2 &= g^2 \left\{ \left\langle \left[\rho(\hat{r}) \right]^2 \right\rangle - \left[\langle \rho(\hat{r}) \rangle \right]^2 \right\} \\ &\quad + \hbar^2 \left\langle \left[\vec{q} \cdot \frac{\hat{p}}{m} \right]^2 \right\rangle \end{aligned}$$

1^{ère} ligne : Carré de la dispersion des déplacements dûs aux interactions.

2^{ème} ligne : Carré de l'élargissement Doppler

Conclusion de l'approche utilisant la méthode des moments

Dans la région $q \approx q_D$ où l'effet Doppler et l'effet des interactions sont comparables, il est légitime :

- D'ajouter les déplacements moyens du spectre dûs à chacun des 2 effets. En fait, le déplacement Doppler moyen est nul.
- D'ajouter les carrés des largeurs spectrales dues à chacun des 2 effets.

La largeur Doppler et la largeur due aux interactions s'ajoutent quadratiquement.

Références (reprise et suite de T-106)

9. F. Zambelli, L. Pitaevskii, D.M. Stamper-Kurn, S. Stringari, Phys.Rev. **A61**, 063608 (2000).
10. P. Hohenberg, P.Platzman, Phys.Rev. **152**, 198 (1966).
11. P. Platzman, N.Tzoar, Phys.Rev. **139**, A410, (1965).
12. W. Ketterle, Spinor Condensates and Light Scattering from Bose-Einstein Condensates, in Les Houches Summer School 1999, Session LXXII, eds. R.Kaiser, C. Westbrook (cond-mat/0005001)

Description de quelques expériences récentes
sur la diffusion d'un photon ou d'un atome par un condensat

Buts de ce cours

- Décrire des expériences récentes réalisées à M.I.T. dans l'équipe de W.Ketterle sur la diffusion d'un photon ou d'un atome par un condensat.
- Discuter les résultats obtenus et les comparer aux prévisions théoriques des chapitres précédents.
- Souligner en particulier la décroissance observée du facteur de structure statique aux faibles valeurs de q , et l'observation du seuil de superfluidité.

Plan

1.Principe des méthodes utilisées pour la diffusion de Bragg (T-133 à T-140).

- Comment faire varier l'impulsion et l'énergie transférées.
- Comment mesurer le taux de diffusion.
- Vitesse d'expansion balistique et vitesse de propagation de l'excitation élémentaire.

2.Diffusion de Bragg dans le régime particule libre (T-141 à T-142)

- Images de temps de vol.
- Barycentre et largeur du spectre. Comparaison avec les prédictions théoriques.

3. Diffusion de Bragg dans le régime phonon (T-143 à T-150)

- Images de temps de vol. Comparaison avec le régime particule libre.
- Spectres de diffusion.
- Etude expérimentale du facteur de structure statique.
- Barycentre des spectres.

4. Etude expérimentale de la diffusion d'un atome sonde (T-151 à T-155).

- Principe des méthodes utilisées pour préparer l'atome sonde et faire varier sa vitesse.
- Limite $v \gg c$.
- Limite $v < c$.

Références (T-156)

Figures donnant les résultats expérimentaux (T-157 à 166).

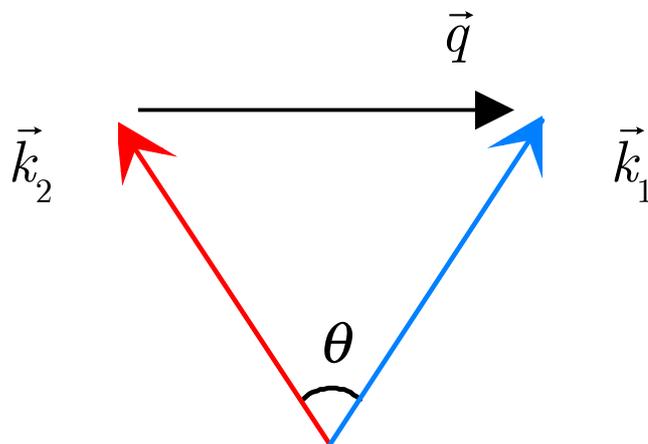
Expériences de M.I.T. sur la diffusion de Bragg

Absorption d'un photon \vec{k}_1, ω_1

Emission stimulée d'un photon \vec{k}_2, ω_2

Atome restant dans le même état interne

Références 12, 15 et 16



Transfert d'impulsion $\hbar \vec{q} = \hbar (\vec{k}_1 - \vec{k}_2)$

Transfert d'énergie $\hbar \omega = \hbar (\omega_1 - \omega_2)$

$$\omega \ll \omega_1, \omega_2 \Rightarrow |\vec{k}_1| \simeq |\vec{k}_2| \simeq k$$

$$|\vec{q}| = 2k \sin(\theta / 2)$$

θ : Angle entre \vec{k}_1 et \vec{k}_2

Fréquences $\omega_1 / 2\pi$ et $\omega_2 / 2\pi$ désaccordées de 1.7 GHz par rapport à la résonance optique

Pour faire varier $|\vec{q}|$,

on change l'angle θ entre \vec{k}_1 et \vec{k}_2

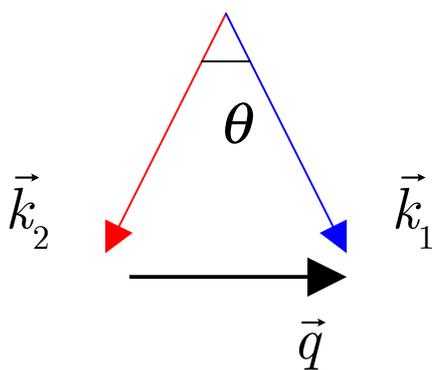
- Transfert maximal d'impulsion

\vec{k}_1 et \vec{k}_2 opposés : $\vec{q} \approx 2\vec{k}_1$



- Petits transferts d'impulsion

Angle θ petit entre \vec{k}_1 et \vec{k}_2



$$|\vec{q}| = 2k \sin \frac{\theta}{2}$$

Pour faire varier ω ,

On fait passer les 2 faisceaux laser, issus de la même source, à travers 2 modulateurs acousto-optiques qui permettent de faire varier ω_1 et ω_2 , donc $\omega_1 - \omega_2$

Mesure du taux de diffusion

On s'arrange pour que les excitations créées au cours du processus de diffusion quittent le condensat et donnent une image bien distincte de celle du condensat après la phase d'expansion balistique nécessaire pour l'imagerie.

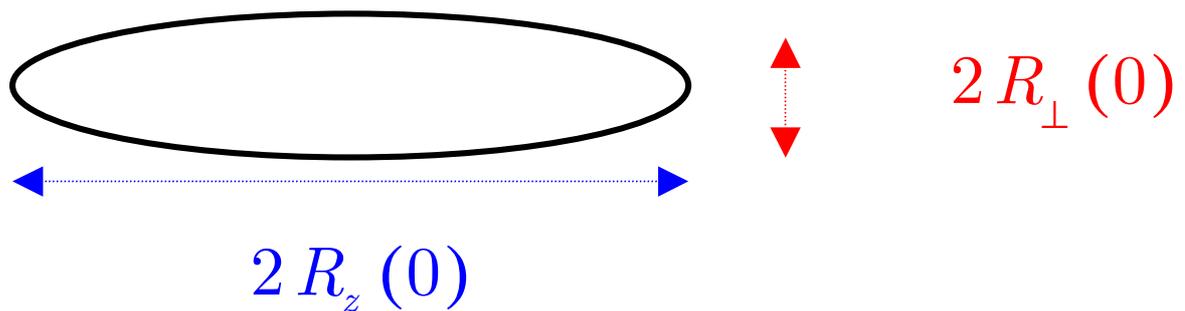
On peut alors mesurer le nombre d'atomes éjectés hors du condensat et étudier comment ce nombre d'atomes varie avec les divers paramètres.

L'expansion balistique du condensat doit être moins rapide que l'éjection des atomes hors du condensat. Sinon les 2 images ne seraient pas séparées.

Rappels sur l'expansion balistique

(voir cours 1998-99, pages X-2 et X-3)

Condensat ayant la forme d'un cigare allongé horizontal



$$A = \frac{R_z (0)}{R_{\perp} (0)} = \text{Rapport d'anisotropie} \gg 1$$

A $t = 0$, le piège est coupé. L'évolution du condensat peut être décrite en termes de dilatations radiale et axiale (voir par exemple réf.13)

$$R_{\perp} (\tau) = R_{\perp} (0) \sqrt{1 + \tau^2}$$

$$R_z (\tau) = R_z (0) \left\{ 1 + \frac{1}{A^2} \left[\tau \text{Arc tan } \tau - \ln \sqrt{1 + \tau^2} \right] \right\}$$

$$\tau = \omega_{0\perp} t$$

$\omega_{0\perp}$ Fréquence d'oscillation radiale du piège.

Expansion balistique radiale

Pour $\tau \gg 1$, c-à-d pour $t \gg 1 / \omega_{0\perp}$

$$\begin{aligned} R_{\perp}(t) &\simeq R_{\perp}(0) \tau \\ &\simeq R_{\perp}(0) \omega_{0\perp} t \end{aligned}$$

Par ailleurs, à la limite de Thomas-Fermi, $R_{\perp}(0)$ est déterminé par l'équation

$$\frac{1}{2} m \omega_{0\perp}^2 R_{\perp}^2(0) = \mu$$

μ : Potentiel chimique

On a donc

$$\omega_{0\perp} R_{\perp}(0) = \sqrt{2 \frac{\mu}{m}} = \sqrt{2} c$$

c : Vitesse du son (au centre du condensat)

On en déduit

$$R_{\perp}(t) \underset{\tau \gg 1}{\simeq} \sqrt{2} c t$$

La vitesse d'expansion balistique radiale est égale à $\sqrt{2} c$

Expansion balistique axiale

Pour $\tau \gg 1$, c-à-d pour $\tau \gg 1 / \omega_{0\perp}$

$$\text{Arc tan } \tau \simeq \pi / 2$$

$$\tau \text{Arc tan } \tau \gg \ln \sqrt{1 + \tau^2}$$

$$R_z(t) \simeq \frac{R_{\perp}(0)^2}{R_z(0)} \omega_{0\perp} \frac{\pi}{2} t$$

$$\omega_{0\perp} R_{\perp}(0) = \sqrt{2} c$$

$$R_z(t) \simeq \frac{1}{A} \frac{\pi}{2} \sqrt{2} c t$$

La vitesse d'expansion axiale est $2 A / \pi$ fois plus petite que la vitesse d'expansion radiale.

Le rapport d'anisotropie $R_z(t) / R_{\perp}(t)$ initialement très grand ($A \gg 1$) devient plus petit que 1.

Vérification expérimentale: voir Figure VI.1 (figure 6.9 de la référence 14).

Comparaison de la vitesse d'une excitation élémentaire et de la vitesse d'expansion balistique.

1-Excitation de type particule libre

On a alors

$$\hbar^2 q^2 / 2m \gg \mu$$

condition équivalente à

$$(\hbar q / m)^2 \gg \mu / m = c^2$$

La vitesse de propagation de l'excitation élémentaire, $\hbar q / m$, est très grande devant la vitesse d'expansion balistique radiale égale à $c\sqrt{2}$.

L'excitation se séparera aisément du condensat, même si elle se propage dans une direction radiale où la vitesse d'expansion balistique est la plus élevée.

2- Excitation de type phonon.

On a alors :

$$\frac{\hbar^2 q^2}{2m} \ll \mu$$

L'excitation se propage à la vitesse du son c , inférieure à la vitesse d'expansion balistique radiale $c\sqrt{2}$.

Si l'excitation se propage dans une direction radiale, elle ne pourra donc pas se séparer du condensat.

Il faut donc créer l'excitation dans la direction axiale pour laquelle la vitesse d'expansion balistique est beaucoup plus faible que c .

Images de temps de vol dans le régime particule libre

Figure VI.2 (Fig.3 de la référence 12)

- Les 2 lasers induisant la transition Raman stimulée sont verticaux, de sens opposés, perpendiculaires au condensat ayant la forme d'un cigare horizontal.
- Ils sont appliqués pendant $500\mu\text{s}$, puis coupés, de même que le piège.
- La figure VI-2 montre une image de temps de vol après 20ms d'expansion balistique, pour diverses valeurs de l'écart $\nu = \omega / 2\pi$ entre les fréquences des 2 lasers. On voit à la fois l'image des atomes éjectés hors du condensat et celle de ceux qui restent.
- Il apparaît clairement une résonance pour une valeur de ν légèrement supérieure à la valeur $\nu_0 = \omega_q^0 / 2\pi$ où $\hbar\omega_q^0$ est l'énergie de recul correspondant à l'impulsion transférée $\hbar q$.

Quelques données expérimentales

$$\omega_q^0 / 2\pi = \nu_0 = 100 \text{ kHz}$$

$$\mu / h = 6 \text{ kHz}$$

On est donc bien dans le régime de particule libre

$$\hbar k / m = 60 \text{ mm/s}$$

$$c = 10 \text{ mm/s}$$

Barycentre du spectre

La figure VI-3 (Fig.3a de la réf. 15) montre le déplacement $\nu - \nu_0$ du barycentre du spectre de la figure VI-2 par rapport à la fréquence ν_0 en fonction de la densité d'atomes au centre du piège. Les ronds et les triangles correspondent à différentes fréquences d'oscillations radiales .

La variation linéaire de $\nu - \nu_0$ avec la densité d'atomes est en très bon accord avec la prédiction théorique $4\mu/7h$ (voir T-115).

Largeur du spectre

La figure VI-4a (Fig.5a de la réf.12) montre la largeur du spectre de la figure VI-2 en fonction de la densité d'atomes au centre du piège. Les ronds et les triangles correspondent à différentes fréquences d'oscillation radiale.

La courbe en traits tiretés est la prédiction théorique $\sqrt{8/147} \mu / h$ pour l'élargissement dû aux interactions (voir T-116)

Les courbes en pointillés sont les prédictions théoriques pour l'élargissement Doppler, différent pour les ronds et les triangles, qui correspondent à des condensats de dimensions différentes.

Les courbes en traits pleins correspondent à l'addition quadratique des 2 largeurs précédentes.

La courbe de la fig.VI-4b donne la largeur Doppler en fonction de la dimension du condensat (en accord avec la limite déduite des relations de Heisenberg).

Images de temps de vol dans le régime phonon

Figure VI.5 (Fig.1 de la référence 16)

- Les lasers sont maintenant symétriques par rapport à la verticale et font un petit angle de 14° . L'impulsion $\hbar q$ transférée est le long de la direction axiale du condensat, pour laquelle l'expansion balistique est la plus lente.
- On a maintenant $\omega_q^0 / 2\pi = \nu_0 = 1.5$ kHz, $\mu / \hbar = 6$ kHz, $\hbar q / m = 7$ mm/s, $c = 10$ mm/s.
- Les lasers sont appliqués pendant $400 \mu\text{s}$. Puis, $100 \mu\text{s}$ après, le piège est coupé, et on observe les atomes après 70 ms d'expansion balistique.
- La figure VI-5b représente l'image obtenue, la figure VI-5d le profil axial (après moyenne radiale). Pour les figures VI-5c et VI-5e, on applique les lasers après 5ms d'expansion balistique, réduisant la densité d'atomes par un facteur 23.

Commentaires sur les figures VI-5b et 5d

- L'excitation créée par les lasers est de type phonon et se propage au début à la vitesse c . Puis, quand la densité d'atomes diminue au cours de l'expansion balistique, elle se transforme en excitation de particule libre et se propage à la vitesse $\hbar k / m$.

- La vitesse d'expansion axiale est très faible et les atomes éjectés arrivent à se séparer du condensat. Leur nombre est cependant très faible à cause de la réduction du facteur de structure statique pour les faibles valeurs de q .

- On arrive cependant à distinguer ces atomes qui donnent une image un petit peu plus sombre à droite de l'image du condensat sur la figure VI-5b et un léger épaulement à droite de l'image du condensat sur la figure VI-5d

Commentaires sur les figures VI-5c et 5e

- Quand les lasers sont appliqués après 5 ms d'expansion balistique, la densité d'atomes a tellement diminué que les excitations créées sont de type particule libre, se propageant à la vitesse $\hbar q / m$.
- Le facteur de structure est maintenant beaucoup plus grand car la diffusion se fait dans un régime de particule libre. Le nombre d'atomes éjectés est alors beaucoup plus grand et on obtient des images beaucoup plus visibles à droite du condensat sur les figures VI-5c, e.
- Les cercles tracés sur les figures VI-5b et VI-5c indiquent la vitesse du son dans le condensat initial. Cette vitesse est $\sqrt{2}$ fois plus petite que la vitesse d'expansion radiale. L'image des atomes éjectés sur la figure VI-5c est à l'intérieur de ce cercle, ce qui montre que $\hbar q / m$ est bien inférieur à c et que l'excitation se fait dans le régime phonon pour les figures VI-5b,d.

Spectres de diffusion

Figure VI.6 (Fig.2 de la référence 16)

L'impulsion transférée par les lasers est égale au produit du nombre N_{out} d'atomes éjectés hors du condensat par

$$\hbar\vec{q} = \hbar(\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \quad \text{si } \omega_1 - \omega_2 > 0$$

$$-\hbar\vec{q} = -\hbar(\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \quad \text{si } \omega_1 - \omega_2 < 0$$

On mesure N_{out} sur les figures de temps de vol pour diverses valeurs de $\omega / 2\pi = (\omega_1 - \omega_2) / 2\pi$, et on porte l'impulsion transférée en fonction de $\omega / 2\pi$.

La courbe obtenue (voir Fig.VI.2) est une courbe antisymétrique, ajustée par la différence de deux Gaussiennes centrées autour de deux valeurs symétriques de ω . Les ronds vides correspondent aux figures VI.5b et VI.5d, les ronds pleins aux figures VI.5c et VI.5e.

Commentaires sur la figure VI.6

Les ronds vides correspondent à une excitation de type phonon.

Les 2 Gaussiennes sont donc centrées en $\pm \bar{c}q$, avec $\bar{c} = 32c/15\pi$ (voir T-118), et le facteur de structure statique, $S(q) = \hbar q / 2m\bar{c}$, est petit devant 1 (voir T-117).

On comprend ainsi pourquoi ce spectre est moins intense que celui avec les ronds pleins et pourquoi il s'étend plus loin.

Les ronds pleins correspondent en effet à une excitation de type particule libre. Le facteur de structure est alors égal à 1 et les abscisses des maxima du spectre sont égales à $\pm\omega_q^0$, avec ici $\omega_q^0 < \bar{c}q$.

Facteur de structure statique.

Figure VI.7a (Fig.3a de la référence 16)

Le facteur de structure statique $S(\vec{q})$ pour l'excitation dans le régime phonon est déterminé à partir des spectres de la figure VI.6 en mesurant l'aire sous la Gaussienne de droite avec des ronds vides et en la normalisant par l'aire sous la Gaussienne de droite avec des ronds pleins (pour laquelle on sait que $S(\vec{q}) = 1$).

On constate que $S(\vec{q})$ diminue bien quand le nombre d'atomes, c'est à dire encore le potentiel chimique μ , augmente.

La courbe en traits pleins de la figure VI.7a est la prédiction théorique :

$$S(\vec{q}) \approx 1 - 4\mu / 7\hbar\omega_q^0 \quad \text{pour } \mu \text{ petit}$$

$$S(\vec{q}) \approx \hbar q / 2m\bar{c} \propto 1 / \sqrt{\mu} \quad \text{pour } \mu \text{ grand}$$

(voir T-114 et T-117).

Barycentres des spectres.

Figure VI.7b (Fig.3b de la référence 16).

Les ronds pleins de la figure VI.7b sont les abscisses des maxima de la Gaussienne de droite de la figure VI.6 correspondant à une excitation de type phonon (ronds vides), mesurées pour diverses valeurs du potentiel chimique.

La courbe en traits pleins est la prédiction théorique

$$\langle \omega \rangle - \omega_q^0 \simeq 4\mu / 7\hbar \quad \text{pour } \mu \text{ petit}$$

$$\langle \omega \rangle \simeq \bar{c}q \propto \sqrt{\mu} \quad \text{pour } \mu \text{ grand}$$

(voir T-115 et T-118).

Les ronds vides de la figure VI.7b sont les résultats de la référence 15 (voir aussi figure VI.3) pour laquelle q , et donc ω_q^0 , sont plus grands. Tous ces points correspondent alors à une excitation de type particule libre. La droite en pointillés est la prédiction

$$\langle \omega \rangle - \omega_q^0 \simeq 4\mu / 7\hbar$$

Expériences de M.I.T. sur la diffusion d'un atome sonde par un condensat

(Référence 17)

Préparation de l'atome sonde

Transition Raman stimulée de l'état $F = 1, m_F = -1$, dans lequel les atomes sont condensés, vers l'état $F = 1, m_F = 0$ qui n'est pas sensible au champ de piégeage.

Vitesse v de l'atome sonde

Ajustée en variant l'angle entre les 2 faisceaux laser induisant la transition Raman.

Section efficace totale de diffusion

Mesurée sur les images de temps de vol des atomes $F = 1, m_F = 0$ diffusés par le condensat.

Limite $v \gg c$

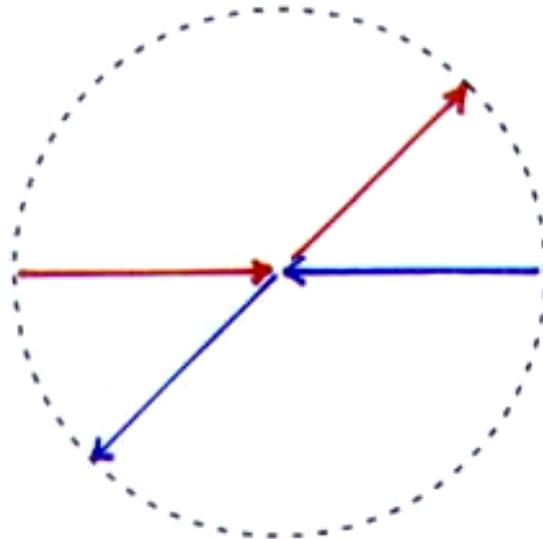
Les extrémités des vecteurs vitesses de l'atome sonde et de l'atome du condensat excité par la collision sont alors sur une sphère de diamètre \vec{v}_s où \vec{v}_s est la vitesse initiale de l'atome sonde (voir T-85 et le transparent T-153 suivant).

Dans l'expérience de la référence 17 (voir la figure VI.8, correspondant à la figure 1 de la référence 17), le régime $v \gg c$ est étudié en prenant $v = 6 \text{ cm/s}$ alors que la vitesse du son est au maximum de 1.1 cm/s .

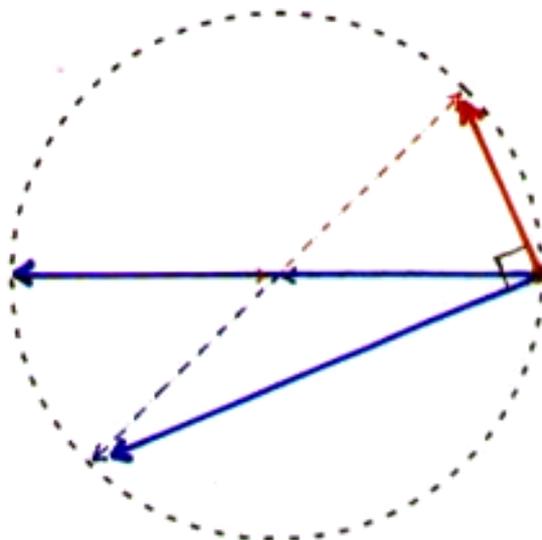
Le champ piégeant est coupé 4ms après l'impulsion Raman. Un gradient de champ est ensuite appliqué pendant 30ms pour séparer par effet Stern-Gerlach les atomes $m_F = 0$ et $m_F = -1$ dans l'image obtenue après un temps de vol de 60ms.

Collision entre 2 atomes de même masse

Dans le référentiel du centre de masse



Dans le référentiel où l'un des 2 atomes est immobile



Limite $v < c$

La vitesse de l'atome sonde est réglée à une valeur plus faible : 7mm/s. Elle est parallèle à l'axe du condensat, direction où l'expansion balistique est lente.

Sous l'effet de la gravité, les atomes tombent et acquièrent une vitesse v_g plus élevée et verticale (perpendiculaire à l'axe du condensat). La vitesse initiale acquise le long de l'axe du condensat lors de la transition Raman permet néanmoins de distinguer les atomes diffusés des atomes non diffusés.

La figure VI.9 (fig.2 de la référence 17) donne les résultats obtenus. Les figures VI.9a et VI.9b correspondent à des nombres d'atomes différents et donc à des vitesses du son différentes, plus grandes pour la figure VI.9a que pour la figure VI.9b.

Commentaires sur la figure VI.9

Pour la figure VI.9a, on est au dessus du seuil de superfluidité. On distingue des zones plus sombres correspondant aux atomes diffusés, aussi bien les atomes sondes (partie supérieure de la figure) que les atomes cibles (partie inférieure de la figure).

Le halo correspondant n'est plus circulaire car la direction de la vitesse des atomes sondes change d'un point à l'autre.

Pour la figure VI.9b, on est en dessous du seuil de superfluidité. On ne distingue plus d'atomes diffusés.

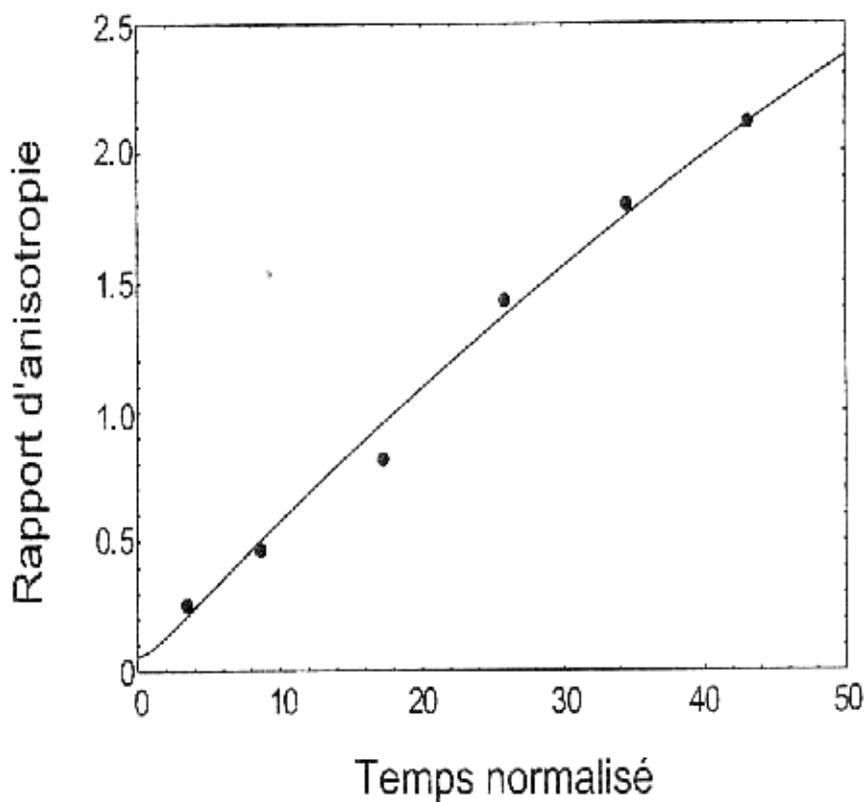
La comparaison avec la théorie du chapitre III est plus difficile car elle nécessite un moyenne spatiale complexe à cause des variations spatiales de v et c . Voir la figure VI.10 (fig.4 de la référence 17).

Références (reprise et suite de T-132)

12. W. Ketterle, Spinor Condensates and Light Scattering from Bose-Einstein Condensates, in Les Houches Summer School 1999, Session LXXII, eds. R.Kaiser, C. Westbrook (cond-mat/0005001).
13. Y.Castin, R.Dum, Phys.Rev.Lett. **77**, 5315 (1996).
14. D.Guéry-Odelin, Thèse, Paris 1998.
15. J.Stenger, S.Inouye, A. Chikkatur, D.Stamper-Kurn, D.Pritchard, W.Ketterle, Phys.Rev.Lett. **82**, 4569 (1999).
16. D.Stamper-Kurn, A.Chikkatur, A.Görlitz, S.Inouye, S.Gupta, D.Pritchard, W.Ketterle, Phys.Rev.Lett. **83**, 2876 (1999).
17. A.Chikkatur, A.Görlitz, D.Stamper-Kurn, S.Inouye, S.Gupta, W.Ketterle, Phys.Rev.Lett. **85**, 483 (2000).

Figure VI-1

Fig.6.9 de la référence 14 :
D. Guéry-Odelin, Thèse de doctorat,
Paris, 1998



Vérification de la prédiction théorique
concernant la variation temporelle du rapport
d'anisotropie.

Figure VI-2

Fig.3 de la reference 12 :

W. Ketterle, Spinor Condensates and Light Scattering from Bose-Einstein Condensates, in Les Houches Summer School 1999, Session LXXII, eds. R.Kaiser, C. Westbrook (cond-mat/0005001).

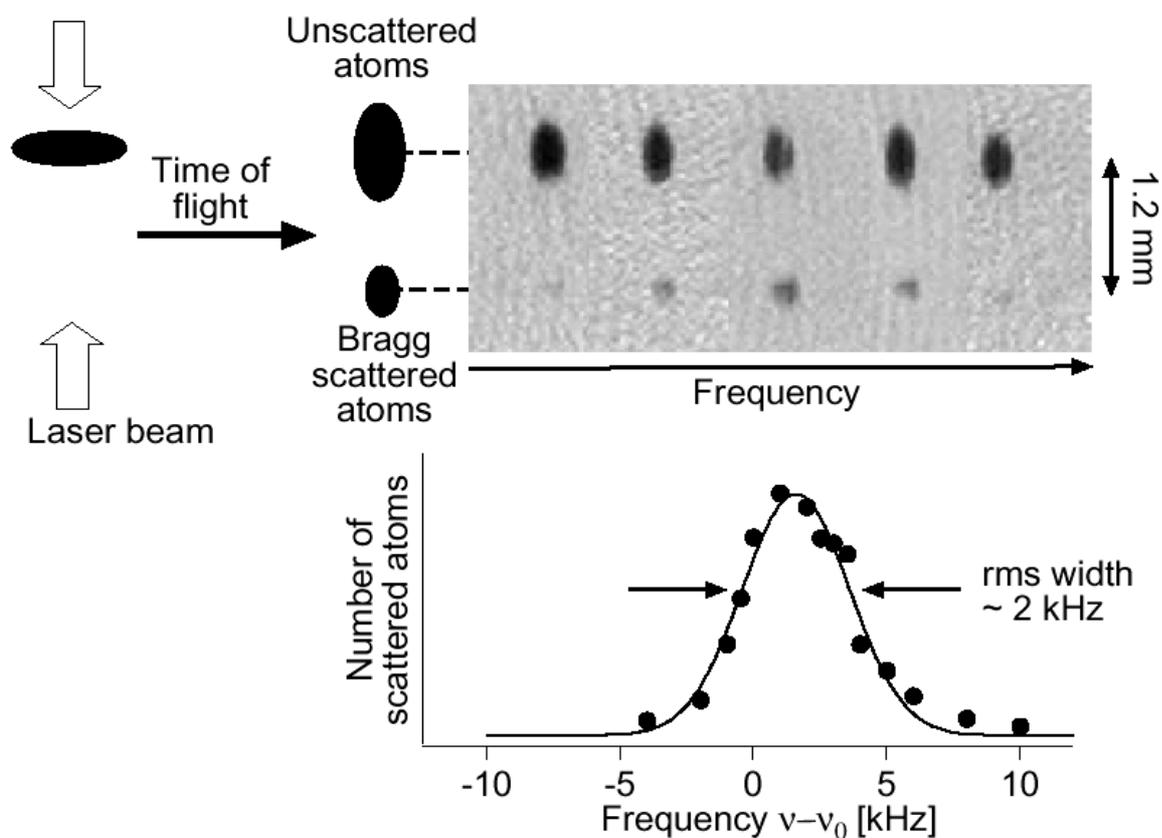


Figure VI-3

Fig.3a de la référence 15 :

J.Stenger, S.Inouye,A. Chikkatur, D.Stamper-Kurn, D.Pritchard, W.Ketterle, Phys.Rev.Lett. **82**, 4569 (1999).

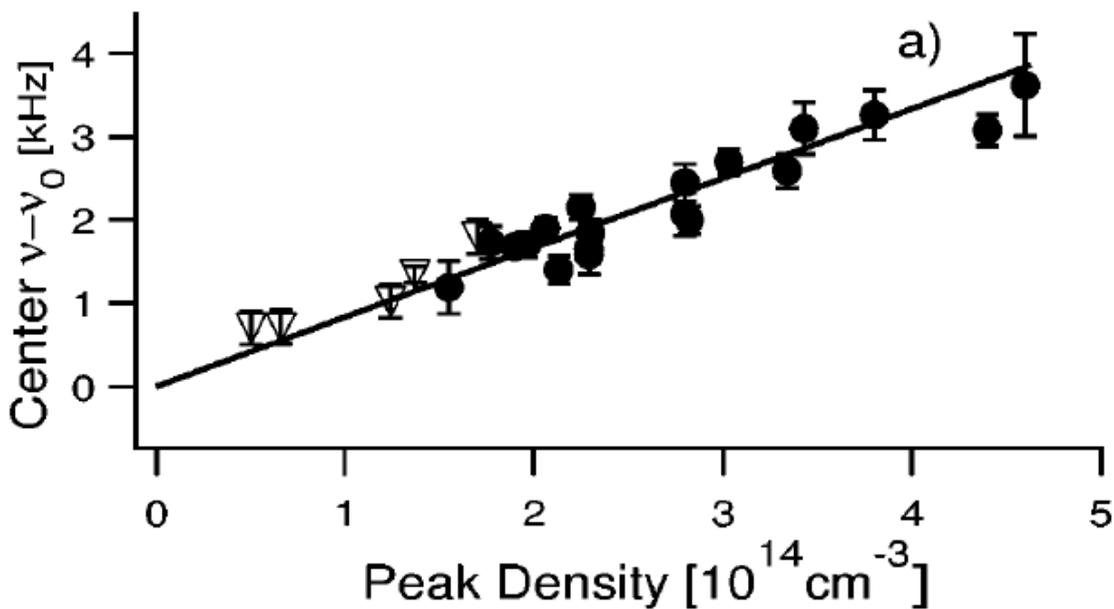


Figure VI-4

Fig.5 de la référence 12 :
W.Ketterle, Spinor Condensates and Light Scattering from Bose-Einstein Condensates, in Les Houches Summer School 1999, Session LXXII, eds. R.Kaiser, C. Westbrook (cond-mat/0005001).

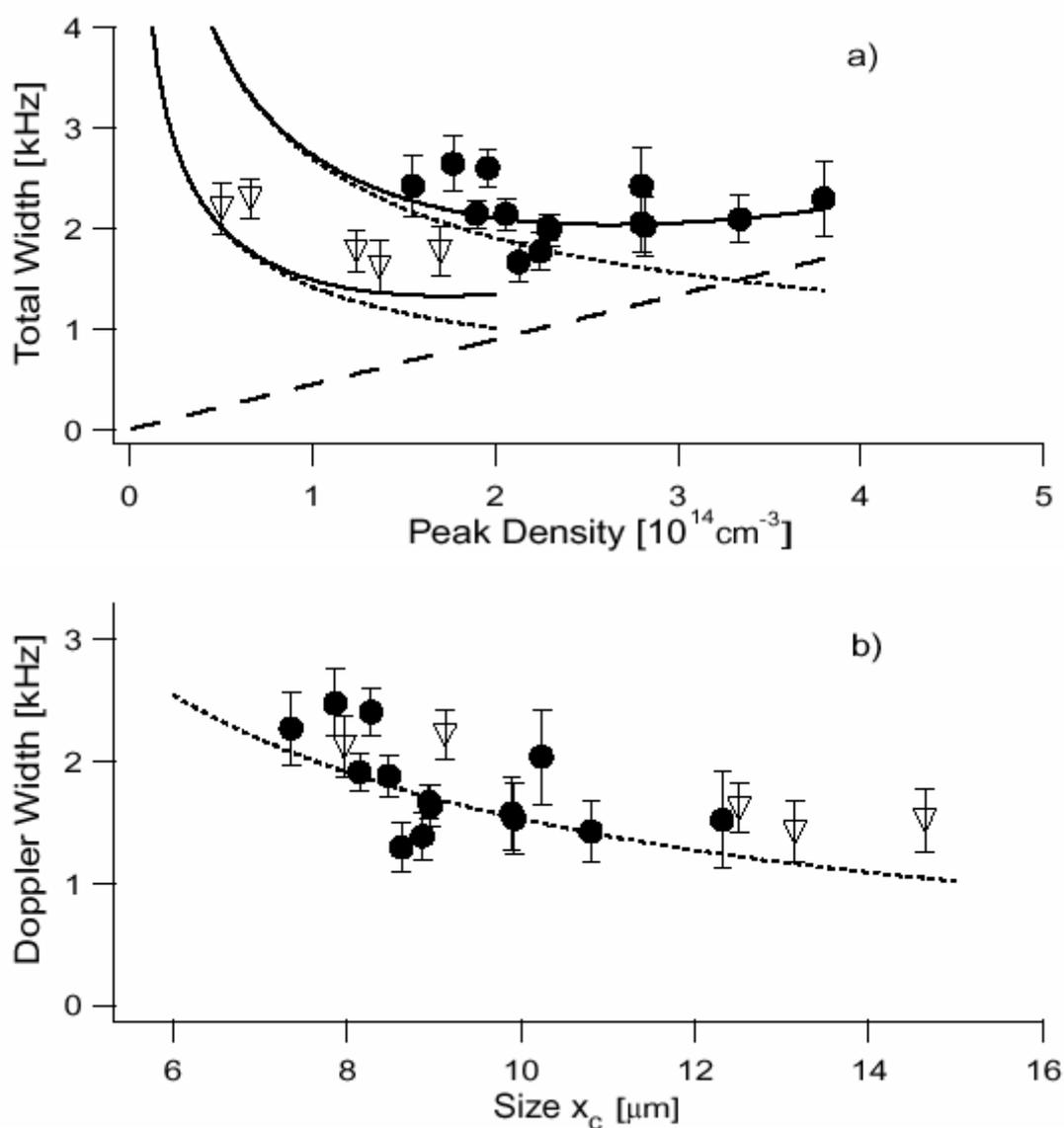


Figure VI-5

Fig.1 de la référence 16 : D.Stamper-Kurn, A.Chikkatur, A.Görlitz, S.Inouye, S.Gupta, D.Pritchard, W.Ketterle, Phys.Rev.Lett. **83**, 2876 (1999).

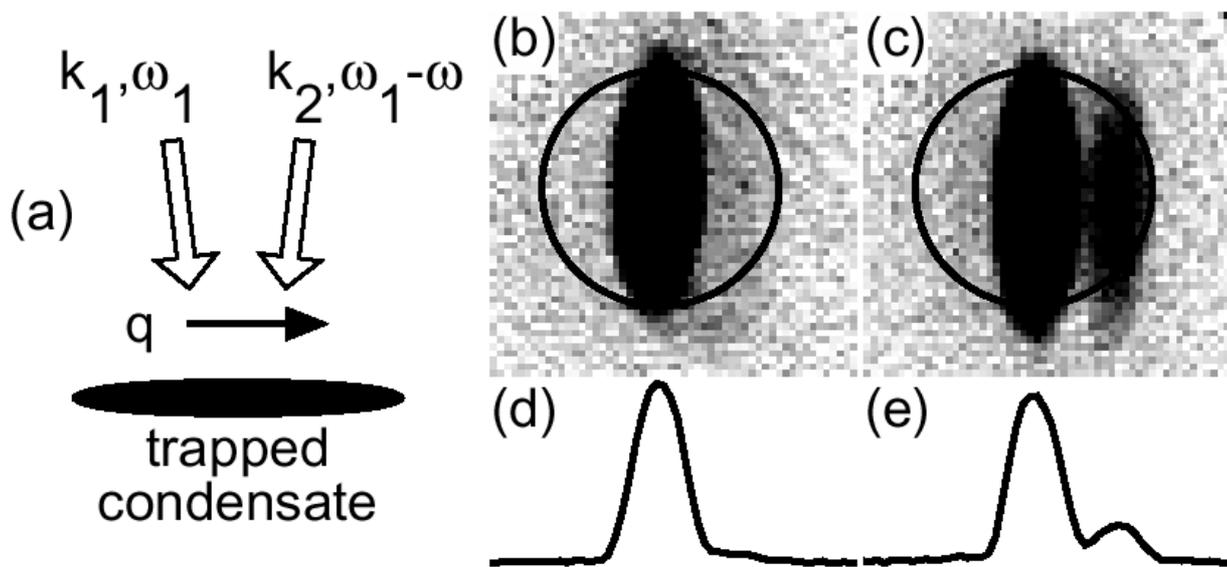


Figure VI-6

Fig.2 de la référence 16 :

D.Stamper-Kurn, A.Chikkatur, A.Görlitz,
S.Inouye, S.Gupta, D.Pritchard, W.Ketterle,
Phys.Rev.Lett. **83**, 2876 (1999).

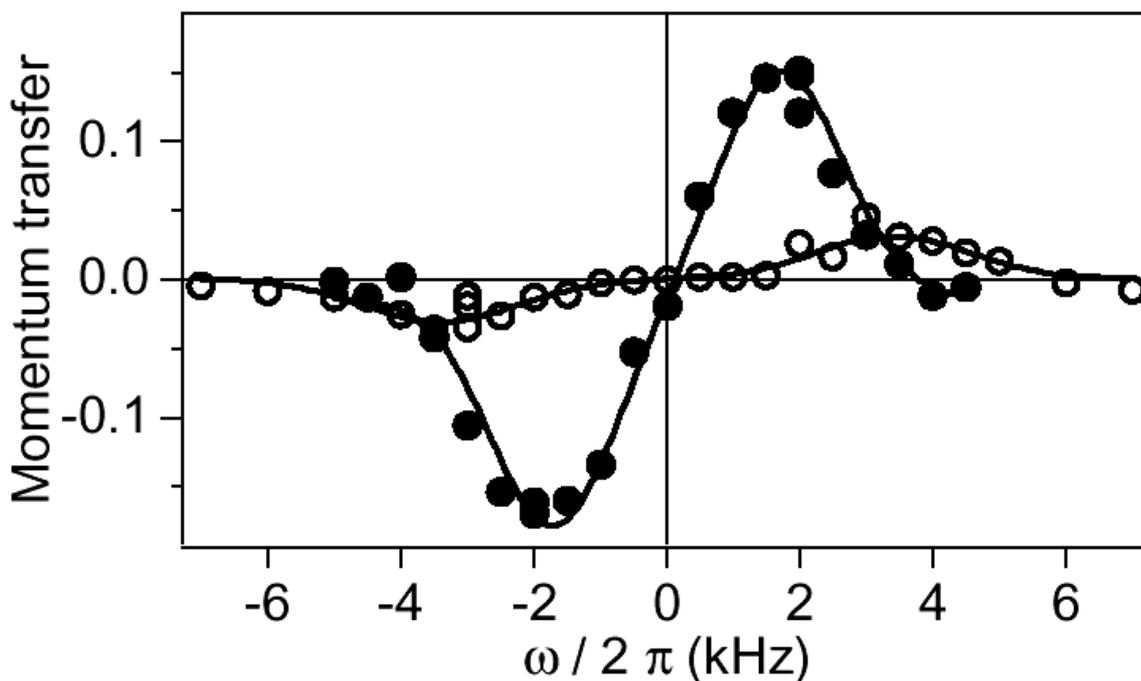


Figure VI-7

Fig.3 de la référence 16 :

D.Stamper-Kurn, A.Chikkatur, A.Görlitz, S.Inouye, S.Gupta, D.Pritchard, W.Ketterle, Phys.Rev.Lett. **83**, 2876 (1999).

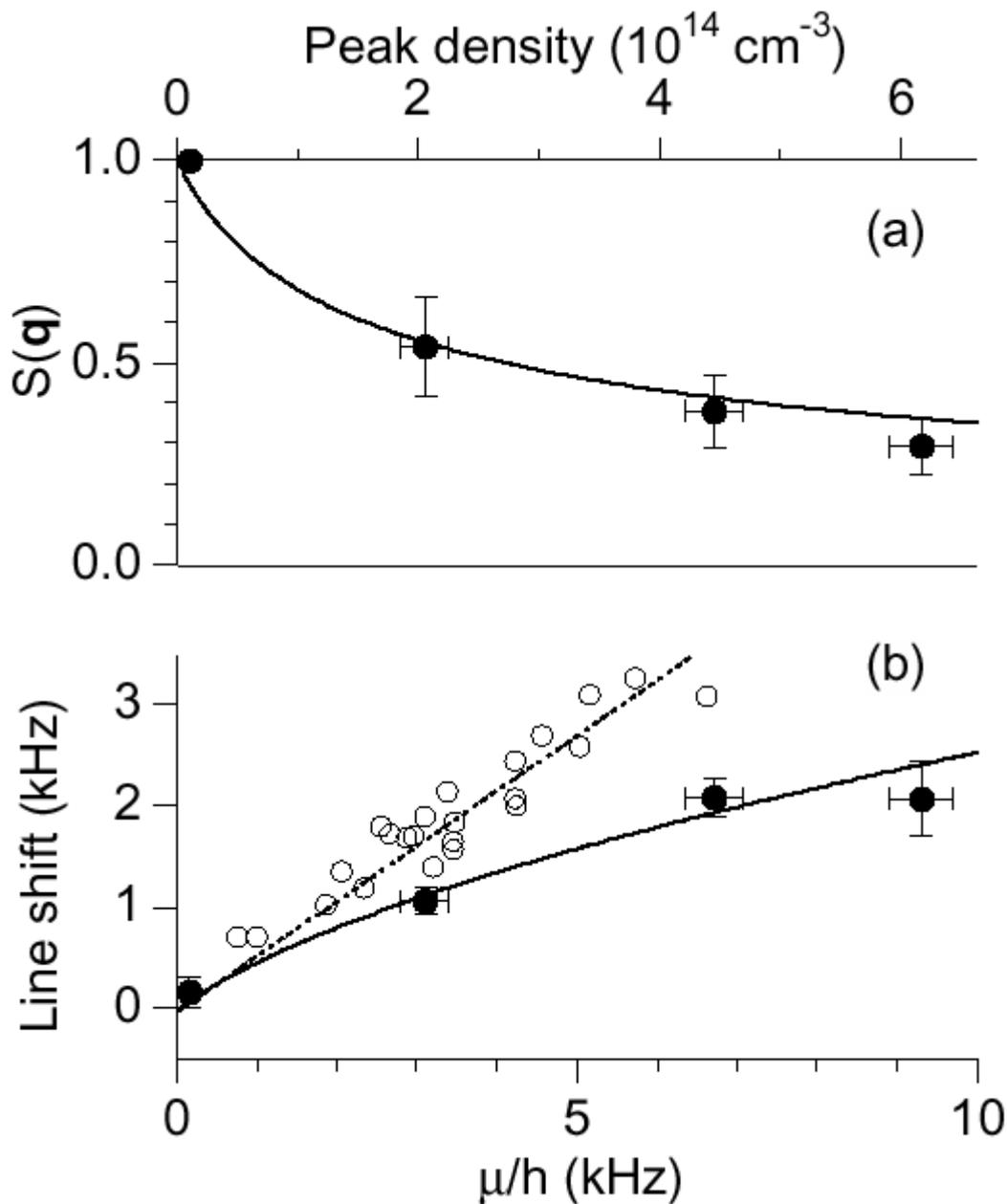


Figure VI-8

Fig.1 de la référence 17 :

A.Chikkatur, A.Görlitz, D.Stamper-Kurn,
S.Inouye, S.Gupta, W.Ketterle, Phys.Rev.Lett.
85, 483 (2000).

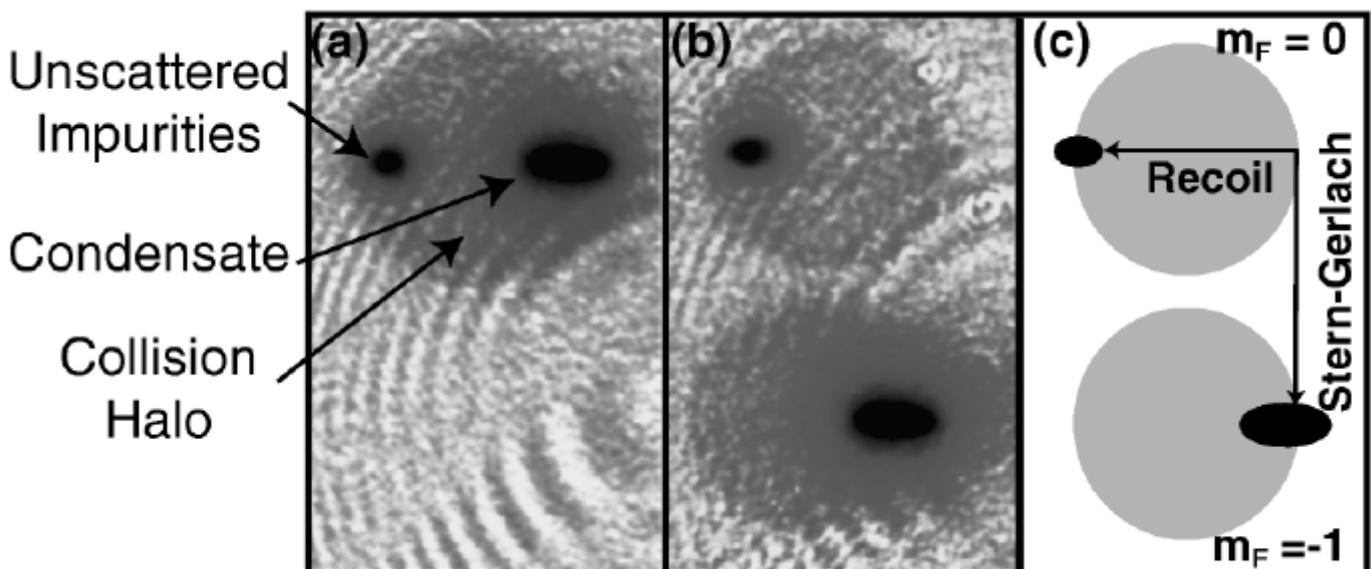


Figure VI-9

Fig.2 de la référence 17 :

A.Chikkatur, A.Görlitz, D.Stamper-Kurn,
S.Inouye, S.Gupta, W.Ketterle, Phys.Rev.Lett.
85, 483 (2000).

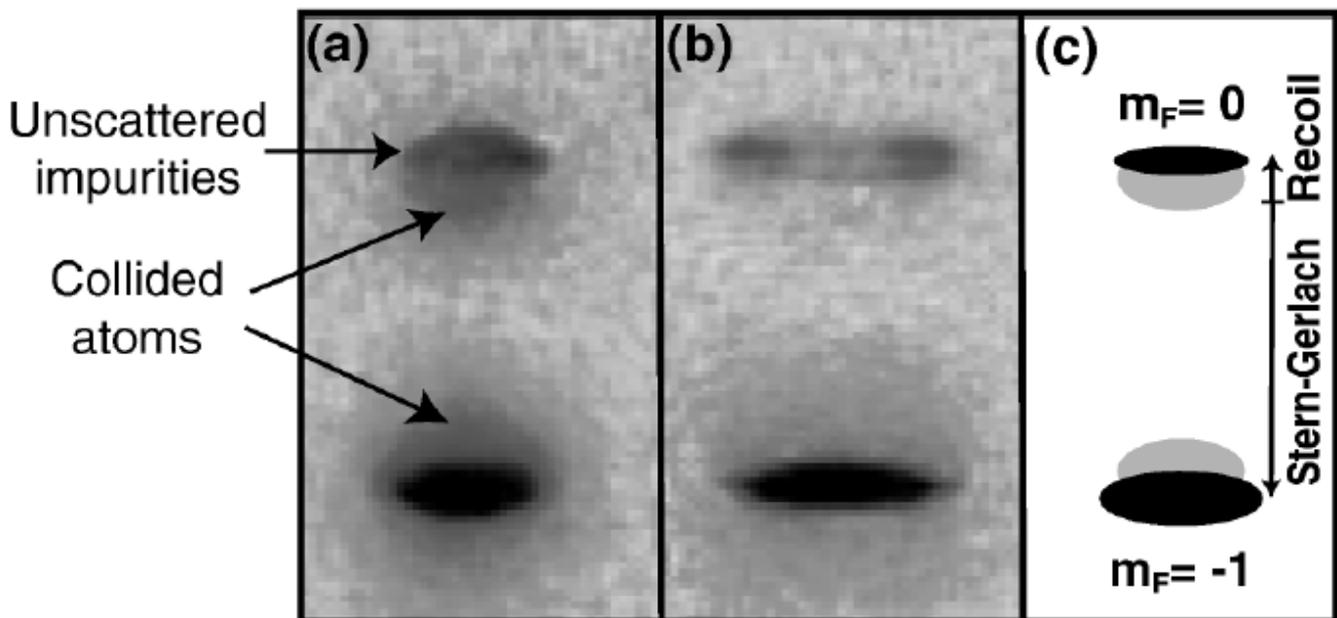
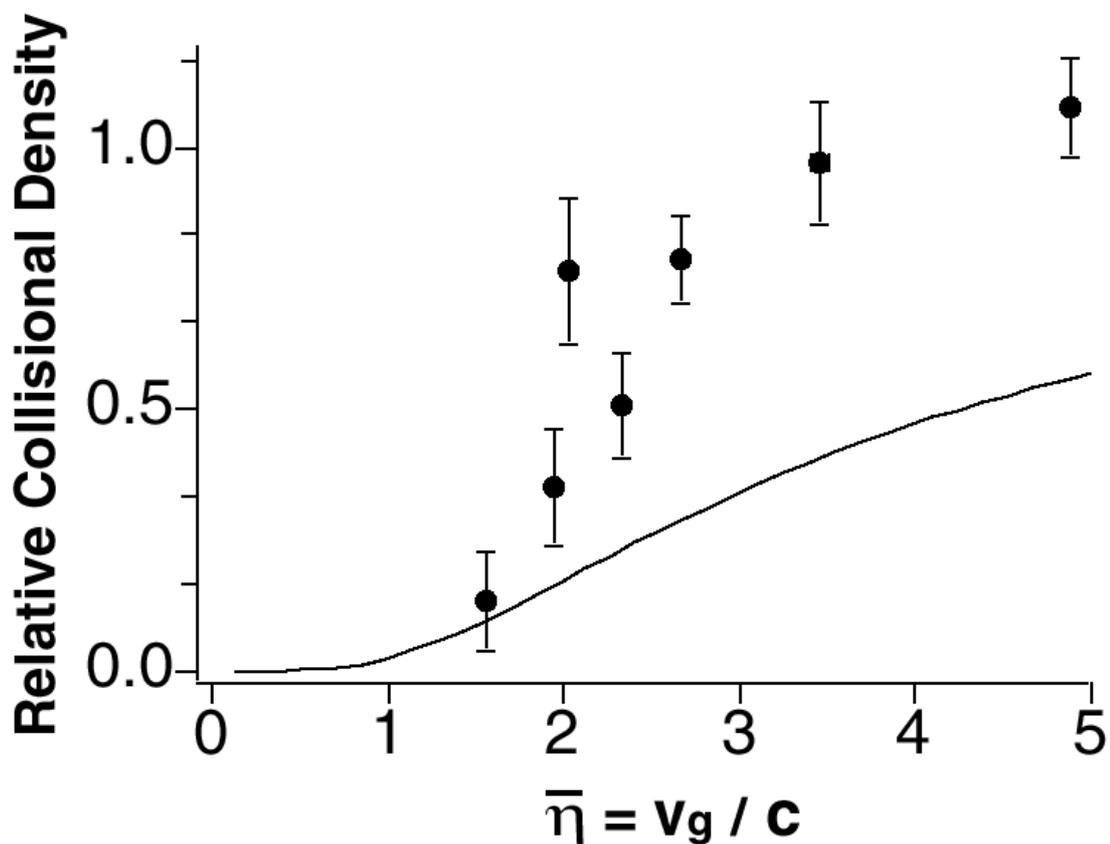


Figure VI-10

Fig.4 de la référence 17 :

A.Chikkatur, A.Görlitz, D.Stamper-Kurn,
S.Inouye, S.Gupta, W.Ketterle, Phys.Rev.Lett.
85, 483 (2000).



<p>Diffusion Rayleigh superradiante sur un condensat de Bose-Einstein</p>

Buts de ce cours

- Décrire une expérience récente réalisée à M.I.T. mettant en évidence la possibilité d'apparition de corrélations entre diffusions de Rayleigh successives.
- Interpréter les résultats obtenus en termes de réseaux de densités créés par les premières diffusions .
- Décrire les résultats obtenus et les comparer aux prédictions théoriques.

Plan

1. Explication qualitative des phénomènes (T-167 à T-170).

- Réseaux de densités résultant de l'interférence entre le condensat et l'onde de matière associée aux atomes qui reculent lors de la diffusion Rayleigh.
- Mécanisme d'amplification.
- Anisotropie de l'amplification.

2. Calcul semiclassique du gain (T-171 à T-179)

- Calcul du réseau de densité.
- Diffraction du faisceau laser incident par le réseau de densité.
- Angle solide d'émission et anisotropie de la diffusion.
- Traitement plus précis.

3. Description des résultats expérimentaux et discussion (T-180 à T-193)

- Paramètres expérimentaux.
- Effets de polarisation.
- Résultats obtenus en l'absence de superradiance.
- Résultats obtenus en présence de superradiance.
- Cascade de diffusions Rayleigh.
- Vitesse de déplétion du condensat.
- Observation de la lumière diffusée.
- Seuil de superradiance

Références (T-194)

Diffusion Rayleigh superradiante Sur un condensat de Bose-Einstein

Référence 18

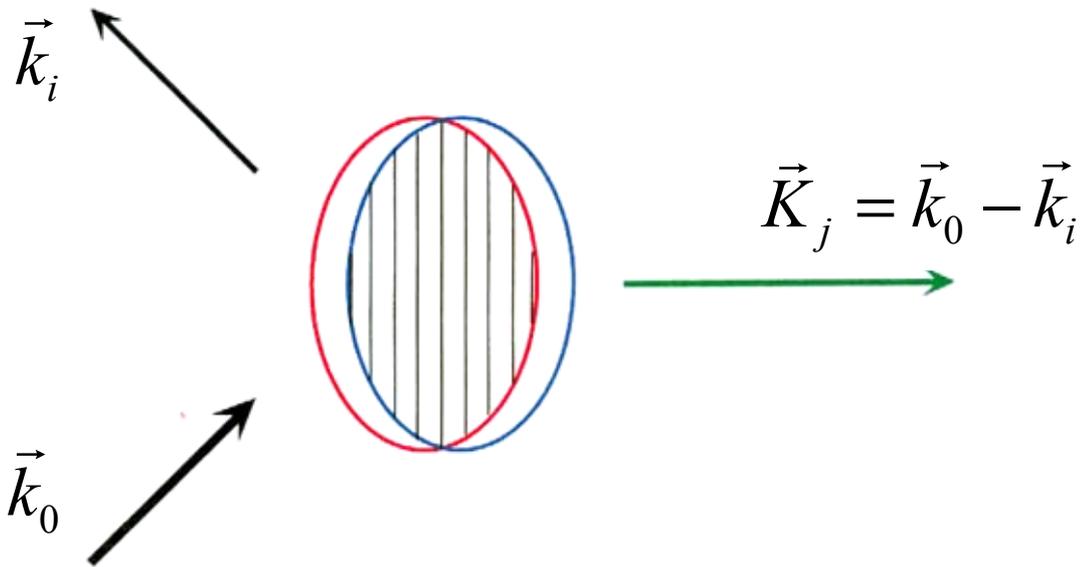
Explication qualitative

Dans un processus de diffusion Rayleigh un photon incident \vec{k}_0 est diffusé par le condensat. Ce photon disparaît et un photon diffusé \vec{k}_i apparaît.

La conservation de l'impulsion globale entraîne qu'une impulsion $\hbar \vec{K}_j = \hbar (\vec{k}_0 - \vec{k}_i)$ est transférée au condensat.

Une onde de matière de vecteur d'onde $\vec{K}_j = \vec{k}_0 - \vec{k}_i$ est donc créée au cours du processus de diffusion. Elle interfère avec le condensat (qui est au repos) pour donner un réseau de densité de vecteur d'onde \vec{K}_j .

Réseau de densité



Le photon diffusé a tout le temps de s'échapper du condensat avant que le réseau de densité ne se soit amorti.

Le processus de diffusion va donc laisser une "empreinte" dans le condensat qui va influencer les diffusions suivantes des photons \vec{k}_0 du faisceau incident.

Mécanisme d'amplification

Le réseau de densité créé par la diffusion $\vec{k}_0 \rightarrow \vec{k}_i$ diffracte le faisceau incident dans la direction $\vec{k}_0 - \vec{K}_j = \vec{k}_i$.

L'apparition d'un premier photon diffusé \vec{k}_i renforce donc la diffusion dans la direction \vec{k}_i . L'onde de matière qui recule dans la direction $\vec{K}_j = \vec{k}_0 - \vec{k}_i$ se trouve alors augmentée, ce qui accroît d'autant la modulation du réseau de densité.

Ce renforcement du réseau de densité augmente la diffraction du faisceau laser dans la direction \vec{k}_i .

Et ainsi de suite...

Anisotropie de l'amplification

Si le condensat est très anisotrope (forme de cigare allongé), le gain apparaissant sur la diffusion Rayleigh par suite de la création d'un réseau de densité peut être très anisotrope.

Comme nous le verrons plus loin, ce gain est maximal quand la direction de \vec{k}_i coïncide avec le grand axe du condensat.

Il se produit alors une émission amplifiée le long de ce grand axe, analogue à la super-radiance d'un milieu allongé.

Cette émission amplifiée est accompagnée d'un recul d'atomes dans la direction $\vec{K}_j = \vec{k}_0 - \vec{k}_i$.

Calcul semiclassique du gain

Expression du réseau de densité

N_0 atomes dans le condensat

N_j atomes reculant avec une impulsion

$$\hbar K_j = \hbar (\vec{k}_0 - \vec{k}_i) .$$

Densité spatiale $\rho_I(\vec{r})$

$$\rho_I(\vec{r}) = \left| \sqrt{N_0} + \sqrt{N_j} e^{i(\vec{k}_0 - \vec{k}_i) \cdot \vec{r}} \right|^2 \tilde{\rho}(\vec{r})$$

$\tilde{\rho}(\vec{r})$: Densité normalisée représentant la forme du condensat.

$$\int d^3r \tilde{\rho}(\vec{r}) = 1$$

Enveloppe lentement variable du réseau de densité.

$$\rho_I(\vec{r}) = \tilde{\rho}(\vec{r}) \left\{ N_0 + N_j + \sqrt{N_0 N_j} \left[e^{i(\vec{k}_0 - \vec{k}_i) \cdot \vec{r}} + e^{-i(\vec{k}_0 - \vec{k}_i) \cdot \vec{r}} \right] \right\}$$

**Nombre de photons incidents \vec{k}_0 diffusés
par seconde par le réseau de densité
dans la direction \vec{k}**

Le réseau est considéré comme statique ($|\vec{k}_0| = |\vec{k}_i|$) et on utilise l'expression du taux de diffusion élastique R_N d'un système à N corps.

$$R_N = R_1 \times \left| \left(\int d^3r \rho_I(\vec{r}) e^{i(\vec{k}_0 - \vec{k}) \cdot \vec{r}} \right)_{k=k_0} \right|^2$$

R_1 : Taux de diffusion élastique pour un seul atome (diffusion Rayleigh).

Nombre de photons diffusés par seconde dans l'angle solide $d^2\Omega_k$ autour de la direction de \vec{k} faisant un angle θ_j avec la polarisation (linéaire) du faisceau laser \vec{k}_0 .

$$R_N \sin^2 \theta_j \frac{d^2\Omega_k}{8\pi/3}$$

Calcul du terme

$$\left| \left(\int d^3 r \rho_I(\vec{r}) e^{i(\vec{k}_0 - \vec{k}) \cdot \vec{r}} \right)_{k=k_0} \right|^2$$

Reportons dans ce terme l'expression de $\rho_I(\vec{r})$ obtenue en T-171.

Le terme intéressant, qui donne une contribution importante pour $\vec{k} = \vec{k}_i$, et qui représente la diffraction du faisceau incident par le réseau de densité, est le terme en $\exp[-i(k_0 - k_i) \cdot \vec{r}]$ de $\rho_I(\vec{r})$. Sa contribution est

$$N_0 N_j \left| \left(\int d^3 \tilde{\rho}(\vec{r}) e^{i(\vec{k}_i - \vec{k}) \cdot \vec{r}} \right)_{k=k_0=k_i} \right|^2$$

Pour $\vec{k} = \vec{k}_i$ ce terme est maximal et vaut $N_0 N_j$. Tous les atomes rayonnent en phase dans la direction \vec{k}_i .

Angle solide Ω_i dans lequel est concentrée l'émission autour de \vec{k}_i

Dès que $\vec{k} \neq \vec{k}_i$, l'exponentielle $\exp i(\vec{k}_i - \vec{k}) \cdot \vec{r}$ diminue l'intégrale.

La T.F. spatiale de $\tilde{\rho}(\vec{r})$ est concentrée autour de $\vec{k} = \vec{k}_i$, dans un angle solide au delà duquel les interférences entre les champs rayonnés par les divers atomes sont destructives.

Définition précise de Ω_i

Nombre total de photons diffusés par seconde autour de la direction \vec{k}_i

$$R_1 \frac{\sin^2 \theta_j}{8\pi/3} N_0 N_j \Omega_i$$

On en déduit

$$\Omega_i = \int d^3\Omega_{\vec{k}} \left| \left(\int d^3k \tilde{\rho}(\vec{r}) e^{i(\vec{k}_i - \vec{k}) \cdot \vec{r}} \right)_{k=k_i=k_0} \right|^2$$

Evaluation simple de Ω_i

Les plans d'égale densité du réseau de densité sont perpendiculaires à \vec{K}_j . Tous les atomes d'un tel plan rayonnent en phase dans la direction \vec{k}_i .

Soit S_i la surface de la section du condensat par un plan perpendiculaire à \vec{k}_i . L'angle solide autour de \vec{k}_i à l'intérieur duquel les interférences ne sont pas destructives est déterminé par la diffraction à partir de la surface S_i .

On a donc

$$\Omega_i \simeq \frac{\lambda^2}{S_i}$$

λ : Longueur d'onde du rayonnement diffusé.

Anisotrope de la diffusion

Si le condensat à la forme d'un cigare allongé d'axe Oz la section de surface S_i la plus petite est perpendiculaire à Ox .

C'est donc dans la direction de l'axe du condensat que l'angle solide Ω_i d'émission est le plus grand, et donc le taux de diffusion Rayleigh du condensat le plus important.

Un condensat allongé, excité par un faisceau incident, diffusera donc préférentiellement ces photons dans la direction de son grand axe.

Expression simple pour le gain

S_i : Surface de la section du condensat par un plan perpendiculaire à \vec{k}_i .

l_i : Longueur du condensat dans une direction parallèle à \vec{k}_i .

V : Volume du condensat $V \approx l_i S_i$

$$\Omega_i \approx \frac{\lambda^2}{S_i} \quad N_0 \approx \rho_0 V \approx \rho_0 l_i S_i$$

Taux de diffusion le long de \vec{k}_i

$$R_1 \frac{\sin^2 \theta_j}{2\pi/3} N_0 N_j \Omega_i \approx R_1 \frac{\sin^2 \theta_j}{2\pi/3} \rho_0 \lambda^2 l_i N_j$$

Le gain est d'autant plus élevé que l_i est plus grand.

$\rho_0 \lambda^2 l_i$ est l'épaisseur optique (à résonance) du condensat le long de la direction de \vec{k}_i .

Traitement plus précis

Défauts du traitement précédent

- La diffusion n'est pas entièrement élastique
- Pour calculer le réseau de densité (voir T-171), on fait interférer 2 ondes $\sqrt{N_0} \psi_0(\vec{r})$ et $\sqrt{N_j} e^{i(\vec{k}_0 - \vec{k}_i) \cdot \vec{r}} \psi_0(\vec{r})$ avec $|\psi_0(\vec{r})|^2 = \tilde{\rho}(\vec{r})$.

En fait, ces 2 ondes sont associées à des nombres de bosons bien définis, N_0 pour la première, N_1 pour la seconde.

La phase relative entre ces deux ondes n'est donc pas bien définie

Il n'y a pas à proprement parler de réseau de densité sur la densité spatiale à 1 corps $\rho_I(\vec{r})$

Taux de diffusion global dans la direction \vec{k}_i

Ce taux de diffusion global (élastique et inélastique) fait intervenir la T.F. spatiale de la densité à 2 corps $\rho_{II}(\vec{r}, \vec{r}')$ (voir T-31 et T-32).

Sur la densité à 2 corps apparaissent des corrélations avec des modulations spatiales de vecteur d'onde $\vec{K}_j = \vec{k}_0 - \vec{k}_i$.

Le calcul correct devrait en fait prendre un mélange statistique de paires d'ondes interférant comme plus haut, mais avec une phase relative θ équipartie entre 0 et 2π .

Comme le taux de diffusion ne dépend pas de θ , on retrouve le même résultat que plus haut.

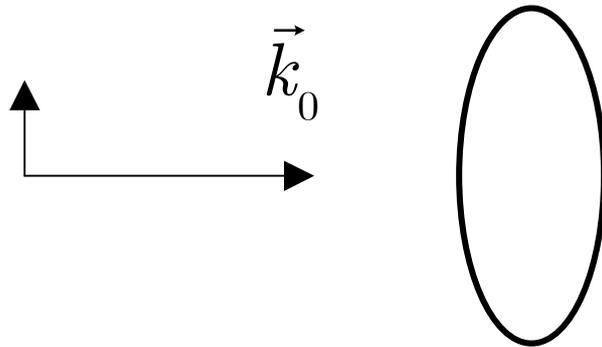
Description de l'expérience

(référence 18)

- Condensat d'atomes de sodium en forme de cigare allongé horizontal.
Diamètre : $20\mu\text{m}$ Longueur : $200\mu\text{m}$
- Excité par un faisceau laser désaccordé de résonance de 1.7 GHz, perpendiculaire au grand axe du condensat et se propageant dans un direction faisant 45° avec la verticale
Durée de l'impulsion : 10 à $800\mu\text{s}$
Intensité : 1 à $100\text{mW}/\text{cm}^2$
R1 variant de $4,5 \cdot 10^1/\text{s}$ à $4,5 \cdot 10^3/\text{s}$
- L'impulsion des atomes subissant le recul $\hbar \vec{K}_j$ est mesurée sur une image de temps de vol après 20 à 50m/s d'expansion balistique.

Effets de polarisation

Polarisation parallèle à l'axe du condensat



L'angle θ_j entre la polarisation du laser et l'axe du condensat est nul. On a alors $\sin^2 \theta_j = 0$ et il ne peut pas y avoir de diffusion Rayleigh le long de l'axe du condensat.

L'effet de superradiance discuté plus haut est inhibé.

Polarisation perpendiculaire à l'axe du condensat

On a alors $\theta_j = \pi / 2$ et $\sin^2 \theta_j = 1$.

L'effet de superradiance n'est plus inhibé.

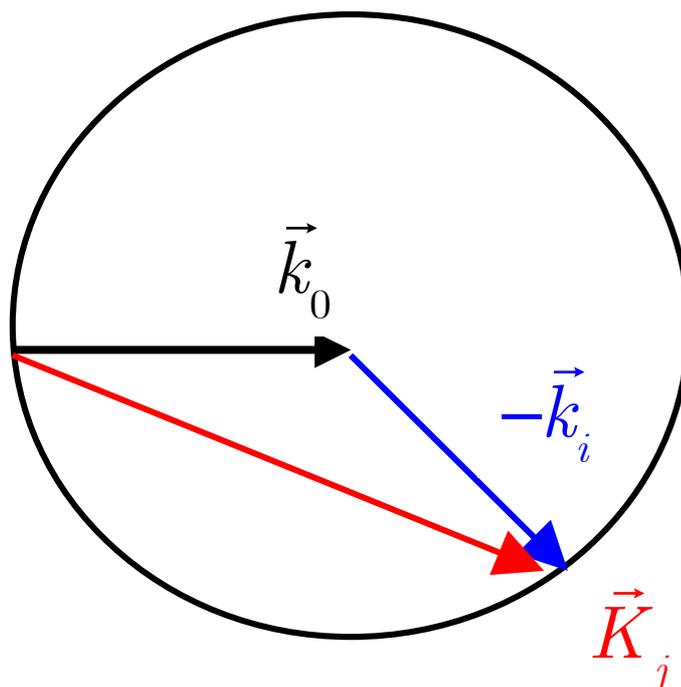
Résultats expérimentaux en l'absence de superradiance

Pour bloquer la superradiance, on prend la polarisation du laser parallèle à l'axe du condensat.

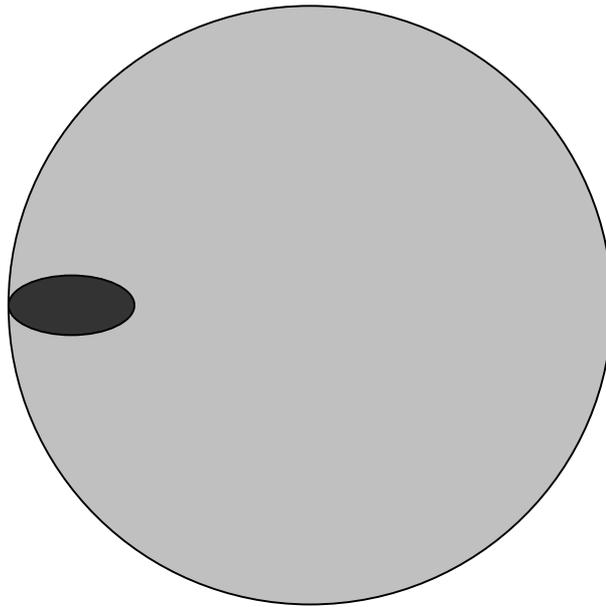
Remarque : c'est ce qui était fait aussi dans les expériences décrites dans le cours VI pour ne pas perturber les effets étudiés alors.

La diffusion Rayleigh se fait alors dans toutes les directions possibles.

L'extrémité de $\vec{K}_j = \vec{k}_0 - \vec{k}_i$ décrit un cercle
(car $|\vec{k}_0| \approx |\vec{k}_i|$)



Allure de l'image de temps de vol en l'absence de superradiance



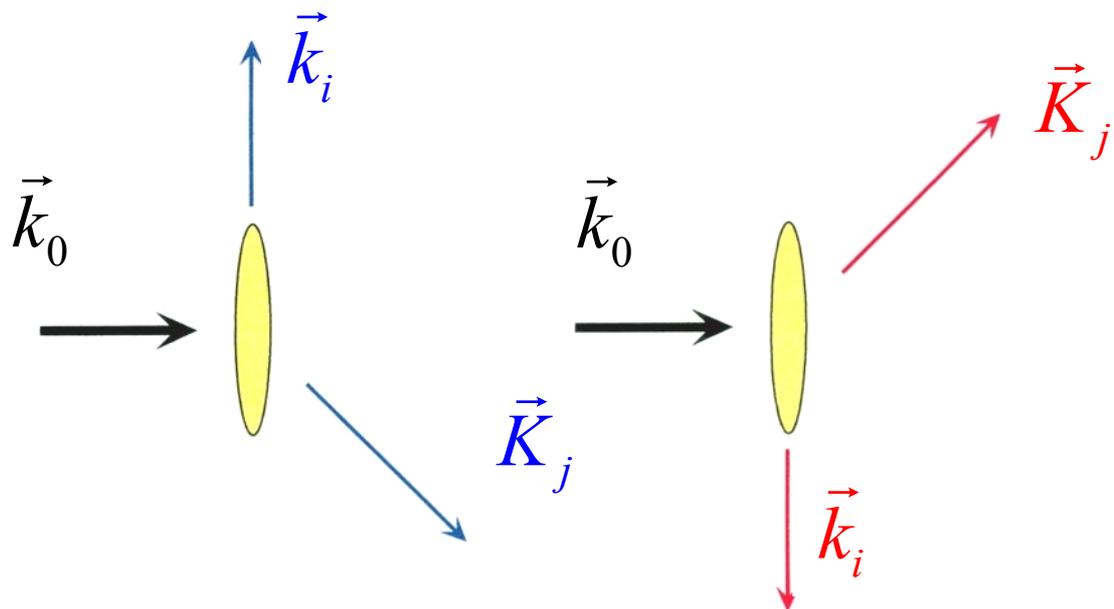
Halo circulaire correspondant aux atomes reculant avec toutes les valeurs possibles de l'impulsion $\hbar \vec{K}_j = \hbar (\vec{k}_0 - \vec{k}_i)$, à droite de l'image des atomes restés dans le condensat.

Voir figures 1C et 1D de la référence 18.

Résultats expérimentaux en présence de superradiance

Polarisation du laser perpendiculaire à l'axe du condensat.

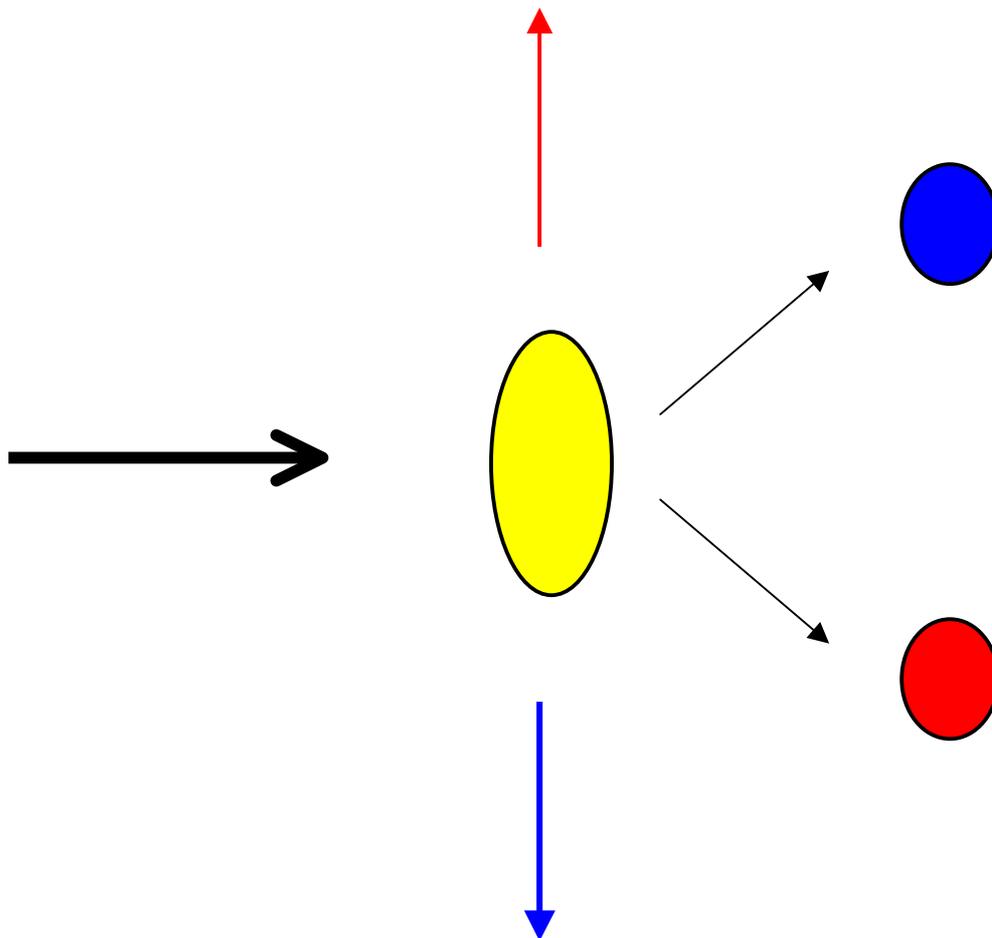
La diffusion Rayleigh superradiante se fait le long de l'axe, d'un côté ou de l'autre.



Les atomes reculent à 45° de l'axe du condensat, d'un côté ou de l'autre.

Les images de temps de vol donnent donc, en plus de l'image du condensat, 2 images de nuages d'atomes reculant à 45° de part et d'autre de l'axe.

Allure de l'image de temps de vol



Voir la figure 1E de la référence 18

Cascade de diffusions

Prenons l'axe Oz suivant l'axe du condensat et l'axe Ox suivant la direction des photons incidents \vec{k}_0 .

Si la durée de l'impulsion laser est suffisamment longue, une seconde diffusion Rayleigh peut se produire sur les 2 nuages d'atomes qui reculent après la première diffusion avec les impulsions $p_x = \hbar k$,
 $p_z = \pm \hbar k$.

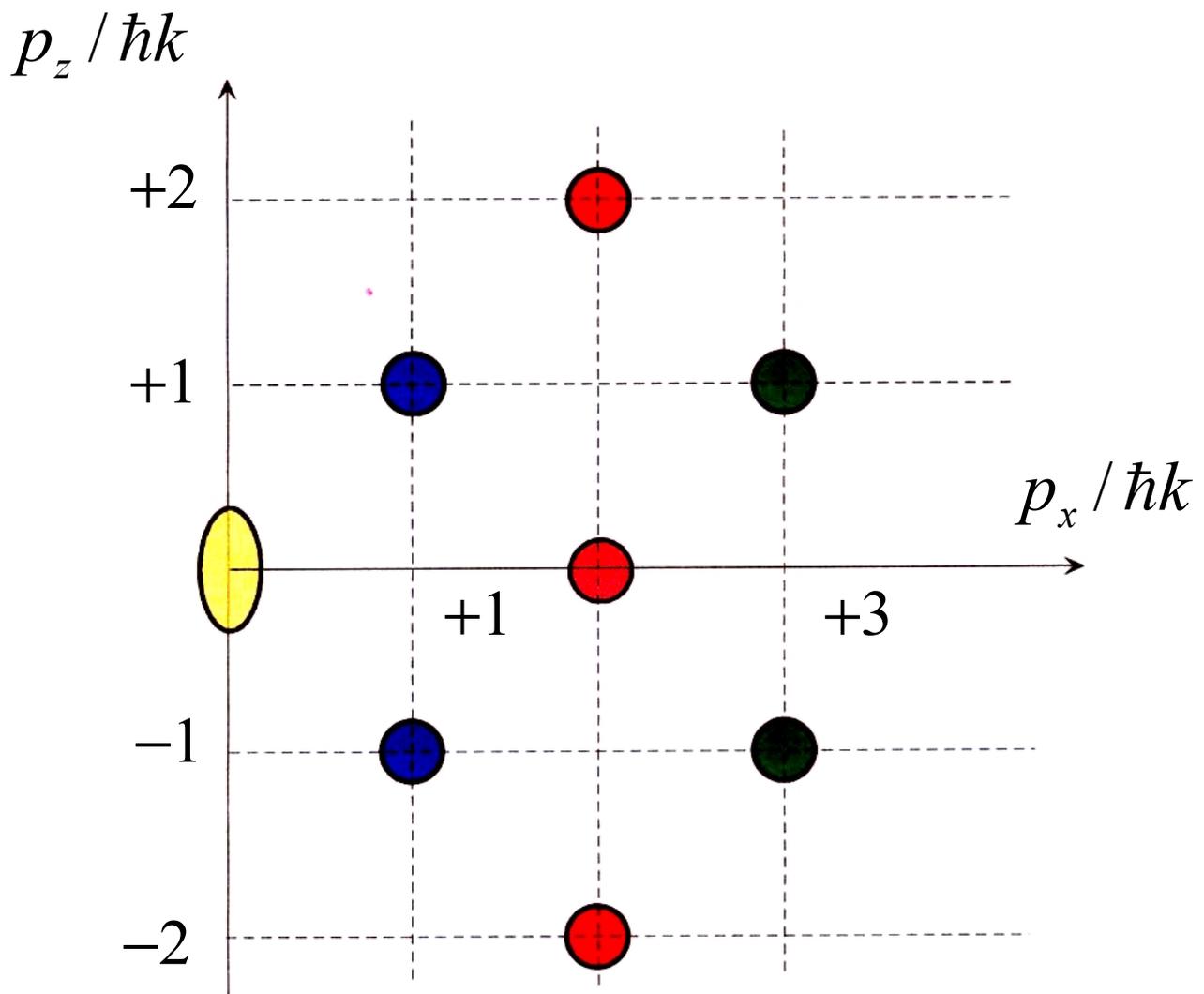
Comme il y a déjà des photons émis dans les directions $\pm \vec{e}_z$, la seconde diffusion Rayleigh se fera préférentiellement dans ces mêmes directions et l'impulsion transférée aux 2 nuages vaudra $\hbar k$ suivant \vec{e}_x , $\pm \hbar k$ suivant \vec{e}_z . La seconde diffusion sur les 2 premiers nuages qui reculent fait donc apparaître 3 nuages en $p_x = 2\hbar k$,
 $p_z = 0, \pm 2\hbar k$.

Et ainsi de suite...

Impulsion des différents nuages obtenus au cours de la cascade de diffusions

Axe Oz : Axe du condensat

Axe Ox : Direction des photons laser \vec{k}_0



Cette figure donne aussi l'allure de l'image de temps de vol.

Voir les figures 1F et 1G de la référence 18

Vitesse de variation de N_j

Le nombre N_j d'atomes reculant dans la direction \vec{K}_j est égale au nombre de photons diffusés autour de la direction \vec{k}_i de l'axe de condensat.

A partir du taux de diffusion obtenu en T-177, on peut donc écrire

$$\dot{N}_j = G_j N_j$$

avec

$$G_j = R_1 \frac{\sin^2 \theta_j}{2\pi/3} N_0 \Omega_i$$

A cette vitesse de variation "stimulée" par la présence du réseau de densité formé par les N_j atomes reculant, il faut ajouter le taux de diffusion "spontanée" dans le même angle solide Ω_i

$$R_1 \frac{\sin^2 \theta_j}{2\pi/3} N_0 \Omega_i$$

On a donc finalement

$$\dot{N}_j = G_j (N_j + 1)$$

Vitesse de dépletion du condensat

En l'absence de superradiance

(polarisations parallèles)

L'excès de diffusion dû au réseau de densité est négligeable.

On peut donc négliger le terme $G_j N_j$ dans \dot{N}_j et écrire

$$\dot{N}_0 = -\sum_j \dot{N}_j = -\sum_j G_j$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} \sum_j G_j &= R_1 N_0 \sum_{\Omega_i} \frac{\sin^2 \theta_j}{2\pi/3} \Omega_i \\ &= R_1 N_0 \int d^2\Omega \frac{\sin^2 \theta}{2\pi/3} = R_1 N_0 \end{aligned}$$

Le condensat se vide donc avec un taux constant R_1 .

Voir la courbe avec des rondes vides sur la figure 2 de la référence 18.

Vitesse de dépletion du condensat

(suite)

En présence de superradiance

(polarisations perpendiculaires)

$$\dot{N}_j = G_j (N_j + 1)$$

Au début ($N_j \ll 1$), N_j commence par croître sous l'effet des processus de diffusion spontanés.

Puis quand N_j est devenu supérieur à 1, on peut écrire $\dot{N}_j = G_j N_j$, ce qui montre que N_j croît exponentiellement.

Le condensat se vide donc de plus en plus vite, cette décroissance se ralentissant bien sûr quand N_0 a suffisamment diminué

$$(G_j \propto N_0).$$

Comportement caractéristique d'un phénomène de superradiance (refs. 19, 20)
amortissement de plus en plus rapide de l'état initial.

Voir courbe avec des ronds pleins sur la figure 2 de la référence 18.

Observation de la lumière diffusée le long de l'axe du condensat

On observe effectivement que le recul des atomes dans la direction \vec{K}_j est accompagné d'une émission de lumière dans la direction de l'axe du condensat.

Cette lumière est émise dans un angle solide correspondant à la diffraction d'une source de $14\mu\text{m}$ de diamètre (diamètre de la section du condensat par un plan perpendiculaire à son axe).

La lumière est émise sous forme d'une impulsion avec un flanc de montée très raide, qui reflète la décroissance de plus en plus rapide de N_0 dans la phase initiale du processus.

Voir figures A et B de la figure 3 de la référence 18

Existence d'un seuil pour la super-radiance

Le réseau de densité a un temps de vie fini. En effet, l'onde de matière associée aux atomes qui reculent quitte le condensat avec lequel elle interfère au bout d'un temps $\tau \simeq l / (\hbar k / m)$, où l est la dimension typique du condensat.

On peut écrire $\tau \simeq 1 / k \delta v$ avec $\delta v = \delta p / m$ et $\delta p = \hbar / l$

On retrouve ainsi l'inverse de la largeur Doppler des spectres de diffusion étudiés dans le cours V. La largeur due aux interactions intervient elle aussi dans l'amortissement du réseau de densité.

Il faut donc remplacer $\dot{N}_j = G_j N_j$ par $\dot{N}_j = (G_j - L_j) N_j$, où L_j est le taux d'amortissement du réseau de densité.

La diffusion superradiante n'est donc possible que si l'intensité laser (R_1) est suffisamment grande pour que $G_j > L_j$

Observation expérimentale du seuil

Voir la figure 3C de la référence 18

Importance d'avoir un condensat pour observer ces phénomènes de superradiance

La longueur de cohérence d'un condensat est très grande, de l'ordre de son extension spatiale (voir Cours 1999-2000).

Le temps de vie du réseau de densité est donc très long. L'empreinte laissée dans le condensat par les premiers processus de diffusion demeure présente assez longtemps pour influencer les processus de diffusion suivants.

Avec un nuage thermique, cette durée de vie du réseau de densité est beaucoup trop courte pour faire apparaître des corrélations entre diffusions de Rayleigh successives.

Références

18. S.Inouye,A.Chikkatur, D.Stamper-Kurn, J.Stenger, D.Pritchard, W.Ketterle, Science **285**, 571 (1999).
19. R.H.Dicke, Phys.Rev. **93**, 93 (1954).
20. R.H.Dicke, in Proceedings of the Third International Conference on Quantum Electronics, ed. by P.Grivet and N.Bloembergen, Columbia University Press, 1964, p.35.

Amplification cohérente d'ondes de matière

Buts de ce cours

- Décrire deux expériences récentes réalisées à M.I.T. et à Tokyo et mettant en évidence la possibilité d'amplifier de manière cohérente des ondes de matière.
- Donner une interprétation semiclassique du mécanisme de gain.
- Décrire les résultats obtenus et les comparer aux prédictions théoriques.

Plan

1. Caractéristiques d'un amplificateur d'ondes de matière (T-195 à T-199).

- Différences avec un amplificateur d'ondes électromagnétiques.
- Interprétation semiclassique du mécanisme d'amplification.

2. Expérience de M.I.T. (T-200 à T-206)

- Préparation de l'onde de matière entrante.
- Etude de l'amplification en nombre d'atomes.
- Etude de la phase de l'onde de matière amplifiée.

3. Expérience de Tokyo (T-207 à T-219)

- Préparation de l'onde de matière entrante.
- Etude de l'amplification en nombre d'atomes.
- Interféromètre de Mach-Zender Bragg.
- Etude de la phase de l'onde de matière amplifiée.

Références (T-220)

Appendice sur la superradiance (T-I à T-XVI).

Amplification d'ondes de matière

Deux types de composants existent pour les ondes électromagnétiques :

- Composants passifs
Miroirs, lames séparatrices, lentilles,...
- Composants actifs
Amplificateurs

En optique atomique, il existe des composants passifs pour les ondes de matière.

Ce n'est que très récemment que des amplificateurs pour ondes de matière ont été réalisés,

- à M.I.T. (référence 21)
- à Tokyo (référence 22).

Caractéristiques d'un amplificateur d'ondes de matière

- A la différence des photons, les atomes bosoniques ne peuvent pas être créés à partir du vide.

Nécessité d'avoir un réservoir d'atomes et de disposer d'un mécanisme physique transférant les atomes de ce réservoir vers le « mode » que l'on désire amplifier.

- Au fur et à mesure que ce mode se peuple, le transfert d'atomes du réservoir vers ce mode est accéléré par stimulation bosonique.
- Il est important de disposer d'un réservoir dense avec des grandes longueurs de cohérence.

Intérêt d'utiliser un condensat de Bose-Einstein comme réservoir.

Transfert d'impulsion et d'énergie

L'impulsion et l'énergie des atomes changent lorsqu'ils passent du réservoir au mode à amplifier.

Cette impulsion et cette énergie leur sont fournies par la diffusion Rayleigh d'un photon. Le photon diffusé a une direction et une fréquence différentes de celle du photon incident.

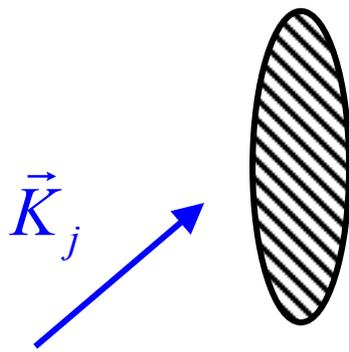
Travaux théoriques étudiant des mécanismes d'amplification analogues à celui des expériences décrites ici.

Références 24 et 25

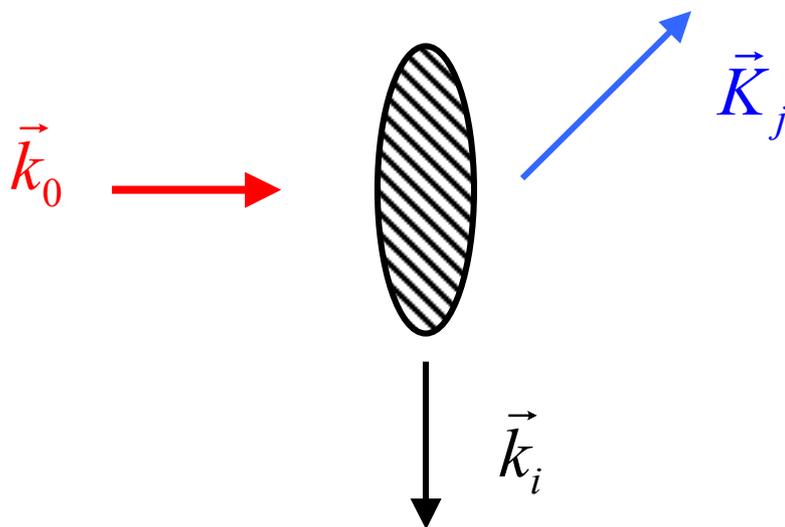
Dans ces travaux, l'onde de matière amplifiée est supposée confinée dans une cavité, alors que dans les expériences décrites ici, elle se propage dans l'espace libre.

Explication semiclassique du gain

L'onde de matière entrante, de vecteur d'onde \vec{K}_j , interfère avec le condensat, ce qui fait apparaître un réseau de densité de même vecteur d'onde \vec{K}_j .



Le faisceau laser pompe \vec{k}_0 est diffracté par ce réseau dans la direction $\vec{k}_i = \vec{k}_0 - \vec{K}_j$



Cette diffusion de photons fait reculer des atomes du condensat avec un vecteur d'onde $\vec{k}_0 - \vec{k}_i = \vec{K}_j$, ce qui augmente le nombre d'atomes dans le mode à amplifier.

Explication semiclassique du gain (suite)

Les atomes reculant ainsi avec le vecteur d'onde \vec{K}_j renforcent le réseau de densité, ce qui par suite augmente la diffusion Rayleigh du faisceau pompe dans la direction \vec{k}_i , et conduit finalement à une augmentation exponentielle du nombre d'atomes dans le mode à amplifier, limitée cependant par le temps de vie du réseau.

$$\dot{N}_j = (G_j - L_j) N_j$$

où G_j et L_j sont les coefficients de gain et de perte introduits dans T-192.

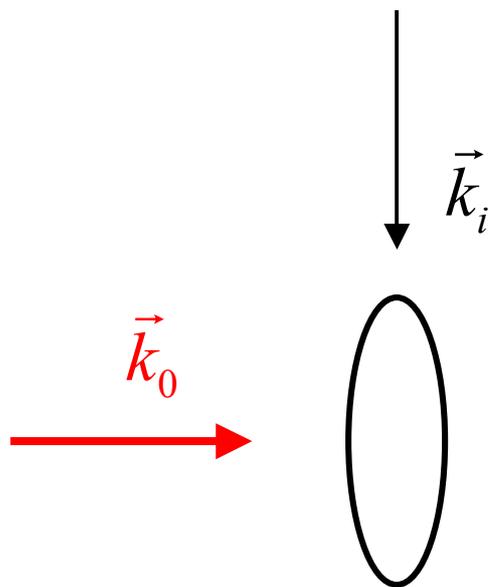
Dans le cours précédent, l'onde de matière \vec{K}_j apparaissait de manière spontanée par l'effet de superradiance (voir référence 18). Ici, on envoie une onde incidente sur le condensat pompé par le laser \vec{k}_0 et on étudie l'amplitude et la phase de l'onde de matière amplifiée.

Expérience de M.I.T.

(référence 21)

Onde de matière entrante

Obtenue par diffusion de Bragg :
absorption d'un photon \vec{k}_0 du faisceau pompe (perpendiculaire à l'axe du condensat) et émission stimulée d'un photon \vec{k}_i d'un second faisceau laser (parallèle à l'axe du condensat).



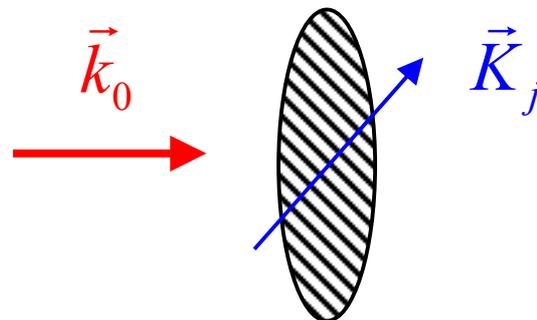
Les 2 lasers sont appliqués pendant $10\mu s$. L'intensité du faisceau pompe est suffisamment faible pour être au dessous du seuil de superradiance.

Phase d'amplification

L'onde de matière créée par la diffusion de Bragg a pour vecteur d'onde $\vec{K}_j = \vec{k}_0 - \vec{k}_i$.

Pour l'amplifier, on coupe le faisceau \vec{k}_i et on augmente l'intensité du faisceau pompe \vec{k}_0 à 40 mW/cm^2 .

Période de durée $20 \mu\text{s}$.



Expansion balistique

Le piège est coupé.

Période d'expansion balistique de 35 ms à l'issue de laquelle une image de temps de vol est prise.

Images de temps de vol

(Figures 2a,b,c de la référence 21)

Figure 2a

Onde de matière entrante. Pas de phase d'amplification.

On ne distingue aucune image d'atomes ejectés (sensibilité insuffisante).

Figure 2b

Pas d'onde de matière entrante. Phase d'amplification.

Bien que l'intensité du faisceau laser pompe soit au dessus du seuil de superradiance, on ne distingue aucune image d'atomes ejectés (sensibilité insuffisante).

Figure 2c

Onde de matière entrante. Phase d'amplification.

On distingue nettement un nuage d'atomes ejectés, ce qui montre que l'onde entrante est amplifiée.

Courbe de gain

Le nombre d'atomes dans l'onde de matière entrante N_{in} est varié.

Calibration à partir de mesures faites à intensité laser plus élevée où l'image des atomes de l'onde entrante créée par diffusion de Bragg est visible sur l'image de temps de vol.

Mesure du nombre d'atomes N_{out} dans l'onde de matière amplifiée.

Le diagramme N_{out} en fonction de N_{in} fait apparaître un gain en nombre d'atomes de l'ordre de 30.

Voir figure 2d de la référence 21.

Etude de la phase de l'onde de matière amplifiée

Principe de l'expérience

Faire battre l'onde de matière amplifiée avec une onde de matière de référence et étudier le contraste des interférences obtenues.

Onde de matière de référence

Obtenue, comme l'onde entrante, par diffusion de Bragg.

La phase de cette onde de référence est variée en balayant la phase du modulateur acousto-optique utilisé pour obtenir le faisceau laser \vec{k}_i se propageant le long de l'axe du condensat.

L'onde de référence est générée pendant une période de $10 \mu s$ après la phase d'amplification.

(voir figure 1 de la référence 21)

Contraste attendu

N_1 : Nombre d'atomes dans l'onde de matière incidente.

N_2 : Nombre d'atomes dans l'onde de référence, de phase ϕ .

Suivant la valeur de ϕ , l'onde totale est proportionnelle à $\sqrt{N_1} + \sqrt{N_2}$ ou à $\sqrt{N_1} - \sqrt{N_2}$, de sorte que le nombre total d'atomes dans la direction \vec{K}_j varie entre N_{\max} et N_{\min} .

$$N_{\max} = N_1 + N_2 + 2\sqrt{N_1 N_2}$$

$$N_{\min} = N_1 + N_2 - 2\sqrt{N_1 N_2}$$

D'où le contraste V

$$V = \frac{N_{\max} - N_{\min}}{N_{\max} + N_{\min}} = \frac{2\sqrt{N_1 N_2}}{N_1 + N_2}$$

Si les 2 ondes ne se recouvrent pas parfaitement ($|\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle| < 1$), on a

$$V = \frac{2|\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle| \sqrt{N_1 N_2}}{N_1 + N_2}$$

Résultats obtenus

(voir figure 4 de la référence 21)

Sans amplification, le contraste des interférences entre l'onde incidente et l'onde de référence varie bien avec N_1 suivant la loi donnée en T-205 avec $\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle = 1$.

Après amplification et avec un gain de 30 sur le nombre d'atomes, le contraste est plus faible que la prédiction théorique avec $\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle = 1$.

Il faut prendre un facteur de recouvrement de l'ordre de 0,4 pour interpréter les résultats.

Une telle situation semble indiquer que l'onde incidente est distordue au cours du processus d'amplification.

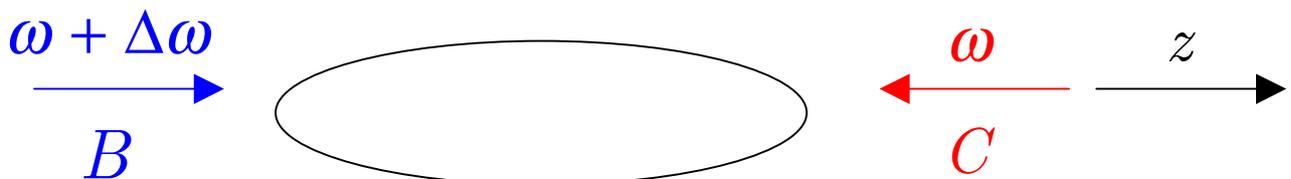
Expérience de Tokyo

(référence 22)

Onde de matière entrante

Comme dans l'expérience de M.I.T., cette onde entrante est générée par diffusion de Bragg.

2 faisceaux laser B et C se propagent le long de l'axe z du condensat et transfèrent par diffusion de Bragg des atomes du condensat de rubidium 87 ($p = 0$) vers l'état $p = 2 \hbar k$.



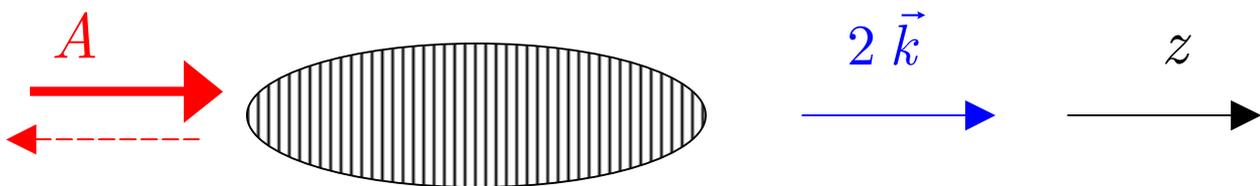
L'onde de matière entrante a donc un vecteur d'onde $2\vec{k}$ le long de z

(voir figure 1A de la référence 22)

Mécanisme d'amplification

L'onde pompe A , se propage aussi dans la direction z .

Elle est diffracté vers l'arrière par le réseau de densité créé par l'interférence entre le condensat et l'onde de matière entrante.



Le recul communiqué aux atomes par cette diffusion Rayleigh de l'onde pompe A vers l'arrière donne naissance à une onde de matière de vecteur d'onde $2 \vec{k}$ qui amplifie l'onde entrante $2 \vec{k}$.

(voir figure 1A de la référence 22)

Description des résultats expérimentaux

(Figures 1 B, C,D,E de la référence 22)

Figure 1B

Seul le laser de pompe A est appliqué pendant $500\mu\text{s}$, avec une intensité au dessus du seuil de superradiance.

Une impulsion lumineuse superradiante est générée en sens opposé de A. Une onde de matière de vecteur d'onde $2\vec{k}$ est aussi créée, visible sur l'image du temps de vol.

62% des atomes du condensat sont éjectés dans cette onde.

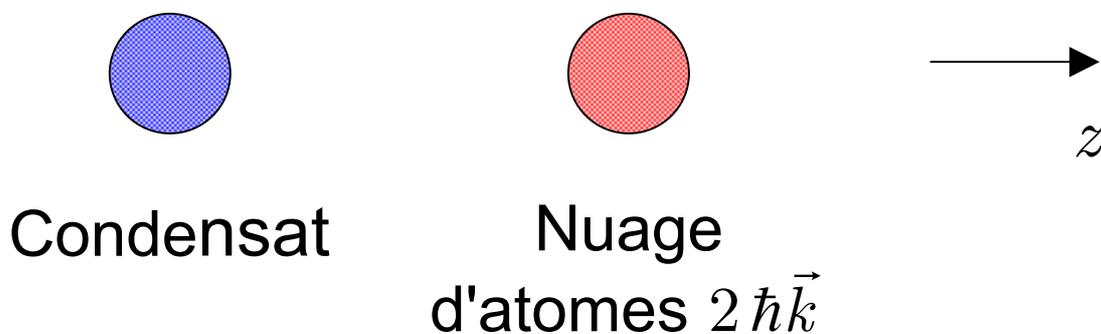


Figure 1C

Pour éviter cette superradiance spontanée, on coupe le piège et on laisse se dérouler une expansion balistique de 1.8 ms avant d'appliquer l'impulsion du laser de pompe A.

L'anisotropie du condensat a alors suffisamment changé au cours de l'expansion pour qu'il n'y ait plus de superradiance spontanée dans la direction opposée de A.

On constate effectivement sur l'image de temps de vol qu'il n'y a plus de nuage d'atomes reculant avec une impulsion $2\hbar k$.

Seule subsiste l'image du condensat.

Figure 1D

Image de l'onde de matière entrante obtenue par diffusion de Bragg induite par les lasers B et C. 6.2 % des atomes du condensat sont alors transférés dans cette onde de vecteur d'onde $2\vec{k}$.

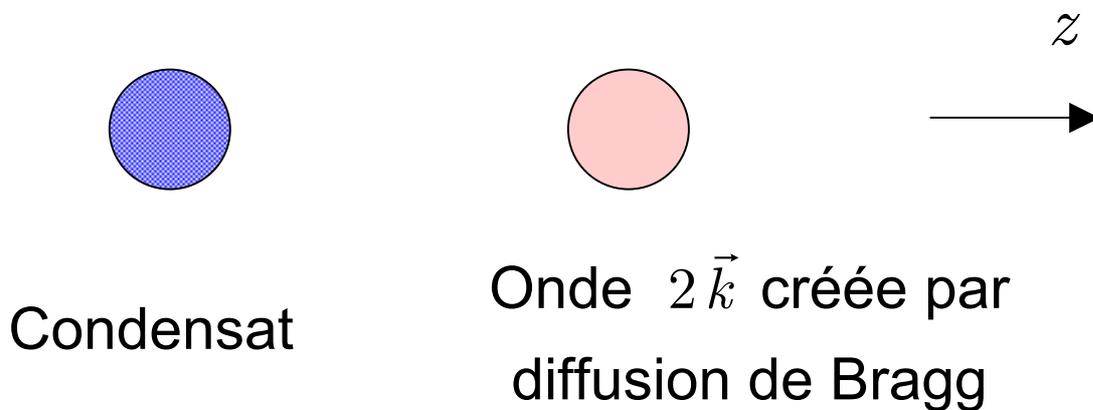
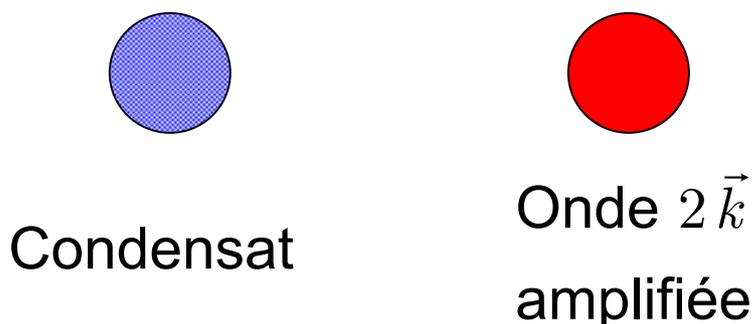


Figure 1E

On applique l'impulsion du laser pompe A tout de suite après avoir créé l'onde entrante par diffusion de Bragg.

L'image des atomes éjectés est alors beaucoup plus intense que sur la figure 1D



Etude du gain en nombre d'atomes

On porte le nombre d'atomes N_{out} sortant avec l'impulsion $2\hbar\vec{k}$ en fonction de la durée de l'impulsion laser pompe A.

Figure 2A de la référence 22.

Pour chaque durée d'impulsion, on vérifie qu'il n'y a pas de superradiance spontanée.

Les résultats obtenus sont en bon accord avec les prédictions théoriques déduites de l'équation

$$\dot{N}_j = (G_j - L_j)(N_j + 1)$$

où G_j et L_j sont les coefficients de gain et de pertes (voir T-188 et T-192)

Etude de la phase de l'onde de matière amplifiée

Réalisée au moyen d'un interféromètre de Mach-Zender, Bragg décrit dans la référence 23.

Principe de l'interféromètre

(voir figure 1 de la référence 23 sur T-214)

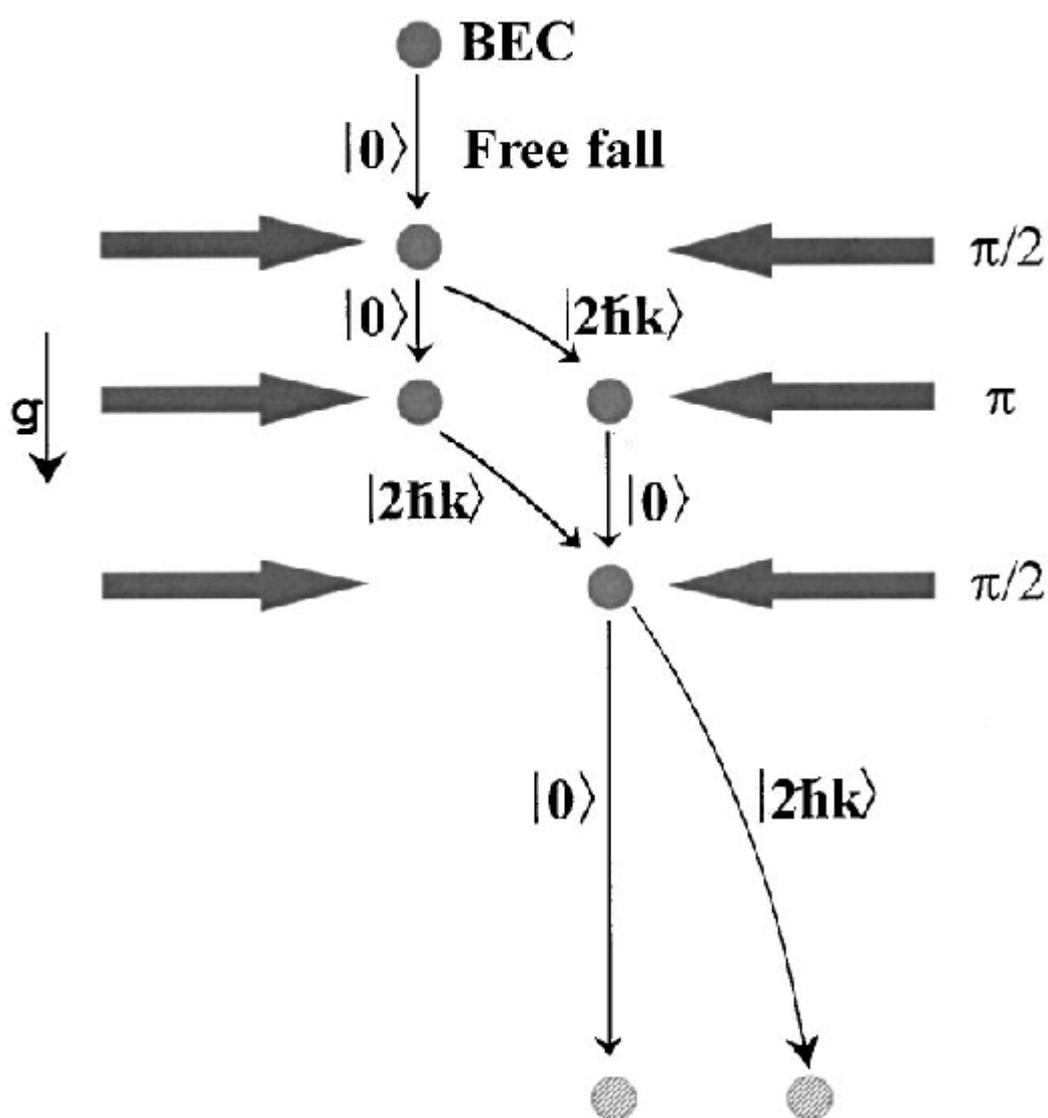
Par diffusion de Bragg, des impulsions $\pi / 2$ ou π peuvent être réalisées entre les états $p = 0$ et $p = 2 \hbar k$ le long de z .

Le condensat tombe en chute libre après coupure du piège. Une succession de 3 impulsions $\pi / 2, \pi, \pi / 2$ donne naissance à 2 trajets possibles pour les atomes.

L'interférence est observée sur les 2 voies de sortie en $p = 0$ et $p = 2 \hbar k$

Figure 1 de la référence 23

Y.Tori, Y.Suzuki, M.Kozuma, T.Sugiura, T.Kuga,
L.Deng, E.Hagley
Phys.Rev. **A61**, 041602 (2000)



Etat du système après la première impulsion $\pi / 2$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left[|p = 0\rangle - |p = 2 \hbar k\rangle \right]$$

Etat du système après l'impulsion π appliquée un temps Δt après la première

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} \left[|p = 0\rangle + |p = 2 \hbar k\rangle \right]$$

Etat du système après la deuxième impulsion $\pi / 2$ appliquée un temps Δt après l'impulsion π

La phase de l'onde stationnaire en mouvement produisant la diffusion de Bragg est changée de 0 à ϕ .

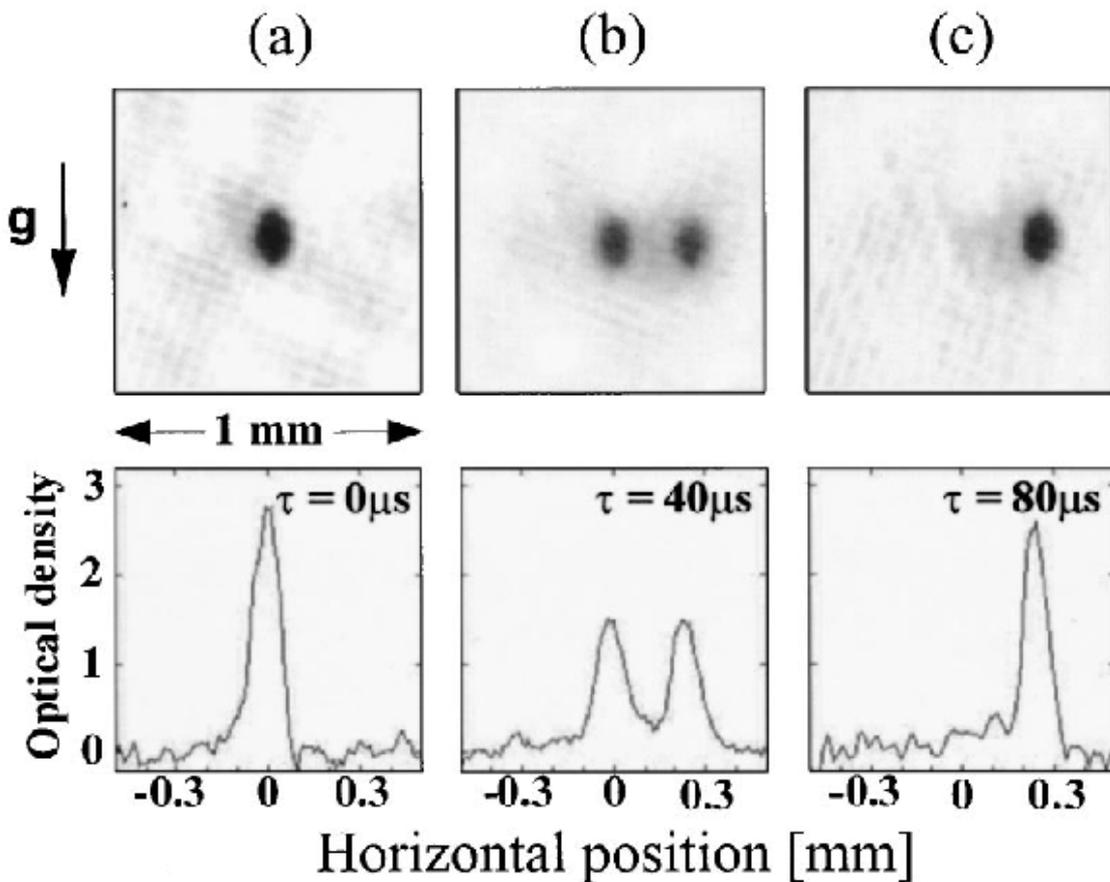
$$-\frac{1}{2} \left[(1 + e^{i\phi}) |p = 0\rangle + (1 - e^{-i\phi}) |p = 2 \hbar k\rangle \right]$$

Probabilités dans les 2 voies de sortie

$$P(p = 0) = \frac{1}{2} (1 + \cos \phi)$$
$$P(p = 2 \hbar k) = \frac{1}{2} (1 - \cos \phi)$$

Figure 2 de la référence 23

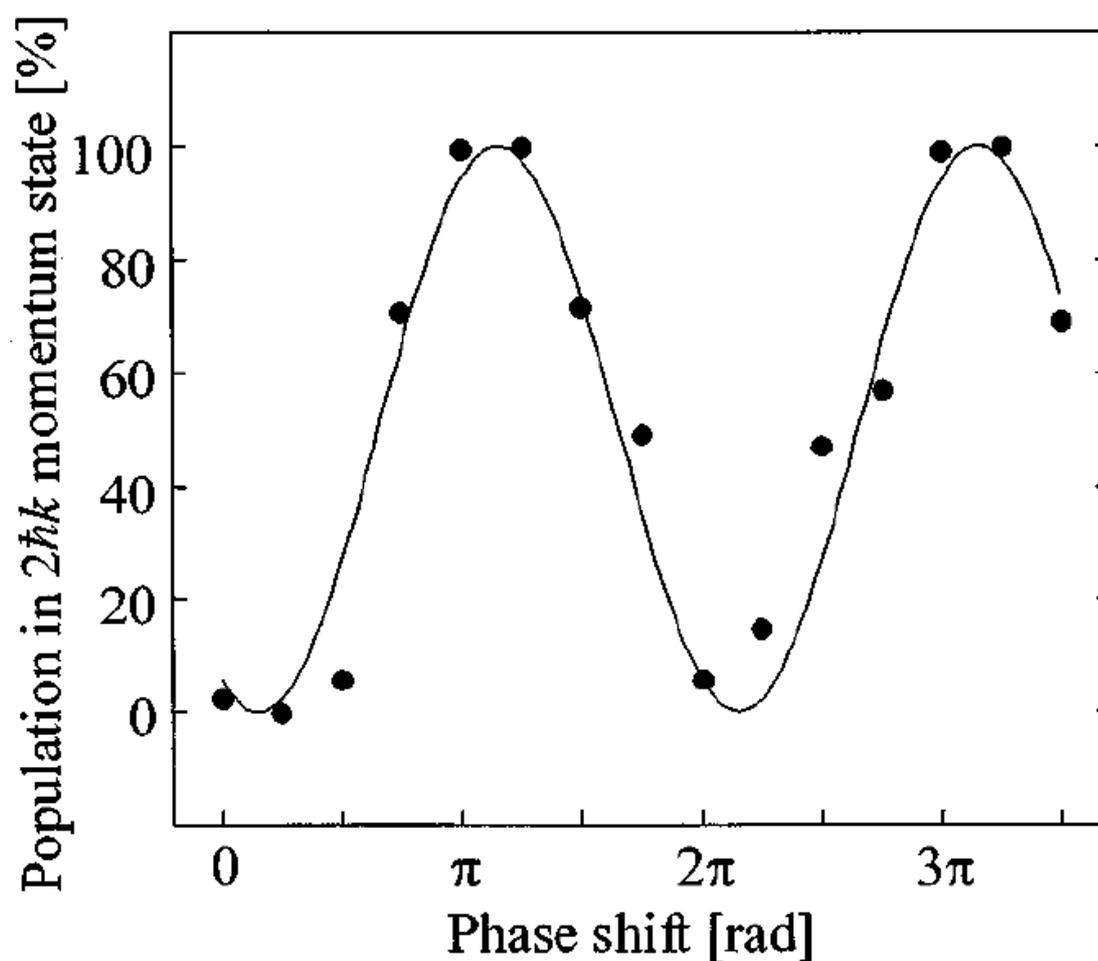
Y.Tori, Y.Suzuki, M.Kozuma, T.Sugiura, T.Kuga,
L.Deng, E.Hagley
Phys.Rev. **A61**, 041602 (2000)



Réglage de la durée des impulsions $\pi/2$ et π .

Figure 3 de la référence 23

Y.Tori, Y.Suzuki, M.Kozuma, T.Sugiura, T.Kuga,
L.Deng, E.Hagley
Phys.Rev. **A61**, 041602 (2000)



Variations de $P(p = 2\hbar k)$ avec ϕ .

Application : Etude de la phase de l'onde de matière amplifiée

L'onde de matière entrante contient un nombre d'atomes égal à 6.2 % de celui du condensat.

On règle l'amplification pour que l'onde sortante contienne 50% du nombre initial total d'atomes.

(voir Figure 2B de la référence 22)

Si l'amplification préservait parfaitement la phase, on aurait donc l'équivalent d'une impulsion $\pi / 2$.

On applique ensuite une impulsion π après un temps Δt , puis une impulsion $\pi / 2$ après un autre temps Δt .

(voir Figure 3 de la référence 22)

Contraste du signal d'interférence

(voir Figure 4 de la référence 22)

Le contraste obtenu quand on fait varier ϕ est de 71 % et non de 100 %.

La raison de cette différence est une distorsion de l'onde amplifiée.

(voir Figure 3B de la référence 22)

Si l'amplification détruisait la cohérence entre l'onde amplifiée et le condensat, il y aurait néanmoins une interférence entre l'onde incidente (6.5 %) et la partie restant du condensat (50%), non transférée dans l'onde amplifiée. Le contraste V de cette interférence vaudrait

$$V = \frac{2\sqrt{0.065 \times 0.5}}{1} = 36\%$$

Le fait qu'on observe un contraste supérieur à cette valeur prouve que l'amplification est partiellement cohérente.

Références (reprise et suite de T-194)

18. S.Inouye, A.Chikkatur, D.Stamper-Kurn, J.Stenger, D.Pritchard, W.Ketterle, *Science* **285**, 571 (1999).
21. S.Inouye, T.Pfau, S.Gupta, A.Chikkatur, A.Görlitz, D.Pritchard, W.Ketterle, *Nature* **402**, 641 (1999).
22. M.Kozuma, Y.Suzuki, Y.Tori, T.Sugiura, T.Kuga, E.Hagley, L.Deng, *Science*. **286**, 2309 (1999).
23. Y.Tori, Y.Suzuki, M.Kozuma, T.Sugiura, T.Kuga, L.Deng, E.Hagley, *Phys.Rev.* **A61**, 041602 (2000).
24. C.Law, N.Bigelow, *Phys.Rev.* **A58**, 4791 (1998).
25. M.Moore, P.Meystre, *Phys.Rev.* **A59**, R1754 (1999).

Appendice sur la superradiance

Emission spontanée collective d'un système de N atomes à 2 niveaux e, g .

Au lieu d'avoir une décroissance exponentielle de la population de l'état excité, comme c'est le cas s'il y a un seul atome, on a une décroissance de plus en plus rapide, due à une mise en phase des dipôles atomiques qui rayonnent de plus en plus efficacement.

Modèle initial de Dicke

N atomes dans un volume d'extension spatiale petite devant la longueur d'onde λ de la transition $e \leftrightarrow g$.

Modèle un peu plus élaboré

N atomes dans un volume très allongé en forme de cigare le long de z

Modèle simplifié de Dicke

N atomes dans un volume d'extension spatiale petite devant λ .

Si l'on part à $t = 0$ d'un état où les N atomes sont tous dans l'état excité e , on peut montrer que le problème est équivalent à celui de l'émission spontanée pour un moment cinétique $J = N / 2$ partant de $M = J$.

Spin fictif associé à l'atome

A tout système à 2 niveaux e, g , on peut associer un spin fictif $1 / 2$

$$|e\rangle \leftrightarrow |+\rangle \quad |g\rangle \leftrightarrow |-\rangle$$

$$|e\rangle\langle g| = \hat{S}_+ \quad |g\rangle\langle e| = \hat{S}_-$$

$$\hat{S}_z = \frac{1}{2} [|e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|]$$

$$[\hat{S}_+, \hat{S}_-] = 2 \hat{S}_z$$

Hamiltonien d'interaction de l'atome avec le champ du vide

$$\hat{H}_I = \sum_{\alpha} g_{\alpha} \left(\hat{S}_+ \hat{b}_{\alpha} + \hat{S}_- \hat{b}_{\alpha}^+ \right)$$

\hat{b}_{α} (\hat{b}_{α}^+) opérateur d'annihilation (de création) d'un photon du mode α .

g_{α} : constante de couplage.

On a remplacé tous les $e^{\pm i \vec{k} \cdot \vec{r}}$ apparaissant dans H_I par 1 car l'atome est supposé dans un petit volume autour de l'origine : $k r \ll 1$ pour tous les modes de fréquence voisine de celle de la transition $e \leftrightarrow g$.

Moment cinétique \vec{J} associé aux N atomes

Atome i : $\hat{S}_{+i}, \hat{S}_{-i}, \hat{S}_{zi}$ \hat{S}_i

$$\hat{\vec{J}} = \sum_{i=1}^N \hat{\vec{S}}_i \quad \text{Somme de } N \text{ spins } \frac{1}{2} .$$

La valeur maximale du nombre quantique J est $N / 2$.

Hamiltonien d'interaction des N atomes avec le champ du vide

Pour tous les atomes $e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}_i} \simeq 1$

$$\hat{H}_{Ii} = \sum_{\alpha} g_{\alpha} \left[\hat{S}_{+i} \vec{b}_{\alpha} + \hat{S}_{-i} \hat{b}_{\alpha}^{+} \right]$$

$$\hat{H}_I = \sum_{i=1}^N \hat{H}_{Ii}$$

$$= \sum_{\alpha} g_{\alpha} \left[\left(\sum_i \hat{S}_{+i} \right) \hat{b}_{\alpha} + \left(\sum_i \hat{S}_{-i} \right) \hat{b}_{\alpha}^{+} \right]$$

$$= \sum_{\alpha} g_{\alpha} \left[\hat{J}_{+} \hat{b}_{\alpha} + \hat{J}_{-} \hat{b}_{\alpha}^{+} \right]$$

Etat initial

$$|\psi(0)\rangle = |1e, 2e, 3e, \dots, ie, \dots, Ne\rangle$$

Tous les atomes excités dans l'état e .

En termes de spin fictif

$$|\psi(0)\rangle = |1+, 2+, 3+, \dots, i+ \dots, N+\rangle$$

Etat complètement symétrique avec les valeurs maximales de J et M quand on additionne N spins $1/2$.

$$|\psi(0)\rangle = \left| J = N/2, M = N/2 \right\rangle$$

Evolution temporelle

- On part à $t = 0$ d'un état complètement symétrique

$$|\psi(0)\rangle = \left| J = N/2, M = N/2 \right\rangle$$

- L'hamiltonien d'interaction H_I , de même que l'hamiltonien propre $\hat{H}_0 = \hbar \omega_0 \sum_i \hat{S}_{zi} = \hbar \omega_0 \hat{J}_z$, sont eux aussi complètement symétriques.

- L'évolution du système se fera donc à l'intérieur du sous-espace $\{|J, M\rangle\}$ avec $J = N/2$, M variant de $-N/2$ à $+N/2$, dont tous les états sont complètement symétriques (action répétée de \hat{J}_- sur $\left| J = N/2, M = N/2 \right\rangle$).

- Le problème étudié ici est donc équivalent à celui de l'émission spontanée d'un moment cinétique $J = N/2$ partant de $M = N/2$

Généralisation à des atomes dans un volume en forme de cigare

Les interactions prépondérantes se feront avec les modes du champ de vecteur d'onde parallèle à l'axe z du volume en forme de cigare.

$$\hat{H}_I = \sum_{\alpha} g_{\alpha} \sum_i \left[e^{ikz_i} \hat{S}_{+i} \hat{b}_{\alpha} + e^{-ikz_i} \hat{S}_{-i} \hat{b}_{\alpha}^+ \right]$$

Posons alors

$$\hat{\tilde{S}}_{+i} = \hat{S}_{+i} e^{ikz_i} \quad \hat{\tilde{S}}_{-i} = \hat{S}_{-i} e^{-ikz_i}$$

On a toujours les relations

$$\left[\hat{\tilde{S}}_{+i}, \hat{\tilde{S}}_{-i} \right] = 2 \hat{\tilde{S}}_{zi} \quad \text{ou} \quad \hat{\tilde{S}}_{zi} = \hat{S}_{zi}$$

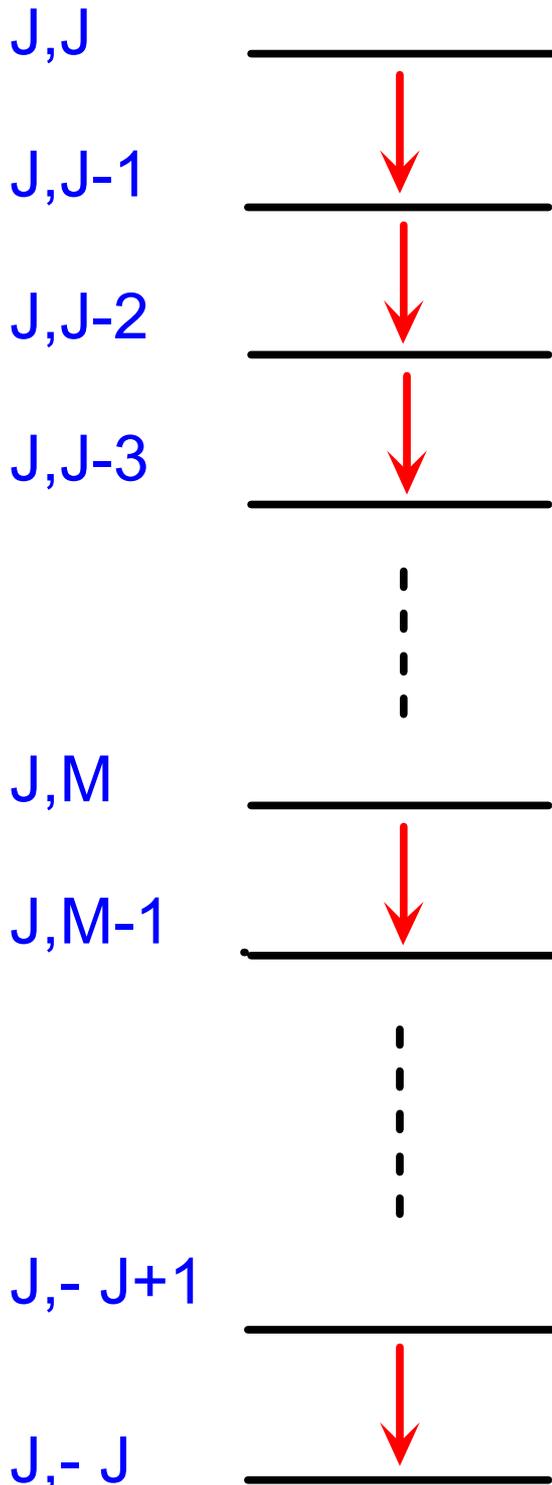
\hat{H}_I peut être mis sous une forme analogue à la précédente

$$\hat{H}_I = \sum_{\alpha} g_{\alpha} \left[\hat{\tilde{J}}_{+} \hat{b}_{\alpha} + \hat{\tilde{J}}_{-} \hat{b}_{\alpha}^+ \right]$$

avec un nouveau moment cinétique

$$\vec{\tilde{J}} = \sum_{i=1}^N \vec{\tilde{S}}_i$$

Cascade radiative du moment cinétique



$$\Gamma_{M \rightarrow M-1} = C |\langle J, M-1 | J_- | J, M \rangle|^2$$

$$\Gamma_{M \rightarrow M-1} = C [J(J+1) - M(M+1)] = C(J+M)(J-M+1)$$

C : Constante dépendant des g_α , et de l'élément de matrice du dipôle.

Calcul de C

Emission spontanée d'un atome à 2 niveaux.

$$\Gamma_{e \rightarrow g} = \Gamma_{+\rightarrow-} = C \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + 1 \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1 \right) \right] = C$$

C est donc la largeur naturelle Γ du niveau excité de l'atome.

On en déduit

$$\begin{aligned} \Gamma_{M \rightarrow M-1} &= \Gamma [J(J+1) - M(M-1)] \\ &= \Gamma (J+M)(J-M+1) \end{aligned}$$

$$\Gamma_{J \rightarrow J-1} = \Gamma \times 2J = \Gamma N$$

$$\Gamma_{J-1 \rightarrow J-2} = \Gamma \times (2J-1) \times 2 = 2\Gamma(N-1)$$

$$\Gamma_{J-2 \rightarrow J-3} = \Gamma \times (2J-2) \times 3 = 3\Gamma(N-2)$$

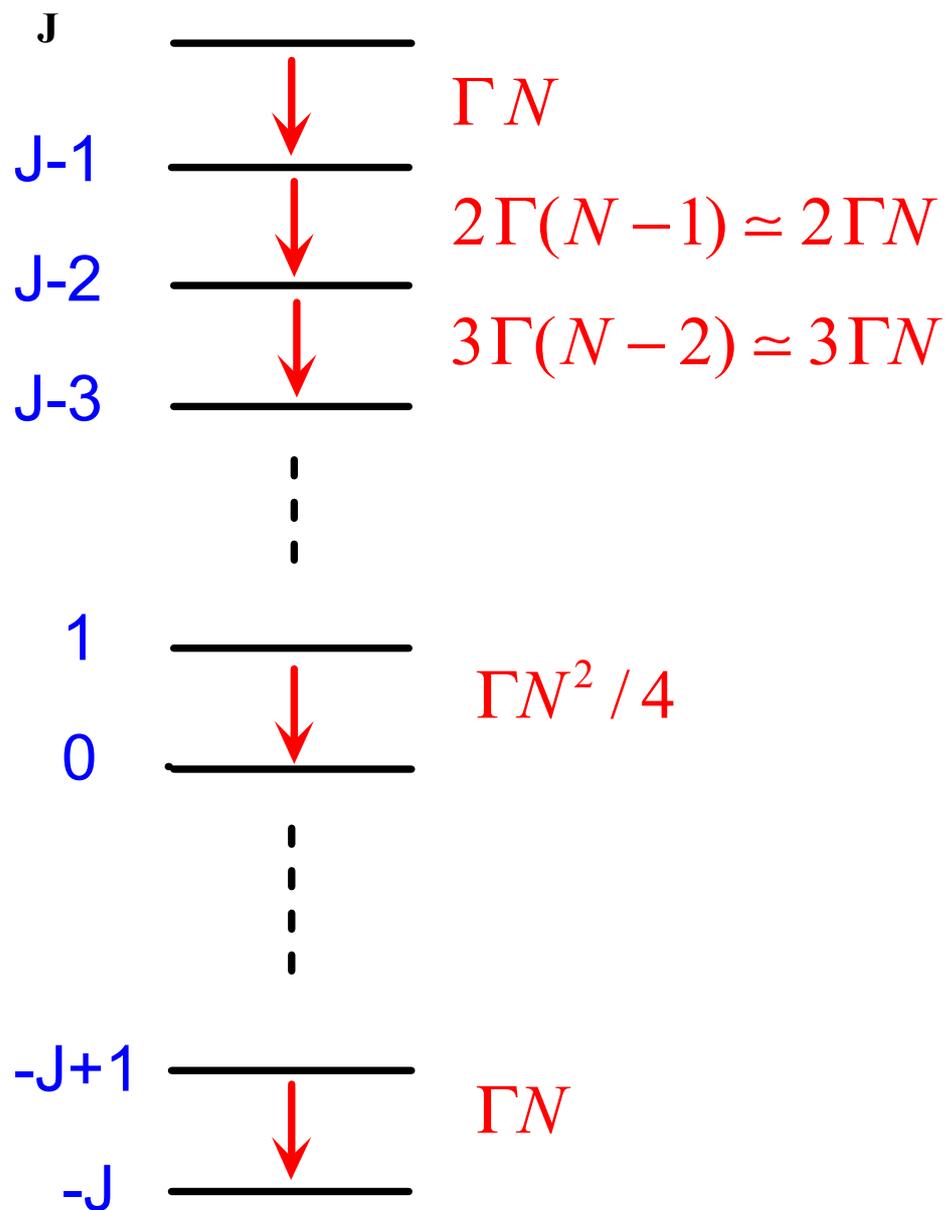
⋮

$$\Gamma_{1 \rightarrow 0} = \Gamma J(J+1) \simeq \Gamma \frac{N^2}{4} \quad (J \text{ entier})$$

⋮

$$\Gamma_{-J+1 \rightarrow J} = \Gamma \times 2J = \Gamma N$$

Accélération de la cascade radiative



La cascade radiative est de plus en plus rapide quand M décroît jusqu'à ce que $\Gamma_{M \rightarrow M-1}$ atteigne sa valeur maximale, proportionnelle à N^2 pour $M = 0$. Puis, elle se ralentit et s'arrête quand $M = -J$.

Autre écriture possible de $\Gamma_{M \rightarrow M-1}$

Les états apparaissant dans le développement de $|J, M\rangle$ contiennent

N_+ atomes dans l'état +

N_- atomes dans l'état –

Par ailleurs,

$$N_+ + N_- = N$$

$$\frac{1}{2}(N_+ - N_-) = M$$

Comme $N = 2J$, on a donc

$$N_+ + N_- = 2J$$

$$N_+ - N_- = 2M$$

et donc

$$N_+ = J + M$$

$$N_- = J - M$$

de sorte que

$$\begin{aligned}\Gamma_{M \rightarrow M-1} &= \Gamma(J + M)(J - M + 1) \\ &= \Gamma N_+ (N_- + 1)\end{aligned}$$

Discussion physique

Pour passer de M à $M - 1$, un atome doit passer de + à -.

$\Gamma_{M \rightarrow M-1}$ est proportionnel au nombre N_+ d'atomes dans l'état + et au nombre N_- d'atomes dans l'état -, augmenté d'une unité.

Au fur et à mesure que N_- augmente, le terme $N_- + 1$ augmente et apparaît comme un facteur de stimulation bosonique.

Ce facteur n'a cependant rien à voir avec la statistique des atomes émetteurs qui pourraient bien être des fermions. Il est simplement dû à la symétrie de l'état initial (tous les atomes sont dans e) et à la symétrie de l'hamiltonien d'interaction.

Pourquoi la cascade radiative

s'accélère-t-elle ?

Initialement, il n'y a aucune corrélation entre les atomes. Leur état est un état produit.

$$|1e, 2e \dots ie, \dots Ne\rangle$$

Le premier photon émis peut l'être par l'atome 1, par l'atome 2, ... ou l'atome N . Après la première émission, l'état des N atomes est donc une superposition linéaire des états $|1e, \dots ig, \dots Ne\rangle$ avec $i = 1, 2 \dots N$, superposition symétrique à cause de la symétrie de H_I .

Alors que la valeur moyenne de chaque dipôle reste nulle dans un tel état, des corrélations apparaissent entre les dipôles des divers atomes. Une cohérence de phase apparaît entre les oscillations, qui explique l'accélération de l'émission.

Etude du cas simple $N = 2$

Etat initial $|1e, 2e\rangle = |J = 1, M = 1\rangle$

Opérateur dipôle \hat{d}_i

$$\hat{d}_i = \delta [|ie\rangle\langle ig| + |ig\rangle\langle ie|] \quad i = 1, 2$$

δ : Elément de matrice de \hat{d} (réel)

On vérifie alors que

$$\langle 1, 1 | \hat{d}_1 | 1, 1 \rangle = \langle 1, 1 | \hat{d}_2 | 1, 1 \rangle = 0$$

$$\langle 1, 1 | \hat{d}_1^2 | 1, 1 \rangle = \langle 1, 1 | \hat{d}_2^2 | 1, 1 \rangle = \delta^2$$

$$\langle 1, 1 | \hat{d}_1 \hat{d}_2 | 1, 1 \rangle = 0$$

Pas de corrélations entre les 2 dipôles.

Après l'émission d'un photon, l'état s'écrit

$$|J = 1, M = 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|1g, 2e\rangle + |1e, 2g\rangle]$$

$$\langle 1, 0 | \hat{d}_1 | 1, 0 \rangle = \langle 1, 0 | \hat{d}_2 | 1, 0 \rangle = 0$$

$$\langle 1, 0 | \hat{d}_1^2 | 1, 0 \rangle = \langle 1, 0 | \hat{d}_2^2 | 1, 0 \rangle = \delta^2$$

$$\langle 1, 0 | \hat{d}_1 \hat{d}_2 | 1, 0 \rangle = \delta^2$$

Les 2 dipôles oscillent en phase bien que la phase absolue soit aléatoire.

Retour au cas général

Expression du dipôle total

Pour un atome à 2 niveaux, l'équivalent de \hat{d} en termes de spin fictif est

$$\hat{d} = \delta [|+\rangle\langle-| + |- \rangle\langle+|] = 2\delta \hat{S}_x$$

Le dipôle total $\hat{D} = \sum_{i=1}^N \hat{d}_i$ correspond donc à

$$2\delta \sum_{i=1}^N \hat{S}_{ix} = 2\delta \hat{J}_x$$

Valeurs moyennes de \hat{D} et \hat{D}^2 dans l'état initial $|J, J\rangle$

$$\langle J, J | \hat{D} | J, J \rangle = 2\delta \langle J, J | \hat{J}_x | J, J \rangle = 0$$

$$\hat{J}_x^2 + \hat{J}_y^2 = \hat{J}^2 - \hat{J}_z^2 = J(J+1) - \hat{J}_z^2$$

$$\langle J, J | \hat{J}_x^2 | J, J \rangle = \frac{1}{2} \langle J, J | \hat{J}_x^2 + \hat{J}_y^2 | J, J \rangle$$

$$= \frac{1}{2} [J(J+1) - J^2] = \frac{J}{2} = \frac{N}{4}$$

$$\langle J, J | \hat{D}^2 | J, J \rangle = 4\delta^2 \langle J, J | \hat{J}_x^2 | J, J \rangle = N\delta^2$$

Somme des carrés des N dipôle.

Pas de termes croisés- Pas de corrélations

Valeurs moyennes de \hat{D} et \hat{D}^2 dans $|J, M\rangle$

$$\langle J, M | \hat{J}_x | J, M \rangle = 0$$

$$\langle J, M | \hat{D} | J, M \rangle = 0$$

$$\langle J, M | \hat{J}_x^2 | J, M \rangle = \frac{1}{2} [J(J+1) - M^2]$$

$$\langle J, M | \hat{D}^2 | J, M \rangle = 2\delta^2 [J(J+1) - M^2]$$

Pour $M = 0$ (J entier)

$$\begin{aligned} \langle J, 0 | \hat{D}^2 | J, 0 \rangle &= 2\delta^2 J(J+1) \\ &\simeq 2\delta^2 J^2 = N^2\delta^2 / 2 \end{aligned}$$

Interprétation

Tous les dipôles oscillent en phase. Le module du dipole total est donc égal à $N\delta$.

Sa phase θ est par contre aléatoire de sorte que

$$\langle D^2 \rangle = N^2\delta^2 \overline{\cos^2 \theta} = N^2\delta^2 / 2$$

Récapitulation

On part d'un état où les dipôles ne sont pas corrélés.

L'émission successive de photons introduit des corrélations entre les dipôles atomiques, corrélations qui deviennent de plus en plus fortes quand le nombre de photons émis croît.

Les corrélations sont parfaites quand $M = 0$, c'est à dire quand la moitié des atomes se sont desexcités. Puis, elles décroissent.

Références

En plus des références aux articles de Dicke, données en T-194, on peut mentionner l'article de revue de B.Gross et S.Haroche, Phys. Reports, **93**, 301 (1982) qui contient également une bibliographie détaillée.

<p>Amplification d'ondes optiques par un condensat de Bose-Einstein</p>

Buts de ce cours

- Montrer qu'un condensat de Bose-Einstein excité par un faisceau laser pompe peut amplifier, non seulement une onde de matière incidente, mais également un faisceau laser sonde incident.
- Donner une interprétation semiclassique du mécanisme de gain.
- Discuter les divers régimes qui peuvent apparaître : oscillations de Rabi, décroissance exponentielle, approche du seuil de superradiance.
- Décrire une expérience récente réalisée à M.I.T. qui a permis d'observer un certain nombre de ces effets.

Plan

- 1. Interprétation simple du gain optique** (T-221 à T-224).
 - Mécanisme de gain.
 - Paramètres physiques importants.
- 2. Etude plus précise des divers régimes** (T-225 à T-245)
 - Principe de la méthode suivie.
 - Quelques relations importantes entre les divers paramètres.
 - Equations de Bloch optiques.
 - Limite des faibles intensités du laser pompe.
 - Equation d'évolution du nombre de photons laser sonde dans le volume du condensat.
 - Approche du seuil de superradiance.
- 3. Expérience de M.I.T.** (T-246 à T-251)
 - Etude de la transmission du faisceau laser sonde.
 - Etude par spectroscopie pompe-sonde de l'évolution du réseau de densité.

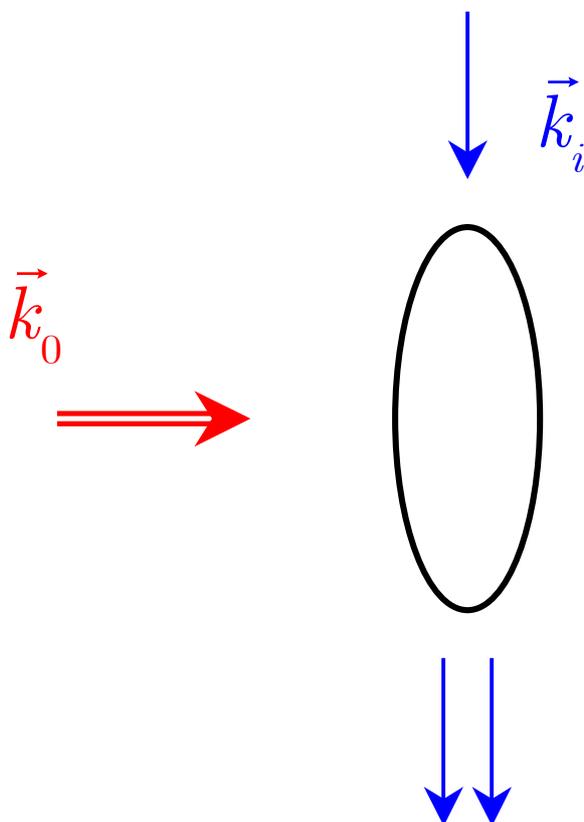
Références (T-252)

Amplification de lumière

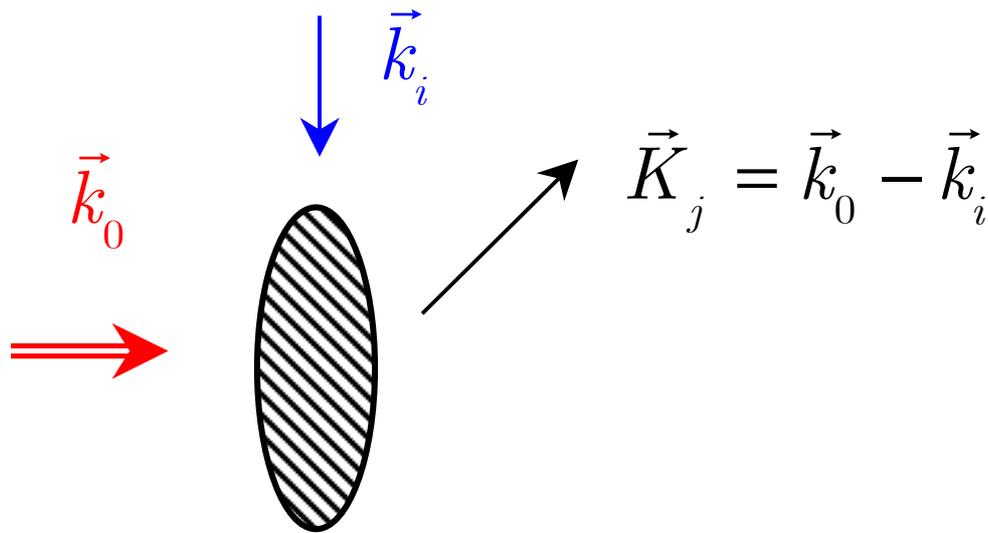
Un condensat excité par un faisceau laser pompe \vec{k}_0 peut

- Générer spontanément une onde de matière et une onde lumineuse par superradiance (cours VII)
- Amplifier une onde de matière incidente (cours VIII)

Le but de ce cours IX est de montrer qu'il peut aussi amplifier une onde lumineuse incidente.



Interprétation simple du gain optique



Quand la différence entre les fréquences du faisceau pompe \vec{k}_0 et du faisceau incident \vec{k}_i est bien réglée, une onde de matière est créée par diffusion de Bragg dans la direction $\vec{K}_j = \vec{k}_0 - \vec{k}_i$. Cette onde de matière interfère avec le condensat pour donner un réseau de densité de vecteur d'onde \vec{K}_j .

La diffraction du faisceau pompe \vec{k}_0 par ce réseau de densité se fait dans la direction \vec{k}_i et contribue à augmenter le nombre de photons \vec{k}_i , ce qui augmente le réseau de densité et ainsi de suite...

Remarques

1. La diffusion de Bragg induite par les faisceaux \vec{k}_0 et \vec{k}_i n'est résonnante que dans un intervalle de fréquence du faisceau \vec{k}_i très étroite (de l'ordre de l'inverse du temps de cohérence du condensat).

L'amplificateur de lumière décrit ici est donc à bande étroite.

2. Si le condensat est placé dans un cavité accordée pour les photons \vec{k}_i de fréquence résonnante pour la diffusion de Bragg, le mécanisme précédent peut conduire à une oscillation laser en l'absence de tout faisceau incident \vec{k}_i .

Lien avec les mécanisme CARL ("Coherent Atomic Recoil Laser") décrits dans les références 28, 29, 30.

Les paramètres physique importants

- Ω : Fréquence de Rabi de la transition à 2 photons associée à la diffusion de Bragg.
- Γ_j : Taux de relaxation des réseaux de densité, égal à l'inverse du temps de cohérence.
- G_j : Gain du milieu pour une onde de matière incidente (cours VII et VIII).

Quelques questions

- Peut-on définir un gain pour l'onde optique ?
- Dans quelles conditions peut-on observer une oscillation de Rabi entre les 2 états couplés par la transition à 2 photons, une décroissance exponentielle de l'état initial ?
- Que se passe-t-il sur le gain optique quand on s'approche du seuil de superradiance ?
-

Méthode suivie

Partir des équations de Bloch optiques décrivant l'évolution de la matrice densité pour les 2 états couplés par la transition à 2 photons.

A cause de l'amplification de lumière, la fréquence de Rabi Ω n'est pas constante. Il faut donc ajouter aux équations de Bloch une équation décrivant l'évolution de Ω .

Les photons s'échappent très vite du condensat. Les constantes de temps apparaissant dans l'équation d'évolution de Ω sont donc beaucoup plus courtes que celles apparaissant dans les équations de Bloch. Des approximations adiabatiques peuvent être alors utilisées pour simplifier ces équations couplées.

Auparavant, il sera utile de préciser quelques relations importantes entre les divers paramètres physiques.

Diverses fréquence de Rabi

Laser pompe \vec{k}_0

Fréquence de Rabi Ω_1

Laser sonde \vec{k}_i

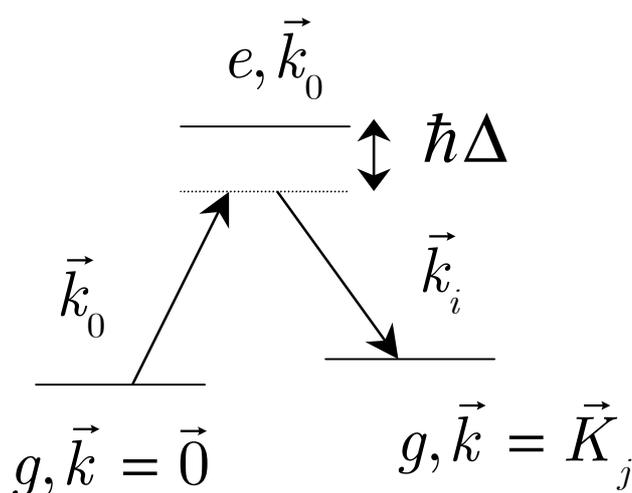
Fréquence de Rabi Ω'_1

Fréquence de Rabi Ω associée à la transition à 2 photons

Absorption de \vec{k}_0

Emission stimulée de \vec{k}_i

Atome passant de $\vec{k} = \vec{0}$ à $\vec{k} = \vec{K}_j$ en restant dans le même état interne g



$$\hbar\Omega / 2 = \frac{(\hbar\Omega_1 / 2)(\hbar\Omega'_1 / 2)}{\hbar\Delta}$$

$$\Omega = \frac{\Omega_1\Omega'_1}{2\Delta}$$

Taux de diffusion Rayleigh R_1 à 1 atome

C'est le taux de départ de l'état fondamental g dû à une excitation non résonnante vers e (désaccord $\hbar\Delta$).

Le couplage non-résonnant entre l'état $|g, N_0 + 1\rangle$ et $|e, N_0\rangle$, où N_0 est le nombre de photons \vec{k}_0 , contamine l'état $|g, N_0 + 1\rangle$ par l'état $|e, N_0\rangle$.

Amplitude de contamination

$$\frac{\hbar \Omega_1 / 2}{\hbar \Delta} = \frac{\Omega_1}{2 \Delta}$$

L'instabilité radiative de e est décrite par la largeur naturelle Γ .

La contamination précédente confère à l'état g une instabilité qui n'est autre que le taux de diffusion Rayleigh et qui vaut :

$$R_1 = \Gamma \left(\frac{\Omega_1}{2\Delta} \right)^2 = \frac{\Gamma \Omega_1^2}{4\Delta^2}$$

Expression de Γ en fonction de l'élément de matrice δ du dipôle

$$\langle g | \hat{d} | e \rangle = \delta$$

L'expression de Γ peut être calculée à partir de la règle d'or de Fermi (référence 27, exercice 1, p.493, équation 13).

$$\Gamma = \frac{\omega_0^3 \delta^2}{3\pi \epsilon_0 \hbar c^3}$$

ω_0 est la fréquence angulaire de la transition $e \leftrightarrow g$.

$$\omega_0 = c k_0 \quad k_0 = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{1}{\hat{\lambda}}$$

λ : longueur d'onde de la transition

$$\Gamma = \frac{k_0^3 \delta^2}{3\pi \epsilon_0 \hbar} = \frac{\delta^2}{3\pi \epsilon_0 \hbar \hat{\lambda}^3}$$

Nombre de photons sonde n'_p dans le volume V du condensat

$$n'_p = \frac{\epsilon_0}{2} E'^2 V \frac{1}{\hbar \omega_0}$$

E' : champ du laser sonde \vec{k}_i

Réécrivons E' en fonction de la fréquence de Rabi Ω'_1 du laser sonde.

$$\hbar \Omega'_1 = \delta E'$$

$$E'^2 = \frac{\hbar^2 \Omega'^2_1}{\delta^2}$$

Remplaçons également δ^2 par son expression en fonction de Γ (voir T-228)

$$E'^2 = \frac{\hbar^2 \Omega'^2_1}{\Gamma 3 \pi \epsilon_0 \hbar \hat{\lambda}^3}$$

Il vient finalement :

$$n'_p = \frac{\Omega'^2_1 V}{\Gamma 6 \pi \hat{\lambda}^3 \omega_0} = \frac{\Omega'^2_1 V}{\Gamma 6 \pi c \hat{\lambda}^2}$$

Autre expression de n'_p

En fait, il est plus utile de réécrire n'_p en fonction de la fréquence de Rabi Ω de la transition à 2 photons, car c'est Ω qui apparaît dans les équation de Bloch optiques qui seront utilisées plus loin pour étudier l'évolution du système « atomes + champs ».

Multiplions pour cela le numérateur et le dénominateur de l'équation de T-229 donnant n'_p par $\Omega_1^2 / 4\Delta^2$. Il apparaît au numérateur Ω^2 et au dénominateur R_1 (voir T-226 et T- 227). On obtient ainsi :

$$\begin{aligned} n'_p &= \frac{(\Omega_1'^2 \Omega_1^2 / 4\Delta^2) V}{(\Gamma \Omega_1^2 / 4\Delta^2) 6\pi c \hat{\lambda}^2} \\ &= \frac{\Omega^2 V}{R_1 6\pi c \hat{\lambda}^2} \end{aligned}$$

Equations de Bloch optiques

(voir référence 27, chapitre V)

ρ_{ij} : Matrice densité atomique ($i, j = 1, 2$)

1 : Etat atomique $\vec{k} = \vec{0}$ (condensat)

2 : Etat atomique $\vec{k} = \vec{K}_j$ (onde sortante)

$$\begin{cases} v = 2 \operatorname{Im} \rho_{12} \\ w = \rho_{22} - \rho_{11} \end{cases}$$

L'excitation à 2 photons est résonnante. v et w obéissent alors aux 2 équations d'évolution couplées :

$$\begin{aligned} \dot{v} &= -\frac{\Gamma_j}{2} v - \Omega w \\ \dot{w} &= \Omega v \end{aligned}$$

$2 / \Gamma_2$ est le temps de cohérence du réseau de densité (proportionnel à ρ_{12}).

Il n'y a pas de transition entre 1 et 2 (pas de relaxation longitudinale), d'où l'absence de terme en $-w / T_1$ dans l'équation donnant \dot{w} .

Régime des faibles intensités pour le laser pompe

L'intensité est très en dessous du seuil de superradiance et on peut négliger le gain G_j de l'onde de matière

$$G_j \ll \Gamma_j$$

L'intensité du faisceau laser sonde n'augmentera pas de façon considérable et on peut négliger l'augmentation de la fréquence de Rabi Ω due à l'amplification du faisceau sonde.

Dans les équations de Bloch, Ω peut être considéré comme constant.

Solution des équations de Bloch

$$\dot{v} = -\frac{\Gamma_j}{2}v - \Omega w$$

$$\dot{w} = \Omega v$$

La solution est une somme de 2 exponentielles $e^{\lambda_i t}$ où les λ_i ($i = 1, 2$) sont les valeurs propres de la matrice

$$\begin{pmatrix} -\Gamma_j/2 & -\Omega \\ \Omega & 0 \end{pmatrix}$$

Ces valeurs propres ont une partie imaginaire non nulle si $\Omega > 4\Gamma_j$.

Il y a donc 2 régimes

$$\Omega > 4\Gamma_j$$

Oscillation de Rabi

$$\Omega < 4\Gamma_j$$

Amortissement pur

Limite $\Omega \ll \Gamma_j$

On peut alors, dans la première équation de Bloch, éliminer adiabatiquement v qui s'amortit très vite vers la valeur

$$v = -\frac{2\Omega}{\Gamma_j} w$$

Le report de cette valeur de v dans la seconde équation donne alors

$$\dot{w} = -\frac{2\Omega^2}{\Gamma_j} w$$

ce qui montre que le condensat se vide avec le taux $2\Omega^2 / \Gamma_j$.

C'est dans ce régime qu'il est possible d'introduire une probabilité de transition par unité de temps calculable par la règle d'or de Fermi.

Laser pompe plus intense

Il faut alors tenir compte de la variation de Ω avec t et utiliser une équation donnant $\dot{\Omega}$.

Le nombre n'_p de photons du laser sonde dans le volume V du condensat évolue par suite

- du flux d'entrée des photons venant du laser sonde
- du flux de sortie des photons qui quittent le volume du condensat au bout d'un temps de l'ordre de l/c (l :longueur du condensat le long de \vec{k}_i).
- de l'apparition de nouveaux photons résultant de la diffraction du faisceau laser pompe par le réseau de densité.

Equation d'évolution de n'_p

Termes décrivant l'évolution due aux flux d'entrée et de sortie

$$\phi_0 - \frac{c}{l} n'_p$$

ϕ_0 : flux d'entrée pouvant être écrit sous la forme

$$\phi_0 = \frac{c}{l} n'_0$$

En l'absence d'amplification, on aurait à l'équilibre $n'_p = n'_0$.

Terme décrivant l'amplification

Toute diffraction d'un photon pompe par le réseau de densité fait passer un atome de l'état 1 ($\vec{k} = \vec{0}$) à l'état 2 ($\vec{k} = \vec{K}_j$) et augmente par suite $N_0 w = N_2 - N_1$ de + 2. On peut donc écrire

$$\left(\dot{n}'_p\right)_{\text{amplif}} = N_0 \frac{\dot{w}}{2} = \frac{N_0}{2} \Omega v$$

Récapitulation

$$\dot{n}'_p = \frac{c}{l} (n'_0 - n'_p) + \frac{N_0}{2} \Omega v$$

Reportons l'expression de n'_p en fonction de Ω établie en T-230. Il vient

$$\frac{V}{R_1 6 \pi \hat{\lambda}^2 c} 2 \Omega \dot{\Omega} = \frac{c}{l} \frac{V}{R_1 6 \pi \hat{\lambda}^2 c} (\Omega_0^2 - \Omega^2) + \frac{N_0}{2} \Omega v$$

Ω_0 : fréquence de Rabi associée à n'_0 .

Tant que Ω n'est pas devenu grand devant Ω_0 , on peut écrire

$$\Omega_0^2 - \Omega^2 = (\Omega_0 - \Omega)(\Omega_0 + \Omega) \simeq 2 \Omega (\Omega_0 - \Omega)$$

de sorte que l'équation précédente peut être mise sous la forme

$$\dot{\Omega} = \frac{c}{l} \left[\Omega_0 - \Omega + \frac{l}{c} \frac{R_1 6 \pi \hat{\lambda}^2 c}{V} \frac{N_0}{2} v \right]$$

Equation d'évolution de Ω

Posons $V = S l$ où S est la surface de la section du condensat par un plan perpendiculaire à \vec{k}_i et posons

$$G_j = N_0 R_1 \frac{3\pi \lambda^2}{S} = N_0 R_1 \frac{3}{4\pi} \frac{\lambda^2}{S}$$

L'équation de T-237 devient

$$\dot{\Omega} = \frac{c}{l} \left[\Omega_0 - \Omega + \frac{G_j}{2} v \right]$$

G_j est, à un facteur 2 près, le gain pour l'onde de matière introduit en T-188 ($\lambda^2 / S \approx \Omega_i$).

Il faut maintenant en principe résoudre le système d'équations couplées : équations de Bloch + équation donnant $\dot{\Omega}$.

Elimination adiabatique du champ

Comme le temps d'amortissement l/c de Ω est très court, on peut éliminer adiabatiquement Ω et écrire

$$\Omega = \Omega_0 + \frac{G_j}{2} v$$

Nouvelle équation d'évolution de v

Reportons l'expression précédente de Ω dans la première équation de Bloch.

Si l'on suppose t suffisamment petit pour qu'on puisse négliger la déplétion du condensat et remplacer donc w par -1 , il vient :

$$\dot{v} = \frac{G_j - \Gamma_j}{2} v + \Omega_0$$

L'interprétation de G_j et Γ_j comme coefficients de gain et de perte de l'onde de matière est confirmée.

Intensité laser pompe faible

$$G_j \ll \Gamma_j$$

L'équation donnant v_j montre que v_j tend vers $2 \Omega_0 / (\Gamma_j - G_j)$.

Le report de cette expression dans l'équation $\Omega = \Omega_0 + (G_j / 2)v$ donne :

$$\Omega = \Omega_0 \left(1 + \frac{G_j}{\Gamma_j - G_j} \right) = \Omega_0 \frac{\Gamma_j}{\Gamma_j - G_j}$$

On a négligé dans ce traitement les effets de propagation et remplacé le champ par un champ moyen uniforme.

Gain optique

L'équation obtenue pour Ω montre que le champ sonde est amplifié par un facteur

$$\frac{\Gamma_j}{\Gamma_j - G_j} = 1 + \frac{G_j}{\Gamma_j - G_j} \underset{G_j \ll \Gamma_j}{\simeq} 1 + \frac{G_j}{\Gamma_j}$$

Section efficace de gain σ_{gain}

Le gain en amplitude calculé en T-240 peut être écrit

$$1 + \frac{G_j}{\Gamma_j} = 1 + \frac{1}{2} \rho_0 l \sigma_{\text{gain}}$$

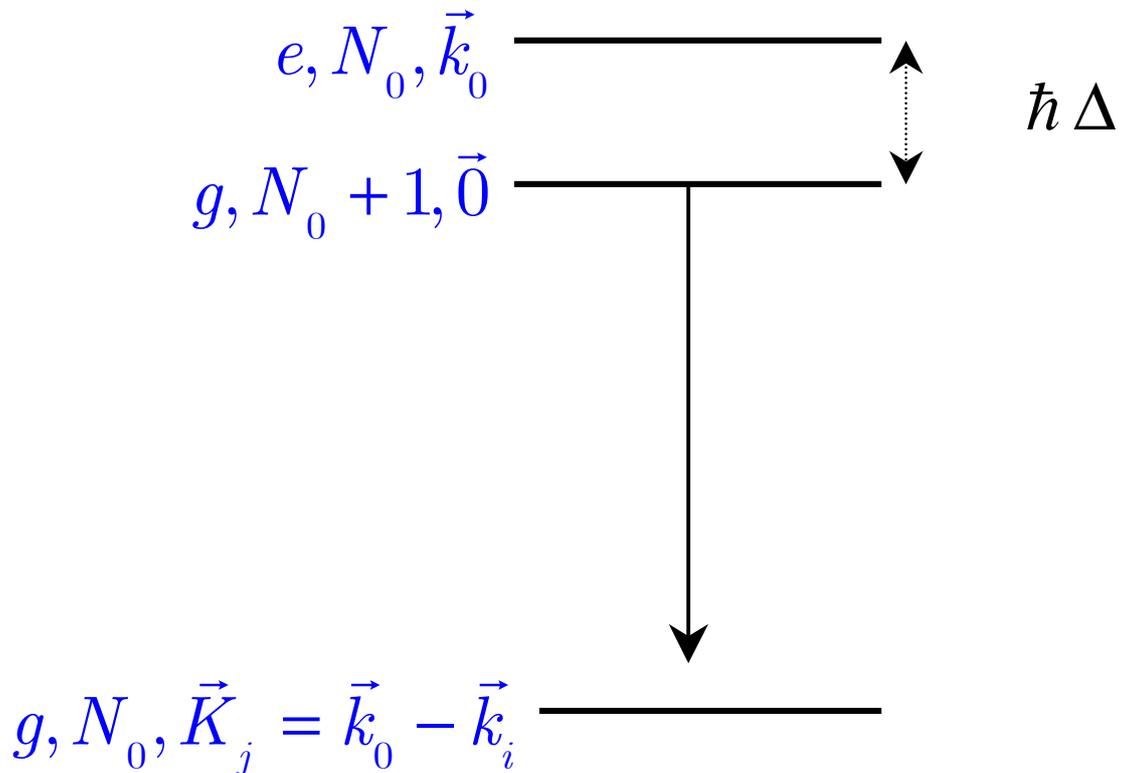
où σ_{gain} est la section efficace de gain correspondant au processus au cours duquel un photon sonde incident arrivant sur un atome du condensat donne naissance à un nouveau photon, ρ_0 est la densité spatiale du condensat, de longueur l .

A partir de l'expression de G_j donnée en T-238, on déduit

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{gain}} &= \frac{2G_j}{\Gamma_j \rho_0 l} = \frac{2}{\rho_0 l} \frac{1}{\Gamma_j} \rho_0 V R_1 \frac{3}{4\pi} \frac{\lambda^2}{S} \\ &= \frac{3\lambda^2}{2\pi} \frac{R_1}{\Gamma_j} \end{aligned}$$

Calcul direct de σ_{gain}

Etats non perturbés du système atome + photons du laser pompe.



e, g : Nombres quantiques internes

$N_0, N_0 + 1$: Nombres de photons du laser pompe

$\hbar \vec{k}_0, 0, \hbar \vec{K}_j$: Impulsions de l'atome

$|g, N_0 + 1, \vec{0}\rangle$ est "contaminé" par $|e, N_0, \vec{k}_0\rangle$

(couplage de Rabi $\Omega_1 / 2$)

Amplification

Elle se fait sur la transition entre l'état $|g, N_0 + 1, \vec{0}\rangle$ contaminé

$$\overline{|g, N_0 + 1, \vec{0}\rangle} = |g, N_0, 1, \vec{0}\rangle - \frac{\Omega_1}{2\Delta} |e, N_0, \vec{k}_0\rangle$$

et l'état $|g, N_0, \vec{K}_j\rangle$.

Initialement, l'état $\overline{|g, N_0 + 1, \vec{0}\rangle}$ a une population égale à 1 et l'état $|g, N_0, \vec{K}_j\rangle$ est vide.

Force d'oscillateur de la transition

Egale au poids de e dans l'état initial

$$\Omega_1^2 / 4\Delta^2$$

Largeur de raie de la transition

Taux d'amortissement du réseau de densité (« cohérence » entre $\vec{k} = \vec{0}$ et $\vec{k} = \vec{K}_j$)

$$\Gamma_j$$

Expression de σ_{gain}

$$\sigma_{\text{gain}} = \frac{3}{2\pi} \lambda^2 \times \left(\frac{\Omega_1}{2\Delta} \right)^2 \times \frac{\Gamma}{\Gamma_j}$$

En effet $R_1 = \Gamma \left(\frac{\Omega_1}{2\Delta} \right)^2$ (voir T-227)

Premier facteur $\frac{3}{2\pi} \lambda^2$

Section efficace à résonance pour une transition $e \leftrightarrow g$ de force d'oscillateur 1.

Second facteur $\left(\Omega_1 / 2\Delta \right)^2$

Facteur de réduction de la section efficace précédente dû à la réduction de la force d'oscillateur pour la transition d'amplification.

Troisième facteur Γ / Γ_j

Facteur d'augmentation dû au fait que l'émission se fait sur une largeur Γ_j plus petite que Γ .

Approche du seuil de superradiance

G_j n'est plus très petit devant Γ_j et le facteur par lequel le champ sonde est multiplié doit être écrit :

$$\begin{aligned}\frac{\Gamma_j}{\Gamma_j - G_j} &= 1 + \frac{G_j}{\Gamma_j - G_j} \\ &= 1 + \frac{G_j}{\Gamma_j} + \left(\frac{G_j}{\Gamma_j}\right)^2 + \left(\frac{G_j}{\Gamma_j}\right)^3 + \dots\end{aligned}$$

Série de termes décrivant les effets d'ordre supérieur.

Au seuil de superradiance

Le gain diverge.

L'onde de matière \vec{K}_j et l'onde optique \vec{k}_0 croissent de manière exponentielle jusqu'à ce que les effets de déplétion du condensat viennent arrêter cette croissance.

Expérience de M.I.T.

(référence 26)

Le faisceau laser pompe et le faisceau laser sonde tous deux perpendiculaires à l'axe du condensat.

Les polarisations sont parallèles à l'axe du condensat de manière à éviter les effets de superradiance spontanée.

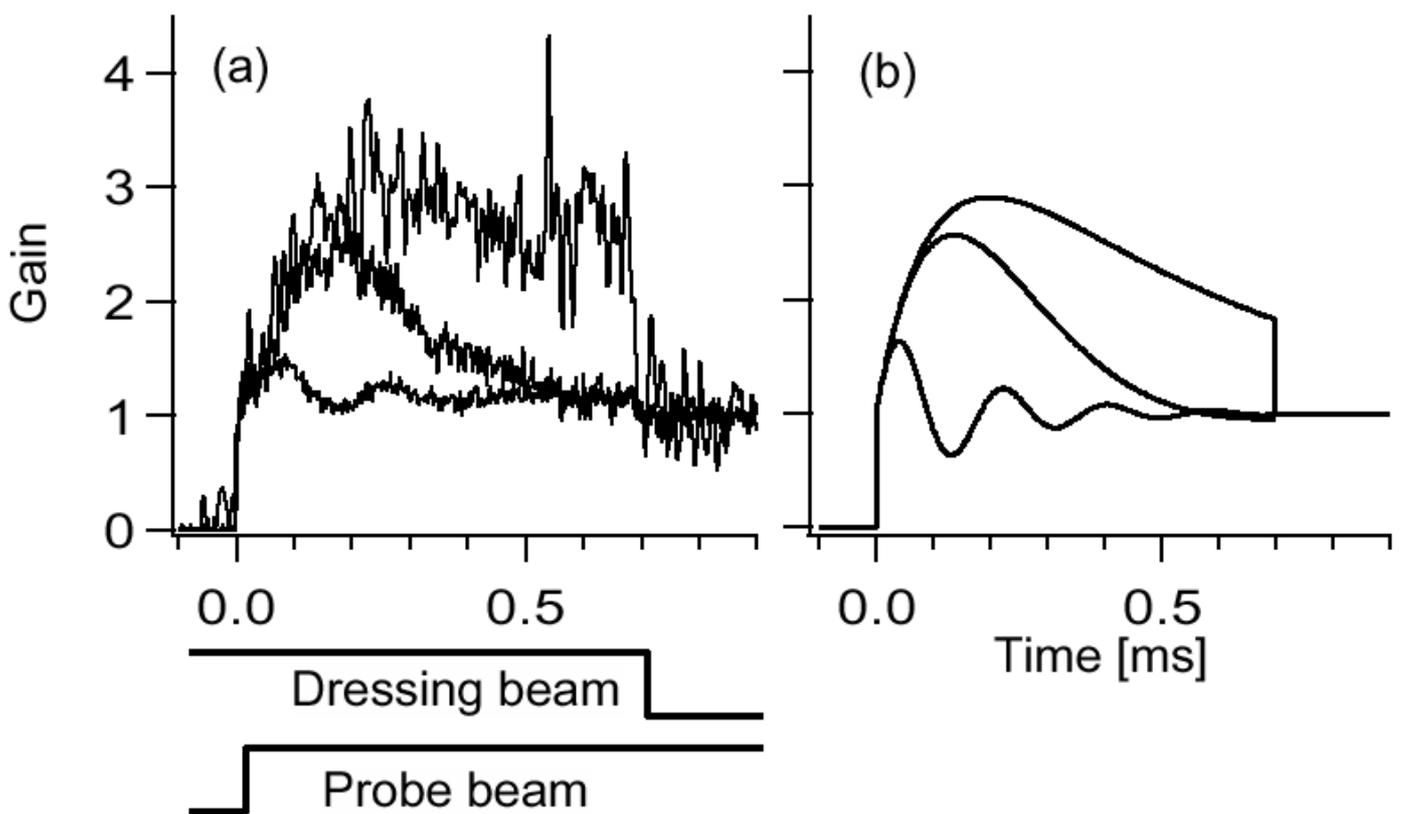
La transmission du faisceau laser sonde est mesurée pour diverses valeurs de l'intensité de ce faisceau.

Voir la figure 2 de la référence 26, reproduite sur T-247.

La figure 2a donne les courbes expérimentales, la figure 2b les courbes correspondantes calculées à partir des équations de Bloch.

Figure 2 de la référence 26

S.Inouye, R.Löw, R.Gupta, T.Pfau, A.Görlitz,
T.Gustavson, D.Pritchard, W.Ketterle,
Phys.Rev.Lett. **85**, 4225 (2000).



Commentaires sur la figure 2a

Les courbes sont normalisées par l'intensité du laser sonde.

L'intensité du laser sonde est 5.7mW/cm^2 pour la courbe du bas, 1.5mW/cm^2 pour la courbe du milieu, 0.10mW/cm^2 pour la courbe du haut.

A faible intensité (régime de décroissance exponentielle), le gain est de l'ordre de 2.8.

A intensité plus élevée, apparaissent des oscillations de Rabi.

Dans la référence 26 sont également étudiés des effets de modification de la vitesse de groupe de la lumière dans le condensat, associés à la très forte variation de l'indice du milieu (courbe de gain très étroite).

Spectroscopie pompe-sonde du réseau de densité

Le principe de l'expérience consiste à préparer tout d'abord un réseau de densité par interférence entre le condensat et une onde de matière \vec{K}_j obtenue par diffusion de Bragg.

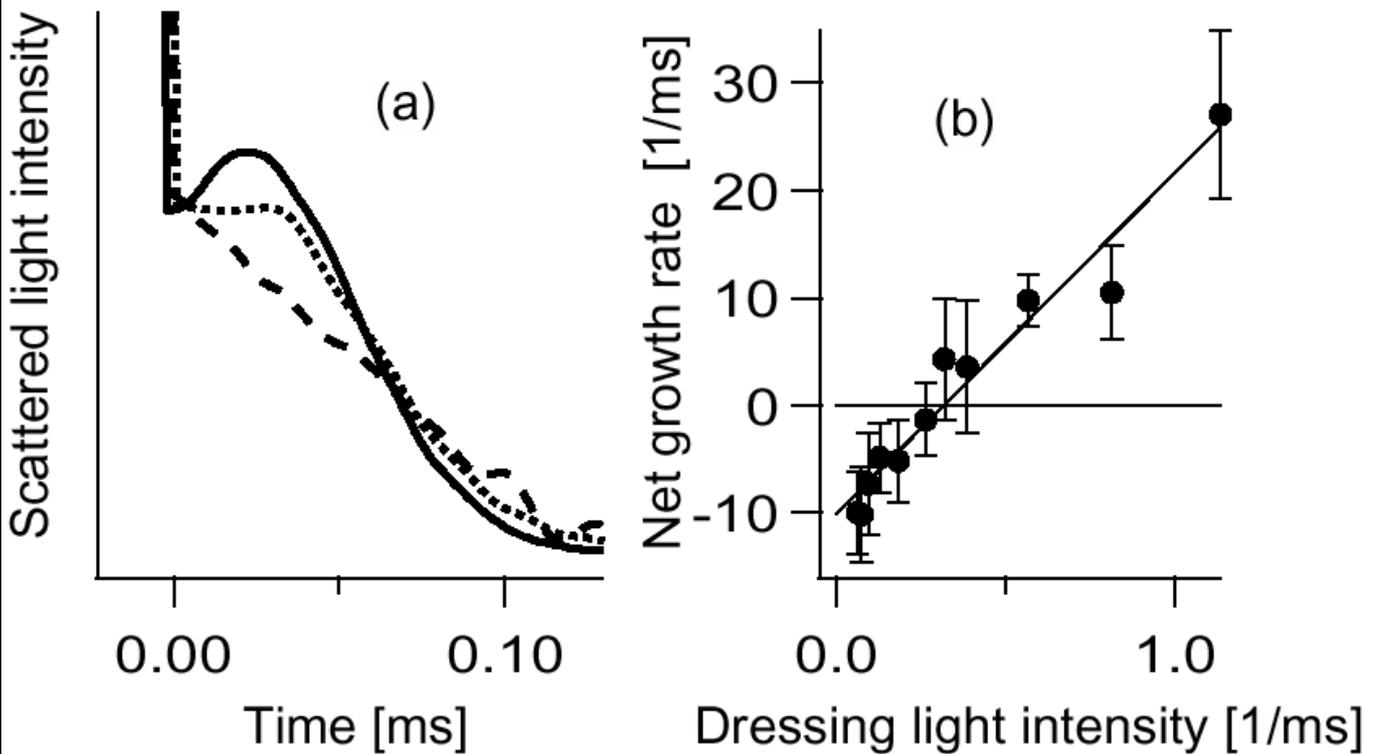
Le faisceau laser \vec{k}_i est ainsi appliqué pendant une durée de $100\mu s$ et environ 5% des atomes sont portés dans l'état \vec{K}_j .

Après coupure du faisceau laser \vec{k}_i , on étudie l'évolution temporelle du réseau de densité en observant les variations de la lumière du faisceau laser pompe diffractée par le réseau de densité. Le faisceau laser pompe est alors utilisé comme sonde pour suivre l'évolution du réseau de densité.

Voir la figure 4 de la référence 26 reproduite sur T-250.

Figure 4 de la référence 26

S.Inouye, R.Löw, R.Gupta, T.Pfau, A.Görlitz,
T.Gustavson, D.Pritchard, W.Ketterle,
Phys.Rev.Lett. **85**, 4225 (2000).



Commentaires sur la figure 4

Courbe a

Résultats expérimentaux (normalisés par l'intensité diffractée à $t=0$) pour diverses valeurs de l'intensité du laser pompe.

2.9mW/cm² pour la courbe du bas

5.7mW/cm² pour la courbe du milieu

13mW/cm² pour la courbe du haut.

La pente à l'origine, négative à faible intensité, devient positive à haute intensité, montrant ainsi le changement de signe de $G_j - \Gamma_j$.

Courbe b

Taux de croissance initial de l'intensité diffractée en fonction de l'intensité laser pompe mesurée en unités du taux de diffusion Rayleigh R_1 .

La valeur de R_1 correspondant à l'annulation du taux de croissance ($G_j = \Gamma_j$) est en bon accord avec la valeur prévue à partir du temps de cohérence du condensat.

Références

26. S.Inouye, R.Löw, R.Gupta, T.Pfau, A.Görlitz, T.Gustavson, D.Pritchard, W.Ketterle, Phys.Rev.Lett. **85**, 4225 (2000).
27. C.Cohen-Tannoudji, J.Dupont-Roc, G.Grynberg, Processus d'interaction entre atomes et photons, InterEditions/Editions du CNRS, Paris (1988). Traduction anglaise : Atom-Photon Interactions, Wiley (1992).
28. R.Bonifacio, L. de Salvo, Nuclear Instruments and Methods in Physics Research, **A341**, 360 (1994).
29. M.Moore, P.Meystre, Phys.Rev. **A58**, 3248 (1998).
30. P.Berman, Phys.Rev.**A59**, 585 (1999).