

Notes de cours
Mécanique analytique, optimisation

Jean-François Allemand

Année 2023-2024
Volume horaire 14h



Mécanique analytique

Table des matières

1	Introduction	5
1.1	Intérêt	5
1.2	Bibliographie succincte	5
1.3	Définitions	6
2	Principe de moindre action, calcul variationnel	7
2.1	Principe de Hamilton	7
2.2	Introduction au calcul variationnel	8
2.3	Applications	9
2.3.1	Film de savon	9
2.3.2	Corde dans le champ de pesanteur	10
2.3.3	Géodésique du plan	10
2.4	Euler-Lagrange en mécanique	11
3	Mécanique Lagrangienne	13
3.1	Expression de \mathcal{L}	13
3.2	Autre dérivation des équations d'Euler Lagrange	14
3.2.1	Déplacements virtuels	14
3.2.2	Travail virtuel	15
3.2.3	Principe de d'Alembert	15
3.2.4	Une autre démonstration des équations d'Euler Lagrange	16
3.3	Exemples simples	16
3.4	Définitions	20
3.5	Minimisation avec des contraintes	21
3.6	Cas des systèmes continus	26
3.7	Symétries et invariances - Théorème de Noether	28
3.8	Analyse dimensionnelle	31
3.9	L'action : quelques remarques	32
4	Mécanique hamiltonienne	35
4.1	Transformation de Legendre	35
4.2	Applications en thermodynamique	36
4.2.1	Système isolé	36
4.2.2	Energie libre, Enthalpie, Enthalpie libre	38

4.2.3	Evolution vers l'équilibre	40
4.3	Application en mécanique	41
4.4	Principe de Hamilton	43
4.5	Principe de Maupertuis	43
4.6	Crochets de Poisson	45
4.7	Espace des phases, théorème de Liouville, théorème du retour de Poincaré	46
4.8	Changements de variables, transformations canoniques	48
4.8.1	Fonctions génératrices	48
4.9	Changement de variables généré par l'action, équation de Hamilton-Jacobi	51
4.10	Changements de variables et crochets de Poisson	56
4.11	Transformations canoniques infinitésimales	56
4.12	Notion de variables angle/action	57

Chapitre 1

Introduction

1.1 Intérêt

La mécanique analytique, dont Lagrange est un des pionniers, peut être abordée de différentes façons. De manière synthétique elle ne peut reposer que sur très peu de principes. Elle a été développée en partie pour mieux prendre en compte les contraintes. Mais sa concision la rend élégante et elle présente de nombreux avantages. Elle établit clairement le rapport avec les symétries des problèmes. Ses outils sont utiles dans de nombreux domaines en dehors de la mécanique classique. La mécanique quantique est bien plus proche de la mécanique classique que de la mécanique Newtonienne. Elle est plus « mathématique » que la mécanique newtonienne, mais donc plus concise et surtout avec un principe de base qui peut s'étendre à de nombreux domaines de la physique. En effet elle peut être basée sur un principe variationnel qui sort du cadre de la mécanique. Elle est plus adaptée à étudier des perturbations ou les systèmes chaotiques.

1.2 Bibliographie succincte

- Landau et Lifchitz, Mécanique.
- Lemos, Analytical Mechanics
- Goldstein, Classical mechanics.
- Lanczos, The variational principles of mechanics
- Gignoux et Sylvestre Brac , Mécanique. De la formulation lagrangienne au chaos hamiltonien.
- Callen, Thermodynamics and an Introduction to Thermostatistics
- Diu et Guthmann et Lederer et Roulet, Thermodynamique.
- Arnold, Mathematical methods of classical mechanics.

Enfin deux anciens cours de L3 à l'ENS ont donné lieu à des documents que vous pouvez trouver en ligne et qui sont en lien étroit avec le cours.

- Le premier chapitre du cours de J.-M. Raimond d'électromagnétisme et relativité donne un condensé des points principaux. Il est accessible sur la page : <https://www.lkb.upmc.fr/cqed/teaching/teachingjmr/>.
- Le cours de Jean Hare, qui assurait le cours de mécanique analytique de L3 jusqu'en 2007. Le document est accessible sur sa page personnelle : <http://www.phys.ens.fr/~hare/>. Ce document a très très fortement inspiré les pages qui suivent, certains bouts en sont directement issus. Il est plus complet et rigoureux que le présent document.

1.3 Définitions

Tout système mécanique est défini à partir de paramètres : les coordonnées généralisées. Tout ensemble de paramètres qui permet de décrire l'évolution d'un système peut servir de coordonnées généralisées.

Exemples : coordonnées cartésiennes, polaires, sphériques, ou bien plus compliquées...

Traditionnellement, on les note $q_k, k \in \llbracket 1, N \rrbracket$, et chaque particule est décrite par $\vec{r}_\alpha(t, q_k)$. On en tire donc :

$$\vec{v} = \vec{v}(q_k, \dot{q}_k, t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} + \sum_k \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_k} \times \dot{q}_k(t)$$

Ce qui redonne bien dans le cas de coordonnées cartésiennes dans un référentiel fixe :

$$\vec{v} = \dot{x}\vec{x} + \dot{y}\vec{y} + \dot{z}\vec{z}$$

Donc l'accélération est donnée par : $\vec{a} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \sum_k \frac{\partial \vec{v}}{\partial q_k} \times \dot{q}_k(t) + \sum_k \frac{\partial \vec{v}}{\partial \dot{q}_k} \times \ddot{q}_k(t)$.

L'espace des q_k est appelé l'espace des configurations. Il est de dimension N .

Le but est d'avoir une approche qui prend au mieux en compte les contraintes. Celles-ci contraignent le mouvement des particules et donc limitent la dimension de l'espace des configurations.

Un type de contrainte est important pour ce cours. Lorsque qu'il existe une relation entre les coordonnées qui peut s'écrire : $f(q_1, q_2, \dots, q_N, t) = 0$ on nomme de telles contraintes contraintes holonomes. On précise rhéonome si il y a une dépendance explicite en temps, scléronome sinon.

Si on a d relations de ce type dans un système possédant N particules, on a $3N - d$ degrés de liberté ($\times 2$ pour les systèmes dynamiques).

Par exemple un mouvement sur un plan horizontal imposera : $z = Cte$, sur un cercle $r = Cte$ etc.

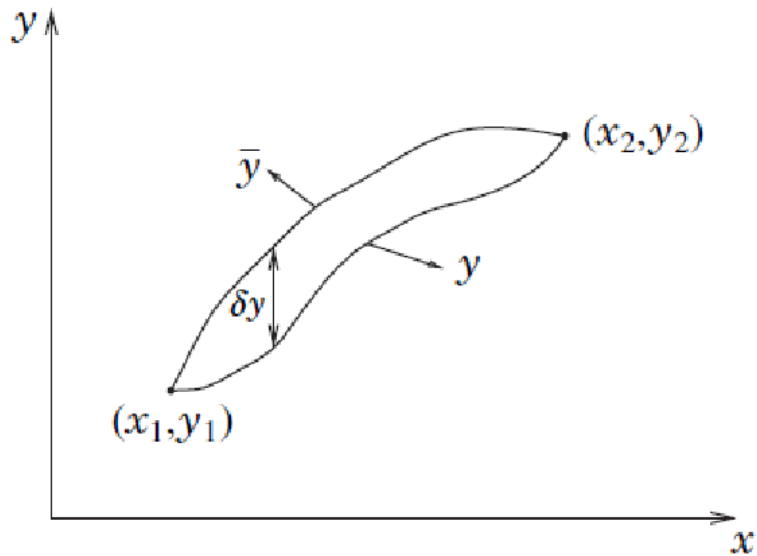


FIGURE 2.1 – Variations considérées dans le principe de Hamilton

Chapitre 2

Principe de moindre action, calcul variationnel

2.1 Principe de Hamilton

On postule l'existence d'une fonction, nommée lagrangien (qui reste à définir pour un système mécanique), homogène à une énergie : $\mathcal{L}(q_k, \dot{q}_k, t)$.

On définit alors l'action :

$$\mathcal{S} = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q_k, \dot{q}_k, t) dt$$

On a alors un principe fondamental :

Principe de moindre action : le chemin suivi par le système rend \mathcal{S} extrême.

Il convient de remarquer que \mathcal{S} est homogène à un moment cinétique, donc à la constante de Planck... (cf. quantification de l'action en mécanique quantique).

On a cependant deux problèmes :

- il faut définir \mathcal{L} plus précisément
- comment rendre extrême \mathcal{S} ?

2.2 Introduction au calcul variationnel

On cherche à optimiser une intégrale du type :

$$I(f) = \int_{x_1}^{x_2} f(y(x), \dot{y}(x), x) dx$$

I est une fonction qui possède une fonction comme argument et qui est à valeur dans \mathbf{R} . On cherche donc la fonction argument f qui va permettre de rendre extrême le résultat de l'intégrale.

Soit alors y_0 la fonction rendant I extrême.

On se donne un chemin infiniment proche : $y(x) = y_0(x) + \varepsilon \eta(x)$, avec η une fonction quelconque telle que $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$. Physiquement on cherche un autre chemin dans l'intervalle considéré en gardant x constant. En mécanique cela reviendra

On a alors :

$$I(\varepsilon) - I(0) = \int_{x_1}^{x_2} [f(y_0 + \varepsilon \eta, \dot{y}_0 + \varepsilon \dot{\eta}, x) - f(y_0, \dot{y}_0, x)] dx \underset{\text{ordre 1}}{=} \varepsilon \int_{x_1}^{x_2} \left(\eta \frac{\partial f}{\partial y} + \dot{\eta} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right) dx$$

Ce qui donne, via une intégration par parties :

$$I(\varepsilon) - I(0) = \frac{\partial I}{\partial \varepsilon} \varepsilon = \varepsilon \int_{x_1}^{x_2} \eta \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right) \right) dx + \underbrace{\varepsilon \left[\eta \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right]_{x_1}^{x_2}}_{0 \text{ car } \eta(x_1) = \eta(x_2)}$$

$I(0)$ est extrême si cette quantité est nulle :

$$I(\varepsilon) - I(0) = \varepsilon \int_{x_1}^{x_2} \eta \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right) \right) dx = 0 \text{ vrai } \forall \eta, \eta(x_1) = \eta(x_2) = 0.$$

Donc :

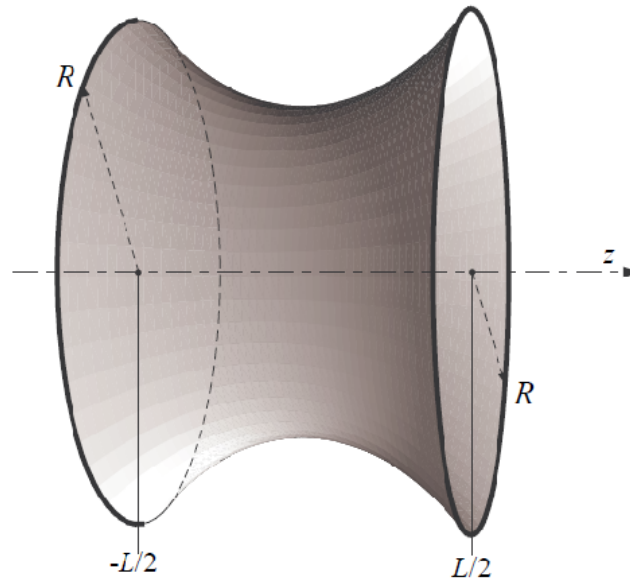


FIGURE 2.2 – Schéma du film de savon. Nous prendrons $d = L/2$.

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} = 0} \quad \text{Equation d'Euler-Lagrange}$$

2.3 Applications

2.3.1 Film de savon

Les molécules de savon possèdent une queue hydrophobe et une tête hydrophile. Il va exister une tension superficielle notée γ . Tension superficielle : minimisation de la surface.

Travail à fournir pour augmenter de dS la surface d'un film de savon : $\delta W = \gamma dS$. Pour minimiser l'énergie il faudra donc minimiser la surface du film.

Une conséquence est l'existence de forces de pression : pression de Laplace → courbure → différence de pression entre intérieur et extérieur.

$$\Delta p = \frac{2\gamma}{R} = \gamma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

Ordre de grandeur de l'épaisseur du film : μm , ce qui permet des mesures optiques par interférences.

Pour l'eau en contact avec l'air, on note que la taille typique de transition entre une goutte bien sphérique et une bien aplatie est de l'ordre du mm. On

construit par analyse dimensionnelle une longueur : $l_c = \sqrt{\frac{\gamma}{\rho g}}$, ce qui donne $\gamma_{\text{eau}} \sim 10^{-2} SI$. Cette tension va être abaissée avec du savon.

La mesure de γ se fait via des balances d'arrachement où l'on tire des films avec une force constante. L'estimation de la distance intermoléculaire se fait via l'étalement d'un film sur l'eau.

On s'intéresse à présent à la forme du film, c'est à dire à la loi $\rho(x)$. On cherche donc à minimiser la surface. On a :

$$S = \int 2\pi\rho(x)ds = \int 2\pi\rho(x)\sqrt{1+\rho'^2}dx = \int_{-d}^d 2\pi\rho(x)\sqrt{1+\rho'^2}dx$$

ici, $f(\rho, \rho', x) = 2\pi\rho\sqrt{1+\rho'^2}$. Donc, d'après Euler-Lagrange :

$$\frac{\partial f}{\partial \rho} = \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial \rho'}$$

Soit :

$$\sqrt{1+\rho'^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{\rho 2\rho'}{2\sqrt{1+\rho'^2}} \right) = \frac{(\rho'^2 + \rho'\rho'')\sqrt{1+\rho'^2} - \rho\rho' \frac{2\rho\rho'}{2\sqrt{1+\rho'^2}}}{1+\rho'^2}$$

Et après calculs :

$$\frac{\rho\rho''}{1+\rho'^2} = 1 \Rightarrow \frac{\rho'}{\rho} = \frac{1}{2} \frac{2\rho'\rho''}{1+\rho'^2}$$

$$\ln \rho = \ln \sqrt{1+\rho'^2} + a \Rightarrow b\rho = \sqrt{1+\rho'^2}$$

Donc : $(b\rho)^2 - \rho'^2 = 1$, ce qui impose :

$$\rho = \alpha \operatorname{ch}(\beta x)$$

avec les conditions aux limites : $\rho(\pm d) = R$.

2.3.2 Corde dans le champ de pesanteur

On doit cette fois-ci minimiser E_p . Soit μ la masse linéique de la corde.

$$E_p = \int \mu g z ds = \int \mu g z \sqrt{1+z'^2} dz$$

Même type d'intégrale, donc même type de solution (chaînette).

2.3.3 Géodésique du plan

$$d = \int ds = \int \sqrt{1+y'^2} dx$$

Euler-Lagrange donne :

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} \right) = 0$$

Ce qui mène à $y' = cste$: les géodésiques du plan sont les droites.



2.4 Euler-Lagrange en mécanique

Nous avons introduit l'action \mathcal{S} qui doit être extrémale pour une trajectoire physique suivie. $\mathcal{S} = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q_k, \dot{q}_k, t) dt$

On fait $q_k \rightarrow q_k + \varepsilon \eta_k$ et $\eta_k(t_1) = \eta_k(t_2) = 0$:

$$\delta \mathcal{S} = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{k=1}^N \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} \varepsilon \eta_k + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \varepsilon \dot{\eta}_k dt$$

Et on effectue la même IPP qui mène à :

$$\delta \mathcal{S} = \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_{k=1}^N \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \right) \right) \varepsilon \eta_k \right] dt = 0$$

Si on n'a pas de contraintes entre les variations des q_k , on peut choisir les η_k indépendants (donc les prendre les uns après les autres a priori non nuls...ce qui les rend nuls!). D'où :

$$\forall k \in \llbracket 1, N \rrbracket, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} = 0$$



Mécanique analytique

Chapitre 3

Mécanique Lagrangienne

A ce niveau il ne nous manque plus qu'à définir le Lagrangien \mathcal{L} . Inspirons nous de cas simples pour commencer.

3.1 Expression de \mathcal{L}

Cas d'une particule libre dans l'espace vide : $\mathcal{L}(\underbrace{x, y, z}_{\text{homogène}}, \underbrace{v_x, v_y, v_z}_{\text{isotrope}}, t)$
 homogène isotrope : $|\vec{v}|$

Comme \mathcal{L} est homogène à une énergie, on choisit : $\mathcal{L} = \frac{1}{2}mv^2$.

On cherche à retrouver les équations de Newton : que faut-il rajouter ?

$\mathcal{L} = E_c + ?$ On considère un système de particules indexées par α , on note \mathcal{T} l'énergie cinétique.

La position de chaque particule est $r_\alpha^\vec{(}q_k, t)$.

Posant $\mathcal{T} = \sum_\alpha \frac{1}{2}m_\alpha v_\alpha^2$, on calcule $A = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{q}_k} \right)$ et $B = \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial q_k}$.

$$A = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left(\sum_\alpha \frac{1}{2} m_\alpha v_\alpha^2 \right) \right) = \frac{d}{dt} \left(\sum_\alpha m_\alpha \vec{v}_\alpha \cdot \frac{\partial \vec{v}_\alpha}{\partial \dot{q}_k} \right)$$

Or :
$$\frac{\partial \vec{v}_\alpha}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left(\frac{d r_\alpha^\vec{(}q_k, t)}{dt} \right) = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left(\frac{\partial r_\alpha^\vec{(}}{\partial t} + \sum_j \dot{q}_j \frac{\partial r_\alpha^\vec{(}}{\partial q_j} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \frac{\partial r_\alpha^\vec{(}}{\partial t} + \sum_j \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} [\dot{q}_j \frac{\partial r_\alpha^\vec{(}}{\partial q_j}] \right) =$$

$\frac{\partial r_\alpha^\vec{(}}{\partial q_k}$ pour arriver à cette relation on a permuté les dérivés partielles en temps et en q_k , on a utilisé le fait que $r_\alpha^\vec{(}(t, q_k, \cancel{q}_k)$ et donc que $\frac{\partial r_\alpha^\vec{(}}{\partial q_j}(\cancel{q}_k)$ et enfin que les \dot{q}_k sont indépendants. Donc :

$$A = \sum_\alpha m_\alpha \underbrace{\frac{\partial \vec{v}_\alpha}{\partial t}}_{\vec{F}_\alpha} \cdot \frac{\partial r_\alpha^\vec{(}}{\partial q_k} + \sum_\alpha m_\alpha \vec{v}_\alpha \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial r_\alpha^\vec{(}}{\partial q_k}$$

Par ailleurs, $B = \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\sum_{\alpha} \frac{1}{2} m_{\alpha} v_{\alpha}^2 \right) = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha} \cdot \frac{\partial \vec{v}_{\alpha}}{\partial q_k}$

Or $\frac{\partial \vec{v}_{\alpha}}{\partial q_k} = \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{d\vec{r}_{\alpha}}{dt} \right) = \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{\partial \vec{r}_{\alpha}}{\partial t} + \sum_j \frac{\partial \vec{r}_{\alpha}}{\partial q_j} \dot{q}_j \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \vec{r}_{\alpha}}{\partial q_k} \right) + \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\sum_j \frac{\partial \vec{r}_{\alpha}}{\partial q_j} \dot{q}_j \right) =$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \vec{r}_{\alpha}}{\partial q_k} \right) + \left(\sum_j \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\frac{\partial \vec{r}_{\alpha}}{\partial q_k} \right) \dot{q}_j \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_{\alpha}}{\partial q_k} \right)$$

en permutant les dérivées partielles en temps et q_j avec celle en q_k et en notant l'indépendance des \dot{q}_j en q_k . D'où, avec Euler-Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial q_k} = \sum_{\alpha} \underbrace{\vec{F}_{\alpha} \cdot \frac{\partial \vec{r}_{\alpha}}{\partial q_k}}_{\text{force généralisée}}$$

Si, de plus : $\vec{F}_{\alpha} = -\overrightarrow{\text{grad}} \mathcal{U}_{\alpha}$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial q_k} = \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\underbrace{\sum_{\alpha} \mathcal{U}_{\alpha}}_{\mathcal{U}} \right)$$

Si toutes les forces dérivent d'un potentiel indépendant de la vitesse, on pose alors le lagrangien standard :

$$\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{U}$$

Remarque : si on a une contrainte, un des $\frac{\partial \vec{r}_{\alpha}}{\partial q_k}$ va être nul. Les contraintes sont ainsi plus simples à prendre en compte avec le formalisme lagrangien.

3.2 Autre dérivation des équations d'Euler Lagrange

3.2.1 Déplacements virtuels

On va appeler déplacement virtuel $\delta \vec{r}$ un déplacement à t fixé qui respecte les contraintes du système. Il est donc différent du déplacement réel $d\vec{r}$ qui correspond à la différence entre la position entre deux instants différents. Par exemple un déplacement virtuel pour un point se déplaçant sur une surface solide mobile est effectué en gardant le temps constant, donc la surface fixe, et en bougeant le point sur cette surface alors que le déplacement réel va suivre la surface. Il est important de prendre en considération que le déplacement doit prendre en compte les contraintes. Dans le cas d'un roulement sans glissement par exemple pour une roue sur un plan, le point de contact ne peut pas avoir de déplacement virtuel, puisqu'il doit rester dans le plan et être fixe. Si on exprime le déplacement virtuel en fonction des coordonnées généralisées on a :

$$\delta \vec{r} = \sum_N \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \delta q_i$$

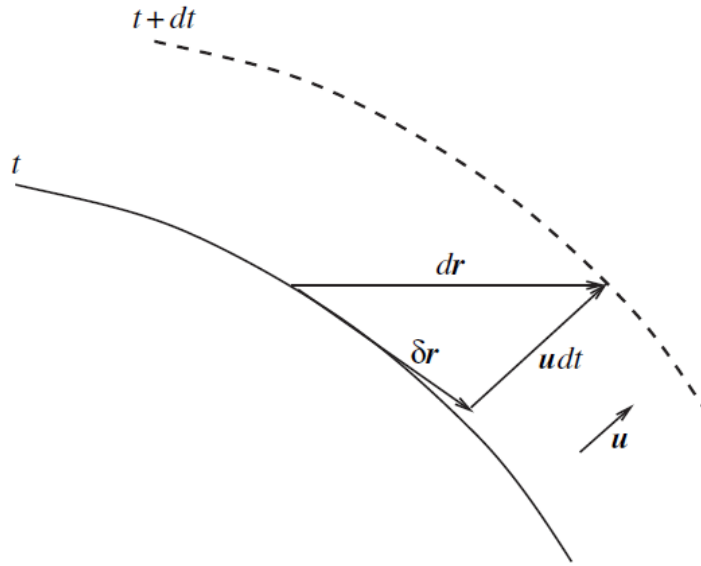


FIGURE 3.1 – Schéma pour décrire un déplacement virtuel δr , différent du déplacement réel dr .

3.2.2 Travail virtuel

On définit logiquement le travail virtuel d'une force \vec{F} le travail associé à cette force lors d'un déplacement virtuel : $\delta W = \vec{F} \cdot \delta \vec{r}$.

3.2.3 Principe de d'Alembert

Si un système de particules repérées par un indice i est en équilibre alors la somme des forces s'appliquant sur la particule i est nulle : $\vec{F}_i = \vec{0}$. Et donc le travail virtuel des forces sur le système est simplement nul :

$$\sum_i \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0$$

Si on décompose la force en une composante appliquée hors contraintes et une composante modélisant les contraintes on peut écrire $\vec{F}_i = F_i^{(a)} + F_i^{(c)}$ ce qui pour le cas, assez général, de forces dues aux contraintes ne fournissant pas de travail virtuel (ce qui exclut les glissement avec frottements) :

$$\delta W = \sum_i F_i^{(a)} \cdot \delta \vec{r}_i = 0$$

C'est le principe des travaux virtuels. Pour un système hors d'équilibre on raisonne de manière identique en explicitant le PFD de la manière suivante sur

chaque particule :

$$\left(\frac{d\vec{p}_i}{dt} - \vec{F}_i \right) = \vec{0}$$

ce qui permet d'écrire

$$\sum_i \left(\frac{d\vec{p}_i}{dt} - \vec{F}_i^{(a)} \right) \cdot \delta\vec{r}_i = 0$$

en se plaçant dans les mêmes conditions pour les contraintes.

3.2.4 Une autre démonstration des équations d'Euler Lagrange

En utilisant les coordonnées généralisées le travail virtuel s'exprime :

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_i = \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^n \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \delta\vec{r}_i}{\partial q_k} \delta q_k$$

Cette expression fait apparaître les forces généralisées vues précédemment. On rappelle par ailleurs que :

$$\vec{v}_i = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} + \sum_k \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k$$

Calculons l'autre terme de l'expression hors équilibre :

$$\sum_i \left(\frac{d\vec{p}_i}{dt} \right) \cdot \delta\vec{r}_i = \sum_i m_i \dot{\vec{v}}_i \cdot \delta\vec{r}_i = \sum_i \sum_k m_i \dot{\vec{v}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \delta q_k$$

En utilisant la relation suivante :

$$\frac{d}{dt} \left(m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \right) = m_i \dot{\vec{v}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} + m_i \vec{v}_i \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \right) = m_i \dot{\vec{v}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} + m_i \vec{v}_i \cdot \left(\frac{\partial \dot{\vec{v}}_i}{\partial \dot{q}_k} \right)$$

ainsi que $\frac{\partial \dot{\vec{v}}_i}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}$ on peut écrire alors :

$$\sum_i m_i \dot{\vec{v}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} = \sum_i \frac{d}{dt} \left(m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \dot{q}_k} \right) - m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_k} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial q_k}$$

En combinant les deux parties on retrouve donc Euler Lagrange exprimée avec les forces généralisées comme en paragraphe 3.1 sans utiliser le principe de Hamilton.

3.3 Exemples simples

Ressort

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} k x^2$$

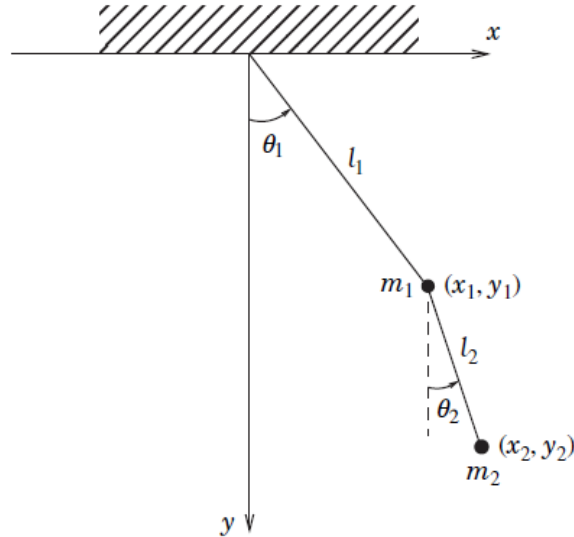


FIGURE 3.2 – Schéma du double pendule. Nous prendrons $l_1 = l_2 = l$.

et

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \right) = \frac{d}{dt} (m\dot{x}) = m\ddot{x} = \frac{d\mathcal{L}}{dx} = -kx \rightarrow m\ddot{x} = -kx$$

Pendule simple $\mathcal{T} = \frac{1}{2}m(l\dot{\theta})^2$ $\mathcal{U} = -mgl \cos \theta$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) = \frac{d}{dt} (ml^2\dot{\theta}) = ml^2\ddot{\theta} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = -mgl \sin \theta \rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0$$

Double pendule

$$U = U_1 + U_2 = -mgl \cos \theta_1 - mgl(\cos \theta_1 + \cos \theta_2) \quad \mathcal{T} = \mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2 = \frac{1}{2}m(l\dot{\theta})^2 + \mathcal{T}_2$$

$$x_1 = l \sin(\theta_1) \quad x_2 = l(\sin(\theta_1) + \sin(\theta_2)) \quad \dot{x}_2 = l(\cos(\theta_1)\dot{\theta}_1 + \cos(\theta_2)\dot{\theta}_2)$$

$$y_1 = l \cos(\theta_1) \quad y_2 = l(\cos(\theta_1) + \cos(\theta_2)) \quad \dot{y}_2 = -l(\sin(\theta_1)\dot{\theta}_1 + \sin(\theta_2)\dot{\theta}_2)$$

Mécanique analytique

$$\begin{aligned}
 \mathcal{T}_2 &= \frac{1}{2}ml^2[(\cos(\theta_1)\dot{\theta}_1 + \cos(\theta_2)\dot{\theta}_2)^2 + (\sin(\theta_1)\dot{\theta}_1 + \sin(\theta_2)\dot{\theta}_2)^2] \\
 &= \frac{1}{2}ml^2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2))
 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_1} = -2mgl \sin(\theta_1) + \frac{1}{2}ml^2 \times 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2(-\sin(\theta_1 - \theta_2)) \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_2} = -mgl \sin(\theta_2) + \frac{1}{2}ml^2 \times 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_1} = 2ml^2\dot{\theta}_1 - \frac{1}{2}ml^2 \times 2\dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_2} = ml^2(\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2)) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_1} \right) = 2ml^2\ddot{\theta}_1 + ml^2\ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) - ml^2\dot{\theta}_2(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_2} \right) = ml^2(\ddot{\theta}_2 + \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - \dot{\theta}_1(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) \sin(\theta_1 - \theta_2)) \end{cases}$$

On en déduit rapidement et sans difficulté les équations du mouvement.

Pour la résolution, on fait l'hypothèse des petits angles. Les équations linéarisées s'écrivent :

$$\begin{cases} 2ml^2\ddot{\theta}_1 + ml^2\ddot{\theta}_2 = -2mgl\theta_1 \\ ml^2(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) = -mgl\theta_2 \end{cases} \implies \begin{cases} 2\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 = -2\omega_0^2\theta_1 \\ \ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 = -\omega_0^2\theta_2 \end{cases}$$

On est en présence de deux oscillateurs couplés.

On cherche des solutions de la forme : $\theta_1 = \theta_{10}e^{j\omega t}$ $\theta_2 = \theta_{20}e^{j\omega t}$

On obtient :

$$\begin{cases} 2(\omega^2 - \omega_0^2)\theta_{10} + \omega^2\theta_{20} = 0 \\ \omega^2\theta_{10} + (\omega^2 - \omega_0^2)\theta_{20} = 0 \end{cases}$$

On ne veut pas la solution triviale $\theta_{10} = \theta_{20} = 0$. On doit donc annuler le déterminant de ces deux équations :

$$\begin{vmatrix} 2(\omega^2 - \omega_0^2) & \omega^2 \\ \omega^2 & \omega^2 - \omega_0^2 \end{vmatrix} = 0 \implies 2\omega^4 - 4\omega^2\omega_0^2 + 2\omega_0^4 - \omega^4 = 0 \implies (\omega^2 - 2\omega_0^2)^2 - 2\omega_0^4 = 0$$

D'où :

$$\boxed{\omega_+ = \omega_0\sqrt{2 + \sqrt{2}} \quad \omega_- = \omega_0\sqrt{2 - \sqrt{2}}}$$

Puis on réinjecte pour obtenir θ_{10} et θ_{20} . On obtient finalement :

$$\boxed{\theta_1(t) = \theta_{10}^+ e^{j\omega_+ t} + \theta_{10}^- e^{j\omega_- t}}$$

Le mouvement est une combinaison linéaire d'oscillations propres, dont les caractéristiques sont déterminées par les conditions initiales.

Particule dans un champ $(\vec{E}(t), \vec{B}(t))$

Force de Lorentz : $\vec{F} = q \left(\vec{E} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{v} \times \vec{B} \right)$

On note :

- \vec{A} le potentiel vecteur : $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$
- ϕ le potentiel électrostatique : $\vec{E} = -\vec{\nabla} \phi$

On pose alors :

$$U = q(\phi - \vec{v} \cdot \vec{A}) \Rightarrow \mathcal{L} = \frac{1}{2}mv^2 - q(\phi - \vec{v} \cdot \vec{A})$$

Vectériellement, les équations d'Euler-Lagrange s'écrivent :

$$\frac{d}{dt} (\vec{\nabla}_{\vec{v}} \mathcal{L}) = \vec{\nabla}_{\vec{r}} \mathcal{L}$$

$$\vec{\nabla}_{\vec{v}} \mathcal{L} = m\vec{v} + q\vec{A}$$

$$\frac{d}{dt} \vec{\nabla}_{\vec{v}} \mathcal{L} = m \frac{d\vec{v}}{dt} + q \frac{d\vec{A}}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} + q \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}}) \vec{A} \right)$$

Par ailleurs, $\vec{\nabla}_{\vec{r}} \mathcal{L} = \underbrace{-q\vec{\nabla}_{\vec{r}}\phi}_{q\vec{E}} + q\vec{\nabla}_{\vec{r}}(\vec{v} \cdot \vec{A})$

Or :

$$\vec{\nabla}_{\vec{r}}(\vec{v} \cdot \vec{A}) = (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}}) \vec{A} + \cancel{(\vec{A} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}}) \vec{v}} + \vec{v} \times \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} + \cancel{\vec{A} \times \overrightarrow{\text{rot}} \vec{v}}$$

Et finalement, on obtient :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q \left(\vec{E} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{v} \times \vec{B} \right)$$

La forme du lagrangien redonne bien la force de Lorentz.

Remarque : ϕ et \vec{A} sont définis à une transformation de jauge près :

$$\begin{cases} \phi \rightarrow \phi + a \\ \vec{A} \rightarrow \vec{A} + \vec{\nabla} f \end{cases}$$

Donc le lagrangien est défini à la transformation près :

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} + q(a - \vec{v} \cdot \vec{\nabla} f)$$

Mais on s'intéresse aux variations de S , qui est définie comme : $\int \mathcal{L} dt$.

Si $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}_0 + \frac{dg}{dt}$, alors $S = \int \mathcal{L} dt = \int \mathcal{L}_0 + \frac{dg}{dt} dt = S + cste$

On aura donc les mêmes variations pour \mathcal{S} , donc les mêmes équations.

On peut donc définir le lagrangien à la dérivée totale d'un champ près. Ici, on écrit :

$$a - (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})f = \frac{dg}{dt} = \frac{\partial g}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})g$$

ce qui impose $a = -\frac{\partial f}{\partial t}$.

On aura alors :

$$\begin{cases} \phi \rightarrow \phi - \frac{\partial f}{\partial t} \\ \vec{A} \rightarrow \vec{A} + \vec{\nabla}f \end{cases}$$

Le fait que les potentiels soit définis à une transformation de jauge près n'influence donc pas l'écriture des équations d'Euler-Lagrange.

3.4 Définitions

Impulsion associée à q_k : $p_k = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}$

Remarque : Si $\mathcal{L} \propto \frac{1}{2}mv^2$, on retrouve bien $\vec{p} = m\vec{v}$.

Variable cyclique : une telle variable est telle que $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = 0$

Les équations d'Euler-Lagrange donnent alors : $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \right) = 0$, donc p_k est une constante du mouvement.

Le but de la mécanique est de faire le bon choix de coordonnées généralisées afin d'avoir le plus possible de variables cycliques. Cela permet de faire apparaître des constantes du mouvement, donc des relations entre les variables ce qui dans le principe permet de réduire le nombre de variables à déterminer.

Énergie : $E = \sum_k p_k \dot{q}_k - \mathcal{L}$

Si \mathcal{L} ne dépend pas explicitement du temps, alors E est une constante du mouvement.

En effet : $\frac{dE}{dt} = \sum_k \frac{dp_k}{dt} \dot{q}_k + p_k \ddot{q}_k - \frac{d\mathcal{L}}{dt}$, or $p_k = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}$, donc via Euler-Lagrange :

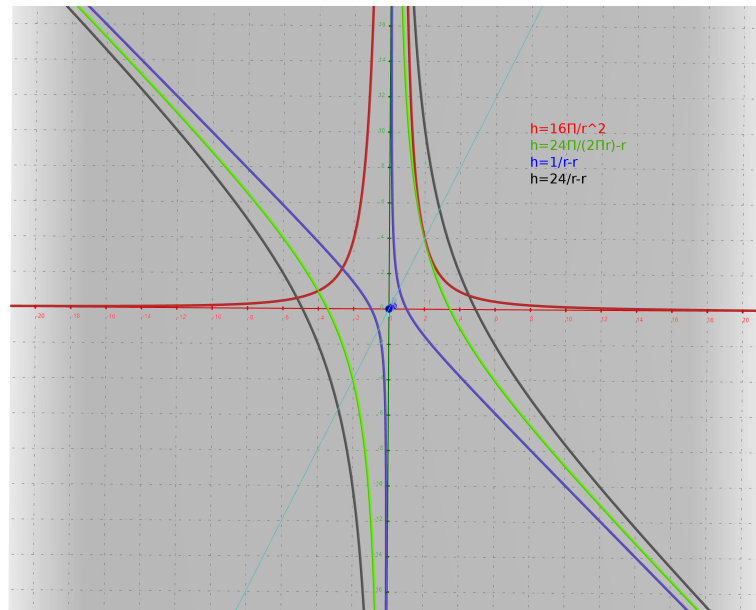


FIGURE 3.3 – La surface minimale à volume imposé est trouvée lorsque la courbe $h = \frac{S}{2\pi r} - r$ est tangente à $h_1 = \frac{V}{\pi r^2}$. On a pris $V = 16\pi$.

$$\frac{dE}{dt} = \sum_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$$

or $\frac{d\mathcal{L}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} + \sum_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k$

d'où $\frac{dE}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$, et le résultat en découle.

3.5 Minimisation avec des contraintes

Exemple de la boîte de conserve On veut minimiser la surface d'une boîte de conserve contenant un volume imposé pour diminuer le coût de fabrication. On pourrait consommer des produits frais, c'est meilleur pour la santé et coûte moins cher puisqu'il n'y a pas de boîte mais ce n'est pas notre hypothèse. Dans ce cas simple le réflexe est d'exprimer la hauteur du cylindre en fonction du volume qui est constant et du rayon, de reporter cette expression dans celle de la surface qui ne dépend alors plus que du rayon et on minimise alors la surface par rapport au rayon simplement. Cependant cette solution ne marche qu'avec peu de contraintes et elle fait jouer un rôle particulier à une variable, ici le rayon, alors que rien ne le justifie et enfin cette méthode de report n'est pas toujours aussi simple à effectuer. Prenons une autre approche. On peut tracer la courbe $h = f(R)$ pour un volume fixé. Celle-ci est tracée en rouge

dans la figure 3.3. Comme le volume est imposé on doit rester sur cette courbe quand on modifie les paramètres. Les variations entre R et h font que l'on doit donc se déplacer sur la tangente à cette courbe autour du minimum (on reste sur la courbe sur un voisinage). On peut ensuite tracer les courbes $h(Surf, R)$ pour différentes valeurs de la surface. On a 0, 1 ou 2 intersections quand on augmente la valeur de la surface comme on peut le voir sur le graphe ci-dessus. On s'aperçoit que la surface minimum à volume constant correspond au cas où il y a une seule solution et donc la surface minimale à volume imposé est trouvée lorsque la courbe $h = \frac{S}{2\pi R} - R$ est tangente à $h_1 = \frac{V}{\pi R^2}$. Dans ce cas les normales aux deux courbes sont alignées au niveau du minimum et donc il doit y avoir colinéarité des deux normales aux courbes donc des gradients. Le facteur de colinéarité entre les deux gradients est appelé multiplicateur de Lagrange λ . On doit donc annuler le gradient de $S - \lambda V$ ce qui ne fait que traduire cette colinéarité, puis imposer le volume pour trouver λ .

Remarque : Dans le cas général, avec plus de contraintes on a le gradient de la fonction à minimiser qui est dans le sous espace orthogonal aux iso-surfaces des contraintes. Ce sous espace est généré par les gradients des contraintes. Et donc la fonction f à minimiser doit alors avoir un gradient qui est une combinaison linéaire des gradients des contraintes. Ce qui est ce que nous allons faire plus loin pour l'action.

On a donc :

$$V_0 = \pi R^2 h \quad S = 2\pi(R^2 + Rh)$$

Soit λ le multiplicateur de Lagrange. On minimise (i.e. on annule le gradient de) $U = S - \lambda V_0$ en considérant que R et h sont indépendants : $U(r, h) = 2\pi R^2 + 2\pi Rh - \lambda \pi R^2 h$. Puis on résout :

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial R} = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial h} = 0 \end{cases} \text{ qui donne } \lambda = \frac{2}{R} \text{ et finalement } h = 2R.$$

Application en mécanique Lagrangienne On doit minimiser l'action et donc on a :

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_k \left[\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \right) \right) \varepsilon \eta_k \right] dt$$

qui doit être nul.

Quand il y a des contraintes, on peut avoir des relations entre les η_k . On ne peut donc pas les annuler indépendamment les uns des autres les termes pour différents k pour aboutir aux relations d'Euler Lagrange.

On s'intéresse au cas particulier des contraintes holonomes, pour lesquelles $\exists f, f(q_1, q_2, \dots, q_n) = 0$.

Si on fait $q_i \rightarrow q_i + \varepsilon \eta_i$, alors on a : $\sum_k \frac{\partial f}{\partial q_k} \varepsilon \eta_k = 0$.

Plus généralement, pour r contraintes, on aura des $f_j, j \in \llbracket 1, r \rrbracket$ telles que $f_j(q_1, \dots, q_N) = 0$.

Pour permettre la résolution du problème, on introduit r paramètres appelés multiplicateurs de Lagrange λ_j et comme indiqué dans le paragraphe précédent

on peut minimiser ensuite $(S - \sum_{j=1}^r \lambda_j f_j)$ en les traitant comme des variables indépendantes et imposer les contraintes reviendra à fixer les λ_j . Ceci revient à dire que le gradient de S est dans le sous-espace généré par les gradients des contraintes (lesquels sont perpendiculaires aux surfaces $f_j = Cte$).

On peut aussi avoir une vision plus terre à terre. On a N variables mais avec les r contraintes seules $N - r$ sont indépendantes. On peut ajouter r inconnues pour avoir le confort de N équations à N inconnues qui seront alors traitées toutes de la même manière.

Ainsi pour tout j , et tout λ_j on peut écrire :

$$\lambda_j \sum_k \frac{\partial f_j}{\partial q_k} \varepsilon \eta_k = 0$$

donc $\sum_{j=1}^r \sum_k \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial q_k} \varepsilon \eta_k = 0$, et on peut intégrer cette valeur nulle :

$$\delta S = 0 = \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_k \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \right) \right) + \sum_j \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial q_k} \varepsilon \eta_k \right] dt$$

On a ici des paramètres λ_j arbitraires.

Pour la facilité de compréhension de la méthode, mais ce n'est pas obligatoire en pratique, on choisit donc les λ_j tels que : $\forall k \in \llbracket 1, r \rrbracket$, $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \right) + \sum_{j=1}^r \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial q_k} = 0$. C'est *a priori* possible car on a r équations avec r inconnues.

Les λ_j vont être reliés aux forces qui appliquent la contrainte (cf. analogie avec les équations avec forces généralisées et exemples suivants). Après avoir introduit les λ_j , et imposé les relations ci-dessus, il reste $N - r$ relations avec des η_k qui peuvent être pris indépendants. En effet avec ce choix des λ_j on a exprimé les r premiers η_k en fonction des $N - r$ suivants, on a pris les contraintes en compte et ne donc reste que des variables indépendantes. Tout se passe ensuite comme s'il n'y avait pas de contraintes avec des variations indépendantes (ou plutôt on a pris en compte la dépendance en amont en fixant les paramètres). De manière pragmatique on est passé N équations pour $N - r$ inconnues car il y avait des contraintes à N équations pour N inconnues avec les multiplicateurs de Lagrange. Ce qui entre *a priori* dans un cadre général de résolution.

De manière générale quand il faut minimiser une fonction f avec n contraintes f_i , il faut introduire n multiplicateurs de Lagrange λ_i et minimiser sans contraintes $f - \sum_i \lambda_i f_i$.

Autres exemples

Mécanique analytique

— Pendule pesant : Masse dans le champ de pesanteur \vec{g} avec $r = a$.

$$f(r, \theta) = r - a = 0 \implies \frac{\partial f}{\partial r} = 1 \quad \frac{\partial f}{\partial \theta} = 0$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2) + mgr \cos \theta$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} - \lambda = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = 0 \\ r = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} mr\dot{\theta}^2 + mg \cos \theta - \lambda - m\ddot{r} = 0 \\ -mgr \sin \theta - mr^2\ddot{\theta} + 2mr\dot{r}\dot{\theta} = 0 \\ r = a \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ma\dot{\theta}^2 + mg \cos \theta - \lambda = 0 \\ -mga \sin \theta = ma^2\ddot{\theta} \\ r = a \end{cases} \quad \text{d'où } \lambda = \underbrace{ma\dot{\theta}^2}_{\text{force centrifuge}} + \underbrace{mg \cos \theta}_{\text{poids}}$$

λ est donc lié à la tension du fil, dans le cas du pendule pesant.

Ainsi, si on s'intéresse à une réaction de support qui impose une contrainte, on résout le système libre en imposant la contrainte *via* les multiplicateurs de Lagrange.

— Masse lâchée sans vitesse au sommet d'une sphère : Mêmes conditions que le problème précédent, et on cherche l'angle de décollement.

$$\text{On aboutit aux même équations : } \begin{cases} ma\dot{\theta}^2 + mg \cos \theta - \lambda = 0 \\ -mga \sin \theta = ma^2\ddot{\theta} \end{cases}$$

Le but est d'avoir $\lambda = 0$, ce qui donne, par intégration de la deuxième équation ensuite reportée dans la première :

$$2mga(1 - \cos \theta) - mga \cos \theta = 0$$

$$\text{soit finalement : } \cos \theta = \frac{2}{3}$$

Les multiplicateurs peuvent servir dans d'autres cas :

Roulement sans glissement :

On a généralement une relation du type :

$$\sum_k a_k \dot{q}_k = 0$$

qui peut s'intégrer en :

$$\sum_k a_k q_k = \text{"0"}$$

Cette relation ressemble à celle qui a permis l'introduction des multiplicateurs de Lagrange. D'où l'idée que r relations de roulement sans glissement impliquent r multiplicateurs :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} - \sum_i \lambda_i a_{i,k} = 0$$

Mécanique analytique

Exemple : Cercle roulant sans glisser sur une pente

On a $\dot{x} = R\dot{\theta}$, soit $a_r = 1, a_\theta = R$.

Le lagrangien s'écrit :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + mgx \sin(\alpha) + \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2$$

Et les équations d'Euler-Lagrange donnent :

$$\begin{cases} mg \sin(\alpha) - m\ddot{x} - \lambda = 0 \\ -J\ddot{\theta} + \lambda R = 0 \end{cases}$$

Soit $\lambda = \frac{J}{R}\ddot{\theta} = mR\ddot{\theta}$

On réinjecte cette dernière relation, et on obtient finalement :

$$\ddot{x} = \frac{1}{2}g \sin(\alpha)$$

Ici encore, λ traduit la réaction tangentielle du support.

Contraintes sous forme intégrale :

Soit : $c_i = \int_{t_i}^{t_f} f_i(q_k, \dot{q}_k) dt$ une contrainte.

On a alors :

$$\delta c_i = \int_{t_i}^{t_f} \sum_k \left(\frac{\partial f_i}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f_i}{\partial \dot{q}_k} \right) \delta q_k dt = 0$$

On introduit alors les multiplicateurs de Lagrange :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} - \sum_{i=1}^r \lambda_i \left[\frac{\partial f_i}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f_i}{\partial \dot{q}_k} \right] = 0$$

Exemple : Corde dans le champ de pesanteur

On cherche à minimiser $E = \int_{x_1}^{x_2} \mu g z \sqrt{1 + z'^2} dx$

Contrainte : longueur imposée $L = \int ds = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + z'^2} dx$

On minimise donc :

$$E - \lambda L = \int_{x_1}^{x_2} \underbrace{\mu g (z - \lambda)}_u \underbrace{\sqrt{1 + z'^2}}_{\sqrt{1+u'^2}} dx$$

Or on a déjà vu que $u = \alpha \cosh(\beta x)$, donc u dépend de 2 constantes + λ , d'où trois constantes fixées par les conditions limites en x_1, x_2 et par L constante.

On se doute que λ doit être relié à la tension de la corde.

3.6 Cas des systèmes continus

On se donne un modèle de solide : des masses à une distance a reliées entre elles par des ressorts (m, k) , qui forment une chaîne infinie unidimensionnelle. On note ξ_i l'écart à la position d'équilibre en i .

La description macroscopique se fera par le passage à la limite du continu : $a \rightarrow 0$

Lagrangien du système :

$$\mathcal{L} = \sum_i \frac{1}{2} m a \dot{\xi}_i^2 - \frac{1}{2} k (\xi_{i+1} - \xi_i)^2$$

Pour $a \rightarrow 0$, on écrit $\frac{m}{a} = cste = \mu$, masse linéique. Alors :

$$\mathcal{T} = \sum_i \frac{1}{2} \mu \dot{\xi}_i^2 a \xrightarrow{a \rightarrow 0} \int \frac{1}{2} \mu \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 dx$$

La théorie de l'élasticité permet l'introduction du module d'Young qui traduit la compression élastique du matériau :

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{E} \frac{F}{S}$$

Une analogie donne alors :

$$F = -k(\xi_{i+1} - \xi_i) = \underbrace{-ka}_{a \rightarrow 0: cste} \frac{\xi_{i+1} - \xi_i}{a}$$

Donc :

$$U = \sum \frac{1}{2} \underbrace{(ka)}_Y \left(\frac{\xi_{i+1} - \xi_i}{a} \right)^2 a \xrightarrow{a \rightarrow 0} \int \frac{1}{2} Y \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 dx$$

et finalement :

$$\mathcal{L} = \int \left[\frac{1}{2} \mu \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} Y \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 \right] dx = \int L(x, t) dx$$

où $L(x, t)$ est la densité linéique de lagrangien. En général, $L(\partial_t \xi, \partial_x \xi, \partial_x^2 \xi, \partial_y \xi, \dots, t)$.
On cherche alors à optimiser S :

$$S = \int_{t_i}^{t_f} \int_{y_i}^{y_f} \int_{x_i}^{x_f} L(\partial_t \xi, \partial_x \xi, \partial_x^2 \xi, \partial_y \xi, \partial_y^2 \xi, t) dx dy dt$$

On calcule les variations de \mathcal{S} quand $\xi \rightarrow \xi + \delta \xi$:

$$\delta \mathcal{S} = 0 = \int_{t_i}^{t_f} \int_{x_i}^{x_f} [L(\xi + \delta \xi, \partial_t(\xi + \delta \xi), \partial_x(\xi + \delta \xi), \partial_x^2(\xi + \delta \xi), t) - L(\partial_t \xi, \partial_x \xi, \partial_x^2 \xi, t)] dx dt$$

$$= \int_{t_i}^{t_f} \int_{x_i}^{x_f} \left[\frac{\partial L}{\partial \xi} \delta \xi + \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)} \frac{\partial \delta \xi}{\partial t} + \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)} \frac{\partial \delta \xi}{\partial x} + \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \right)} \frac{\partial^2 \delta \xi}{\partial x^2} \right] dx dt$$

Puis on intègre par parties, et les conditions sur $\delta \xi$ donnent les conditions du les termes tout intégrés nuls : $\delta \xi(x_i) = \delta \xi(x_f) = 0$:

$$\delta \mathcal{S} = \int_{t_i}^{t_f} \int_{x_i}^{x_f} \left\{ \left[\frac{\partial L}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \right)} \right) \right] d\xi \right\} dx dt + \left[\frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)} \right]_{x_i}^{x_f}$$

Enfin, $\delta \mathcal{S} = 0 \forall \delta \xi$ autour de ξ_0 , d'où :

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \right)} \right) = 0}$$

Ici, pour $L = \frac{1}{2} \mu \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} Y \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2$, on obtient :

$$\mu \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - Y \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = 0 \quad \text{équation de propagation}$$

Remarque : Ce type d'écriture des équations d'Euler-Lagrange est à la base du formalisme de la théorie des champs, dans laquelle le nombre de degrés de liberté tend vers l'infini. Cf TD.

Exemple : $L = \rho \xi + \frac{\varepsilon_0}{2} \left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial z} \right)^2 \right]$

L'équation précédente mène à :

$$\Delta \xi - \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0 \quad \text{équation de Poisson}$$

Un tel formalisme trouve donc son utilité en électromagnétisme également.

Le principe de Hamilton peut ainsi être appliqué à des domaines variés.

Le problème principal est de trouver le bon lagrangien. Pour cela, il est important de prendre en compte les symétries et invariances du problème.

3.7 Symétries et invariances - Théorème de Noether

Si \mathcal{L} ne dépend pas explicitement du temps, alors $E = \sum_k p_k \dot{q}_k - \mathcal{L}$ est une constante du mouvement.

Si q_k est une variable cyclique, p_k est une constante du mouvement.

Que se passe-t-il si le système est invariant par translation dans une direction donnée \vec{u} ?

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\vec{r}, \vec{v}, t) &= \mathcal{L}(\vec{r} + s\vec{u}, \vec{v}, t) \quad \forall s \in \mathbb{R} \\ &= \mathcal{L}(\vec{r}, \vec{v}, t) + s \vec{\nabla}_{\vec{r}} \mathcal{L} \cdot \vec{u}\end{aligned}$$

On a donc :

$$\vec{\nabla}_{\vec{r}} \mathcal{L} \cdot \vec{u} = 0 \xrightarrow{\text{E.L.}} \frac{d}{dt} \left(\vec{\nabla}_{\vec{v}} \mathcal{L} \right) \cdot \vec{u} = 0 \implies \frac{d}{dt} \left(\underbrace{\vec{\nabla}_{\vec{v}} \mathcal{L} \cdot \vec{u}}_{\vec{p}} \right) = 0$$

La projection de l'impulsion selon \vec{u} est donc conservée.

Que se passe-t-il en cas d'invariance par rotation autour d'un axe \vec{u} ?

Soit $\delta\phi \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\vec{r} &\rightarrow \vec{r} + \delta\phi \vec{r} \times \vec{u} \\ \vec{v} &\rightarrow \vec{v} + \delta\phi \vec{v} \times \vec{u}\end{aligned}$$

$$\mathcal{L}(\vec{r}, \vec{v}, t) = \mathcal{L}(\vec{r} + \delta\phi \vec{r} \times \vec{u}, \vec{v} + \delta\phi \vec{v} \times \vec{u}, t) = \mathcal{L}(\vec{r}, \vec{v}, t) + \vec{\nabla}_{\vec{r}} \mathcal{L} \cdot (\delta\phi \vec{r} \times \vec{u}) + \vec{\nabla}_{\vec{v}} \mathcal{L} \cdot (\delta\phi \vec{v} \times \vec{u})$$

Donc :

$$\begin{aligned}\underbrace{\vec{\nabla}_{\vec{r}} \mathcal{L}}_{\frac{d\vec{p}}{dt}} \cdot (\vec{r} \times \vec{u}) + \underbrace{\vec{\nabla}_{\vec{v}} \mathcal{L}}_{\vec{p}} \cdot (\vec{v} \times \vec{u}) &= 0 \\ \vec{u} \cdot \left(\frac{d\vec{p}}{dt} \times \vec{r} + \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} \right) &= \vec{u} \cdot \frac{d}{dt} (\vec{p} \times \vec{r}) = 0\end{aligned}$$

La composante suivant \vec{u} du moment cinétique est conservée.

On peut formaliser ces résultats par le *théorème de Noether* :

Supposons qu'il existe un changement de variables, caractérisé par une transformation définie à partir d'un paramètre continu $s : q_k \rightarrow Q_k(s)$, tel qu'on ait un nouveau lagrangien $\mathcal{L}'(Q_k, \dot{Q}_k, t)$ dans ces nouvelles coordonnées.

Mécanique analytique

Supposons qu'au voisinage de $s = 0$, \mathcal{L}' et \mathcal{L} s'écrivent de la même manière, ce qui traduit les symétries/invariances.

La quantité $I_k = \left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \frac{dQ_k}{ds} \right)_{s=0}$ est alors une constante du mouvement.

Démonstration :

Au voisinage de $s = 0$, $\mathcal{L} = \mathcal{L}'$, indépendant de s :

$$\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial s} = 0 = \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial Q_k} \frac{dQ_k}{ds}}_{\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \dot{Q}_k}} + \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \dot{Q}_k} \underbrace{\frac{d\dot{Q}_k}{ds}}_{\frac{d}{dt} \left(\frac{dQ_k}{ds} \right)}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \dot{Q}_k} \right) \frac{dQ_k}{ds} + \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \dot{Q}_k} \frac{d}{dt} \left(\frac{dQ_k}{ds} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \dot{Q}_k} \frac{dQ_k}{ds} \right)_{s=0} = 0$$

Or, en $s = 0$, $\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \dot{Q}_k} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}$. D'où :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \frac{dQ_k}{ds} \right)_{s=0} = \frac{dI_k}{dt} = 0$$

I_k est bien une constante du mouvement.

On peut prendre une version plus générale (il y aurait encore une version avec les champs qui serait plus générale).

Soient les transformations : $t \rightarrow t' = t + \epsilon X(q, t)$ et $q_k(t) \rightarrow q'_k(t') = q_k(t) + \epsilon X_k(q, t)$. Si $\int L(q_k, \dot{q}_k, t) dt = \int L(q'_k, \dot{q}'_k, t') dt'$ sur un voisinage de $\epsilon = 0$, on parle alors de symétries continues, alors : $\sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \times (\dot{q}_k X - X_k) - LX$ est une constante du mouvement.

Pour démontrer cela, on peut remarquer d'abord que $dt' = dt(1 + \epsilon \dot{X})$ et que :

$$\frac{dq_k}{dt'} = \frac{dq'_k(t')}{dt} \frac{dt'}{dt} \sim (1 - \epsilon \dot{X}) (q_k \dot{t} + \epsilon \dot{X}_k) \sim \dot{q}_k(t) + \epsilon (\dot{X}_k - \dot{q}_k(t) \dot{X})$$

On peut donc regarder l'action :

$$\int_{t'_1}^{t'_2} \mathcal{L}(q'_k, \dot{q}'_k, t') dt' - \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q_k, \dot{q}_k, t) dt = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q_k(t) + \epsilon X_k, \dot{q}_k + \epsilon (\dot{X}_k - \dot{q}_k(t) \dot{X}), t + \epsilon X) dt(1 + \epsilon \dot{X}) - \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q_k, \dot{q}_k, t) dt = 0$$

En effectuant un DL au premier ordre des Lagrangiens on obtient :

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \times \epsilon \times \left(\sum_i X_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} + (\dot{X}_k - \dot{q}_k \dot{X}) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} + X \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} + \mathcal{L} \dot{X} \right)$$

Mécanique analytique

Cette relation étant vraie quelles que soit les bornes t_1 et t_2 , la fonction intégrée est donc identiquement nulle et on en tire la relation annoncée en utilisant les relations d'Euler Lagrange dans la dérivation de la constante du mouvement par rapport au temps.

Remarque :

Ceci permet d'identifier des constantes du mouvement connaissant les symétries ou, si on connaît des constantes du mouvement, de proposer des symétries pour le lagrangien et donc de limiter les expressions possibles.

Exemple : $\vec{r} \rightarrow \underbrace{\vec{r} + s\vec{u}}_{Q_k}$, s'il y a invariance par translation, $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}$ impulsion
 $\Rightarrow \frac{d}{dt}(\vec{p} \cdot \vec{u}) = 0$
 $\vec{r} \rightarrow \underbrace{\vec{r} + s\vec{r} \times \vec{u}}_{Q'_k}$, s'il y a invariance par rotation, $\frac{d}{dt}(\vec{p} \cdot (\vec{r} \times \vec{u})) = \vec{u} \cdot \frac{d}{dt}(\vec{p} \times \vec{r}) = 0$.

Exemple d'utilisation des constantes du mouvement : Potentiel central

Deux particules m_1 et m_2 interagissent avec une loi qui ne dépend que de leur distance : $U(\|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\|)$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m_1\dot{r}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{r}_2^2 - U(\|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\|)$$

— Impulsion totale : $\vec{p}_G = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = m_1\dot{\vec{r}}_1 + m_2\dot{\vec{r}}_2$

— Énergie : $E = \frac{1}{2}m_1\dot{r}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{r}_2^2 + U(\|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\|)$

On introduit p_G dans l'énergie : $E = \frac{p_G^2}{2(m_1+m_2)} + U(\|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\|) + \frac{1}{2}\mu(\dot{r}_1 - \dot{r}_2)^2$

On note :

$$\vec{R}_G = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2} \quad \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \quad \mu = \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2} \quad m = m_1 + m_2$$

D'où :

$$\underbrace{E}_{\text{constante}} = \frac{\overbrace{p_G^2}^{\text{constante}}}{2(m_1 + m_2)} + U(\vec{r}) + \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2$$

— $\sigma = \vec{r} \times \vec{p} = \text{constante} \Rightarrow$ mouvement plan

On se place en coordonnées polaires (ρ, θ) : $\|\vec{r}\| = \rho \quad \sigma = \mu\rho^2\dot{\theta}$

$$E - \frac{p_G^2}{2m} = U(\rho) + \frac{1}{2}\mu(\dot{\rho}^2 + (\rho\dot{\theta})^2) \text{ or } \dot{\theta}^2 = \left(\frac{\sigma}{\mu\rho^2}\right)^2$$

$$\text{D'où : } E - \frac{p_G^2}{2m} = U(\rho) + \frac{1}{2}\mu\left(\dot{\rho}^2 + \frac{\sigma^2}{\mu^2\rho^2}\right)$$

$$\frac{d\rho}{dt} = \sqrt{\frac{2}{\mu} \left(E - \frac{p_G^2}{2m} - U(\rho) - \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{\mu\rho^2} \right)}$$

$$t = \int_0^{\rho(t)} \left(\sqrt{\frac{2}{\mu} \left(E - \frac{p_G^2}{2m} - U(\rho) - \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{\mu\rho^2} \right)} \right)^{-1} d\rho \Rightarrow \text{On obtient la loi horaire } \rho(t)$$

$$\text{Puis } \dot{\theta} = \frac{\sigma}{\mu\rho^2} \rightarrow \theta(t)$$

Le problème est donc résolu si on sait faire l'intégration.

3.8 Analyse dimensionnelle

On se place dans le cas d'un potentiel qui est une fonction homogène de degré n :

$$\mathcal{U}(\lambda q_1, \dots, \lambda q_N) = \lambda^n \mathcal{U}(q_1, \dots, q_N)$$

Soit, en dérivant par rapport à λ :

$$\sum_{k=1}^N q_k \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial q_k}(\lambda q_1, \dots, \lambda q_N) = n \lambda^{n-1} \mathcal{U}(q_1, \dots, q_N)$$

Et si on fait $\lambda = 1$, on obtient :

$$\sum_{k=1}^N q_k \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial q_k} = n \mathcal{U}$$

Effet d'une modification des échelles spatiales et temporelles :

$$\begin{cases} d \rightarrow \alpha d = d' \\ t \rightarrow \beta t = t' \end{cases}$$

On sait que si le lagrangien est multiplié par une constante, les solutions sont les mêmes.

$$\mathcal{L} = \mathcal{T} - U \quad U \rightarrow \alpha^n U \text{ et } \mathcal{T} \rightarrow \frac{\alpha^2}{\beta^2} \mathcal{T}$$

Donc :

$$\mathcal{L} \rightarrow \frac{\alpha^2}{\beta^2} \mathcal{T} - \alpha^n U$$

Même solution si :

$$\frac{\alpha^2}{\beta^2} = \alpha^n \Rightarrow \alpha^{1-\frac{n}{2}} = \beta \Rightarrow \left(\frac{d'}{d} \right)^{1-\frac{n}{2}} = \frac{t'}{t}$$

— si $n = 2$ (ressort) : $\left(\frac{t'}{t}\right) = \left(\frac{d'}{d}\right)^0 = 1$

La pulsation des ressorts est indépendante de l'amplitude des oscillations

— si $n = 1$ (pesanteur) : $\left(\frac{d'}{d}\right)^{1/2} = \left(\frac{t'}{t}\right)$

Le temps de chute est en \sqrt{h} ($z = \frac{1}{2}gt^2$)

— si $n = -1$ (Newton) : $\left(\frac{d'}{d}\right)^{3/2} = \left(\frac{t'}{t}\right) \Rightarrow \frac{T^2}{a^3} = cste$

3.9 L'action : quelques remarques

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q_k, \dot{q}_k, t) dt \quad S \text{ extrémale pour les } q_k \text{ suivis par une trajectoire réelle}$$

En réalité, $S(t_i, t_f, q_{k_i}, q_{k_f})$

On va constater l'effet d'une modification des extrémités de la trajectoire sur l'action.

On a minimisé de sorte que :

$$\delta S = 0 = \int_{t_i}^{t_f} \sum_k \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \right) \delta q_k dt + \left[\sum_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \delta q_k \right]_{t_i}^{t_f}$$

Soit :

$$\delta S = \left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \right)_{t_f} \delta q_f - \left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \right)_{t_i} \delta q_i + \int_{t_i}^{t_f} \dots dt$$

D'où :

$$\boxed{\frac{\partial S}{\partial q_{k_f}} = \left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \right)_{t_f} = p_{k_f} \quad \frac{\partial S}{\partial q_{k_i}} = \left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \right)_{t_i} = -p_{k_i}}$$

Remarque : Si q_k est cyclique, $S(q_{k_f} + \varepsilon, q_{k_i} + \varepsilon, \dots) = S(q_{k_f}, q_{k_i}, \dots) + \varepsilon \left(\frac{\partial S}{\partial q_{k_i}} + \frac{\partial S}{\partial q_{k_f}} \right) = S(q_{k_f}, q_{k_i}, \dots) \Rightarrow \frac{\partial S}{\partial q_{k_i}} + \frac{\partial S}{\partial q_{k_f}} = 0 \rightarrow p_{k_f} - p_{k_i} = 0$ ce qui traduit la conservation de l'impulsion relative à q_k .

Que se passe-t-il si on modifie les extrémités temporelles ?

$$t_f \rightarrow t_f + \delta t_f \quad \delta S = \delta t_f \mathcal{L}(\dots t_f) \text{ par hypothèse}$$



Mécanique analytique

$$\delta S = \frac{\partial S}{\partial t_f} \delta t_f + \sum_k \underbrace{\frac{\partial S}{\partial q_{k_f}}}_{p_{k_f}} \dot{q}_k \delta t_f$$

Donc :

$$\frac{\partial S}{\partial t_f} + \sum_k p_{k_f} \dot{q}_{k_f} = \mathcal{L}(t_f) \rightarrow \boxed{\frac{\partial S}{\partial t_f} = -E_f}$$

Et de même : $\boxed{\frac{\partial S}{\partial t_i} = E_i}$



Mécanique analytique

Chapitre 4

Mécanique hamiltonienne

Il s'agit d'une description alternative de la mécanique avec d'autres axiomes.

Lagrange : espace de configurations q_k, \dot{q}_k
Hamilton : $\underbrace{q_k, p_k}_{\text{espace des phases}} \rightarrow \mathcal{H}(p_k, q_k, t)$

- L'espace des phases présente d'importantes propriétés géométriques
- Essentiel en physique statistique
- La mécanique quantique est obtenue par quantification de la mécanique hamiltonienne
- Les méthodes perturbatives sont plus efficaces en mécanique hamiltonienne (dynamique des systèmes planétaires)
- Les changements de variable sont très puissants

4.1 Transformation de Legendre

Le but est de voir comment passer des variables q_k, \dot{q}_k aux variables q_k, p_k .
Or $p_k = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}$.

Il faut donc trouver une méthode alternative à la donnée de $y = f(x)$ pour décrire une courbe. On peut songer à l'enveloppe des tangentes qui permet de retrouver la courbe.

La transformée de Legendre est dans cette logique définie comme l'ordonnée à l'origine de la tangente à la courbe de départ. Soit $p(x)$ la pente de y et $\phi(p)$ l'ordonnée à l'origine de la tangente à la courbe en x . De manière évidente :

$$\frac{f(x) - \phi(p)}{x} = p$$

donc

$$\phi(p) = f(x) - px$$

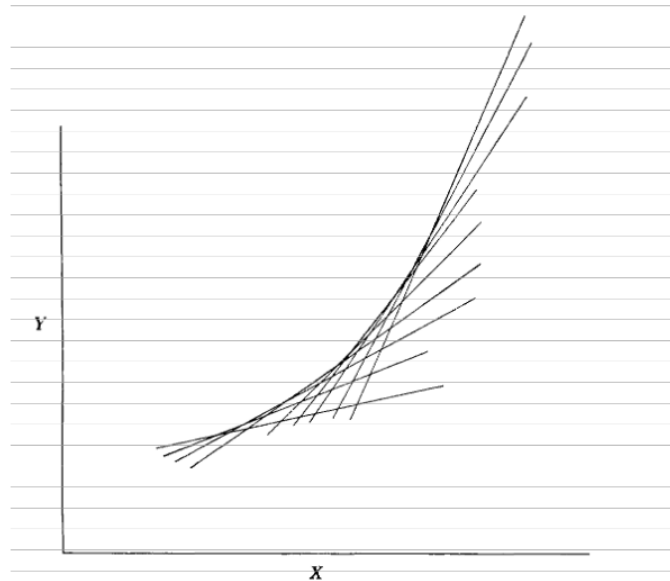


FIGURE 4.1 – La transformée de Legendre d’une fonction utilise la description d’une courbe par l’enveloppe de ses tangentes (qui peut poser un problème mathématique quand il y a des points d’inflexions). Elle est donnée par l’ordonnée à l’origine en fonction de la pente de la courbe de la fonction.

Pour trouver la transformée de Legendre de $f(x)$ il faut donc calculer la dérivée p en x , se servir de cette relation pour obtenir $x(p)$ et reporter cette relation dans $\phi(p) = f(x) - px$ pour avoir la définition de $\phi(p)$ qui ne dépend que de p .

Remarque : On a une relation bijective tant que f ne présente pas de point d’inflexion auquel cas il peut y avoir deux ordonnées à l’origine pour une valeur de la pente donnée.

Exemple : $f(x) = \frac{x^2}{2}$. Dans ce cas $p = x$ d’où $\phi(p) = \frac{x^2}{2} - px = -\frac{p^2}{2}$.

4.2 Applications en thermodynamique

4.2.1 Système isolé

La fonction thermodynamique est l’énergie interne qui s’exprime en fonction des variables extensives. Dans le cas d’un fluide : $dU = TdS - pdV + \mu dn$ Comme U est une fonction : $\frac{\partial^2 U}{\partial V \partial S} = \frac{\partial^2 U}{\partial S \partial V}$ on en tire $\frac{\partial T}{\partial V})_{n,S} = \frac{\partial -p}{\partial S})_{n,V}$. Comme $\frac{\partial U}{\partial S} = T > 0$ on peut inverser la relation $U(S, V, n)$ pour obtenir $S(U, V, n)$ dont la différentielle $dS = \frac{1}{T}dU - \frac{p}{T}dV + \frac{\mu}{T}dn$. A l’équilibre le second principe nous indique que S est maximale. Donc sa dérivée est nulle et sa dérivée seconde négative au point d’équilibre. $-S$ peut donc être vu comme un potentiel.

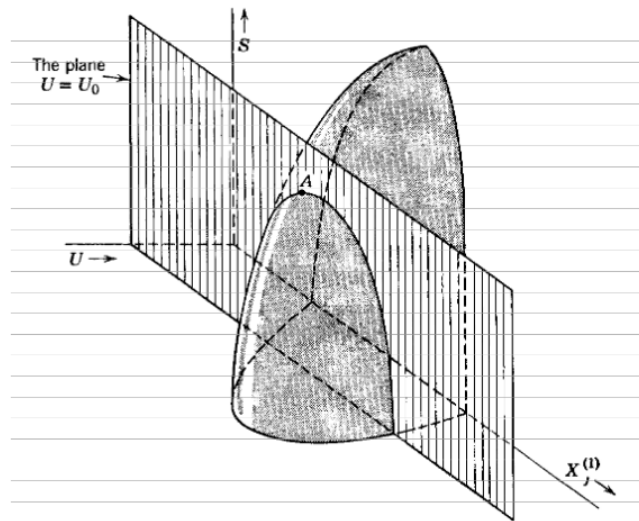


FIGURE 4.2 – Le second principe indique que S est maximale à U constante.

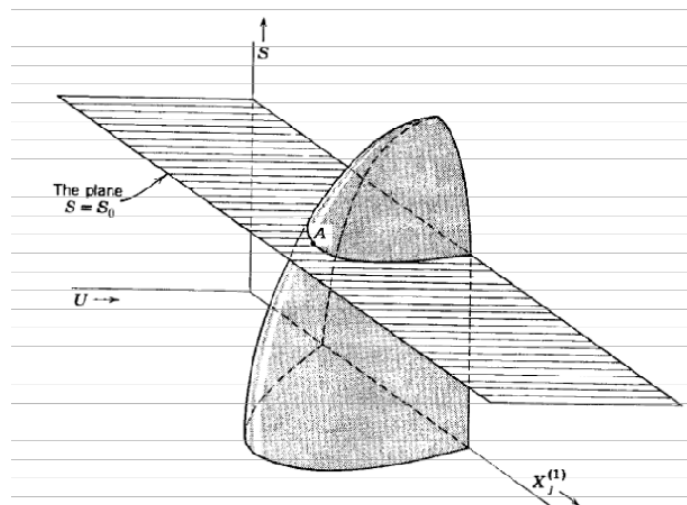


FIGURE 4.3 – À S fixée U est minimale et se comporte donc comme un potentiel.

U est également un potentiel à entropie constante. En effet supposons que l'équilibre qui doit être un maximum de S ne soit pas un minimum de U à $S = C^{te}$. Alors comme U n'est pas minimum on peut prélever de l'énergie uniquement sous forme de travail pour atteindre le minimum de U et réinjecter cette énergie dans le système sous forme de chaleur, ce qui permet d'augmenter l'entropie. Ceci veut dire que l'entropie de départ n'était pas maximale ce qui est en contradiction avec le second principe.

4.2.2 Energie libre, Enthalpie, Enthalpie libre

S est la variable "naturelle" de U . Or cette grandeur ne se contrôle pas et ne se mesure pas aussi facilement que sa variable conjuguée $T = \frac{\partial U}{\partial S}$. On effectue la transformée de Legendre pour passer de (S, V, n) à (T, V, n) . On note $F(T, V, n)$ cette transformée qui est appelée énergie libre : $F = U - \frac{\partial U}{\partial S} S = U - TS$. Sa différentielle s'écrit : $dF = -SdT - pdV + \mu dn$. F étant une fonction ses dérivées secondes peuvent se faire dans un ordre indifférencié ce qui permet d'écrire les relations, dites de Maxwell suivante :

$$\left(-\frac{\partial S}{\partial V} \right)_{T,n} = -\left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_{V,n}$$

$$\left(\frac{\partial \mu}{\partial V} \right)_{n,T} = -\left(\frac{\partial p}{\partial n} \right)_{S,V}$$

$$\left(\frac{\partial \mu}{\partial S} \right)_{n,V} = -\left(\frac{\partial S}{\partial n} \right)_{n,V}$$

Ces relations peuvent donner des relations non triviales entre les variables thermodynamiques.

Si la pression est imposée comme en chimie où c'est souvent la pression atmosphérique qui est imposée pour une réaction, on fait la transformée de Legendre sur le volume pour introduire l'entropie $H(p, S) = U + pV$ dont la différentielle est $dH = pdV + TdS$. Ce qui donne des relations de Maxwell supplémentaires.

Si on veut utiliser les variables T et p en particulier si T et p sont imposées on fait la double transformée de Legendre $G(T, p, n) = U - TS + pV$ dont la différentielle est donnée par $dG = -Sdt + Vdp + \mu dn$.

Si on tire sur un objet élastique avec une force \vec{f} alors pour un allongement $d\vec{l}$ la variation d'énergie interne est donnée par $dU = TdS + \vec{f} \cdot d\vec{l}$. Si on contrôle la force expérimentalement on a intérêt à faire une transformée de Legendre pour travailler avec la fonction $U - \vec{f} \cdot \vec{l}$.

Exemple d'utilisation des relations de Maxwell : diélectrique partiellement dans un condensateur plan. Soit \vec{f} la force de traction qui empêche le diélectrique de pénétrer en totalité dans le condensateur comme il devrait le faire normalement, les dipôles étant attirés par les champs les plus forts.

Digression sur les diélectriques : en effet la force qui s'exerce sur un dipôle \vec{p} est $\vec{F} = (\vec{p} \cdot \nabla) \vec{E}$. Dans le cas d'un diélectrique les dipôles sont induits $\vec{p} = \alpha \vec{E}$ avec α qui est la polarisabilité. En dipôle volumique dans un diélectrique on écrit cette relation $\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E}$ avec χ qui est la susceptibilité électrique (si le milieu est homogène et isotrope car en général la relation peut dépendre de l'espace et de la direction de l'espace (et de la fréquence de \vec{E}) le scalaire χ est alors une matrice qui peut dépendre du point de l'espace). La force volumique qui est donnée par $\vec{F}_v = \epsilon_0 \chi \nabla E^2$. Le diélectrique est donc attiré par les champs forts. Mais la force ne se fait sentir que dans la zone où il y a un gradient de champ. Pour avoir le lien entre χ et la permittivité diélectrique il faut commencer par déterminer le potentiel généré par un élément de volume $d\tau$:

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{P} d\tau \cdot \vec{r}}{r^3}$$

En intégrant cette relation sur le volume du diélectrique on peut montrer que cela revient à avoir dans le vide une densité de charges $-\text{div} \vec{P}$ et une densité surfacique de charges $\sigma = \vec{P} \cdot \vec{n}$ avec \vec{n} qui est le vecteur normal à la surface délimitant le volume de diélectrique. En injectant cette densité volumique de charges liées au diélectrique dans Maxwell on obtient :

$$\text{div} \vec{E} = \frac{\rho - \text{div} \vec{P}}{\epsilon_0}$$

Donc

$$\text{div} \left(\vec{E} + \frac{1}{\epsilon_0} \vec{P} \right) = (1 + \chi) \text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

En posant $\epsilon_r = 1 + \chi$ on retrouve l'équation de Maxwell-Gauss dans le milieu $\text{div} \vec{E} = \frac{\rho_{\text{ho}}}{\epsilon_0 \epsilon_r}$. Dans l'eau en statiques (fréquence temporelle nulle $\epsilon_r \sim 80$). Si on pense à la relation de propagation des ondes électromagnétiques donc la célérité est dans le vide $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$ on retrouve à partir de la célérité dans le milieu l'indice de réfraction $n = \sqrt{\epsilon_r}$ et donc pour l'eau dans le visible $\epsilon_r \sim 1.33^2$.

Soit x le paramètre qui repère la position du diélectrique dans le condensateur. La capacité, modifiée par la présence du diélectrique, est donc une fonction de x . La différentielle de U est donnée par $dU = TdS + Vdq - fdx$ avec q la charge du condensateur, $V = q/C$ la tension à ses bornes et la bonne orientation pour \vec{f} . On en tire l'énergie libre : $dF = -SdT + Vdq - fdx$. Une relation de Maxwell permet d'écrire :

$$\left(-\frac{\partial f}{\partial q} \right)_{x,T} = \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)_{q,T} = \left(\frac{\partial q/C}{\partial x} \right)_{q,T} = -\frac{q}{C(x)^2} \frac{dC}{dx} \Big|_T$$

En intégrant la relation on en tire $f = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} \frac{dC}{dx} \Big|_T + a(T, x)$ La constante peut être fixée en remarquant que $f = 0$ si $q = 0$. Un modèle simple pour $C(x)$ permet donc de prévoir la force à appliquer.

4.2.3 Evolution vers l'équilibre

Système isolé

On sait déjà que pour un système isolé S est maximale à U constant ou U est minimale à S constant. Cela implique une courbe sur laquelle doit se déplacer le système lors des transformations qui ressemble à la figure 4.3.

Système en contact avec un thermostat

Pour une transformation finie d'un système en contact avec un thermostat T_0 on a $\Delta U = Q$ et $\Delta S \geq \frac{Q}{T_0}$. On en tire $\Delta F_0 = \Delta U - T_0 \Delta S \leq 0$ Donc lorsqu'un système est mis en contact avec un thermostat avec le seul échange de chaleur la fonction F_0 doit toujours diminuer, elle doit donc atteindre un minimum. F_0 joue donc le rôle d'un potentiel. $dF_0 = dU - T_0 dS = (T - T_0)dS + Y dy$ où Y est une grandeur intensive du système et y sa variable extensive conjuguée. Donc à l'équilibre $dF_0 = 0$ ce qui implique $T = T_0$ et $Y = 0$. Soit U_e l'énergie libre à l'équilibre et y_e la valeur de y à l'équilibre. On a donc $T(U_e, y_e) = T_0$ et $Y(U_e, y_e) = 0$ On peut dans le principe envisager d'inverser ces relations et obtenir $U_e(T_0)$ et $y_e(T_0)$. Il est intuitif que à l'équilibre $F_0(T_0, U_e, y_e) = F(T_0) - T_0 S$ On peut donc trouver l'équilibre comme le minimum de F_0 ou, en admettant que l'on va atteindre T_0 , le minimum de F (à ne considérer que par rapport à y) en prenant la température intervenant dans la définition de F égale à T_0 . Avec cette condition on peut considérer F comme un potentiel également qui va donc déterminer un équilibre par un minimum.

Exemple : une bulle de savon. On considère une bulle de savon dans une atmosphère qui sert de réservoir à pression p_0 et température T_0 . On notera $_g$ les grandeurs qui concernent le gaz dans la bulle et $_b$ les grandeurs qui concernent le film de savon constitué de deux interfaces caractérisées par une tension de surface γ donc avec une augmentation de surface $d\Sigma$ il résulte un changement d'énergie interne $dU = 2\gamma d\Sigma_b$. Avec une pression et une température imposée on va avoir comme potentiel : $G_0 = U - T_0 S + p_0 V$ dont la différentielle s'écrit :

$$dG_0 = dU_g + dU_b + T_0(dS_g + dS_b) + p_0 dV = (T_g - T_0)dS_g + (T_b - T_0)dS_b + (p_0 - p)dV + 2\gamma d\Sigma_b$$

Or le volume et la surface sont reliés au rayon R . A l'équilibre on a donc :

$$T_b = T_0$$

$$T_g = T_0$$

et

$$(p_0 - p)4\pi R^2 + 2 \times 8\pi R\gamma = 0$$

On en tire la loi de Laplace qui donne la surpression dans une bulle de savon :

$$p - p_0 = 4\gamma \frac{1}{R}$$

4.3 Application en mécanique

Cette transformation permet de passer d'une fonction décrite par deux variables à une fonction décrite par deux nouvelles variables qui sont des dérivées de la première fonction.

$$\mathcal{L}(q_k, \dot{q}_k, t) \rightarrow \mathcal{H}(q_k, p_k, t)$$

$$-\mathcal{H} = \mathcal{L} - \sum_k \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k \right)$$

Le choix du signe est arbitraire, on pose donc :

$$\mathcal{H}(q_k, p_k, t) = \sum_k p_k \dot{q}_k - \mathcal{L}$$

Il s'agit de l'énergie exprimée en fonction des q_k/p_k . On différencie cette expression :

$$d\mathcal{H} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} dt = \sum_k \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_k} dq_k + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_k} dp_k$$

$$= d \left(\sum_k p_k \dot{q}_k - \mathcal{L} \right) = \sum_k p_k d\dot{q}_k + \dot{q}_k dp_k - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt + \sum_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} dq_k + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} d\dot{q}_k \right)$$

$$= -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt + \sum_k \dot{q}_k dp_k - \dot{p}_k dq_k$$

Par identification, on en déduit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \\ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_k} = \dot{q}_k \\ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_k} = -\dot{p}_k \end{array} \right.$$

Ces égalités constituent les *équations de Hamilton*.

Si on a N degrés de liberté, on aura $2N$ équations du premier ordre, alors qu'Euler-Lagrange donne N équation du second ordre.

Remarques :

- $-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = \frac{d\mathcal{H}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}$: seule la dépendance en temps doit être explicitée
- si on a un lagrangien standard : $\mathcal{L} = \mathcal{T} - V$ (indépendant de la vitesse), alors $\mathcal{H} = \mathcal{T} + V \rightarrow E_m$

Exemples :

Mécanique analytique

1. ressort :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2 \quad p_x = m\dot{x} \quad \mathcal{H} = p_x \frac{p_x}{m} - \frac{p_x^2}{2m} = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_x} = \dot{x} = \frac{p_x}{m} \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} = -\dot{p}_x = kx = -m\ddot{x}$$

2. pendule pesant : exercice

3. Force de Lorentz

On postule :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}mv^2 - q(\phi - \vec{v} \cdot \vec{A})$$

Alors :

$$\vec{p} = \vec{\nabla}_{\vec{v}} \mathcal{L} = m\vec{v} + q\vec{A} \longrightarrow \vec{v} = \frac{\vec{p} - q\vec{A}}{m}$$

$$\mathcal{H} = \vec{p} \cdot \vec{v} - \mathcal{L} = \vec{p} \cdot \left(\frac{\vec{p} - q\vec{A}}{m} \right) - \frac{m}{2} \left(\frac{\vec{p} - q\vec{A}}{m} \right)^2 + q \left(\phi - \frac{(\vec{p} - q\vec{A})}{m} \cdot \vec{A} \right)$$

$$\mathcal{H} = \frac{(\vec{p} - q\vec{A})^2}{2m} + q\phi$$

$$\vec{\nabla}_{\vec{p}} \mathcal{H} = \vec{v} = \frac{\vec{p} - q\vec{A}}{m}$$

$$\vec{\nabla}_{\vec{r}} \mathcal{H} = -\dot{\vec{p}} = -m \frac{d\vec{v}}{dt} - q \frac{d\vec{A}}{dt} = \vec{\nabla}_{\vec{r}} \left(\frac{(\vec{p} - q\vec{A})^2}{2m} + q\phi \right) = \vec{\nabla}_{\vec{r}} \left(\frac{(\vec{p} - q\vec{A})^2}{2m} \right) - q\vec{E}$$

Or :

$$\vec{\nabla}_{\vec{r}} \left(\frac{(\vec{p} - q\vec{A})^2}{2m} \right) = \frac{2}{2m} \left[(\vec{p} - q\vec{A}) \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}} \right] (\vec{p} - q\vec{A}) + \frac{2}{2m} (\vec{p} - q\vec{A}) \times \overrightarrow{\text{rot}}_{\vec{r}} (\vec{p} - q\vec{A})$$

et :

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}}) \vec{A}$$

D'où finalement :

$$\boxed{m \frac{d\vec{v}}{dt} = q \left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right)}$$

Pour obtenir \mathcal{H} , on part de \mathcal{L} , on exprime les p_k , et on a ainsi \mathcal{H} , en faisant attention de l'exprimer en fonction de q_k, p_k, t .

4.4 Principe de Hamilton

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt = \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_k p_k \dot{q}_k - \mathcal{H}(q_k, p_k, t) \right) dt$$

S est extrémale quand on fait varier δq_k et δp_k autour du chemin réel, avec $\delta q_k(i) = \delta q_k(f) = 0$.

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_k \delta p_k \dot{q}_k + p_k \delta \dot{q}_k - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_k} \delta q_k - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_k} \delta p_k \right) dt$$

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_k \left(\dot{q}_k - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_k} \right) \delta q_k - \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_k} + \dot{p}_k \right) \delta p_k \right] dt = 0$$

Si δq_k et δp_k sont indépendants, on retrouve bien les équations de Hamilton :

$$\begin{cases} \dot{q}_k - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_k} = 0 \\ \dot{p}_k + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_k} = 0 \end{cases}$$

On constate qu'on ne s'est pas servi du Lagrangien pour retrouver ces équations. Le formalisme hamiltonien ne requiert donc pas plus d'hypothèses.

Remarque :

— variables cycliques : $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_k} = 0 = \dot{p}_k \Rightarrow p_k$ constant.

$$\mathcal{H} = \sum_k p_k \dot{q}_k - \mathcal{L}(q_k, \dot{q}_k, t) \Rightarrow \text{cyclique pour } \mathcal{H} \leftrightarrow \text{cyclique pour } \mathcal{L}$$

— Invariance par translation dans le temps :

$$\mathcal{H}(t) \rightarrow \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = 0 = \frac{d\mathcal{H}}{dt} = \frac{dE}{dt} : \text{l'énergie est conservée}$$

— Avec le principe de Hamilton, on voit que \mathcal{H} est définie à la dérivée totale par rapport au temps d'une fonction près.

4.5 Principe de Maupertuis

Cas particulier où on s'intéresse à des déplacements qui se font à énergie constante.

De tels systèmes sont appelés conservatifs/autonomes.

Comme on garde E constante, le trajet pour aller du point de départ à l'arrivée va avoir une durée variable.

On doit prendre en compte :

Mécanique analytique

- des trajets plus longs/courts en temps à $E = cste$
- des variations de S sur de tels trajets avec $E = cste$

$$\Delta S = \Delta \left(\int_{t_i}^{t_f} \mathcal{L} dt \right) = \underbrace{(p_k \delta q_k(t_f) - p_k \delta q_k(t_i))}_{\text{extrémités spatiales}} + \underbrace{\int_{t_i}^{t_f}}_{\text{Euler-Lagrange}} \mathcal{L} dt + \underbrace{\mathcal{L}(t_f) \delta t_f - \mathcal{L}(t_i) \delta t_i}_{\text{extrémités temporelles}}$$

Or on a : $\Delta q_k(f) = \delta q_k(t_f) + \dot{q}_k(f) \delta t_f$

$$\Delta S = p_k(f)(\Delta q_k(f) - \dot{q}_k(f) \delta t_f) - p_k(i)(\Delta q_k(i) - \dot{q}_k(i) \delta t_i) + \mathcal{L}(t_f) \delta t_f - \mathcal{L}(t_i) \delta t_i$$

$$\Delta S = p_k(f) \Delta q_k(f) - p_k(i) \Delta q_k(i) - \mathcal{H}(t_f) \delta t_f + \mathcal{H}(t_i) \delta t_i = \Delta \left(\int_{t_i}^{t_f} p_k \dot{q}_k dt - \int_{t_i}^{t_f} \mathcal{H}(t) dt \right)$$

Or on veut $E = \mathcal{H} = cste$ et $\Delta q_k = 0$ (même point d'arrivée), d'où :

$$\Delta \left(\int_{t_i}^{t_f} p_k \dot{q}_k dt \right) = 0.$$

On définit l'action réduite :

$$\hat{S} = \int \sum_k p_k \dot{q}_k dt$$

Et on a alors :

Principe de Maupertuis : Pour un chemin à énergie constante, on doit rendre \hat{S} extrémale.

Remarque : Pour un lagrangien standard, on a : $\sum p_k \dot{q}_k = 2\mathcal{T}$. Alors :

$$\hat{S} = \int_{t_i}^{t_f} 2\mathcal{T} dt = \int_{t_i}^{t_f} 2\sqrt{T^2} dt \quad \mathcal{T} = \frac{1}{2} m \left(\frac{ds}{dt} \right)^2$$

$$\hat{S} = \int_{t_i}^{t_f} 2\sqrt{\mathcal{T} \frac{1}{2} m \left(\frac{ds}{dt} \right)^2} dt = \int_{s_i}^{s_f} \sqrt{2m(E - U)} ds$$

On doit donc minimiser cette dernière quantité sur l'espace. Sans résoudre le problème, on peut donc avoir accès à la trajectoire.

Exemple : masse dans le champ de pesanteur

$$\hat{S} = \int \sqrt{2m(E - mgz)} ds \text{ avec } ds = \sqrt{1 + \dot{z}^2} dx$$

On doit donc minimiser $\int \underbrace{\sqrt{2m(E - mgz)(1 + \dot{z}^2)}}_{\mathcal{L}(\dot{z})} dx$

$$\mathcal{H}_z = \alpha = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} \dot{z} - \mathcal{L} = \frac{\sqrt{2m(E - mgz)} \dot{z}^2}{\sqrt{1 + \dot{z}^2}} - \sqrt{2m(E - mgz)(1 + \dot{z}^2)}$$

$$\alpha^2 = \frac{2m(E - mgz)}{1 + \dot{z}^2} = \frac{2m \left(\frac{1}{2} m (v_x^2 + v_z^2) \right)}{1 + \left(\frac{v_z}{v_x} \right)^2} \propto v_x^2$$

La vitesse horizontale est donc constante.

On a donc :

$$\alpha^2 \dot{z}^2 + 2m^2 gz = 2mE - \alpha^2 \quad \text{on pose } z_0 = \frac{2mE - \alpha^2}{2m^2 g}$$

$\alpha^2 \dot{z}^2 + 2m^2 g(z_0 - z) = 0$ équation sans second membre \rightarrow solution parabolique

4.6 Crochets de Poisson

Évolution temporelle d'une fonction $f(q_k, p_k, t)$:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_k \frac{\partial f}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial f}{\partial p_k} \dot{p}_k = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_k \frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_k} - \frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_k} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, \mathcal{H}\}$$

On définit le crochet de Poisson de deux fonctions :

$$\{f, g\} = \sum_k \frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial g}{\partial p_k} - \frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial g}{\partial q_k}$$

Et on a les relations suivantes :

$$\forall i, j : \{p_i, p_j\} = \{q_i, q_j\} = 0 \quad \{q_i, p_j\} = \delta_{ij}$$

Propriétés :

- $\{f, g\} = -\{g, f\}$
- $\{\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2, g\} = \lambda_1 \{f_1, g\} + \lambda_2 \{f_2, g\}$
- $\{f, \mu_1 g_1 + \mu_2 g_2\} = \mu_1 \{f, g_1\} + \mu_2 \{f, g_2\}$

Identité de Jacobi :

$$\{f, \{g, h\}\} + \{h, \{f, g\}\} + \{g, \{h, f\}\} = 0$$

Conséquence : si f et g sont deux constantes du mouvement, alors $\{f, g\}$ l'est également. Ceci permet de simplifier la résolution si les crochets de Poisson ne redonnent pas une constante déjà connue.

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt}\{f, g\} &= \frac{\partial\{f, g\}}{\partial t} + \{\{f, g\}, \mathcal{H}\} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\sum_k \frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial g}{\partial p_k} - \frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial g}{\partial q_k} \right) + \{\{f, g\}, \mathcal{H}\} \\
 &= \left\{ \frac{\partial f}{\partial t}, g \right\} + \left\{ f, \frac{\partial g}{\partial t} - \{\mathcal{H}, f\}, g \right\} - \{\{g, \mathcal{H}\}, f\} = \left\{ \frac{df}{dt}, g \right\} + \left\{ f, \frac{dg}{dt} \right\} = 0 \\
 \text{car } \frac{df}{dt} &= \frac{dg}{dt} = 0
 \end{aligned}$$

Exemple : moment cinétique

$$\vec{\sigma} = \vec{r} \times \vec{p} = \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} yp_z - zp_y = \sigma_x \\ zp_x - xp_z = \sigma_y \\ xp_y - yp_x = \sigma_z \end{vmatrix}$$

On suppose que σ_x, σ_y sont des constantes du mouvement. $\{\sigma_x, \sigma_y\}$ est donc une constante du mouvement.

$$\begin{aligned}
 \{\sigma_x, \sigma_y\} &= \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \frac{\partial \sigma_y}{\partial p_x} - \frac{\partial \sigma_x}{\partial p_x} \frac{\partial \sigma_y}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_x}{\partial y} \frac{\partial \sigma_y}{\partial p_y} - \frac{\partial \sigma_x}{\partial p_y} \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_x}{\partial z} \frac{\partial \sigma_y}{\partial p_z} - \frac{\partial \sigma_x}{\partial p_z} \frac{\partial \sigma_y}{\partial z} \\
 \{\sigma_x, \sigma_y\} &= p_y x - y p_x = \sigma_z
 \end{aligned}$$

Donc, si deux composantes du moment cinétique sont des constantes du mouvement, celui-ci est une constante du mouvement.

4.7 Espace des phases, théorème de Liouville, théorème du retour de Poincaré

L'espace des phases est de dimension $2n$, où n est le nombre de degrés de liberté.

Les trajectoires sont des courbes de cet espace.

Si le système est conservatif, alors ces courbes sont des isoénergétiques, et n'évoluent pas dans le temps.

On ne peut pas avoir deux courbes qui se croisent (au sens même point de l'espace des phases au même temps), car une condition initiale fixe une trajectoire (cf. théorème de Cauchy-Lipschitz), donc deux courbes qui se croisent sont identiques.

Plan de Poincaré : un point représente l'intersection d'une trajectoire avec le plan choisi.

Évolution temporelle d'une grandeur f :

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_k \frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_k} - \frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_k}$$

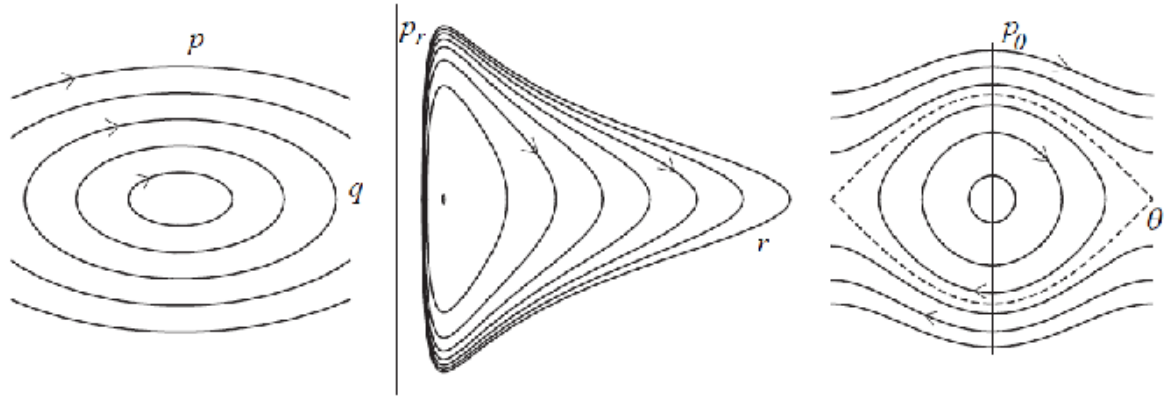


FIGURE 4.4 – Trajectoire dans l'espace des phases pour un ressort, un mouvement à force centrale, un pendule pesant.

$$\text{On pose } \vec{v}_H = \begin{vmatrix} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_k} \\ -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_k} \end{vmatrix} \text{ et } \vec{grad} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial q_k} \\ \frac{\partial}{\partial p_k} \end{vmatrix}$$

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v}_H \cdot \vec{grad} f$$

Cette dérivation est analogue à celle qu'on trouve en hydrodynamique avec ici un écoulement dit de "flot hamiltonien".

$$\text{De plus, } \text{div}(\vec{v}_H) = \sum_k \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_k} \right) + \frac{\partial}{\partial p_k} \left(-\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_k} \right) = 0$$

Les états (points de la trajectoire) vont donc se comporter comme les particules d'un fluide incompressible dans un écoulement donnée par \vec{v}_H .

Si on note dN le nombre d'états (cela suppose une discrétisation qui fait intervenir la mécanique quantique) dans $d\tau$: $d\tau = \prod_k dp_k dq_k$

La densité d'état $\rho = \frac{dN}{d\tau}$ vérifie alors :

$$\boxed{\frac{d\rho}{dt} = 0 \quad \text{Théorème de Liouville}}$$

On peut aussi dire qu'une surface délimitant un volume de l'espace des phases va être déformée lors de l'évolution temporelle mais qu'elle va contenir le même

volume. Ce théorème montre que l'approche Hamiltonienne donne un point de vue géométrique.

En cas de dissipation les volumes vont se contracter en général.

Théorème du retour de Poincaré :

Soit un système conservatif qui évolue dans un volume fini de l'espace des phases. Quel que soit le volume élémentaire choisi, il existe deux points qui appartiennent à la même trajectoire.

En d'autres termes, si on passe par un point de ce volume, on finira par repasser en un point arbitrairement proche, au bout d'un temps fini, mais parfois très très long, comme par exemple si on considère le cas de la détente de Joule pour laquelle personne ne s'attend à voir le gaz retourner dans le compartiment de départ...parce que personne n'a vécu assez longtemps pour le voir.

Ce théorème est une conséquence directe de la conservation des volumes lors de l'évolution temporelle. Si on délimite un volume à l'instant initial, tôt ou tard, ce volume va devoir repasser au même endroit (pas forcément au niveau du volume initial) et un point de cette intersection est sur la même trajectoire que 2 points du volume initial qui sont donc sur la même trajectoire.

4.8 Changements de variables, transformations canoniques

Une ambition raisonnable est d'obtenir n coordonnées cycliques. Alors le problème est résolu.

Idéalement, on aimerait avoir la conversion : une variable initiale \rightarrow une coordonnée cyclique.

On va donc chercher des changements de variables qui conservent les équations de Hamilton et essayer de trouver une méthode pour arriver à des coordonnées cycliques mais dans un deuxième temps et si c'est possible.

4.8.1 Fonctions génératrices

Le principe de Hamilton requière la minimisation de S .

On note :

— q_k, p_k les anciennes variables : $\mathcal{H}(q_k, p_k, t)$

— Q_k, P_k les nouvelles variables : $\mathcal{K}(Q_k, P_k, t)$

On a alors :

$$S = \int \sum_k p_k \dot{q}_k - \mathcal{H}(q_k, p_k, t) dt = \int \sum_k P_k \dot{Q}_k - \mathcal{K}(Q_k, P_k, t) dt$$

On peut donc définir \mathcal{K} à la dérivée totale d'un champ F près. C'est ce champ F qui va permettre de générer des changements de variables :

Mécanique analytique

$$\sum_k p_k \dot{q}_k - \mathcal{H} = \sum_k P_k \dot{Q}_k - \mathcal{K} + \frac{dF}{dt} \implies dF = \sum_k p_k dq_k - (\mathcal{H} - \mathcal{K})dt - \sum_k P_k dQ_k$$

F peut a priori dépendre de p_k, q_k, P_k, Q_k, t .

1. 1^{er} cas : $F = F_1(q_k, Q_k, t)$

$$dF_1 = \sum_k \frac{\partial F_1}{\partial q_k} dq_k + \frac{\partial F_1}{\partial Q_k} dQ_k + \frac{\partial F_1}{\partial t} dt$$

D'où, par identification :

$$\frac{\partial F_1}{\partial q_k} = p_k \quad \frac{\partial F_1}{\partial Q_k} = -P_k \quad \frac{\partial F_1}{\partial t} = \mathcal{K} - \mathcal{H}$$

Si F_1 dépend explicitement du temps, alors il ne suffit pas de remplacer p_k et q_k par leur expression en fonction de P_k et Q_k dans \mathcal{H} pour avoir \mathcal{K} : il faut ajouter $\frac{\partial F_1}{\partial t}$.

Exemple : $F_1 = qQ \quad \frac{\partial F_1}{\partial q} = Q = p \quad \frac{\partial F_1}{\partial Q} = q = -P$

Donc $p \rightarrow Q \quad q \rightarrow -P$: on peut interchanger p et q au signe près, et les équations de Hamilton sont conservées.

Les notions de coordonnées et d'impulsions sont floues. Ce qui a du sens, c'est le couple (p, q) . On parle de variables conjuguées au sens canonique.

2. 2^{me} cas : $F_2(q_k, P_k, t)$

$$F_2 = F + \sum_{P_k Q_k} \quad (\text{transformée de Legendre})$$

$$dF_2 = dF + \sum_k P_k dQ_k + \sum_k Q_k dP_k = \sum_k p_k dq_k - (\mathcal{H} - \mathcal{K})dt + \sum_k Q_k dP_k$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial q_k} = p_k \quad \frac{\partial F_2}{\partial P_k} = Q_k \quad \frac{\partial F_2}{\partial t} = \mathcal{K} - \mathcal{H}$$

Exemple : $F_2 = qP \quad p = P \quad q = Q$: inchangé

3. 3^{me} cas : $F_3(p_k, Q_k, t)$

$$F_3 = F - \sum p_k q_k$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial p_k} = -q_k \quad \frac{\partial F_3}{\partial Q_k} = -P_k \quad \frac{\partial F_3}{\partial t} = \mathcal{K} - \mathcal{H}$$

Exemple : $F_3 = pQ \quad Q = -q \quad P = -p$

4. 4^{me} cas : $F_4(p_k, P_k, t)$

$$\boxed{\frac{\partial F_4}{\partial p_k} = -q_k \quad \frac{\partial F_4}{\partial P_k} = Q_k \quad \frac{\partial F_4}{\partial t} = \mathcal{K} - \mathcal{H}}$$

Exemple : $F_4 = pP \quad P = -q \quad Q = p$: mélange impulsion/coordonnée

Autre exemple : fonction génératrice $F = \sum_k P_k f_k(q, \dots, t)$

Fonction de type F_2 : $\frac{\partial F}{\partial t} = \mathcal{K} - \mathcal{H} = \sum_k P_k \frac{\partial f_k}{\partial t}$

$Q_k = f_k(q, \dots, t)$

$p_k = \sum_i P_i \frac{\partial f_i}{\partial q_k}(q, \dots, t)$

Exemple physique : oscillateur harmonique

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_0^2 q^2$$

On "choisit" $F = \frac{1}{2}m\omega_0 q^2 \cotan(Q)$, de type F_1 .

F est indépendant du temps, donc il suffit de reporter $q(Q, P)$ et $p(Q, P)$ dans \mathcal{H} pour avoir \mathcal{K} .

$$p = \frac{\partial F}{\partial q} = m\omega_0 q \cotan(Q)$$

$$-P = \frac{\partial F}{\partial Q} = \frac{1}{2}m\omega_0 q^2 \left(-\frac{1}{\sin^2(Q)} \right) = -\frac{1}{2}m\omega_0 q^2 (1 + \cotan^2(Q))$$

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_0^2 q^2 = \frac{m^2 \omega_0^2 q^2 \cotan^2(Q)}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_0^2 q^2$$

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}m\omega_0^2 q^2 (\cotan^2(Q) + 1) = \omega_0 P = E = \mathcal{K}(P, Q)$$

Donc $P = \frac{E}{\omega_0}$, et comme E est conservée, P l'est également. On remarque que P est désormais homogène à une action.

Et les équations de Hamilton donnent : $\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial P} = \dot{Q} = \omega_0 \rightarrow Q = \omega_0 t + \phi$ angle.

$$q^2 = \frac{2P}{m\omega_0} \sin^2(Q) = \frac{2E}{m\omega_0^2} \sin^2(Q) \rightarrow q = \pm \sqrt{\frac{2E}{m\omega_0^2}} \sin(\omega_0 t + \phi)$$

Exercice : changement de référentiel tournant

Soit R' tournant à la vitesse angulaire Ω autour de R par rapport à l'axe (Oz) .

Soit $F = \vec{P} \cdot R_{-\Omega t}(\vec{r})$

$$\text{avec } R_{-\Omega t} = \begin{pmatrix} \cos(\Omega t) & \sin(\Omega t) & 0 \\ -\sin(\Omega t) & \cos(\Omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Montrer que $K(P, Q, t) = \frac{P^2}{2m} + V(\|\vec{R}\|) - \vec{P} \cdot (\vec{\Omega} \times \vec{R})$

Vérifier que l'on trouve le même K si on fait le changement de variable $\vec{R} = R_{-\Omega t}(\vec{r})$ au niveau du lagrangien de départ.

4.9 Changement de variables généré par l'action, équation de Hamilton-Jacobi

Nous avons déjà vu à la fin du chapitre sur la mécanique Lagrangienne que les propriétés de l'action permettent d'écrire :

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -\mathcal{H}(q, p, t) = -\mathcal{H}\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}, t\right)$$

L'action est donc solution d'une équation aux dérivées partielles. A priori cela n'est pas facile à résoudre. Mais quel intérêt y a-t-il à déterminer S ?

Considérons S comme une fonction génératrice. $q_0 = Q, p_0 = P$.

$$S(q, q_0, t, t_0) = F(q, Q, t)$$

$$\frac{\partial S}{\partial q} = p \quad \frac{\partial S}{\partial q_0} = -p_0 \quad \frac{\partial S}{\partial t} = -E = -\mathcal{H} \quad \frac{\partial S}{\partial t_0} = -E_0$$

$$p = \frac{\partial F_1}{\partial q} \quad -P = \frac{\partial F_1}{\partial Q} \quad \frac{\partial F_1}{\partial t} = \mathcal{K} - \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{K} = 0$$

L'action est la fonction génératrice qui permet de passer de $q(t), p(t)$ à q_0, p_0 avec un nouvel hamiltonien qui est $\mathcal{K} = 0$. Alors :

$$\dot{q}_0 = \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial p_0} = 0 \quad \dot{p}_0 = -\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial q_0} = 0$$

Autre version : on prend $-S$ comme fonction génératrice. $q_0, p_0, t \xrightarrow{-S} q(t), p(t)$
 $-S$ donne l'évolution temporelle (transformation canonique).

Si on connaît S , alors on peut exprimer : $q(t) = f(q_0, p_0, t)$ $p(t) = g(q_0, p_0, t)$.

On a alors résolu le problème mécanique puisque l'on a une relation entre les impulsions et coordonnées en fonction des conditions initiales mais en l'abordant sous l'angle (original!) d'un changement de variable.

Problème pratique : pour calculer $S = \int (p\dot{q} - \mathcal{H})dt$, il faut avoir p et q .

Mais on peut contourner cette difficulté en utilisant l'EDP d'Hamilton Jacobi :

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -\mathcal{H}\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}, t\right)$$

Jacobi a remarqué qu'il n'est pas utile de connaître les solutions générales, qui sont difficiles à trouver, mais qu'il suffit de connaître une solution dite complète, c'est à dire une solution dépendant de n constantes : $S(q, \alpha_1, \dots, \alpha_n, t)$.

Remarque : les symétries et invariance permettent d'en trouver certaines.

Si on connaît une solution complète, on peut prendre S comme fonction génératrice, avec les α_i comme nouvelles impulsions (type F_2), et les β_i comme coordonnées associées aux α_i . Ou énoncé plus simplement avec les α_i on peut exprimer les impulsions en fonction de ces constantes et des coordonnées...et donc les prendre comme nouvelles impulsions.

Alors :

$$\beta_i = \frac{\partial S}{\partial \alpha_i} \text{ avec } \mathcal{K} = 0 \Rightarrow \dot{\beta}_i = 0 \Rightarrow \beta_i \text{ constante du mouvement}$$

Les α_i sont n constantes du mouvement, et les β_i en apportent n autres. On peut d'ailleurs montrer que les β_i sont des constantes du mouvement de manière indépendante. Les β_i sont des fonctions du temps et des coordonnées et des constantes α_i .

$$\frac{d\beta_i}{dt} = \frac{\partial \beta_i}{\partial t} + \sum_k \frac{\partial \beta_i}{\partial q_k} \dot{q}_k = \partial_{t, \alpha_i}^2 S + \sum_k \partial_{\alpha_i, q_k}^2 S \dot{q}_k = -\frac{\partial H}{\partial \alpha_i} + \sum_k \frac{\partial p_k}{\partial \alpha_i} \dot{q}_k$$

en permutant les dérivées partielles. Mais $\frac{\partial H(q_k, p_k(\alpha_i), t)}{\partial \alpha_i} = \sum_k \frac{\partial H}{\partial p_k} \frac{\partial p_k}{\partial \alpha_i} = \sum_k \frac{\partial p_k}{\partial \alpha_i} \dot{q}_k$ en utilisant les équations de Hamilton. Donc $\frac{d\beta_i}{dt} = 0$.

On avait donc n constantes du mouvement les α_i qui permettent d'en obtenir n de plus les β_i si on a l'expression de S en fonction des α_i .

Or :

$$\beta_i = \frac{\partial S}{\partial \alpha_i}(q_1, \dots, q_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n, t)$$

En inversant ces n relations, on peut espérer avoir :

$$q_i = f_i(\alpha_k, \beta_k, t)$$

Et le problème mécanique est alors résolu.

Exemple : ressort $\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_0^2 q^2$

Hamilton-Jacobi :

$$-\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S}{\partial q} \right)^2 + \frac{1}{2}m\omega_0^2 q^2$$

Système autonome $\mathcal{H} = E$: constante du mouvement. Donc pour un système à un degré de liberté et qui est autonome on a tout de suite une constante.

$$S = \int p\dot{q}dt - \int \mathcal{H}dt = \int p\dot{q}dt - E(t - t_0)$$

$$S = -E(t - t_0) + \hat{S}$$

Alors HJ se réécrit : $E = \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial \hat{S}}{\partial q} \right)^2 + \frac{1}{2} m\omega_0^2 q^2$

$$\frac{\partial \hat{S}}{\partial q} = \sqrt{2m(E - \frac{1}{2}m\omega_0^2 q^2)} \Rightarrow S = -E(t - t_0) + \int \sqrt{2m(E - \frac{1}{2}m\omega_0^2 q^2)} dq$$

qui est une solution complète. On pose alors :

$$\beta_E = \frac{\partial S}{\partial E} = cste \Rightarrow \beta_E = -(t - t_0) + \sqrt{2m} \int \frac{dq}{2\sqrt{E - \frac{1}{2}m\omega_0^2 q^2}}$$

$$\beta_E = -(t - t_0) + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2m}{E}} \int \frac{dq}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}m\omega_0^2 q^2}}$$

On fait le changement de variables $q' = \frac{1}{2} \frac{m\omega_0^2}{E} q^2$

$$\beta_E = -(t - t_0) + \frac{1}{\omega_0} \int \frac{dq'}{\sqrt{1 - q'^2}} = -(t - t_0) + \frac{1}{\omega_0} \text{Arcsin}(q')$$

d'où :

$$q = \sqrt{\frac{2E}{m\omega_0^2}} \sin(\omega_0(t - t_0) + \omega_0\beta_E)$$

Le problème de cette méthode de résolution est qu'elle n'est pas générale car il faut une solution complète, qui peut être difficile à trouver.

Elle a cependant son intérêt dans le cas où des variables sont séparables :

$$\mathcal{H}(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n, t) = \mathcal{H}_1(p_1, q_1) + \mathcal{H}_2(p_2, q_2, \dots, t)$$

$$S = S_1(q_1) + S_2(q_2, \dots, q_n)$$

$$\frac{\partial S_1}{\partial t} + \frac{\partial S_2}{\partial t} = -(\mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2) \Rightarrow \underbrace{\frac{\partial S_1}{\partial t} + \mathcal{H}_1}_{\text{indépendance des variables}} = -\left(\frac{\partial S_2}{\partial t} + \mathcal{H}_2 \right) = cste$$

Ce procédé permet de produire une constante du mouvement, au même titre que les invariances α .

Mécanique analytique

Remarque : si on a une variable cyclique :

$$\mathcal{H}(q_i, \dots) \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} = 0 = \dot{p}_i$$

Alors on peut écrire :

$$S = p_i q_i + S_j \quad \text{car } S = \int p_i \dot{q}_i dt = p_i \int \dot{q}_i dt = p_i q_i$$

et le système est séparable.

Exemple : Particule en mouvement dans un champ de force central

$$\mathcal{H} = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2 \sin^2(\theta)} + V(r)$$

On a $\mathcal{H} = E$, le système est autonome.

$$S = -E(t - t_0) + \hat{S}(r, \theta, \varphi)$$

Hamilton-Jacobi :

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial \hat{S}}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{2mr^2} \left(\frac{\partial \hat{S}}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{1}{2mr^2 \sin^2(\theta)} \left(\frac{\partial \hat{S}}{\partial \varphi} \right)^2 + V(r) = E$$

On constate que φ est une variable cyclique : $p_\varphi = \alpha_\varphi$

$$S = -E(t - t_0) + \alpha_\varphi \varphi + \hat{S}(r, \theta)$$

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial \hat{S}}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{2mr^2} \left(\frac{\partial \hat{S}}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{\alpha_\varphi^2}{2mr^2 \sin^2(\theta)} + V(r) = E$$

$$\left(\frac{\partial \hat{S}}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{\alpha_\varphi^2}{\sin^2(\theta)} = 2mr^2 \left(E - V(r) - \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial \hat{S}}{\partial r} \right)^2 \right) = \alpha_\theta^2$$

D'où :

$$S = -E(t - t_0) + \alpha_\varphi \varphi + \int \sqrt{\alpha_\theta^2 - \frac{\alpha_\varphi^2}{\sin^2(\theta)}} d\theta + \int \sqrt{2m \left(E - V(r) - \frac{\alpha_\theta^2}{2mr^2} \right)} dr$$

On a une solution complète. On fait le choix $\alpha_\varphi = 0$.

$$\frac{\partial S}{\partial E} = \beta_E \quad \frac{\partial S}{\partial \alpha_\theta} = \beta_\theta$$

$$\begin{cases} \beta_E = -(t - t_0) + \sqrt{2m} \int \frac{dr}{2\sqrt{E - V(r) - \frac{\alpha_\theta^2}{2mr^2}}} \rightarrow r(t) \\ \beta_\theta = \theta - \theta_0 + \int \frac{d}{d\alpha_\theta} \left(\sqrt{E - V(r) - \frac{\alpha_\theta^2}{2mr^2}} \right) dr \rightarrow \theta(t) \end{cases}$$

Puis on élimine le temps entre r et θ pour obtenir la trajectoire $r(\theta)$.

Ainsi, Hamilton-Jacobi est une méthode alternative de résolution des problèmes mécaniques, mais est peu utilisée.

Remarque : si on cherche une solution de l'équation de Schrödinger :

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{-\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V(x)\psi$$

(on reste en 1 dimension en représentation x) en cherchant une solution du type $\psi(x, t) = A(x, t)e^{i\phi(x, t)}$. On peut arbitrairement noter $\phi(x, t) = S(x, t)/\hbar$ et on peut alors vérifier en considérant la partie réelle cette équation que :

$$\hbar \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + V(x) = -\frac{\hbar^2}{2mA} \frac{\partial^2 A}{\partial x^2}$$

Donc dans la limite où $\hbar \rightarrow 0$, ou plutôt, si tout ce qui est homogène à cette constante (donc S) est grand devant \hbar , le second terme est négligeable. Alors S vérifie l'équation de Hamilton-Jacobi. Celle-ci, donc la mécanique classique, peut donc être vue comme la limite de l'équation de Schrödinger quand l'action est très grande devant \hbar . Cela établit donc un lien entre mécanique quantique et classique. Un autre point de vue consiste à remarquer que $\frac{\partial S}{\partial x} = p = \frac{\hbar}{\lambda}$ en utilisant la relation de De Broglie. Le second membre $\frac{\hbar^2}{2mA} \frac{\partial^2 A}{\partial x^2}$, si on note D la distance caractéristique de variation de A est en $\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{D^2}$. Donc négliger le second terme devant le terme d'énergie cinétique, implique que $\lambda \ll D$. Donc négliger ce terme revient à faire tendre la longueur d'onde associée à la particule vers 0 (ce qui revient au même que faire tendre h vers 0 à p constante car $\lambda \propto h$). On retrouve l'approximation que l'on rencontre en optique pour passer des ondes électromagnétiques à l'optique géométrique. Donc de même que l'optique géométrique, Fermat, est la limite de l'équation de propagation des ondes électromagnétiques quand les champs ont des amplitudes qui varient peu devant la longueur d'onde (eïkonale), la mécanique classique est la limite de la mécanique quantique quand l'amplitude de la fonction d'onde varie peu devant la longueur d'onde associée à la particule. Dans ce cadre l'action est donc à un facteur \hbar près la phase de la fonction d'onde. Ce qui lui donne un sens physique en mécanique quantique.

4.10 Changements de variables et crochets de Poisson

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, \mathcal{H}\} \quad \{p_i, q_j\} = \delta_{ij}$$

Lorsqu'on fait un changement de variables, que deviennent les crochets de Poisson ?

Un argument physique montre que :

$$\{ \quad \}_{p,q} = \{ \quad \}_{P,Q}$$

En effet, on a vu que les crochets de Poisson représentent une grandeur physique (flux, dérivée convective,...). Ils ont donc un sens indépendamment des variables qui décrivent le problème. En particulier :

$$\{P_i, Q_j\}_{P,Q} = \delta_{ij}$$

Avec les fonctions génératrices, on peut générer un changement de variables qui sera canonique. Pour un tel changement de variables, on peut vérifier qu'il est canonique si et seulement si il conserve les crochets de Poisson.

Conséquence :

$$\begin{aligned} \int dP dQ &= \int \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial Q}{\partial q} & \frac{\partial P}{\partial q} \\ \frac{\partial Q}{\partial p} & \frac{\partial P}{\partial p} \end{array} \right| dp dq = \int \left(\frac{\partial Q}{\partial q} \frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p} \frac{\partial P}{\partial q} \right) dp dq \\ &= \int \{Q, P\}_{p,q} dp dq = \int \{Q, P\}_{P,Q} dp dq = \int dp dq \end{aligned}$$

Les transformations canoniques conservent les crochets de Poisson, donc les volumes dans l'espace des phases. La géométrie associée à ces transformation est appelée géométrie symplectique.

Il faut remarquer que l'évolution temporelle, liée à la transformation générée par $-S$, conserve elle aussi le volume, ce qui équivaut au théorème de Liouville.

4.11 Transformations canoniques infinitésimales

On s'occupe de transformations de la forme " $Id + \varepsilon$ " :

$$\begin{cases} q_i \rightarrow q_i + \delta q_i \\ p_i \rightarrow p_i + \delta p_i \end{cases}$$

$$\text{Et : } \delta f = \frac{\partial f}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial f}{\partial p_i} \delta p_i$$

La fonction génératrice est :

$$F_2 = q_i P_i + \varepsilon F \quad p_i = P_i + \varepsilon \frac{\partial F}{\partial q_i} \quad Q_i = q_i + \varepsilon \frac{\partial F}{\partial P_i}$$

$$\delta p_i = -\varepsilon \frac{\partial F}{\partial q_i} \quad \delta q_i = \varepsilon \frac{\partial F}{\partial P_i} \Rightarrow \delta f = \frac{\partial f}{\partial q_i} \varepsilon \frac{\partial F}{\partial P_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \varepsilon \frac{\partial F}{\partial q_i}$$

Et si $\varepsilon \ll 1$, $p_i \approx P_i$ et :

$$\delta f = \varepsilon \{f, F\}$$

Pour chaque F , on a un $\delta q_i, \delta p_i$ différent.

Dans le cas $f = \mathcal{H}$, on a $\delta f = \delta \mathcal{H}$, issu uniquement des variations spatiales de F .

Si F est fonction du temps : $\frac{\partial F}{\partial t} = \mathcal{K} - \mathcal{H} =$ variation du hamiltonien associé à $F(t)$.

Si on prend les deux variations ensemble : $\delta \mathcal{H} = -\varepsilon \frac{dF}{dt}$

Les constantes du mouvement $\left(\frac{dF}{dt}\right)$ sont les fonctions génératrices des transformations infinitésimales qui laissent \mathcal{H} invariant.

Ce formalisme permet un lien entre invariances/symétries et les constantes du mouvement.

Exemples :

$$F = \mathcal{H} \quad \delta p_i = \varepsilon \dot{p}_i \quad \delta q_i = -\varepsilon \dot{q}_i \quad \varepsilon = dt$$

si \mathcal{H} est invariant par translation dans le temps : $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = 0$, alors \mathcal{H} est constante du mouvement : $\frac{d\mathcal{H}}{dt} = 0$.

— $F = p_i \quad \delta p_i = 0 \quad \delta q_i = \varepsilon : p_i$ génère la translation dans la direction de q_i .

4.12 Notion de variables angle/action

Ce sont des changements de variables tels que les constantes du mouvement sont les nouvelles impulsions (notées J_i), si au départ on n'a pas que des variables cycliques α_i .

$$\dot{J}_i = 0 \quad \mathcal{H}(\alpha_i, J_i) \quad \dot{\alpha}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial J_i} = \omega_0$$

On a alors : $\alpha_i = \omega_0 t + \phi$, c'est une variable qui peut décrire un angle.

Par ailleurs : $[\alpha_i, J_i] = [S]$: action.

On traite le cas du système autonome à une dimension.

L'énergie est une constante du mouvement, on cherche $J = f(E)$. Pour cela, on utilise la conservation des aires pour un mouvement périodique :

$$\int d\alpha dJ = 2\pi J = \int dpdq = \oint p(E, q) dq \Rightarrow J = \frac{1}{2\pi} \oint p(E, q) dq \Rightarrow J(E, q) = J(p, q)$$

$$\dot{\alpha} = \omega = \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial J} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial J} = \frac{1}{\frac{\partial J}{\partial \mathcal{H}}}$$

$$\alpha = \int \frac{1}{\frac{\partial J}{\partial \mathcal{H}}} \frac{dq}{\dot{q}} = \int \frac{1}{\frac{\partial J}{\partial \mathcal{H}} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p}} \Rightarrow \alpha(p, q)$$

Ceci ne marche qu'en 1D, pour un système conservatif.

Exemple : ressort

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_0^2 q^2 \quad \left\{ \begin{array}{l} Q = \sqrt{m\omega_0} q \\ P = \sqrt{\frac{1}{m\omega_0}} p \end{array} \right. \Rightarrow \mathcal{H} = \frac{\omega_0}{2} (P^2 + Q^2) = E$$

Il s'agit d'un cercle de rayon $\sqrt{\frac{2E}{\omega_0}}$. On paramètre :

$$Q = \sqrt{\frac{2E}{\omega_0}} \sin(\bar{Q}) \quad P = \sqrt{\frac{2E}{\omega_0}} \cos(\bar{Q})$$

Alors :

$$\frac{P}{Q} = \cot(\bar{Q}) \quad F_1(Q, \bar{Q}, t)? \quad P = \frac{\partial F_1}{\partial Q} = Q \cot(\bar{Q})$$

D'où : $F_1 = \frac{Q^2}{2} \cot(\bar{Q})$: on retrouve la transformation canonique.

Plus formellement,

$$2\pi J = \oint P dQ = \frac{\pi^2 E}{\omega_0} \Rightarrow J = \frac{E}{\omega_0}$$

$$\omega = \omega_0 = \frac{1}{\frac{\partial J}{\partial E}} \Rightarrow \alpha = \omega_0 \int \frac{dQ}{Q} = \omega_0 \int \frac{dQ}{\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P}} = \int \frac{dQ}{P} = \int \frac{dQ}{\sqrt{\frac{2E}{\omega_0} - Q^2}} = \text{Arcsin} \left(\frac{Q}{\sqrt{Q^2 + P^2}} \right)$$

On retrouve ainsi les résultats précédents.

Dans le cas général, on ne sait pas toujours résoudre le problème (en plusieurs dimensions). Savoir si le problème a une solution relève de l'étude des systèmes intégrables.

Liouville a montré que si on dispose de n intégrales premières (telles que $\{F, \mathcal{H}\} = 0$), indépendantes et en involution ($\{F_i, F_j\} = 0$), alors le système est intégrable.

Dans la majorité des cas, cependant, on ne sait pas résoudre. On peut utiliser des solutions connues et réaliser dessus des perturbations.