18/12/73 Réinterprétation "quantique" des équations de Maxwell

But de ce §

Introduire à partir des champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ une fonction $\vec{\alpha}(\vec{k},t)$ dont on montre qu'elle peut être interprétée comme la fonction d'onde des photons dans l'espace des $\vec{k}$.

1_Transformées de Fourier des champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$.

- Equations de Maxwell

$$\begin{cases} \vec{\nabla}\cdot\vec{E}(\vec{r},t)=0 \\ \vec{\nabla}\cdot\vec{B}(\vec{r},t)=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \vec{\nabla}\times\vec{E}(\vec{r},t) = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}(\vec{r},t) \\ \vec{\nabla}\times\vec{B}(\vec{r},t) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}(\vec{r},t)}{\partial t} \end{cases} \qquad (1)$$

- Transformées de Fourier

$$\begin{cases} \vec{E}(\vec{r},t) = \int d^3k\ \vec{\mathcal{E}}(\vec{k},t)\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \\ \vec{B}(\vec{r},t) = \int d^3k\ \vec{\mathcal{B}}(\vec{k},t)\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \end{cases} \qquad (2)$$

- Conditions de réalité. Le fait que $\vec{E}$ et $\vec{B}$ soient réels entraîne :

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{k},t) = \vec{\mathcal{E}}^*(-\vec{k},t)$$
$$\vec{\mathcal{B}}(\vec{k},t) = \vec{\mathcal{B}}^*(-\vec{k},t) \qquad (3)$$

- Equations de Maxwell dans l'espace des $\vec{k}$

$$\begin{cases} \vec{k}\cdot\vec{\mathcal{E}}(\vec{k},t)=0 \\ \vec{k}\cdot\vec{\mathcal{B}}(\vec{k},t)=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \vec{k}\times\vec{\mathcal{E}}(\vec{k},t) = i\dot{\vec{\mathcal{B}}}(\vec{k},t) \\ \vec{k}\times\vec{\mathcal{B}}(\vec{k},t) = -\frac{i}{c^2}\dot{\vec{\mathcal{E}}}(\vec{k},t) \end{cases} \qquad (4)$$

- Passage des variables $\{\vec{\mathcal{E}},\vec{\mathcal{B}}\}$ aux variables $\{\vec{\mathcal{E}},\dot{\vec{\mathcal{E}}}\}$

En utilisant $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$ (5)

on peut réécrire la dernière équation de Maxwell sous la forme

$$\vec{\mathcal{B}}(\vec{k},t) = i\,\frac{\vec{k}}{\omega^2}\times\dot{\vec{\mathcal{E}}}(\vec{k},t) \qquad \omega = ck \qquad (6)$$

ce qui permet de se débarrasser de $\vec{\mathcal{B}}$ au profit de $\dot{\vec{\mathcal{E}}}$

- Equations du mouvement

En reportant (6) dans la 3ème équation de Maxwell (4), on obtient :

$$\ddot{\vec{\mathcal{E}}}(\vec{k},t) + \omega^2\,\vec{\mathcal{E}}(\vec{k},t) = 0 \qquad (7)$$

Ceci montre l'intérêt de passer dans l'espace des $\vec{k}$. Les $\vec{\mathcal{E}}(\vec{k},t)$ sont des variables "normales" découplées qui évoluent indépendamment les unes des autres.

2 - Développement en ondes planes progressives.

- A partir de $\vec{\mathcal{E}}$, $\dot{\vec{\mathcal{E}}}$ introduisons la fonction vectorielle $\vec{\alpha}$ par :

$$2N(k)\,\vec{\alpha}(\vec{k},t) = \vec{\mathcal{E}}(\vec{k},t) + \frac{i}{\omega}\,\dot{\vec{\mathcal{E}}}(\vec{k},t) \qquad (8)$$

où $N(k)$ est un coefficient de normalisation qui sera précisé plus loin

- Réécrivons (8) en remplaçant $\vec{k}$ par $-\vec{k}$ [On suppose $N(k) = N(-k)$]

$$2\,N(k)\,\vec{\alpha}(-\vec{k},t) = \vec{\mathcal{E}}(-\vec{k},t) + \frac{i}{\omega^2}\,\dot{\vec{\mathcal{E}}}(-\vec{k},t) \qquad (9)$$

- Utilisons les conditions de réalité (3) pour réécrire (9) sous la forme :

$$2\,N(k)\,\alpha^*(-\vec{k},t) = \mathcal{E}(\vec{k},t) - \frac{i}{\omega^2}\,\dot{\vec{\mathcal{E}}}(\vec{k},t) \qquad (10)$$

- On peut utiliser (8) et (10) pour exprimer $\vec{\mathcal{E}}$ et $\dot{\vec{\mathcal{E}}}$ en fonction de $\vec{\alpha}$

$$\left\{\begin{aligned} \vec{\mathcal{E}}(\vec{k},t) &= N(k)\,[\vec{\alpha}(\vec{k},t) + \vec{\alpha}^*(-\vec{k},t)] && (11)\\ \dot{\vec{\mathcal{E}}}(\vec{k},t) &= -i\omega\,N(k)\,[\vec{\alpha}(\vec{k},t) - \vec{\alpha}^*(-\vec{k},t)] && (12)\end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{matrix}\vec{\mathcal{E}}(\vec{k},t)\\ \dot{\vec{\mathcal{E}}}(\vec{k},t)\end{matrix}\right\} \underset{(11)\ (12)}{\overset{(8)}{\rightleftarrows}} \left\{\vec{\alpha}(\vec{k},t)\right\}$$

"L'état" du champ est tout aussi bien décrit par $\{\vec{E},\vec{B}\}$, que par $\{\vec{\mathcal{E}},\dot{\vec{\mathcal{E}}}\}$, ou que par $\{\vec{\alpha}(\vec{k},t)\}$

- Notons enfin que la 1ère équation de Maxwell donne :

$$\vec{k}\cdot\vec{\alpha}(\vec{k},t) = 0 \qquad (13)$$

- Équation du mouvement des $\vec{\alpha}$.

En utilisant $\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega^2 = \left(\frac{\partial}{\partial t} + i\omega\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - i\omega\right)$

on peut réécrire (7) sous la forme

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega^2\right)\vec{\mathcal{E}}(\vec{k},t) = \left(\frac{\partial}{\partial t} + i\omega\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - i\omega\right)\mathcal{E}(\vec{k},t) = 0 \qquad (14)$$

Or, d'après (8), $\left(\frac{\partial}{\partial t} - i\omega\right)\vec{\mathcal{E}}(\vec{k},t)$ est proportionnel à $\vec{\alpha}(\vec{k},t)$

Donc on peut réécrire (14) sous la forme $\left(\frac{\partial}{\partial t} + i\omega\right)\vec{\alpha}(\vec{k},t) = 0$, c-à-d, après multiplication par $\hbar$:

$$i\hbar\,\frac{\partial}{\partial t}\,\vec{\alpha}(\vec{k},t) = \hbar\omega\,\vec{\alpha}(\vec{k},t) \qquad (15)$$

Réinterprétation de 15 comme une équation de Schrödinger dans l'espace des $\vec{k}$.

Nous allons maintenant réexprimer les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ dans l'espace des $\vec{r}$ en fonction de $\vec{\alpha}$.

– Expression de $\vec{E}(\vec{r},t)$ et $\vec{B}(\vec{r},t)$ en fonction des $\vec{\alpha}(\vec{k},t)$

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \underbrace{\int d^3k\ N(k)\ \vec{\alpha}(\vec{k},t)\ e^{i\vec{k}.\vec{r}}}_{\vec{E}^{(+)}(\vec{r},t)} + \underbrace{\int d^3k\ N(k)\ \vec{\alpha}^*(\vec{k},t)\ e^{-i\vec{k}.\vec{r}}}_{\vec{E}^{(-)}(\vec{r},t)} \quad (16)$$

composante de fréquence >0 (en $e^{-i\omega t}$) composante de fréquence <0 (en $e^{i\omega t}$)

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \int d^3k\ \frac{N(k)}{\omega}\ \vec{k}\times\vec{\alpha}(\vec{k},t)\ e^{i\vec{k}.\vec{r}} + \int d^3k\ \frac{N(k)}{\omega}\ \vec{k}\times\vec{\alpha}^*(\vec{k},t)\ e^{-i\vec{k}.\vec{r}} \quad (17)$$

3 – Energie du champ électromagnétique $\mathcal{H}_R$.

– Calcul de $\mathcal{H}_R = \frac{\varepsilon_0}{2}\int d^3r\ (\vec{E}^2 + c^2\vec{B}^2)$ (18)

$$\begin{cases} \int d^3r\ \vec{E}(\vec{r}).\vec{E}(\vec{r}) = \int d^3r\ \vec{E}^*(\vec{r}).\vec{E}(\vec{r}) = (2\pi)^3\int d^3k\ \vec{\mathcal{E}}^*(\vec{k}).\vec{\mathcal{E}}(\vec{k}) \\ \int d^3r\ \vec{B}(\vec{r}).\vec{B}(\vec{r}) = (2\pi)^3\int d^3k\ \vec{\mathcal{B}}^*(\vec{k}).\vec{\mathcal{B}}(\vec{k}) \end{cases} \quad (19)$$

(Parseval – Plancherel)

$$(\vec{a}\times\vec{b}).(\vec{c}\times\vec{d}) = (\vec{a}.\vec{c})(\vec{b}.\vec{d}) - (\vec{a}.\vec{d})(\vec{b}.\vec{c}) \quad (20)$$

$$\int d^3k\ \vec{\mathcal{B}}^*(\vec{k}).\vec{\mathcal{B}}(\vec{k}) = \frac{k^2}{\omega^4}\ \dot{\vec{\mathcal{E}}}^*(\vec{k}).\dot{\vec{\mathcal{E}}}(\vec{k}) \quad (21)$$

$$\mathcal{H}_R = \frac{\varepsilon_0}{2}(2\pi)^3\int d^3k\left[\vec{\mathcal{E}}^*(\vec{k}).\vec{\mathcal{E}}(\vec{k}) + \frac{1}{\omega^2}\dot{\vec{\mathcal{E}}}^*(\vec{k}).\dot{\vec{\mathcal{E}}}(\vec{k})\right]$$

$$= 2\varepsilon_0(2\pi)^3\int d^3k\ N^2(k)\ \vec{\alpha}^*(\vec{k}).\vec{\alpha}(\vec{k}) \quad (22)$$

– Choix de $N(k)$ $\quad N(k) = \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0(2\pi)^3}}$ (23)

$$\mathcal{H}_R = \int d^3k\ \hbar\omega\ \vec{\alpha}^*(\vec{k}).\vec{\alpha}(\vec{k}) \quad (24)$$

– Réinterprétation de $\mathcal{H}_R$ comme la valeur moyenne d'un opérateur hamiltonien H

$$\begin{cases} \alpha_i(\vec{k}) = \langle\vec{k},i|\psi\rangle \qquad i=x,y,z \\ \langle\vec{k},i|H|\vec{k}',j\rangle = \delta_{ij}\ \delta(\vec{k}-\vec{k}')\ \hbar\omega \\ \mathcal{H}_R = \langle\psi|H|\psi\rangle \end{cases} \quad (25)$$

$\int d^3k\ \vec{\alpha}^*(\vec{k}).\vec{\alpha}(\vec{k}) = 1$ Normalisation à 1 photon. (26)

4 – Impulsion du champ électromagnétique $\vec{\mathcal{P}}$

– Calcul de $\vec{\mathcal{P}} = \varepsilon_0\int d^3r\ \vec{E}(\vec{r})\times\vec{B}(\vec{r}) = \varepsilon_0(2\pi)^3\int d^3k\ \vec{\mathcal{E}}(\vec{k})\times\vec{\mathcal{B}}^*(\vec{k})$ (27)

$$= -i\,\varepsilon_0(2\pi)^3\int d^3k\ \frac{\vec{k}}{\omega^2}\left(\vec{\mathcal{E}}(\vec{k}).\dot{\vec{\mathcal{E}}}^*(\vec{k})\right)$$

$$\vec{\mathcal{P}} = \frac{1}{2}\int d^3k\ \hbar\vec{k}\left[\vec{\alpha}^*(\vec{k}).\vec{\alpha}(\vec{k}) - \vec{\alpha}^*(-\vec{k}).\alpha(-\vec{k}) - \vec{\alpha}(\vec{k}).\vec{\alpha}(-\vec{k}) - \vec{\alpha}^*(-\vec{k}).\vec{\alpha}^*(\vec{k})\right] \quad (28)$$

$$\vec{\mathcal{P}} = \int d^3k\ \hbar\vec{k}\ \vec{\alpha}^*(\vec{k}).\vec{\alpha}(\vec{k}) \quad (29)$$

– Réinterprétation de $\mathcal{P}$ comme la valeur moyenne de l'opérateur impulsion $\vec{P}$

$\langle i,\vec{k}|\vec{P}|j,\vec{k}'\rangle = \delta_{ij}\ \delta(\vec{k}-\vec{k}')\ \hbar\vec{k}$

$\alpha_i(\vec{k})$: amplitude de probabilité pour que le photon ait l'impulsion $\hbar\vec{k}$ et la polarisation i

– Il n'est pas possible d'introduire une fonction de $\vec{r}$ qui ait la signification d'une fonction d'onde du photon dans l'espace des positions.

Ainsi, la transformée de Fourier de $\vec{\alpha}(\vec{k},t)$ s'exprime de manière non locale en fonction du champ $\vec{E}^{(+)}(\vec{r},t)$ (à cause de $N(k)$)

Probabilité de photoionisation d'un atome au point $\vec{r}$ $\sim \langle\vec{E}^{(-)}(\vec{r},t).\vec{E}^{(+)}(\vec{r},t)\rangle$

– Vrai vecteur d'état du champ électromagnétique quantifié : dans l'espace de Fock (nbres d'occupation)

5 - Moment cinétique du champ électromagnétique

But de ce § : Montrer que $\vec{J} = \int d^3r\ \varepsilon_0\ \vec{r} \times (\vec{E} \times \vec{B})$ peut être mis sous la forme d'une valeur moyenne quantique, celle de l'opérateur $\vec{L} + \vec{S}$ dans la "fonction d'onde" $\vec{\alpha}(\vec{k})$.

Quelques formules utiles (convention : sommation sur indices répétés)

- Tenseur complètement antisymétrique à 3 dimensions : ε_{abc}

$$\begin{cases} \varepsilon_{xyz} = \varepsilon_{yzx} = \varepsilon_{zxy} = -\varepsilon_{yxz} = -\varepsilon_{xzy} = -\varepsilon_{zyx} = 1 \\ \text{Nul si 2 ou 3 indices égaux} \end{cases} \quad (\text{II}-1)$$

- Produit vectoriel $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$ $\qquad C_a = \varepsilon_{abc} A_b B_c$ (II-2)
- Rotationnel $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ $\qquad B_a = \varepsilon_{abc} \partial_b A_c$ (II-3)
- Produit contracté $\qquad \varepsilon_{abc}\varepsilon_{cde} = \delta_{ad}\delta_{be} - \delta_{ae}\delta_{bd}$ (II-4)

a - Rappels de mécanique quantique

Spin 1

- Opérateurs de spin : $S_x, S_y, S_z, S_\pm = S_x \pm i S_y, \vec{S}^2$

$$[S_a, S_b] = i\hbar\, \varepsilon_{abc} S_c \qquad [S_a, \vec{S}^2] = 0 \quad (\text{II}-5)$$

Valeur propre de $\vec{S}^2$: $s(s+1)\hbar^2 = 2\hbar^2$ car $s = 1$

- Base $\{|\mu\rangle\} = \{|+1\rangle, |0\rangle, |-1\rangle\}$ des états propres de S_z.

Orthonormée : $\langle\nu|\mu\rangle = \delta_{\mu\nu}$ (II-6)

Action de S_z, $S_\pm$ $\qquad S_z|\mu\rangle = \mu\hbar|\mu\rangle \qquad S_\pm|\mu\rangle = \hbar\sqrt{2-\mu(\mu\pm1)}\,|\mu\pm1\rangle$ (II-7)

- Introduction d'une autre base $\{|a\rangle\} = \{|x\rangle, |y\rangle, |z\rangle\}$
(Commode pour les calculs en coordonnées cartésiennes)

Définition : $|x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|-1\rangle - |+1\rangle) \qquad |y\rangle = \frac{i}{\sqrt{2}}(|-1\rangle + |+1\rangle) \qquad |z\rangle = |0\rangle$ (II-8)

Orthonormée : $\langle a|b\rangle = \delta_{ab}$ (II-9)

$|+1\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}}(|x\rangle + i|y\rangle) \qquad |0\rangle = |z\rangle \qquad |-1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|x\rangle - i|y\rangle)$ (II-10)

- Action de $S_{x,y,z}$ sur les vecteurs de base $\{|a\rangle\}$ D'après (II-8) et (II,7) :

$$\begin{cases} S_x|x\rangle = \frac{1}{2}(S_+ + S_-)\frac{1}{\sqrt{2}}(|-1\rangle - |+1\rangle) = 0 \\ S_x|y\rangle = \frac{1}{2}(S_+ + S_-)\frac{i}{\sqrt{2}}(|-1\rangle + |+1\rangle) = \frac{i\hbar}{2\sqrt{2}}(\sqrt{2}|0\rangle + \sqrt{2}|0\rangle) = i|0\rangle = i\hbar|z\rangle \\ S_x|z\rangle = \frac{1}{2}(S_+ + S_-)|0\rangle = \frac{\hbar}{2}(\sqrt{2}|+1\rangle + \sqrt{2}|-1\rangle) = -i\hbar|y\rangle \end{cases} \quad (\text{II}-11)$$

Calculs analogues pour S_y et S_z $\longrightarrow$ Résultats regroupables sous la forme :

$$S_a|b\rangle = i\hbar\,\varepsilon_{abc}|c\rangle \quad (\text{II}-12)$$

$$\langle c|S_a|b\rangle = i\hbar\,\varepsilon_{abc} \quad (\text{II}-13)$$

Remarque : D'après la 1ère formule (II-11), $|x\rangle$ (resp $|y\rangle, |z\rangle$) est vecteur propre de S_x (resp S_y, S_z) avec la valeur propre 0.
$|x\rangle$ ($|y\rangle$) se déduit donc de $|z\rangle = |0\rangle$ par une rotation de $+\frac{\pi}{2}$) ($-\frac{\pi}{2}$) autour de Oy (Ox). On aurait pu ainsi introduire les formules (II-8)

Analogie entre les 3 états $\{|a\rangle\}$ d'un spin 1 et les 3 vecteurs unitaires d'un trièdre trirectangle

- Comment se transforme l'état $|b\rangle$ lors d'une rotation infinitésimale $d\varphi$ autour de Oa ?
  - Opérateur de rotation : $R_a(d\varphi) = 1 - i\frac{d\varphi}{\hbar} S_a$ (II-14)
  - Transformé de $|b\rangle$

$$R_a(d\varphi)|b\rangle = |b\rangle - i\frac{d\varphi}{\hbar} S_a|b\rangle = |b\rangle + d\varphi\, \varepsilon_{abc}|c\rangle \qquad \text{(II-15)}$$

- Comment se transforme le vecteur unitaire $\vec{e}_b$ lors d'une rotation $d\varphi$ autour de $\vec{e}_a$?

$$\mathcal{R}_a(d\varphi)\vec{e}_b = \vec{e}_b + d\varphi \underbrace{\vec{e}_a \times \vec{e}_b}_{\varepsilon_{abc}\vec{e}_c} = \vec{e}_b + d\varphi\, \varepsilon_{abc}\vec{e}_c \qquad \text{(II-16)}$$

- Conclusion : isomorphisme entre les vecteurs unitaires de l'espace à 3 dimensions et les états d'un spin 1

$$\vec{V} = V_x\vec{e}_x + V_y\vec{e}_y + V_z\vec{e}_z \iff |V\rangle = V_x|x\rangle + V_y|y\rangle + V_z|z\rangle \qquad \text{(II-17)}$$

Fonction d'onde d'une particule de spin 1.

On tient compte maintenant en plus des degrés de liberté externes.

- Base orthonormée de l'espace des états : $\{|\vec{k}, a\rangle\} = \{|\vec{k}\rangle \otimes |a\rangle\}$ (II-18)

  $|\vec{k}, a\rangle$: particule d'impulsion $\hbar\vec{k}$ et dans l'état de spin $|a\rangle$

- Fonction d'onde associée à un état $|\varphi\rangle$

$$\langle \vec{k}, a|\varphi\rangle = \varphi_a(\vec{k}) \qquad \text{(II-19)}$$

En chaque point $\vec{k}$ de l'espace des $\vec{k}$, 3 nombres : $\varphi_x(\vec{k}), \varphi_y(\vec{k}), \varphi_z(\vec{k})$

- Opérateur moment cinétique orbital (n'agit que sur les degrés de liberté externes)

$$\vec{L} = \vec{R} \times \vec{P} \qquad \text{(II-20)}$$

En représentation $\{|\vec{k}\rangle\}$ $\begin{cases} \vec{R} \rightsquigarrow -\frac{1}{i}\vec{\nabla} & (\frac{1}{i}\text{ gradient }/\vec{k}) \\ \vec{P} \rightsquigarrow \hbar\vec{k} & (\text{multiplication par }\hbar\vec{k}) \end{cases}$ (II-21)

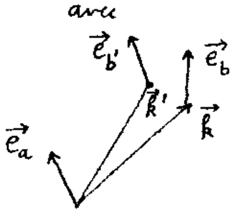
D'où $\vec{L} \rightsquigarrow -\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}\times\vec{k} = \frac{\hbar}{i}\vec{k}\times\vec{\nabla}$ (II-22)

$$L_a = \frac{\hbar}{i}\varepsilon_{abc}\, k_b\, \partial_c \qquad \left(\partial_c = \frac{\partial}{\partial k_c}\right) \qquad \text{(II-23)}$$

- Comment se transforme l'état $|\vec{k}, b\rangle$ lors d'une rotation $d\varphi$ autour de Oa ?

$$R_a(d\varphi)|\vec{k}\rangle\otimes|b\rangle = \left(1 - i\frac{d\varphi}{\hbar}L_a\right)|\vec{k}\rangle \otimes \left(1 - i\frac{d\varphi}{\hbar}S_a\right)|b\rangle = |\vec{k}'\rangle\otimes|b'\rangle \qquad \text{(II-24)}$$

avec $\vec{k}' = \vec{k} + d\varphi\,\vec{e}_a\times\vec{k} \qquad \vec{e}_{b'} = \vec{e}_b + d\varphi\,\vec{e}_a\times\vec{e}_b$ (II-25)



Si à $|\vec{k}, b\rangle$ on associe le vecteur $\vec{e}_b$ appliqué au point $\vec{k}$, au transformé de $|\vec{k}, b\rangle$ il faut associer le vecteur "tourné" $\vec{e}_{b'}$ appliqué au point "tourné" $\vec{k}'$

On montre aisément à partir de là que les 3 nombres introduits en (II-19) se transforment par rotation comme les composantes d'un <u>champ vectoriel</u> (un vecteur en chaque point de l'espace)

Donc

Fonction d'onde d'une particule de spin 1 $\iff$ Champ vectoriel

- Calcul de la valeur moyenne du moment cinétique total en fonction des composantes cartésiennes de la fonction d'onde

$$J_a = L_a + S_a \qquad \text{(II-26)}$$

$$\langle J_a\rangle = \langle\varphi|J_a|\varphi\rangle = \langle L_a\rangle + \langle S_a\rangle \qquad \text{(II-27)}$$

$$\langle L_a \rangle = \int d^3k \; \varphi_d^* \, L_a \, \varphi_d \;=\; \frac{\hbar}{i} \int d^3k \; \varphi_d^* \, \varepsilon_{abc} \, k_b \, \partial_c \, \varphi_d \qquad (\text{II}-28)$$

(Mêmes indices d à gauche et à droite de L_a car L_a n'agit pas sur les variables de spin)

$$\langle S_a \rangle = \int d^3k \, d^3k' \, \langle \varphi | \vec{k} b \rangle \underbrace{\langle \vec{k} b | S_a | \vec{k}' c \rangle}_{-i\hbar \, \delta(\vec{k}-\vec{k}') \, \varepsilon_{abc}} \langle \vec{k}' c | \varphi \rangle \;=\; \frac{\hbar}{i} \int d^3k \; \varphi_b^* \, \varepsilon_{abc} \, \varphi_c \qquad (\text{II}-29)$$

Finalement :

$$\langle J_a \rangle = \frac{\hbar}{i} \int d^3k \left[\varphi_d^* \, \varepsilon_{abc} \, k_b \, \partial_c \, \varphi_d \;+\; \varphi_b^* \, \varepsilon_{abc} \, \varphi_c \right] \qquad (\text{II}-30)$$

b - Calcul de $\vec{J} = \varepsilon_0 \int d^3r \; \vec{r} \times (\vec{E} \times \vec{B})$ en fonction de $\vec{\alpha}(\vec{k})$

Calcul préliminaire en fonction de $\vec{\mathcal{E}}(\vec{k})$ et $\dot{\vec{\mathcal{E}}}(\vec{k})$

- $$\vec{r} \times (\vec{E} \times \vec{B}) = \vec{E} \, (\vec{r}.\vec{B}) - \vec{B} \, (\vec{r}.\vec{E}) = \vec{E}^* \, (\vec{r}.\vec{B}) - \vec{B}^* (\vec{r}.\vec{E}) \quad \text{car } \vec{E} \text{ et } \vec{B} \text{ réels} \qquad (\text{II}-31)$$

- Transformées de Fourier

  si $\vec{E}(\vec{r}) \longleftrightarrow \vec{\mathcal{E}}(\vec{k})$
  $$\vec{r}.\vec{E} \longleftrightarrow i \, \vec{\nabla}.\vec{\mathcal{E}} = i \, \partial_b \mathcal{E}_b \qquad (\text{II}-32)$$

- Parseval - Plancherel

$$\mathcal{J}_a = \varepsilon_0 \int d^3r \left[E_a^* \, (\vec{r}.\vec{B}) - B_a^* \, (\vec{r}.\vec{E}) \right] = i \, \varepsilon_0 (2\pi)^3 \int d^3k \left[\mathcal{E}_a^* (\partial_b \mathcal{B}_b) - \mathcal{B}_a^* (\partial_b \mathcal{E}_b) \right] \qquad (\text{II}-33)$$

$$\int d^3k \; \mathcal{E}_a^* \, (\partial_b \mathcal{B}_b) = \underbrace{\int d^3k \; \partial_b (\mathcal{E}_a^* \, \mathcal{B}_b)}_{=0} - \int d^3k \; \mathcal{B}_b (\partial_b \mathcal{E}_a^*) \qquad (\text{II}-34)$$

(Transformation en une intégrale de surface)

$$\int d^3k \, \mathcal{B}_b \, (\partial_b \mathcal{E}_a^*) = - \int d^3k \; \mathcal{B}_b^* (\partial_b \mathcal{E}_a) \qquad (\text{II}-35)$$

(Chgt $\vec{k} \to -\vec{k}$ et utilisation des conditions de réalité I-3)

Finalement

$$\mathcal{J}_a = i \, \varepsilon_0 \, (2\pi)^3 \int d^3k \left[\mathcal{B}_b^* \, (\partial_b \mathcal{E}_a) - \mathcal{B}_a^* (\partial_b \mathcal{E}_b) \right] \qquad (\text{II}-36)$$

- Remplacement de $\vec{\mathcal{B}}$ par $i \dfrac{\vec{k}}{\omega^2} \times \dot{\vec{\mathcal{E}}}$ (formule I-6)

$$\mathcal{B}_b^* = \frac{-i}{\omega^2} \varepsilon_{bcd} \, k_c \, \dot{\mathcal{E}}_d^* \qquad \mathcal{B}_a^* = -\frac{i}{\omega^2} \, \varepsilon_{acd} \, k_c \, \dot{\mathcal{E}}_d^* \qquad (\text{II}-37)$$

$$\mathcal{J}_a = \varepsilon_0 \, (2\pi)^3 \int \frac{d^3k}{\omega^2} \left[\varepsilon_{bcd} \; \dot{\mathcal{E}}_d^* \, k_c (\partial_b \, \mathcal{E}_a) - \varepsilon_{acd} \; \dot{\mathcal{E}}_d^* \, k_c (\partial_b \, \mathcal{E}_b) \right]$$

$$= \varepsilon_0 (2\pi)^3 \int \frac{d^3k}{\omega^2} \; \dot{\mathcal{E}}_d^* \, k_c (\partial_b \, \mathcal{E}_e) \; \varepsilon_{fcd} \left[\delta_{fb} \, \delta_{ea} - \delta_{fa} \, \delta_{eb} \right] \qquad (\text{II}-38)$$

$$\varepsilon_{fcd} \left[\delta_{fb} \, \delta_{ea} - \delta_{fa} \, \delta_{eb} \right] = \varepsilon_{fcd} \; \varepsilon_{abg} \; \varepsilon_{gef} \qquad (\text{d'après II-4})$$

$$= \varepsilon_{abg} \left[\delta_{gc} \, \delta_{ed} - \delta_{gd} \, \delta_{ec} \right] \qquad (\text{II}-39)$$

(en contractant le 1er et le 3e ε au lieu du 2ème et du 3ème)

d'où l'on tire :

$$\mathcal{J}_a = \varepsilon_0 (2\pi)^3 \int \frac{d^3k}{\omega^2} \left[\dot{\mathcal{E}}_d^* \, \varepsilon_{abc} \, k_c (\partial_b \, \mathcal{E}_d) - \dot{\mathcal{E}}_d^* \, \varepsilon_{abd} \, k_c (\partial_b \, \mathcal{E}_c) \right] \qquad (\text{II}-40)$$

$$\varepsilon_{abc} \, k_c \, \partial_b = - \varepsilon_{acb} \, k_c \, \partial_b = - \varepsilon_{abc} \, k_b \, \partial_c \qquad (\text{II}-41)$$

$$- \dot{\mathcal{E}}_d^* \, \varepsilon_{abd} \, k_c (\partial_b \, \mathcal{E}_c) = - \dot{\mathcal{E}}_d^* \, \varepsilon_{abd} \, \partial_b \underbrace{(k_c \, \mathcal{E}_c)}_{=0 \ (\mathcal{E} \text{ transversal})} + \dot{\mathcal{E}}_d^* \, \varepsilon_{abd} \, \mathcal{E}_c \underbrace{(\partial_b \, k_c)}_{=\delta_{bc}}$$

$$= \dot{\mathcal{E}}_d^* \, \varepsilon_{acd} \, \mathcal{E}_c = \dot{\mathcal{E}}_b^* \, \varepsilon_{acb} \, \mathcal{E}_c = - \dot{\mathcal{E}}_b^* \, \varepsilon_{abc} \, \mathcal{E}_c \qquad (\text{II}-42)$$

- Finalement, en portant (II-41) et (II-42) dans (II-40) :

$$\mathcal{J}_a = - \varepsilon_0 \, (2\pi)^3 \int \frac{d^3k}{\omega^2} \left[\dot{\mathcal{E}}_d^* \, \varepsilon_{abc} \, k_b (\partial_c \, \mathcal{E}_d) + \dot{\mathcal{E}}_b^* \, \varepsilon_{abc} \, \mathcal{E}_c \right] \qquad (\text{II}-43)$$

ce qui commence à ressembler à (II-30)

Calcul en fonction de $\vec{\alpha}(\vec{k})$

D'après les expressions I-11, I-12, I-23 de $\vec{E}$, $\dot{\vec{E}}$, $N(k)$, il vient :

$$\mathcal{J}_a = -i\frac{\hbar}{2}\int d^3k \left\{ \left[\alpha_d^*(\vec{k}) - \alpha_d(-\vec{k})\right] \varepsilon_{abc}\, k_b\, \partial_c \left[\alpha_d(\vec{k}) + \alpha_d^*(-\vec{k})\right] + \right.$$

$$\left. \left[\alpha_b^*(\vec{k}) - \alpha_b(-\vec{k})\right] \varepsilon_{abc} \left[\alpha_c(\vec{k}) + \alpha_c^*(-\vec{k})\right] \right\} \qquad (\text{II-44})$$

I, II, III, IV, I', II', III', IV'

- Termes faisant intervenir 2 $\vec{k}$ avec le même signe (I, II, I', II')

  I et II sont égaux (Pour le voir, on change, dans II, $\vec{k}$ en $-\vec{k}$, et on intègre par parties en utilisant le fait que, par suite de ε_{abc}, $b \neq c$, de sorte que $k_b \partial_c = \partial_c k_b$).

  I' et II' sont égaux (changement de $\vec{k}$ en $-\vec{k}$ dans II', changement $b \to c$, $c \to b$ et utilisation de $\varepsilon_{acb} = -\varepsilon_{abc}$).

- Termes faisant intervenir 2 $\vec{k}$ avec des signes opposés (III, IV, III', IV'). Tous ces termes sont nuls.

  On montre en effet que chacun d'eux est égal à son opposé
  pour III et IV, en changeant $\vec{k}$ en $-\vec{k}$ et en faisant une intégration par partie
  pour III' et IV', en changeant $\vec{k} \to -\vec{k}$, $b \to c$, $c \to b$.

Finalement.

$$\mathcal{J}_a = \frac{\hbar}{i}\int d^3k \left[\alpha_d^*\, \varepsilon_{abc}\, k_b(\partial_c\, \alpha_d) + \alpha_b^*\, \varepsilon_{abc}\, \alpha_c\right] \qquad (\text{II-45})$$

La composante $\mathcal{J}_a$ du moment cinétique du champ électromagnétique classique apparait donc bien comme la valeur moyenne de l'opérateur $L_a + S_a$ dans la fonction d'onde $\vec{\alpha}(k)$ introduite au § 2.

c - $\vec{L}$ et $\vec{S}$ ne sont pas physiques alors que $\vec{J}$ l'est.

- Argument mathématique.

  La condition (I-13) de transversalité $\vec{k}\cdot\vec{\alpha}(\vec{k}) = 0$ entraine que l'espace des fonctions d'ondes du photon est un sous-espace de l'espace des champs vectoriels, le sous espace des champs transverses. Or ce sous-espace n'est pas stable sous l'action de $\vec{S}$ ou de $\vec{L}$, alors qu'il l'est sous l'action de $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$.

  Pour le voir, revenons à la figure de la page II-2. $\vec{S}$ fait tourner le vecteur $\vec{e}_b$ sans faire tourner le point d'application, ce qui détruit la perpendicularité entre $\vec{k}$ et $\vec{e}_b$ en général. De même, $\vec{L}$ fait tourner le point d'application en gardant $\vec{e}_b$ parallèle à lui même. $\vec{J}$ par contre fait tourner simultanément $\vec{k}$ et $\vec{e}_b$ et conserve les angles.

  Seul $\vec{J}$ est donc observable. Il est commode cependant d'introduire les états propres de $\vec{L}$ et $\vec{S}$ pour construire à partir d'eux les états propres (transverses) de $\vec{J}$. $\vec{L}$ et $\vec{S}$ sont des intermédiaires de calcul commodes.

- Argument physique

  Le spin d'une particule est son moment cinétique dans le référentiel où elle est au repos. Un tel référentiel n'existe pas pour le photon qui se propage à la vitesse c.

6 - Fonctions d'onde correspondant à un photon de moment cinétique et de parité bien définis

But de ce § Etablir dans l'espace des $\vec{k}$ l'expression des fonctions d'onde d'un photon correspondant à des valeurs propres bien définies de $\vec{J}^2$, J_3, Π (où $\vec{J}$ est le moment cinétique total, Π l'opérateur parité).

Pour cela, commencer par étudier le cas d'une particule quelconque de spin 1 et introduire les "harmoniques sphériques vectorielles" (h.s.v.)

Puis introduire la condition de transversalité, et construire des fonctions propres de $\vec{J}^2$, J_3, Π qui soient de plus transversales.

ⓐ - Moment cinétique total $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ d'une particule de spin 1.

(i) Valeurs propres de $\vec{J}^2$ et J_3 $\quad J(J+1)\hbar^2 \quad M\hbar$

Comme l entier et $s=1$, J entier : $J = 0, 1, 2, 3 \dots \quad M = -J, -J+1, \dots +J$

(ii) Vecteurs propres communs à $\vec{L}^2$, $\vec{J}^2$, J_3.

$$|l\,1\,J\,M\rangle = \sum_{m,\mu} \langle l\,1\,m\,\mu\,|\,J\,M\rangle\, |l\,m\rangle\,|1\,\mu\rangle \qquad \begin{cases} J = l-1,\ l,\ l+1 & \text{si } l \neq 0 \\ J = 1 & \text{si } l = 0 \\ M = m+\mu \end{cases} \qquad (\text{III}-1)$$

(iii) Valeur des coefficients de Clebsch-Gordan $\langle l\,1\,m\,\mu\,|\,J\,M\rangle$

$\langle l\,1\,m\,\mu\,|\,J\,M\rangle =$ (III-2)

μ \ J	$l+1$	l	$l-1$
-1	$\sqrt{\frac{(l-M)(l-M+1)}{(2l+1)(2l+2)}}$	$\sqrt{\frac{(l+M+1)(l-M)}{2l(l+1)}}$	$\sqrt{\frac{(l+M)(l+M+1)}{2l(2l+1)}}$
0	$\sqrt{\frac{(l+M+1)(l-M+1)}{(2l+1)(l+1)}}$	$\frac{M}{\sqrt{l(l+1)}}$	$-\sqrt{\frac{(l+M)(l-M)}{l(2l+1)}}$
$+1$	$\sqrt{\frac{(l+M)(l+M+1)}{(2l+1)(2l+2)}}$	$-\sqrt{\frac{(l+M)(l-M+1)}{2l(l+1)}}$	$\sqrt{\frac{(l-M)(l-M+1)}{2l(2l+1)}}$

ⓑ - Fonctions propres communes à $\vec{L}^2, \vec{J}^2, J_3$: Harmoniques sphériques vectorielles

(i) Fonction d'onde associée à $|l\,m\rangle$ dans l'espace des $\vec{k}$.

$\vec{L}$ n'agit que sur les angles polaires de $\vec{k}$ et non sur $k = |\vec{k}|$

$$\vec{n} = \frac{\vec{k}}{k} \qquad \langle \vec{n}\,|\,l\,m\rangle = Y_l^m(\vec{n}) = Y_l^m(\theta,\varphi) \qquad (\text{III}-3)$$

$Y_l^m(\vec{n})$: harmonique sphérique $l\,m$ (Base orthonormée pour les fonctions scalaires définies sur la sphère de rayon 1 dans l'espace des $\vec{k}$)

(ii) Composantes de $|\mu\rangle$ dans la base $\{|a\rangle\}$ introduite au § 5a.

$$\begin{cases} |+1\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}}(|x\rangle + i|y\rangle) \\ |0\rangle = |3\rangle \\ |-1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|x\rangle - i|y\rangle) \end{cases} \quad (\text{III}-4-a) \qquad \begin{cases} \vec{e}_+ = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_x + i\,\vec{e}_y) \\ \vec{e}_0 = \vec{e}_3 \\ \vec{e}_- = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_x - i\,\vec{e}_y) \end{cases} \quad (\text{III}-4-b)$$

Les composantes de $|\mu\rangle$ sur la base $\{|x\rangle, |y\rangle, |3\rangle\}$ sont les mêmes que celles du vecteur $\vec{e}_\mu$ dans le trièdre $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_3)$

$$\langle a\,|\,\mu\rangle = (\vec{e}_\mu)_a \qquad (\text{III}-5)$$

$$\langle \nu | \mu \rangle = \sum_a \langle \nu | a \rangle \langle a | \mu \rangle = \sum_a (\vec{e}_\nu^{\,*})_a (\vec{e}_\mu)_a = \vec{e}_\nu^{\,*} \cdot \vec{e}_\mu \qquad (\text{III-6})$$

(iii) Harmoniques sphériques vectorielles

- Fonction d'onde associée à $|l\,1\,m\,\mu\rangle$ dans la base $|\vec{n}, a\rangle$

$$\langle \vec{n}\, a | l\,1\,m\,\mu \rangle = \langle \vec{n} | l\,m \rangle \langle a | \mu \rangle = Y_l^m(\vec{n}) (\vec{e}_\mu)_a \qquad (\text{III-7})$$

Donc à $|l\,1\,m\,\mu\rangle$ est associé $Y_l^m(\vec{n})\, \vec{e}_\mu$

- Fonction d'onde associée à $|l\,1\,J\,M\rangle$ dans la base $|\vec{n}, a\rangle$

D'après (III,1) et (III,7)

à $|l\,1\,J\,M\rangle$ est associé $\sum_{m,\mu} \langle l\,1\,m\,\mu | J\,M \rangle\, Y_l^m(\vec{n})\, \vec{e}_\mu$

La fonction d'onde associée à $|l\,1\,J\,M\rangle$ est donc un champ de vecteurs définis sur la sphère de rayon 1 dans l'espace des $\vec{k}$ (1 vecteur en chaque point de cette sphère). On l'appelle "harmonique sphérique vectorielle" et on la désigne par $\vec{Y}^M_{Jl1}(\vec{n})$

$$\boxed{\vec{Y}^M_{Jl1}(\vec{n}) = \sum_m \sum_\mu \langle l\,1\,m\,\mu | J\,M \rangle\, Y_l^m(\vec{n})\, \vec{e}_\mu} \qquad (\text{III-8})$$

(Notations de Blatt-Weisskopf - D'autres auteurs comme Akhiezer et Berestetskii ou Edmonds utilisent la notation plus condensée : $\vec{Y}_{JlM}(\vec{n})$)

(iv) Relation d'orthonormalisation

De $\langle l'\,1\,J'\,M' | l\,1\,J\,M \rangle = \delta_{ll'}\, \delta_{JJ'}\, \delta_{MM'}$, on déduit grâce à (III-6) :

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta\ \vec{Y}^{M'\,*}_{J'l'1}(\theta,\varphi) \cdot \vec{Y}^M_{Jl1}(\theta,\varphi) = \delta_{ll'}\, \delta_{JJ'}\, \delta_{MM'} \qquad (\text{III-9})$$

les h.s.v. forment par ailleurs une <u>base</u> pour les champs vectoriels définis sur la sphère de rayon 1.

(v) Parité

Π : opérateur de reflexion par rapport à l'origine

$$\Pi\, \vec{Y}^M_{Jl1}(\vec{n}) = -\, \vec{Y}^M_{Jl1}(-\vec{n}) \qquad (\text{III-10})$$

ce signe - apparait car on considère un champ vectoriel et non pseudovectoriel (La fonction d'onde $\vec{\alpha}$ apparait dans le développement du champ électrique $\vec{E}$ qui est polaire)

Comme
$$Y_l^m(-\vec{n}) = (-1)^l\, Y_l^m(\vec{n}) \qquad (\text{III-11})$$

on a
$$\Pi\, \vec{Y}^M_{Jl1}(\vec{n}) = (-1)^{l+1}\, \vec{Y}^M_{Jl1}(\vec{n}) \qquad (\text{III-12})$$

$$\boxed{\text{Parité de } \vec{Y}^M_{Jl1} \ :\ (-1)^{l+1}} \qquad (\text{III-13})$$

Finalement,

Pour J donné, différent de 0, il y a

1 h.s.v. de parité $(-1)^{J+1}$: $\vec{Y}^M_{JJ1}$

2 h.s.v. de parité $(-1)^J$: $\vec{Y}^M_{J,J+1,1}$ et $\vec{Y}^M_{J,J-1,1}$

Pour $J=0$, on a

1 h.s.v. paire $\vec{Y}^0_{011}$

(vi) Fonctions propres correspondant à une énergie et un moment cinétique bien définis.

Simples à écrire quand l'energie ne dépend que de k (comme c'est le cas pour le photon pour qui $E = \hbar c k$)

$$\vec{\varphi}_{E_0,\ell,J,M}(\vec{k}) = \underbrace{\frac{1}{k_0}\delta(k-k_0)}_{\text{Partie radiale}} \underbrace{\vec{Y}^{M}_{J\ell 1}(\theta,\varphi)}_{\text{Partie angulaire et de spin}} \qquad (\text{III}-14)$$

$$\int \underset{k^2 dk\, d\Omega}{\underset{\uparrow}{d^3k}} \; \vec{\varphi}^{\,*}_{E'_0,\ell',J',M'}(\vec{k}) \cdot \vec{\varphi}_{E_0,\ell,J,M}(\vec{k}) = \delta(k_0-k'_0)\,\delta_{JJ'}\,\delta_{\ell\ell'}\,\delta_{MM'} \qquad (\text{III}-15)$$

(C) Une autre méthode pour obtenir des fonctions propres du moment cinétique total

Pourquoi une autre méthode ? Parce que la précédente n'est pas bien adaptée au problème de la transversalité. Plutot que de chercher des fonctions propre de $\vec{J}^2$ et de J_3 qui soient de plus fonctions propres de $\vec{L}^2$, nous allons leur imposer d'être transversales. La méthode exposée dans ce § C permet d'imposer très simplement cette condition.

(i) Construction d'une fonction d'onde vectorielle à partir d'une fonction d'onde scalaire et d'un opérateur vectoriel $\vec{V}$ définis dans l'espace des $\vec{k}$.

- $\chi(\vec{n})$: fonction d'onde scalaire définie sur la sphère de rayon 1 dans l'espace des $\vec{k}$
- $\{V_x, V_y, V_3\}$: opérateur vectoriel agissant dans l'espace des $\vec{k}$.

Comment exprimer que c'est un opérateur vectoriel ? Relations de commutation bien définies avec $\vec{L}$ (on peut prendre $\vec{L}$ et non $\vec{J}$ car $\vec{V}$ n'agit pas sur les variables de spin) : $[L_x, V_y] = i\hbar V_3$ ....

$$[L_a, V_b] = i\hbar \sum_c \varepsilon_{abc} V_c \qquad (\text{III}-16)$$

- A partir de $\{V_a\}$ et $\chi(\vec{n})$ on introduit la fonction d'onde vectorielle :

$$\vec{V}\chi(\vec{n}) = \sum_a V_a\,\chi(\vec{n})\,\vec{e}_a \qquad (\text{III}-17)$$

Les 3 composantes du vecteur appliqué au point $\vec{n}$ sont $V_x\chi(\vec{n}), V_y\chi(\vec{n}), V_3\chi(\vec{n})$

- Ket correspondant à la fonction d'onde (III-17)

$$|\vec{V}\chi\rangle = \sum_a |V_a\chi\rangle \otimes |a\rangle \qquad (\text{III}-18)$$

(ii) Action de $\vec{J}$ sur la fonction d'onde précédente

$$J_a|\vec{V}\chi\rangle = (L_a + S_a)\sum_b |V_b\chi\rangle\otimes|b\rangle = \sum_b |L_a V_b\chi\rangle\otimes|b\rangle + \sum_b |V_b\chi\rangle\otimes S_a|b\rangle \qquad (\text{III}-18)$$

- D'après (III-16),

$$\sum_b |L_a V_b\chi\rangle\otimes|b\rangle = \sum_b |V_b L_a\chi\rangle\otimes|b\rangle + \sum_{b,c} i\hbar\,\varepsilon_{abc}|V_c\chi\rangle\otimes|b\rangle$$

$$= \sum_b |V_b L_a\chi\rangle\otimes|b\rangle - \sum_{bc} i\hbar\,\varepsilon_{abc}|V_b\chi\rangle\otimes|c\rangle \qquad (\text{III}-19)$$

(Pour le 2$^{\text{me}}$ terme, on a changé dans la sommation $b\to c$, $c\to b$ et utilisé $\varepsilon_{acb} = -\varepsilon_{abc}$)

- D'après (II, 12), § 5

$$\sum_b |V_b\chi\rangle\otimes S_a|b\rangle = \sum_{bc} i\hbar\,\varepsilon_{abc}|V_b\chi\rangle\otimes|c\rangle \qquad (\text{III}-20)$$

– En portant (III-20) et (III-19) dans (III-18), il vient :

$$J_a |\vec{V}\chi> = \sum_b |V_b L_a \chi> \otimes |b> = |\vec{V} L_a \chi> \qquad \text{(III-21)}$$

(iii) Théorème

$|\vec{V} Y_\ell^m>$ est, quel que soit $\vec{V}$, ket propre de $\vec{J}^2$ et J_z avec les valeurs propres $\ell(\ell+1)\hbar^2$ et $m\hbar$.

Démonstration

– Remplaçons dans (III-21) χ par Y_ℓ^m

$$J_z |\vec{V} Y_\ell^m> = |\vec{V} L_z Y_\ell^m> = |\vec{V} m\hbar Y_\ell^m> = m\hbar |\vec{V} Y_\ell^m> \qquad \text{(III-22)}$$

$|\vec{V} Y_\ell^m>$ est donc bien ket propre de J_z avec la valeur propre $m\hbar$

– En utilisant 2 fois (III-21), il vient

$$J_a^2 |\vec{V}\chi> = J_a J_a |\vec{V}\chi> = J_a |\vec{V} L_a\chi> = |\vec{V} L_a^2 \chi> \qquad \text{(III-23)}$$

– Remplaçons dans (III-23) χ par Y_ℓ^m et sommons sur a

$$\vec{J}^2 |\vec{V} Y_\ell^m> = |\vec{V} \vec{L}^2 Y_\ell^m> = \ell(\ell+1)\hbar^2 |\vec{V} Y_\ell^m> \qquad \text{(III-24)}$$

$|\vec{V} Y_\ell^m>$ est donc également ket propre de $\vec{J}^2$ avec la valeur propre $\ell(\ell+1)\hbar^2$

Il suffit maintenant de choisir convenablement $\vec{V}$ pour que la fonction d'onde associée à $|\vec{V} Y_\ell^m>$ soit longitudinale ou transversale.

(d) Fonctions propres longitudinales et transversales de $\vec{J}^2$ et J_z.

(i) Premier choix de $\vec{V}$: opérateur multiplication par $\vec{n}$

– Composantes cartésiennes de $\vec{n}$: $\sin\theta\cos\varphi$, $\sin\theta\sin\varphi$, $\cos\theta$

$$\vec{n}\, Y_\ell^m(\vec{n}) = \cos\theta\, Y_\ell^m\, \vec{e}_z + \sin\theta\cos\varphi\, Y_\ell^m \vec{e}_x + \sin\theta\sin\varphi\, Y_\ell^m \vec{e}_z \qquad \text{(III-25)}$$

– Caractère longitudinal

Evident : le vecteur appliqué au point $\vec{n}$ est parallèle à $\vec{n}$

– Parité

Parité de $\cos\theta\, Y_\ell^m$, $\sin\theta\cos\varphi\, Y_\ell^m$, $\sin\theta\sin\varphi\, Y_\ell^m$: $(-1)^{\ell+1}$

Parité de $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$: -1

Parité de $\vec{n}\, Y_\ell^m$: $(-1)^\ell$

On en déduit d'après (III-13) que :

– $\vec{n}\, Y_\ell^m$ est une combinaison linéaire de $\vec{Y}^m_{\ell,\ell+1,1}$ et $\vec{Y}^m_{\ell,\ell-1,m}$. Si l'on pose

on a : $\boxed{\vec{n}\, Y_\ell^m = \vec{N}_\ell^m}$ (III-26)

$$\vec{N}_\ell^m = a\, \vec{Y}^m_{\ell,\ell+1,1} + b\, \vec{Y}^m_{\ell,\ell-1,1} \qquad \text{(III-27)}$$

Pour déterminer a et b, on écrit que les 2 membres de III-27 ont même projection sur un axe, Oz par exemple. Si l'on prend m = 0 pour simplifier et que l'on utilise (III,8) et (III-25), il vient :

$$\cos\theta\, Y_\ell^0 = a <\ell+1,1,0,0|\ell\,0> Y_{\ell+1}^0 + b <\ell-1,1,0,0|\ell\,0> Y_{\ell-1}^0 \qquad \text{(III-28)}$$

Or on a

$$\cos\theta\, Y_\ell^0 = \frac{\ell+1}{\sqrt{(2\ell+1)(2\ell+3)}} Y_{\ell+1}^0 + \frac{\ell}{\sqrt{(2\ell-1)(2\ell+1)}} Y_{\ell-1}^0 \qquad \text{(III-29)}$$

Par ailleurs, d'après (III-2)

$$<\ell+1,1,0,0|\ell,0> = -\frac{\ell+1}{\sqrt{(\ell+1)(2\ell+3)}} \qquad <\ell-1,1,0,0|\ell,0> = \frac{\ell}{\sqrt{\ell(2\ell-1)}} \qquad \text{(III-30)}$$

de sorte que

$$a = -\sqrt{\frac{\ell+1}{2\ell+1}} \qquad b = \sqrt{\frac{\ell}{2\ell+1}} \qquad \text{(III-31)}$$

Finalement
$$\boxed{\vec{N}_\ell^m = -\sqrt{\frac{\ell+1}{2\ell+1}}\ \vec{Y}^m_{\ell,\ell+1,1} + \sqrt{\frac{\ell}{2\ell+1}}\ \vec{Y}^m_{\ell,\ell-1,1} = \vec{n}\, Y_\ell^m} \qquad (\text{III}-32)$$

$\vec{N}_\ell^m$ est visiblement normée. Longitudinale. Parité $(-1)^\ell$

(ii) Deuxième choix de $\vec{V}$: opérateur $\vec{L}$

- $$\vec{L}\, Y_\ell^m = (L_x Y_\ell^m)\,\vec{e}_x + (L_y Y_\ell^m)\,\vec{e}_y + (L_z Y_\ell^m)\,\vec{e}_z \qquad (\text{III}-33)$$
- Caractère transversal
  $\frac{\hbar}{i}\vec{k}\times\vec{\nabla} Y_\ell^m$ est visiblement perpendiculaire à $\vec{k}$.
- Parité $\quad L_{x,y,z} Y_\ell^m : (-1)^\ell \qquad \vec{e}_{x,y,z} : -1$
  Donc parité de $\vec{L}\,Y_\ell^m$: $(-1)^{\ell+1}$
  On en déduit d'après (III-13) que :
- $\vec{L}\,Y_\ell^m$ est proportionnel à $\vec{Y}^m_{\ell\ell 1}$ (évident également puisque $\vec{L}\,Y_\ell^m$ est vecteur propre de $\vec{L}^2$)
  $$\vec{L}\,Y_\ell^m = c\ \vec{Y}^m_{\ell\ell 1} \qquad (\text{III}-34)$$
  Pour déterminer c, on égale les projections sur Oz de (III-34) :
  $$m\hbar\, Y_\ell^m = c\ \langle \ell 1 m 0 | \ell m\rangle\, Y_\ell^m \qquad (\text{III}-35)$$
  D'après (III, 2) : $\langle \ell 1 m 0 | \ell m\rangle = \frac{m}{\sqrt{\ell(\ell+1)}}$ de sorte que
  $$c = \hbar\sqrt{\ell(\ell+1)} \qquad (\text{III}-36)$$
- Finalement, nous poserons :
  $$\boxed{\vec{X}_\ell^m = \vec{Y}^m_{\ell,\ell,1} = \frac{\vec{L}\,Y_\ell^m}{\hbar\sqrt{\ell(\ell+1)}}} \qquad (\text{III}-37)$$
  $\vec{X}_\ell^m$ est normée, transversale, de parité $(-1)^{\ell+1}$

(iii) Troisième choix de $\vec{V}$: opérateur gradient$/\vec{k}$ ou plus exactement $k\vec{\nabla}$

- $$k\vec{\nabla} Y_\ell^m = k\frac{\partial}{\partial k_x} Y_\ell^m\,\vec{e}_x + k\frac{\partial}{\partial k_y} Y_\ell^m\,\vec{e}_y + k\frac{\partial}{\partial k_z} Y_\ell^m\,\vec{e}_z \qquad (\text{III}-38)$$
- Caractère transversal
  Pour le voir, il suffit de remarquer que la composante radiale de $k\vec{\nabla} Y_\ell^m = k\frac{\partial}{\partial k} Y_\ell^m$ est nulle puisque Y_ℓ^m ne dépend que des angles polaires θ et φ de $\vec{k}$ et non de son module.
- Parité $\quad k\frac{\partial}{\partial k_{x,y,z}} Y_\ell^m : (-1)^{\ell+1} \qquad \vec{e}_{x,y,z} : -1$
  Donc parité de $k\vec{\nabla} Y_\ell^m$: $(-1)^\ell$
  On en déduit d'après (III-13) que :
- $$k\vec{\nabla} Y_\ell^m = a'\,\vec{Y}^m_{\ell,\ell+1,1} + b'\,\vec{Y}^m_{\ell,\ell-1,1} \qquad (\text{III}-39)$$
  Pour déterminer a' et b' on égale les composantes sur Oz des 2 membres et on prend $m=0$
  $$k\frac{\partial}{\partial k_z} Y_\ell^0 = \cos\theta\ \underbrace{k\frac{\partial}{\partial k} Y_\ell^0}_{=0} - \sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} Y_\ell^0 \qquad (\text{III}-40)$$
  Donc :
  $$-\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} Y_\ell^0 = a'\langle \ell+1,1,0,0|\ell 0\rangle Y^0_{\ell+1} + b'\langle \ell-1,1,0,0|\ell,0\rangle Y^0_{\ell-1} \qquad (\text{III}-41)$$
  Or
  $$\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} Y_\ell^0 = \frac{\ell(\ell+1)}{\sqrt{(2\ell+1)(2\ell+3)}} Y^0_{\ell+1} - \frac{\ell(\ell-1)}{\sqrt{(2\ell-1)(2\ell+1)}} Y^0_{\ell-1} \qquad (\text{III}-42)$$
  Si l'on utilise (III-30), il vient :
  $$a' = \sqrt{\ell(\ell+1)}\sqrt{\frac{\ell}{2\ell+1}} \qquad b' = \sqrt{\ell(\ell+1)}\sqrt{\frac{\ell+1}{2\ell+1}} \qquad (\text{III}-43)$$

- Finalement nous poserons

$$\boxed{\vec{Z}_\ell^m = \sqrt{\frac{\ell}{2\ell+1}}\,\vec{Y}_{\ell,\ell+1,1}^m + \sqrt{\frac{\ell+1}{2\ell+1}}\,\vec{Y}_{\ell,\ell-1,1}^m = \frac{1}{\sqrt{\ell(\ell+1)}}\,k\vec{\nabla}Y_\ell^m} \qquad (\text{III}-44)$$

$\vec{Z}_\ell^m$ est normée, transversale, de parité $(-1)^\ell$

(iv) Relations entre $\vec{N}_\ell^m$, $\vec{X}_\ell^m$, $\vec{Z}_\ell^m$

- Ces 3 fonctions vectorielles sont orthogonales. Evident à partir de leurs définitions (III-32), (III-37), (III-44) et des relations d'orthonormalisation (III-9)

Par exemple
$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin\theta\, d\theta\ \vec{Z}_\ell^m(\theta,\varphi)^* \cdot \vec{X}_\ell^m(\theta,\varphi) = 0 \qquad (\text{III}-45)$$

- Calculons $\frac{\vec{k}}{k}\times\vec{X}_\ell^m = \vec{n}\times\vec{X}_\ell^m$. Comme $\vec{L} = \frac{\hbar}{i}\vec{k}\times\vec{\nabla}$, il vient d'après (III-37) :

$$\hbar\sqrt{\ell(\ell+1)}\ \vec{n}\times\vec{X}_\ell^m = \frac{\hbar}{i}\frac{\vec{k}}{k}\times(\vec{k}\times\vec{\nabla}Y_\ell^m) = \frac{\hbar}{i}\vec{k}\underbrace{\frac{\vec{k}\cdot\vec{\nabla}}{k}Y_\ell^m}_{=0 \text{ car } Y_\ell^m \text{ ne dépend pas de } k} - \frac{\hbar}{i}k\vec{\nabla}Y_\ell^m \qquad (\text{III}-46)$$

On en déduit d'après (III-44)

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{Z}_\ell^m &= -i\,\vec{n}\times\vec{X}_\ell^m\\ \vec{X}_\ell^m &= -i\,\vec{n}\times\vec{Z}_\ell^m\end{aligned}} \qquad (\text{III}-47)$$

En chaque point de la sphère de rayon 1, $\vec{Z}_\ell^m$ et $\vec{X}_\ell^m$ sont perpendiculaires entre eux et au rayon vecteur $\vec{n}$.

- Inversion des formules (III-32), (III-37), (III-44).

$$\boxed{\left\{\begin{aligned}\vec{Y}_{\ell,\ell,1}^m &= \vec{X}_\ell^m\\ \vec{Y}_{\ell,\ell+1,1}^m &= \sqrt{\frac{\ell}{2\ell+1}}\,\vec{Z}_\ell^m - \sqrt{\frac{\ell+1}{2\ell+1}}\,\vec{N}_\ell^m\\ \vec{Y}_{\ell,\ell-1,1}^m &= \sqrt{\frac{\ell+1}{2\ell+1}}\,\vec{Z}_\ell^m + \sqrt{\frac{\ell}{2\ell+1}}\,\vec{N}_\ell^m\end{aligned}\right.} \qquad (\text{III}-48)$$

- Remarque : cas particulier $\ell = m = 0$ $\qquad Y_0^0 = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$

Comme $\vec{\nabla}Y_0^0 = \vec{L}Y_0^0 = 0$, on déduit de (III-37) et (III-44) que

$$\vec{X}_0^0 = \vec{Z}_0^0 = 0 \qquad (\text{III}-49)$$

Dans le cas $\ell=m=0$, seule la fonction longitudinale $\vec{N}_0^0 = \frac{\vec{n}}{\sqrt{4\pi}}$ est non nulle (champ radial de symétrie sphérique)

(e) Conclusion.

- Dans le sous espace propre $\{J(J+1)\hbar^2, M\hbar\}$ de $\vec{J}^2$ et J_3, qui est de dimension 3, 2 bases orthonormées possibles :

$$\{\vec{Y}_{J,J,1}^M, \vec{Y}_{J,J+1,1}^M, \vec{Y}_{J,J-1,1}^M\} \qquad \text{ou} \qquad \{\vec{X}_J^M, \vec{Z}_J^M, \vec{N}_J^M\}$$

- Dans le cas du photon, la 2ème base est mieux adaptée. On élimine $\vec{N}_J^M$ à cause de la transversalité. $\vec{X}_J^M$ et $\vec{Z}_J^M$ se différencient par la parité.

Si l'on connait de plus l'énergie, la partie radiale de la fonction d'onde est determinée : $\delta(k-k_0)$. Donc pour un photon, un ensemble complet d'observables qui commutent est

Energie, $\vec{J}^2$, J_3, Parité

Remarque Le sous espace $J = M = 0$, ne contient d'après (III-49) aucune fonction transversale. Il n'y a donc pas de photon de moment cinétique nul.

22/1/74

7 - Ondes multipolaires

But de ce § Remplacer dans les formules donnant le développement de $\vec{E}(\vec{r},t)$ et $\vec{B}(\vec{r},t)$ en ondes planes progressives, $\vec{\alpha}(\vec{k},t)$ par l'expression obtenue plus haut pour la fonction d'onde d'un photon d'énergie, de moment cinétique et de parité bien définis.

Etudier dans l'espace des $\vec{r}$ la structure de l'onde $\vec{E},\vec{B}$ ainsi obtenue que l'on appelle onde multipolaire.

Etablir les formules qui permettent de passer des ondes planes aux ondes multipolaires.

(a) Regroupement des formules importantes.

(i) Développement de $\vec{E}(\vec{r},t)$ et $\vec{B}(\vec{r},t)$ (cf I-16, I-17, I-23)

$$\begin{cases} \vec{E}(\vec{r},t) = \sigma \int d^3k \sqrt{k}\ \vec{\alpha}(\vec{k})\, e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)} + c.c. = \vec{E}^{(+)}(\vec{r},t)+\vec{E}^{(-)}(\vec{r},t) & \text{(IV-1)} \\ \vec{B}(\vec{r},t) = \frac{\sigma}{c} \int d^3k \sqrt{k}\ \vec{n}\times\vec{\alpha}(\vec{k})\, e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)} + c.c. = \vec{B}^{(+)}(\vec{r},t)+\vec{B}^{(-)}(\vec{r},t) & \text{(IV-2)} \end{cases}$$

avec $$\sigma = \sqrt{\frac{\hbar c}{2\varepsilon_0(2\pi)^3}} \qquad \vec{n} = \frac{\vec{k}}{k} \qquad \omega = ck \qquad \text{(IV-3)}$$

Nous avons écrit $\vec{\alpha}(\vec{k})\, e^{-i\omega t}$ au lieu de $\vec{\alpha}(\vec{k},t)$, ce qui est possible grâce à (I-15).

(ii) Expression de $\vec{\alpha}(\vec{k})$ pour un photon d'impulsion $\hbar\vec{k}_0$ et de polarisation $\vec{e}$ données.

$$\vec{\alpha}_{\vec{e},\vec{k}_0}(\vec{k}) = \vec{e}\ \delta(\vec{k}-\vec{k}_0) \qquad \text{avec} \qquad \vec{e}.\vec{k}_0 = 0 \qquad \text{(IV-4)}$$

ce qui, reporté dans (IV-1,2) donne :

$$\begin{cases} \vec{E}(\vec{r},t) = \sigma\sqrt{k_0}\ \vec{e}\ e^{i(\vec{k}_0.\vec{r}-\omega_0 t)} + c.c. & \text{(IV-5)} \\ \vec{B}(\vec{r},t) = \frac{\sigma}{c}\sqrt{k_0}\ \vec{n}\times\vec{e}\ e^{i(\vec{k}_0.\vec{r}-\omega_0 t)} + c.c. & \text{(IV-6)} \end{cases}$$

Onde électromagnétique plane, de polarisation, de vecteur d'onde et de fréquence bien définis

(iii) Expression de $\vec{\alpha}(\vec{k})$ pour un photon d'énergie $\hbar c k_0$, de moment cinétique (J,M), de parité $(-1)^J$

Pour des raisons qui apparaîtront plus loin, un tel photon est dit de type "électrique". L'onde multipolaire associée est dite "multipolaire électrique".

$$\vec{\alpha}_{k_0,J,M,e}(\vec{k}) = \frac{1}{k_0}\,\delta(k-k_0)\,\vec{Z}_{JM}(\vec{n}) \qquad \text{(IV-7)}$$

Nous aurons aussi besoin pour (IV-2) de $\vec{n}\times\vec{\alpha}$. D'après (III-47), il vient :

$$\vec{n}\times\vec{\alpha}_{k_0,J,M,e}(\vec{k}) = \frac{i}{k_0}\,\delta(k-k_0)\,\vec{X}_{JM}(\vec{n}) \qquad \text{(IV-8)}$$

(iv) Expression de $\vec{\alpha}(\vec{k})$ pour un photon d'énergie $\hbar c k_0$, de moment cinétique (J,M), de parité $(-1)^{J+1}$

Photon de type "magnétique". Onde "multipolaire magnétique".

$$\vec{\alpha}_{k_0,J,M,m}(\vec{k}) = \frac{1}{k_0}\,\delta(k-k_0)\,\vec{X}_{JM}(\vec{n}) \qquad \text{(IV-9)}$$

$$\vec{n}\times\vec{\alpha}_{k_0,J,M,m}(\vec{k}) = \frac{i}{k_0}\,\delta(k-k_0)\,\vec{Z}_{JM}(\vec{n}) \qquad \text{(IV-10)}$$

ⓑ Calcul de quelques intégrales

(i) Développement de $e^{i\vec{k}.\vec{r}}$ en harmoniques sphériques

(voir par exemple livre de Mécanique Quantique – chapitre sur la diffusion par un potentiel central)

$$e^{i\vec{k}.\vec{r}} = 4\pi \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{+\ell} (i)^\ell j_\ell(kr)\, Y_\ell^{m*}(\vec{n})\, Y_\ell^m(\vec{\rho}) \qquad (IV-11)$$

avec $\vec{n} = \frac{\vec{k}}{k}$, $\vec{\rho} = \frac{\vec{r}}{r}$, j_ℓ fonction de Bessel sphérique d'ordre ℓ

$$j_\ell(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^\ell}{(2\ell+1)!!} \qquad j_\ell(x) \underset{x\to\infty}{\sim} \frac{1}{x}\sin\left(x - \ell\frac{\pi}{2}\right) \qquad (IV-12)$$

(ii) Calcul de $\int d\Omega_k\, e^{i\vec{k}\vec{r}}\, \vec{Y}^M_{J,\ell,1}(\vec{n})$

En utilisant (III-8) et (IV-11), cette intégrale s'écrit :

$$4\pi \sum_{\ell'=0}^{\infty} \sum_{m'=-\ell}^{m'=+\ell} \sum_m \sum_\mu (i)^{\ell'} j_{\ell'}(kr)\, Y_{\ell'}^{m'}(\vec{\rho}) \langle \ell\, 1\, m \mu | J M\rangle \vec{e}_\mu \underbrace{\int d\Omega_k\, Y_{\ell'}^{m'*}(\vec{n})\, Y_\ell^m(\vec{n})}_{\delta_{\ell\ell'}\delta_{mm'}}$$

d'où l'on tire

$$\int d\Omega_k\, e^{i\vec{k}\vec{r}}\, \vec{Y}^M_{J,\ell,1}(\vec{n}) = 4\pi (i)^\ell j_\ell(kr)\, \vec{Y}^M_{J,\ell,1}(\vec{\rho}) \qquad (IV-13)$$

On obtient alors à partir de (III-37), (III,44), (III,32) et (III-48)

$$\int d\Omega_k\, e^{i\vec{k}\vec{r}}\, \vec{X}_{JM}(\vec{n}) = 4\pi (i)^J j_J(kr)\, \vec{X}_{JM}(\vec{\rho}) \qquad (IV-14)$$

$$\int d\Omega_k\, e^{i\vec{k}\vec{r}}\, \vec{Z}_{JM}(\vec{n}) = 4\pi\left[(i)^{J+1} j_{J+1}(kr)\sqrt{\frac{J}{2J+1}}\, \vec{Y}^M_{J,J+1,1}(\vec{\rho}) + (i)^{J-1} j_{J-1}(kr)\sqrt{\frac{J+1}{2J+1}}\, \vec{Y}^M_{J,J-1,1}(\vec{\rho})\right]$$

$$= \frac{4\pi}{2J+1}(i)^{J-1}\left\{\left[(J+1)j_{J-1}(kr) - J j_{J+1}(kr)\right]\vec{Z}_{JM}(\vec{\rho}) + \sqrt{J(J+1)}\left[j_{J-1}(kr) + j_{J+1}(kr)\right]\vec{N}_{JM}(\vec{\rho})\right\} \qquad (IV-15)$$

$$\int d\Omega_k\, e^{i\vec{k}\vec{r}}\, \vec{N}_{JM}(\vec{n}) = 4\pi\left[-(i)^{J+1} j_{J+1}(kr)\sqrt{\frac{J+1}{2J+1}}\, \vec{Y}^M_{J,J+1,1}(\vec{\rho}) + (i)^{J-1} j_{J-1}(kr)\sqrt{\frac{J}{2J+1}}\, \vec{Y}^M_{J,J-1,1}(\vec{\rho})\right]$$

$$= \frac{4\pi}{2J+1}(i)^{J-1}\left\{\sqrt{J(J+1)}\left[j_{J-1}(kr) + j_{J+1}(kr)\right]\vec{Z}_{JM}(\vec{\rho}) + \left[J j_{J-1}(kr) - (J+1) j_{J+1}(kr)\right]\vec{N}_{JM}(\vec{\rho})\right\} \qquad (IV-16)$$

ⓒ Structure d'une onde multipolaire électrique JM.

(i) Calcul de $\vec{E}(\vec{r},t)$ et $\vec{B}(\vec{r},t)$.

Portons (IV-7) et (IV-8) dans (IV-1) et (IV-2) et utilisons (IV-14), (IV-15), On obtient

$$\vec{B}_{k_0,J,M,e}(\vec{r},t) = \underbrace{\frac{\sigma}{c} k_0^{3/2}\, 4\pi (i)^{J+1} j_J(k_0 r)\, \vec{X}_{JM}(\vec{\rho})\, e^{-i\omega_0 t}}_{\vec{B}^{(+)}_{k_0,J,M,e}} + \underbrace{c.c.}_{\vec{B}^{(-)}_{k_0,J,M,e}} \qquad (IV-17)$$

$$\vec{E}_{k_0,J,M,e}(\vec{r},t) = \underbrace{\sigma k_0^{3/2} \frac{4\pi}{2J+1}(i)^{J-1} \left\{\left[(J+1)j_{J-1}(k_0 r) - J j_{J+1}(k_0 r)\right]\vec{Z}_{JM}(\vec{\rho}) + \sqrt{J(J+1)}\left[j_{J-1}(k_0 r) + j_{J+1}(k_0 r)\right]\vec{N}_{JM}(\vec{\rho})\right\} e^{-i\omega_0 t}}_{\vec{E}^{(+)}_{k_0,J,M,e}} + c.c. \qquad (IV-18)$$

Remarque

La 4ème équation de Maxwell, $\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r},t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}(\vec{r},t)}{\partial t}$, s'écrit pour les composantes à fréquence positive (parties en $e^{-i\omega t}$) de $\vec{E}_{k_0 JMe}$ et $\vec{B}_{k_0 JMe}$:

$$\vec{E}^{(+)}_{k_0 JMe} = i \frac{c^2}{\omega_0} \vec{\nabla} \times \vec{B}^{(+)}_{k_0 JMe} \qquad (IV-19)$$

L'équation (IV-18) peut donc également s'écrire sous la forme :

$$\vec{E}^{(+)}_{k_0 JMe} = -\sigma \sqrt{k_0}\, 4\pi (i)^J \; e^{-i\omega_0 t} \; \vec{\nabla} \times j_J(k_0 r) \vec{X}_{JM}(\vec{\rho}) \qquad (IV-20)$$

(Voir par exemple Jackson). Bien qu'apparemment plus compliquée, la forme IV-18 est plus commode pour la discussion physique qui suit.

(ii) Discussion physique.

- $\vec{X}_{JM}(\vec{\rho})$ et $\vec{Z}_{JM}(\vec{\rho})$ sont perpendiculaires à $\vec{\rho}$ alors que $\vec{N}_{JM}(\vec{\rho})$ est parallèle à $\vec{\rho}$ (cf § 6).
  On voit alors sur (IV-17) que dans une onde multipolaire électrique $\vec{B}(\vec{r})$ est perpendiculaire à $\vec{r}$, alors que d'après (IV-18) le champ électrique $\vec{E}(\vec{r})$ n'est en général ni perpendiculaire ni parallèle à $\vec{r}$.
  (Attention, ne pas confondre avec le fait que $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont transverses, c-a-d que leur divergence est nulle, ou encore que dans l'espace de $\vec{k}$ les transformées de Fourier $\vec{\mathcal{E}}(\vec{k})$ et $\vec{\mathcal{B}}(\vec{k})$ sont perpendiculaires à $\vec{k}$).

- Il faut d'ailleurs que $\vec{E}$ et $\vec{B}$ ne soient pas tous 2 perpendiculaires à $\vec{r}$, sinon $\vec{E} \times \vec{B}$ serait $\parallel$ à $\vec{r}$ et le moment cinétique $\varepsilon_0 \int d^3r \; \vec{r} \times (\vec{E} \times \vec{B})$ serait nul.

- Pour $k_0 r \ll 1$, on a d'après (IV-12) :

$$j_{J-1}(k_0 r) \gg j_J(k_0 r) \gg j_{J+1}(k_0 r)$$

  Donc, le champ électrique qui contient $j_{J-1}(k_0 r)$ est beaucoup plus grand que le champ magnétique qui ne contient que $j_J(k_0 r)$.
  Un atome placé à l'origine, et dont les dimensions sont en général très petites devant la longueur d'onde $\frac{2\pi}{k_0}$, verra donc surtout un champ électrique lorsqu'on le fait interagir avec une onde multipolaire électrique.

- Pour $k_0 r \gg 1$, on voit d'après (IV-20) que le coefficient de $\vec{N}_{JM}(\vec{\rho})$ dans (IV-18) devient infiniment plus petit que celui de $\vec{Z}_{JM}(\vec{\rho})$. $\vec{E}$ devient alors parallèle à $\vec{Z}_{JM}(\vec{\rho})$ alors que $\vec{B}$ est parallèle à $\vec{X}_{JM}(\vec{\rho})$. Comme $\vec{X}_{JM}(\vec{\rho})$, $\vec{Z}_{JM}(\vec{\rho})$, $\vec{\rho}$ sont perpendiculaires 2 à 2, on retrouve la structure d'une onde plane dont le vecteur d'onde serait parallèle à $\vec{\rho}$.

d) Structure d'une onde multipolaire magnétique JM

En comparant (IV,9) et (IV,10) à (IV-8) et (IV,7), on déduit grâce à (IV,1) et (IV,2)

$$\vec{B}^{(+)}_{k_0 JMm} = \frac{i}{c} \vec{E}^{(+)}_{k_0 JMe} \qquad \vec{E}^{(+)}_{k_0 JMm} = -ic\, \vec{B}^{(+)}_{k_0 JMe} \qquad (IV-21)$$

La discussion et les résultats du § précédent se généralisent moyennant les substitutions précédentes. En particulier les rôles des champs électrique et magnétique sont échangés.

ⓔ Passage des ondes planes aux ondes multipolaires

(i) Produits scalaires et relations de fermeture

– Soient $|\vec{e},\vec{k}_0>$, $|k_0,J,M e>$, $|k_0,J,M,m>$ les kets correspondants aux fonctions d'onde (IV-4), (IV-7) et (IV-9). Les coefficients figurant dans ces 3 formules ont été choisis de manière que l'on ait les relations suivantes

$$\left\{\begin{array}{l} <\vec{e}'\vec{k}'_0|\vec{e}\,\vec{k}_0> = \vec{e}'^{*}\vec{e}\;\delta(\vec{k}'_0-\vec{k}_0) \\ \sum_{\vec{e}}\int d^3k_0\;|\vec{e}\,\vec{k}_0><\vec{e}\,\vec{k}_0| = 1 \end{array}\right. \qquad (IV-22)$$

$$\left\{\begin{array}{l} <k'_0 J'M'e|k_0 JMe> = <k'_0 J'M'm|k_0 JMm> = \delta(k_0-k'_0)\,\delta_{JJ'}\,\delta_{MM'} \\ <k'_0 J'M'e|k_0 JMm> = 0 \\ \sum_{J,M}\int dk_0\left[\,|k_0 JMe><k_0 JMe| + |k_0 JMm><k_0 JMm|\,\right] = 1 \end{array}\right. \qquad (IV-23)$$

Pour démontrer la formule précédente, il faut utiliser :

$$\delta(\vec{k}_0-\vec{k}'_0) = \frac{1}{k_0^2}\,\delta(k_0-k'_0)\,\frac{1}{\sin\theta_0}\,\delta(\theta_0-\theta'_0)\,\delta(\varphi_0-\varphi'_0) \qquad (IV-24)$$

$\{|\vec{e},\vec{k}_0>\}$ et $\{|k_0,J,M,e>, |k_0,J,M,m>\}$ forment donc 2 bases orthonormées dans l'espace des états (transverses).

– Pour passer d'une base à l'autre, on a besoin des produits scalaires :

$$<k'_0 JMe|\vec{e}\,\vec{k}_0> = \int d^3k\;\vec{\alpha}^{\,*}_{k'_0 JMe}(\vec{k})\cdot\vec{\alpha}_{\vec{e},\vec{k}_0}(\vec{k}) \qquad (IV-25)$$

En utilisant (IV-4) et (IV-7), on obtient :

$$<k'_0 JMe|\vec{e}\,\vec{k}_0> = \frac{1}{k_0}\,\delta(k_0-k'_0)\,\vec{Z}^{*}_{JM}\!\left(\frac{\vec{k}_0}{k_0}\right)\cdot\vec{e} \qquad (IV-26)$$

et de même

$$<k'_0 JMm|\vec{e}\,\vec{k}_0> = \frac{1}{k_0}\,\delta(k_0-k'_0)\,\vec{X}^{*}_{JM}\!\left(\frac{\vec{k}_0}{k_0}\right)\cdot\vec{e} \qquad (IV-27)$$

(ii) 1ère application : distribution angulaire du rayonnement émis dans une onde multipolaire.

– La probabilité pour qu'un photon multipolaire électrique JM soit trouvé avec son impulsion pointant dans la direction $\vec{k}_0/k_0$ et une polarisation $\vec{e}$ est proportionnelle à $|<\vec{e},\vec{k}_0|k'_0 JMe>|^2$, c-à-d d'après IV-26 à

$$\left|\vec{e}^{\,*}\cdot\vec{Z}_{JM}\!\left(\frac{\vec{k}_0}{k_0}\right)\right|^2 \qquad (IV-28)$$

Si l'on ne mesure pas la polarisation, il faut sommer cette probabilité sur 2 directions perpendiculaires de $\vec{e}$ dans le plan perpendiculaire à $\vec{k}_0$. Comme $\vec{Z}_{JM}\left(\frac{\vec{k}_0}{k_0}\right)$ est perpendiculaire à $\vec{k}_0$, on obtient tout simplement

$$\left|\vec{Z}_{JM}\!\left(\frac{\vec{k}_0}{k_0}\right)\right|^2 \qquad (IV-29)$$

– Le résultat correspondant pour un photon dipolaire magnétique serait

$$\left|\vec{X}_{JM}\!\left(\frac{\vec{k}_0}{k_0}\right)\right|^2 \qquad (IV-30)$$

– Comme d'après (III-47) $\vec{X}_{JM}\left(\frac{\vec{k}_0}{k_0}\right)$ et $\vec{Z}_{JM}\left(\frac{\vec{k}_0}{k_0}\right)$ ont même module, on en déduit qu'une étude du diagramme de rayonnement sans mesure de polarisation ne permet pas de distinguer une onde multipolaire magnétique de l'onde électrique correspondante.

— Comme d'après (III-44) Z_{JM} est proportionnel à $k\vec{\nabla}Y_J^M$ on déduit que

$$\left|\vec{Z}_{JM}\left(\frac{\vec{k}_0}{k_0}\right)\right|^2 \text{ est proportionnel à } \left|\frac{\partial Y_J^M(\theta,\varphi)}{\partial\theta}\right|^2 + \frac{1}{\sin^2\theta}\left|\frac{\partial Y_J^M(\theta\ \varphi)}{\partial\varphi}\right|^2$$

On en tire quantitativement la forme des diagramme de rayonnement. En particulier, on voit qu'il ne dépend pas de φ et qu'il est pair.

— Les mêmes résultats pourraient être obtenus à partir de l'étude de la forme asymptotique de (IV-18).

(iii) <u>2ème application : développement d'une onde plane polarisée en ondes multipolaires ou en harmoniques sphériques vectorielle.</u>

— D'après la relation de fermeture (IV-23), on peut écrire :

$$|\vec{e},\vec{k}_0\rangle = \sum_{JM}\int dk_0'\left[|k_0',J,M,e\rangle\langle k_0',J,M,e|\vec{e},\vec{k}_0\rangle + |k_0',J,M,m\rangle\langle k_0',J,M,m|\vec{e},\vec{k}_0\rangle\right] \quad (IV-31)$$

c-à-d en utilisant (IV-26), (IV-27) et en remplaçant les kets par les fonctions d'onde associées

$$\vec{e}\,\delta(\vec{k}-\vec{k}_0) = \frac{1}{k_0^2}\delta(k-k_0)\sum_{JM}\left[\left(\vec{Z}^*_{JM}\left(\frac{\vec{k}_0}{k_0}\right)\cdot\vec{e}\right)\vec{Z}_{JM}\left(\frac{\vec{k}}{k}\right) + \left(\vec{X}^*_{JM}\left(\frac{\vec{k}_0}{k_0}\right)\cdot\vec{e}\right)\vec{X}_{JM}\left(\frac{\vec{k}}{k}\right)\right] \quad (IV-32)$$

Comme $\vec{e}\cdot\vec{k}_0 = 0$, on a $\vec{N}^*_{JM}\left(\frac{\vec{k}_0}{k_0}\right)\cdot\vec{e} = 0$ ($\vec{N}$ est $/\!/$ à $\vec{k}_0$), et on peut rajouter à l'intérieur du crochet $\left(\vec{N}^*_{JM}\left(\frac{\vec{k}_0}{k_0}\right)\cdot\vec{e}\right)\vec{N}_{JM}\left(\frac{\vec{k}}{k}\right)$ qui est nul. Mais d'après (III-32) et (III-44), on a

$$\left(\vec{Z}^*_{JM}\left(\frac{\vec{k}_0}{k_0}\right)\cdot\vec{e}\right)\vec{Z}_{JM}\left(\frac{\vec{k}}{k}\right) + \left(\vec{N}^*_{JM}\left(\frac{\vec{k}_0}{k_0}\right)\cdot\vec{e}\right)\vec{N}_{JM}\left(\frac{\vec{k}}{k}\right) = \left(\vec{Y}^{M*}_{J,J+1,1}\left(\frac{\vec{k}_0}{k_0}\right)\cdot\vec{e}\right)\vec{Y}^M_{J,J+1,1}\left(\frac{\vec{k}}{k}\right) + \left(\vec{Y}^{M*}_{J,J-1,1}\left(\frac{\vec{k}_0}{k_0}\right)\cdot\vec{e}\right)\vec{Y}^M_{J,J-1,1}\left(\frac{\vec{k}}{k}\right) \quad (IV-33)$$

de sorte que finalement (IV-32) peut aussi s'écrire (en remarquant que $\vec{X}_{JM} = \vec{Y}^M_{J,J,1}$) :

$$\vec{e}\,\delta(\vec{k}-\vec{k}_0) = \frac{1}{k_0^2}\delta(k-k_0)\sum_{J\ell m}\left(\vec{Y}^{M*}_{J\ell 1}\left(\frac{\vec{k}_0}{k_0}\right)\cdot\vec{e}\right)\vec{Y}^M_{J\ell 1}\left(\frac{\vec{k}}{k}\right) \quad (IV-34)$$

(IV-34) est d'ailleurs valable même lorsque $\vec{e}\cdot\vec{k}_0 \neq 0$, car il faut alors bien rajouter ~~le terme en N~~ à l'intérieur du crochet de (IV-32) le terme en N qui n'est pas nul. (IV-32) par contre n'est valable que pour $\vec{e}\cdot\vec{k}_0 = 0$

— Multiplions les 2 membres de (IV-34) par $e^{i\vec{k}\vec{r}}$ et intégrons sur $\vec{k}$. Il vient grâce à (IV-13)

$$\vec{e}\,e^{i\vec{k}_0\cdot\vec{r}} = 4\pi\sum_{J\ell M}(i)^\ell j_\ell(k_0r)\left(\vec{Y}^{M*}_{J\ell 1}\left(\frac{\vec{k}_0}{k_0}\right)\cdot\vec{e}\right)\vec{Y}^M_{J\ell 1}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right) \quad (IV-35)$$

formule valable quelles que soient les directions relatives de $\vec{e}$ et $\vec{k}_0$ et qui constitue la généralisation vectorielle de (IV-11)

— Remplaçons dans (IV-1) $\vec{\alpha}(\vec{k})$ par l'un et l'autre des 2 membres de (IV-32). Il vient compte tenu des résultats du § C.

$$\sigma(k_0)^{3/2}e^{i(\vec{k}_0\vec{r}-\omega_0t)}\vec{e} = \sum_{JM}\left[\left(\vec{Z}^*_{JM}\left(\frac{\vec{k}_0}{k_0}\right)\cdot\vec{e}\right)\vec{E}^{(+)}_{k_0,J,M,e}(\vec{r},t) + \left(\vec{X}^*_{JM}\left(\frac{\vec{k}_0}{k_0}\right)\cdot\vec{e}\right)\vec{E}^{(+)}_{k_0,J,M,m}(\vec{r},t)\right] \quad (IV-36)$$

Développement de l'onde plane en ondes multipolaires (alors que IV-35 est un développement en harmoniques sphériques vectorielle).

– Calcul de $\vec{X}^*_{JM}\left(\frac{\vec{k}_0}{k_0}\right)\cdot\vec{e}$

Prenons l'axe des z le long de $\vec{k}_0$ (direction de propagation de l'onde plane). $\vec{e}$ coïncide alors forcément avec une polarisation circulaire droite ou gauche

$$\vec{e}_\pm = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_x \pm i\vec{e}_y) \qquad \text{(IV-37)}$$

ou n'importe quelle combinaison linéaire de $\vec{e}_+$ et $\vec{e}_-$. D'autre part $\frac{\vec{k}_0}{k_0}=\vec{e}_z$

Calculons $\vec{X}^*_{JM}(\vec{e}_z)\cdot\vec{e}_\pm$

D'après (III-37)

$$\hbar\sqrt{J(J+1)}\,\vec{X}_{JM}(\vec{e}_z) = \left(\vec{e}_x L_x + \vec{e}_y L_y + \vec{e}_z L_z\right) Y_J^M(\vec{e}_z) = \qquad \text{(IV-38)}$$

$$-\frac{\hbar}{\sqrt{2}}\vec{e}_+\sqrt{J(J+1)-M(M-1)}\,Y_J^{M-1}(\vec{e}_z) + \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\vec{e}_-\sqrt{J(J+1)-M(M+1)}\,Y_J^{M+1}(\vec{e}_z) + M\hbar\,\vec{e}_z\,Y_J^M(\vec{e}_z)$$

(on a utilisé $L_\pm = L_x \pm iL_y$ et l'action de $L_\pm, L_z$ sur Y_J^M)

Or $\quad Y_J^M(\vec{e}_z) = Y_J^M(\theta=\varphi=0) = \delta_{M,0}\sqrt{\frac{2J+1}{4\pi}} \qquad$ (IV-39)

On en tire $\quad \vec{X}_{JM}(\vec{e}_z) = \sqrt{\frac{2J+1}{4\pi}}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_+\delta_{M,1} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_-\delta_{M,-1}\right) \qquad$ (IV-40)

et par suite

$$\boxed{\vec{X}^*_{JM}(\vec{e}_z)\cdot\vec{e}_\pm = \mp\sqrt{\frac{2J+1}{8\pi}}\;\delta_{M,\pm1}} \qquad \text{(IV-41)}$$

– Calcul de $\vec{Z}^*_{JM}(\vec{e}_z)\cdot\vec{e}_\pm$

D'après (III-47), on a :

$$\vec{Z}^*_{JM}(\vec{e}_z)\cdot\vec{e}_\pm = i\left(\vec{e}_z\times\vec{X}^*_{JM}(\vec{e}_z)\right)\cdot\vec{e}_\pm = i\,\vec{X}^*_{JM}(\vec{e}_z)\cdot(\vec{e}_\pm\times\vec{e}_z) \qquad \text{(IV-42)}$$

Comme $\quad \vec{e}_\pm\times\vec{e}_z = \pm i\,\vec{e}_\pm \qquad$ (IV-43)

il vient

$$\boxed{\vec{Z}^*_{JM}(\vec{e}_z)\cdot\vec{e}_\pm = \sqrt{\frac{2J+1}{8\pi}}\;\delta_{M,\pm1}} \qquad \text{(IV-44)}$$

De (III-41) et (III-42), on déduit que si $\vec{e}=\vec{e}_+$ ($\vec{e}=\vec{e}_-$), dans le développement (IV-36) seules interviennent les valeurs $M=+1$ ($M=-1$). Donc,

– Conclusion physique :

Une onde plane de polarisation circulaire droite (gauche), se propageant le long de l'axe Oz correspond à des photons dont la projection du moment cinétique le long de Oz est bien définie et vaut $+\hbar$ ($-\hbar$). Par contre, le carré du moment cinétique $\vec{J}^2$ et la parité ne sont pas bien définies

– Remarque

D'après (IV-20) et (IV-21), on peut écrire

$$\left\{\begin{aligned} \vec{E}^{(+)}_{k_0JMm}(\vec{r},t) &= \sigma\,k_0^{3/2}\,4\pi\,(i)^J\,j(k_0r)\,\vec{X}_{JM}(\vec{\rho})\,e^{-i\omega_0t} \\ \vec{E}^{(+)}_{k_0JMe}(\vec{r},t) &= -\frac{1}{k_0}\sigma\,k_0^{3/2}\,4\pi\,(i)^J\,\vec{\nabla}\times j(k_0r)\,\vec{X}_{JM}(\vec{\rho})\,e^{-i\omega_0t}\end{aligned}\right. \qquad \text{(IV-45)}$$

En reportant (IV-45) dans (IV-36) avec $\vec{e}=\vec{e}_+$ et en utilisant (IV-41) et (IV-44) il vient après simplification par $\sigma k_0^{3/2}e^{-i\omega_0t}$:

$$\vec{e}_\pm\,e^{i\vec{k}_0\cdot\vec{r}} = \mp\sum_J (i)^J\sqrt{2\pi(2J+1)}\left[j_J(k_0r)\,\vec{X}_{J,\pm1}(\vec{\rho}) \pm \frac{1}{k_0}\vec{\nabla}\times j_J(k_0r)\,\vec{X}_{J,\pm1}(\vec{\rho})\right] \qquad \text{(IV-46)}$$

29/1/74

8 - Potentiels

But de ce §:

Introduire les potentiels vecteur et scalaire $\{\vec{A}(\vec{r},t), U(\vec{r},t)\}$ dont dérivent les champs $\{\vec{E}(\vec{r},t), \vec{B}(\vec{r},t)\}$ du rayonnement libre. Problème de la jauge.

Trouver un ensemble de potentiels vecteur et scalaire correspondant à divers types de photons définis par leur impulsion et leur polarisation, ou leur énergie leur moment cinétique et leur parité.

(a) Définitions

- Comme $\vec{\nabla}.\vec{B} = 0$, on peut trouver $\vec{A}(\vec{r},t)$ tel que :

$$\boxed{\vec{B}(\vec{r},t) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r},t)} \qquad (V-1)$$

- $\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}$ devient grâce à (V-1) : $\vec{\nabla}\times\left(\vec{E} + \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) = 0$. On peut alors trouver une fonction scalaire $U(\vec{r},t)$ telle que : $\vec{E} + \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = -\vec{\nabla}U$. Donc

$$\boxed{E(\vec{r},t) = -\frac{\partial\vec{A}(\vec{r},t)}{\partial t} - \vec{\nabla}U(\vec{r},t)} \qquad (V-2)$$

- Si l'on porte (V-1) et (V-2) dans les 2 autres équations de Maxwell, on obtient les équations du mouvement de $\vec{A}$ et U qui s'écrivent :

$$\left\{\begin{aligned} \left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{A} &= \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}.\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial U}{\partial t}\right) && (V-3)\\ \left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)U &= -\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\nabla}.\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial U}{\partial t}\right) && (V-4)\end{aligned}\right.$$

Remarque : En présence de sources, les équations de Maxwell $\vec{\nabla}.\vec{B} = 0$ et $\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ qui permettent d'écrire (V-1) et (V-2) demeurent inchangées, de sorte que (V-1) et (V-2) restent valables. Par contre, (V-3) et (V-4) changent.

- Intérêt des potentiels.
  - $\{\vec{A}, \frac{U}{c}\}$ sont les 4 composantes d'un quadrivecteur relativiste A^μ
  - Contracté avec le quadrivecteur courant J^μ $\{\vec{J}, c\rho\}$ A^μ donne le scalaire $A^\mu J_\mu = \vec{A}.\vec{J} - \rho U$ qui intervient dans le Lagrangien et l'hamiltonien du système global : champs + sources.
  - Ce sont les potentiels et non les champs qui apparaissent dans l'équation de Schrödinger.

(b) Jauges

- Un ensemble $\{\vec{A}, U\}$ définit une "jauge".
- Le même champ $\{\vec{E}, \vec{B}\}$ peut être décrit par plusieurs potentiels $\{\vec{A}, U\}$. Donc, existence de jauges équivalentes.
- Passage d'une jauge à une jauge équivalente : changement de jauge
- Formules de changement de jauge

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{A}' &= \vec{A} + \vec{\nabla}\chi(\vec{r},t) \\ U' &= U - \frac{\partial}{\partial t}\chi(\vec{r},t)\end{aligned}} \qquad (V-5)$$

où $\chi(\vec{r},t)$ fonction scalaire quelconque de $\vec{r}$ et t.

On peut aisément montrer les 2 points suivants :

(i) les 2 jauges $\{\vec{A}, U\}$ et $\{\vec{A}', U'\}$ reliées par (V-5) sont équivalentes

(ii) Etant données 2 jauges équivalentes, on peut tjs trouver une fonction $\chi(\vec{r},t)$ qui les relie comme en (V-5).

- Problème de l'invariance de jauge.

ⓒ Choix d'une première jauge pour décrire le rayonnement libre.

- Considérons les potentiels $\vec{A}$ et U donnés par les développements :

$$\begin{cases} \vec{A}(\vec{r},t) = -\sigma \int d^3k \ \dfrac{i\sqrt{k}}{\omega} \ \vec{\alpha}(\vec{k}) \ e^{i(\vec{k}.\vec{r}-\omega t)} + \text{c.c.} & \text{(V-6-a)} \\ U(\vec{r},t) = 0 & \text{(V-6-b)} \end{cases}$$

(Mêmes notations que dans le § 7-a-i)

- On vérifie aisément que les développements de $\vec{E}$ et $\vec{B}$ obtenus en appliquant les formule (V-2) et (V-1) à (V-6-a) et (V-6-b) coïncident avec le développement donnés plus haut (voir formules IV-1 et IV-2). Nous avons donc trouvé une première jauge possible.

- Comme $\vec{k}.\vec{\alpha}(\vec{k}) = 0$, cette jauge vérifie

$$\vec{\nabla}.\vec{A} = 0 \qquad \text{(V-7)}$$

on dit qu'elle est transversale. Comme $U = 0$, on peut dire aussi qu'elle satisfait à la "condition de Lorentz" :

$$\vec{\nabla}.\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial U}{\partial t} = 0 \qquad \text{(V-8)}$$

La condition de Lorentz permet de simplifier les équations du mouvement (V-3) et (V-4) qui deviennent :

$$\begin{cases} \left(\Delta - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{A} = 0 \\ \left(\Delta - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\right)U = 0 \end{cases} \qquad \text{(V-9)}$$

- On peut simplifier légèrement (V-6-a) en posant

$$\vec{a}(\vec{k}) = -i\,\vec{\alpha}(\vec{k}) \qquad \text{(V-10)}$$

(La fonction d'onde $\vec{\alpha}(\vec{k})$ du photon peut toujours être multipliée par un facteur de phase global sans conséquences physiques). (V-6-a) s'écrit alors

$$\begin{cases} \vec{A}(\vec{r},t) = \int d^3k \sqrt{\dfrac{\hbar}{2\varepsilon_0\,\omega\,(2\pi)^3}} \ \vec{a}(\vec{k}) \ e^{i(\vec{k}.\vec{r}-\omega t)} + \text{c.c.} \\ \vec{U}(\vec{r},t) = 0 \end{cases} \qquad \text{(V-11)}$$

(On a utilisé l'expression IV-3 de σ)

ⓓ Changements de jauge conservant pour $\vec{A}$ et U une structure de développement en ondes planes progressives de vitesse c

(i) Détermination de $\chi(\vec{r},t)$

A partir de la jauge (V-11) et d'une fonction $\chi(\vec{r},t)$ quelconque on peut, grâce aux formule (V-5), introduire une autre jauge $\{A', U'\}$. Si l'on veut conserver une structure de développement en ondes planes progressives de vitesse c, $\chi(\vec{r},t)$ ne peut pas être quelconque, et doit en fait avoir la même structure. Nous nous restreignons donc aux fonctions $\chi(\vec{r},t)$ de la forme :

$$\chi(\vec{r},t) = \int d^3k \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0\omega(2\pi)^3}}\ \chi(\vec{k})\, e^{i(\vec{k}.\vec{r}-\omega t)} + c.c. \qquad (V-12)$$

où $\chi(\vec{k})$ est quelconque. On a alors :

$$\begin{cases} \vec{A}'(\vec{r},t) = \int d^3k \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0\omega(2\pi)^3}}\ \left[\vec{a}(\vec{k}) + i\vec{k}\,\chi(\vec{k})\right] e^{i(\vec{k}.\vec{r}-\omega t)} + c.c. & (V-13-a) \\ U'(\vec{r},t) = \int d^3k \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0\omega(2\pi)^3}}\ \left[\, i\omega\,\chi(\vec{k})\right] e^{i(\vec{k}.\vec{r}-\omega t)} + c.c. & (V-13-b) \end{cases}$$

Le potentiel scalaire n'est plus nul, et le potentiel vecteur acquiert une partie longitudinale proportionnelle au potentiel scalaire.

Le quadrivecteur potentiel A^μ, $\begin{Bmatrix}\vec{A}\\ U/c\end{Bmatrix}$ est caractérisé dans l'espace des $\vec{k}$ par le quadrivecteur $\begin{Bmatrix}\vec{a}(\vec{k})\\ 0\end{Bmatrix}$. Dans l'espace des $\vec{k}$, le changement de jauge associé à (V-12) correspond donc à la transformation :

$$\begin{Bmatrix}\vec{a}(\vec{k})\\ 0\end{Bmatrix} \longrightarrow \begin{Bmatrix}\vec{a}(\vec{k}) + \vec{n}\,f(\vec{k})\\ f(\vec{k})\end{Bmatrix} \qquad (V-14)$$

avec $f(\vec{k}) = ik\,\chi(\vec{k})$, $\vec{n} = \frac{\vec{k}}{k}$

(ii) Ces changements de jauge conservent la condition de Lorentz.

- Comme $\omega = ck$, la fonction $\chi(\vec{r},t)$ définie en (V-12) satisfait

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\chi(\vec{r},t) = 0 \qquad (V-15)$$

Reciproquement tout $\chi(\vec{r},t)$ satisfaisant (V-15) peut être developpé comme en (V-12)

- De (V-5), on tire

$$\vec{\nabla}.A' + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 U'}{\partial t^2} = \vec{\nabla}.\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\chi(\vec{r},t) \qquad (V-16)$$

De (V-15) et (V-16), on tire que $\{\vec{A}', U'\}$, comme $\{\vec{A}, U\}$, satisfait à la condition de Lorentz

- Nous nous sommes donc limités en fait aux transformations de jauge conservant la condition de Lorentz.

e) Potentiels correspondant à divers types de photons.

(i) Photon d'impulsion $\hbar\vec{k}_0$ et de polarisation $\vec{e}$ données. ($\vec{e}.\vec{k}_0 = 0$)

- Quel que soit $f(\vec{k})$, le quadrivecteur

$$\begin{Bmatrix}\vec{e}\,\delta(\vec{k}-\vec{k}_0) + \vec{n}\,f(\vec{k})\\ f(\vec{k})\end{Bmatrix} \qquad (V-17)$$

décrit dans l'espace des $\vec{k}$ le quadrivecteur potentiel associé à un tel photon.

- Nous allons restreindre encore l'arbitraire sur $f(\vec{k})$ en demandant que les parties spatiale et temporelle de (V-17) demeurent des fonctions propres de l'operateur impulsion. On doit donc avoir

$$f(\vec{k}) = C\,\delta(\vec{k}-\vec{k}_0) \qquad (V-18)$$

où C est une constante arbitraire (qui contient tout l'arbitraire de jauge).

- Finalement le quadrivecteur qui décrit dans l'espace des $\vec{k}$ les potentiels associés à un photon $\hbar\vec{k}_0$, $\vec{e}$ s'écrit

$$\left\{ \begin{matrix} \vec{e} + C\vec{n} \\ C \end{matrix} \right\} \quad \delta(\vec{k}-\vec{k}_0) \qquad (V-19)$$

(ii) Photon multipolaire électrique JM, d'énergie $\hbar c k_0$.

- D'après (IV-17), il faut prendre pour caractériser les potentiels correspondants le quadrivecteur

$$\left\{ \begin{matrix} \frac{1}{k_0}\delta(k-k_0)\,\vec{Z}_{JM}(\vec{n}) \; + \; \vec{n} f(\vec{k}) \\ f(\vec{k}) \end{matrix} \right\} \qquad (V-20)$$

- Nous restreignons là encore l'arbitraire sur $f(\vec{k})$ en demandant que les parties spatiales et temporelles de (V-20) soient
  des fonctions propres de l'énergie de valeur propre $\hbar c k_0$
  " " " " $\vec{J}^2$ et J_z avec les valeurs propres $J(J+1)\hbar^2$ et $M\hbar$
  " " " de la parité avec la valeur propre $(-1)^J$

On voit alors que $f(\vec{k})$ doit être de la forme

$$f(\vec{k}) = C\frac{1}{k_0}\delta(k-k_0)\; Y_J^M(\vec{n}) \qquad (V-21)$$

où C est une constante arbitraire (Il faut remarquer que, la partie temporelle de V-20 étant scalaire, $\vec{J}$ se réduit pour elle à $\vec{L}$, et V-21 répond bien aux exigences posées plus haut en ce qui concerne cette partie scalaire ; si l'on se rappelle que $\vec{n}\,Y_J^M(\vec{n}) = \vec{N}_{JM}(\vec{n})$ a même parité que $\vec{Z}_{JM}(\vec{n})$ et mêmes nombres quantiques J et M, on voit qu'il en est de même pour la partie vectorielle de V-20).

- Finalement, le quadrivecteur qui décrit dans l'espace des $\vec{k}$ les potentiels associés à un photon k_0, J, M, e s'écrit

$$\frac{1}{k_0}\delta(k-k_0) \left\{ \begin{matrix} \vec{Z}_{JM}(\vec{n}) + C\,\vec{N}_{JM}(\vec{n}) \\ C\,Y_J^M(\vec{n}) \end{matrix} \right\} \qquad (V-22)$$

- L'arbitraire qui subsiste sur C peut être intéressant dans certaines applications.

En effet, lorsqu'on repasse dans l'espace des $\vec{r}$, en portant (V-22) dans (V-13), on voit sur les expressions IV-15 et IV-16 donnant les transformées de Fourier de $\vec{Z}_{JM}(\vec{n})$ et $\vec{N}_{JM}(\vec{n})$ que le potentiel vecteur contiendra des termes en $j_{J+1}(k_0r)$ et $j_{J-1}(k_0r)$ alors que le potentiel scalaire ne contiendra que des termes en $j_J(k_0r)$.

Considérons alors un atome placé à l'origine des coordonnées et interagissant avec un tel champ. Si l'on choisit C de manière que le coefficient de $j_{J-1}(k_0r)$ s'annule, c-a-d si $C = -\sqrt{\frac{J+1}{J}}$, alors le potentiel scalaire sera d'un ordre plus grand que le potentiel vecteur, et l'atome interagira surtout avec le potentiel scalaire

On peut ainsi passer d'une jauge ($C=0$) où l'atome n'interagit qu'avec le potentiel vecteur à une autre jauge ($C = -\sqrt{\frac{J+1}{J}}$) où l'atome interagit surtout avec un potentiel scalaire.

- (iii) <u>Photons multipolaire magnétique JM, d'énergie $\hbar c k_0$</u>.

- L'équivalent de (V-20) est

$$\left\{ \begin{matrix} \frac{1}{k_0}\,\delta(k-k_0)\,\vec{X}_{JM}(\vec{n}) + \vec{n}\, f(\vec{k}) \\ f(\vec{k}) \end{matrix} \right\} \qquad \text{(V-23)}$$

- Il est par contre impossible de trouver pour $f(\vec{k})$ une fonction propre non nulle de $\vec{L}^2$ et L_z de valeurs propres $J(J+1)\hbar^2$ et $M\hbar$ et qui soit de plus de parité $(-1)^{J+1}$. En effet, $Y_J^M(\vec{n})$ est de parité $(-1)^J$. (Ou encore, $\vec{n}\, Y_J^M$ n'a pas la même parité que $\vec{X}_{JM}$).

Donc pour un photon multipolaire magnétique, il n'existe qu'une jauge (restreinte) possible, la jauge transversale

$$\left\{ \begin{matrix} \frac{1}{k_0}\,\delta(k-k_0)\,\vec{X}_{JM}(\vec{n}) \\ 0 \end{matrix} \right\} \qquad \text{(V-24)}$$

5/2/79

9 - Moments Multipolaires d'une distribution de charges, de courants et de magnétisation.

But de ce § : Etudier le champ rayonné au loin par des sources caractérisées par leur densité de charges, leurs courants et leur magnétisation, et dont on se donne la dépendance en $\vec{r}$ et en t.

Montrer que ce champ peut être analysé en ondes multipolaires et que l'amplitude de chacune de ces ondes est reliée à un paramètre caractéristique des sources, qu'on appelle un moment multipolaire.

ⓐ Equations de Maxwell en présence des sources.

(i) Les sources

$\rho(\vec{r},t)$: densité de charges. (Pas de polarisation)

$\vec{J}_c(\vec{r},t)$: courant de conduction.

$\vec{M}(\vec{r},t)$: magnétisation.

Courant total
$$\vec{J}(\vec{r},t) = \vec{J}_c(\vec{r},t) + \vec{\nabla}\times\vec{M}(\vec{r},t) \qquad \text{(VI-1)}$$

Problème physique en arrière plan : sources associées à un électron décrit par le spineur à 2 composantes $\psi(\vec{r},t)$

$$\begin{cases} \rho(\vec{r},t) = \psi^+(\vec{r},t)\,\psi(\vec{r},t) \\ \vec{J}_c(\vec{r},t) = \dfrac{q\hbar}{2mi}\left[\psi^+(\vec{\nabla}\psi) - (\vec{\nabla}\psi^+)\psi\right] \\ \vec{M}(\vec{r},t) = \dfrac{2\mu_B}{\hbar}\,\psi^+(\vec{r},t)\,\vec{S}\,\psi(\vec{r},t) \end{cases} \qquad \text{(VI-2)}$$

(ii) Equations de Maxwell.

- $$\begin{cases} \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 & \text{(VI-3-a)} \\ \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} & \text{(VI-3-b)} \end{cases} \qquad \begin{cases} \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} & \text{(VI-3-c)} \\ c^2\,\vec{\nabla}\times\vec{B} = \dfrac{1}{\varepsilon_0}\vec{J} + \dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t} & \text{(VI-3-d)} \end{cases}$$

- De (VI-3-b) et (VI-3-d), on déduit l'équation de continuité qui exprime la conservation de la charge
$$\vec{\nabla}\cdot\vec{J} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0 \qquad \text{(VI-4)}$$

- Elimination de $\vec{E}$
$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{B} = -\mu_0\,\vec{\nabla}\times\vec{J} \qquad \text{(VI-5)}$$

- Elimination de $\vec{B}$
$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\left[\vec{\nabla}\rho + \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\vec{J}\right] \qquad \text{(VI-6)}$$

(iii) Régime sinusoïdal

- On suppose que toutes les sources sont monochromatiques :
$$G(\vec{r},t) = G^{(+)}(\vec{r})\,e^{-i\omega_0 t} + \text{c.c.} \qquad \text{(VI-7)}$$
Si l'on considère les solutions des équations de Maxwell correspondant à un régime forcé, tous les champs ont aussi la même forme. Les équations (VI-5, 6) deviennent :
$$(\Delta + k_0^2)\,\vec{B}^{(+)} = -\mu_0\,\vec{\nabla}\times\vec{J}^{(+)} \qquad \text{(VI-8)}$$
$$(\Delta + k_0^2)\,\vec{E}^{(+)} = \frac{1}{\varepsilon_0}\left[\vec{\nabla}\rho^{(+)} - \frac{i\omega_0}{c^2}\vec{J}^{(+)}\right] \qquad \text{(VI-9)}$$

- Remarque : une manière commode d'éliminer les régimes transitoires et de ne conserver que le régime forcé consiste à introduire adiabatiquement les sources en remplaçant ω_0 par $\omega_0 + i\varepsilon$ (ε : infiniment petit)
$$e^{-i\omega_0 t} \rightarrow e^{-i(\omega_0+i\varepsilon)t} = e^{-i\omega_0 t}\,e^{\varepsilon t} \qquad \text{(VI-10)}$$
Le facteur de branchement $e^{\varepsilon t}$, nul pour $t=-\infty$, croît lentement vers 1 pour $t=0$. Si l'on part d'un champ nul pour $t < -\frac{1}{\varepsilon}$, on aboutit à $t=0$ au régime forcé.

(iv) Transformée de Fourier

$$\vec{G}^{(+)}(\vec{r}) \longleftrightarrow \vec{\mathcal{G}}^{(+)}(\vec{k}) \qquad (VI-11)$$

(Pour simplifier les notations, on n'écrit plus le $^{(+)}$). (VI-8, 9) deviennent :

$$(k_0^2 - k^2)\vec{\mathcal{B}} = -i\mu_0 \vec{k} \times \vec{\mathcal{J}} \qquad (VI-12)$$

$$(k_0^2 - k^2)\vec{\mathcal{E}} = \frac{i}{\varepsilon_0}\left[\vec{k}\rho - \frac{k_0}{c}\vec{\mathcal{J}}\right] \qquad (VI-13)$$

Quant à l'équation de continuité (VI-4), elle devient :

$$\vec{k}.\vec{\mathcal{J}} - \omega_0 \rho = 0 \qquad (VI-14)$$

(v) Parties longitudinale et transversale des termes sources.

– Soit $\vec{\mathcal{S}}(\vec{k})$ le terme au 2ème membre (terme source) de l'équation (VI-12) donnant $\vec{\mathcal{B}}$.

$$\vec{\mathcal{S}}(\vec{k}) = -i\mu_0 \vec{k} \times \vec{\mathcal{J}}(\vec{k}) \qquad (VI-15)$$

$\vec{\mathcal{S}}(\vec{k})$ est transverse ($\perp$ à $\vec{k}$). Ceci est normal puisque $\vec{\mathcal{B}}$ est toujours transverse.

– Soit $\vec{\mathcal{C}}(\vec{k})$ le terme analogue pour $\vec{\mathcal{E}}$ (cf équation VI-13).

$$\vec{\mathcal{C}}(\vec{k}) = \frac{i}{\varepsilon_0}\left[\vec{k}\rho(\vec{k}) - \frac{k_0}{c}\vec{\mathcal{J}}(\vec{k})\right] \qquad (VI-16)$$

On peut séparer les parties longitudinale $\vec{\mathcal{C}}_{/\!/}$ et transversale $\vec{\mathcal{C}}_\perp$ de $\vec{\mathcal{C}}$:

$$\vec{\mathcal{C}} = \underbrace{\frac{\vec{k}}{k^2}\,\vec{k}.\vec{\mathcal{C}}}_{\vec{\mathcal{C}}_{/\!/}} + \underbrace{\frac{\vec{k}}{k^2}\times\left(\vec{\mathcal{C}}\times\vec{k}\right)}_{\vec{\mathcal{C}}_\perp} \qquad (VI-17)$$

– D'après (VI-16), on trouve compte tenu de (VI-14) :

$$\vec{\mathcal{C}}_{/\!/} = \frac{i}{\varepsilon_0}(k^2 - k_0^2)\frac{\rho}{k}\,\vec{n} \qquad (VI-18)$$

ce qui reporté dans (VI-13) donne pour $\vec{\mathcal{E}}_{/\!/}$

$$\vec{\mathcal{E}}_{/\!/} = -\frac{i}{\varepsilon_0}\frac{\rho}{k}\,\vec{n} \qquad (VI-19)$$

équation que l'on aurait pu obtenir directement en prenant la T.F. de $\vec{\nabla}.\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$.

En repassant dans l'espace des $\vec{r}$, on trouve que $\vec{E}_{/\!/}(\vec{r})$ varie en $\frac{1}{r^2}$ pour r grand et est donc négligeable devant la partie transverse qui varie en $\frac{1}{r}$.

– On trouve de même pour $\vec{\mathcal{C}}_\perp$

$$\vec{\mathcal{C}}_\perp = -c\frac{k_0}{k}\,\vec{n}\times\vec{\mathcal{S}} \qquad (VI-20)$$

Au facteur $c\frac{k_0}{k}$ près, $\vec{\mathcal{C}}_\perp$ se déduit de $\vec{\mathcal{S}}$ par une rotation de $-\frac{\pi}{2}$ autour de $\vec{n}$. Nous nous contenterons donc d'étudier le champ $\vec{\mathcal{B}}$

(b) Développement des sources et des champs en états de moment cinétique et de parité bien définis.

– $\vec{\mathcal{S}}$ et $\vec{\mathcal{B}}$ étant transverses, on peut, pour chaque valeur de k, les développer sur la base $\{\vec{X}_{JM}(\vec{n}), \vec{Z}_{JM}(\vec{n})\}$:

$$\vec{\mathcal{S}}(\vec{k}) = \sum_J \sum_M \left[\mathcal{S}^e_{JM}(k)\,\vec{X}_{JM}(\vec{n}) + \mathcal{S}^m_{JM}(k)\,\vec{Z}_{JM}(\vec{n})\right] \qquad (VI-21)$$

$$\vec{\mathcal{B}}(\vec{k}) = \sum_J \sum_M \left[\mathcal{B}^e_{JM}(k)\,\vec{X}_{JM}(\vec{n}) + \mathcal{B}^m_{JM}(k)\,\vec{Z}_{JM}(\vec{n})\right] \qquad (VI-22)$$

avec

$$\mathcal{S}^e_{JM}(k) = \int d\Omega_k\, \vec{X}^*_{JM}(\vec{n}).\vec{\mathcal{S}}(\vec{k}) \qquad (VI-23)$$

$$\mathcal{S}^m_{JM}(k) = \int d\Omega_k\, \vec{Z}^*_{JM}(\vec{n}).\vec{\mathcal{S}}(\vec{k}) \qquad (VI-24)$$

– Reportons les développements (VI-21) et (VI-22) dans (VI-12). Il vient (en se rappelant qu'il faut remplacer k_0 par $k_0 + i\varepsilon$) :

$$\mathcal{B}^{e}_{JM}(k) = \frac{\mathcal{S}^{e}_{JM}(k)}{(k_0+i\varepsilon)^2 - k^2} \qquad \text{(VI-25)}$$

$$\mathcal{B}^{m}_{JM}(k) = \frac{\mathcal{S}^{m}_{JM}(k)}{(k_0+i\varepsilon)^2 - k^2} \qquad \text{(VI-26)}$$

Ⓒ Comportement asymptotique des champs $\vec{B}(\vec{r})$ et $\vec{E}(\vec{r})$ pour r grand.

– Calculons la contribution à $\vec{B}(\vec{r})$ du terme $\mathcal{B}^{e}_{JM}(k)\,\vec{X}_{JM}(\vec{n})$ du développement (VI-22) lorsqu'on repasse dans l'espace des $\vec{r}$.

$$e^{-i\omega_0 t}\int d^3k\ \mathcal{B}^{e}_{JM}(k)\ \vec{X}_{JM}(\vec{n})\ e^{i\vec{k}.\vec{r}} \qquad + \text{c.c.} \qquad \text{(VI-27)}$$

Séparons intégration angulaire et radiale en utilisant (VI-25)

$$e^{-i\omega_0 t}\int k^2 dk\ \frac{\mathcal{S}^{e}_{JM}(k)}{(k_0+i\varepsilon)^2 - k^2}\int d\Omega_k\ e^{i\vec{k}.\vec{r}}\ \vec{X}_{JM}(\vec{n}) \quad + \text{c.c.} \qquad \text{(VI-28)}$$

D'après (IV-14), la dernière intégrale vaut $4\pi (i)^J j_J(kr)\,\vec{X}_{JM}(\vec{\rho})$. On a donc :

$$4\pi (i)^J \underbrace{e^{-i\omega_0 t}}_{\text{Dépendance temporelle}}\ \underbrace{\vec{X}_{JM}(\vec{\rho})}_{\text{Dépendance angulaire}}\ \underbrace{\int_0^\infty k^2 dk\ \frac{j_J(kr)\,\mathcal{S}^{e}_{JM}(k)}{(k_0+i\varepsilon)^2 - k^2}}_{\text{Dépendance radiale}} \quad + \text{c.c.} \qquad \text{(VI-29)}$$

– Dépendance radiale pour r grand

$$j_J(kr) \underset{r\to\infty}{\sim} \frac{1}{kr}\sin\left(kr - J\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2ikr}\left[e^{i(kr - J\frac{\pi}{2})} - e^{-i(kr - J\frac{\pi}{2})}\right] \qquad \text{(VI-30)}$$

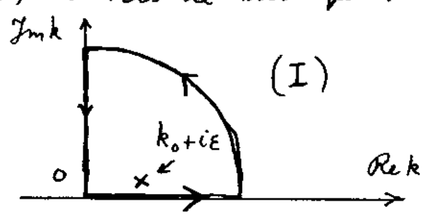
Reportons (VI-30) dans l'intégrale en k de (VI-29). Il vient :

$$\frac{1}{2ir}\left[\underbrace{\int_0^\infty k\,dk\ \mathcal{S}^{e}_{JM}(k)\ \frac{e^{i(kr - J\frac{\pi}{2})}}{(k_0+i\varepsilon)^2 - k^2}}_{\mathrm{I}} - \underbrace{\int_0^\infty k\,dk\ \mathcal{S}^{e}_{JM}(k)\ \frac{e^{-i(kr - J\frac{\pi}{2})}}{(k_0+i\varepsilon)^2 - k^2}}_{\mathrm{II}}\right] \qquad \text{(VI-31)}$$

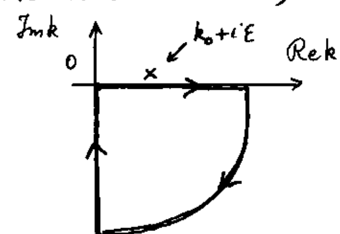
– Evaluation des intégrales I et II par la méthode des résidus (on suppose $\mathcal{S}^{e}_{JM}(k)$ suffisamment régulière).

$$e^{\pm ikr} = e^{\pm i(\mathcal{R}e\,k)r}\ e^{\mp(\mathcal{I}m\,k)r} \qquad \text{(VI-32)}$$

Comme $r > 0$, il faut fermer le contour vers le haut pour I ($-\mathcal{I}m\,k$ doit être <0) et vers le bas pour II ($\mathcal{I}m\,k$ doit être <0)



(I)



(II)

– Contribution du 1/4 de cercle : zéro dans les 2 cas

– Contribution du pole en $k_0 + i\varepsilon$

pour (I) : $\quad \dfrac{i}{4\pi}\ \mathcal{S}^{e}_{JM}(k_0)\ e^{i(k_0 r - J\frac{\pi}{2})} \qquad$ (VI-33)

pour (II) : $\quad 0 \qquad$ (car le $2^{\text{ème}}$ contour n'enferme pas le pole)

On voit ainsi que le fait de remplacer ω_0 par $\omega_0+i\varepsilon$ (établissement adiabatique des sources) revient à supprimer toute onde entrante dans la solution asymptotique.

– Contribution du chemin vertical (ordre de grandeur). On pose $y = \mathrm{Im}\, k$.

$$\sim \int_0^\infty y\, dy\, \mathcal{S}^e_{JM}(0)\, \frac{e^{-yr}}{k_0^2} = \frac{\mathcal{S}^e_{JM}(0)}{k_0^2 r^2}\int_0^\infty e^{-u}\, u\, du \qquad (VI-34)$$

Pour $k_0 r \gg 1$, contribution négligeable devant celle du pôle.

Conclusions

– Pour $k_0 r \gg 1$, la contribution du terme $\mathcal{B}^e_{JM}(k)\,\vec{X}_{JM}(\vec{n})$ au champ $\vec{B}(\vec{r},t)$ de l'onde créée par les source s'écrit donc :

$$\frac{1}{2r}\, e^{i(k_0 r-\omega_0 t)}\, \vec{X}_{JM}(\vec{\rho})\, \mathcal{S}^e_{JM}(k_0) + \text{c.c.} \qquad (VI-35)$$

On reconnait le champ magnétique d'une onde multipolaire électrique libre sortante, d'amplitude $\mathcal{S}^e_{JM}(k_0)$.

– Un calcul analogue pour $\mathcal{B}^m_{JM}(k)\,\vec{Z}_{JM}(\vec{n})$ conduit au champ magnétique d'une onde multipolaire magnétique libre sortante d'amplitude $\mathcal{S}^m_{JM}(k_0)$

$$\frac{1}{2r}\, e^{i(k_0 r-\omega_0 t)}\, \vec{Z}_{JM}(\vec{\rho})\, \mathcal{S}^m_{JM}(k_0) + \text{c.c.} \qquad (VI-36)$$

– Calculs analogues sur les équations donnant $\vec{E}$. On trouve les champs électriques correspondant à (VI-35) et (VI-36). (On utilise (VI-20) avec $k=k_0$).

– On voit ainsi que les sources rayonnent au loin une série d'ondes multipolaires électriques et magnétiques, ~~le coeffic~~ l'amplitude de chacune de ces ondes étant $\mathcal{S}^e_{JM}(k_0)$ et $\mathcal{S}^m_{JM}(k_0)$. Ces coefficients, caractéristiques des sources, et indiquant leur aptitude à rayonner des ondes multipolaires électriques et magnétiques, sont appelés respectivement "moments multipolaires électriques et magnétiques" de ces sources.

(d) Moments multipolaires électriques

(i) Première expression en fonction de $\vec{J}(\vec{r},t)$

On peut écrire :
$$\mathcal{S}^e_{JM}(k_0) = \int dk\, \delta(k-k_0)\, \mathcal{S}^e_{JM}(k) \qquad (VI-37)$$

c-à-d d'après (VI-23) et (VI-15) :

$$\mathcal{S}^e_{JM}(k_0) = -\frac{\mu_0}{k_0^2}\int d^3k\, \delta(k-k_0)\, \vec{X}^*_{JM}(\vec{n})\cdot(i\vec{k}\times\vec{\mathcal{J}}) \qquad (VI-38)$$

L'intégrale peut être considérée comme le produit scalaire dans l'espace des $\vec{k}$ de $\delta(k-k_0)\,\vec{X}_{JM}(\vec{n})$ par $i\vec{k}\times\vec{J}$. En utilisant l'égalité de Parseval-Plancherel et l'équation (IV-14), on obtient :

$$\mathcal{S}^e_{JM}(k_0) = -\frac{\mu_0}{2\pi^2}(i)^J\int d^3r\, j_J(k_0 r)\, \vec{X}^*_{JM}(\vec{\rho})\cdot\vec{\nabla}\times\vec{J}^{(+)}(\vec{r}) \qquad (VI-39)$$

(ii) Autre expression équivalente.

On peut, en utilisant les propriétés du produit mixte, réécrire (VI-38) sous la forme :

$$\mathcal{S}^e_{JM}(k_0) = -\frac{\mu_0}{k_0^2}\int d^3k\, \delta(k-k_0)\underbrace{\left(\vec{X}^*_{JM}(\vec{n})\times i\vec{k}\right)}_{=\,-k\,\vec{Z}^*_{JM}(\vec{n})\ \text{d'après (III-47)}}\cdot\vec{\mathcal{J}} \qquad (VI-40)$$

ce qui donne :

$$\mathcal{S}^e_{JM}(k_0) = \frac{\mu_0}{k_0}\int d^3k\, \delta(k-k_0)\, \vec{Z}^*_{JM}(\vec{n})\cdot\vec{\mathcal{J}} \qquad (VI-41)$$

(iii) Limite des grandes longueurs d'onde (grandes devant les dimensions des sources)

On peut toujours ajouter à (VI-41) la quantité :

$$\frac{\mu_0}{k_0}\int d^3k\ \delta(k-k_0)\ C\ Y_J^{M*}(\vec{n})\frac{1}{k_0}(\vec{k}\cdot\vec{\mathcal{J}}-\omega_0\rho) \qquad (VI-42)$$

qui est nulle d'après VI-14 (C est une constante arbitraire). On obtient alors

$$\mathcal{S}^e_{JM}(k_0)=\frac{\mu_0}{k_0}\int d^3k\ \delta(k-k_0)\left\{\left[\vec{Z}^*_{JM}(\vec{n})+C\vec{N}^*_{JM}(\vec{n})\right]\cdot\vec{\mathcal{J}}-cC\ Y_J^{M*}(\vec{n})\ \rho(\vec{k})\right\} \qquad (VI-43)$$

Choisissons C de manière que le terme en $j_{J-1}(k_0r)$ auquel donne naissance la transformée de Fourier de $\vec{Z}^*+C\vec{N}^*$ soit nul. Lorsqu'on passe dans l'espace des $\vec{r}$, le terme en $\vec{\rho}(\vec{r})$ est prépondérant devant celui en $\vec{J}(\vec{r})$ [Il varie en $(k_0r)^J$ alors que le second varie en $(k_0r)^{J+1}$]. On trouve alors que

$$\mathcal{S}^e_{JM}(k_0)\ \text{proportionnel à}\ \int d^3r\ \rho^{(+)}(\vec{r})\ r^J\ Y_J^{*M}(\vec{\rho}) \qquad (VI-44)$$

On retrouve bien l'expression du moment multipolaire électrique d'une distribution de charges statique.

(e) Moments multipolaires magnétiques.

(i) Expression en fonction de $\vec{J}(\vec{r},t)$

–
$$\begin{aligned}\mathcal{S}^m_{JM}(k_0)&=\int dk_0\ \delta(k-k_0)\ \mathcal{S}^m_{JM}(k)\\&=-\frac{\mu_0}{k_0^2}\int d^3k\ \delta(k-k_0)\ \vec{Z}^*_{JM}(\vec{n})\cdot i\vec{k}\times\vec{\mathcal{J}}\\&=+\frac{\mu_0}{k_0^2}\int d^3k\ \delta(k-k_0)\left[i\vec{k}\times\vec{Z}^*_{JM}(\vec{n})\right]\cdot\vec{\mathcal{J}}\\&=\frac{\mu_0}{k_0}\int d^3k\ \delta(k-k_0)\ \vec{X}^*_{JM}(\vec{n})\cdot\vec{\mathcal{J}}\end{aligned} \qquad (VI-45)$$

On a utilisé (VI-24), les propriétés du produit mixte, et (III-47).

– En utilisant l'égalité de Parseval-Plancherel et l'équation IV-14, on obtient :

$$\mathcal{S}^m_{JM}(k_0)=\frac{\mu_0k_0}{2\pi^2}(i)^J\int d^3r\ j_J(k_0r)\ \vec{X}^*_{JM}(\vec{\rho})\cdot\vec{J}^{(+)}(\vec{r}) \qquad (VI-46)$$

Or, d'après (III-37),

$$\vec{X}^*_{JM}(\vec{\rho})=\frac{i\hbar}{\hbar\sqrt{J(J+1)}}\left(\vec{r}\times\vec{\nabla}Y_J^{*M}(\vec{\rho})\right) \qquad (VI-47)$$

En reportant dans (VI-46) et en utilisant les propriétés du produit mixte :

$$\mathcal{S}^m_{JM}(k_0)=-\frac{\mu_0k_0}{2\pi^2}\frac{(i)^{J+1}}{\sqrt{J(J+1)}}\int\left(\vec{\nabla}Y_J^{M*}(\vec{\rho})\right)\cdot\left(\vec{r}\times\vec{J}^{(+)}\right)j_J(k_0r)\,d^3r \qquad (VI-48)$$

Par ailleurs :

$$j_J(k_0r)\left[\vec{\nabla}Y_J^{M*}(\vec{\rho})\right]=\vec{\nabla}\left[j_J(k_0r)\ Y_J^{M*}(\vec{\rho})\right]-Y_J^{*M}(\vec{\rho})\ \vec{\nabla}j_J(k_0r) \qquad (VI-49)$$

En reportant dans (VI-48), et en remarquant que $\vec{\nabla}j_J(k_0r)$, qui est // à $\vec{\rho}$, a un produit scalaire nul avec $\vec{r}\times\vec{J}^{(+)}$, on obtient finalement :

$$\mathcal{S}^m_{JM}(k_0)=-\frac{\mu_0k_0}{2\pi^2}\frac{(i)^{J+1}}{\sqrt{J(J+1)}}\int d^3r\left[\vec{\nabla}j_J(k_0r)\ Y_J^{M*}(\vec{\rho})\right]\cdot\left[\vec{r}\times\vec{J}^{(+)}(\vec{r})\right] \qquad (VI-50)$$

(ii) Limite des grandes longueurs d'onde.

$$\mathcal{S}^m_{JM}(k_0)\sim\int d^3r\left[\vec{\nabla}r^J\ Y_J^{M*}(\vec{\rho})\right]\cdot\left[\vec{r}\times\vec{J}^{(+)}(\vec{r})\right] \qquad (VI-51)$$

Cas particulier $J=1$ (Moment dipolaire magnétique). On reconnaît les composantes sphériques de

$$\int d^3r\ \vec{r}\times\vec{J}^{(+)}(\vec{r})=\int d^3r\ \vec{r}\times J_c^{(+)}(\vec{r})+\int d^3r\ \vec{r}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{M}^{(+)}(\vec{r})\right) \qquad (VI-52)$$

2ème Partie

Description Lagrangienne et Hamiltonienne d'un champ.

Application au champ électromagnétique.

I. Etude d'un système simple

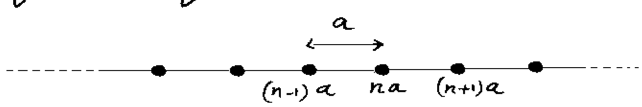
But de ce § : Introduire quelques notions importantes relatives aux champs en considérant un système mécanique discret qu'on fait tendre ensuite vers un système continu. Faire apparaître simplement la notion de densité de Lagrangien, de densité d'Hamiltonien ; rendre plausibles les relations de commutation relatives au champ quantifié.

Exemple utile en tant que guide pour l'étude des vrais champs, mais sans réalité physique (tout objet a une structure atomique).

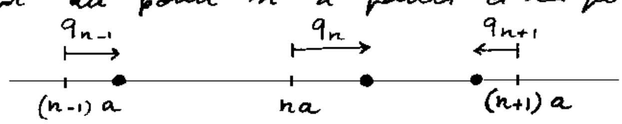
A. Description d'un système mécanique discret.

(1) Variable dynamique.

- Points matériels, de masse m, pouvant se déplacer sur un axe. Positions d'équilibre équidistantes. Abcisse du point n : na.



- Déplacement du point n à partir de la position d'équilibre : $q_n(t)$



- Etat du système défini à l'instant t par la donnée des variables dynamiques :

$$\begin{cases} \text{déplacements} & \{q_n(t)\} \\ \text{vitesses} & \{\dot{q}_n(t)\} \end{cases}$$

(2) Energie cinétique T, potentielle V. Lagrangien L.

- Energie cinétique
$$T = \frac{1}{2} m \sum_n \dot{q}_n^2 \qquad \text{(VII-1)}$$

- On suppose que les points s'attirent entre plus proches voisins avec des forces proportionnelles aux distances les séparant. Force agissant sur le point n :
$$F_n = m\omega_1^2 (q_{n+1} - q_n) - m\,\omega_1^2 (q_n - q_{n-1}) \qquad \text{(VII-2)}$$
F_n dérive de l'énergie potentielle :
$$V = \frac{1}{2} m\omega_1^2 \sum_n (q_{n+1} - q_n)^2 \qquad \text{(VII-3)}$$

- Lagrangien : $L = T - V$
$$L = \frac{1}{2} m \sum_n \left[\dot{q}_n^2 - \omega_1^2 (q_{n+1} - q_n)^2 \right] \qquad \text{(VII-4)}$$

(3) Equations du mouvement. Vitesse d'un ébranlement de grande longueur d'onde

- Les équations de Lagrange (ou encore de Newton) donnent :

$$\ddot{q}_n = \omega_1^2 (q_{n+1} - q_n) - \omega_1^2 (q_n - q_{n-1}) \qquad \text{(VII-5)}$$

- Recherche de solutions de la forme :

$$q_n(t) = \alpha\, e^{i(kna - \Omega t)} + c.c. \qquad (VII-6)$$

ébranlement longitudinal d'amplitude complexe α, de vecteur d'onde k, de pulsation Ω. En portant (VII-6) dans (VII-5) on obtient la relation de dispersion suivante entre k et Ω :

$$-\Omega^2 = \omega_1^2 \left[(e^{ika}-1) - (1-e^{-ika}) \right] = -4\,\omega_1^2 \sin^2 \frac{ka}{2} \qquad (VII-7)$$

Vitesse de phase v : $$v = \frac{\Omega}{k} = \frac{2\omega_1}{k} \sin \frac{ka}{2} \qquad (VII-8)$$

Limite des grandes longueurs d'onde $(k \to 0)$

$$v = \omega_1 a \qquad (VII-9)$$

(4) Moments conjugués - Hamiltonien.

- Moment conjugué de q_n $$p_n = \frac{\partial L}{\partial \dot q_n} = m \dot q_n \qquad (VII-10)$$

- Hamiltonien $H(q_n, p_n)$.

$$H(q_n, p_n) = \sum_n p_n \dot q_n - L = \sum_n \left[\frac{p_n^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega_1^2 (q_{n+1} - q_n)^2 \right] \qquad (VII-11)$$

- Equations de Hamilton - Jacobi

$$\dot q_n = \frac{\partial H}{\partial p_n} \qquad \dot p_n = -\frac{\partial H}{\partial q_n} \qquad (VII-12)$$

(5) Relations de commutation du système quantique.

$$\begin{cases} \text{variable classique } q_n \longrightarrow \text{observable quantique } Q_n \\ \quad " \qquad\quad " \qquad p_n \longrightarrow \quad " \qquad\quad " \qquad P_n \end{cases}$$

$$[Q_n, P_{n'}] = i\hbar\, \delta_{nn'} \qquad (VII-13)$$

B - Système continu obtenu par passage à la limite

(1) Conditions du passage à la limite

- On fait tendre vers 0 la distance a entre 2 points consécutifs. On veut cependant que la masse par unité de longueur reste constante et égale à μ

$$a \to 0, \quad m \to 0 \qquad \frac{m}{a} = \mu \qquad (VII-14)$$

- On veut également que la vitesse des ondes longitudinales dans le milieu reste constante et égale à v

$$a \to 0, \quad \omega_1 \to \infty \qquad \omega_1 a = v \qquad (VII-15)$$

- On obtient ainsi à la limite une tige continue linéaire, de masse par unité de longueur μ, et où la vitesse du son est v.

(2) Variables dynamiques.

- Au lieu de se donner le déplacement et la vitesse d'un ensemble discret de points, il faut se donner le déplacement et la vitesse de chaque point de la tige, d'abscisse au repos x

$$\{q_n(t), \dot q_n(t)\} \longrightarrow \left\{ u(x,t), \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \right\} \qquad (VII-16)$$

- Dans $u(x,t)$, x n'est pas une variable dynamique, mais un <u>indice continu</u> permettant de repérer la variable à laquelle on s'intéresse.

De même, $\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)$ se confond avec $\dot{u}(x,t)$. C'est la vitesse de la variable dynamique repérée par l'indice x. (Il n'y a pas de différence entre $\frac{\partial u}{\partial t}$ et $\frac{du}{dt}$ car x, étant un indice, ne dépend pas de t).

– Limite de $\frac{q_{n+1}-q_n}{a}$

$$\frac{q_{n+1}-q_n}{a} \longrightarrow \lim_{dx\to 0} \frac{u(x+dx)-u(x)}{dx} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \qquad \text{(VII-17)}$$

③ Lagrangien - Densité de lagrangien.

– Réécrivons (VII-4) sous la forme :

$$L = \frac{1}{2}\frac{m}{a}\sum_n a\left[\dot{q}_n^2 - \omega_1^2 a^2\left(\frac{q_{n+1}-q_n}{a}\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{2}\mu\sum_n a\left[\dot{q}_n^2 - v^2\left(\frac{q_{n+1}-q_n}{a}\right)^2\right] \qquad \text{(VII-18)}$$

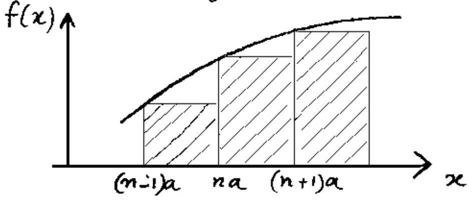
– Lors du passage à la limite,

$$\dot{q}_n(t) \quad \text{devient} \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$$

$$\frac{q_{n+1}-q_n}{a} \quad \text{"} \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \qquad \text{(VII-19)}$$

Par définition même de l'intégrale de Riemann :

$$\lim_{a\to 0}\sum_n a\, f(na) = \int f(x)\,dx \qquad \text{(VII-20)}$$



– A la limite, le lagrangien (VII-18) devient donc :

$$L = \int dx\, \mathcal{L} \qquad \text{(VII-21)}$$

où $\mathcal{L}$, qu'on appelle "densité de Lagrangien", s'écrit :

$$\mathcal{L}\left(u,\dot{u},\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\mu}{2}\left[\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right)^2 - v^2\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right)^2\right] \qquad \text{(VII-22)}$$

On comprend ainsi comment la densité de Lagrangien peut dépendre à la fois des dérivées spatiales et temporelles des variables dynamiques.

④ Equations du mouvement.

– Réécrivons (VII-5) sous la forme :

$$\ddot{q}_n = \omega_1^2 a^2 \frac{\frac{q_{n+1}-q_n}{a} - \frac{q_n - q_{n-1}}{a}}{a} \qquad \text{(VII-23)}$$

Lors du passage à la limite, la fraction au 2ème membre de (VII-23) devient

$$\lim_{dx\to 0}\frac{\frac{\partial u(x+dx,t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}}{dx} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \qquad \text{(VII-24)}$$

(VII-23) devient donc :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - v^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u(x,t) = 0 \qquad \text{(VII-25)}$$

qui est bien une équation de propagation

Nous verrons plus loin comment (VII-25) peut s'obtenir directement à partir de la densité de lagrangien (VII-22) en appliquant le principe de moindre action. Nous obtiendrons les équations de Lagrange

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial u}{\partial t}} + \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial u}{\partial x}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0 \qquad \text{(VII-26)}$$

qui redonnent bien (VII-25) lorsqu'on utilise l'expression (VII-22) de $\mathcal{L}$.

(5) Moments conjugués. Hamiltonien

– A $p_n = m\dot{q}_n$ correspond $m\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$ (VII-27)

Posons

$$\pi(x,t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}(x,t)} = \mu\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \qquad \text{(VII-28)}$$

Lors du passage à la limite, d'après (VII-27) et (VII-28)

$$\frac{p_n}{a} \quad \text{devient} \quad \pi(x,t) \qquad \text{(VII-29)}$$

– Réécrivons (VII-11) sous la forme

$$H = \sum_n a\,\frac{p_n}{a}\,\dot{q}_n - L \qquad \text{(VII-30)}$$

Lors du passage à la limite H devient d'après (VII-20) et (VII-29)

$$H = \int dx\ \mathcal{H} \qquad \text{(VII-31)}$$

où $\mathcal{H}$, "densité d'hamiltonien", s'écrit

$$\mathcal{H}\left(u,\pi,\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \pi(x,t)\,\dot{u}(x,t) - \mathcal{L} = \frac{1}{2\mu}\left(\pi(x,t)\right)^2 + \frac{\mu v^2}{2}\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right)^2 \qquad \text{(VII-32)}$$

– Nous verrons plus loin la forme que prennent les équations canoniques de Hamilton-Jacobi.

(6) Relations de commutation

– Réécrivons (VII-13) sous la forme :

$$\left[\varphi(x_n),\ P(x_{n'})\right] = i\hbar\ \delta_{x_n,x_{n'}} \qquad \text{(VII-33)}$$

avec $x_n = na$, $x_{n'} = n'a$. On peut encore écrire

$$\left[\varphi(x_n),\ \frac{P(x_{n'})}{a}\right] = i\hbar\ \frac{\delta_{x_n,x_{n'}}}{a} \qquad \text{(VII-34)}$$

– Lors du passage à la limite, d'après (VII-29) on a

$$\varphi(x_n) \longrightarrow U(x)$$

$$\frac{P(x_{n'})}{a} \longrightarrow \Pi(x')$$

Appelons $\Delta(x,x')$ la limite de $\frac{\delta_{x_n x_{n'}}}{a}$. Pour voir ce que représente $\Delta(x,x')$, étudions la limite de l'identité

$$\sum_{x_{n'}} a\,\frac{\delta_{x_n x_{n'}}}{a} f(x_{n'}) = f(x_n) \qquad \text{(VII-35)}$$

Elle s'écrit d'après (VII-20) :

$$\int dx'\ \Delta(x,x')\ f(x') = f(x) \qquad \text{(VII-36)}$$

On en déduit

$$\Delta(x,x') = \delta(x-x') \qquad \text{(VII-37)}$$

– Finalement, la limite de (VII-34) est

$$\left[U(x),\ \Pi(x')\right] = i\hbar\ \delta(x-x') \qquad \text{(VII-38)}$$

II Notion de dérivée fonctionnelle

But de ce § : Préciser quelques notions mathématiques utiles pour la suite.

A - Exemple de fonctionnelle définie sur des fonctions d'une variable.

① Définition de la fonctionnelle

- Soit $\{u(t)\}$ l'ensemble des fonctions réelles d'une variable t
- Soit $f(x,y)$ une fonction de 2 variables x et y dans laquelle on remplace x par $u(t)$ et y par $\dot{u}(t)$.

A tout $u(t) \longrightarrow f(u(t),\dot{u}(t))$, nouvelle fonction de t

- Soit S le nombre défini par :

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt\; f(u(t),\dot{u}(t)) \qquad \text{(VII-39)}$$

A toute fonction $u(t)$ on peut ainsi, grâce à VII-39, associer un nombre :
On a introduit une fonctionnelle définie sur l'ensemble des fonctions $\{u(t)\}$

② Variation δS correspondant à une variation $\delta u(t)$

- On fait varier légèrement $u(t)$ $\quad u(t) \rightarrow u(t) + \delta u(t)$ (VII-40)

avec les conditions aux limites $\quad \delta u(t_1) = \delta u(t_2) = 0$ (VII-41)

Quelle est la variation correspondante, δS, de S ?

- Variation de $\dot{u}$: $\quad \dot{u}(t) \rightarrow \dot{u}(t) + \delta\dot{u}(t)$ (VII-42)

Peut-on relier $\delta\dot{u}$ à δu ? Après la variation, $\dot{u} = \frac{d}{dt}u$ devient $\frac{d}{dt}(u+\delta u)$ c-à-d $\dot{u} + \frac{d}{dt}\delta u$. En comparant avec (VII-42), on voit que :

$$\delta\dot{u} = \frac{d}{dt}\delta u \qquad \text{(VII-43)}$$

- Calcul de δS

$$\delta f = \frac{\partial f}{\partial u}\delta u + \frac{\partial f}{\partial \dot{u}}\delta\dot{u} = \frac{\partial f}{\partial u}\delta u + \frac{\partial f}{\partial \dot{u}}\frac{d}{dt}\delta u \qquad \text{(d'après VII-43)}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial u}\delta u + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{u}}\delta u\right) - \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial \dot{u}}\right)\delta u \qquad \text{(VII-44)}$$

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2}\delta f\, dt = \int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial \dot{u}}\right)\delta u\, dt + \underbrace{\left[\frac{\partial f}{\partial \dot{u}}\delta u\right]_{t_1}^{t_2}}_{=0} \qquad \text{(VII-45)}$$

d'après (VII-41)

$$\boxed{\delta S = \int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial \dot{u}}\right)\delta u(t)\, dt} \qquad \text{(VII-46)}$$

③ Définition de la dérivée fonctionnelle.

δS apparait en (VII-46) comme résultant d'une somme de contributions dues aux variations $\delta u(t)$ de $u(t)$ dans les divers intervalles dt de $[t_1,t_2]$.
On appelle dérivée fonctionnelle de S par rapport à $u(t)$, et on note $\frac{\delta S}{\delta u(t)}$, le quotient par $\delta u(t)\,dt$ de la variation de S résultant d'une variation $\delta u(t)$ de $u(t)$ dans le seul intervalle dt centré en t.
De (VII-46), on tire :

$$\frac{\delta S}{\delta u} = \frac{\delta S}{\delta u\, dt} = \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial \dot{u}} \qquad \text{(VII-47)}$$

④ Application : calcul de variations.

Calcul de la fonction $u(t)$ qui rend S extrémale. δS doit être nul, $\forall\, \delta u$.
On en déduit que $\quad \frac{\delta S}{\delta u}$ doit être nul $\quad \forall\, t \qquad$ (VII-48)
c-à-d que la fonction $u(t)$ cherchée doit être solution de :

$$\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial \dot{u}} = 0 \qquad \text{(VII-49)}$$

Si $u(t) = q(t)$, $f = L$ (lagrangien), S = action, on retrouve les équations de Lagrange

B. Exemple de fonctionnelle définie sur les fonctions de plusieurs variables.

① Définition de 2 fonctionnelles

- $\{u(\vec{r},t)\}$ fonctions de 4 variables x, y, z, t.
- $f(a, b, \vec{c})$ fonction de $a, b, \vec{c}$ où l'on remplace a par u, b par $\dot{u}$, $\vec{c}$ par $\vec{\nabla} u$.

A tout $u(\vec{r},t) \longrightarrow f(u, \dot{u}, \vec{\nabla} u)$ nouvelle fonction de $\vec{r}, t$

- 1ère fonctionnelle (correspondant à une valeur de t bien définie). Fonctionnelle de u et $\dot{u}$

$$L(t) = \int d^3r \; f(u, \dot{u}, \vec{\nabla} u) \qquad \text{(VII-50)}$$

- 2ème fonctionnelle (Fonctionnelle de u)

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3r \; f(u, \dot{u}, \vec{\nabla} u) \qquad \text{(VII-51)}$$

② Variation de u, δu

- $$u(\vec{r},t) \rightarrow u(\vec{r},t) + \delta u(\vec{r},t) \qquad \text{(VII-52)}$$

avec
$$\begin{cases} \delta u(\vec{r},t_1) = \delta u(\vec{r},t_2) = 0 \\ \delta u(\vec{r},t) = 0 \quad \text{si} \quad |\vec{r}| = \infty \end{cases} \qquad \text{(VII-53)}$$

- comme au § A.2 précédent on montre aisément que

$$\begin{cases} \delta \dot{u} = \dfrac{d}{dt} \delta u & \text{(VII-54)} \\ \delta \vec{\nabla} u = \vec{\nabla} \delta u & \text{(VII-55)} \end{cases}$$

③ Calcul de δL. Dérivées fonctionnelles de L

- $$\delta L = \int d^3r \left[\frac{\partial f}{\partial u} \delta u + \frac{\partial f}{\partial \dot{u}} \delta \dot{u} + \frac{\partial f}{\partial \vec{\nabla} u} \cdot \delta \vec{\nabla} u \right] \qquad \text{(VII-56)}$$

Comme on n'intègre pas sur t, on n'a pas à intégrer par parties le terme en $\delta \dot{u}$. Par contre, on peut, en utilisant (VII-55), réécrire le dernier terme de VII-56

$$\int d^3r \frac{\partial f}{\partial \vec{\nabla} u} \cdot \delta \vec{\nabla} u = \int d^3r \frac{\partial f}{\partial \vec{\nabla} u} \cdot \vec{\nabla} \delta u = \underbrace{\int d^3r \, \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial \vec{\nabla} u} \delta u \right)}_{\text{Transformation en une intégrale de surface nulle d'après VII-53}} - \int d^3r \left(\vec{\nabla} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{\nabla} u} \right) \delta u \qquad \text{(VII-57)}$$

Finalement

$$\delta L = \int d^3r \left\{ \left[\frac{\partial f}{\partial u} - \vec{\nabla} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{\nabla} u} \right] \delta u + \frac{\partial f}{\partial \dot{u}} \delta \dot{u} \right\} \qquad \text{(VII-58)}$$

- En un point $\vec{r}$ donné, on peut considérer comme variations indépendantes soit $\delta u(\vec{r},t)$ et $\delta u(\vec{r},t+dt)$, soit $\delta u(\vec{r},t)$ et $\delta \dot{u}(\vec{r},t)$. Comme L est défini à un instant t donné, il faut considérer dans (VII-58), δu et $\delta \dot{u}$ comme des variations indépendantes au même instant t. On peut ainsi définir 2 dérivées fonctionnelles :

$$\begin{cases} \dfrac{\mathcal{D} L}{\mathcal{D} u} = \dfrac{\delta L}{\delta u \, d^3r} = \dfrac{\partial f}{\partial u} - \vec{\nabla} \cdot \dfrac{\partial f}{\partial \vec{\nabla} u} & \text{(VII-59)} \\ \dfrac{\mathcal{D} L}{\mathcal{D} \dot{u}} = \dfrac{\delta L}{\delta \dot{u} \, d^3r} = \dfrac{\partial f}{\partial \dot{u}} & \text{(VII-60)} \end{cases}$$

④ Calcul de δS. Dérivée fonctionnelle de S.

- On intègre (VII-58) sur t. On peut alors prendre comme variations indépendantes les $\delta u(\vec{r},t)$ en tout $\vec{r}$ et pour tout t. En intégrant par parties le terme en $\delta \dot{u}$ et en utilisant (VII-53), on obtient

$$\delta S = \int d^3r \, dt \left[\frac{\partial f}{\partial u} - \vec{\nabla} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{\nabla} u} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial \dot{u}} \right] \delta u(\vec{r},t) \qquad \text{(VII-61)}$$

- On peut alors définir la dérivée fonctionnelle

$$\frac{\mathcal{D} S}{\mathcal{D} u} = \frac{\delta S}{\delta u(\vec{r},t) \, d^3r \, dt} = \frac{\partial f}{\partial u} - \vec{\nabla} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{\nabla} u} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial \dot{u}} \qquad \text{(VII-62)}$$

19/2/74

III - Equations de Lagrange pour un champ classique

But de ce §

Etablir les équations du mouvement d'un champ qui obéit à un principe variationnel (principe de moindre action).

Montrer que les équations couplées d'un système de charges interagissant avec un champ électromagnétique (équations de Maxwell en présence des charges + équations du mouvement des charges en présence des champs) peuvent être toutes déduites d'un principe de moindre action.

Intermédiaire important pour la formulation hamiltonienne et la quantification

A - Lagrangien du champ - Action - Principe de moindre action.

① "Coordonnées" du champ à l'instant t.

- $u(\vec{r},t)$ valeurs prises par le champ en tout point $\vec{r}$ à l'instant t.
- Le champ peut avoir plusieurs composantes en chaque point $\vec{r}$ (champ vectoriel, tensoriel ...) : $u_i(\vec{r},t)$
- Vitesse du champ à l'instant t : $\dot{u}_i(\vec{r},t) = \frac{\partial}{\partial t} u_i(\vec{r},t)$ (VIII-1)
- Mouvement du champ : connu lorsqu'on a déterminé la dépendance temporelle de chaque coordonnée, c-à-d lorsqu'on connaît les fonctions $u_i(\vec{r},t)$ pour tout $\vec{r}$ et tout i.
On s'intéresse ici aux champs dont le mouvement peut être obtenu à partir d'un principe variationnel. Plus précisément, on va montrer comment on peut déduire de ce principe les équations aux dérivées partielles satisfaites par $u_i(\vec{r},t)$

② Densité de lagrangien $\mathcal{L}$. (généralisation des résultats du § I)

$\mathcal{L}$: fonction de u_i, $\dot{u}_i$, $\vec{\nabla} u_i$.
(Peut dépendre explicitement du temps et des dérivées spatiale d'ordre supérieur de u_i).

$$\mathcal{L}(u_i, \dot{u}_i, \vec{\nabla} u_i) \qquad \text{(VIII-2)}$$

③ Lagrangien - Action.

- Lagrangien L $$L = \int d^3r\, \mathcal{L}\left(u_i(\vec{r},t), \dot{u}_i(\vec{r},t), \vec{\nabla} u_i(\vec{r},t)\right) \qquad \text{(VIII-3)}$$

A chaque instant t, L est une fonctionnelle de $u_i(\vec{r},t)$ et $\dot{u}_i(\vec{r},t)$.
En effet, à tout jeu de coordonnées $u_i(\vec{r},t)$ et de vitesses $\dot{u}_i(\vec{r},t)$ on associe grâce à (VIII-3) un nombre.

- Action S $$S = \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3r\, \mathcal{L}\left(u_i(\vec{r},t), \dot{u}_i(\vec{r},t), \vec{\nabla} u_i(\vec{r},t)\right) \qquad \text{(VIII-4)}$$

S est une fonctionnelle de $u_i(\vec{r},t)$. En effet, à tout mouvement du champ entre les instants t_1 et t_2, défini par les fonctions $u_i(\vec{r},t)$, on associe grâce à (VIII-4) un nombre.

④ Principe de moindre action

- On suppose que le champ satisfait à un tel principe :
on se donne les valeurs des champs aux instants t_1 et t_2.
$$u_i(\vec{r},t_1) \quad \text{et} \quad u_i(\vec{r},t_2) \quad \text{donnés} \qquad \text{(VIII-5)}$$
Parmi tous les mouvements possibles du champ satisfaisant à ces conditions aux limites, celui qui est effectivement suivi par le système est celui qui rend l'action S extrêmale.

– Les fonctions $u_i(\vec{r},t)$ correspondant au mouvement effectivement suivi par le champ sont donc telles que, quelles que soient les variations $\delta u_i(\vec{r},t)$ infinitésimales qu'on leur fait subir, S ne varie pas.

$$\frac{\delta S}{\delta u_i} = 0 \qquad \forall\ \vec{r}, t, i \qquad \text{(VIII-6)}$$

est une condition évidemment suffisante pour qu'il en soit ainsi puisque, d'après VII-61 et VII-62, δS est alors nul, quelles que soient les δu_i. C'est aussi une condition nécessaire : il suffit d'envisager un δu nul partout sauf dans le volume d^3r autour de $\vec{r}$, dans l'intervalle dt autour de dt et pour la seule composante i. On a alors

$$\delta S = \frac{\delta S}{\delta u_i}\ \delta u_i(\vec{r},t)\ d^3r\ dt \qquad \text{(VIII-7)}$$

et la condition $\delta S = 0$ entraine $\dfrac{\delta S}{\delta u_i(\vec{r},t)} = 0$.

– D'après VII-62, les équations du mouvement du champ (équations de Lagrange) s'écrivent donc :

$$\frac{\delta S}{\delta u_i} = \frac{\delta L}{\delta u_i} - \frac{d}{dt}\frac{\delta L}{\delta \dot{u}_i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_i} - \vec{\nabla}\cdot\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{\nabla} u_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}_i} = 0 \qquad \text{(VIII-8)}$$

– Remarque : La formulation de la théorie peut être aisément rendue relativiste si $\mathcal{L}$ est un scalaire d'espace temps. L'action S est alors un invariant relativiste, intégrale de $\mathcal{L}$ dans un volume d'espace temps (les valeurs des champs étant fixées sur la surface qui limite ce volume).

B – Application au champ électromagnétique.

1) Lagrangien du système global : charges + champ électromagnétique

– Champ électromagnétique

Potentiels $\begin{cases} \vec{A}(\vec{r},t) \\ U(\vec{r},t) \end{cases}$ Champs $\begin{cases} \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} U \\ \vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} \end{cases}$ (VIII-9)

Les coordonnées du champ sont $\{\vec{A}(\vec{r},t), U(\vec{r},t)\}$ les vitesses $\{\dot{\vec{A}}(\vec{r},t), \dot{U}(\vec{r},t)\}$.

– Particules
Particule α : charge e_α, masse m_α, position $\vec{q}_\alpha(t)$, vitesse $\dot{\vec{q}}_\alpha(t)$.

– Densité de charge et de courant associées aux particules

$$\begin{cases} \rho(\vec{r},t) = \sum_\alpha e_\alpha\ \delta\left(\vec{r} - \vec{q}_\alpha(t)\right) & \text{(VIII-10)} \\ \vec{J}(\vec{r},t) = \sum_\alpha e_\alpha\ \dot{\vec{q}}_\alpha(t)\ \delta\left(\vec{r} - \vec{q}_\alpha(t)\right) & \text{(VIII-11)} \end{cases}$$

On vérifie aisément à partir des définitions (VIII-10) et (VIII-11) que :

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \qquad \text{(VIII-12)}$$

Equation de conservation de l'électricité.

– Nous allons montrer que toutes les équations relatives aux champs et aux charges peuvent être déduites du Lagrangien :

$$L = \frac{1}{2}\sum_\alpha m_\alpha \dot{\vec{q}}_\alpha^{\,2} + \sum_\alpha\left[e_\alpha \dot{\vec{q}}_\alpha\cdot\vec{A}(\vec{q}_\alpha,t) - e_\alpha U(\vec{q}_\alpha,t)\right] + \frac{\varepsilon_0}{2}\int d^3r\left[\vec{E}(\vec{r},t)^2 - c^2\vec{B}(\vec{r},t)^2\right] \qquad \text{(VIII-13)}$$

(Dans le 3° terme, $\vec{E}$ et $\vec{B}$ doivent être exprimés en fonction de $\vec{A}$ et U).

- Autre forme équivalente du 2ème terme de (VIII-13). En utilisant (VIII-10) et (VIII-11), on peut écrire ce terme sous la forme

$$\int d^3r \left[\vec{J}(\vec{r},t) \cdot \vec{A}(\vec{r},t) - \rho(\vec{r},t)\, U(\vec{r},t) \right] \qquad \text{(VIII-14)}$$

② Discussion physique.

- Le 3ème terme de (VIII-13) subsiste seul en l'absence de particules : c'est le lagrangien du champ libre. Le 1er terme représente l'énergie cinétique des particules, c-à-d le lagrangien des particules non couplées au champ. Le 2ème terme décrit les interactions entre particules et champ.

- La densité de lagrangien correspondant au 3ème terme de (VIII-13) peut s'écrire en notations relativistes :

$$-\frac{\varepsilon_0}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \qquad \text{(VIII-15)}$$

où $F_{\mu\nu}$ est le tenseur champ électromagnétique. Elle est visiblement scalaire (contraction de 2 tenseurs) et invariante de jauge (elle s'exprime directement en fonction des champs).

- Le lagrangien (VIII-13) n'est valable que pour des particules de vitesse faible devant c. Il faudrait, dans le cas contraire, remplacer le 1er terme de (VIII-13) par

$$-\sum_\alpha m_\alpha c^2 \sqrt{1 - (\dot{\vec{q}}_\alpha)^2/c^2} \qquad \text{(VIII-16)}$$

- La densité de lagrangien correspondant à (VIII-14) peut s'écrire en notations relativistes

$$J^\mu A_\mu \qquad \text{(VIII-17)}$$

- Invariance de jauge

• Changeons de jauge (voir chapitre 8, 1ère partie)

$$\begin{cases} \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\chi \\ U' = U - \dfrac{\partial \chi}{\partial t} \end{cases} \qquad \text{(VIII-18)}$$

• Le 1er terme de VIII-13 ne change pas (il ne dépend que de $\dot{\vec{q}}_\alpha$), de même que le 3ème (il fait intervenir directement les champs qui demeurent inchangés dans la transformation VIII-18). Le seul changement peut donc venir du 2ème terme : (VIII-14).

• Calculons la variation de l'action $S'-S$ lorsqu'on passe de la jauge $\{\vec{A}, U\}$ à la jauge $\{\vec{A}', U'\}$. D'après (VIII-14) et (VIII-18), on a :

$$S' - S = \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3r \left[\vec{J} \cdot \vec{\nabla}\chi - \rho \frac{\partial \chi}{\partial t} \right) \qquad \text{(VIII-19)}$$

Intégrons par parties. Il vient :

$$S' - S = \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3r\, \vec{\nabla}(\chi \vec{J}) + \int d^3r \int_{t_1}^{t_2} dt\, \frac{\partial}{\partial t}(\rho\chi) - \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3r \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right)\chi \qquad \text{(VIII-20)}$$

Le dernier terme s'annule grâce à (VIII-12). Le premier terme après transformation de l'intégrale de volume en intégrale de surface fait intervenir les valeurs des courants pour $|\vec{r}| = \infty$ et s'annule donc. Le 2ème terme après intégration sur t ne fait intervenir que les positions des charges à $t = t_1$ et $t = t_2$. Lorsqu'on fait varier les valeurs des champs et les positions des particules entre t_1 et t_2 sans changer ces valeurs aux limites $t = t_1$ et $t = t_2$, $S' - S$ ne change donc pas. S' et S ont donc les mêmes extrêma. Le "chemin" de moindre action est donc indépendant de la jauge.

On voit ainsi le lien qui existe entre invariance de jauge et conservation de la charge (équation VIII-12 utilisée pour VIII-20)

③ Equations du mouvement des champs.

– D'après (VIII-13) et (VIII-16), on peut écrire :

$$L = \frac{1}{2}\sum_\alpha m_\alpha \dot{q}_\alpha^2 + \int d^3r\ \mathcal{L} \qquad \text{(VIII-21)}$$

où

$$\mathcal{L} = \vec{J}\cdot\vec{A} - \rho U + \frac{\varepsilon_0}{2}\left[(-\vec{\nabla}U - \dot{\vec{A}})^2 - c^2(\vec{\nabla}\times\vec{A})^2\right] \qquad \text{(VIII-22)}$$

Pour les équations des champs, le 1er terme de (VIII-21) n'intervient pas.

– Dérivées de $\mathcal{L}$ par rapport à A_i et U. De (VIII-22), on tire

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_i} = J_i \qquad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial U} = -\rho \qquad \text{(VIII-23)}$$

– $\mathcal{L}$ ne dépend des dérivées spatiotemporelles de A_i et U que par l'intermédiaire des champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ dans le dernier terme de (VIII-22)

Des définitions des champs

$$E_i = -\dot{A}_i - \partial_i U \qquad B_i = \varepsilon_{ijk}\,\partial_j A_k \qquad \text{(VIII-24)}$$

on tire

$$\frac{\partial E_i}{\partial \dot{A}_i} = -1 \qquad \frac{\partial E_i}{\partial(\partial_i U)} = -1 \qquad \frac{\partial B_i}{\partial(\partial_j A_k)} = \varepsilon_{ijk} \qquad \text{(VIII-25)}$$

Par suite, on a par exemple

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{A}_i} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial E_j}\frac{\partial E_j}{\partial\dot{A}_i} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial B_j}\frac{\partial B_j}{\partial\dot{A}_i} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial E_i}\frac{\partial E_i}{\partial\dot{A}_i} = -\varepsilon_0 E_i \qquad \text{(VIII-26)}$$

Des calculs analogues donnent

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{U}} = 0 \qquad \text{(VIII-27)}$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_j A_k)} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial B_i}\frac{\partial B_i}{\partial(\partial_j A_k)} = -\varepsilon_0 c^2 \varepsilon_{ijk}\, B_i \qquad \text{(VIII-28)}$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_i U)} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial E_i}\frac{\partial E_i}{\partial(\partial_i U)} = -\varepsilon_0 E_i \qquad \text{(VIII-29)}$$

– Equation de Lagrange relative à A_k.

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_k} - \partial_j\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_j A_k)} - \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{A}_k} = 0 \qquad \text{(VIII-30)}$$

c-à-d

$$J_k + \varepsilon_0 c^2 \varepsilon_{ijk}\,\partial_j B_i + \varepsilon_0 \dot{E}_k = 0 \qquad \text{(VIII-31)}$$

soit encore

$$\varepsilon_{kji}\,\partial_j B_i = \frac{1}{c^2}\dot{E}_k + \mu_0 J_k \qquad \text{(VIII-32)}$$

projection sur k de l'équation :

$$\boxed{\vec{\nabla}\times\vec{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \mu_0\vec{J}} \qquad \text{(VIII-33)}$$

qui est bien l'une des équations de Maxwell.

- Equation de Lagrange relative à U

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial U} - \partial_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_i U)} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{U}} = 0 \qquad \text{(VIII-34)}$$

c-à-d

$$-\rho + \varepsilon_0 \partial_i E_i = 0 \qquad \text{(VIII-35)}$$

soit encore

$$\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}} \qquad \text{(VIII-36)}$$

On retrouve bien les équations de Maxwell en présence des charges, puisque les 2 autres équations $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$ et $\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ sont automatiquement satisfaites grâce aux relations (VIII-9).

④ Equations du mouvement des charges.

- Seuls les 2 premiers termes de VIII-13 interviennent puisque le dernier ne dépend ni de $\vec{q}_\alpha$ ni de $\dot{\vec{q}}_\alpha$.

- Etablissons tout d'abord une relation vectorielle qui nous sera utile :

$$\vec{\nabla}(\vec{A}\cdot\vec{B}) = (\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\vec{A} + (\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\vec{B} + \vec{B}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}) + \vec{A}\times(\vec{\nabla}\times\vec{B}) \qquad \text{(VIII-37)}$$

Pour cela, partons de l'égalité

$$\partial_j A_k = \partial_k A_j + \varepsilon_{ijk}(\vec{\nabla}\times\vec{A})_i \qquad \text{(VIII-38)}$$

qui se démontre en utilisant les 2 égalités déjà données

$$(\vec{\nabla}\times\vec{A})_i = \varepsilon_{i\ell m}\partial_\ell A_m \quad \text{et} \quad \varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{i\ell m} = \delta_{j\ell}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{k\ell} \qquad \text{(VIII-39)}$$

et appliquons la à

$$\partial_i(A_j B_j) = (\partial_i A_j) B_j + A_j(\partial_i B_j) \qquad \text{(VIII-40)}$$

Il vient :

$$\partial_i(A_j B_j) = B_j \partial_j A_i + A_j \partial_j B_i + \underbrace{\varepsilon_{kij}}_{=\varepsilon_{ijk}} B_j (\vec{\nabla}\times\vec{A})_k + \underbrace{\varepsilon_{kij}}_{=\varepsilon_{ijk}} A_j (\vec{\nabla}\times\vec{B})_k \qquad \text{(VIII-41)}$$

On reconnait la projection sur i de l'égalité (VIII-37).

- Calcul de $\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}_\alpha}$ et $\frac{\partial L}{\partial \vec{q}_\alpha}$. D'après (VIII-13), on a

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}_\alpha} = m_\alpha \dot{\vec{q}}_\alpha + e_\alpha \vec{A}(\vec{q}_\alpha, t) \qquad \text{(VIII-42)}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{q}_\alpha} = -e_\alpha \vec{\nabla} U(\vec{q}_\alpha, t) + e_\alpha \vec{\nabla}\left(\dot{\vec{q}}_\alpha\cdot\vec{A}(\vec{q}_\alpha, t)\right) \qquad \text{(VIII-43)}$$

En appliquant (VIII-37) au dernier terme de (VIII-43) et en remarquant que $\vec{q}_\alpha$ et $\dot{\vec{q}}_\alpha$ sont indépendants, on obtient.

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{q}_\alpha} = -e_\alpha \vec{\nabla} U(\vec{q}_\alpha, t) + e_\alpha(\dot{\vec{q}}_\alpha\cdot\vec{\nabla})\vec{A}(\vec{q}_\alpha, t) + e_\alpha \dot{\vec{q}}_\alpha \times \left(\vec{\nabla}\times\vec{A}(\vec{q}_\alpha, t)\right) \qquad \text{(VIII-44)}$$

- Equation de Lagrange relative à $\vec{q}_\alpha$.

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{q}_\alpha} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}_\alpha} = 0 \qquad \text{(VIII-45)}$$

D'après (VIII-42),

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}_\alpha} = m_\alpha \ddot{\vec{q}}_\alpha + e_\alpha \frac{\partial}{\partial t}\vec{A}(\vec{q}_\alpha, t) + e_\alpha(\dot{\vec{q}}_\alpha\cdot\vec{\nabla})\vec{A}(\vec{q}_\alpha, t) \qquad \text{(VIII-46)}$$

En portant (VIII-44) et (VIII-46) dans (VIII-45), on obtient finalement :

$$\begin{aligned} m_\alpha \ddot{\vec{q}}_\alpha &= e_\alpha\left[-\vec{\nabla} U(\vec{q}_\alpha, t) - \frac{\partial}{\partial t}\vec{A}(\vec{q}_\alpha, t) + \dot{\vec{q}}_\alpha\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}(\vec{q}_\alpha, t)\right)\right] \\ &= e_\alpha\left[\vec{E}(\vec{q}_\alpha, t) + \dot{\vec{q}}_\alpha\times\vec{B}(\vec{q}_\alpha, t)\right] \end{aligned} \qquad \text{(VIII-47)}$$

On reconnait l'équation de Newton relative à la particule α soumise à la force de Lorentz de la part des champs

26.2.74

IX - Equations de Hamilton-Jacobi pour un champ classique

But de ce §: Introduire le formalisme hamiltonien, en particulier pour le champ électromagnétique. Sert de base à la quantification.

A - Cas général (généralisation des résultats du § I).

Revenons au champ $u_i(\vec{r},t)$ décrit par la densité de lagrangien $\mathcal{L}(u_i, \dot{u}_i, \vec{\nabla} u_i)$ et le lagrangien $L = \int d^3r\, \mathcal{L}$

① Moments conjugués.

Introduisons le moment conjugué de u_i, noté π_i, par :

$$\pi_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}_i} = \frac{\delta L}{\delta \dot{u}_i} \qquad (IX-1)$$

(on a utilisé VII-60)

② Densité d'hamiltonien - Hamiltonien.

- La densité d'hamiltonien est par définition :

$$\mathcal{H} = \sum_i \pi_i \dot{u}_i - \mathcal{L} \qquad (IX-2)$$

- Utilisons la relation de définition IX-1 pour exprimer $\dot{u}_i$ en fonction de u_i et π_i et exprimons $\mathcal{H}$ en fonction des variables u_i et π_i, au lieu de u_i et $\dot{u}_i$ ($\mathcal{H}$ peut dépendre aussi éventuellement de $\vec{\nabla} u_i$ et $\vec{\nabla} \pi_i$) :

$$\mathcal{H}(u_i, \pi_i, \vec{\nabla} u_i, \vec{\nabla} \pi_i) \qquad (IX-3)$$

- A partir de $\mathcal{H}$, construisons l'hamiltonien :

$$H = \int d^3r\, \mathcal{H} = \int d^3r\, \dot{u}_i \pi_i - L \qquad (IX-4)$$

③ Equations de Hamilton-Jacobi.

- A tout instant t, H est une fonctionnelle de u_i et π_i. Par définition même des dérivées fonctionnelles (voir § II), la variation δH de H correspondant à des variations δu_i et $\delta \pi_i$ de u_i et π_i s'écrit :

$$\delta H = \int d^3r \left(\frac{\delta H}{\delta u_i} \delta u_i + \frac{\delta H}{\delta \pi_i} \delta \pi_i \right) \qquad (IX-5)$$

où $\frac{\delta H}{\delta u_i}$ et $\frac{\delta H}{\delta \pi_i}$ s'obtiennent à partir de $\mathcal{H}$ par un calcul analogue à celui du § II :

$$\frac{\delta H}{\delta u_i} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u_i} - \vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{\nabla} u_i} \qquad \frac{\delta H}{\delta \pi_i} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi_i} - \vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{\nabla} \pi_i} \qquad (IX-6)$$

- Calculons maintenant δH à partir de (IX-4)

$$\delta H = \int d^3r \sum_i (\pi_i \delta \dot{u}_i + \dot{u}_i \delta \pi_i) - \delta L \qquad (IX-7)$$

Or, comme L est une fonctionnelle de u_i et $\dot{u}_i$, on a d'après les résultats du § II :

$$\delta L = \int d^3r \left(\frac{\delta L}{\delta u_i} \delta u_i + \frac{\delta L}{\delta \dot{u}_i} \delta \dot{u}_i \right) \qquad (IX-8)$$

c'est à dire encore, en utilisant IX-1 :

$$\delta L = \int d^3r \left(\frac{\delta L}{\delta u_i} \delta u_i + \pi_i \delta \dot{u}_i \right) \qquad (IX-9)$$

En reportant IX-9 dans IX-7, on obtient :

$$\delta H = \int d^3r \left(\dot{u}_i \delta \pi_i - \frac{\delta L}{\delta u_i} \delta u_i \right) \qquad (IX-10)$$

Comparons (IX-10) à (IX-5). On en déduit que

$$\dot{u}_i = \frac{\delta H}{\delta \pi_i} \qquad \frac{\delta L}{\delta u_i} = - \frac{\delta H}{\delta u_i} \qquad (IX-11)$$

– Compte tenu des définitions (IX-1) et (IX-2), les égalités (IX-11) sont valables quels que soient u_i $\dot{u}_i$ π_i.

Supposons maintenant de plus que les fonctions $u_i(\vec{r},t)$, $\dot{u}_i(\vec{r},t)$, $\pi_i(\vec{r},t)$ correspondent au mouvement effectivement suivi par le champ ~~matériels~~. u_i est alors solution des équations de Lagrange (cf VIII-8) :

$$\frac{\delta L}{\delta u_i} - \frac{d}{dt}\frac{\delta L}{\delta \dot{u}_i} = 0 \qquad (IX-12)$$

On a alors compte tenu de IX-1

$$\dot{\pi}_i = \frac{\delta L}{\delta u_i} \qquad (IX-13)$$

Reportons IX-11 dans IX-13. Il vient

$$\begin{cases} \dot{u}_i = \dfrac{\delta H}{\delta \pi_i} = \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi_i} - \vec{\nabla}\cdot\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{\nabla}\pi_i} \\ \dot{\pi}_i = -\dfrac{\delta H}{\delta u_i} = -\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial u_i} + \vec{\nabla}\cdot\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{\nabla} u_i} \end{cases} \qquad (IX-14)$$

Ce sont les équations de Hamilton-Jacobi. L'état du champ à l'instant t est défini par la donnée des coordonnées u_i et des moments conjugués π_i en tout point $\vec{r}$. Les équations de Hamilton-Jacobi sont des équations du 1er ordre en t permettant de calculer l'évolution ultérieure du système.

④ Quantification.

$$\begin{cases} u_i(\vec{r},t) \longrightarrow \text{observable } U_i(\vec{r}) \\ \pi_i(\vec{r}',t) \longrightarrow \quad " \quad \Pi_i(\vec{r}') \end{cases}$$

En généralisant les résultats du § I, on obtient :

$$\left[U_i(\vec{r}), \Pi_j(\vec{r}') \right] = i\hbar\, \delta_{ij}\, \delta(\vec{r}-\vec{r}') \qquad (IX-15)$$

B. Cas du champ électromagnétique

① Moments conjugués.

On les calcule à partir du lagrangien VIII-13 (voir aussi VIII-14).

– Mt conjugué de $\vec{q}_\alpha$: $\vec{p}_\alpha$.

$$\vec{p}_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}_\alpha} = m_\alpha \dot{\vec{q}}_\alpha + e_\alpha \vec{A}(\vec{q}_\alpha, t) \qquad (IX-16)$$

– Mt conjugué de $\vec{A}(\vec{r},t)$: $\vec{\Pi}(\vec{r},t)$

$$\Pi_i(\vec{r},t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial E_i}\frac{\partial E_i}{\partial \dot{A}_i} = -\varepsilon_0 E_i(\vec{r},t) = \varepsilon_0(\partial_i U + \dot{A}_i) \qquad (IX-17)$$

Le moment conjugué de $\vec{A}$ est donc, à un facteur $-\varepsilon_0$ près, le champ électrique $\vec{E}$

$$\vec{\Pi}(\vec{r},t) = -\varepsilon_0 \vec{E}(\vec{r},t) \qquad (IX-18)$$

– Mt conjugué de U

U n'a pas de moment conjugué car $\dot{U}$ ne figure pas dans $\mathcal{L}$.

② Hamiltonien

Il faut d'abord éliminer $\dot{\vec{q}}_\alpha$ et $\dot{\vec{A}}$ au profit de $\vec{p}_\alpha$ et $\vec{\Pi}$. D'après (IX-16, 17)

$$\begin{cases} \dot{\vec{q}}_\alpha = \dfrac{1}{m_\alpha}\left[\vec{p}_\alpha - e_\alpha \vec{A}(\vec{q}_\alpha, t) \right] \\ \dot{\vec{A}} = -\vec{\nabla} U + \dfrac{1}{\varepsilon_0}\vec{\Pi} \end{cases} \qquad (IX-19)$$

Reportons IX-19 dans l'expression du hamiltonien :

$$H = \sum_\alpha \vec{p}_\alpha \cdot \dot{\vec{q}}_\alpha + \int d^3r\ \vec{\Pi} \cdot \dot{\vec{A}} - L \qquad (IX-20)$$

On obtient immédiatement à partir de (VIII-13), (IX-19) :

$$H = \sum_\alpha \frac{1}{2m_\alpha}\left[\vec{p}_\alpha - e_\alpha \vec{A}(\vec{q}_\alpha,t)\right]^2 + \sum_\alpha e_\alpha\, U(\vec{q}_\alpha,t)$$
$$+ \frac{\varepsilon_0}{2}\int d^3r \left[\frac{1}{\varepsilon_0^2}\vec{\Pi}^2 + c^2(\vec{\nabla}\times\vec{A})^2\right] - \int d^3r\ \vec{\Pi}\cdot\vec{\nabla} U \qquad (IX-21)$$

H est ainsi exprimé en fonction des coordonnées $\vec{q}_\alpha$, $\vec{A}$, U et des moments conjugués $\vec{p}_\alpha$, $\vec{\Pi}$

On peut encore écrire (IX-21) sous la forme suivante, utile pour la suite :

$$H = \sum_\alpha \int d^3r \left\{\frac{1}{2m_\alpha}\left[\vec{p}_\alpha - e_\alpha \vec{A}(\vec{r},t)\right]^2 + e_\alpha\, U(\vec{r},t)\right\} \delta(\vec{r}-\vec{q}_\alpha(t))$$
$$+ \varepsilon_0 \int d^3r \left\{\frac{1}{2}\left[\vec{E}(\vec{r},t)^2 + c^2\vec{B}(\vec{r},t)^2\right] + \vec{E}(\vec{r},t)\cdot\vec{\nabla}U(\vec{r},t)\right\} \qquad (IX-22)$$

3 Equations de Hamilton-Jacobi

Particules

– La $1^{ère}$ equation de H.J.

$$\dot{\vec{q}}_\alpha = \frac{\delta H}{\delta \vec{p}_\alpha} = \frac{1}{m_\alpha}\left[\vec{p}_\alpha - e_\alpha \vec{A}(\vec{q}_\alpha,t)\right] \qquad (IX-23)$$

redonne simplement IX-16

– Avant d'écrire la $2^{ème}$ équation de H.J., appliquons l'égalité VIII-37 au cas $\vec{A} = \vec{p}_\alpha - e_\alpha \vec{A}(\vec{q}_\alpha,t) = \vec{B}$. On obtient, compte tenu de IX-23

$$\vec{\nabla}_\alpha\left[\vec{p}_\alpha - e_\alpha \vec{A}(\vec{q}_\alpha,t)\right]^2 = 2m_\alpha(\dot{\vec{q}}_\alpha\cdot\vec{\nabla}_\alpha)(-e_\alpha\vec{A}) - 2m_\alpha e_\alpha\, \dot{\vec{q}}_\alpha \times (\vec{\nabla}_\alpha\times\vec{A}) \qquad (IX-24)$$

(Dans IX-24 $\vec{\nabla}$ est l'opérateur gradient par rapport à la coordonnée $\vec{q}_\alpha$)

On a par suite, en utilisant l'expression IX-21 de H :

$$\frac{\partial H}{\partial \vec{q}_\alpha} = \vec{\nabla}_\alpha H = e_\alpha(\dot{\vec{q}}_\alpha\cdot\vec{\nabla}_\alpha)\vec{A}(\vec{q}_\alpha,t) + e_\alpha\,\dot{\vec{q}}_\alpha\times\vec{B}(\vec{q}_\alpha,t) - e_\alpha\vec{\nabla}_\alpha U(\vec{q}_\alpha,t) \qquad (IX-25)$$

Par ailleurs, on a d'après IX-16 ou IX-23 :

$$\dot{\vec{p}}_\alpha = m_\alpha\ddot{\vec{q}}_\alpha + e_\alpha\frac{\partial}{\partial t}\vec{A}(\vec{q}_\alpha,t) + e_\alpha(\dot{\vec{q}}_\alpha\cdot\vec{\nabla}_\alpha)\vec{A}(\vec{q}_\alpha,t) \qquad (IX-26)$$

La $2^{ème}$ equation de H.J., $\dot{\vec{p}}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial \vec{q}_\alpha}$, s'écrit donc compte tenu de (IX-25) et (IX-26)

$$m_\alpha\ddot{\vec{q}}_\alpha = e_\alpha\left(-\vec{\nabla}_\alpha U - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) + e_\alpha\,\dot{\vec{q}}_\alpha\times\vec{B} = e_\alpha\left[\vec{E}(\vec{q}_\alpha,t) + \dot{\vec{q}}_\alpha\times\vec{B}(\vec{q}_\alpha,t)\right] \qquad (IX-27)$$

On retrouve bien l'équation du mouvement de la particule α sous l'effet de la force de Lorentz.

Potentiel vecteur

– Comme $\mathcal{H}$ ne dépend pas de $\vec{\nabla}\Pi_i$, la $1^{ère}$ equation de H.J. s'écrit.

$$\dot{\vec{A}} = \frac{\delta H}{\delta\vec{\Pi}} = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\vec{\Pi}} = \frac{1}{\varepsilon_0}\vec{\Pi} - \vec{\nabla}U \qquad (IX-28)$$

On réobtient simplement (IX-17).

– La 2ème équation de H.J. s'écrit :

$$\dot{\Pi}_k = -\frac{\delta H}{\delta A_k} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial A_k} + \partial_j \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial(\partial_j A_k)} \qquad (IX-29)$$

De (IX-22), on tire :

$$-\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial A_k} = \frac{e_\alpha}{m_\alpha}\left[\vec{P}_\alpha - e_\alpha \vec{A}(\vec{q}_\alpha, t)\right]_k \delta(\vec{r} - \vec{q}_\alpha(t)) = e_\alpha\left(\dot{\vec{q}}_\alpha\right)_k \delta(\vec{r} - \vec{q}_\alpha(t)) = J_k(t) \qquad (IX-30)$$

D'autre part, en utilisant VIII-25, on obtient

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial(\partial_j A_k)} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial B_i}\frac{\partial B_i}{\partial(\partial_j A_k)} = \varepsilon_0 c^2 B_i \varepsilon_{ijk} \qquad (IX-31)$$

d'où l'on tire finalement en reportant IX-30 et IX-31 dans IX-29

$$\varepsilon_{kji}\, \partial_j B_i = \mu_0 J_k + \frac{1}{c^2}\dot{E}_k \qquad (IX-32)$$

qui n'est autre que l'équation de Maxwell $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$.

Potentiel scalaire.

Comme $\dot{U}$ ne figure pas dans $\mathcal{L}$, U n'a pas pas de moment conjugué et le formalisme de Hamilton-Jacobi ne s'applique pas. 2 points de vue sont alors possibles :

1er point de vue :

On utilise le fait que H est relié à L par IX-4, et les relations générale IX-11 qui ~~s'appliquent~~ en découlent entre les dérivées fonctionnelles de L et H. On a donc dans le cas de la variable U :

$$\frac{\delta L}{\delta U} = -\frac{\delta H}{\delta U} \qquad (IX-33)$$

quelles que soient les valeurs des coordonnées des champs et des particule.

Supposons maintenant de plus que l'on remplace dans IX-33, ces dernières coordonnées par leurs valeurs correspondant à un mouvement effectivement suivi par le système, c-à-d par des fonctions solutions des équations de Lagrange. Ces equations s'écrivent pour U :

$$\frac{\delta L}{\delta U} = \frac{d}{dt}\frac{\delta L}{\delta \dot{U}} = 0 \quad \text{car } \mathcal{L} \text{ ne dépend pas de } \dot{U} \qquad (IX-34)$$

On en déduit, grace à IX-33 :

$$\frac{\delta H}{\delta U} = 0 \quad \text{pour un mouvement réel du système} \qquad (IX-35)$$

c-à-d encore

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial U} - \partial_i \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial(\partial_i U)} = 0 \qquad (IX-36)$$

De (IX-22), on tire

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial U} = \sum_\alpha e_\alpha \delta(\vec{r} - \vec{q}_\alpha(t)) = \rho(\vec{r}, t)$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial_i U} = \varepsilon_0 E_i \qquad (IX-37)$$

ce qui donne finalement, reporté dans IX-36, l'équation de Maxwell

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad (IX-38)$$

2e point de vue.

On "oublie" le Lagrangien dont est issu H et on considère directement et uniquement l'hamiltonien H donné en IX-21 ou IX-22, ainsi que les équations de H.J. relatives aux variables conjuguées $\vec{q}_\alpha, \vec{P}_\alpha$ et $\vec{A}, \vec{\Pi}$.

Comme aucune équation ne régit alors le mouvement de U, l'ensemble des solutions des équations de H.J. relatives à $\vec{q}_\alpha, \vec{P}_\alpha$ et $\vec{A}, \vec{\Pi}$ est beaucoup plus vaste que celui obtenu plus haut. On vérifie ensuite qu'on peut se restreindre à un sous ensemble de solutions telles que l'égalité $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} - \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0$ soit satisfaite à tout instant.

Pour cela, il suffit de vérifier que les équations de H.J. relatives à $\vec{q}_\alpha, \vec{p}_\alpha$ et à $\vec{A}, \vec{\Pi}$ entraînent que :

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{\nabla}.\vec{E} - \frac{\rho}{\varepsilon_0}\right) = \frac{d}{dt}\left(\vec{\nabla}.\vec{\Pi} + \rho\right) = 0 \qquad (IX-39)$$

Comme les équations de H.J. sont du 1er ordre en t, si l'on choisit à l'instant initial un état tel que $\vec{\nabla}.\vec{\Pi} + \rho = 0$ à cet instant, alors, à cause de IX-39, $\vec{\nabla}.\vec{\Pi} + \rho$ restera nul à tout instant ultérieur.

Effectivement, partons de l'équation IX-32 (équation de H.J relative à $\vec{A}$ et à $\vec{\Pi} = -\varepsilon_0 \vec{E}$) et prenons la divergence des 2 membres. Comme $\vec{\nabla}.(\vec{\nabla} \times \vec{B}) = 0$, il vient :

$$\vec{\nabla}.\dot{\vec{E}} = -\mu_0 c^2\, \vec{\nabla}.\vec{J} = -\frac{1}{\varepsilon_0}\, \vec{\nabla}.\vec{J} \qquad (IX-40)$$

En utilisant l'équation de conservation de l'électricité VIII-12, on retrouve bien alors que :

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{\nabla}.\vec{E} - \frac{\rho}{\varepsilon_0}\right) = 0 \qquad (IX-41)$$

5.3.74

V – Lois de conservation pour un système de charges et de champs en interaction.

But de ce § : Introduire, à partir des formalismes lagrangien et hamiltonien, des grandeurs physiques importantes, relatives à un système de charges et de champs en interaction, et qui sont des constantes du mouvement : impulsion totale, moment cinétique total, énergie totale.

A – Impulsion totale.

① – Variation de l'action lors d'une translation infinitésimale des axes de coordonnées

a – Transformation des coordonnées du système global.

Translatons le système d'axes d'une quantité infinitésimale $\vec{\eta}$, sans toucher, ni aux champs, ni aux charges. Quelles sont les nouvelles valeurs des coordonnées $\vec{q}_\alpha$, $\vec{A}(\vec{r},t)$, $U(\vec{r},t)$ dans le nouveau système d'axes ?

– $$\vec{q}_\alpha \longrightarrow \vec{q}_\alpha{}' = \vec{q}_\alpha - \vec{\eta} \qquad (X-1)$$

– $\vec{A}(\vec{r},t) \to \vec{A}'(\vec{r},t)$ avec $\vec{A}(\vec{r},t) = \vec{A}'(\vec{r}',t)$ lorsque $\vec{r}' = \vec{r} - \eta$

On en déduit : $$\vec{A}(\vec{r},t) \longrightarrow \vec{A}'(\vec{r},t) = \vec{A}(\vec{r}+\vec{\eta},t) \qquad (X-2)$$

– On a de même : $$U(\vec{r},t) \longrightarrow U'(\vec{r},t) = U(\vec{r}+\vec{\eta},t) \qquad (X-3)$$

b – Transformation de $\vec{J}$, ρ et des champs $\vec{E}$, $\vec{B}$

– D'après (X-1), $\dot{\vec{q}}_\alpha$ ne change pas car $\vec{\eta}$ ne dépend pas de t.
$$\dot{\vec{q}}_\alpha \longrightarrow \dot{\vec{q}}_\alpha{}' = \dot{\vec{q}}_\alpha \qquad (X-4)$$

D'après (VIII-11), $\vec{J}(\vec{r},t) = \sum_\alpha \dot{\vec{q}}_\alpha\, \delta(\vec{r}-\vec{q}_\alpha(t))$. En portant dans cette formule (X-1) et (X-4), on obtient :
$$\vec{J}(\vec{r},t) \to \vec{J}'(\vec{r},t) = \sum_\alpha \dot{\vec{q}}_\alpha{}'\, \delta(\vec{r}-\vec{q}_\alpha{}'(t)) = \sum_\alpha \dot{\vec{q}}_\alpha\, \delta\left(\vec{r}+\vec{\eta}-\vec{q}_\alpha(t)\right) = \vec{J}(\vec{r}+\vec{\eta},t) \qquad (X-5)$$
Donc le champ de vecteurs $\vec{J}(\vec{r},t)$ se transforme comme le champ de vecteurs $\vec{A}(\vec{r},t)$.

– On trouve de même que :
$$\rho(\vec{r},t) \longrightarrow \rho'(\vec{r},t) = \rho(\vec{r}+\vec{\eta},t) \qquad (X-6)$$

– Enfin, le même raisonnement que celui fait plus haut pour $\vec{A}$ donne :
$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r},t) &\longrightarrow \vec{E}'(\vec{r},t) = \vec{E}(\vec{r}+\vec{\eta},t)\\ \vec{B}(\vec{r},t) &\longrightarrow \vec{B}'(\vec{r},t) = \vec{B}(\vec{r}+\vec{\eta},t)\end{aligned} \qquad (X-7)$$

c – Transformation du Lagrangien (voir formules VIII-13 et VIII-14).

– Terme $\frac{1}{2}\sum_\alpha m_\alpha \dot{\vec{q}}_\alpha^{\,2}$: D'après (X-4), il ne change pas.

– Terme $\int d^3r \left[\vec{A}(\vec{r},t).\vec{J}(\vec{r},t) - U(\vec{r},t)\,\rho(\vec{r},t)\right]$. En utilisant (X-2, 3, 5, 6), on voit que ce terme devient
$$\int d^3r \left[\vec{A}(\vec{r},t).\vec{J}(\vec{r},t) - U(\vec{r},t)\,\rho(\vec{r},t)\right] \longrightarrow \int d^3r \left[\vec{A}(\vec{r}+\vec{\eta},t).\vec{J}(\vec{r}+\vec{\eta},t) - U(\vec{r}+\vec{\eta},t)\rho(\vec{r}+\vec{\eta},t)\right]$$
En posant $\vec{r}' = \vec{r}+\vec{\eta}$, et en utilisant le fait que $d^3r' = d^3r$, on voit que ce terme ne change pas.

– Terme $\frac{\varepsilon_0}{2}\int d^3r\,\left[\vec{E}(\vec{r},t)^2 - c^2\,\vec{B}(\vec{r},t)^2\right]$. Un raisonnement identique montre qu'il ne change pas.

Les résultats précédents étaient d'ailleurs assez évidents : l'intégrale spatiale du produit ~~de 2 et~~ scalaire de 2 champs de vecteurs, ou du produit de 2 champs scalaires est invariante par translation des axes.

– En conclusion, le lagrangien $L(t)$ est invariant lors de la translation du système d'axes. Ceci est dû au fait que L ne dépend pas explicitement des coordonnées x, y, z.

$$L(t) \longrightarrow L'(t) = L(t) \qquad (X-8)$$

d – Variation de l'action ($1^{\text{ère}}$ méthode).

– Comme L ne change pas, il en est de même pour S :

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt\; L \;\rightarrow\; S' = \int_{t_1}^{t_2} dt\; L' = S \qquad (X-9)$$

– On a par suite :

$$\delta S = 0 \qquad (X-10)$$

e – Variation de l'action ($2^{\text{ème}}$ méthode).

– Principe du calcul : On calcule l'action dans le nouveau système d'axes à partir des nouvelles valeurs au point $\vec{r}$, $\vec{A}'(\vec{r})$ et $U'(\vec{r})$, des potentiels (voir X-2 et X-3), et des nouvelles valeurs, $\vec{q}'_\alpha$, des coordonnées (voir X-1). La variation δS de l'action par rapport à l'ancienne valeur peut donc être également considérée comme résultant d'une variation de $\vec{q}_\alpha$, $\vec{A}(\vec{r},t)$, $U(\vec{r},t)$, calculable à partir de X-1, X-2, X-3

$$\begin{cases} \delta\vec{q}_\alpha = \vec{q}'_\alpha - \vec{q}_\alpha = -\vec{\eta} \\ \delta\vec{A}(\vec{r},t) = \vec{A}'(\vec{r},t) - \vec{A}(\vec{r},t) = \vec{A}(\vec{r}+\vec{\eta},t) - \vec{A}(\vec{r},t) = (\vec{\eta}\cdot\vec{\nabla})\vec{A}(\vec{r},t) \\ \delta U(\vec{r},t) = U'(\vec{r},t) - U(\vec{r},t) = U(\vec{r}+\vec{\eta},t) - U(\vec{r},t) = \vec{\eta}\cdot\vec{\nabla}U(\vec{r},t) \end{cases} \qquad (X-11)$$

– D'après la notion de dérivée fonctionnelle (voir § II), la variation correspondante δL du lagrangien s'écrit

$$\delta L = \sum_\alpha\left(\frac{\partial L}{\partial \vec{q}_\alpha}\cdot\delta\vec{q}_\alpha + \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}_\alpha}\cdot\delta\dot{\vec{q}}_\alpha\right) + \int d^3r\left(\frac{\delta L}{\delta \vec{A}}\cdot\delta\vec{A} + \frac{\delta L}{\delta \dot{\vec{A}}}\cdot\delta\dot{\vec{A}} + \frac{\delta L}{\delta U}\,\delta U\right) \qquad (X-12)$$

(on a utilisé le fait que $\frac{\delta L}{\delta \dot{U}} = 0$)

– Pour calculer δS intégrons (X-12) entre t_1 et t_2. Une intégration par parties sur les termes en $\delta\dot{\vec{q}}_\alpha$ et $\delta\dot{\vec{A}}$ donne :

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt\left[\sum_\alpha\left(\frac{\partial L}{\partial \vec{q}_\alpha} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}_\alpha}\right)\cdot\delta\vec{q}_\alpha + \int d^3r\left(\frac{\delta L}{\delta \vec{A}} - \frac{d}{dt}\frac{\delta L}{\delta \dot{\vec{A}}}\right)\cdot\delta\vec{A} + \int d^3r\,\frac{\delta L}{\delta U}\,\delta U\right]$$
$$+ \left[\sum_\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}_\alpha}\cdot\delta\vec{q}_\alpha + \int d^3r\,\frac{\delta L}{\delta \dot{\vec{A}}}\cdot\delta\vec{A}\right]_{t_1}^{t_2} \qquad (X-13)$$

A la différence de ce que nous avons rencontré jusqu'ici, le terme tout intégré obtenu lors de l'intégration par parties ($2^{\text{ème}}$ ligne de X-13) ne s'annule pas car les variations $\delta\vec{q}_\alpha$ et $\delta\vec{A}$ données en (X-11) ne s'annulent pas aux extrémités.

② - Cas d'un mouvement réel du système - Définition de l'impulsion totale.

a - Existence d'une constante du mouvement.

Jusqu'ici nous n'avons fait aucune hypothèse sur les fonctions $\vec{q}_\alpha(t)$, $\vec{A}(\vec{r},t)$, $U(\vec{r},t)$. Supposons maintenant qu'elles correspondent à un mouvement réel du système, c-à-d soient solutions des équations de Lagrange.

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{q}_\alpha} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}_\alpha} = \frac{\delta L}{\delta \vec{A}} - \frac{d}{dt}\frac{\delta L}{\delta \dot{\vec{A}}} = \frac{\delta L}{\delta U} = 0 \qquad (X-14)$$

La 1ère ligne de X-13 s'annule alors et δS se réduit au terme tout intégré (2ème ligne). Comme on sait par ailleurs (cf formule X-10) que $\delta S = 0$, on voit que la quantité :

$$\sum_\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}_\alpha}\cdot\delta\vec{q}_\alpha + \int d^3r\, \frac{\delta L}{\delta \dot{\vec{A}}}\cdot\delta\vec{A} \qquad (X-15)$$

(où $\delta\vec{q}_\alpha$ et $\delta\vec{A}$ sont donnés en X-11) prend la même valeur en t_1 et en t_2. Comme t_1 et t_2 sont quelconques, cette quantité est une constante du mouvement.

b - Définition de l'impulsion globale $\vec{\mathcal{P}}$.

En utilisant les définitions $\vec{p}_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}_\alpha}$ et $\vec{\Pi}(\vec{r},t) = \frac{\delta L}{\delta \dot{\vec{A}}(\vec{r},t)}$ des moments conjugués de $\vec{q}_\alpha$ et $\vec{A}$, ainsi que les expressions (X-11) de $\delta\vec{q}_\alpha$ et $\delta\vec{A}$, on obtient pour cette constante du mouvement

$$-\vec{\eta}\cdot\sum_\alpha \vec{p}_\alpha + \int d^3r \sum_j \Pi_j\,(\vec{\eta}\cdot\vec{\nabla})A_j \qquad (X-16)$$

(X-16) représente la projection sur le vecteur $-\vec{\eta}$ du vecteur

$$\vec{\mathcal{P}} = \sum_\alpha \vec{p}_\alpha - \int d^3r \sum_j \Pi_j\,\vec{\nabla}A_j \qquad (X-17)$$

Comme $\vec{\eta}$ est quelconque, les 3 composantes du vecteur $\vec{\mathcal{P}}$, appelé <u>impulsion totale</u> du système charges + champs, sont des constantes du mouvement.

c - Autre expression équivalente de $\vec{\mathcal{P}}$.

La composante sur l'axe i de $\vec{\mathcal{P}}$ s'écrit (convention de sommation sur indices répétés) :

$$\mathcal{P}_i = \sum_\alpha p_{\alpha i} - \int d^3r\, \Pi_j\,\partial_i A_j \qquad (X-18)$$

Utilisons l'égalité démontrée plus haut (cf VIII-38)

$$\partial_i A_j = \partial_j A_i + \varepsilon_{ijk}(\vec{\nabla}\times\vec{A})_k = \partial_j A_i + \varepsilon_{ijk} B_k \qquad (X-19)$$

En reportant (X-19) dans (X-18), on obtient

$$\mathcal{P}_i = \sum_\alpha p_{\alpha i} - \int d^3r\, \Pi_j\,\partial_j A_i - \int d^3r\, \underbrace{\varepsilon_{ijk}\,\Pi_j\,B_k}_{=(\vec{\Pi}\times\vec{B})_i} \qquad (X-20)$$

Intégrons par parties le 2ème terme :

$$-\int d^3r\,\Pi_j\,\partial_j A_i = \underbrace{-\int d^3r\,\partial_j\,\Pi_j A_i}_{\text{Transf. en 1 intégrale de surface nulle pour } r\to\infty} + \int d^3r\, A_i\,\partial_j\Pi_j \qquad (X-21)$$

Finalement, on obtient, en remplaçant $\vec{\Pi}$ par $-\varepsilon_0\vec{E}$ (cf IX-18) :

$$\vec{\mathcal{P}} = \sum_\alpha \vec{p}_\alpha + \varepsilon_0\int d^3r\,\vec{E}\times\vec{B} - \varepsilon_0\int d^3r\,\vec{A}\,(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}) \qquad (X-22)$$

d - Discussion physique.

Pour voir ce que représente la valeur du 3e terme de (X-22), utilisons le fait que nous nous intéressons à un mouvement réel du système pour lequel on a

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad (X-23)$$

Portons X-23 dans X-22 et utilisons l'expression de $\rho(\vec{r},t)$ (cf VIII-10) :

$$\rho(\vec{r},t) = \sum_\alpha e_\alpha \, \delta(\vec{r}-\vec{q}_\alpha(t)) \qquad (X-24)$$

On obtient pour le 3ème terme de (X-22) :

$$-\int d^3r \; \vec{A}(\vec{r},t) \sum_\alpha e_\alpha \, \delta(\vec{r}-\vec{q}_\alpha(t)) = -\sum_\alpha e_\alpha \vec{A}(\vec{q}_\alpha,t) \qquad (X-25)$$

On peut regrouper ce terme avec le 1er terme de (X-22) et faire apparaître

$$\vec{p}_\alpha - e_\alpha \vec{A}(\vec{q}_\alpha,t) = m_\alpha \dot{\vec{q}}_\alpha \qquad (X-26)$$

c-à-d la quantité de mouvement de la particule α (cf IX-16). Finalement, la valeur de $\vec{\mathcal{P}}$ pour un mouvement réel s'écrit :

$$\vec{\mathcal{P}} = \sum_\alpha m_\alpha \dot{\vec{q}}_\alpha + \varepsilon_0 \int d^3r \; \vec{E} \times \vec{B} \qquad (X-27)$$

$\vec{\mathcal{P}}$ est donc égal à la somme des quantités de mouvement des particules et de l'intégrale du vecteur de Poynting.

B - Moment cinétique total.

Nous reprenons le raisonnement du § A en l'appliquant à une rotation infinitésimale du système d'axes, d'angle $d\varphi$ autour du vecteur unitaire $\vec{\omega}$.

(1) Variation de l'action lors d'une rotation du système d'axes.

a - Transformation des coordonnées.

- $$\vec{q}_\alpha \longrightarrow \vec{q}\,'_\alpha = \mathcal{R}\vec{q}_\alpha = \vec{q}_\alpha - d\varphi \, \vec{\omega} \times \vec{q}_\alpha \qquad (X-28)$$

- $$\vec{A}(\vec{r},t) \rightarrow \vec{A}'(\vec{r},t) \quad \text{avec} \quad \vec{A}'(\mathcal{R}\vec{r},t) = \mathcal{R}\,\vec{A}(\vec{r},t) \qquad (X-29)$$

En effet, les composantes de $\vec{A}'$, au point qui a pour coordonnées dans le nouveau système d'axes $\mathcal{R}\vec{r}$, s'obtiennent en faisant la rotation $\mathcal{R}$ sur les composantes de $\vec{A}$ au même point de l'espace ~~[illegible]~~, de coordonnées $\vec{r}$ dans l'ancien système. (X-29) peut encore s'écrire

$$\vec{A}(\vec{r},t) \rightarrow \vec{A}'(\vec{r},t) = \mathcal{R}\,\vec{A}(\mathcal{R}^{-1}\vec{r},t) \qquad (X-30)$$

c-à-d, si l'on utilise la forme de $\mathcal{R}$ pour une rotation infinitésimale :

$$\vec{A}'(\vec{r},t) = \vec{A}(\vec{r}+d\varphi\,\vec{\omega}\times\vec{r},t) - d\varphi\,\vec{\omega}\times\vec{A}(\vec{r}+d\varphi\,\vec{\omega}\times\vec{r},t) \qquad (X-31)$$

En effectuant un développement de Taylor de $\vec{A}$ au voisinage de r :

$$\vec{A}(\vec{r}+d\varphi\,\vec{\omega}\times\vec{r},t) = \vec{A}(\vec{r},t) + d\varphi\left((\vec{\omega}\times\vec{r}).\vec{\nabla}\right)\vec{A}(\vec{r},t) \qquad (X-32)$$

et en ne gardant que les termes d'ordre 1 en $d\varphi$, on obtient :

$$\vec{A}'(\vec{r},t) = \vec{A}(\vec{r},t) + d\varphi\left[-\vec{\omega}\times\vec{A}(\vec{r},t) + \left(\vec{\omega}.(\vec{r}\times\vec{\nabla})\right)\vec{A}(\vec{r},t)\right] \qquad (X-33)$$

(on a utilisé $(\vec{\omega}\times\vec{r}).\vec{\nabla} = \vec{\omega}.(\vec{r}\times\vec{\nabla})$).

- On trouve de même

$$U(\vec{r},t) \longrightarrow U'(\vec{r},t) = U(\mathcal{R}^{-1}\vec{r},t) = U(\vec{r},t) + d\varphi\,\vec{\omega}.\left(\vec{r}\times\vec{\nabla}\,U(\vec{r},t)\right) \qquad (X-34)$$

b - Transformation de $\vec{J}$, ρ, $\vec{E}$, $\vec{B}$.

$\vec{J}$, $\vec{E}$, $\vec{B}$ se transforment comme $\vec{A}$, ρ comme U.

c - Transformation du Lagrangien.

- Dans la rotation le module de $\dot{\vec{q}}_\alpha$ ne change pas. Donc $\frac{1}{2}\sum_\alpha m_\alpha \dot{\vec{q}}_\alpha^{\,2}$ ne change pas.
- L'intégrale dans tout l'espace du produit scalaire de 2 champs vectoriels comme $\int d^3r \; \vec{J}.\vec{A}$ ou $\int d^3r \; \vec{E}.\vec{E}$ ou $\int d^3r \; \vec{B}.\vec{B}$ est invariante par rotation. Il en est de même de l'intégrale du produit de 2 champs scalaires comme $\int d^3r \; \rho \, U$
- Le lagrangien L est donc invariant par rotation

d – Variation de l'action (1ère méthode)

Il découle du § c précédent que : $\delta S = 0$ (X-35)

e – Variation de l'action (2ème méthode)

Calculons la variation δS de l'action correspondant aux variations

$$\begin{cases} \delta\vec{q}_\alpha = \vec{q}\,'_\alpha - \vec{q}_\alpha = -d\varphi\ \vec{\omega}\times\vec{q}_\alpha \\ \delta\vec{A} = \vec{A}'(\vec{r},t) - \vec{A}(\vec{r},t) = d\varphi\left[-\vec{\omega}\times\vec{A} + \left(\vec{\omega}\cdot(\vec{r}\times\vec{\nabla})\right)\vec{A}\right] \\ \delta U = U'(\vec{r},t) - U(\vec{r},t) = d\varphi\ \left(\vec{\omega}\cdot(\vec{r}\times\vec{\nabla})\right)U \end{cases} \quad (X-36)$$

Un calcul en tout point identique à celui du § A1e précédent redonne (X-13), la seule différence étant que $\delta\vec{q}_\alpha$ et $\delta\vec{A}$ sont maintenant donnés par (X-36) au lieu de (X-11).

② Cas d'un mouvement réel du système – Définition du moment cinétique total $\vec{J}$.

a – Existence d'une constante du mouvement. Définition de $\vec{J}$.

Le même raisonnement que celui fait au § A2a montre que la quantité X-15 où $\delta\vec{q}_\alpha$ et $\delta\vec{A}$ sont donnés par (X-36) est une constante du mouvement. En portant X-36 dans X-15 et en utilisant les définitions de $\vec{p}_\alpha$ et $\vec{\Pi}$, on obtient pour cette constante du mouvement :

$$-d\varphi\left\{\sum_\alpha \underbrace{\vec{p}_\alpha\cdot(\vec{\omega}\times\vec{q}_\alpha)}_{=\vec{\omega}\cdot(\vec{q}_\alpha\times\vec{p}_\alpha)} + \int d^3r\left[\underbrace{\vec{\Pi}\cdot(\vec{\omega}\times\vec{A})}_{=\vec{\omega}\cdot(\vec{A}\times\vec{\Pi})} - \sum_k \Pi_k\left(\vec{\omega}\cdot(\vec{r}\times\vec{\nabla})\right)A_k\right]\right. \quad (X-37)$$

On obtient la projection sur le vecteur $-\vec{\omega}\,d\varphi$ du vecteur

$$\vec{J} = \sum_\alpha \vec{q}_\alpha\times\vec{p}_\alpha + \int d^3r\left[\vec{A}\times\vec{\Pi} - \sum_k \Pi_k(\vec{r}\times\vec{\nabla})\,A_k\right] \quad (X-38)$$

$\vec{J}$ est le moment cinétique total. Ses 3 composantes sont des constantes du mouvement.

b – Autre expression équivalente de $\vec{J}$.

- La composante sur i de $\vec{J}$ s'écrit (sommation sur indices répétés) :

$$J_i = \left(\sum_\alpha \vec{q}_\alpha\times\vec{p}_\alpha\right)_i + \int d^3r\left[(\vec{A}\times\vec{\Pi})_i - \varepsilon_{ij\ell}\,\Pi_k\, r_j\,\partial_\ell A_k\right] \quad (X-39)$$

- D'après X-19,

$$\partial_\ell A_k = \partial_k A_\ell + \varepsilon_{\ell k m} B_m \quad (X-40)$$

Reportons (X-40) dans le dernier terme de X-39

$$-\varepsilon_{ij\ell}\,\Pi_k\,r_j\,\partial_\ell A_k = -\varepsilon_{ij\ell}\,\Pi_k\,r_j\,\partial_k A_\ell - \varepsilon_{ij\ell}\,\varepsilon_{\ell k m}\,\Pi_k\,r_j\,B_m \quad (X-41)$$

Reporté dans (X-39), le 2° terme de X-41 donne

$$-\int d^3r\ \varepsilon_{ij\ell}\ r_j\ \underbrace{(\varepsilon_{\ell k m}\Pi_k B_m)}_{(\vec{\Pi}\times\vec{B})_\ell} = -\int d^3r\left(\vec{r}\times(\vec{\Pi}\times\vec{B})\right)_i = \varepsilon_0\int d^3r\left(\vec{r}\times(\vec{E}\times\vec{B})\right)_i \quad (X-42)$$

Reporté dans (X-39), le 1er terme de X-41 donne après une intégration par parties :

$$-\int d^3r\ \underbrace{\partial_k\left(\varepsilon_{ij\ell}\,\Pi_k\,r_j\,A_\ell\right)}_{\substack{\text{Transformation en une} \\ \text{intégrale de surface nulle}}} + \int d^3r\ \varepsilon_{ij\ell}\,A_\ell\,\partial_k(\Pi_k\,r_j) \quad (X-43)$$

Comme $\quad \partial_k(\Pi_k r_j) = r_j(\partial_k \Pi_k) + \Pi_k \underbrace{\partial_k r_j}_{=\delta_{ij}} = r_j(\vec{\nabla}.\vec{\Pi}) + \Pi_j \qquad$ (X-44)

on obtient pour le dernier terme de (X-43) :

$$\int d^3r \left[\varepsilon_{ijl}\, r_j A_l\, (\vec{\nabla}.\vec{\Pi}) + \varepsilon_{ijl}\, \Pi_j A_l\right] = \int d^3r \left[(\vec{\nabla}.\vec{\Pi})(\vec{r}\times\vec{A})_i - (\vec{A}\times\vec{\Pi})_i\right] \qquad \text{(X-45)}$$

- En utilisant (X-39), (X-41), (X-42), (X-43) et (X-45), on voit finalement que $\vec{J}$ peut s'écrire

$$\vec{J} = \sum_\alpha \vec{q}_\alpha \times \vec{p}_\alpha + \varepsilon_0 \int d^3r\ \vec{r}\times(\vec{E}\times\vec{B}) - \varepsilon_0 \int d^3r\ (\vec{r}\times\vec{A})(\vec{\nabla}.\vec{E}) \qquad \text{(X-46)}$$

c - Discussion physique.

- Dans un mouvement réel du système, $\vec{\nabla}.\vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$. En reportant (X-23) et (X-24) dans le dernier terme de (X-46), on voit que ce dernier terme s'écrit

$$- \sum_\alpha e_\alpha\, \vec{q}_\alpha \times \vec{A}(\vec{q}_\alpha, t) \qquad \text{(X-47)}$$

- En regroupant (X-47) avec le 1er terme de (X-46) et en utilisant (X-26), on obtient pour $\vec{J}$:

$$\vec{J} = \sum_\alpha \vec{q}_\alpha \times m_\alpha \dot{\vec{q}}_\alpha + \varepsilon_0 \int d^3r\ \vec{r}\times(\vec{E}\times\vec{B}) \qquad \text{(X-48)}$$

$\vec{J}$ est la somme des moments des quantités de mouvement des particules et de l'intégrale du moment du vecteur de Poynting.

C - Energie totale.

On translate l'axe des temps d'une quantité infinitésimale ε.

1 Variation de l'action lors d'une translation infinitésimale de l'axe des temps.

a - Transformation des coordonnées.

$$\begin{cases} \vec{q}_\alpha(t) \rightarrow \vec{q}\,'_\alpha(t) = \vec{q}_\alpha(t+\varepsilon) \\ \vec{A}(\vec{r},t) \rightarrow \vec{A}'(\vec{r},t) = \vec{A}(\vec{r},t+\varepsilon) \\ U(\vec{r},t) \rightarrow U'(\vec{r},t) = U(\vec{r},t+\varepsilon) \end{cases} \qquad \text{(X-49)}$$

+ Formules analogues pour $\vec{J}, \rho, \vec{E}, \vec{B}$

b - Transformation du Lagrangien.

Comme le lagrangien ne dépend pas explicitement du temps

$$L(t) \rightarrow L'(t) = L(t+\varepsilon) \qquad \text{(X-50)}$$

c - Variation de l'action (1ère méthode).

$$S' = \int_{t_1}^{t_2} L'(t)\,dt = \int_{t_1}^{t_2} L(t+\varepsilon)\,dt = \int_{t_1+\varepsilon}^{t_2+\varepsilon} L(t)\,dt$$

$$= \underbrace{\int_{t_1+\varepsilon}^{t_1} L(t)\,dt}_{-\varepsilon L(t_1)} + \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} L(t)\,dt}_{S} + \underbrace{\int_{t_2}^{t_2+\varepsilon} L(t)\,dt}_{\varepsilon L(t_2)} \qquad \text{(X-51)}$$

On a donc

$$\delta S = S' - S = \varepsilon\left[L(t_2) - L(t_1)\right] \qquad \text{(X-52)}$$

d - Variation de l'action (2ème méthode)

$$\begin{cases} \delta \vec{q}_\alpha = \vec{q}\,'_\alpha(t) - \vec{q}_\alpha(t) = \vec{q}_\alpha(t+\varepsilon) - \vec{q}_\alpha(t) = \varepsilon\, \dot{\vec{q}}_\alpha(t) \\ \delta \vec{A} = \vec{A}'(\vec{r},t) - \vec{A}(\vec{r},t) = \vec{A}(\vec{r},t+\varepsilon) - \vec{A}(\vec{r},t) = \varepsilon\, \dot{\vec{A}}(\vec{r},t) \\ \delta U = U'(\vec{r},t) - U(\vec{r},t) = \varepsilon\, \dot{U}(\vec{r},t) \end{cases} \qquad (X-53)$$

Un calcul analogue à celui du § A I c conduit à la formule X-13 où δq_α et $\delta \vec{A}$ sont donnés par X-53

② Cas d'un mouvement réel du système - Définition de l'énergie totale -

a - Existence d'une constante du mouvement.

Pour un mouvement réel du système, la 1ère ligne de X-13 s'annule. On égale alors la 2ème ligne de X-13 (où $\delta \vec{q}_\alpha$ et $\delta \vec{A}$ sont donnés par X-53) à X-52. Il vient ainsi (après avoir introduit $\vec{p}_\alpha$ et $\vec{\Pi}$) :

$$\varepsilon \Big[L(t) \Big]_{t_1}^{t_2} = \varepsilon \Big[\sum_\alpha \vec{p}_\alpha \cdot \dot{\vec{q}}_\alpha + \int d^3r\, \vec{\Pi} \cdot \dot{\vec{A}} \Big]_{t_1}^{t_2} \qquad (X-54)$$

La quantité

$$\sum_\alpha \vec{p}_\alpha \cdot \dot{\vec{q}}_\alpha + \int d^3r\, \vec{\Pi} \cdot \dot{\vec{A}} - L \qquad (X-55)$$

est donc une constante du mouvement. Ce n'est autre que l'hamiltonien H déjà introduit au § IV. H représente l'énergie totale du système charges + champs.

b - Discussion physique

Reprenons l'expression IX-21 de H. Faisons une intégration par parties sur le dernier terme :

$$- \int d^3r\, \vec{\Pi} \cdot \vec{\nabla} U = \underbrace{- \int d^3r\, \vec{\nabla}(\vec{\Pi} U)}_{\text{Transformation en une intégrale de surface nulle}} + \int d^3r\, U (\vec{\nabla} \cdot \vec{\Pi}) \qquad (X-56)$$

Dans un mouvement réel du système, nous avons vu que $\vec{\nabla} \cdot \vec{\Pi} = -\rho$. Remplaçons donc dans le dernier terme de (X-56) $\vec{\nabla} \cdot \vec{\Pi}$ par $-\rho$ et utilisons l'expression X-24 de ρ. On obtient

$$- \int d^3r\, \vec{\Pi} \cdot \vec{\nabla} U = \int d^3r\, U (\vec{\nabla} \cdot \vec{\Pi}) = - \int d^3r\, U(\vec{r},t)\, \rho(\vec{r},t) = - \sum_\alpha e_\alpha\, U(q_\alpha, t) \qquad (X-57)$$

Dans un mouvement réel, le dernier terme de IX-21 compense donc le second et le hamiltonien vaut donc, compte tenu de (X-26) :

$$H = \sum_\alpha \frac{1}{2} m_\alpha \dot{\vec{q}}_\alpha^{\,2} + \frac{\varepsilon_0}{2} \int d^3r\, (\vec{E}^2 + c^2 \vec{B}^2) \qquad (X-58)$$

L'énergie totale du système charges + champs est la somme des énergies cinétiques des particules et de l'intégrale de la densité d'énergie du champ $\frac{\varepsilon_0}{2}(\vec{E}^2 + c^2 \vec{B}^2)$.

12.3.74.

VI – Choix d'une jauge particulière : la jauge de Coulomb.

But de ce § : Pour quantifier le système global, champs + charges, il faut associer à tout couple de grandeurs conjuguées (au sens de Hamilton) 2 observables conjuguées qui ne commutent pas.

On se heurte alors à la difficulté suivante : le potentiel scalaire U n'a pas de moment conjugué, car U ne figure pas dans L ; la démarche précédente est en défaut.

Ce § expose une solution simple à cette difficulté : on choisit une jauge particulière où il est possible d'éliminer complètement U aussi bien du Lagrangien que du hamiltonien (on le reexprime entièrement en fonction des coordonnées des particules). Les seuls couples de variables indépendantes sont alors $(\vec{q}_\alpha, \vec{P}_\alpha)$, $(\vec{A}, \vec{\Pi})$.

① Résultats des équations de Lagrange valables quelle que soit la jauge.

– Reexprimons en fonction des potentiels $\vec{A}$ et U (qui sont les vraies coordonnées des champs dans le formalisme lagrangien) les 2 équations de Maxwell

$$\begin{cases} \vec{\nabla}\times\vec{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \mu_0\vec{J} & (XI-1) \\ \vec{\nabla}.\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} & (XI-2) \end{cases}$$

obtenues en appliquant le principe de moindre action pour $\vec{A}$ et U. On obtient :

$$\begin{cases} \vec{\nabla}(\vec{\nabla}.\vec{A}) - \Delta\vec{A} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}U + \mu_0\vec{J} & (XI-3) \\ -\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}.\vec{A}) - \Delta U = \frac{\rho}{\varepsilon_0} & (XI-4) \end{cases}$$

c'est à dire encore :

$$\begin{cases} \left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{A} = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}.\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial U}{\partial t}\right) - \mu_0\vec{J} & (XI-5) \\ \Delta U + \frac{\rho}{\varepsilon_0} = -\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}.\vec{A}) & (XI-6) \end{cases}$$

– Equations du second degré en $\vec{A}$. On peut fixer $\vec{A}$ et $\dot{\vec{A}}$ à l'instant initial.

② Jauge de Coulomb

– Nous allons montrer qu'on peut se restreindre à un sous ensemble de solutions de XI-5 et XI-6 telles que :

$$\vec{\nabla}.\vec{A} = 0 \quad \forall\ t \qquad (XI-7)$$

On dit alors que l'on a choisi la jauge de Coulomb.

– Compte tenu de (XI-7), (XI-6) s'écrit

$$\Delta U + \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0 \quad \forall\ t \qquad (XI-8)$$

– Egalons alors les parties longitudinale et transversale des 2 membres de (XI-5).

Partie transversale

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{A} = -\mu_0\vec{J}_\perp \qquad XI-9$$

Partie longitudinale

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}U = \mu_0\vec{J}_{//} \qquad (XI-10)$$

(XI-10)

– Pour que 2 champs de vecteurs longitudinaux soient égaux, il faut et il suffit qu'ils aient même divergence [Dans l'espace des $\vec{k}$, cela revient à dire que si en chaque point $\vec{k}$ les 2 vecteurs sont $\parallel$ à $\vec{k}$ et ont même projection sur $\vec{k}$, alors ils sont égaux)

Prenons donc la divergence des 2 membres de XI-10

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\Delta U = \mu_0 \vec{\nabla}.\vec{J}_{\parallel} = \mu_0 \vec{\nabla}.\vec{J} \qquad (\text{car } \vec{\nabla}.\vec{J}_{\perp}=0) \qquad \text{XI-11}$$

Utilisons alors XI-8. On obtient

$$-\frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\frac{\partial}{\partial t}\rho = \mu_0 \vec{\nabla}.\vec{J} \qquad (\text{XI-12})$$

c-a-d encore en utilisant $\varepsilon_0\mu_0 c^2 = 1$

$$\vec{\nabla}\vec{J} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0 \qquad (\text{XI-13})$$

qui est l'équation de conservation de la charge

– En conclusion si l'on impose (XI-7), U est déterminé par (XI-8). L'équation du mouvement de $\vec{A}$ est donnée par (XI-9) et (XI-10) est automatiquement satisfaite grace à la conservation de la charge

③ Pourquoi choisir la jauge de Coulomb ?

– Nous avons déjà vu dans un § antérieur (1^{re} partie § 9) que l'équation de Maxwell (XI-2) fixait à chaque instant la composante longitudinale de $\vec{E}$. En prenant la T.F. de cette equation, on obtient en effet :

$$i\vec{k}.\vec{\mathcal{E}}(\vec{k}) = ik\,\mathcal{E}_{\parallel}(\vec{k}) = \frac{\rho(\vec{k})}{\varepsilon_0} \qquad (\text{XI-14})$$

soit encore :

$$\vec{\mathcal{E}}_{\parallel}(\vec{k}) = -\frac{i}{\varepsilon_0}\,\frac{1}{k}\,\rho(\vec{k}) \qquad (\text{XI-15})$$

$\mathcal{E}_{\parallel}(\vec{k})$ est donc proportionnel au produit de $\rho(\vec{k})$ par $\frac{1}{k}$. $\vec{E}_{\parallel}(\vec{r})$ est donc proportionnel au produit de convolution de $\rho(\vec{r})$ par la T.F. de $\frac{1}{k}$, c-à-d par $\frac{1}{r^2}$:

$$\vec{E}_{\parallel}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3r'\,\frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^2}\,\frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \qquad (\text{XI-16})$$

$\vec{E}_{\parallel}(\vec{r})$ est donc le champ électrostatique <u>instantané</u> produit par la distribution de charges ρ et peut donc être entièrement exprimé en fonction des coordonnées des particules.

Si l'on choisit une jauge telle que $\vec{E}_{\parallel}(\vec{r})$ soit uniquement relié à U (et non à $\vec{A}$), il sera donc possible d'éliminer U en le remplaçant par une certaine fonction des coordonnées des particules

– La jauge de Coulomb réalise justement une telle séparation claire des composantes transversale et longitudinale de $\vec{E}$: la composante longitudinale est liée à U, la transversale à $\vec{A}$.

$$\vec{E} = \underbrace{-\vec{\nabla}U}_{\substack{\text{partie toujours longitudinale}\\ \text{(parallèle à } \vec{k} \text{ dans l'espace des } \vec{k},\\ \text{ou rotationnel nul dans l'espace}\\ \text{des } \vec{r}\text{)}}} \quad \underbrace{-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}}_{\substack{\text{Lorsque } \vec{\nabla}.\vec{A}=0\text{, partie}\\ \text{purement transversale (}\perp \text{ à } \vec{k} \text{ dans}\\ \text{l'espace des } \vec{k}\text{, ou divergence nulle dans}\\ \text{l'espace des } \vec{r}\text{)}}} \qquad (\text{XI-17})$$

– A chaque instant t, U s'exprime en fonction des charges grace à XI-13. La solution de (XI-13) (qui s'annule pour $|\vec{r}|=\infty$) s'écrit en effet :

$$U(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3r' \, \frac{\rho(\vec{r}\,',t)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \qquad \text{(XI-18)}$$

En appliquant $-\vec{\nabla}$ à (XI-18), on retrouve (XI-16). U est le potentiel électrostatique associé à la distribution de charges $\rho(\vec{r},t)$ "figée" à l'instant t.
Donc U n'est pas une variable réellement indépendante et peut être éliminé de toutes les expressions importantes comme nous le montrons plus loin.

- Inconvénient de la jauge de Coulomb : les conditions XI-12 et XI-3 ne sont pas invariantes relativistes.

(4) Elimination de U (et $\vec{E}_{\parallel}$) dans le Lagrangien -

- Considérons le terme $\frac{\varepsilon_0}{2}\int d^3r \, \vec{E}^2$ qui figure dans le lagrangien (VIII-13). En décomposant $\vec{E}$ en sa partie longitudinale et sa partie transversale comme en XI-17, on obtient aisément :

$$\frac{\varepsilon_0}{2}\int d^3r \, \vec{E}^2 = \frac{\varepsilon_0}{2}\int d^3r \, \vec{E}_{\parallel}^2 + \frac{\varepsilon_0}{2}\int d^3r \, \vec{E}_{\perp}^2 \qquad \text{(XI-19)}$$

$$\text{en posant} \quad \vec{E}_{\parallel} = -\vec{\nabla} U \quad , \quad \vec{E}_{\perp} = -\dot{\vec{A}} \qquad \text{(XI-20)}$$

Le terme croisé $\left(\varepsilon_0 \int d^3r \, \vec{E}_{\perp}\cdot\vec{E}_{\parallel}\right)$ est nul car c'est l'intégrale du produit scalaire d'un champ de vecteurs transverses par un champ de vecteurs longitudinaux (quand on passe dans l'espace des $\vec{k}$ en utilisant l'égalité de Parseval - Plancherel, on obtient 2 champs de vecteurs orthogonaux en chaque point de l'espace, dont le produit scalaire est évidemment nul)

- Calculons maintenant

$$\frac{\varepsilon_0}{2}\int d^3r \, \vec{E}_{\parallel}^2 = \frac{\varepsilon_0}{2}\int d^3r \, (\vec{\nabla}U)\cdot(\vec{\nabla}U) \qquad \text{(XI-21)}$$

Une intégration par parties élémentaire donne :

$$\frac{\varepsilon_0}{2}\int d^3r (\vec{\nabla}U)(\vec{\nabla}U) = \underbrace{\frac{\varepsilon_0}{2}\int d^3r \, \vec{\nabla}\cdot(U\vec{\nabla}U)}_{\text{Transf. en une intégrale de surface nulle}} - \frac{\varepsilon_0}{2}\int d^3r \, U(\Delta U) \qquad \text{(XI-22)}$$

Le dernier terme de (XI-22) devient grâce à (XI-13) :

$$-\frac{\varepsilon_0}{2}\int d^3r \, U(\Delta U) = \frac{1}{2}\int d^3r \, U(\vec{r},t)\,\rho(\vec{r},t) \qquad \text{(XI-23)}$$

Lorsqu'on le combine avec le 3ème terme de VIII-13, $-\sum_\alpha e_\alpha U(\vec{q}_\alpha,t)$, écrit sous la forme VIII-14, c-à-d sous la forme $-\int d^3r \, U(\vec{r},t)\rho(\vec{r},t)$, on obtient :

$$-\frac{1}{2}\int d^3r \, U(\vec{r},t)\,\rho(\vec{r},t) \qquad \text{(XI-24)}$$

Si l'on utilise l'expression (XI-18) de $U(\vec{r},t)$, l'expression (VIII-10) de ρ, et si l'on omet les termes représentant l'énergie d'interaction d'une charge avec elle même, on obtient pour XI-24

$$-\frac{1}{2}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3r\, d^3r' \, \frac{\rho(\vec{r},t)\,\rho(\vec{r}\,',t)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = -\frac{1}{2}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_\alpha\sum_{\beta\neq\alpha}\frac{e_\alpha e_\beta}{|\vec{q}_\alpha-\vec{q}_\beta|} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{\alpha>\beta}\frac{e_\alpha e_\beta}{|\vec{q}_\alpha-\vec{q}_\beta|} \qquad \text{(XI-25)}$$

- Le lagrangien (VIII-13) peut donc, dans la jauge de Coulomb, être exprimé entièrement en fonction de $\vec{q}_\alpha$ et $\vec{A}$. Il s'écrit alors :

$$\boxed{L = \frac{1}{2}\sum_\alpha m_\alpha \dot{\vec{q}}_\alpha^{\,2} + \sum_\alpha e_\alpha \dot{\vec{q}}_\alpha\cdot\vec{A}(\vec{q}_\alpha,t) - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{\alpha>\beta}\frac{e_\alpha e_\beta}{|\vec{q}_\alpha-\vec{q}_\beta|} + \frac{\varepsilon_0}{2}\int d^3r\left[\dot{\vec{A}}^2 - c^2(\vec{\nabla}\times\vec{A})^2\right]} \qquad \text{(XI-26)}$$

$\vec{A}$ est supposé évidemment ici appartenir au sous espace des champs vectoriels transverses puisqu'on est en jauge de Coulomb (cf XI-12).

⑤ Elimination de U (et $\vec{E}_{/\!/}$) dans le Hamiltonien.

- Chacune des variables $\vec{q}_\alpha$, $\vec{A}$ figurant dans XI-26 a maintenant un moment conjugué :

$$\begin{cases} \vec{p}_\alpha = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}_\alpha} = m_\alpha \dot{\vec{q}}_\alpha + e_\alpha \vec{A}(q_\alpha, t) & \text{(XI-27)} \\ \vec{\Pi}(\vec{r},t) = \dfrac{\delta L}{\delta \dot{\vec{A}}} = \varepsilon_0 \dot{\vec{A}} = -\varepsilon_0 \vec{E}_\perp & \text{(XI-28)} \end{cases}$$

$\vec{\Pi}$ est donc, comme $\vec{A}$, transverse.

- Partons de l'expression de H donnée en (X-58) ($m_\alpha \dot{\vec{q}}_\alpha$ étant remplacé par $\vec{p}_\alpha - e_\alpha \vec{A}(\vec{q}_\alpha, t)$)

$$H = \sum_\alpha \frac{1}{2m_\alpha}\left[\vec{p}_\alpha - e_\alpha \vec{A}(\vec{q}_\alpha,t)\right]^2 + \frac{\varepsilon_0}{2}\int d^3r \left(\vec{E}^2 + c^2\vec{B}^2\right) \qquad \text{(XI-29)}$$

On peut comme plus haut décomposer $\vec{E}$ en $\vec{E}_{/\!/}$ et $\vec{E}_\perp$ et aboutir à l'expression XI-21 puis XI-23 pour la contribution de $\vec{E}_{/\!/}$. En utilisant (XI-24) et (XI-25), on obtient finalement pour H :

$$\boxed{H = \sum_\alpha \frac{1}{2m_\alpha}\left[\vec{p}_\alpha - e_\alpha A(\vec{q}_\alpha,t)\right]^2 + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{\alpha>\beta}\frac{e_\alpha e_\beta}{|\vec{q}_\alpha - \vec{q}_\beta|} + \frac{\varepsilon_0}{2}\int d^3r \left[\frac{\vec{\Pi}^2}{\varepsilon_0^2} + c^2(\vec{\nabla}\times\vec{A})^2\right]} \qquad \text{(XI-29)}$$

Comme $\vec{\Pi} = -\varepsilon_0 \vec{E}_\perp$ d'après XI-28, on voit que la dernière intégrale $\frac{\varepsilon_0}{2}\int d^3r\left(\vec{E}_\perp^2 + c^2\vec{B}^2\right)$ représente l'énergie du champ transverse. H représente la somme de cette énergie, de l'énergie cinétique des particules (1^er terme de XI-29) et de l'énergie d'interaction électrostatique instantanée des diverses charges (2^e terme).

⑥ Elimination de U (et $\vec{E}_{/\!/}$) dans l'impulsion totale $\vec{\mathcal{P}}$

- Partons de l'expression (X-27) de $\vec{\mathcal{P}}$:

$$\vec{\mathcal{P}} = \sum_\alpha \left[\vec{p}_\alpha - e_\alpha \vec{A}(\vec{q}_\alpha,t)\right] + \varepsilon_0 \int d^3r\ \vec{E}\times\vec{B} \qquad \text{(XI-30)}$$

et évaluons la contribution de $\vec{E}_{/\!/} = -\vec{\nabla} U$

$$\varepsilon_0 \int d^3r\ \vec{E}_{/\!/}\times\vec{B} = -\varepsilon_0\int d^3r\ \vec{\nabla}U\times\vec{B} \qquad \text{(XI-31)}$$

La composante sur i de (XI-31) s'écrit :

$$-\varepsilon_0\,\varepsilon_{ijk}\,B_k(\partial_j U) \qquad \text{(XI-32)}$$

Utilisons $\varepsilon_{ijk}B_k = \partial_i A_j - \partial_j A_i$. Il vient pour (XI-32)

$$-\varepsilon_0(\partial_i A_j)(\partial_j U) + \varepsilon_0(\partial_j A_i)(\partial_j U) \qquad \text{(XI-33)}$$

- 1^er terme de XI-33 : après intégration par parties, il devient

$$-\varepsilon_0(\partial_i A_j)(\partial_j U) = \underbrace{-\varepsilon_0\partial_j\left[U(\partial_i A_j)\right]}_{\to\ \text{intégrale de surface nulle}} + \underbrace{\varepsilon_0 U\,\partial_i\partial_j A_j}_{=0 \text{ car } \partial_j A_j = \vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0}$$

2^ème terme de XI-33 : après intégrations par parties, il devient :

$$\varepsilon_0(\partial_j A_i)(\partial_j U) = \underbrace{\varepsilon_0\partial_j\left[A_i(\partial_j U)\right]}_{\to\ \text{intégrale de surface nulle}} \underbrace{-\varepsilon_0 A_i\,\partial_j\partial_j U}_{= -\varepsilon_0 A_i \Delta U\ =\ A_i\rho} \quad \text{(d'après XI-13)}$$

- On a finalement

$$\varepsilon_0\int d^3r\,\vec{E}_{/\!/}\times\vec{B} = \int d^3r\,\vec{A}(\vec{r},t)\,\rho(\vec{r},t) = \sum_\alpha e_\alpha\vec{A}(\vec{q}_\alpha,t) \qquad \text{(XI-34)}$$

(XI-34) compense partiellement le 1er terme de (XI-30) et $\vec{\mathcal{P}}$ s'écrit :

$$\boxed{\vec{\mathcal{P}} = \sum_\alpha \vec{p}_\alpha + \varepsilon_0 \int d^3r \ \vec{E}_\perp \times \vec{B}} \qquad (XI-35)$$

L'impulsion totale du système est donc la somme des impulsions des particules et de l'impulsion du champ transverse.

On voit également que, dans la jauge de Coulomb, la différence entre l'impulsion et la quantité de mouvement des particules a une interprétation physique simple : c'est l'impulsion liée à la partie longitudinale du champ électrique que les particules entraînent "rigidement" avec elles.

⑦ Elimination de U (et $\vec{E}_\parallel$) dans le moment cinétique total $\vec{J}$.

On pourrait procéder comme plus haut à partir de l'expression (X-48) de $\vec{J}$.

. Il est plus simple ici d'imaginer que l'on refait tous les calculs des § XB1 et XB2 en partant du lagrangien XI-26. On obtient alors une expression identique à (X-46) à ceci près que $\vec{E}$ doit être remplacé par $\vec{E}_\perp$ puisque, d'après XI-28, le moment conjugué de XI-28, compte tenu du lagrangien XI-26, est $-\varepsilon_0 \vec{E}_\perp$ et non $-\varepsilon_0 \vec{E}$.

$$\vec{J} = \sum_\alpha \vec{q}_\alpha \times \vec{p}_\alpha + \varepsilon_0 \int d^3r \ \vec{r} \times (\vec{E}_\perp \times \vec{B}) - \varepsilon_0 \int d^3r \ (\vec{r} \times \vec{A})(\vec{\nabla} . \vec{E}_\perp) \qquad (XI-36)$$

Le dernier terme de (XI-36) est évidemment nul puisque la divergence d'un champ de vecteurs transverses est nulle et l'on a finalement

$$\boxed{\vec{J} = \sum_\alpha \vec{q}_\alpha \times \vec{p}_\alpha + \varepsilon_0 \int d^3r \ \vec{r} \times (\vec{E}_\perp \times \vec{B})} \qquad (XI-37)$$

On peut faire à propos de (XI-37) les mêmes commentaires physiques qu'à propos de (XI-35).

19.3.74

VII – Quantification.

But de ce § : Donner, dans la jauge de Coulomb, les relations de commutation entre variables conjuguées pour un système de charges et de champs en interaction, et résoudre les difficultés liées à la transversalité des champs.

Introduire les opérateurs de création et d'annihilation de photons de divers types.

A – Relations de commutation canoniques ne tenant pas compte de la transversalité des champs et potentiels en jauge de Coulomb.

– Comme $A_i(\vec{r},t)$ et $\Pi_j(\vec{r},t)$ sont réels, les observables qui leur sont associées lorsqu'on quantifie le système sont hermitiques.

$$A_i(\vec{r},t) \longrightarrow A_i(\vec{r}) = A_i^+(\vec{r}) \qquad \Pi_j(\vec{r},t) \rightarrow \Pi_j(\vec{r}) = \Pi_j^+(\vec{r}) \qquad (XII-1)$$

– "Oublions" momentanément le fait que $\vec{A}$ et $\vec{\Pi} = -\varepsilon_0 \vec{E}_\perp$ ont une divergence nulle en jauge de Coulomb, et faisons comme si les 3 composantes $A_i(\vec{r})$ étaient indépendantes au point $\vec{r}$ (de même pour les 3 composantes $\Pi_j(\vec{r})$). Par généralisation des résultats du § I, on a alors tendance à écrire :

$$\left[A_i(\vec{r}), \Pi_j(\vec{r}')\right] \overset{?}{=} i\hbar\, \delta_{ij}\, \delta(\vec{r}-\vec{r}') \qquad (XII-2)$$

– En ce qui concerne les particules, on a évidemment :

$$\left[Q_\alpha, P_\beta\right] = i\hbar\, \delta_{\alpha\beta} \qquad (XII-3)$$

– Avant d'aller plus loin, établissons les relations de commutation pour les T.F. $\mathcal{A}_i(\vec{k})$ et $\Pi_j(\vec{k})$ de $A_i(\vec{r})$ et $\Pi_j(\vec{r})$:

$$A_i(\vec{r}) = \int d^3k\, \mathcal{A}_i(\vec{k})\, e^{i\vec{k}.\vec{r}} \qquad \Pi_j(\vec{r}) = \int d^3k\, \Pi_j(\vec{k})\, e^{i\vec{k}.\vec{r}} \qquad (XII-4)$$

$\mathcal{A}_i(\vec{k})$ et $\Pi_j(\vec{k})$ ne sont pas hermitique, mais satisfont aux conditions de réalité :

$$\mathcal{A}_i(\vec{k}) = \mathcal{A}_i^+(-\vec{k}) \qquad \Pi_j(\vec{k}) = \Pi_j^+(-\vec{k}) \qquad (XII-5)$$

Inversons (XII-4) et calculons le commutateur de $\mathcal{A}_i(\vec{k})$ et $\Pi_j^+(\vec{k}')$

$$\left[\mathcal{A}_i(\vec{k}), \Pi_j^+(\vec{k}')\right] = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^6 \int d^3r\, d^3r'\, e^{-i\vec{k}.\vec{r}}\, e^{+i\vec{k}'.\vec{r}'} \left[A_i(\vec{r}), \Pi_j(\vec{r}')\right] \qquad (XII-6)$$

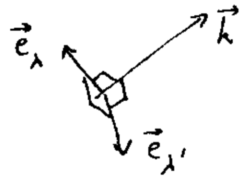
Si l'on utilise (XII-2) dans (XII-6), on obtient immédiatement :

$$\left[\mathcal{A}_i(\vec{k}), \Pi_j^+(\vec{k}')\right] \overset{?}{=} i\hbar\, \delta_{ij} \left(\frac{1}{2\pi}\right)^6 \int d^3r\, e^{-i(\vec{k}-\vec{k}').\vec{r}} = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 i\hbar\, \delta_{ij}\, \delta(\vec{k}-\vec{k}') \qquad (XII-7)$$

B – Relations de commutation correctes tenant compte de la transversalité.

– La condition de transversalité s'exprime plus simplement dans l'espace des k : $\vec{\mathcal{A}}(\vec{k})$ et $\vec{\Pi}(\vec{k})$ doivent être perpendiculaires à $\vec{k}$.

Ce ne sont donc pas les 3 composantes $A_i(\vec{k})$ de $\vec{\mathcal{A}}(k)$ sur 3 vecteurs unitaires $\perp$ fixes qui sont indépendantes, mais les 2 composantes $\mathcal{A}_\lambda(\vec{k})$ et $\mathcal{A}_{\lambda'}(\vec{k})$ sur 2 vecteurs unitaires $\vec{e}_\lambda$ et $\vec{e}_{\lambda'}$, $\perp$ entre eux, et contenus dans le plan $\perp$ à $\vec{k}$.



Le même résultat vaut aussi pour $\Pi_\lambda(\vec{k})$ et $\Pi_{\lambda'}(\vec{k})$

La relation de commutation (XII-7) est donc incorrecte et doit être remplacée par :

$$\boxed{\left[\mathcal{A}_\lambda(\vec{k}),\ \Pi^+_{\lambda'}(\vec{k}')\right] = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 i\hbar\ \delta_{\lambda\lambda'}\ \delta(\vec{k}-\vec{k}')} \qquad \text{(XII-8)}$$

- Calculons alors la vraie valeur du commutateur $\left[\mathcal{A}_i(\vec{k}),\ \Pi^+_j(\vec{k}')\right]$ à partir de XII-8

$$\mathcal{A}_i(\vec{k}) = \langle e_i|\mathcal{A}\rangle = \langle e_i|e_\lambda\rangle\langle e_\lambda|\mathcal{A}\rangle + \langle e_i|e_{\lambda'}\rangle\langle e_{\lambda'}|\mathcal{A}\rangle$$

$$= \langle e_i|e_\lambda\rangle\,\mathcal{A}_\lambda(\vec{k}) + \langle e_i|e_{\lambda'}\rangle\,\mathcal{A}_{\lambda'}(\vec{k}) \qquad \text{(XII-9)}$$

$$\Pi^+_j(\vec{k}') = \langle e_\lambda|e_j\rangle\,\Pi^+_\lambda(\vec{k}') + \langle e_{\lambda'}|e_j\rangle\,\Pi^+_{\lambda'}(\vec{k}') \qquad \text{(XII-10)}$$

En utilisant XII-8, on obtient alors

$$\left[\mathcal{A}_i(\vec{k}),\ \Pi^+_j(\vec{k}')\right] = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 i\hbar\ \delta(\vec{k}-\vec{k}')\left[\langle e_i|e_\lambda\rangle\langle e_\lambda|e_j\rangle + \langle e_i|e_{\lambda'}\rangle\langle e_{\lambda'}|e_j\rangle\right] \qquad \text{(XII-11)}$$

Pour calculer le crochet du 2ème membre, remarquons que $\vec{e}_\lambda$, $\vec{e}_{\lambda'}$ forment avec $\vec{n} = \frac{\vec{k}}{k}$ un système complet qui satisfait à la relation de fermeture

$$|e_\lambda\rangle\langle e_\lambda| + |e_{\lambda'}\rangle\langle e_{\lambda'}| + |n\rangle\langle n| = 1 \qquad \text{(XII-12)}$$

On en déduit :

$$\langle e_i|e_\lambda\rangle\langle e_\lambda|e_j\rangle + \langle e_i|e_{\lambda'}\rangle\langle e_{\lambda'}|e_j\rangle = \langle e_i|e_j\rangle - \langle e_i|n\rangle\langle n|e_j\rangle$$

$$= \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \qquad \text{(XII-13)}$$

de sorte que, finalement :

$$\boxed{\left[\mathcal{A}_i(\vec{k}),\ \Pi^+_j(\vec{k}')\right] = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 i\hbar\left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}\right)\delta(\vec{k}-\vec{k}')} \qquad \text{(XII-14)}$$

- Calculons enfin le commutateur $\left[A_i(\vec{r}),\ \Pi_j(\vec{r}')\right]$ correct à partir de XII-14

On a, compte tenu de XII-4, XII-5 (après avoir changé $\vec{k}'$ en $-\vec{k}'$)

$$\left[A_i(\vec{r}),\Pi_j(\vec{r}')\right] = \int d^3k\, d^3k'\, e^{i\vec{k}\vec{r}}\, e^{-i\vec{k}'\vec{r}'}\left[\mathcal{A}_i(\vec{k}),\ \Pi^+_j(\vec{k}')\right]$$

$$= i\hbar\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3\int d^3k\left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}\right)e^{i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}')}$$

$$= i\hbar\left[\delta_{ij}\,\delta(\vec{r}-\vec{r}') + \frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3\int d^3k\,\frac{e^{i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}')}}{k^2}\right] \qquad \text{(XII, 15)}$$

Si l'on se rappelle que la T.F. de $\frac{1}{k^2}$ est $\frac{1}{r}$, c-à-d que

$$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3\int d^3k\,\frac{e^{i\vec{k}.\vec{r}}}{k^2} = \frac{1}{4\pi r}, \qquad \text{(XII-16)}$$

il vient finalement :

$$\boxed{\left[A_i(\vec{r}),\Pi_j(\vec{r}')\right] = i\hbar\left[\delta_{ij}\,\delta(\vec{r}-\vec{r}') + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right]} \qquad \text{(XII-17)}$$

qui remplace la formule incorrecte XII-2

- Remarque : on pose souvent $\delta^\perp_{ij}(\vec{r}-\vec{r}') = \delta_{ij}\,\delta(\vec{r}-\vec{r}') + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$ (XII-18)

et on appelle $\delta^\perp_{ij}(\vec{r}-\vec{r}')$ la "fonction-δ transverse". On a alors :

$$\left[A_i(\vec{r}),\Pi_j(\vec{r}')\right] = i\hbar\ \delta^\perp_{ij}(\vec{r}-\vec{r}') \qquad \text{(XII-19)}$$

D'après XII-15), $\delta^\perp_{ij}(\vec{r}-\vec{r}')$ est la T.F. de $\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3\left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}\right)$. Comme

$$\sum_i k_i\left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}\right) = \sum_j k_j\left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}\right) = 0 \qquad \text{(XII-20)}$$

on en déduit que :

$$\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\,\delta^\perp_{ij}(\vec{r}-\vec{r}') = \sum_j \frac{\partial}{\partial x'_j}\,\delta^\perp_{ij}(\vec{r}-\vec{r}') = 0 \qquad \text{(XII-21)}$$

C. Opérateurs de création et d'annihilation.

A partir de $\mathcal{A}_\lambda(\vec{k})$ et $\Pi_\lambda(\vec{k})$, on va introduire des opérateurs plus fondamentaux, dont les relations de commutation sont plus simples que XII-8, XII-14, XII-17, dont la signification physique est plus claire (ils détruisent ou créent un photon d'un certain type).

(1) Définition.

Dans le § 2 de la 1ère partie, nous avons trouvé qu'il était commode d'introduire la combinaison linéaire $\vec{E}(\vec{k},t) + \frac{i}{\omega}\dot{\vec{E}}(\vec{k},t)$, $\vec{E}(\vec{k},t)$ étant la T.F. du champ électrique $\vec{E}(\vec{r},t)$.

Ici, nous nous intéressons à $\vec{A}$. Comme $\dot{\vec{A}} = \frac{\vec{\Pi}}{\varepsilon_0}$, nous allons considérer la combinaison linéaire $\vec{\mathcal{A}}(\vec{k}) + \frac{i}{\varepsilon_0\omega}\vec{\Pi}(\vec{k})$ et introduire l'opérateur $a_{\vec{k}\lambda}$ à partir des opérateurs $\mathcal{A}_\lambda(\vec{k})$ et $\Pi_\lambda(\vec{k})$ par la relation

$$2\mathcal{N}(k)\, a_{\vec{k}\lambda} = \mathcal{A}_\lambda(\vec{k}) + \frac{i}{\varepsilon_0\omega}\Pi_\lambda(\vec{k}) \qquad \text{(XII-22)}$$

$\mathcal{N}(k)$ étant une constante qui sera déterminée plus loin de manière à rendre les commutateurs les plus simples possible.

(2) Relations de commutation.

De XII-22, on tire ; compte tenu de XII-8

$$\left[a_{\vec{k}\lambda}, a^+_{\vec{k}'\lambda'}\right] = \frac{1}{4\mathcal{N}(k)\mathcal{N}(k')}\left[\mathcal{A}_\lambda(\vec{k}) + \frac{i}{\varepsilon_0\omega}\Pi_\lambda(\vec{k}),\ \mathcal{A}^+_{\lambda'}(\vec{k}') - \frac{i}{\varepsilon_0\omega'}\Pi^+_{\lambda'}(\vec{k}')\right]$$

$$= \frac{\hbar}{2\varepsilon_0\omega(2\pi)^3}\,\frac{1}{[\mathcal{N}(k)]^2}\,\delta_{\lambda\lambda'}\,\delta(\vec{k}-\vec{k}') \qquad \text{(XII-23)}$$

Nous choisirons

$$\mathcal{N}(k) = \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0\omega(2\pi)^3}} \qquad \text{(XII-24)}$$

de sorte que

$$\boxed{\left[a_{\vec{k}\lambda}, a^+_{\vec{k}'\lambda'}\right] = \delta_{\lambda\lambda'}\,\delta(\vec{k}-\vec{k}')} \qquad \text{(XII-25)}$$

- Calculons de même $\left[a_{\vec{k}\lambda}, a_{\vec{k}'\lambda'}\right]$.

$$\left[a_{\vec{k}\lambda}, a_{\vec{k}'\lambda'}\right] = \frac{1}{4\mathcal{N}(k)\mathcal{N}(k')}\left[\mathcal{A}_\lambda(\vec{k}) + \frac{i}{\varepsilon_0\omega}\Pi_\lambda(\vec{k}),\ \mathcal{A}_{\lambda'}(\vec{k}') + \frac{i}{\varepsilon_0\omega}\Pi_{\lambda'}(\vec{k}')\right]$$

$$= \frac{1}{4\mathcal{N}(k)\mathcal{N}(k')}\left\{\frac{i}{\varepsilon_0\omega}\underbrace{\left[A_\lambda(\vec{k}), \Pi^+_{\lambda'}(-\vec{k}')\right]}_{i\hbar(2\pi)^3\delta_{\lambda\lambda'}\delta(\vec{k}+\vec{k}')} - \frac{i}{\varepsilon_0\omega}\underbrace{\left[A_{\lambda'}(\vec{k}'), \Pi^+_\lambda(-\vec{k})\right]}_{i\hbar(2\pi)^3\delta_{\lambda\lambda'}\delta(\vec{k}+\vec{k}')}\right\} = 0 \qquad \text{(XII-26)}$$

Un calcul analogue montre que $\left[a^+_{\vec{k}\lambda}, a^+_{\vec{k}'\lambda'}\right] = 0$

$$\boxed{\left[a_{\vec{k}\lambda}, a_{\vec{k}'\lambda'}\right] = \left[a^+_{\vec{k}\lambda}, a^+_{\vec{k}'\lambda'}\right] = 0} \qquad \text{(XII-27)}$$

- Relation de commutation ≡ à celles des opérateurs annihilation et création d'un ensemble d'oscillateurs harmoniques indépendants, un oscillateur étant associé à chaque jeu de vecteurs $\vec{k}\,\vec{e}_\lambda$

$a_{\vec{k}\lambda}$: opérateur d'annihilation d'un photon d'impulsion $\hbar\vec{k}$, polarisation $\vec{e}_\lambda$

$a^+_{\vec{k}\lambda}$ " de création " " "

③ Développement des opérateurs $\vec{A}$, $\vec{E}_\perp$, $\vec{B}$ en ondes planes.

- Ecrivons XII-22 pour $-\vec{k}$

$$2\mathcal{N}(k)\, a_{-\vec{k}\lambda} = \mathcal{A}_\lambda(-\vec{k}) + \frac{i}{\varepsilon_0\omega}\Pi_\lambda(-k) \qquad (XII-28)$$

Prenons l'adjoint de XII-28 et utilisons XII-5

$$2\mathcal{N}(k)\, a^+_{-\vec{k}\lambda} = \mathcal{A}_\lambda(\vec{k}) - \frac{i}{\varepsilon_0\omega}\Pi_\lambda(\vec{k}) \qquad (XII-29)$$

De XII-22 et XII-29, on tire immédiatement :

$$\mathcal{A}_\lambda(\vec{k}) = \mathcal{N}(k)\left[a_{\vec{k}\lambda} + a^+_{-\vec{k}\lambda}\right] \qquad (XII-30)$$

$$\Pi_\lambda(\vec{k}) = -i\varepsilon_0\omega\mathcal{N}(k)\left[a_{\vec{k}\lambda} - a^+_{-\vec{k}\lambda}\right] \qquad (XII-31)$$

- Comme $\vec{\mathcal{A}}(\vec{k}) = \sum_\lambda \vec{e}_\lambda \mathcal{A}_\lambda(\vec{k})$, on obtient en reportant XII-30 dans $\vec{A}(\vec{r}) = \int d^3k\, \vec{\mathcal{A}}(\vec{k})\, e^{i\vec{k}\vec{r}}$:

$$A(\vec{r}) = \sum_\lambda \int d^3k\, \mathcal{N}(k)\left[a_{\vec{k}\lambda}\vec{e}_\lambda e^{i\vec{k}\vec{r}} + a^+_{-\vec{k}\lambda}\vec{e}_\lambda e^{i\vec{k}\vec{r}}\right] \qquad (XII-32)$$

En changeant $\vec{k}$ en $-\vec{k}$ dans le 2° terme du crochet, et en utilisant XII-24, on obtient finalement pour l'opérateur potentiel vecteur $\vec{A}$:

$$\boxed{A(\vec{r}) = \sum_\lambda \int d^3k \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0\omega(2\pi)^3}}\left[a_{\vec{k}\lambda}\vec{e}_\lambda e^{i\vec{k}\vec{r}} + a^+_{\vec{k}\lambda}\vec{e}_\lambda e^{-i\vec{k}\vec{r}}\right]} \qquad (XII-33)$$

Comparons XII-33 à V-11 ; on obtient l'opérateur quantique $A(\vec{r})$ en remplaçant dans le développement V-11 du potentiel classique en onde plane progressive, les coefficients $a_{\vec{k}\lambda}(t)$ et $a^*_{\vec{k}\lambda}(t)$ par des opérateurs d'annihilation et de création $a_{\vec{k}\lambda}$ et $a^+_{\vec{k}\lambda}$. (indépendants du temps dans le point de vue de Schrödinger).

- Comme $\vec{E}_\perp = -\frac{\vec{\Pi}}{\varepsilon_0}$, on déduit de XII-31 par un calcul tout à fait similaire au précédent

$$\vec{E}_\perp(\vec{r}) = \sum_\lambda \int d^3k \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0(2\pi)^3}}\left[i a_{\vec{k}\lambda}\vec{e}_\lambda e^{i\vec{k}\vec{r}} - i a^+_{\vec{k}\lambda}\vec{e}_\lambda e^{-i\vec{k}.\vec{r}}\right] \qquad (XII-34)$$

De même de $\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$, on déduit à partir de XII-33

$$\vec{B}(\vec{r}) = \sum_\lambda \int d^3k \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0\omega(2\pi)^3}}\left[i a_{\vec{k}\lambda}\vec{k}\times\vec{e}_\lambda e^{i\vec{k}\vec{r}} - i a^+_{\vec{k}\lambda}\vec{k}\times\vec{e}_\lambda e^{-i\vec{k}\vec{r}}\right] \qquad (XII-35)$$

Les développements quantiques XII-34 et XII-35 généralisent I-16 et I-17 de la même manière que XII-33 généralise V-11.

④ Lien avec la 2° quantification.

- Le passage de V-11, I-16, I-17 à XII-33, XII-34, XII-34 ressemble à celui que l'on fait en M.Q. non relativiste lorsque, par 2ème quantification, on passe de la théorie à 1 particule à la théorie à un nombre quelconque de particules identiques : on développe l'onde la plus générale sur une base orthonormée d'ondes élémentaires, et l'on remplace ensuite les coefficients de ce développement par des opérateurs d'annihilation ou de création. On ne rencontre cependant qu'un seul type d'opérateurs (création ou annihilation), suivant que l'on "quantifie" $\psi(\vec{r})$ ou $\psi^*(\vec{r})$. Comment se fait-il ici que dans les développements (XII-33, 34, 35) on trouve à la fois des opérateurs de création et d'annihilation ?

La raison de ceci est que $\vec{A}$ obéit à une équation relativiste qui admet toujours des solutions d'énergie négative. De manière plus précise, le développement du champ classique $\vec{A}(\vec{r},t)$ contient aussi bien des ondes planes $e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}$, que l'on peut interpréter comme des fonctions d'ondes de particules d'impulsion $\hbar\vec{k}$ et d'énergie $\hbar\omega$, que des ondes planes $e^{-i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}$, que l'on peut interpréter comme des fonctions d'onde de particules d'impulsion $-\hbar\vec{k}$ et d'énergie $-\hbar\omega$. Lors de la seconde quantification apparaissent donc les opérateurs de destruction d'une particule d'énergie $-\hbar\omega$ et d'impulsion $-\hbar\vec{k}$ que l'on réinterprète aussitôt comme des opérateurs de création de l'antiparticule correspondante d'énergie $\hbar\omega$ et d'impulsion $\hbar\vec{k}$.

Comme le photon coïncide avec son antiparticule, il est normal que l'on retrouve simultanément des opérateurs destruction et création de photons.

Pour d'autres particules, comme l'électron, qui ne coïncident pas avec leur antiparticule, la situation serait différente. Ainsi l'opérateur champ associé à l'électron de Dirac est une superposition linéaire d'opérateurs destruction d'un électron et de création d'un positron (ou l'inverse).

(5) Développement en ondes multipolaires.

– $a_{\vec{k}\lambda}$ est l'opérateur associé au coefficient du développement de la "fonction d'onde" $\vec{a}(\vec{k})$ du photon, introduite dans la 1ère partie, sur la base des ondes planes $\{\vec{e}_\lambda\,\delta(\vec{k}-\vec{k}_0)\}$

$$\vec{a}(\vec{k}) = \sum_\lambda \int d^3k_0\ a_{\vec{k}_0\lambda}\ \vec{e}_\lambda\,\delta(\vec{k}-\vec{k}_0) \qquad (XII-36)$$

On peut aussi développer cette même fonction d'onde $\vec{a}(\vec{k})$ sur la base des ondes multipolaires électrique et magnétique $\left\{\frac{1}{k_0}\delta(k-k_0)\vec{Z}_{JM}(\vec{n})\ ,\ \frac{1}{k_0}\delta(k-k_0)\vec{X}_{JM}(\vec{n})\right\}$:

$$\vec{a}(k) = \sum_{J,M}\int dk_0\left[a_{k_0JMe}\ \frac{1}{k_0}\delta(k-k_0)\vec{Z}_{JM}(\vec{n}) + a_{k_0JMm}\ \frac{1}{k_0}\delta(k-k_0)\vec{X}_{JM}(\vec{n})\right] \qquad (XII-37)$$

– Aux coefficients a_{k_0JMe} et a_{k_0JMm} (plus généralement $a_{k_0JM\pi}$ avec $\pi = e, m$) de ce développement on peut associer des opérateurs de destruction, reliés aux opérateurs $a_{\vec{k}\lambda}$ introduits plus haut par la même relation que celle qui existe entre les coefficients des 2 développements (XII-37) et (XII-36).

$$a_{k_0JM\pi} = \sum_\lambda \int d^3k\ \langle k_0JM\pi|\vec{k}\lambda\rangle\, a_{\vec{k}\lambda} \qquad (XII-38)$$

– Calculons à partir de (XII-38) le commutateur $[a_{k_0JM\pi}, a^+_{k_0'J'M'\pi'}]$

$$[a_{k_0JM\pi}, a^+_{k_0'J'M'\pi'}] = \sum_\lambda\sum_{\lambda'}\int d^3k\, d^3k'\ \langle k_0JM\pi|\vec{k}\lambda\rangle\langle\vec{k}'\lambda'|k_0'J'M'\pi'\rangle\ \underbrace{[a_{\vec{k}\lambda}, a^+_{\vec{k}'\lambda'}]}_{\text{i}\hbar\,\delta_{\lambda\lambda'}\,\delta(k-k')}$$

$$= \sum_\lambda\int d^3k\ \langle k_0JM\pi|\vec{k}\lambda\rangle\langle\vec{k}\lambda|k_0'J'M'\pi'\rangle$$

$$= \langle k_0JM\pi|k_0'J'M'\pi'\rangle = \delta(k_0-k_0')\,\delta_{JJ'}\,\delta_{MM'}\,\delta_{\pi\pi'} \qquad (XII-39)$$

On trouve de même que 2 opérateurs $a_{k_0JM\Pi}$ ou 2 opérateurs $a^+_{k_0JM\Pi}$ commutent.

$$\boxed{\begin{aligned}[a_{k_0JM\Pi}, a^+_{k'_0J'M'\Pi'}] &= \delta(k_0-k'_0)\,\delta_{JJ'}\,\delta_{MM'}\,\delta_{\Pi\Pi'} \\ [a_{k_0JM\Pi}, a_{k'_0J'M'\Pi'}] &= [a^+_{k_0JM\Pi}, a^+_{k'_0J'M'\Pi'}] = 0\end{aligned}} \qquad (XII-40)$$

$a_{k_0JM\Pi}$ et $a^+_{k_0JM\Pi}$ sont les opérateurs destruction et création d'un photon d'énergie $\hbar c k_0$, de moment cinétique $J(J+1)\hbar^2$ et $M\hbar$ et de type Π.

– En reportant (XII-37) dans l'expression (V.11) de $A(\vec{r})$ on obtient

$$\vec{A}(\vec{r}) = \int dk_0 \sum_{JM\Pi} \left[a_{k_0JM\Pi}\, \vec{A}_{k_0JM\Pi}(\vec{r}) + a^+_{k_0JM\Pi}\, \vec{A}^*_{k_0JM\Pi}(\vec{r}) \right] \qquad XII-41$$

où $\vec{A}_{k_0JM\Pi}(\vec{r})$ est l'onde multipolaire correspondant dans l'espace des $\vec{r}$ à un photon $k_0JM\Pi$ (voir § 7 de la 1ère partie). (XII-41) est le développement de l'opérateur potentiel en ondes multipolaires.

⑥ Grandeurs physiques.

Comme les développements des opérateurs $\vec{A}$, $\vec{E}_\perp$, $\vec{B}$ en ondes, soit planes soit multipolaires, coïncident avec ceux obtenus dans la 1ère partie pour les grandeurs classiques correspondantes, les calculs faits sur ces développements pour obtenir l'expression des grandeurs physiques comme énergie, impulsion, moment cinétique du rayonnement peuvent être repris tels quels sur les opérateurs (seule difficulté nouvelle : a et a^+ ne commutent pas et il faut respecter leur ordre).
On obtient ainsi :

$$\boxed{\mathcal{H}_R = \frac{\varepsilon_0}{2}\int\left(\vec{E}_\perp^2 + c^2\vec{B}^2\right)d^3r = \sum_\lambda \int d^3k\ \frac{\hbar\omega}{2}\left(a^+_{\vec{k}\lambda} a_{\vec{k}\lambda} + a_{\vec{k}\lambda} a^+_{\vec{k}\lambda}\right)} \qquad (XII-41)$$

$$\boxed{\vec{\mathcal{P}} = \varepsilon_0 \int d^3r\ \vec{E}_\perp \times \vec{B} = \sum_\lambda \int d^3k\ \hbar\vec{k}\ a^+_{\vec{k}\lambda} a_{\vec{k}\lambda}} \qquad (XII-42)$$

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{\mathcal{J}}^2 &= \left[\varepsilon_0 \int d^3r\ \vec{r}\times(\vec{E}\times\vec{B})\right]^2 = \int dk_0 \sum_{JM\Pi} J(J+1)\hbar^2\, a^+_{k_0JM\Pi}\, a_{k_0JM\Pi} \\ \mathcal{J}_z &= \left[\varepsilon_0 \int d^3r\ \vec{r}\times(\vec{E}\times\vec{B})\right]_z = \int dk_0 \sum_{JM\Pi} M\hbar\ a^+_{k_0JM\Pi}\, a_{k_0JM\Pi}\end{aligned}} \qquad \begin{aligned}(XII-43)\\(XII-44)\end{aligned}$$

Remarque : on pourrait écrire aussi $\mathcal{H}_R$ sous la forme :

$$\int dk_0 \sum_{JM\Pi} \frac{\hbar\omega_0}{2}\left[a^+_{k_0JM\Pi}\, a_{k_0JM\Pi} + a_{k_0JM\Pi}\, a^+_{k_0JM\Pi}\right] \qquad (XII-45)$$

Les développements en ondes planes ou multipolaires sont donc aussi bien adaptés l'un que l'autre pour l'énergie. Mais l'impulsion totale (le moment cinétique total) ne s'exprime bien qu'en fonction des coefficients du développement en ondes planes (multipolaires)