

INTRODUCTION GENERALE

A - RESUME DU COURS 1998-1999

Le cours de l'année 1998-1999 a poursuivi l'étude entreprise au cours de l'année antérieure de la condensation de Bose-Einstein des gaz atomiques ultrafroids. Il a porté plus particulièrement sur l'analyse des effets nouveaux introduits par les interactions entre atomes.

La première séance passe rapidement en revue les résultats obtenus au cours de l'année antérieure sur la condensation de Bose-Einstein de gaz parfaits de bosons. Quelques résultats expérimentaux récents sont présentés, montrant l'importance des interactions entre atomes et la nécessité de les prendre en compte. L'organisation générale du cours est esquissée.

Collisions à très basse énergie - Longueur de diffusion

Dans les gaz atomiques ultrafroids où se produit la condensation de Bose-Einstein, les processus élémentaires d'interaction entre atomes sont des collisions à deux ou trois corps, élastiques et inélastiques. A des densités pas trop élevées les collisions binaires, entre deux atomes, sont prépondérantes. Un premier objectif du cours est de décrire quantiquement de telles collisions, en se limitant pour simplifier à des collisions élastiques, et d'introduire les paramètres physiques essentiels qui les caractérisent à la limite des très basses énergies qui sont celles d'atomes ultrafroids.

Après de brefs rappels sur la théorie de la diffusion par un potentiel central et sur le développement en ondes partielles de l'amplitude de diffusion, on analyse les simplifications qui apparaissent à très basse énergie. La longueur d'onde de de Broglie des particules entrant en collision est alors très grande, et c'est seulement dans l'onde de moment angulaire orbital relatif nul (onde s) que les particules peuvent s'approcher suffisamment près l'une de l'autre pour ressentir l'effet de leur potentiel d'interaction. Mathématiquement, il est légitime alors de négliger tous les déphasages des diverses ondes partielles autres que le déphasage δ_0 de l'onde s . A partir de δ_0 on introduit une autre grandeur physique importante, la longueur de diffusion a , et on l'interprète

géométriquement à partir du prolongement à faible distance de la forme asymptotique de la fonction d'onde radiale correspondant à l'onde s . Le déphasage δ_o de l'onde s dépend de l'énergie, plus précisément du nombre d'onde k décrivant les oscillations à grande distance de la fonction d'onde radiale s . A l'ordre le plus bas en k , $\delta_o(k) = -a k$. L'étude des termes d'ordre supérieur en k fait apparaître une autre grandeur physique importante, la portée effective r_e . On peut ainsi obtenir pour l'amplitude de diffusion une expression analytique où apparaissent a , k et r_e . On montre enfin que, si le potentiel d'interaction admet un état lié d'énergie très faible, dont la fonction d'onde décroît exponentiellement à grande distance avec une longueur caractéristique ξ , la longueur de diffusion a est très voisine de ξ .

Les notions précédentes sont illustrées en détail sur des potentiels en créneau carré, situation où des expressions analytiques peuvent être obtenues pour les fonctions d'onde radiales s . Un cas particulièrement intéressant est celui des potentiels carrés attractifs de profondeur V_0 . Lorsqu'on fait croître V_0 à partir de 0, le nombre d'états liés dans le puits croît de zéro à l'infini. Toutes les fois qu'un nouvel état lié apparaît, avec une énergie très proche de celle du bord du puits, la longueur de diffusion a diverge, en passant de $-\infty$ à $+\infty$. Un tel phénomène est étudié en détail au moyen de constructions graphiques. A partir de l'expression établie plus haut de l'amplitude de diffusion en fonction de a , k et r_e , on introduit également la notion de résonance à énergie nulle apparaissant sur les variations avec k de la section efficace de diffusion, au voisinage d'une divergence de la longueur de diffusion a .

Pseudopotentiel

Le vrai potentiel d'interaction entre deux atomes conduit en général à des calculs non aisés, ne permettant pas d'obtenir des expressions analytiques simples. C'est la raison pour laquelle on essaie souvent de remplacer le vrai potentiel par un potentiel d'expression mathématique plus simple, appelé pseudopotentiel, et donnant les mêmes déphasages, ou tout au moins la même longueur de diffusion que le vrai potentiel. Le pseudopotentiel donnera donc le bon comportement asymptotique des fonctions d'onde pour des distances grandes entre les atomes. Par contre, il ne décrira pas correctement les corrélations à courte distance. Cependant, si le gaz est dilué, les

atomes seront la plupart du temps éloignés les uns des autres et on peut espérer que l'erreur commise sera négligeable.

On commence par étudier un pseudopotentiel en fonction delta, $V_\delta(\vec{r}) = g \delta(\vec{r})$, où $\delta(\vec{r})$ est la fonction delta de Dirac et g une constante. Si l'on impose à V_δ de redonner la même longueur de diffusion a que le vrai potentiel V à l'ordre le plus bas en g , c'est-à-dire à l'approximation de Born, on obtient une équation simple reliant g à a et V_δ est entièrement défini. Il est possible alors de comparer les prédictions effectuées à partir de V_δ et du vrai potentiel V sur les énergies et les fonctions d'onde des états liés obtenus quand on ajoute au potentiel une paroi réfléchissante à très grande distance R (boite sphérique). Alors que les prédictions sur les énergies et les formes asymptotiques des fonctions d'onde coïncident à l'ordre 1 en g pour V et V_δ , on trouve des différences spectaculaires à l'ordre 2 en g . Les déplacements de niveaux à l'ordre 2 en V_δ divergent !

On introduit alors un autre pseudopotentiel $V_{pseudo}(\vec{r})$, d'expression mathématique légèrement plus compliquée que celle de $V_\delta(\vec{r})$, ne souffrant pas des mêmes défauts. Il conduit pour l'amplitude de diffusion à la même expression que le vrai potentiel V , avec toutefois une portée effective r_e nulle. A très basse énergie, quand on peut se limiter aux termes d'ordre le plus bas en k , V_{pseudo} et V sont donc équivalents.

On discute enfin un paradoxe lié au fait que V_{pseudo} et V ont les mêmes éléments de matrice entre fonctions d'onde non perturbées (ordre 0 en g). Comment peut-on alors obtenir pour les déplacements d'énergie d'ordre 2 en g un résultat fini avec V_{pseudo} et divergent avec V_δ ? L'étude d'un exemple simple permet de montrer que la difficulté précédente est liée à un problème de convergence non uniforme et les précautions qu'il faut prendre quand on utilise V_δ sont explicitées.

Equation de Gross-Pitaevskii

A température nulle ($T = 0^\circ K$), un ensemble de N bosons sans interactions mutuelles, piégés dans un puits de potentiel $V_{ext}(\vec{r})$, forme un condensat où chaque boson est dans le même état quantique, l'état fondamental u_0 du piège. En présence d'interactions, la structure d'un tel

condensat est modifiée. Il faudrait en principe déterminer l'état fondamental du Hamiltonien H du système global qui est la somme de l'énergie cinétique des particules E_{cm} , de leur énergie de piégeage $E_{piège}$, dans V_{ext} , et de leur énergie d'interaction E_{int} . La détermination exacte de l'état fondamental de H est en général impossible et il faut avoir recours à des approximations.

On présente une recherche d'un état fondamental approché de H basée sur un calcul variationnel où la fonction d'onde ψ de l'état fondamental est prise sous forme d'un produit de N fonctions d'ondes identiques $\varphi(\vec{r})$. Le problème alors est de déterminer quel est le meilleur choix possible pour φ_0 conduisant à la valeur moyenne de H la plus basse possible.

Les équations variationnelles exprimant que la valeur moyenne de H dans ψ est minimale conduisent alors pour φ_0 à une équation non linéaire appelée équation de Gross-Pitaevskii. Son interprétation physique est très claire. Elle exprime que chaque particule, se trouvant chacune dans l'état φ_0 , se déplace dans un potentiel qui est la somme du potentiel de piégeage $V_{ext}(\vec{r})$ et du potentiel d'interaction moyen créé par les $N-1$ autres. La théorie ainsi obtenue est donc une théorie de champ moyen. La valeur propre apparaissant dans l'équation n'est autre que le potentiel chimique. A partir de l'équation de Gross-Pitaevskii, sont déduites un certain nombre de relations générales entre les valeurs moyennes de E_{cm} , $E_{piège}$ et E_{int} .

Une première application de l'équation de Gross-Pitaevskii est alors présentée. Il s'agit d'étudier la forme du condensat dans une boîte cubique aux parois réfléchissantes. On trouve que la solution de l'équation est une fonction qui reste constante à l'intérieur de la boîte et qui s'annule quand on s'approche des parois sur une distance caractéristique ξ_0 , appelée longueur de relaxation, et dont on donne l'expression en fonction de la densité spatiale moyenne des particules n_0 et de la longueur de diffusion. L'interprétation physique de l'expression de ξ_0 est donnée comme résultant d'un meilleur compromis possible entre énergie d'interaction qui augmente quand ξ_0 croît et énergie cinétique qui décroît quand ξ_0 croît.

Structure du condensat dans un piège harmonique

A partir de l'équation de Gross-Pitaevskii, il est possible d'aborder simplement un certain nombre de problèmes relatifs à la structure d'un condensat de N atomes piégés dans un potentiel

harmonique $V_{ext}(r) = m\omega_0^2 r^2 / 2$. Comment les interactions entre atomes modifient-elles la forme du condensat ? Quel est le paramètre qui caractérise l'importance des interactions ? Un condensat stable peut-il exister quand la longueur de diffusion est négative, c'est à dire quand les interactions effectives entre atomes sont attractives ?

Dans une première approche très qualitative, on étudie l'ordre de grandeur des diverses énergies moyennes E_{cin} , $E_{piège}$ et E_{int} , exprimées en fonction du rayon R du condensat, plus précisément en fonction des paramètres sans dimension $w = R/\sigma$ où σ est la largeur de la fonction d'onde de l'état fondamental du piège harmonique. E_{cin} varie comme $N\hbar\omega_0/w^2$, $E_{piège}$ comme $N\hbar\omega_0 w^2$ et E_{int} comme $N\hbar\omega_0 \chi/w^3$ où χ est un paramètre sans dimension égal à aN/σ . Ce paramètre χ caractérise donc l'importance des interactions qui sont négligeables si $\chi \ll 1$, et importantes si $\chi \gg 1$.

Lorsque la longueur de diffusion a est positive (interactions effectives répulsives), on trouve que l'énergie totale $E = E_{cin} + E_{piège} + E_{int}$ a toujours un minimum quand on fait varier w , ce qui montre qu'un condensat stable existe quelle que soit la valeur de χ . Pour $\chi \ll 1$, on retrouve que E est minimum pour $w = 1$, ce qui montre que $R = \sigma$ (les atomes sont tous dans l'état fondamental du puits harmonique), alors que pour $\chi \gg 1$, la valeur de R qui minimise E est de l'ordre de $\sigma \chi^{1/5}$, c'est à dire beaucoup plus grande que σ : les répulsions entre atomes provoquent un "gonflement" du condensat.

Quand a est négatif (interactions effectives attractives) on trouve par contre que les variations de E avec w ne présentent un minimum que pour des valeurs suffisamment basses de χ , inférieures à une valeur critique χ de l'ordre de 1. Des attractions trop fortes entre atomes déstabilisent donc le condensat.

Toutes ces conclusions qualitatives sont confirmées par des résolutions numériques de l'équation de Gross-Pitaevskii.

On montre enfin qu'une telle équation se simplifie considérablement à la limite $\chi \gg 1$. Le terme d'énergie cinétique peut être négligé et l'équation aux dérivées partielles non linéaire peut alors être valablement approximée par une équation algébrique d'où l'on déduit une expression analytique pour la fonction d'onde du condensat. Une telle limite est appelée limite de Thomas Fermi. Elle conduit à des expressions analytiques simples pour le rayon du condensat, le potentiel

chimique, l'énergie moyenne par particule, le rapport d'anisotropie du condensat dans un piège harmonique anisotrope, la densité d'atomes au centre du condensat.

Transformation de Bogolubov

L'approche qui a été suivie pour établir l'équation de Gross-Pitaevskii est une approche de champ moyen où l'on ne s'intéresse qu'à l'état fondamental du système des N bosons en interaction et où l'on néglige les corrélations entre particules (les fonctions d'onde d'essai sont des produits de N fonctions d'onde identiques). Les deux séances suivantes du cours sont consacrées à la présentation d'une approche un peu plus élaborée, basée sur la transformation de Bogolubov, qui permet de corriger un certain nombre de ces limitations. Des informations plus précises peuvent ainsi être obtenues sur l'état fondamental, en particulier sur les corrélations qui existent dans cet état. On peut également étudier les premiers états excités du système, qui ne sont autres que les excitations élémentaires du système de bosons auxquelles on peut associer des "quasiparticules".

Le cas des bosons enfermés dans une boîte (système appelé "homogène" ou "uniforme") est plus simple à traiter que celui des bosons piégés dans un potentiel extérieur (où la densité varie dans l'espace et est donc inhomogène). Des prédictions analytiques peuvent en particulier être obtenues à partir de l'approche de Bogolubov. C'est la raison pour laquelle on se limite ici à ce cas simple. D'autres méthodes seront introduites dans les deux dernières séances du cours pour étudier les excitations élémentaires d'un gaz de bosons piégés dans un potentiel harmonique.

Le formalisme de la seconde quantification est particulièrement commode pour introduire la transformation de Bogolubov. Le Hamiltonien des N bosons en interaction est exprimé en fonction des opérateurs a_k et a_k^\dagger qui détruisent et créent une particule dans l'état quantique individuel k de la boîte, et qui obéissent à des relations de commutation caractéristiques de bosons. Le terme d'interaction H_{int} est en particulier une somme de produits de quatre opérateurs, deux de création et deux d'annihilation décrivant des collisions élémentaires où les deux états initiaux des deux bosons entrant en collision se transforment en deux états finaux. Après un rappel bref des résultats obtenus en traitant l'effet de H_{int} par la théorie des perturbations, on introduit l'approximation à la base de la transformation de Bogolubov. A très basse température et si le gaz est suffisamment dilué, on s'attend à ce que, dans l'état fondamental et les premiers états excités du système, l'état individuel d'énergie la plus basse de la boîte, $k = 0$, ait une population n_0 de l'ordre

du nombre total N de particules, très grande devant les populations n_k des autres états individuels $k \neq 0$. Comme a_0 et a_0^\dagger sont de l'ordre de $\sqrt{n_0}$, il semble légitime de négliger dans H_{int} les termes ne contenant pas au moins deux a_0 ou a_0^\dagger . Par ailleurs, comme le commutateur entre a_0 et a_0^\dagger , de l'ordre de 1 est négligeable devant $\sqrt{n_0}$, on peut également oublier le caractère opératoire de a_0 et a_0^\dagger et les remplacer par $\sqrt{n_0}$. On obtient ainsi un Hamiltonien H qui n'est plus qu'une fonction quadratique des a_k et a_k^\dagger avec $k \neq 0$ et qui peut donc être diagonalisé par une transformation canonique. Cette transformation n'est autre que la transformation de Bogolubov. Elle revient à introduire des nouveaux opérateurs de destruction b_k qui sont des combinaisons linéaires de a_k et a_{-k}^\dagger , ainsi que leurs adjoints b_k^\dagger , de telle sorte que H puisse se réexprimer sous la forme

$$H = E_0 + \sum_{k \neq 0} \hbar \omega(k) b_k^\dagger b_k$$

E_0 est l'énergie du nouvel état fondamental, alors que b_k (et b_k^\dagger) détruisent (et créent) une excitation élémentaire d'énergie $\hbar \omega(k)$.

L'expression analytique obtenue pour $\omega(k)$ décrit la relation de dispersion des excitations élémentaires. Pour $k \gg 1/\xi_0$, où ξ_0 est la longueur de relaxation introduite plus haut, on trouve $\hbar \omega(k) = \hbar^2 k^2 / 2m$, qui n'est autre que la relation de dispersion d'une particule libre de masse m . Par contre, pour $k \ll 1/\xi_0$, on trouve $\hbar \omega(k) = ck$, qui correspond à des excitations élémentaires de type phonon, c étant la vitesse de propagation du son.

Par rapport à la valeur donnée par la théorie de champ moyen, E_0 contient des termes correctifs en $(\rho a^3)^{1/2}$, où ρ est la densité spatiale de particules et a la longueur de diffusion. Le paramètre infiniment petit, exprimant le caractère dilué du gaz et justifiant l'approximation de Bogolubov est donc le nombre ρa^3 de particules dans un volume a^3 .

L'approximation de Bogolubov permet également d'obtenir des informations intéressantes sur la fonction d'onde ψ_0 du nouvel état fondamental, satisfaisant à $b_k |\psi_0\rangle = 0$ pour tout $k \neq 0$. On peut calculer analytiquement les valeurs dans $|\psi_0\rangle$ des nombres moyens d'occupation $n_k = \langle \psi_0 | a_k^\dagger a_k | \psi_0 \rangle$ des divers états individuels k et comparer

$$N' = \sum_{k \neq 0} n_k$$

au nombre total N de particules. Le rapport N'/N s'appelle le facteur de dépletion quantique de l'état fondamental et se trouve lui aussi être de l'ordre de $(\rho a_0^3)^{1/2}$. C'est la valeur petite de ce rapport qui permet de considérer que $n_0 = N - N'$ est prépondérant devant tous les n_k avec $k \neq 0$.

On peut enfin calculer la densité à deux corps dans le nouvel état fondamental, c'est-à-dire la probabilité $\rho_{II}(\vec{r}, \vec{r}')$ de trouver une particule en \vec{r} et une autre particule en \vec{r}' . En l'absence de corrélation entre les particules, $\rho_{II}(\vec{r}, \vec{r}')$ se factoriserait sous forme d'un produit de densités simples $\rho_I(\vec{r})\rho_I(\vec{r}')$, $\rho_I(\vec{r})$ étant la probabilité de trouver une particule en \vec{r} . On trouve bien effectivement que $\rho_{II}(\vec{r}, \vec{r}')$ n'est pas un produit et ne tend vers un produit que quand $|\vec{r} - \vec{r}'| \gg \xi_0$.

Equation de Gross-Pitaevskii dépendant du temps

Dans de nombreuses expériences, le potentiel extérieur dans lequel est plongé le condensat de Bose-Einstein est modulé dans le temps, de manière à exciter les modes propres de vibration et à mesurer les fréquences propres de ces modes. Dans d'autres expériences, ce potentiel est brusquement coupé et on observe l'expansion balistique du condensat, expansion qui est souvent essentiellement déterminée par les interactions entre les divers atomes du condensat. Les deux dernières séances du cours sont consacrées à l'étude de ces problèmes.

On commence par montrer qu'il est possible de généraliser l'équation de Gross-Pitaevskii étudiée précédemment à de telles situations dépendant du temps. La démarche suivie utilise le fait que l'équation de Schrödinger des N bosons en interactions, où apparaît le Hamiltonien complet du système incluant le potentiel d'interaction entre particules et le potentiel extérieur dépendant du temps, peut être déduite d'un principe variationnel correspondant à une action dont on rappelle l'expression. Au lieu de faire varier la fonction d'onde des N bosons dans tout l'espace de Hilbert, on se restreint à un sous espace de fonctions produits de N fonctions d'onde individuelles, chaque particule étant décrite par la même fonction d'onde dépendant du temps $\varphi(\vec{r}, t)$. La fonction $\varphi(\vec{r}, t)$ qui minimise l'action se trouve alors obéir à une équation de Schrödinger non linéaire

dépendant du temps. Cette équation décrit l'évolution de chaque particule dans le potentiel extérieur dépendant du temps et dans le champ moyen créé par les $N-1$ autres, qui lui aussi dépend du temps, à cause de la dépendance temporelle de $|\varphi(\vec{r}, t)|^2$. C'est l'équation de Gross-Pitaevskii dépendant du temps.

A la limite des faibles excitations, quand le potentiel extérieur de piégeage est la somme d'une composante statique et d'une petite composante δV dépendant du temps, il est possible de linéariser l'équation de Gross-Pitaevskii dépendant du temps. En prenant une forme de créneau temporel pour δV , on peut ainsi étudier les fréquences des modes propres de vibration de faible amplitude du condensat, fréquences qui sont données par les solutions d'une équation aux valeurs propres. Une telle approche appliquée à un système homogène (bosons enfermés dans une boîte) redonne bien la relation de dispersion des excitations élémentaires obtenue précédemment à partir de la transformation de Bogolubov.

Un autre éclairage intéressant sur l'équation de Gross-Pitaevskii est obtenu en déduisant de cette équation des équations équivalentes couplées régissant l'évolution du module $\rho(\vec{r}, t)$ et de la phase $S(\vec{r}, t)$ de la fonction d'onde $\varphi(\vec{r}, t)$. A la limite des grandes densités, une approximation analogue à l'approximation de Thomas-Fermi pour un potentiel V_{ext} dépendant du temps, permet alors de transformer ces équations en des équations hydrodynamiques décrivant l'écoulement d'un fluide. Quand le potentiel extérieur est harmonique et ne dépend du temps que par l'intermédiaire des fréquences propres du piège $\omega_i(t)$, ces équations peuvent être simplifiées et remplacées par des équations différentielles non linéaires qui se révèlent très commode pour étudier quantitativement les modes propres de vibration du condensat ou son expansion balistique quand le potentiel extérieur est coupé brusquement.

Plusieurs expériences récentes sont enfin passées en revue. Les observations expérimentales sont en bon accord avec les prédictions théoriques déduites de l'équation de Gross-Pitaevskii dépendant du temps, ce qui montre l'utilité d'une telle équation pour étudier la structure et la dynamique des condensats de Bose-Einstein.

Les notes de cours sont disponibles sur le WEB
à l'adresse <http://www.lkb.ens.fr/~cct/cours/>

Collisions élastiques

T-1

$m_1 = m_2 = m$ $m_{red} = \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{m}{2}$

Mouvement du centre de masse

Particule libre de masse $M = 2m$

Particule "relative"

$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$

Etat stationnaire de diffusion

$e^{ikz} + f(\theta, \varphi) \frac{e^{ikr}}{r}$

Potentiel central - Déphasages

$\psi_{k\ell m}(\vec{r}) = \frac{u_{k\ell}(r)}{r} Y_\ell^m(\theta, \varphi)$ $u_{k\ell}(0) = 0$

$\left[\frac{d^2}{dr^2} + k^2 - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2} V(r) \right] u_{k\ell}(r) = 0$

$u_{k\ell}(r) \underset{r \rightarrow \infty}{\approx} C \sin \left[kr - \ell \frac{\pi}{2} + \delta_\ell(k) \right]$

Pour une particule libre ($V=0$), $\delta_\ell = 0$

Amplitude de diffusion en fonction des $\delta_\ell(k)$

$f_k(\theta, \varphi) = \frac{1}{k} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sqrt{4\pi(2\ell+1)} e^{i\delta_\ell(k)} \sin \delta_\ell(k) Y_\ell^0(\theta)$

Limite des basses énergies

T-2

λ de Broglie \gg Portée du potentiel

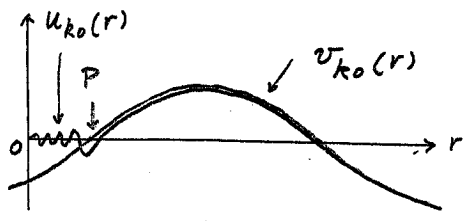
C'est uniquement dans l'onde s ($\ell=0$) que les particules peuvent s'approcher suffisamment l'une de l'autre pour ressentir l'effet du potentiel d'interaction.

Dans le développement en ondes partielles de $f_k(\theta)$, on se limite à l'onde s

$f_k = \frac{1}{k} e^{i\delta_0(k)} \sin \delta_0(k)$

$u_{k0}(r) \underset{r \rightarrow \infty}{\approx} C \sin [kr + \delta_0(k)]$

Fonction "prolongée" $v_{k0}(r) = C \sin [kr + \delta_0(k)]$



Abscisse du point P où $v_{k0}(r)$ s'annule

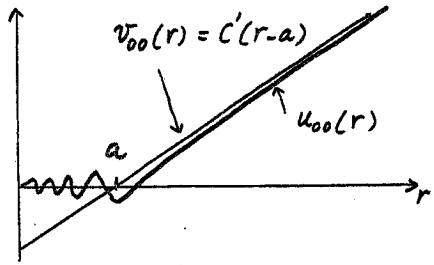
$r_p = -\frac{\delta_0(k)}{k}$ $-\frac{\pi}{2} \leq \delta_0(k) \leq +\frac{\pi}{2}$

Longueur de diffusion a

T-3

$a = \lim_{k \rightarrow 0} -\frac{\delta_0(k)}{k}$

Limite de l'abscisse du point P quand $k \rightarrow 0$



Amplitude de diffusion

$f_k \underset{k \rightarrow 0}{\approx} -a$

Etat stationnaire de diffusion

$e^{ikz} - a \frac{e^{ikr}}{r}$

Section efficace totale

$\sigma_{tot} = 8\pi a^2$

Expression plus précise de f_k

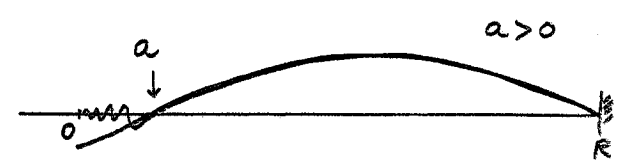
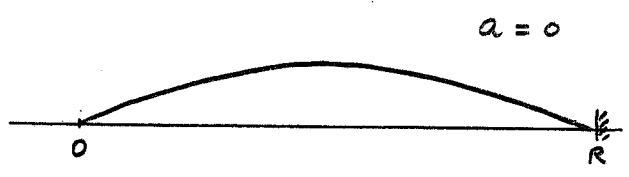
$f_k \approx \frac{-a}{1 + ika - \frac{1}{2} r_e k^2 a}$

r_e : Portée effective

Lien entre le signe de a et le

T-4

signe des corrections introduites par V sur les états d'énergie positive



$\lambda = \frac{2\pi}{k}$ décroît, k croît, $\delta E > 0$



$\lambda = \frac{2\pi}{k}$ croît, k décroît, $\delta E < 0$

T-5

Pseudopotentiels

Potentils d'expression mathématique plus simple que le vrai potentiel $V(r)$ et conduisant à la même longueur de diffusion a

Potentiel V_δ

$$V_\delta(r) = g \delta(\vec{r}) \quad g = \frac{4\pi\hbar^2}{m} a$$

Conduit aux mêmes résultats que $V(r)$ à l'ordre 1 inclus en a

Potentiel V_{pseudo}

$$V_{pseudo}(r) = g \delta(\vec{r}) \frac{\partial}{\partial r} r \quad g = \frac{4\pi\hbar^2}{m} a$$

Développement de Born convergent qui se resomme pour donner

$$f_k = - \frac{a}{1 + ika}$$

Même expression que celle correspondant à $V(r)$, mais avec $r_0 = 0$

T-6

Hamiltonien

$$H = \sum_{i=1}^N \left[\frac{\vec{p}_i^2}{2m} + V_{ext}(\vec{r}_i) \right] + \frac{1}{2} \sum_i \sum_{j \neq i} V(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|)$$

Calcul variationnel de l'état fondamental

- Toutes les particules dans le même état $|\varphi\rangle$

$$|\psi\rangle = |\varphi(1)\rangle |\varphi(2)\rangle \dots |\varphi(i)\rangle \dots |\varphi(N)\rangle$$

- Quel est le meilleur $|\varphi\rangle$?

$$\text{Celui qui minimise } E(\varphi) = \frac{\langle \psi | H | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle}$$

Calcul de $\langle \psi | H | \psi \rangle$

$$\begin{aligned} \langle \psi | H | \psi \rangle &= N \int d^3r \varphi^*(\vec{r}) \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \varphi(\vec{r}) \right] \\ &\quad + N \int d^3r \varphi^*(\vec{r}) V_{ext}(\vec{r}) \varphi(\vec{r}) \\ &\quad + \frac{N(N-1)}{2} \iint d^3r d^3r' \varphi^*(\vec{r}) \varphi^*(\vec{r}') V(|\vec{r} - \vec{r}'|) \varphi(\vec{r}) \varphi(\vec{r}') \end{aligned}$$

Minimum de $E(\varphi)$ obtenu quand $\varphi(\vec{r})$

obéit à l'équation

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \varphi(\vec{r}) + V_{ext}(\vec{r}) \varphi(\vec{r}) + (N-1) \left[\int d^3r' V(|\vec{r} - \vec{r}'|) |\varphi(\vec{r}')|^2 \right] \varphi(\vec{r}) = \lambda \varphi(\vec{r})$$

λ : Multiplicateur de Lagrange

T-7

Interprétation

Chaque particule se déplace dans le potentiel extérieur $V_{ext}(\vec{r})$ et dans le champ moyen créé par les $(N-1)$ autres

Equation de Gross-Pitaevskii

$$V(|\vec{r}'|) = g \delta(\vec{r}) = \frac{4\pi\hbar^2}{m} a \delta(\vec{r})$$

Normalisation choisie pour φ : $\int d^3r |\varphi(\vec{r})|^2 = 1$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \varphi(\vec{r}) + V_{ext}(\vec{r}) \varphi(\vec{r}) + Ng |\varphi(\vec{r})|^2 \varphi(\vec{r}) = \lambda \varphi(\vec{r})$$

Interprétation de λ

$$\frac{dE(\varphi)}{dN} = \frac{\partial E(\varphi)}{\partial N} + \underbrace{\frac{\delta E}{\delta \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial N}}_{=0} = \lambda$$

λ est égal au potentiel chimique μ

Relations générales découlant de l'éq. de G-P

$$E = E_{cin} + E_{piège} + E_{inter}$$

$$\mu = \frac{1}{N} (E_{cin} + E_{piège} + 2E_{inter})$$

$$2E_{cin} - 2E_{piège} + 3E_{inter} = 0$$

si $V_{ext}(\vec{r})$ est harmonique

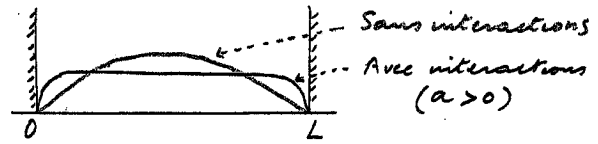
Longueur de relaxation ξ_0

T-8

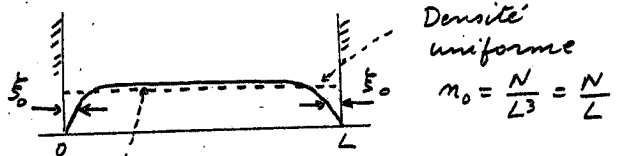
("Healing length")

N bosons dans une boîte de côté L

Etude de l'état fondamental



Etude de φ au voisinage des parois



Densité réelle tenant compte des conditions aux limites

ξ_0 : Distance au bout de laquelle $n(\vec{r}) = N |\varphi(\vec{r})|^2$ atteint sa valeur constante

$$\xi_0 = \frac{1}{\sqrt{8\pi a n_0}}$$

ξ_0 correspond au minimum de $E_{cin} + E_{inter}$

Condensat dans un piège harmonique

$$V_{ext}(\vec{r}) = \frac{1}{2} m \omega_0^2 r^2$$

$\sigma = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_0}}$ = Largeur de l'état fondamental

Ordres de grandeur

R : Rayon du condensat

$$w = \frac{R}{\sigma}$$

$$E_{cin} \approx N \hbar \omega_0 \frac{1}{w^2}$$

$$E_{piège} \approx N \hbar \omega_0 w^2$$

$$E_{inter} \approx N \hbar \omega_0 \frac{1}{w^3} \chi$$

Paramètre $\chi = \frac{aN}{\sigma}$

$\chi \gg 1$ Interactions fortes

$\chi \ll 1$ Interactions faibles

Un condensat stable existe si

$E(w) = E_{cin} + E_{piège} + E_{inter}$ passe par un minimum quand w croit de 0 à $+\infty$

Longueur de diffusion $a > 0$

$E(w)$ a toujours un minimum

$\chi \ll 1$ $w_{min} \approx 1$

$R \approx \sigma$

$\chi \gg 1$ $w_{min} \propto \chi^{1/5}$

$R \approx \sigma \chi^{1/5} \gg \sigma$

Le condensat "gonfle" sous l'effet des répulsions entre atomes

Point important : Les interactions peuvent jouer un rôle important même si le milieu est dilué

$l = R N^{-1/3}$ Distance entre atomes

$\frac{a}{l} = \frac{a}{R} N^{1/3} < \frac{a}{\sigma} N^{1/3}$ car $R \gg \sigma$

$\chi = \frac{aN}{\sigma}$

Comme $N \gg 1$, on peut avoir à la fois

$\frac{a}{l} \ll 1$

Milieu dilué

$\chi \gg 1$

Interactions fortes

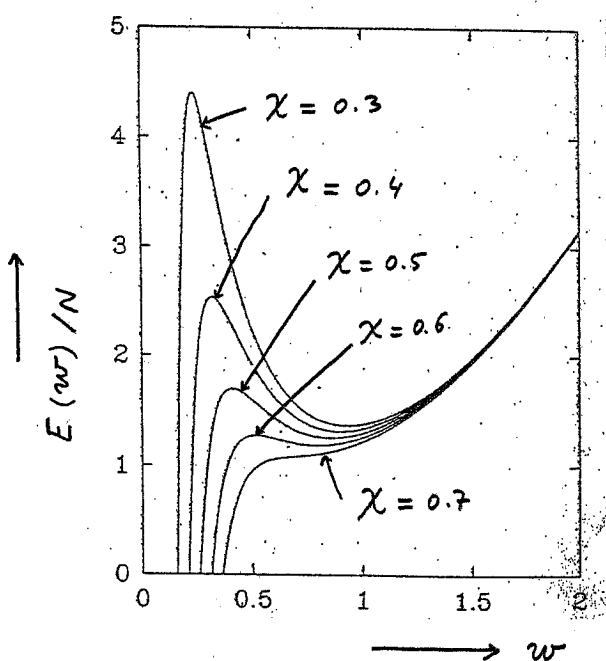
Exemple

$\frac{a}{\sigma} = 10^{-4}$ $N = 10^6$

$\frac{a}{l} < 10^{-2} \ll 1$

$\frac{aN}{\sigma} = 10^2 \gg 1$

Longueur de diffusion $a < 0$



$E(w)$ n'a de minimum que pour $\chi < \chi_{crit}$

Limite de Thomas - Fermi

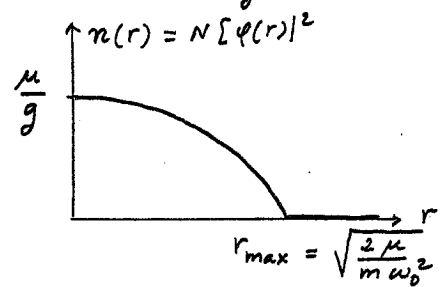
$a > 0$ $\chi \gg 1$

Le terme d'énergie cinétique est négligé dans l'équation de G.P. qui devient

$$\frac{1}{2} m \omega_0^2 r^2 \varphi(\vec{r}) + N g |\varphi(\vec{r})|^2 \varphi(\vec{r}) = \mu \varphi(\vec{r})$$

Comme $\varphi(\vec{r})$ est réel, on en déduit

$$[\varphi(\vec{r})]^2 = \frac{1}{gN} [\mu - \frac{1}{2} m \omega_0^2 r^2]$$



Parabole inversée

Expression de μ (à partir de $\int d^3r \varphi^2(r) = 1$)

$$\mu = \frac{\hbar \omega_0}{2} \left(\frac{15 a N}{\sigma} \right)^{2/5} = \frac{\hbar \omega_0}{2} (15 \chi)^{2/5} \gg \hbar \omega_0$$

$$\mu = \frac{\partial E(N)}{\partial N} \rightarrow E(N) = \frac{\hbar \omega_0}{2} \left(\frac{15 a}{\sigma} \right)^{2/5} \frac{N^{7/5}}{7/5}$$

$$\frac{E(N)}{N} = \frac{5}{7} \mu$$

Energie libérée après coupure du piège

$$E_{\text{totale}}^{\text{avant}} = \cancel{E_{\text{kin}}} + E_{\text{piège}} + E_{\text{inter}}^{\text{avant}}$$

$$E_{\text{totale}}^{\text{après}} = E_{\text{inter}}^{\text{avant}}$$

↳ $E_{\text{libérée}} = E_{\text{inter}}^{\text{avant}}$

$$E_{\text{totale}} = \cancel{E_{\text{kin}}} + E_{\text{piège}} + E_{\text{inter}}$$

$$\mu = \frac{1}{N} (\cancel{E_{\text{kin}}} + E_{\text{piège}} + 2E_{\text{inter}})$$

$$2\cancel{E_{\text{kin}}} - 2E_{\text{piège}} + 3E_{\text{inter}} = 0$$

$$E_{\text{piège}} = \frac{3}{2} E_{\text{inter}}$$

$$\mu = \frac{1}{N} \left(\frac{3}{2} E_{\text{inter}} + 2E_{\text{inter}} \right) = \frac{7}{2N} E_{\text{inter}}$$

$$E_{\text{libérée}} = E_{\text{inter}} = \frac{2}{7} \mu N$$

$$= \frac{\hbar \omega_0}{7} \left(15 \frac{nN}{\sigma} \right)^{2/5} \gg \hbar \omega_0$$

En l'absence d'interactions, on aurait $E_{\text{libérée}} = \frac{3}{4} \hbar \omega_0$

Transformation de Bogolubov

Bosons en interaction dans une boîte
 But : 1^{ère} corrections au champ moyen
 - Corrélations entre particules
 - Excitations élémentaires

Hamiltonien \hat{H} en seconde quantification

$$\hat{\Psi}(\vec{r}) = \sum_k \frac{1}{L^{3/2}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \hat{a}_k$$

$$\hat{\Psi}^+(\vec{r}) = \sum_k \frac{1}{L^{3/2}} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \hat{a}_k^+$$

$$\hat{H} = \sum_k \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \hat{a}_k^+ \hat{a}_k + H_{\text{int}}$$

$$H_{\text{int}} = \frac{1}{2} \iint d^3r d^3r' \hat{\Psi}^+(\vec{r}) \hat{\Psi}^+(\vec{r}') \hat{V}(|\vec{r}-\vec{r}'|) \hat{\Psi}(\vec{r}) \hat{\Psi}(\vec{r}')$$

Si l'on prend $V(|\vec{r}-\vec{r}'|) = g \delta(\vec{r}-\vec{r}')$

$$H_{\text{int}} = \frac{g}{2L^3} \sum_{k_1, k_2, k} \hat{a}_{k_1}^+ \hat{a}_{k_2}^+ \hat{a}_{k_2+k} \hat{a}_{k, -k}$$

Approximations à la base du calcul

$$n_0 = \langle \hat{a}_0^+ \hat{a}_0 \rangle \gg \sum_{k \neq 0} \langle \hat{a}_k^+ \hat{a}_k \rangle$$

- On néglige dans H_{int} tous les termes ne contenant pas au moins 2 \hat{a}_0 ou \hat{a}_0^+
- On remplace \hat{a}_0 et \hat{a}_0^+ par $\sqrt{n_0} \approx \sqrt{N}$

Expression approchée de \hat{H}

Dans le sous-espace des états tels que $n_0 \gg \sum_{k \neq 0} n_k$, \hat{H} est approximé par une fonction quadratique \hat{H}_{eff} des \hat{a}_k et \hat{a}_k^+ qu'on peut diagonaliser exactement

$$\hat{H}_{\text{eff}} = E_0 + \sum_k \hbar \omega(k) \hat{b}_k^+ \hat{b}_k$$

$$\begin{cases} \hat{b}_k = u_k \hat{a}_k + v_k \hat{a}_{-k}^+ \\ \hat{b}_{-k}^+ = u_k \hat{a}_{-k}^+ + v_k \hat{a}_k \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_k = \text{ch } \theta_k \\ v_k = \text{sh } \theta_k \end{cases} \quad \text{th } 2\theta_k = \frac{\rho g}{\frac{\hbar^2 k^2}{2m} + \rho g}$$

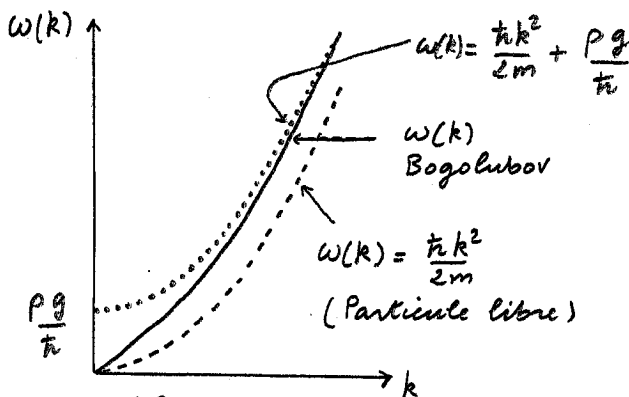
$$\rho = \frac{N}{L^3}$$

$$\hbar \omega(k) = \sqrt{\frac{\hbar^2 k^2}{2m} \left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} + 2\rho g \right)}$$

$$\frac{E_0}{N} = \frac{1}{2} \rho g \left[1 + \frac{128}{15\sqrt{\pi}} (\rho a^3)^{1/2} \right]$$

Relation de dispersion des excitations élémentaires

$$\hbar \omega(k) = \sqrt{\frac{\hbar^2 k^2}{2m} \left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} + 2\rho g \right)}$$



Limite $\frac{\hbar^2 k^2}{2m} \ll \rho g \leftrightarrow k \ll k_0$ ou $k_0 = \frac{1}{\xi_0}$
 $\xi_0 = \frac{1}{\sqrt{8\pi a \rho}} =$ Longueur de relaxation

$$\omega = ck \quad c = \sqrt{\frac{\rho g}{m}} \quad \text{Phonons}$$

Limite $\frac{\hbar^2 k^2}{2m} \gg \rho g \leftrightarrow k \gg k_0$

$$\omega(k) = \frac{\hbar k^2}{2m} + \frac{\rho g}{\hbar} \quad \text{Particule libre} + \text{Correction } \frac{\rho g}{\hbar}$$

Depletion quantique de l'état fondamental

Nouvel état fondamental $|\psi_0\rangle$
 Vide pour les \hat{b}_k : $\hat{b}_k|\psi_0\rangle = 0 \quad \forall k \neq 0$

$$N - N_0 = \sum_{k \neq 0} \langle \psi_0 | \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k | \psi_0 \rangle$$

On reexprime \hat{a}_k et \hat{a}_k^\dagger en fonction de \hat{b}_k et \hat{b}_k^\dagger et on utilise $\hat{b}_k|\psi_0\rangle = 0$

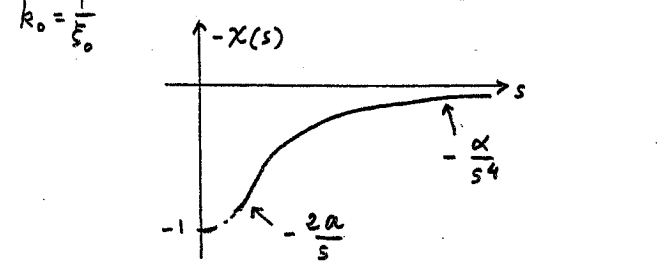
$$\frac{N - N_0}{N} = \frac{8}{3\sqrt{\pi}} (\rho a^3)^{1/2}$$

Paramètre infiniment petit de la théorie de Bogolubov : ρa^3

Densité à 2 corps $\rho_{II}(\vec{r}, \vec{r}')$

$$\rho_{II}(\vec{r}, \vec{r}') = \rho^2 [1 - \chi(s)] \quad s = |\vec{r} - \vec{r}'|$$

$$\chi(s) = \frac{1}{\rho} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k e^{i\vec{k}\cdot\vec{s}} \left[\frac{k/k_0}{\sqrt{(k/k_0)^2 + 2}} - 1 \right]$$



Equation de Gross-Pitaevskii

dépendant du temps
 Expériences où l'on fait varier $V_{ext}(\vec{r})$ au cours du temps (modulation, coupure brusque du piège ...)

Méthode variationnelle

- L'équation de Schrödinger satisfaite par la fonction d'onde exacte $\psi(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t)$ peut être déduite d'un principe de moindre action à partir d'une action S
- On se restreint au sous-espace des fonctions d'onde produits $\varphi(\vec{r}_1, t) \varphi(\vec{r}_2, t) \dots \varphi(\vec{r}_N, t)$ et on minimise S à l'intérieur de ce sous-espace
- La meilleure fonction d'onde à une particule dépendant du temps $\varphi(\vec{r}, t)$ obéit à :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \varphi(\vec{r}, t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V_{ext}(\vec{r}, t) \right] \varphi(\vec{r}, t) + Ng |\varphi(\vec{r}, t)|^2 \varphi(\vec{r}, t)$$

Limite des faibles excitations

$$V_{ext}(\vec{r}, t) = V_0(\vec{r}) + \delta V(\vec{r}, t)$$

$$\delta V \ll V_0$$

Linéarisation de l'équation de G.P. dépendant du temps pour φ voisin de la solution $\varphi_0(\vec{r}) e^{-i\mu t/\hbar}$ correspondant à $\delta V = 0$

$$\varphi(\vec{r}, t) = \tilde{\varphi}(\vec{r}, t) e^{-i\mu t/\hbar}$$

$$\tilde{\varphi}(\vec{r}, t) = \varphi_0(\vec{r}) + \delta\varphi(\vec{r}, t)$$

On obtient alors pour $\delta\varphi$ et $\delta\varphi^*$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \delta\varphi \\ \delta\varphi^* \end{pmatrix} = \mathcal{L}_{GP} \begin{pmatrix} \delta\varphi \\ \delta\varphi^* \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \delta V \varphi_0 \\ -\delta V \varphi_0^* \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{L}_{GP} = \begin{pmatrix} H_0 - \mu + 2Ng|\varphi_0|^2 & Ng\varphi_0^2 \\ -Ng\varphi_0^{*2} & -(H_0 - \mu + 2Ng|\varphi_0|^2) \end{pmatrix}$$

$$H_0 = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V_0(\vec{r})$$

Obtention à partir de cette équation des fréquences des modes propres de vibration comme solutions d'une équation aux valeurs propres.

Réécriture de l'équation de G-P

sous une forme équivalente

- Normalisation choisie pour $\varphi(\vec{r}, t)$
 $\int d^3r |\varphi(\vec{r}, t)|^2 = N$
- Module et phase de $\varphi(\vec{r}, t)$
 $|\varphi(\vec{r}, t)|^2 = \rho(\vec{r}, t) = \text{Densité de particules}$
 $\varphi(\vec{r}, t) = \sqrt{\rho(\vec{r}, t)} e^{iS(\vec{r}, t)}$
- Champ de vitesses $\vec{v}(\vec{r}, t)$
 $\vec{v}(\vec{r}, t) = \frac{\hbar}{m} \vec{\nabla} S(\vec{r}, t)$

A partir de l'équation de G-P dépendant du temps, on déduit alors 2 équations

① Equation de continuité'

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0$$

② Equation du mouvement de $\vec{v}(\vec{r}, t)$

$$m \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{\nabla} \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\sqrt{\rho}} \Delta \sqrt{\rho} - \frac{1}{2} m v^2 - V_{ext} - \rho g \right]$$

T-21

Limite des grandes densités $\frac{\alpha N}{\sigma} \gg 1$

Il est alors légitime de négliger le terme $-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\sqrt{\rho}} \Delta \sqrt{\rho}$ (terme de "pression quantique")

L'équation du mouvement de \vec{v} devient alors analogue à une équation hydrodynamique

$$m \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{\nabla} \left[-\frac{1}{2} m v^2 - V_{ext} - \rho g \right]$$

$$m \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \frac{1}{2} \vec{v}^2 \right) = -\vec{\nabla} (V_{ext} + \rho g)$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}$$

Equation de la dynamique d'une

particule de masse m soumise

- à la force de piégeage $-\vec{\nabla} V_{ext}$
- à la force $-\vec{\nabla} \rho g$ due aux interactions avec les autres particules

Autre approche valable à haute densité

Quand $V_{ext}(\vec{r}, t)$ est harmonique et ne dépend de t que par l'intermédiaire des fréquences de vibration $\omega_i(t)$

$$V_{ext}(\vec{r}, t) = \frac{m}{2} \sum_{i=x,y,z} \omega_i^2(t) r_i^2 \quad r_i = x, y, z$$

Pour $t < 0$, $\omega_i(t) = \omega_{i,0} = \text{cte}$

Les équations hydrodynamiques ont alors une solution

$$r_i(t) = b_i(t) r_i(0)$$

correspondant à une simple dilatation

Les $b_i(t)$ satisfont aux équations

$$\ddot{b}_i(t) + \omega_i^2 b_i(t) - \frac{\omega_{0i}^2}{b_x(t) b_y(t) b_z(t) b_i(t)} = 0$$

Etude à partir de ces équations

- de l'expansion balistique du condensat quand le piège est coupé brusquement
- des modes propres de vibration dans les régimes linéaire (faibles excitations) et non linéaire (fortes excitations)

T-23

B - Thème général du cours 1999-2000

Propriétés de cohérence des condensats de Bose Einstein

- Longueur de cohérence d'un condensat
- Phase relative de 2 condensats
- Fonctions de corrélation
Cohérences d'ordre supérieur
- Interférences entre condensats
- Lasers à atomes

- 1 - Introduction - Problèmes abordés dans ce cours T.25
- 2 - Brefs rappels sur la cohérence en optique T26 à T32
 - Quelques états du champ quantifié
 - Fonctions de corrélation $G^{(1)}$ et $G^{(2)}$
 - Résultats du calcul de $G^{(1)}$ et $G^{(2)}$ dans quelques cas simples
- 3 - Fonctions de corrélation pour un système de bosons T33 à T37
 - Opérateurs champs $\hat{\Psi}$ et $\hat{\Psi}^\dagger$
 - Quelques états possibles pour un condensat
 - Fonctions de corrélation de $\hat{\Psi}$ et $\hat{\Psi}^\dagger$
 - Calcul des fonctions de corrélation dans un état de Fock
- 4 - Fonction de corrélation $G^{(1)}$ et longueur de cohérence pour un gaz de bosons en équilibre thermodynamique T38 à T53
 - 4.1 Bosons dans une boîte - Système homogène
 - Expression de $G^{(1)}$
 - Gaz parfait. Evolution de la cohérence spatiale quand on augmente N à T fixée.
 - Effet des interactions à $T=0^\circ\text{K}$
 - 4.2 Bosons dans un piège harmonique
- 5 - Fonctions de corrélation d'ordre supérieur $G^{(2)}$ et $G^{(3)}$ T.53 à T.6
 - Difficultés - Solutions adoptées ici
 - Théorème de Wick
 - Calcul de $G^{(2)}$
 - Calcul de $G^{(3)}$

Propriétés de cohérence d'un condensat

Quelques problèmes

- En quel sens peut-on dire qu'un condensat est un objet "cohérent"?
- Quelles propriétés le différencient d'un nuage thermique?
- Peut-on parler de phase d'un condensat?
- Quelles fonctions permettent de caractériser les propriétés de cohérence d'un condensat?
- Peut-on établir un parallèle avec le problème de la cohérence en optique?
- Quelles sont les expériences qui ont abordé l'étude de ces problèmes?

On se limite dans ce cours à l'étude d'un seul condensat. Le problème de la phase relative de 2 condensats sera abordé ultérieurement

Champ optique classique (monomode)

$$E^+(\vec{r}) e^{-i\omega t} + c.c.$$

$E^+(\vec{r})$: nombre complexe ayant un module et une phase

La phase d'un tel champ est mesurable

Etat quantique d'un champ monomode

- Etat à N photons (état de Fock)

$$|N\rangle$$

- Etat le plus général du champ

$$|\psi\rangle = \sum_{N=0}^{\infty} c_N |N\rangle$$

- Opérateur champ de ce mode

$$\hat{E}^+(\vec{r}) = E^+(\vec{r}) \hat{a} \quad \hat{E}(\vec{r}) = \hat{E}^+(\vec{r}) + h.c.$$

$E^+(\vec{r})$: Amplitude du champ du vide dans ce mode

\hat{a} (\hat{a}^+): Opérateur de destruction (création) d'un photon dans ce mode

Etats cohérents

- Etats quantiques qui se rapprochent le plus possible d'un état classique

$$\hat{a} |\alpha\rangle = \alpha |\alpha\rangle$$

α : Nombre complexe

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{N=0}^{\infty} \frac{\alpha^N}{\sqrt{N!}} |N\rangle$$

- Probabilité $\mathcal{P}(N)$ d'avoir N photons dans l'état $|\alpha\rangle$

$$\mathcal{P}(N) = e^{-|\alpha|^2} \frac{|\alpha|^{2N}}{N!} \quad \text{Loi de Poisson}$$

$$\langle \hat{N} \rangle = \langle \hat{a}^+ \hat{a} \rangle = |\alpha|^2$$

$$\Delta N^2 = \langle \hat{N}^2 \rangle - \langle \hat{N} \rangle^2 = |\alpha|^2 = \langle \hat{N} \rangle$$

Si $\langle \hat{N} \rangle \gg 1$, $\Delta N = \sqrt{\langle \hat{N} \rangle}$ est très grand en valeur absolue tout en étant très petit en valeur relative $\Delta N / \langle \hat{N} \rangle = \frac{1}{\sqrt{\langle \hat{N} \rangle}} \ll 1$

$$\hat{E}^+(\vec{r}) |\alpha\rangle = \alpha \underbrace{E^+(\vec{r})}_{\sqrt{\langle \hat{N} \rangle} e^{i\varphi(\vec{r})}} |\alpha\rangle$$

$$\sqrt{\langle \hat{N} \rangle} e^{i\varphi(\vec{r})} E^+(\vec{r}) = E_{cl}^+(\vec{r})$$

- Généralisation à des champs multimodes

Mélange statistique d'états cohérents

$$\alpha = |\alpha| e^{i\varphi} = \sqrt{\langle N \rangle} e^{i\varphi}$$

Mélange statistique d'états cohérents de même $|\alpha|$ et de phase φ équipartie entre 0 et 2π

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi |\alpha| e^{i\varphi} \langle \alpha| e^{i\varphi} |$$

$$\langle N | \hat{\rho} | N' \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$\langle N | \alpha | e^{i\varphi} \rangle \langle \alpha | e^{i\varphi} | N' \rangle$$

$$e^{-|\alpha|^2/2} \frac{|\alpha|^N e^{iN\varphi}}{\sqrt{N!}} e^{-|\alpha|^2/2} \frac{|\alpha|^{N'} e^{-iN'\varphi}}{\sqrt{N'!}}$$

$$= e^{-|\alpha|^2} \frac{|\alpha|^{N+N'}}{\sqrt{N!} \sqrt{N'!}} \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi e^{i(N-N')\varphi}}_{\delta_{NN'}}$$

$$= e^{-|\alpha|^2} \frac{|\alpha|^{2N}}{N!} \delta_{NN'}$$

$$\hookrightarrow \hat{\rho} = \sum_{N=0}^{\infty} \mathcal{P}(N) |N\rangle \langle N|$$

$\hat{\rho}$ apparaît aussi comme un mélange statistique d'états de Fock $|N\rangle$ avec une distribution de Poisson des valeurs possibles de N

Fonctions de corrélation

Ordre 1

$$G^{(1)}(\vec{r}, \vec{r}') = \langle \hat{E}^-(\vec{r}) \hat{E}^+(\vec{r}') \rangle$$

Caractérise les corrélations qui existent entre les valeurs du champ en 2 points différents \vec{r} et \vec{r}'

Même si la phase globale du champ n'est pas bien définie, la différence de phase entre 2 points peut l'être

Généralisation quantique des fonctions de corrélation classiques caractérisant le contraste des franges d'interférence obtenues avec les champs issus des 2 points \vec{r} et \vec{r}'

Généralisation à des fonctions de corrélation faisant intervenir 2 instants différents t et t'

Normalisation souvent utilisée

$$g^{(1)}(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{G^{(1)}(\vec{r}, \vec{r}')}{\sqrt{G^{(1)}(\vec{r}, \vec{r}) G^{(1)}(\vec{r}', \vec{r}')}}$$

Ordre 2

$G^{(1)}$ ne caractérise pas entièrement un champ. Deux champs peuvent être différents tout en ayant le même $G^{(1)}$

Nécessité d'introduire des fonctions de corrélation d'ordre supérieur $G^{(2)}, G^{(3)}, \dots$

$$G^{(2)}(\vec{r}, \vec{r}') = \langle \hat{E}^-(\vec{r}) \hat{E}^-(\vec{r}') \hat{E}^+(\vec{r}') \hat{E}^+(\vec{r}) \rangle$$

$G^{(2)}(\vec{r}, \vec{r}')$ caractérise les corrélations d'intensité du champ en 2 points différents \vec{r} et \vec{r}' et la tendance des photons à se grouper.

$G^{(2)}(\vec{r}, \vec{r})$ caractérise les fluctuations d'intensité en un point \vec{r}

$$g^{(2)}(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{G^{(2)}(\vec{r}, \vec{r}')}{G^{(1)}(\vec{r}, \vec{r}) G^{(1)}(\vec{r}', \vec{r}')}$$

Ordre 3

$$G^{(3)}(\vec{r}, \vec{r}', \vec{r}'') = \langle \hat{E}^-(\vec{r}) \hat{E}^-(\vec{r}') \hat{E}^-(\vec{r}'') \hat{E}^+(\vec{r}'') \hat{E}^+(\vec{r}') \hat{E}^+(\vec{r}) \rangle$$

Résultats du calcul des fonctions de corrélation $G^{(1)}$ et $G^{(2)}$ dans quelques cas simples

① Cas d'un champ Gaussien

- Cas de l'équilibre thermodynamique de Maxwell-Boltzmann
- Cas d'un champ résultant de la superposition de plusieurs champs indépendants (théorème limite centrale)

$g^{(1)}(\vec{r}, \vec{r}')$ décroît de 1 à 0 quand $|\vec{r} - \vec{r}'|$ croît de 0 à $+\infty$, sur une distance caractéristique λ_c appelé "longueur de cohérence"

Notion de volume de cohérence

$g^{(2)}(\vec{r}, \vec{r}')$ décroît de 2 à 1 quand $|\vec{r} - \vec{r}'|$ croît de 0 à $+\infty$ sur la même distance caractéristique λ_c

$$g^{(2)}(\vec{r}, \vec{r}') = 1 + |g^{(1)}(\vec{r}, \vec{r}')|^2$$

Effet Hanbury-Brown et Twiss

Grouperment de photons

② Cas d'un état cohérent

$$\hat{E}^+(\vec{r})|\alpha\rangle = E_{cl}^+(\vec{r})|\alpha\rangle \quad \langle\alpha|\hat{E}^-(\vec{r}) = E_{cl}^-(\vec{r})\langle\alpha|$$

$$E_{cl}^+(\vec{r}) = [E_{cl}^-(\vec{r})]^*$$

$$G^{(1)}(\vec{r}, \vec{r}') = \langle\alpha|\hat{E}^-(\vec{r})\hat{E}^+(\vec{r}')|\alpha\rangle = E_{cl}^-(\vec{r})E_{cl}^+(\vec{r}')\langle\alpha|\alpha\rangle = E_{cl}^-(\vec{r})E_{cl}^+(\vec{r}')$$

On aurait de même

$$G^{(2)}(\vec{r}, \vec{r}') = E_{cl}^-(\vec{r})E_{cl}^-(\vec{r}')E_{cl}^+(\vec{r}')E_{cl}^+(\vec{r}) = \underbrace{E_{cl}^-(\vec{r})E_{cl}^+(\vec{r})}_{I_{cl}(\vec{r})} \underbrace{E_{cl}^-(\vec{r}')E_{cl}^+(\vec{r}')}_{I_{cl}(\vec{r}')}$$

Toutes les fonctions de corrélation se factorisent en produits de fonctions de \vec{r}, \vec{r}' . Définition d'un champ cohérent (Glauber)

On en déduit

$$|g^{(1)}(\vec{r}, \vec{r}')| = 1 \quad g^{(2)}(\vec{r}, \vec{r}') = 1$$

Plus d'effet Hanbury-Brown et Twiss

Condensats de Bose-Einstein

Etat $|\psi_0\rangle$ dans lequel sont condensés les atomes bosoniques

Fonction d'onde normée $\psi_0(\vec{r})$

La phase absolue de $\psi_0(\vec{r})$ n'a pas de sens physique. Les 2 états $\psi_0(\vec{r})$ et $\psi_0(\vec{r}) e^{i\chi}$ représentent le même état physique.

Différence avec le champ optique

La phase relative de $\psi_0(\vec{r})$ et $\psi_0(\vec{r}')$ est par contre importante

Opérateurs \hat{a}_0^+ et \hat{a}_0

Créent et détruisent un atome dans l'état $\psi_0(\vec{r})$

Opérateurs $\hat{\Psi}^+(\vec{r})$ et $\hat{\Psi}(\vec{r})$

Créent et détruisent un atome au point \vec{r}

$$\hat{\Psi}(\vec{r}) = \hat{a}_0 \psi_0(\vec{r}) + \sum_{i \neq 0} \hat{a}_i \psi_i(\vec{r})$$

$\{\psi_i(\vec{r})\}$ base orthonormée d'états à 1 particule incluant l'état $\psi_0(\vec{r})$

Etat de Fock $|N\rangle$

N bosons dans l'état $\psi_0(\vec{r})$

Etat cohérent $|\alpha\rangle$

On peut formellement introduire les états $|\alpha\rangle$, états propres de \hat{a}_0 , de valeur propre $\alpha = |\alpha| e^{i\varphi}$

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{N=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^N}{\sqrt{N!}} e^{iN\varphi} |N\rangle$$

Superposition d'états correspondant à des nombres différents N de bosons.

Sens physique d'un tel état ?

Toutes les observables physiques commutent avec l'opérateur \hat{N} nombre de particules - Règles de superselection.

Mélange statistique $\hat{\rho}$ d'états $|\alpha\rangle$

de même $|\alpha|$ et de phase φ équipartici entre 0 et 2π

$\hat{\rho}$ est aussi un mélange statistique d'états de Fock $|N\rangle$ et a un sens physique

Fonctions de corrélation

Ordre 1

$$G^{(1)}(\vec{r}, \vec{r}') = \langle \hat{\Psi}^+(\vec{r}) \hat{\Psi}(\vec{r}') \rangle$$

Remarque: $\hat{\Psi}^+(\vec{r}) \hat{\Psi}(\vec{r}')$ est l'opérateur en seconde quantification associé à l'opérateur à 1 particule $\sum_{i=1}^N |i, \vec{r}\rangle \langle i, \vec{r}'|$, de sorte que $G^{(1)}(\vec{r}, \vec{r}')$ peut également s'écrire $N \langle \vec{r}' | \hat{\rho}^{(1)} | \vec{r} \rangle$ où $\rho^{(1)}$ est l'opérateur densité à 1 particule

$$g^{(1)}(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{G^{(1)}(\vec{r}, \vec{r}')}{\sqrt{G^{(1)}(\vec{r}, \vec{r}) G^{(1)}(\vec{r}', \vec{r}')}}}$$

Ordre 2

$$G^{(2)}(\vec{r}, \vec{r}') = \langle \hat{\Psi}^+(\vec{r}) \hat{\Psi}^+(\vec{r}') \hat{\Psi}(\vec{r}') \hat{\Psi}(\vec{r}) \rangle$$

$$g^{(2)}(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{G^{(2)}(\vec{r}, \vec{r}')}{G^{(1)}(\vec{r}, \vec{r}) G^{(1)}(\vec{r}', \vec{r}')}$$

Ordre 3

$$G^{(3)}(\vec{r}, \vec{r}', \vec{r}'') = \langle \hat{\Psi}^+(\vec{r}) \hat{\Psi}^+(\vec{r}') \hat{\Psi}^+(\vec{r}'') \hat{\Psi}(\vec{r}'') \hat{\Psi}(\vec{r}') \hat{\Psi}(\vec{r}) \rangle$$

$$g^{(3)}(\vec{r}, \vec{r}', \vec{r}'') = \frac{G^{(3)}(\vec{r}, \vec{r}', \vec{r}'')}{G^{(1)}(\vec{r}, \vec{r}) G^{(1)}(\vec{r}', \vec{r}') G^{(1)}(\vec{r}'', \vec{r}'')}$$

Calcul des fonctions de corrélation dans un état de Fock $|N\rangle$

- N bosons dans le même état $\psi_0(\vec{r})$.

Un tel état correspond à la description du condensat dans une théorie de champ moyen

ψ_0 est la solution de l'équation de G.P.

- On peut écrire $|N\rangle$ sous la forme

$$|N\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!}} (\hat{a}_0^+)^N |0\rangle$$

$|0\rangle$: vide de particules

$$\hat{\Psi}(\vec{r}) = \sum_{i=0}^{\infty} \hat{a}_i \psi_i(\vec{r}) \quad \hat{\Psi}^+(\vec{r}) = \sum_{i=0}^{\infty} \hat{a}_i^+ \psi_i^*(\vec{r})$$

Comme \hat{a}_i et \hat{a}_i^+ avec $i \neq 0$ commutent avec \hat{a}_0 et \hat{a}_0^+ on peut remplacer $\hat{\Psi}(\vec{r})$ par $\hat{a}_0 \psi_0(\vec{r})$ et $\hat{\Psi}^+(\vec{r})$ par $\hat{a}_0^+ \psi_0^*(\vec{r})$ dans le calcul de $G^{(1)}, G^{(2)}, G^{(3)} \dots$ pour un système de bosons dans l'état $|N\rangle$

En effet, l'ordre normal et la commutation de \hat{a}_i avec $(\hat{a}_0^+)^N$ sont apparaitre $\hat{a}_i |0\rangle = 0$

T-37

Calcul de $G^{(1)}$

$$G^{(1)}(\vec{r}, \vec{r}') = \Psi_0^*(\vec{r}) \Psi_0(\vec{r}') \frac{\langle N | \hat{a}_0^+ \hat{a}_0 | N \rangle}{= N \langle N | N \rangle} = N$$

$$G^{(1)}(\vec{r}, \vec{r}') = N \Psi_0^*(\vec{r}) \Psi_0(\vec{r}')$$

Calcul de $G^{(2)}$

$$G^{(2)}(\vec{r}, \vec{r}') = \Psi_0^*(\vec{r}) \Psi_0^*(\vec{r}') \Psi_0(\vec{r}') \Psi_0(\vec{r}) \frac{\langle N | \hat{a}_0^+ \hat{a}_0^+ \hat{a}_0 \hat{a}_0 | N \rangle}{= N(N-1) \langle N-2 | N-2 \rangle} = N(N-1)$$

$$G^{(2)}(\vec{r}, \vec{r}') = N(N-1) |\Psi_0(\vec{r})|^2 |\Psi_0(\vec{r}')|^2$$

$$g^{(2)}(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{N(N-1)}{N^2} = 1 - \frac{1}{N} \approx 1 \text{ si } N \gg 1$$

Calcul de $G^{(3)}$

$$G^{(3)}(\vec{r}, \vec{r}', \vec{r}'') = \Psi_0^*(\vec{r}) \Psi_0^*(\vec{r}') \Psi_0^*(\vec{r}'') \Psi_0(\vec{r}'') \Psi_0(\vec{r}') \Psi_0(\vec{r}) \frac{\langle N | \hat{a}_0^+ \hat{a}_0^+ \hat{a}_0^+ \hat{a}_0 \hat{a}_0 \hat{a}_0 | N \rangle}{N(N-1)(N-2) \langle N-3 | N-3 \rangle} = N(N-1)(N-2)$$

$$G^{(3)}(\vec{r}, \vec{r}', \vec{r}'') = N(N-1)(N-2) |\Psi_0(\vec{r})|^2 |\Psi_0(\vec{r}')|^2 |\Psi_0(\vec{r}'')|^2$$

$$g^{(3)}(\vec{r}, \vec{r}', \vec{r}'') = \frac{N(N-1)(N-2)}{N^3} = (1 - \frac{1}{N})(1 - \frac{2}{N}) \approx 1 \text{ si } N \gg 1$$

T-39

Gaz parfait de bosons dans une boîte

$$\langle n_k \rangle = \frac{z e^{-\beta \epsilon_k}}{1 - z e^{-\beta \epsilon_k}} = \sum_{l=1}^{\infty} z^l e^{-l \beta \epsilon_k}$$

$$z = e^{\beta \mu} = \text{Fugacité} \quad \epsilon_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \quad \beta = \frac{1}{k_B T}$$

$$G^{(1)}(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{L^3} \sum_k \langle n_k \rangle e^{i \vec{k} \cdot (\vec{r}' - \vec{r})}$$

Si l'on remplace \sum_k par une intégrale, on élimine la contribution de $\vec{k} = \vec{0}$ car la densité d'états s'annule en ce point

Il faut donc séparer la contribution de $\vec{k} = \vec{0}$ du reste qui peut être approximé par une intégrale (étendue jusqu'à 0)

$$G^{(1)}(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{N_0}{L^3} + \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k e^{i \vec{k} \cdot (\vec{r}' - \vec{r})} \sum_{l=1}^{\infty} z^l e^{-l \beta \frac{\hbar^2 k^2}{2m}}$$

$N_0 = \langle n_0 \rangle =$ Population de l'état fondamental

$$G^{(1)}(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{N_0}{L^3} + \frac{1}{\lambda_T^3} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{z^l}{l^{3/2}} e^{-\frac{\pi(\vec{r}' - \vec{r})^2}{2 \lambda_T^2}}$$

$$\lambda_T = \sqrt{\frac{2\pi \hbar^2}{m k_B T}} = \text{Longueur d'onde de de Broglie thermique}$$

$$G^{(1)}(\vec{r}, \vec{r}') = \rho(\vec{r}) = \frac{N_0}{L^3} + \frac{1}{\lambda_T^3} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{z^l}{l^{3/2}} = \frac{N}{L^3}$$

Fonction de corrélation $G^{(1)}$ et longueur de cohérence pour un gaz de bosons en équilibre thermodynamique T-38

① Bosons dans une boîte

Base orthonormée d'états

$$\Psi_i(\vec{r}) = \frac{1}{L^{3/2}} e^{i \vec{k}_i \cdot \vec{r}} \quad k_{ix} = \frac{2\pi}{L} n_x$$

$$\hat{\Psi}(\vec{r}) = \frac{1}{L^{3/2}} \sum_k \hat{a}_k e^{i \vec{k} \cdot \vec{r}} \quad \hat{\Psi}^\dagger(\vec{r}) = \frac{1}{L^{3/2}} \sum_k \hat{a}_k^\dagger e^{-i \vec{k} \cdot \vec{r}}$$

$$G^{(1)}(\vec{r}, \vec{r}') = T_0 [\hat{\rho}_{eq} \hat{\Psi}^\dagger(\vec{r}) \hat{\Psi}(\vec{r}')] = \sum_k \frac{1}{L^3} e^{i \vec{k} \cdot (\vec{r}' - \vec{r})} T_0 \langle \hat{\rho}_{eq} \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k \rangle$$

Invariance par translation de $\hat{\rho}_{eq}$

- $\langle \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k \rangle = 0$ si $\vec{k}' \neq \vec{k}$
- $G^{(1)}$ ne dépend que de $\vec{r} - \vec{r}'$

$$\hat{\rho}_{eq} = \frac{1}{Z_0} e^{-\beta(\hat{H} - \mu \hat{N})}$$

$$\hat{H} = \sum_k \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + V_{int}$$

Pour un gaz parfait, $V_{int} = 0$

T-40

Evolution de $G^{(1)}(\vec{r}, \vec{r}')$ quand on augmente progressivement N à T fixée

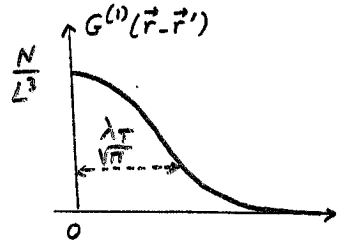
Gaz très dilué $\rho \lambda_T^3 \ll 1 \quad \rho = \frac{N}{L^3}$

- On a alors $z \ll 1$ et $N_0 \ll N$. On peut négliger N_0/L^3 . De l'expression $\rho(\vec{r}) = \frac{N}{L^3} \approx \frac{1}{\lambda_T^3} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{z^l}{l^{3/2}} = \frac{1}{\lambda_T^3} g_{3/2}(z)$ on déduit, comme $g_{3/2}(z) \approx z$ si $z \ll 1$

$$\frac{N}{L^3} \approx \frac{z}{\lambda_T^3} \rightarrow z = \lambda_T^3 \frac{N}{L^3}$$

- Dans l'expression de $G^{(1)}(\vec{r}, \vec{r}')$, on peut négliger N_0/L^3 et ne garder que le terme $l=1$ dans la série $\sum_{l=1}^{\infty} \frac{z^l}{l^{3/2}} e^{-\frac{\pi(\vec{r}' - \vec{r})^2}{2 \lambda_T^2}}$

- On retrouve le résultat correspondant à un gaz parfait classique de Maxwell-Boltzmann



$$s = |\vec{r} - \vec{r}'|$$

On augmente N tout en restant en dessous de la densité critique

N_0 reste négligeable, mais z croît et on ne peut plus négliger les termes $l > 1$ dans la série $\sum_{l=1}^{\infty}$

$G^{(1)}(\vec{r}-\vec{r}')$ est une somme de Gaussiennes de largeurs croissantes $\frac{\lambda_T}{\sqrt{1}}, \frac{\lambda_T \sqrt{2}}{\sqrt{1}}, \frac{\lambda_T \sqrt{3}}{\sqrt{1}}, \dots$. La largeur de $G^{(1)}(\vec{r}-\vec{r}')$ croît quand N croît.

On atteint le régime critique pour $\lambda_T^3 = 2.612$

On a alors $z = 1$. On peut toujours négliger N_0 qui n'a pas encore commencé à croître et faire $z = 1$ dans la série $\sum_{l=1}^{\infty}$

$$G_{crit}^{(1)}(\vec{r}-\vec{r}') = \frac{1}{\lambda_T^3} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l^{3/2}} e^{-\frac{\pi(\vec{r}-\vec{r}')^2}{l\lambda_T^2}}$$

Courbe qui ne dépend plus que de λ_T

$$G_{crit}^{(1)}(\vec{r}, \vec{r}) = \frac{1}{\lambda_T^3} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l^{3/2}} = \frac{2.612}{\lambda_T^3} = \rho_{crit}$$

On retrouve bien la valeur de la densité critique pour $G^{(1)}(\vec{r}, \vec{r}) = \rho(\vec{r})$

Comportement asymptotique de $G^{(1)}(\vec{r}-\vec{r}')$ pour $|\vec{r}-\vec{r}'| = s \gg \lambda_T$ T-42

Revenons à l'expression de $\langle n_k \rangle$

$$\langle n_k \rangle = \frac{z e^{-\beta \epsilon_k}}{1 - z e^{-\beta \epsilon_k}} \quad \epsilon_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

sans faire le développement en puissances de z

Comme $G^{(1)}(s)$ est la transformée de Fourier de $\langle n_k \rangle$, le comportement de $G^{(1)}(s)$ aux grands s est déterminé par celui de $\langle n_k \rangle$ aux petits k

$$\langle n_k \rangle = \frac{z}{e^{\beta \hbar^2 k^2 / 2m} - z} \approx_{k \rightarrow 0} \frac{z}{1 - z + \frac{\beta \hbar^2}{2m} k^2} = \frac{z}{\beta \hbar^2 / 2m} \frac{1}{k^2 + k_c^2}$$

$$k_c^2 = \frac{1-z}{\beta \hbar^2 / 2m} = \frac{4\pi(1-z)}{\lambda_T^2}$$

On en déduit

$$z < 1 \rightarrow G^{(1)}(s) \underset{s \gg \lambda_T}{\propto} \frac{e^{-s \frac{\sqrt{4\pi(1-z)}}{\lambda_T}}}{s}$$

$$z = 1 \rightarrow G_{crit}^{(1)}(s) \underset{s \gg \lambda_T}{\propto} \frac{1}{s}$$

Au dessus du seuil $z < 1$ T-43

La somme de la série de Gaussiennes $e^{-\pi s^2 / l \lambda_T^2}$ avec $l = 1, 2, 3, \dots$ tend vers une "courbe de Yukawa" en $\frac{e^{-\gamma s}}{s}$ avec $\gamma = \frac{\lambda_T}{\sqrt{4\pi(1-z)}}$

Quand on atteint le seuil $z = 1$

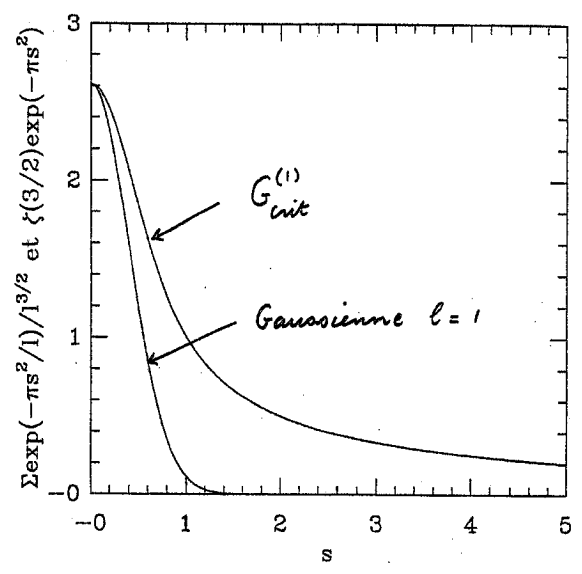
La somme de la série de Gaussiennes tend vers une courbe en $\frac{1}{s}$

Disparition de toute échelle de longueur (loi de puissance) dans la portée des corrélations spatiales

Etude numérique de $G_{crit}^{(1)}(s)$ T-44

(faite par Yvan Castin)

Comparaison de $G_{crit}^{(1)}(s)$ et de la Gaussienne la plus étroite ($l=1$) normalisées à la même valeur en $s=0$

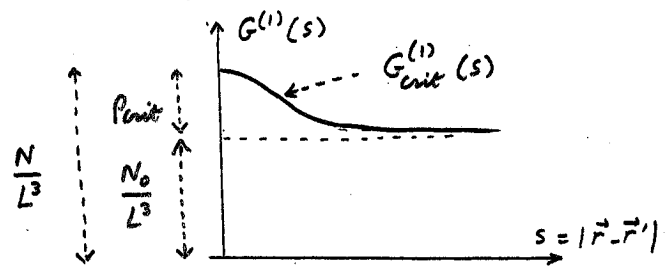


On dépasse la densité critique $\rho > \rho_{crit}$

N_0 n'est plus négligeable. z reste égal à 1

$$G^{(1)}(\vec{r}-\vec{r}') = \frac{N_0}{L^3} + G_{crit}^{(1)}(\vec{r}-\vec{r}') \quad (T-45)$$

$$G^{(1)}(\vec{r}, \vec{r}) = \frac{N_0}{L^3} + \rho_{crit} \quad \rho_{crit} = \frac{N-N_0}{L^3}$$



Toute augmentation de N se répercute intégralement sur N_0 .

ρ_{crit} ne change pas. Le fond plat augmente. La "bosse" reste inchangée

On voit apparaître une longueur de cohérence infinie due au condensat

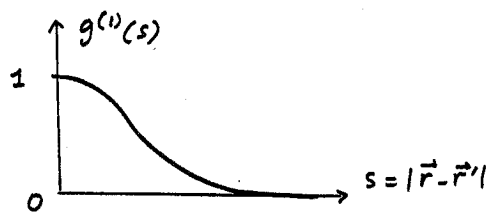
Ordre à longue portée

Fonctions de corrélation normalisée

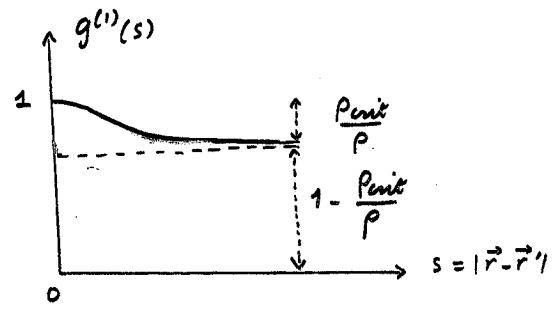
$$g^{(1)}(\vec{r}-\vec{r}') = \frac{G^{(1)}(\vec{r}-\vec{r}')}{\sqrt{G^{(1)}(0) G^{(1)}(0)}} \quad (T-46)$$

Gaz très dilué

$$g^{(1)}(\vec{r}-\vec{r}') = e^{-\frac{\pi(\vec{r}-\vec{r}')^2}{\lambda_T^2}}$$



Gaz très dense



Quand $\rho \rightarrow \infty$, $g^{(1)}(s) \rightarrow 1$

Effet des interactions

(T-47)

On se limite au cas $T=0^\circ K$, où l'on peut valablement utiliser l'approche de Bogolubov. On a toujours

$$G^{(1)}(\vec{r}-\vec{r}') = \frac{N_0}{L^3} + \sum_{k \neq 0} \frac{\langle \hat{a}_k^+ \hat{a}_k \rangle}{L^3} e^{i\vec{k} \cdot (\vec{r}' - \vec{r})}$$

Les $\langle \hat{a}_k^+ \hat{a}_k \rangle = \langle \tilde{\Psi}_0 | \hat{a}_k^+ \hat{a}_k | \tilde{\Psi}_0 \rangle$ (où $\tilde{\Psi}_0$ est le nouvel état fondamental perturbé sous l'effet des interactions) ne sont plus nuls quand $k \neq 0$, non pas à cause des excitations thermiques puisque $T=0^\circ K$, mais à cause des collisions élastiques

"Dépletion quantique" du condensat

$$G^{(1)}(\vec{r}, \vec{r}) = \rho(\vec{r}) = \frac{N_0}{L^3} + \sum_{k \neq 0} \frac{1}{L^3} \langle \hat{a}_k^+ \hat{a}_k \rangle = \frac{N}{L^3}$$

$$\sum_{k \neq 0} \frac{1}{L^3} \langle \hat{a}_k^+ \hat{a}_k \rangle = \frac{N-N_0}{L^3} = \frac{8\rho}{3\sqrt{\pi}} (\rho a^3)^{1/2}$$

(Voir transparent T17)

Calcul de $\sum_{k \neq 0} \frac{1}{L^3} \langle \hat{a}_k^+ \hat{a}_k \rangle e^{i\vec{k} \cdot (\vec{r}' - \vec{r})}$

(T-48)

$$\begin{aligned} \hat{a}_{\vec{k}} &= u_k \hat{b}_{\vec{k}}^+ - v_k \hat{b}_{-\vec{k}} \\ \hat{a}_{-\vec{k}}^+ &= u_k \hat{b}_{\vec{k}} - v_k \hat{b}_{-\vec{k}}^+ \\ \langle \hat{b}_{\vec{k}} | \tilde{\Psi}_0 \rangle &= 0 \quad \langle \tilde{\Psi}_0 | \hat{b}_{-\vec{k}}^+ \rangle = 0 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{Voir} \\ \text{cours 98-99} \\ \text{page VIII-7} \end{array} \right\}$$

$$G^{(1)}(\vec{r}-\vec{r}') = \frac{N_0}{L^3} + \frac{1}{L^3} \sum_{k \neq 0} v_k^2 e^{i\vec{k} \cdot (\vec{r}' - \vec{r})}$$

$$\approx \frac{N_0}{L^3} + \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k v_k^2 e^{i\vec{k} \cdot (\vec{r}' - \vec{r})}$$

$$v_k^2 = s k^2 \theta_k = \frac{1}{2} \left[\frac{k^2 + k_0^2}{k^2(k^2 + 2k_0^2)} - 1 \right] \quad \text{Cours 98-99 page VII-12}$$

$$k_0 = \frac{1}{\xi_0} \quad \xi_0 = \frac{1}{\sqrt{8\pi} \rho a_0} = \text{longueur de relaxation}$$

$$G^{(1)}(s) \approx \frac{N_0}{L^3} + \frac{k_0^3}{(2\pi)^3} \int d^3k \frac{1}{2} k \left[\frac{k^2+1}{\sqrt{k^2+2}} - k \right] e^{i\vec{k} \cdot \vec{s} / \xi_0}$$

$$\vec{k} = \frac{k}{k_0} \quad s = |\vec{r}' - \vec{r}'|$$

On retrouve une courbe analogue à celle de T-18. La "bosse" a maintenant une amplitude de l'ordre de $\frac{N-N_0}{N} \propto (\rho a^3)^{1/2}$ et sa longueur est déterminée par la longueur de relaxation ξ_0 .

Récapitulation

Dans un gaz parfait très loin de la dégénérescence, les corrélations spatiales s'étendent sur une distance très faible, de l'ordre de la longueur d'onde de de Broglie thermique.

Quand on s'approche de la dégénérescence, cette longueur de cohérence augmente.

L'apparition d'un condensat se traduit par une longueur de cohérence infinie, c'est à dire par un ordre à très longue portée

Pour $T \ll T_c$, la contribution du condensat est prépondérante et $G^{(1)}(s)$ ne dépend plus de s , sauf si des interactions font apparaître un pic d'amplitude de l'ordre de $(\rho a^3)^{1/2}$ et de largeur de l'ordre de ξ_0 .

T-49

2) Bosons dans un piège harmonique

T-50

- Oscillateur harmonique isotrope de fréquence ω

$E_n = n \hbar \omega$ $n = n_x + n_y + n_z$
(énergies repérées par rapport à celle du vide)

- Largeur spatiale de l'état fondamental

$\sigma = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$

- En l'absence d'interactions, la matrice densité à un corps est diagonale dans la base $\{|n\rangle\}$ et on est ramené au calcul d'éléments de matrice de la forme $\langle \vec{r} | \frac{1}{Z} e^{-\beta \hat{H}_0} | \vec{r}' \rangle$. A la limite $k_B T \gg \hbar \omega$, on trouve (voir ref. 3)

$\langle \vec{r} | \frac{1}{Z} e^{-\beta \hat{H}_0} | \vec{r}' \rangle = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{(\Delta r)^3} \times$
 $\exp\left[-\frac{[(\vec{r}+\vec{r}')/2]^2}{2\Delta r^2}\right] \exp\left[-\frac{(\vec{r}-\vec{r}')^2}{2\xi^2}\right]$
 $\Delta r^2 = \frac{k_B T}{m\omega^2}$ $\xi^2 = \frac{\hbar^2}{mk_B T} = \frac{\lambda^2}{2\pi}$

T-51

Résultats du calcul de $G^{(1)}$ (en l'absence d'interactions)

Cas très peu dégénéré ($N \ll N_{crit}$)

$G^{(1)}(\vec{r}, \vec{r}') = N \langle \vec{r} | \frac{1}{Z} e^{-\beta \hat{H}_0} | \vec{r}' \rangle =$
 $\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{N}{(\Delta r)^3} \exp\left\{-\frac{[(\vec{r}+\vec{r}')/2]^2}{2\Delta r^2}\right\} \exp\left[-\frac{(\vec{r}-\vec{r}')^2}{2\xi^2}\right]$

Densité spatiale : $\rho(\vec{r}) = G(\vec{r}, \vec{r})$

$\rho(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{N}{(\Delta r)^3} \exp\left[-\frac{r^2}{2\Delta r^2}\right]$

Gaussienne de largeur $\Delta r = \sqrt{\frac{k_B T}{m\omega^2}}$

$G^{(1)}(\vec{r}, \vec{r}')$ dépend de \vec{r} et \vec{r}' et non plus simplement de $\vec{r}-\vec{r}'$. Il n'y a plus d'invariance par translation

$G^{(1)}(\vec{r}, \vec{r}')$ dépend de $(\vec{r}+\vec{r}')/2$ sur des distances de l'ordre de Δr et de $\vec{r}-\vec{r}'$ sur des distances de l'ordre de ξ

Δr apparaît comme la largeur du nuage d'atomes et ξ comme la longueur de cohérence, de l'ordre de λ_T

T-52

Quand N augmente en restant $\ll N_{crit}$, la longueur de cohérence augmente, comme dans le cas du gaz dans une boîte, car $G^{(1)}$ est une somme de fonctions analogues à celle donnée plus haut, avec des longueurs de cohérence croissant en $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4} \dots$

Quand N atteint N_{crit} , $G^{(1)}(\vec{r}, \vec{r}') = G_{crit}^{(1)}(\vec{r}, \vec{r}')$ (dans la série en z , on fait $z=1$)

Quand N dépasse N_{crit} , on voit apparaître une contribution de l'état fondamental $\psi_0(\vec{r})$ du piège

$G^{(1)}(\vec{r}, \vec{r}') = N_0 \psi_0^*(\vec{r}) \psi_0(\vec{r}') + G_{crit}^{(1)}(\vec{r}, \vec{r}')$

Le condensat formé par les N_0 atomes dans l'état $\psi_0(\vec{r})$ fait apparaître une nouvelle longueur de cohérence, la largeur $\sigma = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$ de l'état ψ_0 .

Quand $N \gg N_{crit}$,

$G^{(1)}(\vec{r}, \vec{r}') \approx N \psi_0^*(\vec{r}) \psi_0(\vec{r}')$

Comparaison des diverses longueurs

- Longueur de cohérence du condensat

$$\sigma_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$$

- Longueur d'onde de de Broglie thermique

$$\lambda_T = \hbar \sqrt{\frac{2\pi}{mk_B T}}$$

- Extension du usage thermique

$$\Delta r = \sqrt{\frac{k_B T}{m\omega^2}}$$

$$\frac{\lambda_T}{\sigma_0} = \sqrt{\frac{2\pi \hbar \omega}{k_B T}} \ll 1 \quad \text{car} \quad \hbar \omega \ll k_B T$$

Le condensat fait donc apparaître un ordre à longue portée

$$\frac{\sigma_0}{\Delta r} = \sqrt{\frac{\hbar \omega}{k_B T}} \ll 1$$

On a donc

$$\lambda_T \ll \sigma_0 \ll \Delta r$$

Fonctions de corrélation d'ordre supérieur $G^{(2)}$ et $G^{(3)}$

Importantes pour étudier les corrélations de densité et fluctuations de densité des atomes bosoniques.

Difficultés

L'ensemble grand canonique, très commode pour les calculs (factorisation de l'opérateur densité en l'absence d'interactions), prédit des fluctuations importantes du nombre N_0 de particules condensées.

Il s'applique aux expériences faites sur des bosons piégés où N est fixé (en l'absence de pertes) et où il faudrait plutôt utiliser l'ensemble canonique

Les prédictions sur les valeurs moyennes $\langle \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k \rangle$ varient cependant peu d'un ensemble à l'autre, et le calcul de $G^{(1)}$ fait plus haut demeure valable

Solution adoptée ici

- Pour un système condensé ($N \gg N_{crit}$) on n'utilisera pas l'ensemble grand canonique pour calculer $G^{(2)}$ et $G^{(3)}$ mais un état de Fock $|N_0\rangle$. Un tel calcul a déjà été fait plus haut (T-37)

Remarque : on vérifie bien par contre que le résultat du calcul de $G^{(1)}$ est le même à la limite $N \gg N_{crit}$, que l'on utilise un état de Fock ou l'ensemble grand canonique (comparer T-37 et T-52).

- Pour un système très peu dégénéré ($N \ll N_{crit}$), on peut montrer que les prédictions des ensembles canonique et grand canonique diffèrent très peu, et on continuera à utiliser l'ensemble grand canonique, plus commode mathématiquement, pour calculer $G^{(2)}$ et $G^{(3)}$.

Théorème de WickHypothèses

- Bosons sans interactions
 - Ensemble grand canonique
- $$\hat{\rho} = \frac{1}{Z_G} e^{-\beta(\hat{H} - \mu \hat{N})} = \frac{1}{Z_G} \prod_k e^{-\beta \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k (\epsilon_k - \mu)}$$
- ϵ_k : Energie de l'état individuel k

Résultats

$$\begin{aligned} \langle \hat{a}_x^\dagger \hat{a}_x^\dagger \hat{a}_y \hat{a}_y \rangle &= \text{Tr} (\hat{a}_x^\dagger \hat{a}_x^\dagger \hat{a}_y \hat{a}_y \hat{\rho}) = \\ &= \langle \hat{a}_x^\dagger \hat{a}_y \rangle \langle \hat{a}_x^\dagger \hat{a}_y \rangle + \langle \hat{a}_x^\dagger \hat{a}_y \rangle \langle \hat{a}_x^\dagger \hat{a}_y \rangle \\ \langle \hat{a}_x^\dagger \hat{a}_p^\dagger \hat{a}_y \hat{a}_y \hat{a}_e \hat{a}_e \rangle &= \\ &= \langle \hat{a}_x^\dagger \hat{a}_y \rangle \langle \hat{a}_p^\dagger \hat{a}_e \rangle + \langle \hat{a}_x^\dagger \hat{a}_e \rangle \langle \hat{a}_p^\dagger \hat{a}_y \rangle + \langle \hat{a}_y^\dagger \hat{a}_e \rangle \langle \hat{a}_p^\dagger \hat{a}_x \rangle \\ &+ \langle \hat{a}_x^\dagger \hat{a}_e \rangle \langle \hat{a}_p^\dagger \hat{a}_y \rangle + \langle \hat{a}_y^\dagger \hat{a}_e \rangle \langle \hat{a}_p^\dagger \hat{a}_x \rangle + \langle \hat{a}_x^\dagger \hat{a}_y \rangle \langle \hat{a}_p^\dagger \hat{a}_e \rangle \\ &+ \langle \hat{a}_x^\dagger \hat{a}_y \rangle \langle \hat{a}_p^\dagger \hat{a}_e \rangle + \langle \hat{a}_y^\dagger \hat{a}_e \rangle \langle \hat{a}_p^\dagger \hat{a}_x \rangle + \langle \hat{a}_x^\dagger \hat{a}_e \rangle \langle \hat{a}_p^\dagger \hat{a}_y \rangle \end{aligned}$$

Produit des valeurs moyennes de tous les produits possibles d'un opérateur de création par un opérateur d'annihilation

Généralisation possible à des Fermions et à des ordres autres que l'ordre normal pour les produits d'opérateurs

Calcul de $G^{(2)}(\vec{r}, \vec{r}')$

$$\hat{\Psi}^+(\vec{r}) = \sum_{\alpha} \psi_{\alpha}^*(\vec{r}) \hat{a}_{\alpha}^{\dagger} \quad \hat{\Psi}(\vec{r}) = \sum_{\beta} \psi_{\beta}(\vec{r}) \hat{a}_{\beta}$$

$$\langle \hat{\Psi}^+(\vec{r}) \hat{\Psi}^+(\vec{r}') \hat{\Psi}(\vec{r}') \hat{\Psi}(\vec{r}) \rangle =$$

$$\sum_{\alpha} \sum_{\beta} \sum_{\gamma} \sum_{\delta} \psi_{\alpha}^*(\vec{r}) \psi_{\beta}^*(\vec{r}') \psi_{\gamma}(\vec{r}') \psi_{\delta}(\vec{r}) \langle \hat{a}_{\alpha}^{\dagger} \hat{a}_{\beta}^{\dagger} \hat{a}_{\gamma} \hat{a}_{\delta} \rangle$$

En utilisant le théorème de Wick, et de nouveau l'expression de $\hat{\Psi}$ et $\hat{\Psi}^+$ en fonction des \hat{a} et \hat{a}^{\dagger} , on obtient

$$G^{(2)}(\vec{r}, \vec{r}') = \langle \hat{\Psi}^+(\vec{r}) \hat{\Psi}^+(\vec{r}') \hat{\Psi}(\vec{r}') \hat{\Psi}(\vec{r}) \rangle =$$

$$\langle \hat{\Psi}^+(\vec{r}) \hat{\Psi}(\vec{r}') \rangle \langle \hat{\Psi}^+(\vec{r}') \hat{\Psi}(\vec{r}) \rangle + \langle \hat{\Psi}^+(\vec{r}) \hat{\Psi}(\vec{r}) \rangle \langle \hat{\Psi}^+(\vec{r}') \hat{\Psi}(\vec{r}') \rangle$$

$$= |G^{(1)}(\vec{r}, \vec{r}')|^2 + G^{(1)}(\vec{r}, \vec{r}) G^{(1)}(\vec{r}', \vec{r}')$$

On en déduit

$$g^{(2)}(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{G^{(2)}(\vec{r}, \vec{r}')}{G^{(1)}(\vec{r}, \vec{r}) G^{(1)}(\vec{r}', \vec{r}')} =$$

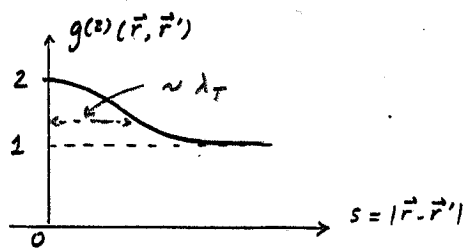
$$= 1 + \frac{|G^{(1)}(\vec{r}, \vec{r}')|^2}{G^{(1)}(\vec{r}, \vec{r}) G^{(1)}(\vec{r}', \vec{r}')}$$

c'est à dire encore

$$g^{(2)}(\vec{r}, \vec{r}') = 1 + |g^{(1)}(\vec{r}, \vec{r}')|^2$$

$$g^{(2)}(\vec{r}, \vec{r}) = 1 + 1 = 2$$

Variations de $g^{(2)}$



Calcul de $G^{(3)}(\vec{r}, \vec{r}', \vec{r}'')$

$$G^{(3)}(\vec{r}, \vec{r}', \vec{r}'') =$$

$$\langle \hat{\Psi}^+(\vec{r}) \hat{\Psi}^+(\vec{r}') \hat{\Psi}^+(\vec{r}'') \hat{\Psi}(\vec{r}'') \hat{\Psi}(\vec{r}') \hat{\Psi}(\vec{r}) \rangle =$$

$$= G^{(1)}(\vec{r}, \vec{r}) G^{(1)}(\vec{r}', \vec{r}') G^{(1)}(\vec{r}'', \vec{r}'')$$

$$+ G^{(1)}(\vec{r}, \vec{r}') G^{(1)}(\vec{r}', \vec{r}'') G^{(1)}(\vec{r}'', \vec{r})$$

$$+ G^{(1)}(\vec{r}, \vec{r}') G^{(1)}(\vec{r}', \vec{r}) G^{(1)}(\vec{r}'', \vec{r}'')$$

$$+ G^{(1)}(\vec{r}'', \vec{r}'') G^{(1)}(\vec{r}, \vec{r}') G^{(1)}(\vec{r}', \vec{r})$$

$$+ G^{(1)}(\vec{r}, \vec{r}') G^{(1)}(\vec{r}', \vec{r}'') G^{(1)}(\vec{r}'', \vec{r})$$

$$+ G^{(1)}(\vec{r}, \vec{r}'') G^{(1)}(\vec{r}'', \vec{r}') G^{(1)}(\vec{r}', \vec{r})$$

3! = 6 termes

Expression de $g^{(3)}(\vec{r}, \vec{r}', \vec{r}'')$

$$g^{(3)}(\vec{r}, \vec{r}', \vec{r}'') = \frac{G^{(3)}(\vec{r}, \vec{r}', \vec{r}'')}{G^{(1)}(\vec{r}, \vec{r}) G^{(1)}(\vec{r}', \vec{r}') G^{(1)}(\vec{r}'', \vec{r}'')}$$

$$= 1 + |g^{(1)}(\vec{r}, \vec{r}')|^2 + |g^{(1)}(\vec{r}', \vec{r}'')|^2 + |g^{(1)}(\vec{r}'', \vec{r})|^2$$

$$+ 2 \operatorname{Re} [g^{(1)}(\vec{r}, \vec{r}') g^{(1)}(\vec{r}', \vec{r}'') g^{(1)}(\vec{r}'', \vec{r})]$$

Quand $\vec{r} = \vec{r}' = \vec{r}''$, tous les $g^{(1)}$ valent 1, et l'on a donc

$$g^{(3)}(\vec{r}, \vec{r}, \vec{r}) = 6 = 3!$$

Quand $|\vec{r} - \vec{r}''| \gg \lambda_T$ et $|\vec{r}' - \vec{r}''| \gg \lambda_T$, on peut négliger $g^{(1)}(\vec{r}, \vec{r}'')$ et $g^{(1)}(\vec{r}', \vec{r}'')$ de sorte que

$$g^{(3)}(\vec{r}, \vec{r}', \vec{r}'') \underset{\vec{r}'' \rightarrow \infty}{\approx} g^{(2)}(\vec{r}, \vec{r}') = 1 + |g^{(1)}(\vec{r}, \vec{r}')|^2$$

Quelques références

- (1) R.J. Glauber
Phys. Rev. 130, 2529 (1963)
Voir aussi le cours de R.J. Glauber à l'école d'été des Houches en 1964
- (2) M. Naraschewski, R.J. Glauber
Phys. Rev. A59, 4595 (1999)
et references in
- (3) L. Landau, L. Lifchitz,
Physique Statistique, 1^{ère} partie
Editions Mir, Moscou 1984
§ 30, p.100 et problème p.103

19.10.99

III - 1

Propriétés de cohérence d'un condensat (suite et fin)

6 - Fluctuations du nombre N_0 de particules condensées

T-61 à T-66

- Calcul de la dispersion ΔN_0 sur N_0 en l'absence d'interactions
Description du condensat par un état de Fock
Description grand canonique
- Prise en compte des interactions

7 - Quelques études expérimentales des fonctions de corrélation d'un condensat

T-67 à T-76

- Energie libérée après expansion balistique du condensat
- Temps de collisions inélastiques à 3 corps
Expérience de Boulder
- Corrections liées aux interactions

Phase relative de 2 condensats

1 - Introduction

T-77 à T-80

2 - Etats de phase relative $|N, \varphi\rangle$

T-81 à T-86

- Définition.
- Propriétés.
- Mélanges statistiques d'états $|N, \varphi\rangle$ correspondant à des phases relatives différentes
- Conclusion - Variable conjuguée de φ

3 - Etats cohérents relatifs $\hat{P}_{NB}(\varphi)$

T-87 à T-91

- Définition.
- Expression.
- Lien avec les états de phase relative.
- Mélange statistique d'états cohérents relatifs.

Fluctuations du nombre N_0 de particules condensées T-61

$$\Delta N_0^2 = \langle \hat{N}_0^2 \rangle - \langle \hat{N}_0 \rangle^2$$

Comparaison des résultats obtenus pour ΔN_0^2 avec 2 descriptions différentes du condensat

① Description par un état de Fock $|N_0\rangle$

$$\hat{N}_0 = \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_0$$

$$\begin{aligned} \langle \hat{N}_0^2 \rangle &= \langle N_0 | \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_0 \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_0 | N_0 \rangle \\ &= \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_0 \hat{a}_0 + \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_0 \\ &= N_0(N_0-1) + N_0 = N_0^2 \end{aligned}$$

$$\langle \hat{N}_0 \rangle = \langle N_0 | \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_0 | N_0 \rangle = N_0$$

$$\langle \hat{N}_0 \rangle^2 = N_0^2$$

$$\hookrightarrow \Delta N_0 = 0$$

Résultat évident a priori

Si l'état du condensat est décrit par un état de Fock, N_0 est fixe et ne fluctue pas

② Description grand canonique T-62

$$\langle \hat{N}_0^2 \rangle = \text{Tr} \{ \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_0 \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_0 \hat{\rho} \}$$

Utilisation du théorème de Wick

$$\langle \hat{N}_0^2 \rangle = \text{Tr} \{ (\hat{a}_0^\dagger \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_0 \hat{a}_0 + \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_0) \hat{\rho} \}$$

$$\begin{aligned} \langle \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_0 \hat{a}_0 \rangle &= \langle \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_0 \rangle \langle \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_0 \rangle + \langle \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_0 \rangle \langle \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_0 \rangle \\ &= 2 \langle \hat{N}_0 \rangle^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hookrightarrow \Delta N_0^2 &= \langle \hat{N}_0^2 \rangle - \langle \hat{N}_0 \rangle^2 \\ &= \langle \hat{N}_0 \rangle^2 + \langle \hat{N}_0 \rangle \end{aligned}$$

$$\Delta N_0^2 = \langle \hat{N}_0 \rangle (\langle \hat{N}_0 \rangle + 1)$$

Si $\langle \hat{N}_0 \rangle \gg 1$

$$\Delta N_0 \approx \langle \hat{N}_0 \rangle$$

Fluctuations très importantes du nombre de particules condensées

Distribution des valeurs possibles du nombre de particules condensées T-63

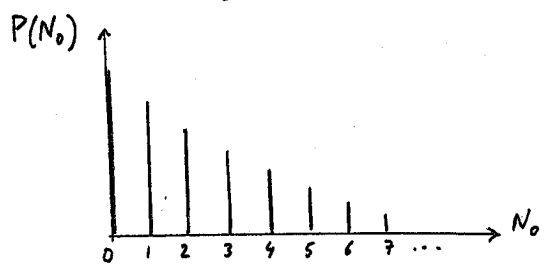
$$\hat{\rho} = \frac{1}{Z_G} \exp \{ -\beta (\hat{H} - \mu \hat{N}) \}$$

En l'absence d'interactions, l'opérateur densité grand canonique et la grande fonction de partition Z_G se factorisent

$$\hat{\rho} = \prod_{\text{états individuels } k} \frac{1}{Z_G^k} e^{-\beta \hat{N}_k (E_k - \mu)}$$

Etat fondamental E_0

$$P(N_0) = \frac{1}{Z_G^0} e^{-\beta N_0 (E_0 - \mu)}$$



Distribution exponentielle

C'est la valeur $N_0 = 0$ qui est la plus probable !

Prise en compte des interactions dans le condensat avec une théorie de champ moyen (Ref.1) T-64

Pour $T \ll T_c$, on peut décrire le condensat par un opérateur densité

$$\hat{\rho}_0 = \frac{1}{Z_G^0} \sum_{N_0} e^{-\beta [E(N_0) - \mu N_0]} |N_0\rangle \langle N_0|$$

où $E(N_0)$ n'est plus simplement égal à $E_0 N_0$, mais tient compte des interactions, ce qui fait apparaître dans $E(N_0)$ des termes quadratiques en N_0

Valeur la plus probable \bar{N}_0 de N_0

C'est la valeur qui minimise

$$E(N_0) - \mu N_0$$

$$\frac{\partial}{\partial N_0} [E(N_0) - \mu N_0]_{N_0 = \bar{N}_0} = 0$$

$$\hookrightarrow \mu = \left. \frac{d}{dN_0} E(N_0) \right|_{N_0 = \bar{N}_0}$$

Développement de $e^{-\beta L^3 \langle N_0 \rangle - \mu N_0}$ au voisinage de \bar{N}_0 T-65

$$-\beta [E(N_0) - \mu N_0] \approx -\beta [E(\bar{N}_0) - \mu \bar{N}_0]$$

+ Terme d'ordre 1 $-\frac{\beta}{2} (N_0 - \bar{N}_0)^2 \left[\frac{d^2}{dN_0^2} E(N_0) \right]_{N_0 = \bar{N}_0}$

= 0 par définition de \bar{N}_0

Pour un gaz de bosons dans une boîte L^3 (système homogène)

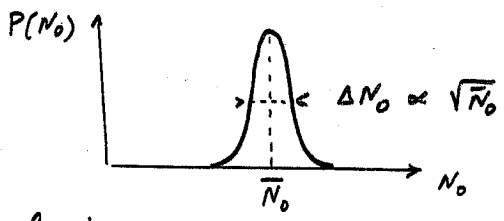
$$\mu(N_0) = g \rho = g \frac{N_0}{L^3}$$

$$\left[\frac{d^2}{dN_0^2} E(N_0) \right]_{N_0 = \bar{N}_0} = \left[\frac{d}{dN_0} \mu(N_0) \right]_{N_0 = \bar{N}_0} = \frac{g}{L^3}$$

On en déduit $P(N_0) \propto e^{-\frac{1}{2} \frac{\beta g}{L^3} (N_0 - \bar{N}_0)^2}$

Distribution Gaussienne (et non plus exponentielle) centrée autour d'une valeur moyenne non nulle \bar{N}_0 et de largeur

$$\Delta N_0 \approx \sqrt{\frac{L^3}{\beta g}} = \sqrt{\frac{L^3}{\bar{N}_0} \frac{\bar{N}_0}{\beta g}} = \sqrt{\bar{N}_0} \sqrt{\frac{k_B T}{\rho g}}$$



T-66

Conclusions

L'effet des interactions, pris en compte avec une simple théorie de champ moyen, réduit les fluctuations du nombre de particules condensées

- La valeur la plus probable \bar{N}_0 de N_0 n'est plus nulle
- La largeur ΔN_0 de la distribution n'est plus proportionnelle à $\langle N_0 \rangle$ mais à $\sqrt{\bar{N}_0}$

Un tel résultat justifie l'utilisation de l'ensemble grand canonique pour décrire les expériences actuelles de condensation de Bose-Einstein d'atomes ultrafroids

Quelques études expérimentales des fonctions de corrélation $G^{(1)}, G^{(2)}, G^{(3)}$ pour des condensats de Bose-Einstein

Fonction $G^{(1)}$ T-67

Contraste des franges d'interférence observées dans la zone de recouvrement de 2 condensats (ou de 2 faisceaux atomiques issus de 2 points différents d'un même condensat)

Etude abordée ultérieurement après la discussion de la phase relative de 2 condensats

Fonction $G^{(2)}$

Intervient dans l'énergie d'interaction mesurable sur l'énergie libérée après expansion balistique du condensat

Fonction $G^{(3)}$

Intervient dans l'expression du taux de collisions inélastiques à 3 corps

Mesure de $G^{(2)}$ T-68

Energie libérée après expansion balistique du condensat (voir T-13)

$$E_{libérée} = E_{inter}^{avant}$$

Expression de E_{inter}

$$E_{inter} = \frac{1}{2} \iint d^3r d^3r' \langle \hat{\psi}^\dagger(\vec{r}) \hat{\psi}^\dagger(\vec{r}') V(\vec{r}-\vec{r}') \hat{\psi}(\vec{r}') \hat{\psi}(\vec{r}) \rangle$$

$$= \frac{1}{2} \iint d^3r d^3r' V(\vec{r}-\vec{r}') G^{(2)}(\vec{r}, \vec{r}')$$

$$V(\vec{r}-\vec{r}') = \frac{4\pi \hbar^2}{m} \delta(\vec{r}-\vec{r}')$$

$$E_{inter} = \frac{2\pi \hbar^2}{m} a \int d^3r G^{(2)}(\vec{r}, \vec{r})$$

$$g^{(2)}(\vec{r}, \vec{r}) = \frac{G^{(2)}(\vec{r}, \vec{r})}{G^{(1)}(\vec{r}, \vec{r}) G^{(1)}(\vec{r}, \vec{r})} = \frac{G^{(2)}(\vec{r}, \vec{r})}{[\rho(\vec{r})]^2}$$

$$\hookrightarrow E_{inter} = \frac{2\pi \hbar^2}{m} a \int d^3r [\rho(\vec{r})]^2 g^{(2)}(\vec{r}, \vec{r})$$

- Pour un condensat $g^{(2)}(\vec{r}, \vec{r}) = 1$ (voir T-37)

- Pour un nuage thermique $g^{(2)}(\vec{r}, \vec{r}) = 2$ (voir T-57)

Principe de l'étude expérimentale

T-69

(voir Ref. 2)

- On mesure l'émission et $p(\vec{r})$
- On connaît par ailleurs a
- La comparaison du résultat mesuré pour l'émission et de l'expression théorique donnée en T- permet de déterminer si $g^{(2)}(\vec{r}, \vec{r})$ est égal à 1 ou 2

Résultats (voir Ref. 2)

- (Na) $a = (52 \pm 5)a_0 \rightarrow g^{(2)}(\vec{r}, \vec{r}) = 1.25 \pm 0.58$
- $a = (42 \pm 15)a_0 \rightarrow g^{(2)}(\vec{r}, \vec{r}) = 0.81 \pm 0.29$
- (Rb) $g^{(2)}(\vec{r}, \vec{r}) = 1.0 \pm 0.2$

Tous ces résultats obtenus avec des condensats sont compatibles avec $g^{(2)}(\vec{r}, \vec{r}) = 1$ et excluent la possibilité $g^{(2)}(\vec{r}, \vec{r}) = 2$

Expériences faites sur des jets atomiques thermiques (voir Ref. 3)

Corrélations temporelles (et non plus spatiales)
On trouve dans ce cas $g^{(2)}(t, t) = 2$

Expérience de coïncidences temporelles sur un jet d'atomes de Neon métastables

T-70

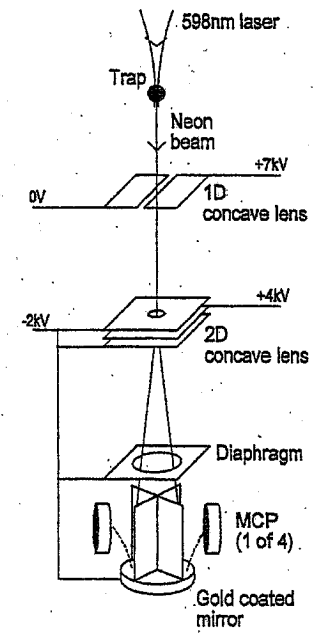
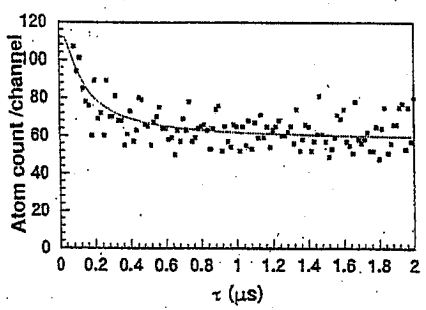


Figure extraite de la Ref. 3

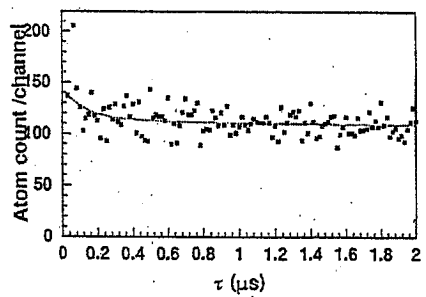
Résultats expérimentaux

T-71

- (a) Surface du détecteur < aire de cohérence
- (b) Surface du détecteur > aire de cohérence



(a)



(b)

Figure extraite de la Ref. 3

Mesure de $G^{(3)}$

T-72

Principe

- A densité suffisamment élevée, les pertes d'atomes dans un condensat sont dues essentiellement à des collisions inélastiques à 3 corps
- Pour qu'une collision à 3 corps se produise, 3 atomes doivent s'approcher suffisamment près l'un de l'autre. Le taux de collisions à 3 corps doit donc faire intervenir $G^{(3)}(\vec{r}, \vec{r}, \vec{r})$
- Or, la fonction de corrélation normalisée $g^{(3)}(\vec{r}, \vec{r}, \vec{r})$ n'a pas la même valeur pour un condensat et un nuage thermique
- Condensat $g^{(3)}(\vec{r}, \vec{r}, \vec{r}) = 1$ (Voir T-37)
- Nuage thermique $g^{(3)}(\vec{r}, \vec{r}, \vec{r}) = 3! = 6$ (Voir T-59)
- On peut donc utiliser $g^{(3)}$ comme indicateur de la condensation (Voir Ref. 4)
- Une mesure récente de $g^{(3)}$ a été réalisée sur des atomes ^{87}Rb (Voir Ref. 5)

Variations de $g^{(3)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3)$ avec $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$ pour un nuage thermique T-73

$x = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1| \quad y = |\vec{r}_3 - \vec{r}_1| \quad \lambda_d = \lambda_T$

Courbe b : Coupe le long du plan $x=y$

Courbe c : Coupe le long du plan $\frac{x}{\lambda_d} = 2$

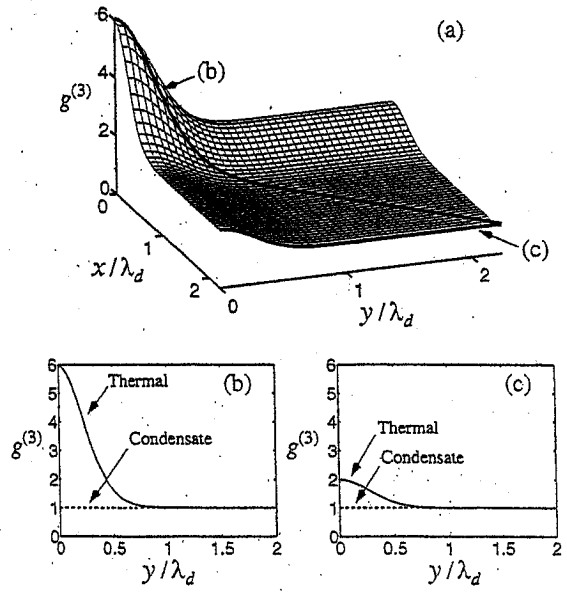


Figure extraite de la Ref. 5

Détermination du taux de collisions inélastiques T-74

- Aux temps longs (donc aux N faibles), $\ln N$ décroît linéairement avec t Pertes dues aux collisions avec le gaz résiduel
- Les déviations aux temps petits (donc aux N grands) sont dues aux collisions inélastiques entre atomes piégés

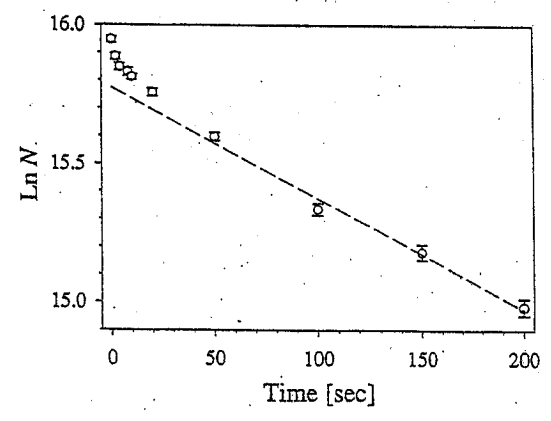


Figure extraite de la Ref. 5

Détermination expérimentale de $g^{(3)}$ T-75

$\left(\frac{dN}{dt}\right)_{\text{à 3 corps}}^{\text{incl}} = -K \int d^3r n^3(\vec{r}, t)$

K est proportionnel à $g^{(3)}(\vec{r}, \vec{r}, \vec{r})$

$\ln\left(\frac{N(t)}{N(0)}\right)_{\text{à 3 corps}}^{\text{incl}} = -K \int_0^t dt' \int_V d^3r \frac{n^3(\vec{r}, t')}{N(t')} <n^2(\vec{r}, t')>$

La pente de la courbe donnant $\ln\left(\frac{N(t)}{N(0)}\right) + \frac{t}{\tau}$ en fonction de $\int_0^t dt' <n^2(\vec{r}, t')>$ est proportionnelle à K donc à $g^{(3)}(\vec{r}, \vec{r}, \vec{r})$

Rapport mesuré des 2 pentes : 7.4 ± 2.6

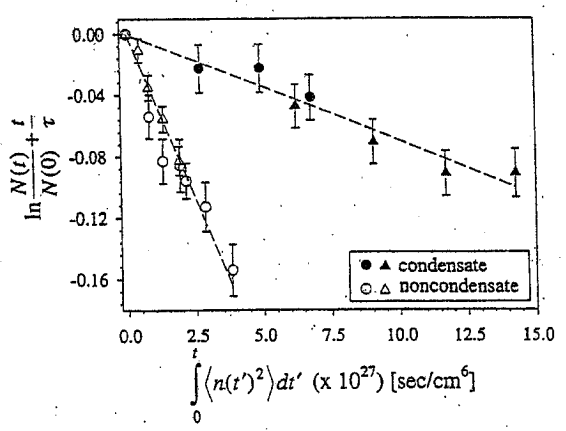


Figure extraite de la Ref. 5

Corrections sur $g^{(2)}$ et $g^{(3)}$ liés aux interactions T-76

- Les valeurs $g^{(2)}(\vec{r}, \vec{r}) = 1$ pour un condensat et $g^{(2)}(\vec{r}, \vec{r}) = 2$ pour un nuage thermique ont été établies en négligeant les interactions. Idem pour $g^{(3)}$
- En présence d'interactions, $G^{(2)}(\vec{r}, \vec{r}')$ tend vers 0 quand $|\vec{r} - \vec{r}'| \rightarrow 0$ à cause du coeur dur répulsif de $V(\vec{r} - \vec{r}')$ qui empêche les 2 atomes d'être au même point (voir T.17) De même, $G^{(3)}(\vec{r}, \vec{r}', \vec{r}'')$ doit s'annuler quand \vec{r}' et \vec{r}'' tendent vers r
- Si le gaz est suffisamment dilué, le "trou" de $G^{(2)}$ et $G^{(3)}$ au voisinage de l'origine introduit des corrections faibles qui peuvent être négligées.
- Le comportement de $G^{(2)}$ et $G^{(3)}$ en dehors de ce trou, mais suffisamment près de lui, décrit les corrélations spatiales entre atomes qui sont sur le point d'entrer en collision

Phase relative de 2 condensats

T-77

Problèmes abordés dans ce cours

- La phase absolue d'un condensat n'a pas de sens physique
- De même qu'on peut donner un sens physique à la différence de phase entre 2 points d'un même condensat, on peut donner un sens à la différence de phase entre 2 condensats différents
- Peut-on introduire des états décrivant 2 condensats ayant une phase relative φ bien définie? Quels sont les plus commodes à utiliser?
- Quelle est la variable conjuguée de φ ?

Autre problème abordé ultérieurement

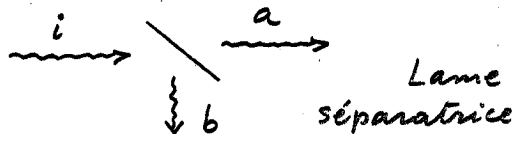
Comment une phase relative peut-elle apparaître entre 2 condensats indépendants?

Phase relative de 2 faisceaux lumineux

T-78

1^{er} type de situation

2 faisceaux différents préparés à partir du même faisceau



Même si la phase absolue n'est pas définie, la phase relative de a et b est bien définie

2^{ème} type de situation

Utilisation de 2 faisceaux indépendants



Peut-on observer des franges d'interférence dans la zone d'intersection? Sous quelles conditions?

Situations analogues pour des atomes

T-79

1^{er} type de situation

Couplage radiofréquence ou optique (Raman, Bragg) entre un condensat piégé dans un puits et un état non piégé.

Obtention d'un faisceau d'atomes avec une phase relative bien définie par rapport au condensat

"Output coupler" pour un laser à atomes

2^{ème} type de situation

2 condensats indépendants

On coupe brusquement les potentiels de piégeage et on laisse les condensats se recouvrir après une période d'expansion balistique

Peut-on observer des franges? Dans quelles conditions?

Etats de phase relative φ

T-80

Définition

- Etats faisant intervenir 2 "modes" (du champ ou d'un système atomique)
- Obtenus à partir d'un état de Fock $|N\rangle$ du mode en faisant subir à chaque boson l'effet d'une lame séparatrice ou celui d'une impulsion RF ou optique qui prépare chaque boson dans une superposition linéaire bien définie de $|a\rangle$ et $|b\rangle$

Etat avec un nombre total de bosons bien défini et avec une phase relative bien définie entre les 2 modes

Problèmes abordés

- Expression mathématique d'un tel état
- Quelle est la variable conjuguée de φ ?

Notation T.81

$|N, \varphi\rangle$ N : Nombre total de bosons
 φ : Phase relative

Etat à 1 particule

Il est commode d'utiliser l'écriture en seconde quantification pour assurer automatiquement la symétrisation

$|1, \varphi\rangle = \hat{c}^+ |0\rangle$ $|0\rangle$: Vide

$\hat{c}^+ = \alpha \hat{a}^+ + \beta e^{-i\varphi} \hat{b}^+$

$\hat{a}^+ (\hat{b}^+)$: Opérateurs création d'un boson dans l'état $|a\rangle$ ($|b\rangle$)

\hat{c}^+ : Opérateur création d'un boson dans l'état $\alpha |a\rangle + \beta e^{-i\varphi} |b\rangle$

(On suppose α et β réels et $\alpha^2 + \beta^2 = 1$)

Etat à N particules

$|N, \varphi\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!}} (\hat{c}^+)^N |0\rangle =$

$\frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_{n=0}^N \frac{N!}{n!(N-n)!} \alpha^{N-n} \beta^n e^{-in\varphi} (\hat{a}^+)^{N-n} (\hat{b}^+)^n |0\rangle$
 $\frac{1}{\sqrt{(N-n)!} \sqrt{n!}} |n_a = N-n, n_b = n\rangle$

Calcul de $\langle \hat{N}_a \rangle$ et ΔN_a T.83

$P(n_a) = |\langle n_a = n_a, n_b = N-n_a | N, \varphi \rangle|^2$
 $= \frac{N!}{n_a! (N-n_a)!} (\alpha^2)^{n_a} (\beta^2)^{N-n_a}$

Comme $\beta^2 = 1 - \alpha^2$, on trouve une distribution binomiale

$p = \alpha^2$: Probabilité de "tirer" a
 $1-p = \beta^2$: Probabilité de "tirer" b

On en déduit

$\langle \hat{N}_a \rangle = N p = N \alpha^2$

$\Delta N_a^2 = N p (1-p) = N \alpha^2 \beta^2$

$\hookrightarrow \Delta N_a = \alpha \beta \sqrt{N}$

Dispersion autour de la valeur moyenne $N \alpha^2$

- grande en valeur absolue $\Delta N_a \propto \sqrt{N}$
- faible en valeur relative $\frac{\Delta N_a}{\langle N_a \rangle} \propto \frac{1}{\sqrt{N}}$

Dispersion sur $\hat{N}_a - \hat{N}_b$

$\Delta(N_a - N_b) = \Delta N_a + \Delta N_b = 2 \Delta N_a = 2 \alpha \beta \sqrt{N}$

Propriété des états $|N, \varphi\rangle$ T.82

$|N, \varphi\rangle = \sum_{n=0}^N \frac{N!}{(N-n)! n!} \alpha^{N-n} \beta^n e^{-in\varphi} |n_a = N-n, n_b = n\rangle$

- L'état $|N, \varphi\rangle$ ne se factorise pas en un produit d'un état du mode a par un état du mode b ("entangled state")
- Le nombre total de particules $N = n_a + n_b$ est bien défini, mais le nombre n_a de particules dans le mode a, et n_b dans le mode b ne sont pas bien définis

Caractérisation de la distribution des valeurs possibles de n_a et n_b

$\hat{N}_a = \hat{a}^+ \hat{a}$ $\hat{N}_b = \hat{b}^+ \hat{b}$

Opérateurs nombres de particules dans les états $|a\rangle$ et b

- Valeurs moyennes
 $\langle \hat{N}_a \rangle$ $\langle \hat{N}_b \rangle = N - \langle \hat{N}_a \rangle$
- Variances
 $\Delta N_a^2 = \langle \hat{N}_a^2 \rangle - \langle N_a \rangle^2 = \Delta N_b^2$

Matrices densités réduites des modes

a et b dans l'état de phase $|N, \varphi\rangle$ T.84

$\rho^{(a)} = \text{Tr}_b |N, \varphi\rangle \langle N, \varphi|$
 $= \sum_{n_b} \langle n_b | N, \varphi \rangle \langle N, \varphi | n_b \rangle$
 $= \sum_{n_a} \frac{N!}{n_a! (N-n_a)! n_a!} (\alpha^2)^{n_a} (\beta^2)^{N-n_a} |n_a\rangle \langle n_a|$
 $= \sum_{n_a} P(n_a) |n_a\rangle \langle n_a|$

$P(n_a) = \frac{N!}{(N-n_a)! n_a!} (\alpha^2)^{n_a} (1-\alpha^2)^{N-n_a}$

Mélange statistique d'états où n_a a une valeur bien définie avec des poids $P(n_a)$

Pas de cohérences entre n_a et $n'_a \neq n_a$

On a de même

$\rho^{(b)} = \text{Tr}_a |N, \varphi\rangle \langle N, \varphi|$
 $= \sum_{n_b} \varphi(n_b) |n_b\rangle \langle n_b|$

$\varphi(n_b) = \frac{N!}{n_b! (N-n_b)!} (\beta^2)^{n_b} (\alpha^2)^{N-n_b}$

Mélanges statistiques d'états $|N, \varphi\rangle$

correspondant à des phases φ différentes

$\hat{\rho} = \int d\varphi W(\varphi) |N, \varphi\rangle \langle N, \varphi|$ T-85

$W(\varphi)$: Distribution de probabilité de φ

$\hat{\rho} = \sum_{n=0}^N \sum_{n'=0}^N \sqrt{\frac{N!}{(N-n)!n!}} \sqrt{\frac{N!}{(N-n')!n'!}} \alpha^{N-n} \alpha^{N-n'} \beta^n \beta^{n'}$

$\left[\int_0^{2\pi} d\varphi W(\varphi) e^{i(n'-n)\varphi} \right] |n_a=N-n, n_b=n\rangle \langle n_a=N-n', n_b=n'|$

Cas d'une phase équipartie entre 0 et 2π

$W(\varphi) = \frac{1}{2\pi}$ $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi e^{i(n'-n)\varphi} = \delta_{nn'}$

$\hat{\rho} = \sum_{n=0}^N \frac{N!}{(N-n)!n!} (\alpha^2)^{N-n} (\beta^2)^n |N-n, n\rangle \langle N-n, n|$

Mélange statistique de produits d'états de Fock $|n_a\rangle |n_b\rangle$, où n_a et n_b ont des valeurs bien définies (avec $n_a + n_b = N$)

Pas de cohérences entre états $|n_a\rangle |n_b\rangle$ et $|n'_a\rangle |n'_b\rangle$ avec $n'_a \neq n_a$, alors que de telles cohérences existent dans l'état $|N, \varphi\rangle$

Cas général

$K(n'-n) = \int_0^{2\pi} d\varphi W(\varphi) e^{i(n'-n)\varphi}$ T-86

$K(n'-n)$ est une fonction de $n'-n$ d'autant plus étroite que $W(\varphi)$ est large.

Conclusion

φ bien définie $\rightarrow \Delta(\hat{N}_a - \hat{N}_b) \propto \sqrt{N}$

φ équipartie entre 0 et $2\pi \rightarrow \Delta(\hat{N}_a - \hat{N}_b) = 0$

Cas général $\rightarrow \Delta(\hat{N}_a - \hat{N}_b)$ d'autant plus grand que $\Delta\varphi$ est plus petit

C'est $\hat{N}_a - \hat{N}_b$ qui apparaît en quelque sorte comme la variable conjuguée de la phase relative φ

Etats cohérents relatifs

T-87

Description de 2 condensats par 2 états cohérents

$|A e^{i\varphi_a}\rangle = e^{-A^2/2} \sum_{N=0}^{\infty} \frac{A^N}{\sqrt{N!}} e^{iN\varphi_a} |N\rangle$

$|B e^{i\varphi_b}\rangle = e^{-B^2/2} \sum_{N=0}^{\infty} \frac{B^N}{\sqrt{N!}} e^{iN\varphi_b} |N\rangle$

A et B : Amplitudes réelles

φ_a et φ_b : Phases absolues de chaque condensat

$\varphi = \varphi_a - \varphi_b$: Phase relative

φ_a et φ_b n'ont pas séparément de sens physique

Définition d'un état cohérent relatif

Mélange statistique de produits d'états cohérents

$|A e^{i\varphi_a}\rangle \otimes |B e^{i(\varphi_a - \varphi)}\rangle$

où la phase relative φ est fixée et où la phase absolue φ_a est équipartie entre 0 et 2π

Expression de l'état cohérent relatif

noté $\hat{P}_{AB}(\varphi)$ T-88

$\hat{P}_{AB}(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi_a \times |A e^{i\varphi_a}\rangle \langle A e^{i\varphi_a}| \otimes |B e^{i(\varphi_a - \varphi)}\rangle \langle B e^{i(\varphi_a - \varphi)}|$

Éléments de matrice de $\hat{P}_{AB}(\varphi)$ dans la base $\{|n_a, n_b\rangle\}$

$\langle n_a, n_b | \hat{P}_{AB}(\varphi) | n'_a, n'_b \rangle = e^{-(A^2+B^2)} \frac{A^{(n_a+n_b)}}{\sqrt{n_a!} \sqrt{n'_a!}} \frac{B^{(n_b+n'_b)}}{\sqrt{n_b!} \sqrt{n'_b!}} e^{i(n'_b - n_b)\varphi} \times$

$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi_a e^{i[n_a+n_b - n'_a - n'_b]\varphi}$

$\delta(n_a + n_b - n'_a - n'_b)$

$\hat{P}_{AB}(\varphi)$ n'a d'éléments de matrice non nuls qu'entre états ayant le même nombre total de particules

$n_a + n_b = n'_a + n'_b = N$

$\hat{P}_{AB}(\varphi)$ est un mélange statistique d'états à nombre total de particules fixé

Autre écriture possible de $\hat{\rho}_{AB}(\varphi)$ T-89

$$\hat{\rho}_{AB}(\varphi) = \sum_N \hat{P}_N \hat{\rho}_{AB}(\varphi) \hat{P}_N$$

\hat{P}_N : Projecteur sur le sous-espace d'états $n_a + n_b = N$

L'expression précédente des éléments de matrice de $\hat{\rho}_{AB}(\varphi)$ [voir T.] permet d'écrire

$$\hat{P}_N \hat{\rho}_{AB}(\varphi) \hat{P}_N = |\chi_N\rangle \langle \chi_N|$$

$$|\chi_N\rangle = e^{-(A^2+B^2)/2} \sum_{n_a+n_b=N} \frac{A^{n_a} B^{n_b}}{\sqrt{n_a!} \sqrt{n_b!}} e^{-in_b\varphi} |n_a, n_b\rangle$$

$$= e^{-(A^2+B^2)/2} \sum_{n=0}^N \frac{A^{(N-n)} B^n}{\sqrt{(N-n)!} \sqrt{n!}} e^{-in\varphi} |N-n, n\rangle$$

Posons $\alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}$ $\beta = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$

$$|\chi_N\rangle = e^{-(A^2+B^2)/2} \frac{(A^2+B^2)^{N/2}}{\sqrt{N!}} \times$$

$$\times \sum_{n=0}^N \sqrt{\frac{N!}{(N-n)! n!}} \alpha^{N-n} \beta^n e^{-in\varphi} |N-n, n\rangle$$

$$= |N, \varphi\rangle \quad (\text{voir T.})$$

On voit apparaître l'état de phase relative $|N, \varphi\rangle$ correspondant à α et β

Lien entre états cohérents relatifs et états de phase relative T-90

$$\hat{\rho}_{AB}(\varphi) = \sum_N e^{-(A^2+B^2)} \frac{(A^2+B^2)^N}{N!} |N, \varphi\rangle \langle N, \varphi|$$

$\hat{\rho}_{AB}(\varphi)$ apparaît donc également comme un mélange statistique d'états de phase relative $|N, \varphi\rangle$ (correspondant à $\alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}$ et $\beta = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$) avec une répartition des valeurs possibles de N donnée par une loi de Poisson

Les états cohérents relatifs sont plus commodes à utiliser que les états de phase relative

- L'action des opérateurs \hat{a} et \hat{b} sur les états cohérents est très simple
- L'évolution d'un état cohérent sous l'effet d'un processus dissipatif peut être très simple

Mélange statistique d'états cohérents relatifs T-91

Si la phase relative φ n'est pas bien définie, mais distribuée suivant une loi $W(\varphi)$, on peut décrire le système par

$$\hat{\rho}_{AB} = \int_0^{2\pi} d\varphi W(\varphi) \hat{\rho}_{AB}(\varphi) = \sum_N e^{-(A^2+B^2)} \frac{(A^2+B^2)^N}{N!} \int_0^{2\pi} d\varphi W(\varphi) |N, \varphi\rangle \langle N, \varphi|$$

et utiliser les résultats obtenus plus haut pour $\int_0^{2\pi} d\varphi W(\varphi) |N, \varphi\rangle \langle N, \varphi|$ (voir T.)

En particulier, si la phase φ est équipartie entre 0 et 2π , $\hat{\rho}_{AB}$ est un mélange statistique d'états $|n_a, n_b\rangle$ où n_a et n_b ont des valeurs bien définies

Plus de cohérences entre $|n_a, n_b\rangle$ et $|n'_a, n'_b\rangle$ avec $n'_a \neq n_a, n'_b \neq n_b$

Quelques références T-92

- (1) - Y. Castin - Notes de cours au DEA de Physique Quantique
- (2) - W. Ketterle, H.J. Miesner Phys. Rev. A 56, 3291 (1997)
- (3) - M. Yasuda, F. Shimizu Phys. Rev. Lett. 77, 3090 (1996)
- (4) - Y. Kagan, B. Svistunov, G. Shlyapnikov, JETP Lett. 42, 209 (1985)
- (5) - E. Burt, R. Ghrist, C. Myatt, M. Holland, E. Cornell, C. Wieman Phys. Rev. Lett. 79, 337 (1997)

Interférences entre 2 condensats

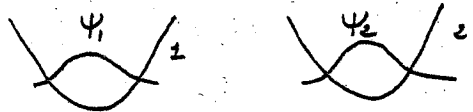
- ① Introduction T-93
 - ② Notations - Hypothèses T.94 - T.98
 - Etat initial
 - Evolution temporelle
 - Opérateurs champs
 - ③ Calcul du signal de détection T.99 - T.100
 - ④ Etude des franges d'interférence T.101 - T.108
 - Propagation d'un paquet d'ondes gaussien
 - Calcul de la longueur d'onde locale
 - Calcul de l'interfrange
 - Structure spatiale de la figure d'interférence
 - ⑤ L'expérience de M.I.T. T.109 - T.114
 - Réalisation des 2 condensats
 - Principe de l'expérience
 - Résultats
 - ⑥ Analyse plus quantitative T.115 - T.120
 - Résultats théoriques
 - Comparaison théorie - expérience
 - ⑦ Conclusions T.121 - T.123
- Références T.124

Interférences entre 2 condensats

Principe de l'expérience

T.93

- 2 condensats différents



Bosons piégés dans 2 puits 1 et 2 et condensés dans 2 états ψ_1 et ψ_2

- On coupe les pièges

Les 2 condensats subissent une expansion balistique et se recouvrent

On place un détecteur d'atomes dans la zone de recouvrement

Problèmes abordés

- Observe-t-on des franges d'interférence c.-à-d des oscillations spatiales dans la probabilité de détection ?
- Quelles sont les caractéristiques de ces franges ?
- Description d'une expérience récente faite à MIT (Refs. 1, 2)

Notations - Hypothèses

T.94

$\psi_1(0)$: Etat individuel normé dans lequel sont condensés les bosons du piège 1 à l'instant initial $t=0$

$|N\rangle_{\psi_1(0)}$: Etat de Fock à N bosons dans l'état $\psi_1(0)$

$$|N\rangle_{\psi_1(0)} = \frac{1}{\sqrt{N!}} [\hat{a}_{\psi_1(0)}^+]^N |0\rangle$$

$\hat{a}_{\psi_1(0)}^+$: Opérateur de création d'un boson dans l'état $\psi_1(0)$

$|\alpha_1\rangle_{\psi_1(0)}$: Etat cohérent α_1 du "mode" $\psi_1(0)$

$$|\alpha_1\rangle_{\psi_1(0)} = e^{-|\alpha_1|^2/2} \sum_{N=0}^{\infty} \frac{\alpha_1^N}{\sqrt{N!}} |N\rangle_{\psi_1(0)}$$

$$\alpha_1 = |\alpha_1| e^{i\varphi_1} = \sqrt{\bar{N}_1} e^{i\varphi_1}$$

\bar{N}_1 : Nombre moyen de bosons dans le mode 1

Notations analogues pour le condensat 2 avec l'indice 1 remplacé par 2

Etat initial des 2 condensats

T.95

- On suppose que l'état initial des 2 condensats est un état cohérent relatif de phase relative φ [Voir T.87]

- C'est donc un mélange statistique de produits de 2 états cohérents

$$|\alpha_1\rangle_{\psi_1(0)} \otimes |\alpha_2\rangle_{\psi_2(0)}$$

$$\alpha_1 = |\alpha_1| e^{i\varphi_1} \quad \alpha_2 = |\alpha_2| e^{i\varphi_2}$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \varphi = \text{Phase relative}$$

où $|\alpha_1|, |\alpha_2|, \varphi$ sont fixés et

où φ_1 est équipartie entre 0 et 2π

- Les calculs seront faits pour un état produit $||\alpha_1| e^{i\varphi_1}\rangle_{\psi_1(0)} \otimes ||\alpha_2| e^{i(\varphi_1 - \varphi)}\rangle_{\psi_2(0)}$ puis les probabilités obtenues seront moyennées sur φ ,

- Pour simplifier, on suppose $\psi_1(0)$ et $\psi_2(0)$ orthogonaux

$$\int d^3r \psi_1^*(\vec{r}, 0) \psi_2(\vec{r}, 0) = 0$$

Evolution temporelle après coupure du piège

T.96

- Pour simplifier, on néglige dans une première étape les interactions entre atomes, aussi bien dans l'état initial que dans la phase d'expansion

- $\psi_1(0)$ et $\psi_2(0)$ sont les états fondamentaux des hamiltoniens des pièges 1 et 2

- Soit $\psi_i(t)$ la solution de l'équation de Schrödinger à 1 particule avec $\psi_i(0)$ pour état initial

- L'état de Fock $|N\rangle_{\psi_1(0)}$ se transforme au bout d'un temps t en l'état $|N\rangle_{\psi_1(t)}$ où N bosons sont condensés dans l'état $\psi_1(t)$

$$|N\rangle_{\psi_1(t)} = \frac{1}{\sqrt{N!}} [\hat{a}_{\psi_1(t)}^+]^N |0\rangle$$

$\hat{a}_{\psi_1(t)}^+$: Opérateur de création d'un boson dans l'état $\psi_1(t)$

- L'état cohérent $|\alpha_1\rangle_{\psi_1(0)}$, superposition linéaire d'états $|N\rangle_{\psi_1(0)}$ [voir T.94], T.97 devient à l'instant t

$$|\alpha_1\rangle_{\psi_1(t)} = e^{-|\alpha_1|^2/2} \sum_{N=0}^{\infty} \frac{\alpha_1^N}{\sqrt{N!}} |N\rangle_{\psi_1(t)}$$

$$= e^{-|\alpha_1|^2/2} \sum_{N=0}^{\infty} \frac{\alpha_1^N}{N!} [\hat{a}_{\psi_1(t)}^+]^N |0\rangle$$

Etat cohérent de même α_1 que $|\alpha_1\rangle_{\psi_1(0)}$ mais relatif au mode $\psi_1(t)$ au lieu de $\psi_1(0)$

- Résultats analogues pour $|\alpha_2\rangle_{\psi_2(t)}$

$$|\alpha_2\rangle_{\psi_2(t)} = e^{-|\alpha_2|^2/2} \sum_{N=0}^{\infty} \frac{\alpha_2^N}{\sqrt{N!}} |N\rangle_{\psi_2(t)}$$

$$= e^{-|\alpha_2|^2/2} \sum_{N=0}^{\infty} \frac{\alpha_2^N}{N!} [\hat{a}_{\psi_2(t)}^+]^N |0\rangle$$

- L'évolution unitaire entre 0 et t conserve l'orthogonalité de ψ_1 et ψ_2

$$\int d^3r \psi_1^*(\vec{r}, t) \psi_2(\vec{r}, t) = 0$$

Opérateurs champs $\hat{\Psi}(\vec{r}, t)$ et $\hat{\Psi}^+(\vec{r}, t)$ T.98

$$\hat{\Psi}(\vec{r}, t) = \hat{a}_{\psi_1(t)} \psi_1(\vec{r}, t) + \hat{a}_{\psi_2(t)} \psi_2(\vec{r}, t)$$

$$+ \sum_{i \neq 1, 2} \hat{a}_{\psi_i(t)} \psi_i(\vec{r}, t)$$

Les $\psi_i(\vec{r}, t)$ avec $i \neq 1, 2$ sont supposés former avec $\psi_1(\vec{r}, t)$ et $\psi_2(\vec{r}, t)$ une base orthonormée d'états à 1 particule

Si on se limite à des états où seuls les modes $\psi_1(t)$ et $\psi_2(t)$ sont peuplés et si on s'intéresse à des produits d'opérateurs $\hat{\Psi}$ et $\hat{\Psi}^+$ rangés dans l'ordre normal, on peut ignorer les termes $i \neq 1, 2$ qui ont une contribution nulle et écrire

$$\hat{\Psi}(\vec{r}, t) = \hat{a}_{\psi_1(t)} \psi_1(\vec{r}, t) + \hat{a}_{\psi_2(t)} \psi_2(\vec{r}, t)$$

$$\hat{\Psi}^+(\vec{r}, t) = \hat{a}_{\psi_1(t)}^+ \psi_1^*(\vec{r}, t) + \hat{a}_{\psi_2(t)}^+ \psi_2^*(\vec{r}, t)$$

Expression du signal de détection

Probabilité $P(\vec{r}, t)$ de détecter un T.95 boson au point \vec{r} à l'instant t

$$P(\vec{r}, t) = \text{Tr}[\hat{\rho} \hat{\Psi}^+(\vec{r}, t) \hat{\Psi}(\vec{r}, t)]$$

Contribution de l'état $|\alpha_1\rangle_{\psi_1(t)} \otimes |\alpha_2\rangle_{\psi_2(t)}$ T.95 du mélange statistique $\hat{\rho}$

$$\langle \alpha_1 | \otimes \langle \alpha_2 | \hat{\Psi}^+(\vec{r}, t) \hat{\Psi}(\vec{r}, t) | \alpha_1 \rangle_{\psi_1(t)} \otimes | \alpha_2 \rangle_{\psi_2(t)} =$$

$$= \sum_{i, j \neq 1, 2} \psi_i^*(\vec{r}, t) \psi_j(\vec{r}, t) \times$$

$$\langle \alpha_1 | \otimes \langle \alpha_2 | \hat{a}_{\psi_1(t)}^+ \hat{a}_{\psi_j(t)} | \alpha_1 \rangle_{\psi_1(t)} \otimes | \alpha_2 \rangle_{\psi_2(t)}$$

Comme $|\alpha_1\rangle_{\psi_1(t)}$ et $|\alpha_2\rangle_{\psi_2(t)}$ sont états propres de $\hat{a}_{\psi_1(t)}$ et $\hat{a}_{\psi_2(t)}$ de valeurs propres α_1 et α_2 , on en déduit que la contribution de $|\alpha_1\rangle_{\psi_1(t)} \otimes |\alpha_2\rangle_{\psi_2(t)}$ à $P(\vec{r}, t)$ vaut

$$\sum_{i, j \neq 1, 2} \alpha_i^* \alpha_j \psi_i^*(\vec{r}, t) \psi_j(\vec{r}, t)$$

$$= |\alpha_1 \psi_1(\vec{r}, t) + \alpha_2 \psi_2(\vec{r}, t)|^2$$

$$= |\sqrt{N_1} e^{i\varphi_1} \psi_1(\vec{r}, t) + \sqrt{N_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} \psi_2(\vec{r}, t)|^2$$

Calcul de $P(\vec{r}, t)$ pour le mélange statistique T.100

Le facteur de phase $e^{i\varphi_1}$ apparaît comme un facteur de phase global dans l'amplitude associée à $|\alpha_1\rangle_{\psi_1(t)} \otimes |\alpha_2\rangle_{\psi_2(t)}$ et disparaît dans la probabilité

- La moyenne sur φ équipartie entre 0 et 2π ne change donc rien et l'expression finale de $P(\vec{r}, t)$ s'écrit

$$P(\vec{r}, t) = |\sqrt{N_1} \psi_1(\vec{r}, t) + \sqrt{N_2} e^{-i\varphi} \psi_2(\vec{r}, t)|^2$$

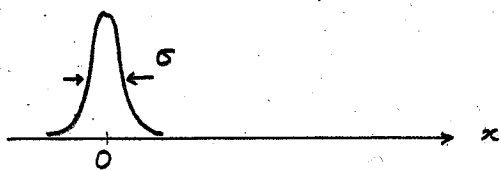
Interférences entre 2 fonctions d'onde macroscopiques $\sqrt{N_1} \psi_1(\vec{r}, t)$ et $\sqrt{N_2} \psi_2(\vec{r}, t)$ déphasées l'une par rapport à l'autre de φ

- Pour interpréter le signal expérimental, il faut donc résoudre l'équation de Schrödinger ordinaire à 1 particule et calculer $\psi_1(\vec{r}, t)$ et $\psi_2(\vec{r}, t)$ à partir de $\psi_1(\vec{r}, 0)$ et $\psi_2(\vec{r}, 0)$

Etude des franges d'interférence

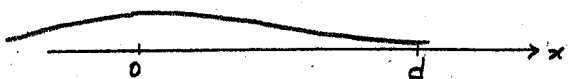
Propagation d'un paquet d'ondes

T-101



- A $t=0$, paquet d'ondes de largeur σ , centré en $x=0$, de vitesse moyenne nulle

- Au cours de l'évolution libre ultérieure, ce paquet d'ondes s'étale. Pour t suffisamment grand, il atteint un point situé à une distance $d \gg \sigma$



Peut-on définir une longueur d'onde de de Broglie locale au voisinage de $x=d$?

Paquet d'ondes Gaussien

T-102

- Etat initial à $t=0$

$$\Psi(x,0) = \left(\frac{2}{\pi\sigma^2}\right)^{1/4} e^{-x^2/\sigma^2}$$

Fonction d'onde réelle

- A l'instant t , ce paquet d'ondes est devenu (voir Ref. 3), à un facteur de phase global près, indépendant de x

$$\Psi(x,t) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/4} \frac{\exp\left\{-\frac{x^2}{\sigma^2 + \frac{4\hbar^2 t^2}{m^2 \sigma^2}}\right\}}{\left(\sigma^2 + \frac{4\hbar^2 t^2}{m^2 \sigma^2}\right)^{1/4}} \times \exp\left\{i \frac{2\hbar t/m}{\sigma^2 + \frac{4\hbar^2 t^2}{m^2}} x^2\right\}$$

1^{ère} ligne : Enveloppe réelle décrivant l'étalement du paquet d'ondes

2^{ème} ligne : Fonction oscillante de x permettant de définir une longueur d'onde locale

- On supposera t assez grand pour que le paquet d'ondes atteigne $x=d \gg \sigma$

$$\frac{2\hbar t}{m\sigma} \gg \sigma \rightarrow \sigma^2 + \frac{4\hbar^2 t^2}{m^2 \sigma^2} \approx \frac{4\hbar^2 t^2}{m^2 \sigma^2}$$

Calcul de la longueur d'onde locale

Terme oscillant de $\Psi(x,t)$

T-103

$$\exp\left\{i \frac{2\hbar t/m}{\sigma^2 + \frac{4\hbar^2 t^2}{m^2}} x^2\right\} \approx \exp\left\{\frac{im}{2\hbar t} x^2\right\}$$

Fonction oscillante de x , oscillant de plus en plus rapidement avec x quand x croît



Vecteur d'onde local au voisinage de $x=d$

Posons $x = d + \xi$ $|\xi| \ll d$

$$\exp\left\{\frac{im}{2\hbar t} x\right\} = \exp\left\{\frac{im}{2\hbar t} (d + \xi)^2\right\}$$

$$\approx \exp\left\{\frac{im}{2\hbar t} d^2\right\} \exp\left(\frac{im}{\hbar t} \xi\right)$$

↳ Vecteur d'onde local $k = \frac{md}{\hbar t}$

Longueur d'onde locale

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{h}{md/t}$$

Interprétation physique

T-104

Une particule classique, partant de $x=0$ à $t=0$, doit avoir une vitesse $v = d/t$ pour arriver en $x=d$ à l'instant

La longueur d'onde locale au voisinage de $x=d$ est la longueur d'onde de de Broglie associée à cette vitesse $\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{h}{md/t}$

Origine physique

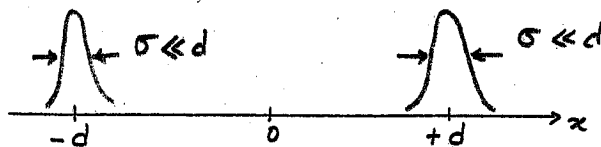
La relation de dispersion des ondes de de Broglie

$$\omega = \frac{\hbar k^2}{2m}$$

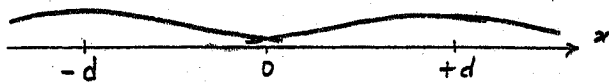
n'est pas linéaire. La vitesse de phase $\frac{\hbar k}{2m}$ croît avec k

Calcul de l'interfrange T.105

- A $t=0$, 2 paquets d'ondes réels, centrés en $-d$ et $+d$. Phase relative φ



- Pour t suffisamment grand, ces 2 paquets d'ondes se recouvrent au voisinage de $x=0$



- Fonction d'onde au voisinage de $x=0$
 $e^{ikx} + e^{-i\varphi} e^{-ikx} \propto \cos(kx + \frac{\varphi}{2})$
 $k = md/\hbar t$

- Intensité $\propto \cos^2(kx + \frac{\varphi}{2}) = \frac{1}{2} [1 + \cos(2kx + \varphi)]$
 Interfrange = $\frac{2\pi}{2k} = \frac{\pi \hbar t}{md}$

② La fonction d'onde dépendant de y (et z) est la même pour les 2 condensats puisque les fonctions d'onde initiales e^{-y^2/σ^2} (et e^{-z^2/σ^2}) sont les mêmes pour les 2 condensats de même que \hat{h}_y (et \hat{h}_z) T.107

③ Par contre, les fonctions d'onde dépendant de x ne sont pas les mêmes puisqu'elles partent de $e^{-(x-d)^2/\sigma^2}$ et $e^{-(x+d)^2/\sigma^2}$

↳ L'état d'interférence ne dépend donc que de x et est le même quels que soient y et z pour un x donné

↳ Dans un plan passant par Ox , les franges d'interférence sont donc des droites perpendiculaires à Ox

Structure spatiale de la figure d'interférences T.106

Hypothèses

- Les 2 condensats ont leurs centres sur l'axe Ox en $x = \pm d$
- Ils sont décrits par des Gaussiennes $\exp\{-\frac{1}{2\sigma^2} [(x \pm d)^2 + y^2 + z^2]\} = e^{-(x \pm d)^2/\sigma^2} e^{-y^2/\sigma^2} e^{-z^2/\sigma^2}$
- L'expansion balistique est décrite par un Hamiltonien qui se sépare en 3 termes

Factorisation en un produit de 3 fonctions de x, y, z

$$H = \underbrace{\frac{\hat{p}_x^2}{2m}}_{\hat{h}_x} + \underbrace{\frac{\hat{p}_y^2}{2m}}_{\hat{h}_y} + \underbrace{\frac{\hat{p}_z^2}{2m} - mg\hat{z}}_{\hat{h}_z}$$

Conclusions

① La fonction d'onde de chaque condensat reste toujours factorisée à l'instant t en 3 fonctions de x, y, z

Différences avec la figure d'interférence donnée par 2 sources monochromatiques T.108

- 2 sources situées en $x = \pm d$ sur l'axe Ox et émettant de manière continue des ondes de de Broglie de vecteur d'onde k_0 fixe
- La propagation fait apparaître (en l'absence d'interactions) des ondes sphériques $e^{ik_0 r}/r$ centrées sur les 2 sources

Non factorisables en un produit de 3 fonctions de x, y, z

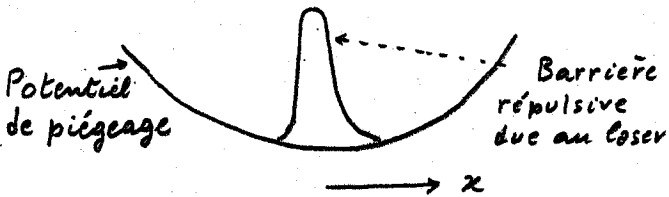
↳ Dans un plan contenant Ox , les franges d'interférence ne sont plus des droites perpendiculaires à Ox , mais des hyperboles ayant les 2 sources pour foyers

L'expérience de M.I.T.
(Refs. 1 et 2)

T-109

Réalisation des 2 condensats

- Condensat ayant la forme d'un cigare allongé le long de Ox
- Un faisceau laser, désaccordé vers le bleu, et ayant la forme d'une nappe de lumière perpendiculaire à Ox et de largeur $12 \mu m$ sépare ce condensat en 2 parties

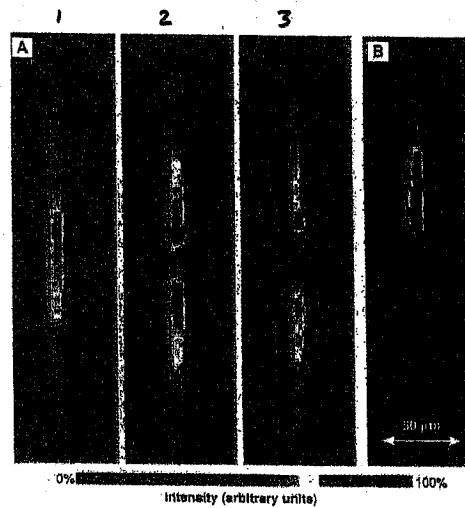


- Possibilité en variant l'intensité laser de changer la hauteur V_0 de la barrière et donc l'écart entre les 2 minima des 2 puits

IV-6

Photographie des condensats T-110

(Figure extraite de la ref. 1)

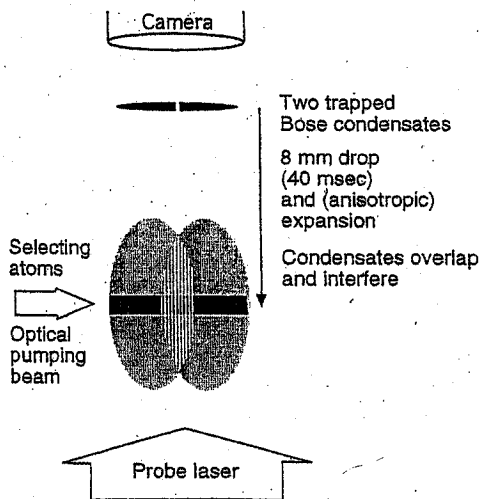


- A.1 - Condensat initial
- A.2 - Condensat coupé en 2 avec un laser de puissance $P = 7 \text{ mW}$.
- A.3 - Même figure que A.2 avec $P = 43 \text{ mW}$
- A.4 - L'un des 2 condensats est éliminé par un laser résonnant

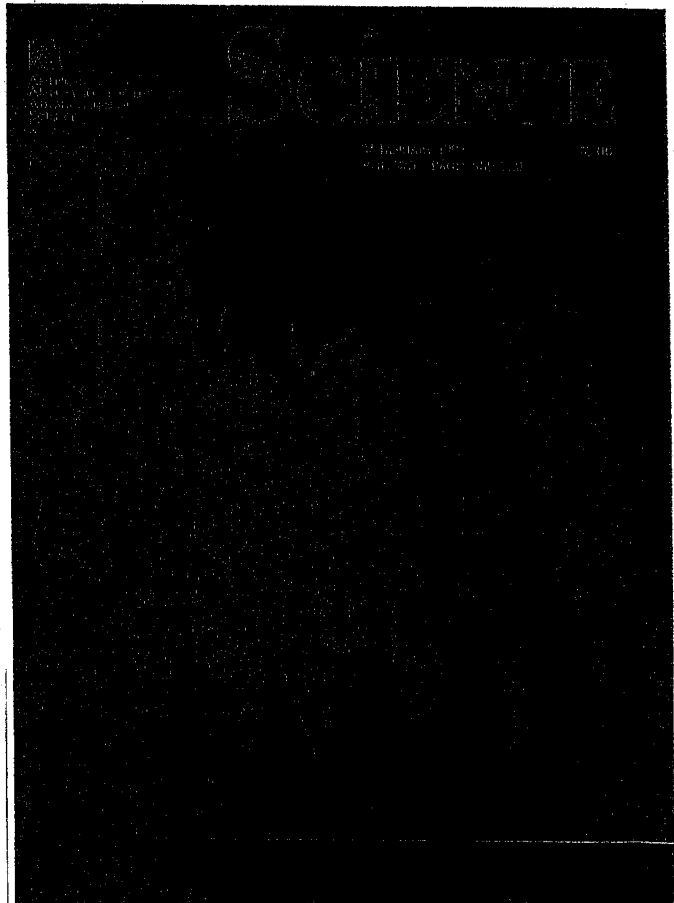
Principe de l'expérience T-111

T-111

Après l'expansion balistique anisotrope, les atomes d'une tranche de faible épaisseur sont pompés optiquement dans un état absorbant pour éviter un brouillage des franges



(Figure extraite de la réf. 2)



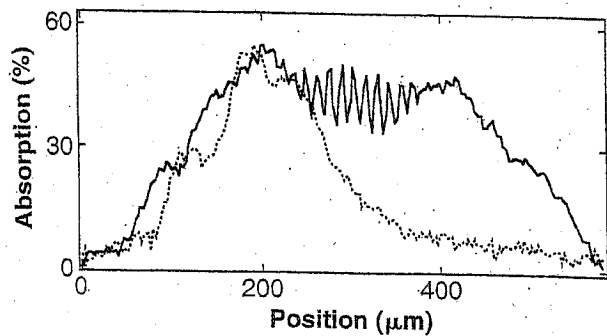
T-112

IV-7

Comparaison des résultats obtenus

- avec 2 condensats (courbe en trait plein)
- avec l'un des 2 condensats éliminé (courbe en pointillé)

T-113

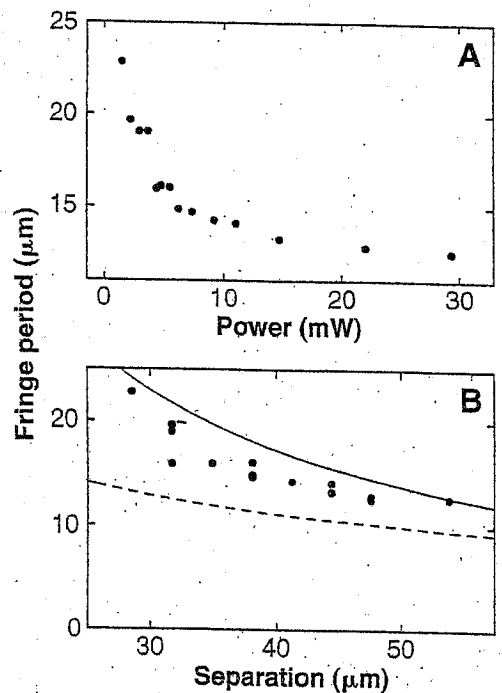


(Courbe extraite de la ref. 1)

Variations de l'interfrange

T-114

- Avec la puissance laser (A)
- Avec la séparation des 2 condensats (B)



(Figure extraite de la ref. 1)

Analyse plus quantitative

T-115

Comparaison des observations expérimentales avec les prédictions de calculs plus précis

- tenant compte des interactions entre atomes
- tenant compte de la forme initiale des 2 condensats qui n'est pas simplement une somme de 2 Gaussiennes séparées par une distance grande devant leur largeur

Utilisation de l'équation de Gross-Pitaevskii pour

- déterminer la forme initiale des 2 condensats
- étudier leur expansion balistique
- étudier les franges d'interférence

Travaux théoriques décrits dans les références 4, 5, 6

Résultats essentiels de cette analyse

T-116

- ① L'expansion très rapide dans les directions perpendiculaires à Ox réduit très vite la densité et donc l'importance des interactions sur les franges observées après cette expansion. Le long de Ox , les interactions (répulsives) introduisent une accélération initiale qui fait que les ondes qui interfèrent ont un vecteur d'onde plus grand qu'en l'absence d'interactions. L'interfrange est donc légèrement plus petit que celui, $\pi \hbar t / m d$, calculé en l'absence d'interactions (courbe en trait plein de la figure B de T-).
- ② L'allure des franges est très différente suivant que les 2 condensats sont initialement bien séparés ou peu séparés.

Condensats très peu couplés [T-117]

Potentiel chimique μ ← Hauteur V_0 de la barrière de potentiel

- Les 2 condensats sont bien séparés
- La séparation des mouvements le long de Ox, Oy, Oz est bien réalisée
- Plusieurs franges sont prédites avec une structure rectiligne et régulière

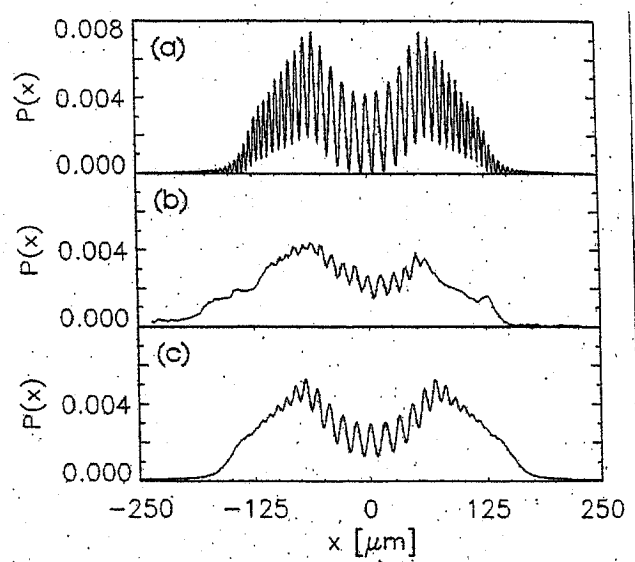
Condensats très couplés

$\mu \lesssim V_0$

- Les 2 condensats sont très peu séparés et, seul, un calcul numérique permet de prédire les phénomènes
- Les mouvements le long de Ox, Oy, Oz ne sont plus séparables
- Le nombre de franges observables diminue et elles ne sont plus rectilignes
- La frange centrale est prédominante

Comparaison théorie - expérience [T-118]
pour des condensats bien séparés

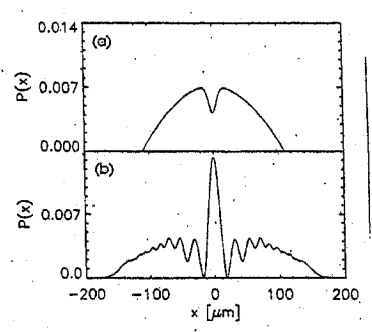
- (a) Théorie
- (b) Expérience
- (c) Théorie tenant compte de la résolution finie de l'expérience



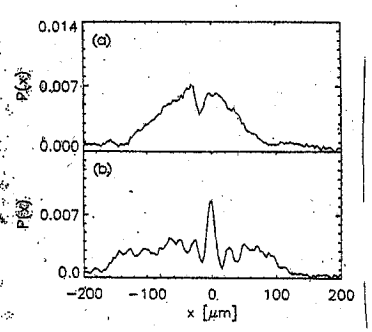
(Figure extraite de la réf. 5)

Comparaison théorie - expérience [T-119]
pour des condensats peu séparés

- (a) Forme initiale du condensat en présence de la barrière de potentiel V_0
- (b) Franges d'interférence après expansion balistique



Théorie

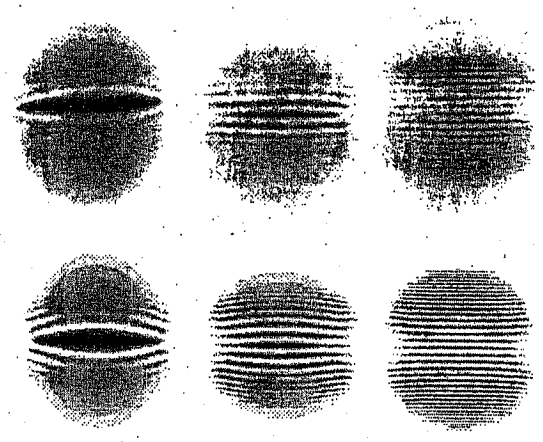


Expérience

(Figures extraites de la réf. 5)

Allure rectiligne ou courbée des franges suivant que les condensats sont peu ou bien séparés [T-120]

V_0 augmente de gauche à droite
Partie supérieure : Expérience
Partie inférieure : Théorie



(Figure extraite de la réf. 2)

IV-9)

Conclusions

T-121

- Démonstration de la possibilité de faire interférer des ondes de de Broglie atomiques issues de 2 sources différentes

Analogie avec les phénomènes observés en faisant interférer 2 faisceaux laser différents

- L'accord théorie - expérience montre que les franges observées ne sont pas dues à des ondes de densité de 2 condensats entrant en collision

- Les calculs théoriques supposent des condensats parfaitement cohérents (Même phase en tous les points)

L'accord théorie - expérience montre donc la longue portée de la cohérence spatiale dans un condensat

Les expériences sur $g^{(2)}(\vec{r}, \vec{r})$ et $g^{(2)}(\vec{r}, \vec{r}, \vec{r}, \vec{r})$ décrites dans le cours III testaient par contre les propriétés de courte portée

② Supposons que les 2 condensats sont bien séparés et restent piégés (pas d'expansion balistique)

T-123

A $t=0$, une phase relative φ existe entre eux

Cette phase relative va-t-elle se maintenir indéfiniment au cours du temps ?

Les interactions entre bosons ne vont-elles pas brouiller cette phase relative ?

Au bout de quel temps ?

Temps de cohérence

Problèmes non étudiés ici

T-122

(et qui seront abordés ultérieurement)

① Les calculs sont faits en supposant une certaine phase relative φ entre les 2 condensats, cette phase φ variant d'une réalisation expérimentale à l'autre.

Y a-t-il un phénomène physique qui fixe cette phase relative ?

On verra dans un cours ultérieur que ce sont les premiers processus de détection qui fixent cette phase relative

On peut donc observer des franges d'interférence même si l'on part d'un état initial qui est un produit $|N_1\rangle \otimes |N_2\rangle$ de 2 états de Fock ne possédant pas de phase relative bien définie

Quelques références

T-124

- (1) - M. Andrews, C. Townsend, H. Miesner, D. Durfee, D. Kurn, W. Ketterle, *Science*, **275**, 637 (1997)
- (2) W. Ketterle, D. Durfee, D. Stamper-Kurn, *Proceedings de l'école d'été de Varenna de 1998*, à paraître
- (3) C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, F. Laloe, *Mécanique Quantique, Complément G_I*
- (4) H. Wallis, A. Röhl, M. Naraschewski, A. Schenzle, *Phys. Rev. A* **55**, 2109 (1997)
- (5) A. Röhl, M. Naraschewski, A. Schenzle, H. Wallis, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 4143, (1997)
- (6) H. Wallis, H. Steck, *Europhysics Letters*, **41**, 477 (1998)

09.11.99

V-1

Emergence d'une phase relative
sous l'effet des processus de détections

- ① Introduction T.125 - T.127
 - Objet de ce cours
 - Idée physique
 - Démarche suivie

- ② Processus dissipatifs et sauts quantiques T.128 - T.133
 - Exemples de processus dissipatifs
 - Description usuelle par équations piloté
 - Description en termes de sauts quantiques
 - Un exemple simple : cascade radiative de l'atome habillé
 - Généralisation

- ③ Probabilité d'une séquence donnée de processus de détection
 - Modèle choisi - Notations - Hamiltonien effectif ^{T.134 -} T.143
 - Construction pas à pas du signal de détection dans une réalisation expérimentale donnée
 - Etat initial du condensat
 - Etude des 3 premières détections - Généralisations

- ④ Simulation Monte Carlo de la figure d'interférence T.144 - T.156
 - But de ces simulations
 - Dépendance spatiale du signal de détection
 - Tirage au sort des positions des atomes détectés
 - Etude des 3 premières détections - Généralisations
 - Visibilité conditionnelle et phase conditionnelle
 - Quelques exemples de résultats de simulation

Références p. V-10

Emergence d'une phase relative entre 2 condensats

T-125

Problème posé

2 condensats indépendants n'ont pas en général une phase relative bien définie.

Peut-on néanmoins observer des franges d'interférence dans la zone de recouvrement de ces condensats ?

Objet de ce cours

Montrer que au fur et à mesure que les atomes sont détectés, une phase relative s'établit, de sorte qu'une figure d'interférence peut être observée.

C'est le processus de détection qui fait apparaître une phase relative.

D'une réalisation expérimentale à l'autre, la valeur de la phase relative obtenue change aléatoirement.

Idée physique

T-126

L'exemple le plus simple d'état quantique de 2 condensats sans phase relative bien définie est un produit d'états de Fock $|N_1\rangle \otimes |N_2\rangle = |N_1, N_2\rangle$

Dans un tel état, la dispersion sur $N_1 - N_2$ est nulle, et la variable conjuguée de $N_1 - N_2$, φ , est très mal définie.

Chaque atome détecté a une certaine amplitude de provenir du condensat 1, et une autre de provenir du condensat 2.

Chaque détection fait donc apparaître une dispersion sur $N_1 - N_2$.

L'augmentation progressive de cette dispersion au fur et à mesure que les atomes sont détectés, diminue donc corrélativement la dispersion sur φ .

Démarche suivie

T-127

Calcul de la probabilité de détecter, au cours d'une réalisation expérimentale, un atome en x_1 , puis un atome en x_2 , ... puis un atome en x_k .

$$W(x_k, x_{k-1}, \dots, x_2, x_1)$$

Ensuite, 2 manières différentes d'utiliser un tel résultat.

- ① Simulation numérique de type Monte-Carlo basée sur la probabilité $W(x_k, \dots, x_1)$.

Constatation que la figure formée par les positions des atomes détectés fait apparaître des franges.

- ② Etude à partir de W de la manière dont la distribution des valeurs possibles de la phase relative évolue au cours du temps et s'affine de plus en plus autour d'une valeur donnée.

Description quantique d'un processus dissipatif

T-128

Exemples de processus dissipatifs

- Emission spontanée de photons par des atomes excités
- Ionisation d'un atome par un rayonnement incident
- Détection optique d'un atome d'un condensat. L'atome disparaît de l'état dans lequel il était condensé, est transféré dans un autre état et quitte très vite la zone d'observation.

Existence de 2 échelles de temps $\tau_c, \tau_R \gg \tau_c$

τ_R est le "temps de relaxation" décrivant l'amortissement des grandeurs physiques.

τ_c est le "temps de corrélation" caractérisant la mémoire des processus microscopiques responsables de la relaxation.

Par exemple, pour l'émission spontanée, τ_R est la durée de vie de l'état excité, τ_c le temps de corrélation des fluctuations du vide.

Description par équation pilote T-129

Description quantique la plus courante d'un processus dissipatif

La condition $T_R \gg T_c$ permet de faire une approximation de Markov et d'obtenir une équation différentielle pour l'opérateur densité réduit $\hat{\rho}$ décrivant le système subissant la relaxation

Exemple : Oscillateur harmonique amorti [Ref. 1 - Complément Biv)

$$\frac{d}{dt} \hat{\rho} = -i\omega_0 [\hat{b}^\dagger \hat{b}, \hat{\rho}] - \frac{\Gamma}{2} [\hat{b}^\dagger \hat{b} \hat{\rho} + \hat{\rho} \hat{b}^\dagger \hat{b}] + \Gamma \hat{b}^\dagger \hat{\rho} \hat{b}$$

1^{ère} ligne : Evolution libre de fréquence ω_0

\hat{b}^\dagger (\hat{b}) : Opérateurs de création (destruction) de l'oscillateur

2^{ème} ligne : Amortissement avec un taux Γ

Par exemple pour $\hat{\rho}_{nn} = \langle n | \hat{\rho} | n \rangle$, on a

$$\frac{d}{dt} \hat{\rho}_{nn} = -n\Gamma \hat{\rho}_{nn} + (n+1)\Gamma \hat{\rho}_{n+1, n+1}$$

Description en termes de sauts quantiques T-130

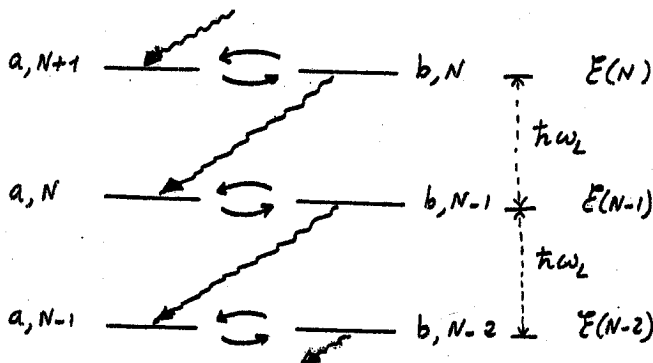
- L'équation pilote décrit l'évolution moyenne d'un ensemble statistique de systèmes préparés tous dans les mêmes conditions
 - L'observation de sauts quantiques sur la lumière de fluorescence émise par un ion unique piégé a stimulé le développement d'autres approches théoriques permettant de décrire l'évolution d'un seul système
 - Description de l'évolution de ce système comme formée d'une suite de périodes d'évolution cohérente, où l'évolution de la fonction d'onde est régie par un hamiltonien effectif non hermitique, séparées par des sauts quantiques se produisant à des instants aléatoires
- Fonction délai, Wave Function Monte Carlo, Stochastic wave functions, Quantum trajectories, Voir Refs. 2 à 7

Un exemple simple : Cascade radiative de l'atome habillé (Ref. 1, Chap. VI) T-131

- Atome à 2 niveaux a, b, dans un champ laser monomode de fréquence ω_L .

N : Nombre de photons laser

- Les états non couplés du système se groupent en multiplicités $E(N)$ de 2 états très proches $\{|a, N+1\rangle, |b, N\rangle\}$, la distance entre 2 multiplicités adjacentes étant $\hbar\omega_L$



Couplages $\hbar\Omega_1/2$ entre $|a, N+1\rangle$ et $|b, N\rangle$ (Ω_1 : fréquence de Rabi) décrivant les processus d'absorption et d'émission stimulée de photons laser

Description de la cascade radiative T-132

- L'atome entre dans $E(N)$ à un certain instant ($t=0$) après émission spontanée d'un photon qui le projette dans $|a, N+1\rangle$
- Il évolue ensuite pendant un certain temps dans $E(N)$ en oscillant entre $|a, N+1\rangle$ et $|b, N\rangle$ (précession de Rabi)

Evolution décrite par l'opérateur d'évolution restreint à l'intérieur de E_N
 $P_N e^{-i\hat{H}t/\hbar} P_N$ P_N : Projecteur sur E_N

Equivalence avec l'évolution régie par un hamiltonien effectif \hat{H}_{eff} non hermitique (la norme n'est pas conservée car le système ne reste pas indéfiniment dans $E(N)$)

$$\hat{H}_{eff} = \hbar \begin{pmatrix} \omega_L - \omega_A & \Omega_1/2 \\ \Omega_1/2 & -i\Gamma/2 \end{pmatrix} \quad \Gamma : \text{Taux de départ de } |b, N\rangle \text{ par émission spontanée}$$

- Probabilité d'effectuer un saut quantique vers $|a, N\rangle$ par émission spontanée à partir de $|b, N\rangle$

$$K(t) dt = \Gamma | \langle b, N | e^{-i\hat{H}_{eff} t/\hbar} | a, N+1 \rangle |^2$$

$K(t)$: Fonction délai

- On peut tirer l'instant t où se produit le saut $|b, N\rangle \rightarrow |a, N\rangle$ à partir de $K(t)$ T-133
- Après le saut $|b, N\rangle \rightarrow |a, N\rangle$, l'atome commence une nouvelle période d'évolution cohérente dans $E(N-1)$ jusqu'au prochain saut quantique $|b, N-1\rangle \rightarrow |a, N-1\rangle$
Et ainsi de suite
- La fonction délai $K(\tau)$ donne la distribution des intervalles de temps τ séparant 2 émissions spontanées successives
- A partir de $K(\tau)$, on peut simuler la suite aléatoire de processus d'émission et interpréter toutes les propriétés statistiques des signaux des détecteurs observant les photons de fluorescence
- Généralisation possible à des systèmes plus complexes (atomes à plusieurs niveaux) et interprétation d'effets variés comme la fluorescence intermittente, le piégeage cohérent de populations...

Probabilité d'une séquence donnée de processus de détection $P(x_1, t_1, \dots, x_n, t_n)$ T-134

Modèle choisi

- 2 condensats indépendants
- Les états ψ_1 et ψ_2 dans lesquels les atomes sont condensés sont approximatés par 2 ondes planes de vecteurs d'onde opposés le long de Ox : $k_1 = -k$ $k_2 = +k$
Le recouvrement des condensats est déjà réalisé.
- Pour simplifier, on néglige l'effet de la gravité le long de Oz
- La détection des atomes fait disparaître les atomes des 2 condensats avec un taux Γ supposé être le même pour les 2 condensats. Détecteurs supposés parfaits
- On néglige dans une première étape les interactions entre atomes

Calcul de N T-135

En prenant la moyenne spatiale du signal précédent, on obtient

$$\overline{P(x)} dx dt = N [P_1(x) + P_2(x)] dx dt$$

$$P_1(x) = \langle \hat{a}_1^+ \hat{a}_1 \rangle \quad P_2(x) = \langle \hat{a}_2^+ \hat{a}_2 \rangle$$

D'après l'hypothèse faite plus haut sur le taux de disparition des atomes dû à la détection, on a

$$N = \Gamma$$

Changement d'unités

On prend λ pour unité de longueur

$$k = \frac{\pi}{\lambda} = \pi$$

On peut alors écrire

$$\hat{\Psi}(x) = \hat{a}_1 + \hat{a}_2 e^{i\varphi(x)} \quad \hat{\Psi}^+(x) = \hat{a}_1^+ + \hat{a}_2^+ e^{-i\varphi(x)}$$

avec $\varphi(x) = 2\pi x$

On peut se contenter de faire varier x entre 0 et 1, ce qui revient à faire varier $\varphi(x)$ entre 0 et 2π

A chaque x correspond un $\varphi(x)$

Opérateurs champ T-136

$$\hat{\Psi}(x) = \hat{a}_1 e^{ik_1 x} + \hat{a}_2 e^{ik_2 x}$$

$$= e^{-ikx} [\hat{a}_1 + \hat{a}_2 e^{2ikx}]$$

$$\hat{\Psi}^+(x) = e^{ikx} [\hat{a}_1^+ + \hat{a}_2^+ e^{-2ikx}]$$

Dans toutes les expressions qui suivent, chaque $\hat{\Psi}(x)$ est associé à un $\hat{\Psi}^+(x)$, de sorte qu'on peut ignorer les $e^{\pm ikx}$ en facteur

$$\hat{\Psi}(x) = \hat{a}_1 + \hat{a}_2 e^{2ikx}$$

$$\hat{\Psi}^+(x) = \hat{a}_1^+ + \hat{a}_2^+ e^{-2ikx}$$

Probabilité $P(x) dx dt$ de détecter un atome dans l'intervalle dx et pendant dt

$$P(x) = N \langle \hat{\Psi}^+(x) \hat{\Psi}(x) \rangle$$

N : Constante de normalisation
 $P(x) = N \langle (\hat{a}_1^+ + \hat{a}_2^+ e^{-2ikx}) (\hat{a}_1 + \hat{a}_2 e^{2ikx}) \rangle$

Signal périodique en x de période spatiale

$$\lambda = \frac{\pi}{k}$$

Hamiltonien effectif Heff T-137

- L'évolution libre d'un état de base $|N_1, N_2\rangle$ est de la forme $\exp[-i(N_1+N_2)\omega_0 t]$ où $\hbar\omega_0$ est l'énergie individuelle des états k_1 et k_2 , supposée la même pour k_1 et k_2 (on néglige les interactions)
- Le taux de départ Γ , identique pour les 2 condensats, entraîne également une décroissance exponentielle de l'amplitude d'être dans $|N_1, N_2\rangle$, de la forme $\exp[-\Gamma(N_1+N_2)t]$

On en déduit que

$$\hat{H}_{eff} = \hbar(\omega_0 - i\frac{\Gamma}{2})(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 + \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2)$$

- En comparant les éléments de matrice des 2 membres de chaque identité dans la base $\{|N_1\rangle\}$ ou $\{|N_2\rangle\}$, on déduit aisément les identités

$$e^{i\hat{H}_{eff}t/\hbar} \hat{a}_1 e^{-i\hat{H}_{eff}t/\hbar} = e^{-i\omega_0 t} e^{-\frac{\Gamma t}{2}} \hat{a}_1$$

$$e^{i\hat{H}_{eff}t/\hbar} \hat{a}_1^\dagger e^{-i\hat{H}_{eff}t/\hbar} = e^{i\omega_0 t} e^{-\frac{\Gamma t}{2}} \hat{a}_1^\dagger$$

et des identités équivalentes pour \hat{a}_2 et \hat{a}_2^\dagger

Construction pas à pas du signal T-138

de détection pour une réalisation donnée

Etat initial des 2 condensats

Mélange statistique d'états $|X_i\rangle$ avec des poids statistiques p_i : $\hat{\rho} = \sum_i p_i |X_i\rangle \langle X_i|$

Le calcul sera fait pour chaque état $|X_i\rangle$ du mélange, puis moyenné au niveau des probabilités sur les $|X_i\rangle$

On se limite ici à la contribution d'un état $|X_i\rangle$ du mélange

1^{ère} détection

- On part de $|X_i\rangle$ à $t=0$
- A l'instant t_1 , cet état est devenu $|X_i(t_1)\rangle = e^{-i\hat{H}_{eff}t_1/\hbar} |X_i\rangle$
- Aucune détection n'a encore eu lieu
- La probabilité de détecter un atome en x_1 à l'instant t_1 vaut $P(x_1, t_1) = \Gamma \langle X_i(t_1) | \hat{\Psi}^\dagger(x_1) \hat{\Psi}(x_1) | X_i(t_1) \rangle = \Gamma \langle X_i | e^{i\hat{H}_{eff}t_1/\hbar} \hat{\Psi}^\dagger(x_1) \hat{\Psi}(x_1) e^{-i\hat{H}_{eff}t_1/\hbar} | X_i \rangle$

Etat du système à $t_1 + \epsilon$, c.-à-d T-139

immédiatement après la 1^{ère} détection

- Le saut quantique correspondant à la disparition d'un atome en x_1 à l'instant t_1 porte le système dans l'état

$$|X_i(t_1 + \epsilon)\rangle \propto \hat{\Psi}(x_1) |X_i(t_1)\rangle$$

- Pour normer cet état, il faut le diviser par la racine carrée de sa norme

$$|X_i(t_1 + \epsilon)\rangle = \frac{\hat{\Psi}(x_1) |X_i(t_1)\rangle}{\sqrt{\langle X_i(t_1) | \hat{\Psi}^\dagger(x_1) \hat{\Psi}(x_1) | X_i(t_1) \rangle}}$$

- D'après T- , le dénominateur du 2^{ème} membre vaut $\sqrt{P(x_1, t_1)/\Gamma}$, de sorte que

$$|X_i(t_1 + \epsilon)\rangle = \sqrt{\frac{\Gamma}{P(x_1, t_1)}} \hat{\Psi}(x_1) |X_i(t_1)\rangle = \sqrt{\frac{\Gamma}{P(x_1, t_1)}} \hat{\Psi}(x_1) e^{-i\hat{H}_{eff}t_1/\hbar} |X_i\rangle$$

A l'instant $t_2 > t_1$, et s'il n'y a pas eu d'autre détection après la 1^{ère}, cet état est devenu

$$|X_i(t_2)\rangle = e^{-i\hat{H}_{eff}(t_2-t_1)/\hbar} |X_i(t_1 + \epsilon)\rangle$$

2^{ème} détection

$P(x_2, t_2, x_1, t_1)$ = Probabilité de détecter un atome en x_1, t_1 et un autre atome en x_2, t_2

$$P(x_2, t_2, x_1, t_1) = P(x_2, t_2 | x_1, t_1) P(x_1, t_1)$$

$P(x_2, t_2 | x_1, t_1)$ = Probabilité conditionnelle de détecter un atome en x_2, t_2 sachant qu'on a détecté un atome en x_1, t_1

Si l'on a détecté un atome en x_1, t_1 , l'état du système à l'instant t_2 est (voir T-139)

$$|X_i(t_2)\rangle = e^{-i\hat{H}_{eff}(t_2-t_1)/\hbar} |X_i(t_1 + \epsilon)\rangle$$

On a donc

$$P(x_2, t_2 | x_1, t_1) = \Gamma \langle X_i(t_2) | \hat{\Psi}^\dagger(x_2) \hat{\Psi}(x_2) | X_i(t_2) \rangle = \Gamma \langle X_i(t_1 + \epsilon) | e^{i\hat{H}_{eff}(t_2-t_1)/\hbar} \hat{\Psi}^\dagger(x_2) \hat{\Psi}(x_2) e^{-i\hat{H}_{eff}(t_2-t_1)/\hbar} | X_i(t_1 + \epsilon) \rangle = \frac{\Gamma^2}{P(x_1, t_1)} \langle X_i | e^{i\hat{H}_{eff}t_1/\hbar} \hat{\Psi}^\dagger(x_1) e^{i\hat{H}_{eff}(t_2-t_1)/\hbar} \hat{\Psi}^\dagger(x_2) \hat{\Psi}(x_2) e^{-i\hat{H}_{eff}(t_2-t_1)/\hbar} \hat{\Psi}(x_1) e^{-i\hat{H}_{eff}t_1/\hbar} | X_i \rangle$$

Prenons $\hat{\Psi}(x, t) = e^{i\hat{H}_{eff}t/\hbar} \hat{\Psi}(x) e^{-i\hat{H}_{eff}t/\hbar}$ [T.141]
 $\hat{\Psi}^+(x, t) = e^{i\hat{H}_{eff}^+t/\hbar} \hat{\Psi}^+(x) e^{-i\hat{H}_{eff}^+t/\hbar}$

On obtient

$P(x_2, t_2, x_1, t_1) = \Gamma^2$
 $\langle \chi_i | \hat{\Psi}(x, t_1) e^{+i\hat{H}_{eff}^+t_2/\hbar} \hat{\Psi}^+(x_2) \hat{\Psi}(x_2) e^{-i\hat{H}_{eff}t_2/\hbar} \hat{\Psi}(x, t_1) | \chi_i \rangle$

Le saut quantique associé à la 2^{ème} détection projette le système dans l'état

$|\chi_i(t_2 + \epsilon)\rangle = \frac{\hat{\Psi}(x_2) |\chi_i(t_2)\rangle}{\sqrt{\langle \chi_i(t_2) | \hat{\Psi}(x_2) \hat{\Psi}(x_2) | \chi_i(t_2) \rangle}}$

Dénominateur : $\sqrt{P(x_2, t_2, x_1, t_1) / \Gamma}$

Numérateur : $\frac{\hat{\Psi}(x_2) e^{-i\hat{H}_{eff}(t_2-t_1)/\hbar} \hat{\Psi}(x_1) e^{-i\hat{H}_{eff}t_1/\hbar} |\chi_i\rangle}{\sqrt{P(x_1, t_1) / \Gamma}}$

On en déduit

$|\chi_i(t_2 + \epsilon)\rangle = \sqrt{\frac{\Gamma^2}{P(x_2, t_2, x_1, t_1)}} \times$
 $\hat{\Psi}(x_2) e^{-i\hat{H}_{eff}(t_2-t_1)/\hbar} \hat{\Psi}(x_1) e^{-i\hat{H}_{eff}t_1/\hbar} |\chi_i\rangle$

On a vu plus haut (voir T.137) que [T.143]

$\hat{\Psi}(x, t) = e^{i\hat{H}_{eff}t/\hbar} \hat{\Psi}(x) e^{-i\hat{H}_{eff}t/\hbar} = e^{-i\omega_0 t} e^{-\Gamma \frac{t}{2}} \hat{\Psi}(x)$
 $\hat{\Psi}^+(x, t) = e^{i\hat{H}_{eff}^+t/\hbar} \hat{\Psi}^+(x) e^{-i\hat{H}_{eff}^+t/\hbar} = e^{i\omega_0 t} e^{-\Gamma \frac{t}{2}} \hat{\Psi}^+(x)$

Calcul de $\hat{A} = e^{i\hat{H}_{eff}^+t/\hbar} \hat{\Psi}^+(x) \hat{\Psi}(x) e^{-i\hat{H}_{eff}t/\hbar}$

$\hat{A} = e^{i\hat{H}_{eff}^+t/\hbar} \hat{\Psi}^+(x) e^{-i\hat{H}_{eff}^+t/\hbar} \times$
 $e^{i\hat{H}_{eff}t/\hbar} e^{-i\hat{H}_{eff}t/\hbar} \times$
 $e^{i\hat{H}_{eff}t/\hbar} \hat{\Psi}(x) e^{-i\hat{H}_{eff}t/\hbar}$
 $= \hat{\Psi}^+(x, t) e^{i(\hat{H}_{eff}^+ - \hat{H}_{eff})t/\hbar} \hat{\Psi}(x, t)$

D'après (T.)

$\hat{H}_{eff}^+ - \hat{H}_{eff} = i\Gamma(\hat{a}_1^+ \hat{a}_1 + \hat{a}_2^+ \hat{a}_2) = i\Gamma \hat{N}$

On en déduit que

$e^{i\hat{H}_{eff}^+t/\hbar} \hat{\Psi}^+(x) \hat{\Psi}(x) e^{-i\hat{H}_{eff}t/\hbar} =$
 $= \hat{\Psi}^+(x, t) e^{-\Gamma \hat{N} t} \hat{\Psi}(x, t)$

Finalement,

$P(x_k, t_k, x_{k-1}, t_{k-1}, \dots, x_2, t_2, x_1, t_1) = \Gamma^k$
 $\langle \chi_i | \hat{\Psi}^+(x, t_1) \dots \hat{\Psi}^+(x_k, t_k) e^{-\Gamma \hat{N} t_k} \hat{\Psi}(x_k, t_k) \dots \hat{\Psi}(x, t_1) | \chi_i \rangle$
 $= \Gamma^k e^{-\Gamma(t_1 + t_2 + \dots + t_k)} \times$
 $\langle \chi_i | \hat{\Psi}^+(x_1) \dots \hat{\Psi}^+(x_k) e^{-\Gamma \hat{N} t_k} \hat{\Psi}(x_k) \dots \hat{\Psi}(x_1) | \chi_i \rangle$

A l'instant t_3 , cet état est devenu [T.142]

$|\chi_i(t_3)\rangle = e^{-i\hat{H}_{eff}(t_3-t_2)/\hbar} |\chi_i(t_2 + \epsilon)\rangle$

3^{ème} détection

$P(x_3, t_3, x_2, t_2, x_1, t_1) =$
 $P(x_3, t_3, x_2, t_2, x_1, t_1) P(x_2, t_2, x_1, t_1)$

$P(x_3, t_3, x_2, t_2, x_1, t_1) = \Gamma \langle \chi_i(t_3) | \hat{\Psi}^+(x_3) \hat{\Psi}(x_3) | \chi_i(t_3) \rangle$

On déduit alors de l'expression de $|\chi_i(t_3)\rangle$ et $|\chi_i(t_2 + \epsilon)\rangle$

$P(x_3, t_3, x_2, t_2, x_1, t_1) = \Gamma^3$
 $\langle \chi_i | \hat{\Psi}^+(x, t_1) \hat{\Psi}^+(x_2, t_2) e^{i\hat{H}_{eff}^+t_3/\hbar} \hat{\Psi}^+(x_3) \hat{\Psi}(x_3) e^{-i\hat{H}_{eff}t_3/\hbar} \hat{\Psi}(x_2, t_2) \hat{\Psi}(x_1, t_1) | \chi_i \rangle$

Et ainsi de suite

$P(x_k, t_k, x_{k-1}, t_{k-1}, \dots, x_2, t_2, x_1, t_1) = \Gamma^k$
 $\langle \chi_i | \hat{\Psi}^+(x, t_1) \hat{\Psi}^+(x_2, t_2) \dots \hat{\Psi}^+(x_k, t_k) e^{i\hat{H}_{eff}^+t_k/\hbar} \hat{\Psi}^+(x_k) \hat{\Psi}(x_k) e^{-i\hat{H}_{eff}t_k/\hbar} \hat{\Psi}(x_{k-1}, t_{k-1}) \dots \hat{\Psi}(x_2, t_2) \hat{\Psi}(x_1, t_1) | \chi_i \rangle$

Simulations Monte-Carlo de la [T.144]

figure d'interférence (Refs 8 à 10)

But de ces simulations

- Montrer que, même si l'on part initialement d'un état de Fock $|\chi_i\rangle = |\frac{N}{2}, \frac{N}{2}\rangle$ où chaque condensat contient un nombre bien défini d'atomes (ici égal à $N/2$), une figure d'interférence très visible peut apparaître au cours d'une réalisation expérimentale.
- Simulation basée sur la description des processus de détection en termes de sauts quantiques et permettant de prédire les positions où les atomes sont détectés les uns après les autres
- Des calculs plus analytiques, utilisant les états cohérents relatifs, seront ensuite présentés dans le § 5 suivant pour comprendre l'évolution de la distribution de la phase relative

Autre forme plus commode du signal T-145

- Dans l'expression de $p(x_k, t_k, \dots, x_1, t_1)$, on voit apparaître (voir T-143)
 $\hat{\psi}(x_k) \dots \hat{\psi}(x_1) | \chi_i \rangle = \hat{\psi}(x_k) \dots \hat{\psi}(x_1) | \frac{N}{2}, \frac{N}{2} \rangle$
 qui est un état propre de $\hat{N} = \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 + \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2$
 de valeur propre $N-k$. On peut donc remplacer l'opérateur $e^{-\Gamma \hat{N} t}$ par $e^{-\Gamma(N-k)t}$, ce qui donne
 $p(x_k, t_k, \dots, x_1, t_1) = \Gamma^k e^{-\Gamma(t_1+t_2+\dots+t_k)} e^{-\Gamma(N-k)t_k} \times$
 $\langle \frac{N}{2}, \frac{N}{2} | \hat{\psi}^\dagger(x_1) \dots \hat{\psi}^\dagger(x_k) \hat{\psi}(x_k) \dots \hat{\psi}(x_1) | \frac{N}{2}, \frac{N}{2} \rangle$

Dépendance purement spatiale du signal

Attendons un temps suffisamment long pour que les k premières détections se soient certainement produites.

La probabilité pour que les k premières détections aient eu lieu en x_1, x_2, \dots, x_k , quels que soient les instants t_1, t_2, \dots, t_k auxquels elles se sont produites est égale à

$$\varphi(x_k, \dots, x_1) = \int \dots \int_{t_k > t_{k-1} > \dots > t_2 > t_1} dt_1 dt_2 \dots dt_k p(x_k, t_k, \dots, x_1, t_1)$$

Calcul de l'intégrale T-146

$$I = \int_0^\infty dt_1 \int_{t_1}^\infty dt_2 \dots \int_{t_{k-1}}^\infty dt_k e^{-\Gamma(t_1+t_2+\dots+t_k)} e^{-\Gamma(N-k)t_k}$$

$$\int_{t_{k-1}}^\infty dt_k e^{-\Gamma(N-k+1)t_k} = \frac{e^{-\Gamma(N-k+1)t_{k-1}}}{\Gamma(N-k+1)}$$

$$\int_{t_{k-2}}^\infty dt_{k-1} e^{-\Gamma(N-k+2)t_{k-1}} = \frac{e^{-\Gamma(N-k+2)t_{k-2}}}{\Gamma(N-k+2)}$$

Et ainsi de suite ...
 On obtient finalement

$$I = \frac{1}{\Gamma^k} \frac{1}{(N-k+1)(N-k+2)\dots N} = \frac{(N-k)!}{\Gamma^k N!}$$

On en déduit

$$\varphi(x_k, \dots, x_2, x_1) = \frac{(N-k)!}{N!} \times$$

$$\langle \frac{N}{2}, \frac{N}{2} | \hat{\psi}^\dagger(x_1) \hat{\psi}^\dagger(x_2) \dots \hat{\psi}^\dagger(x_k) \hat{\psi}(x_k) \dots \hat{\psi}(x_2) \hat{\psi}(x_1) | \frac{N}{2}, \frac{N}{2} \rangle$$

On voit réapparaître toutes les fonctions de corrélation spatiales du cours II

Etude de la 1^{ère} détection T-147

$$\varphi(x_1) = \frac{(N-1)!}{N!} \langle \frac{N}{2}, \frac{N}{2} | \hat{\psi}^\dagger(x_1) \hat{\psi}(x_1) | \frac{N}{2}, \frac{N}{2} \rangle$$

$$\hat{\psi}^\dagger(x_1) \hat{\psi}(x_1) = \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 + \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 + \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 e^{2i\pi x_1} + \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1 e^{-2i\pi x_1}$$

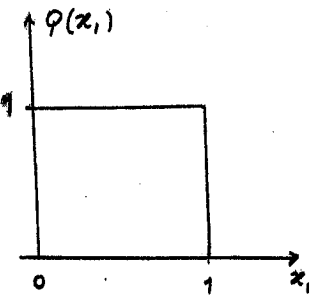
$$\langle \frac{N}{2}, \frac{N}{2} | \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 + \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 | \frac{N}{2}, \frac{N}{2} \rangle = \frac{N}{2} + \frac{N}{2} = N$$

$$\langle \frac{N}{2}, \frac{N}{2} | \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 | \frac{N}{2}, \frac{N}{2} \rangle = \langle \frac{N}{2}, \frac{N}{2} | \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1 | \frac{N}{2}, \frac{N}{2} \rangle = 0$$

On en déduit

$$\varphi(x_1) = \frac{1}{N} N = 1$$

$\varphi(x_1)$ est donc uniforme et ne dépend pas de x_1 . Il n'y a aucune oscillation spatiale dans la probabilité de détection du 1^{er} atome



On peut se contenter de faire varier x_1 entre 0 et 1 (voir T-135). On vérifie que $\varphi(x_1)$ est bien normalisé

$$\int_0^1 \varphi(x_1) dx_1 = 1$$

Saut quantique lors de la 1^{ère} détection T-148

- La 1^{ère} détection projette le système dans un état proportionnel à

$$|\xi^{(1)}\rangle = \hat{\psi}(x_1) | \frac{N}{2}, \frac{N}{2} \rangle$$

$$= (\hat{a}_1 + \hat{a}_2 e^{2i\pi x_1}) | \frac{N}{2}, \frac{N}{2} \rangle$$

$$= \sqrt{\frac{N}{2}} [| \frac{N}{2}-1, \frac{N}{2} \rangle + e^{2i\pi x_1} | \frac{N}{2}, \frac{N}{2}-1 \rangle]$$

- Notons en passant que

$$\langle \xi^{(1)} | \xi^{(1)} \rangle = N \varphi(x_1) = N$$

- On voit que $|\xi^{(1)}\rangle$ est une superposition linéaire de $| \frac{N}{2}-1, \frac{N}{2} \rangle$ et $| \frac{N}{2}, \frac{N}{2}-1 \rangle$, c.-à-d. de 2 états qui n'ont pas la même valeur de $N_1 - N_2$ (Par contre $N_1 + N_2$ a la même valeur)

Alors que dans l'état initial $|\chi_i\rangle = | \frac{N}{2}, \frac{N}{2} \rangle$, $N_1 - N_2$ est parfaitement défini, ce n'est plus le cas après la 1^{ère} détection, car l'atome détecté peut provenir, soit du condensat 1, soit du condensat 2

Etude de la 2^{ème} détection

T-149

$\Phi(x_2/x_1)$ = Probabilité conditionnelle de détecter le 2^{ème} atome en x_2 sachant que l'on détecte le 1^{er} en x_1 .

$$\Phi(x_2/x_1) = \frac{\varphi(x_2, x_1)}{\varphi(x_1)}$$

$$= \frac{1}{N(N-1)} \langle \zeta^{(1)} | \hat{a}_1^+ \hat{a}_1 + \hat{a}_2^+ \hat{a}_2 | \zeta^{(1)} \rangle$$

$$+ \frac{1}{N(N-1)} \left[\langle \zeta^{(1)} | \hat{a}_1^+ \hat{a}_2 | \zeta^{(1)} \rangle e^{2i\pi x_2} + c.c. \right]$$

Terme en $\langle \hat{a}_1^+ \hat{a}_1 + \hat{a}_2^+ \hat{a}_2 \rangle$

$$\frac{1}{N(N-1)} (N-1) \langle \zeta^{(1)} | \zeta^{(1)} \rangle = \frac{1}{N(N-1)} (N-1)N = 1$$

Termes en $\langle \hat{a}_1^+ \hat{a}_2 \rangle$ et $\langle \hat{a}_2^+ \hat{a}_1 \rangle$

$$\frac{1}{N(N-1)} \frac{N}{2} \left(\langle \frac{N}{2}-1, \frac{N}{2} | + e^{-2i\pi x_1} \langle \frac{N}{2}, \frac{N}{2}-1 | \right)$$

$$\hat{a}_1^+ \hat{a}_2 \left(| \frac{N}{2}-1, \frac{N}{2} \rangle + e^{2i\pi x_1} | \frac{N}{2}, \frac{N}{2}-1 \rangle \right) e^{2i\pi x_2} + c.c.$$

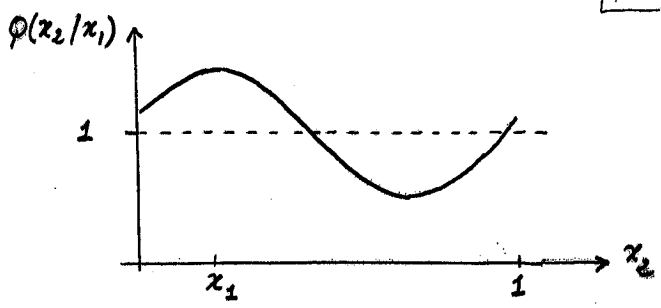
$$= \frac{1}{N(N-1)} \frac{N^2}{4} e^{2i\pi(x_2-x_1)} + c.c.$$

$$= \frac{N}{2(N-1)} \cos 2\pi(x_2-x_1) \approx \frac{1}{2} \cos 2\pi(x_2-x_1)$$

si $N \gg 1$

Allure de $\Phi(x_2/x_1) = 1 + \frac{1}{2} \cos 2\pi(x_2-x_1)$

T-150



Alors que $\Phi(x_1)$ est uniforme, $\Phi(x_2/x_1)$ présente, en fonction de x_2 , une oscillation spatiale d'amplitude relative 1/2 par rapport à la moyenne spatiale de $\Phi(x_2/x_1)$ (qui vaut 1) et de phase $\varphi_1 = 2\pi x_1$. $\Phi(x_2/x_1)$ est maximal pour $x_2 = x_1$.
Alors que les franges ne sont pas visibles sur $\Phi(x_1)$, elles ont une visibilité 1/2 sur $\Phi(x_2/x_1)$ après la 1^{ère} détection.
On peut utiliser $\Phi(x_2/x_1)$ pour tirer au sort x_2 suivant cette loi de probabilité.

Généralisation

T-151

$$|\zeta^{(2)}\rangle = \hat{\Psi}(x_2) \hat{\Psi}(x_1) | \frac{N}{2}, \frac{N}{2} \rangle$$

$$\langle \zeta^{(2)} | \zeta^{(2)} \rangle = \langle \frac{N}{2}, \frac{N}{2} | \hat{\Psi}^+(x_1) \hat{\Psi}^+(x_2) \hat{\Psi}(x_2) \hat{\Psi}(x_1) | \frac{N}{2}, \frac{N}{2} \rangle$$

$$= \frac{N!}{(N-2)!} \varphi(x_2, x_1)$$

$$\Phi(x_3/x_2, x_1) = \frac{\varphi(x_3, x_2, x_1)}{\varphi(x_2, x_1)}$$

$$= \frac{(N-3)!}{N!} \frac{1}{\varphi(x_2, x_1)} \times$$

$$\langle \zeta^{(2)} | \hat{a}_1^+ \hat{a}_1 + \hat{a}_2^+ \hat{a}_2 + \hat{a}_3^+ \hat{a}_3 e^{2i\pi x_3} + \hat{a}_2^+ \hat{a}_3 e^{-2i\pi x_3} | \zeta^{(2)} \rangle$$

Terme en $\langle \hat{a}_1^+ \hat{a}_1 + \hat{a}_2^+ \hat{a}_2 \rangle$

$$\frac{(N-3)!}{N!} \frac{1}{\varphi(x_2, x_1)} (N-2) \langle \zeta^{(2)} | \zeta^{(2)} \rangle = 1$$

Termes en $\langle \hat{a}_1^+ \hat{a}_2 \rangle$ et $\langle \hat{a}_2^+ \hat{a}_1 \rangle$

$$A(x_2, x_1) \cos[2\pi x_3 - \varphi(x_2, x_1)]$$

Et ainsi de suite ...

$$\Phi(x_k/x_{k-1} \dots x_1) =$$

$$1 + A(x_{k-1} \dots x_1) \cos[2\pi x_k - \varphi(x_{k-1} \dots x_1)]$$

Procédure de la simulation

T-152

- On tire au hasard x_1 , entre 0 et 1
- On calcule $\Phi(x_2/x_1) = 1 + A(x_1) \cos[2\pi x_2 - \varphi(x_1)]$
 $A(x_1) = \frac{1}{2}$ $\varphi(x_1) = 2\pi x_1$
- On tire une valeur de x_2 suivant la loi de probabilité $\Phi(x_2/x_1)$
- On calcule $\Phi(x_3/x_2, x_1) = 1 + A(x_2, x_1) \cos[2\pi x_3 - \varphi(x_2, x_1)]$
Le calcul analytique de $A(x_2, x_1)$ et $\varphi(x_2, x_1)$ devient de plus en plus complexe
Il est plus simple de calculer 2 valeurs de $\Phi(x_3/x_2, x_1)$ numériquement pour 2 valeurs x_3' et x_3'' de x_3 et d'en déduire les valeurs numériques des 2 paramètres du problème $A(x_2, x_1)$ et $\varphi(x_2, x_1)$
- On tire une valeur de x_3 suivant la loi $1 + A(x_2, x_1) \cos[2\pi x_3 - \varphi(x_2, x_1)]$
- Et ainsi de suite ...

Présentation des résultats

T-153

- La simulation donne ainsi les valeurs successives de x_1, x_2, \dots, x_k correspondant à une certaine réalisation
- On divise l'intervalle $[0, 1]$ des valeurs possibles de x en p intervalles et on construit l'histogramme du nombre de tirages tombant dans chaque intervalle
- A chaque étape de la simulation, on obtient 2 nombres A et φ [par exemple $A(x_2, x_1)$ et $\varphi(x_2, x_1)$] qui donnent la visibilité et la phase de la courbe donnant la dépendance spatiale de la probabilité de la détection suivante [dans cet exemple, x_3].

A et φ peuvent donc être considérés comme des visibilités et des phases conditionnelles pour une détection, connaissant les positions de toutes les détections qui la précèdent

Histogramme donnant la répartition des valeurs tirées pour x dans une simulation

T-154

Intervalle $[0, 1]$ divisé en 50 parties
 $N = 10000$ 5000 Detections

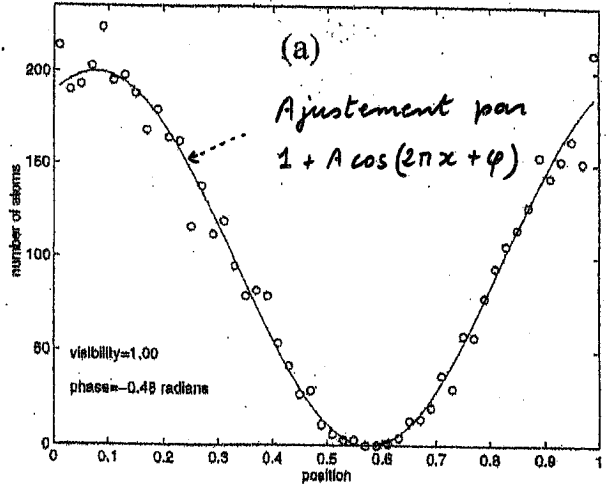


Figure extraite de la référence 9

Evolution de la phase conditionnelle en fonction du nombre de détections

T-155

(a), (b) : 2 simulations différentes
 La phase se stabilise après un certain nombre de détections à une valeur qui varie avec la simulation

$N = 200$

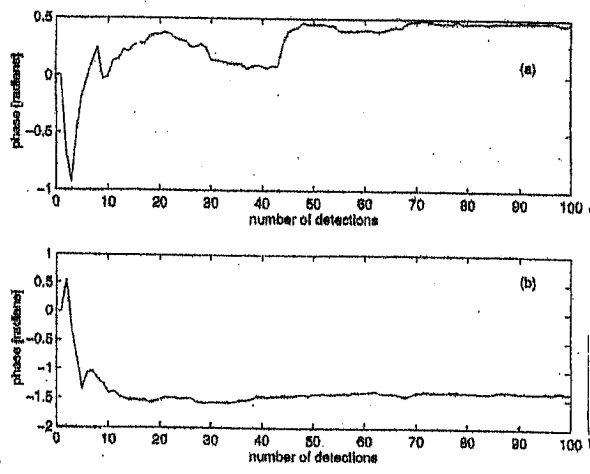


Figure extraite de la référence 9

Evolution de la visibilité conditionnelle en fonction du nombre de détections

T-156

Courbe moyennée sur 1000 simulations différentes
 Après la 1^{ère} détection, on a $A = \frac{1}{2}$

$N = 200$

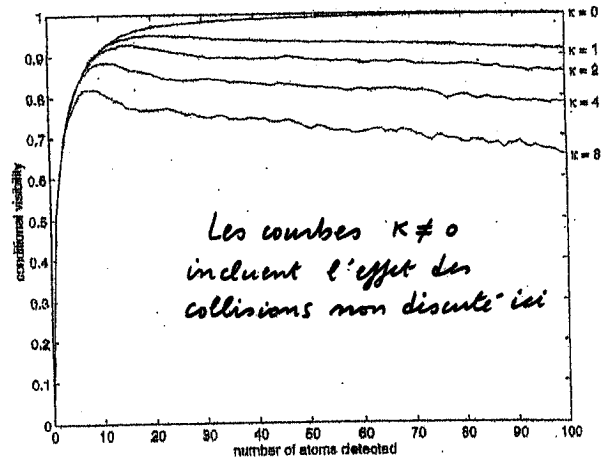


Figure extraite de la référence 9

Références

- (1) C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, G. Grynberg
"Processus d'interaction entre photons et atomes"
(InterEditions et Editions du CNRS, Paris, 1988)
Traduction anglaise: "Atom-Photon Interactions"
(Wiley, 1992)
- (2) C. Cohen-Tannoudji, J. Dalibard, Europhys. Lett. 1, 441 (1986)
- (3) S. Reynaud, J. Dalibard, C. Cohen-Tannoudji,
IEEE J. Quant. Electron. 24, 1395 (1988)
- (4) K. Mølmer, Y. Castin, J. Dalibard, J. Opt. Soc. Am.
B10, 524 (1993)
- (5) R. Dum, P. Zoller, H. Ritsch, Phys. Rev. A45, 4879 (1992)
- (6) H. Carmichael, "An Open System Approach to
Quantum Optics", Lecture Notes in Physics, Vol 18
(Springer Verlag, Berlin, 1993)
- (7) C.W. Gardiner, Quantum Noise, (Springer Verlag, 1991)
- (8) J. Javanainen, S.M. Yoo, Phys. Rev. Lett. 76, 161 (1996)
- (9) T. Wong, M.J. Collett, D. Walls, Phys. Rev. A54, R3718 (1996)
- (10) A.S. Parkins, D. Walls, Phys. Reports 303, 1, (1998)

15.11.99

Emergence d'une phase relative sous l'effet des processus de détection (suite)

VI-1

⑤ Evolution de la distributions de phase relative (T.157 à T-177)

- Etat initial - Description en termes d'états cohérents
- Problèmes étudiés
- Evolution d'un produit d'états cohérents
 - dans une phase d'évolution cohérente
 - lors d'un processus de détection
- Distribution de phase relative après k détections
- Probabilité de détecter un atome en x_{k+1} après k détections
- Résultats de simulations numériques
- Etude analytique du comportement asymptotique de la distribution de phase relative.
 - Déplacement du maximum de la distribution après une détection
 - Affinement de la distribution

Brouillage de la phase relative sous l'effet des interactions

① Introduction (T-178 à T-180)

- Problème étudié
- Fonction de corrélation caractérisant la cohérence entre 2 condensats

② Etude qualitative (T-181 à T-183)

- En l'absence d'interactions
- En présence d'interactions

③ Etude quantitative (T-184 à T-188)

- Calcul de la fonction de corrélation
- Temps de cohérence et temps de récurrence.

Références : page VI-10

Evolution de la distribution $W(\varphi)$ de la phase relative φ T-157

Etat initial des 2 condensats

A $t=0$, on suppose que la phase relative φ entre les 2 condensats n'est pas définie

Equipartie entre 0 et 2π

Description de cet état initial

Mélange statistique d'états cohérents relatifs

Produit de 2 états cohérents

$$|\alpha_1\rangle \otimes |\alpha_2\rangle = |\alpha_1, \alpha_2\rangle$$

$$\alpha_1 = A_1 e^{i\theta_1} \quad \alpha_2 = A_2 e^{i\theta_2}$$

$$A_1 = |\alpha_1| = \sqrt{N_1} \quad A_2 = |\alpha_2| = \sqrt{N_2}$$

$$\varphi = \theta_1 - \theta_2 = \text{Phase relative}$$

Etat cohérent relatif (voir T-87)

$$\hat{P}_{A_1, A_2}(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta_1$$

$$|A_1 e^{i\theta_1}, A_2 e^{i(\theta_1 - \varphi)}\rangle \langle A_1 e^{i\theta_1}, A_2 e^{i(\theta_1 - \varphi)}|$$

Distribution initiale $W^{(0)}(\varphi)$ de φ T-159

On peut écrire

$$\begin{aligned} \hat{P}(t=0) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \hat{P}_{AA}(\varphi) \\ &= \int_0^{2\pi} W^{(0)}(\varphi) \hat{P}_{AA}(\varphi) \end{aligned}$$

La distribution initiale $W^{(0)}(\varphi)$ de φ est donc

$$W^{(0)}(\varphi) = \frac{1}{2\pi}$$

Problèmes étudiés dans ce cours

① Après k détections d'atomes qui ont donné un atome en x_1 , un atome en x_2 , ..., un atome en x_k , peut-on calculer la nouvelle distribution de la phase relative φ ?

Nous verrons qu'on peut donner une expression analytique de $W(\varphi/x_k, \dots, x_2, x_1)$, ou ce qui revient au même de $W(\varphi/\varphi_k, \dots, \varphi_2, \varphi_1)$ où l'on a noté $\varphi_1 = 2\pi x_1, \varphi_2 = 2\pi x_2, \dots, \varphi_k = 2\pi x_k$.

Etat initial

Mélange statistique d'états cohérents relatifs avec une phase relative φ équipartie entre 0 et 2π

$$\begin{aligned} \hat{P}(t=0) &= \hat{P}^{(0)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \hat{P}_{A_1, A_2}(\varphi) \\ &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} d\theta_1 |A_1 e^{i\theta_1}, A_2 e^{i(\theta_1 - \varphi)}\rangle \langle A_1 e^{i\theta_1}, A_2 e^{i(\theta_1 - \varphi)}| \end{aligned}$$

Mélange statistique de produits d'états cohérents $|A_1 e^{i\theta_1}\rangle \otimes |A_2 e^{i(\theta_1 - \varphi)}\rangle$
 A_1 et A_2 fixes - φ et θ_1 , équiparties

- On supposera pour simplifier $A_1 = A_2 = A$

Procédure de calcul

Le calcul sera fait à partir d'un état initial produit de 2 états cohérents, ce qui permet d'obtenir des expressions analytiques pour les diverses probabilités

Ces probabilités seront ensuite moyennées sur θ_1 et φ

② Après k détections qui ont donné un atome en x_1, \dots un atome en x_k , T-160
 peut-on calculer la probabilité de trouver un atome en x_{k+1} lors de la prochaine détection?

Nous verrons la aussi qu'on peut donner une expression analytique de $P(x_{k+1}/x_k, \dots, x_2, x_1)$

③ Peut-on comprendre comment évolue $W(\varphi/\varphi_k, \dots, \varphi_1)$ au fur et à mesure que le nombre de détections augmente?

Comment varie l'abscisse du maximum de cette fonction?

Comment varie sa largeur?

On suivra ici l'approche de la référence 1

Pour une autre approche utilisant des états de phase relative plutôt que de états cohérents relatifs, voir référence 2

Rappel de résultats du cours V [T-161]

- Si le système part de $|X_i\rangle$ à $t=0$, et si des détections se produisent en $x_1 t_1$, puis en $x_2 t_2$
- (i) l'état du système après ces 2 détections est proportionnel à $|u(x_2 t_2, x_1 t_1)\rangle = \hat{\Psi}(x_2) e^{-i\hat{H}_{\text{eff}}(t_2-t_1)/\hbar} \hat{\Psi}(x_1) e^{-i\hat{H}_{\text{eff}} t_1/\hbar} |X_i\rangle$
- (ii) la probabilité d'une telle séquence est égale à $p(x_2 t_2, x_1 t_1) = P^2 \langle u(x_2 t_2, x_1 t_1) | u(x_2 t_2, x_1 t_1) \rangle$ (voir par exemple T-141)
- Ces résultats se généralisent aisément à k détections en $x_1 t_1, x_2 t_2, \dots, x_k t_k$
- On va voir que les expressions de $|u\rangle$ et p se simplifient considérablement si l'état initial $|X_i\rangle$ est un produit de 2 états cohérents $|A e^{i\theta_1}, A e^{i(\theta_1-\varphi)}\rangle$

Action de $e^{-i\hat{H}_{\text{eff}} t/\hbar}$ sur un produit d'états cohérents [T-162]

$$\hat{H}_{\text{eff}} = \hbar(\omega_0 - i\frac{\Gamma}{2})(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 + \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2) \quad (\text{voir T-137})$$

$$e^{-i(\omega_0 - i\frac{\Gamma}{2})\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1} |A e^{i\theta_1}\rangle = e^{-i(\omega_0 - i\frac{\Gamma}{2})\hat{N}_1} \sum_{N_1} e^{-A^2/2} \frac{A^{N_1} e^{iN_1\theta_1}}{\sqrt{N_1!}} |N_1\rangle$$

$$= e^{-A^2/2} \sum_{N_1} (A e^{-\Gamma t/2})^{N_1} \frac{1}{\sqrt{N_1!}} e^{iN_1(\theta_1 - \omega_0 t)} |N_1\rangle$$

$$\propto |A e^{-\Gamma t/2} e^{i(\theta_1 - \omega_0 t)}\rangle$$

- Un état cohérent reste donc un état cohérent dans une évolution régie par \hat{H}_{eff} avec les modifications suivantes
- L'amplitude A est réduite par un facteur $e^{-\Gamma t/2}$
 $A \rightarrow A_t = A e^{-\Gamma t/2}$
- la phase change de $\omega_0 t$
 $\theta_1 \rightarrow \theta_1 - \omega_0 t$
- $e^{-i\hat{H}_{\text{eff}} t/\hbar} |A e^{i\theta_1}, A e^{i(\theta_1-\varphi)}\rangle \propto |A_t e^{i(\theta_1 - \omega_0 t)}, A_t e^{i(\theta_1 - \omega_0 t - \varphi)}\rangle$
- La phase relative φ ne change pas

Action de $\hat{\Psi}(x)$ sur un produit d'états cohérents [T-163]

$$\hat{\Psi}(x) = \hat{a}_1 + \hat{a}_2 e^{2i\pi x} \quad (\text{voir T-136})$$

Comme $|A e^{i\theta_1}, A e^{i(\theta_1-\varphi)}\rangle$ est état propre de \hat{a}_1 (\hat{a}_2), de valeur propre $A e^{i\theta_1}$ [$A e^{i(\theta_1-\varphi)}$], on a

$$\hat{\Psi}(x) |A e^{i\theta_1}, A e^{i(\theta_1-\varphi)}\rangle = A e^{i\theta_1} [1 + e^{i(2\pi x - \varphi)}] |A e^{i\theta_1}, A e^{i(\theta_1-\varphi)}\rangle$$

- Un état cohérent ne change donc pas lors d'un processus de détection. L'action de $\hat{\Psi}(x)$ se réduit à une multiplication par un nombre
- 4 opérateurs agissent sur $|X_i\rangle = |A e^{i\theta_1}, A e^{i(\theta_1-\varphi)}\rangle$ dans l'expression de $|u(x_2 t_2, x_1 t_1)\rangle$ donnée dans (T-161)
- 2 opérateurs changent l'amplitude et la phase des états cohérents (exponentielles d'évolution)
- 2 opérateurs ne les changent pas [$\hat{\Psi}(x_1)$ et $\hat{\Psi}(x_2)$]

Calcul de $|u(x_2 t_2, x_1 t_1)\rangle$ [T-164]

- Effet de $e^{-i\hat{H}_{\text{eff}} t_1/\hbar}$
 $A \rightarrow A e^{-\Gamma t_1/2} \quad \theta_1 \rightarrow \theta_1 - \omega_0 t_1$
- Effet de $e^{-i\hat{H}_{\text{eff}}(t_2-t_1)/\hbar}$
 $A e^{-\Gamma t_1/2} \rightarrow (A e^{-\Gamma t_1/2}) e^{-\Gamma(t_2-t_1)/2} = A e^{-\Gamma t_2/2}$
 $\theta_1 - \omega_0 t_1 \rightarrow \theta_1 - \omega_0 t_1 - \omega_0(t_2-t_1) = \theta_1 - \omega_0 t_2$
- On en déduit que $|u(x_2 t_2, x_1 t_1)\rangle \propto |A_{t_2} e^{i(\theta_1 - \omega_0 t_2)}, A_{t_2} e^{i(\theta_1 - \omega_0 t_2 - \varphi)}\rangle$
- Ces résultats se généralisent aisément à k détections en $x_1 t_1, x_2 t_2, \dots, x_k t_k$
- Après ces k détections, l'état du système est toujours un produit d'états cohérents dont les amplitudes sont réduites par un facteur $e^{-\Gamma t_k/2}$ ne dépendant que de l'instant t_k de la dernière détection, toutes les phases ayant changé de $-\omega_0 t_k$
 $|A_{t_k} e^{i\tilde{\theta}_1}, A_{t_k} e^{i(\tilde{\theta}_1 - \varphi)}\rangle$
 $A_{t_k} = A e^{-\Gamma t_k/2} \quad \tilde{\theta}_1 = \theta_1 - \omega_0 t_k$

Structure de $p(x_2, t_2, x_1, t_1)$

T-165

Alors que l'évolution de l'état du système ne dépend que des exponentielles d'évolution, la probabilité de la suite de détections, c.-à-d le carré de la norme de $|u\rangle$, ne dépend de φ, x_1, x_2 que par l'intermédiaire des modules au carré des coefficients multiplicatifs apparaissant lors de l'action de $\hat{\psi}(x_1)$ et $\hat{\psi}(x_2)$

$$p(x_2, t_2, x_1, t_1) \propto |1 + e^{i(\varphi_1 - \varphi)}|^2 |1 + e^{i(\varphi_2 - \varphi)}|^2$$

$$\varphi_1 = 2\pi x_1, \quad \varphi_2 = 2\pi x_2$$

Le coefficient de proportionnalité est indépendant de $\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \theta_1$ (il ne dépend que de t_1 et t_2)

Généralisation

Si $|x_i\rangle$ est un produit d'états cohérents

$$p(x_k, t_k, \dots, x_1, t_1) \propto \prod_{i=1}^k |1 + e^{i(\varphi_i - \varphi)}|^2$$

Récapitulation

T-166

- Si l'on part de $|A e^{i\theta_1}, A e^{i(\theta_1 - \varphi)}\rangle$, on aboutit à $|A_{t_k} e^{i\tilde{\theta}_1}, A_{t_k} e^{i(\tilde{\theta}_1 - \varphi)}\rangle$ après k détections en $x_1, t_1, \dots, x_k, t_k$, et ce avec une probabilité proportionnelle à $\prod_{i=1}^k |1 + e^{i(\varphi_i - \varphi)}|^2$
- L'état initial est en fait un mélange statistique d'états $|A e^{i\theta_1}, A e^{i(\theta_1 - \varphi)}\rangle$ avec des phases θ_1 et φ équiparties
- Pour obtenir l'état final, il faut donc pondérer chaque opérateur densité final $|A_{t_k} e^{i\tilde{\theta}_1}, A_{t_k} e^{i(\tilde{\theta}_1 - \varphi)}\rangle \langle A_{t_k} e^{i\tilde{\theta}_1}, A_{t_k} e^{i(\tilde{\theta}_1 - \varphi)}|$ par la probabilité $\prod_{i=1}^k |1 + e^{i(\varphi_i - \varphi)}|^2$ d'arriver à un tel état final en partant d'un état initial caractérisé par θ_1 et φ , puis moyenner les opérateurs densité ainsi obtenus sur θ_1 et φ

Opérateur densité final après

T-167

k détections en x_1, x_2, \dots, x_k

$$\hat{P}_{\text{final}} \propto \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} d\theta_1 \prod_{i=1}^k |1 + e^{i(\varphi_i - \varphi)}|^2 \times$$

$$|A_{t_k} e^{i\tilde{\theta}_1}, A_{t_k} e^{i(\tilde{\theta}_1 - \varphi)}\rangle \langle A_{t_k} e^{i\tilde{\theta}_1}, A_{t_k} e^{i(\tilde{\theta}_1 - \varphi)}|$$

L'intégrale sur θ_1 , qui est aussi une intégrale sur $\tilde{\theta}_1$, fait apparaître l'état cohérent relatif $\hat{P}_{A_{t_k} A_{t_k}}(\varphi)$ [voir T-157] de sorte que \hat{P}_{final} peut s'écrire

$$\hat{P}_{\text{final}} \propto \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \prod_{i=1}^k |1 + e^{i(\varphi_i - \varphi)}|^2 \hat{P}_{A_{t_k} A_{t_k}}(\varphi)$$

On voit ainsi apparaître un mélange statistique d'états cohérents relatifs pour lesquels la phase relative φ n'est plus équipartie, mais répartie suivant une loi de probabilité $W(\varphi/\varphi_1, \dots, \varphi_k, \varphi)$ proportionnelle à

$$\prod_{i=1}^k |1 + e^{i(\varphi_i - \varphi)}|^2 = \prod_{i=1}^k 4 \cos^2 \frac{\varphi_i - \varphi}{2}$$

$$= \prod_{i=1}^k 2 [1 + \cos(\varphi_i - \varphi)]$$

Distribution $W(\varphi/\varphi_1, \dots, \varphi_k)$ de phase relative après k détections en $\varphi_1, \dots, \varphi_k$

T-168

Les calculs précédents montrent que, après k détections en $x_1 = \varphi_1/2\pi, \dots, x_k = \varphi_k/2\pi$, la phase relative φ , initialement équipartie, devient distribuée suivant la loi

$$W(\varphi/\varphi_1, \dots, \varphi_k) = N \prod_{i=1}^k [1 + \cos(\varphi_i - \varphi)]$$

où N est un coefficient de normalisation

$$N = \int_0^{2\pi} d\varphi \prod_{i=1}^k [1 + \cos(\varphi_i - \varphi)]$$

Probabilité $p(x_{k+1}/x_k, \dots, x_1)$ de détecter un atome en x_{k+1} , après en avoir détecté un en x_1, \dots un en x_k

Après la suite de détections en x_1, x_2, \dots, x_k , l'opérateur densité du système est l'opérateur \hat{P}_{final} écrit en T-167

La probabilité de détecter un atome en x_{k+1} est donc égale à

$$p(x_{k+1}/x_k, \dots, x_1) = \Gamma \text{Tr} \hat{P}_{\text{final}} \hat{\psi}^+(x_{k+1}) \hat{\psi}(x_{k+1})$$

Expression de $p(x_{k+1}/x_k \dots x_1)$ T-169

$$\hat{P}_{\text{final}} \propto \int_0^{2\pi} d\varphi W(\varphi/\varphi_k \dots \varphi_1) \hat{P}_{A_{t_k} A_{t_k}}(\varphi)$$

$$\text{Tr} \hat{P}_{A_{t_k} A_{t_k}}(\varphi) \hat{\Psi}^+(x_{k+1}) \hat{\Psi}(x_{k+1}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta,$$

$$\langle A_{t_k} e^{i\tilde{\theta}_1}, A_{t_k} e^{i(\tilde{\theta}_1 - \varphi)} | \hat{\Psi}^+(x_{k+1}) \hat{\Psi}(x_{k+1}) | A_{t_k} e^{i\tilde{\theta}_1}, A_{t_k} e^{i(\tilde{\theta}_1 - \varphi)} \rangle$$

$$= A_{t_k}^2 |1 + e^{i(\varphi_{k+1} - \varphi)}|^2 = 2A_{t_k}^2 [1 + \cos(\varphi_{k+1} - \varphi)]$$

On en déduit que

$$P(x_{k+1}/x_k \dots x_1) = P(\varphi_{k+1}/\varphi_k \dots \varphi_1)$$

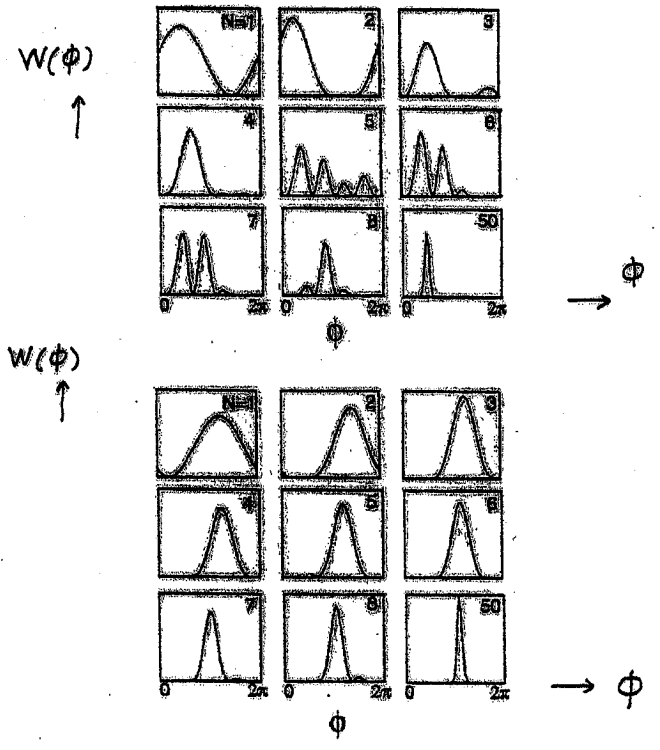
$$\propto \int_0^{2\pi} d\varphi W(\varphi/\varphi_k \dots \varphi_1) [1 + \cos(\varphi_{k+1} - \varphi)]$$

Possibilité, à partir des expressions ainsi obtenues pour $W(\varphi/\varphi_k \dots \varphi_1)$ et $P(\varphi_{k+1}/\varphi_k \dots \varphi_1)$ de faire

- soit des simulations numériques
- soit des études analytiques

Evolution de la distribution de phase

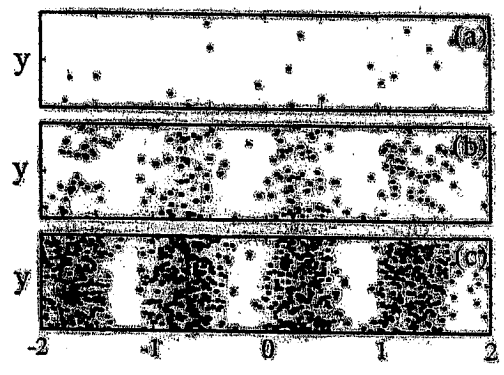
Figures extraites de la référence 1 T-171



2 simulations différentes montrant l'évolution de la distribution de phase avec le nombre N de détections

Evolution de la figure d'interférence

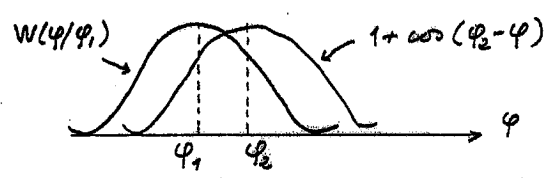
Simulation extraite de la réf. 1 T-171



- (a) 20 atomes détectés
- (b) 200 atomes détectés
- (c) 1000 atomes détectés

Evolution de la distribution de phase

- Après la 1^{ère} détection en $x_1 = \varphi_1/2\pi$, T-172
 $W(\varphi/\varphi_1) \propto 1 + \cos(\varphi_1 - \varphi)$ est maximum en $\varphi = \varphi_1$
- La probabilité d'avoir la 2^{ème} détection en φ_2 est proportionnelle au produit de convolution de $W(\varphi/\varphi_1)$ et $1 + \cos(\varphi_2 - \varphi)$



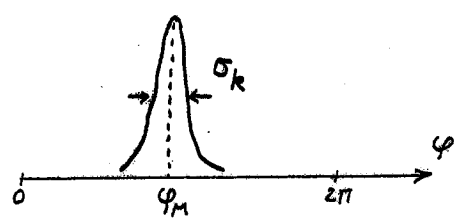
La probabilité d'avoir φ_2 proche de φ_1 est donc plus grande que celle d'avoir φ_2 loin

- La distribution W après les 2 premières détections

$$W(\varphi/\varphi_2, \varphi_1) \propto [1 + \cos(\varphi_2 - \varphi)][1 + \cos(\varphi_1 - \varphi)]$$

aura donc une probabilité élevée d'être le produit de 2 fonctions ayant leur maxima proches l'un de l'autre, et donc d'être plus étroite que $W(\varphi/\varphi_1)$

Après un certain nombre de détections, de l'ordre d'une dizaine, on s'attend T-173 donc à ce que $W(\varphi/\varphi_k \dots \varphi_1)$ soit une fonction relativement étroite, centrée autour d'une valeur φ_M , de largeur σ_k petite devant l'intervalle, 2π , de variation de φ . C'est ce que confirment d'ailleurs les simulations numériques (voir T-170).



Comment va évoluer W au cours des détections suivantes ?
 La probabilité d'obtenir φ_{k+1} lors de la prochaine détection va être le produit de convolution de $W(\varphi/\varphi_k \dots \varphi_1)$ par $1 + \cos(\varphi_{k+1} - \varphi)$. Comme la largeur σ_k de W est très petite devant celle de $1 + \cos(\varphi_{k+1} - \varphi)$, on a

$$P(\varphi_{k+1}/\varphi_k \dots \varphi_1) \propto 1 + \cos(\varphi_{k+1} - \varphi_M)$$

Supposons qu'on ait trouvé φ_{k+1} T-174
 lors de la prochaine détection

En approximant $W(\varphi/\varphi_k \dots \varphi_1)$ par $\exp[-(\varphi - \varphi_M)^2/\sigma^2]$, on peut écrire

$$W(\varphi/\varphi_{k+1}, \varphi_k \dots \varphi_1) \propto e^{-[\varphi - \varphi_M]^2/\sigma_k^2} [1 + \cos(\varphi_{k+1} - \varphi)]$$

 Comme la largeur de $[1 + \cos(\varphi_{k+1} - \varphi)]$ est grande devant σ_k , on peut développer $[1 + \cos(\varphi_{k+1} - \varphi)]$ au voisinage de $\varphi = \varphi_M$ où la 1^{ère} fonction est non nulle et obtenir ainsi

$$W(\varphi/\varphi_{k+1}, \varphi_k \dots \varphi_1) \propto e^{-[\varphi - \varphi_M]^2/\sigma_k^2} \times [1 + \cos(\varphi_{k+1} - \varphi_M) + (\varphi - \varphi_M) \sin(\varphi_{k+1} - \varphi_M) - \frac{1}{2}(\varphi - \varphi_M)^2 \cos(\varphi_{k+1} - \varphi_M) + \dots]$$

 Développons aussi $e^{-[\varphi - \varphi_M]^2/\sigma^2}$. Il vient

$$W(\varphi/\varphi_{k+1}, \varphi_k \dots \varphi_1) \propto 1 + \cos(\varphi_{k+1} - \varphi_M) + (\varphi - \varphi_M) \sin(\varphi_{k+1} - \varphi_M) - (\varphi - \varphi_M)^2 \left[\frac{1 + \cos(\varphi_{k+1} - \varphi_M)}{\sigma_k^2} + \frac{1}{2} \cos(\varphi_{k+1} - \varphi_M) \right]$$

Déplacement du centre de la nouvelle distribution $W(\varphi/\varphi_{k+1}, \varphi_k \dots \varphi_1)$ T-175

L'abscisse du nouveau maximum est donnée par $\frac{d}{d\varphi} W(\varphi/\varphi_{k+1}, \varphi_k \dots \varphi_1) = 0$
 On obtient (à partir de T-174)

$$\varphi - \varphi_M = \frac{\frac{1}{2} \sin(\varphi_{k+1} - \varphi_M)}{\frac{1 + \cos(\varphi_{k+1} - \varphi_M)}{\sigma_k^2} + \frac{1}{2} \cos(\varphi_{k+1} - \varphi_M)}$$

$$\approx \frac{\sigma_k^2}{2} \frac{\sin(\varphi_{k+1} - \varphi_M)}{1 + \cos(\varphi_{k+1} - \varphi_M)} \quad \text{car } \sigma_k^2 \ll 1$$

Le déplacement du maximum de W est donc proportionnel à σ_k^2
 Au fur et à mesure que σ_k^2 décroît, le déplacement de W diminue
 Comme $P(\varphi_{k+1}/\varphi_k \dots \varphi_1) \propto 1 + \cos(\varphi_{k+1} - \varphi_M)$ (voir T-173), $\varphi_{k+1} - \varphi_M$ a une probabilité élevée d'être petit et $\sin(\varphi_{k+1} - \varphi_M)$ a donc le même signe que $\varphi_{k+1} - \varphi_M$. Donc, le centre de W se déplace vers la valeur trouvée pour φ_{k+1}

Largeur moyenne de la nouvelle distribution $W(\varphi/\varphi_{k+1}, \varphi_k \dots \varphi_1)$ T-176

Multiplications les divers termes de l'expression de $W(\varphi/\varphi_{k+1}, \varphi_k \dots \varphi_1)$ donnée à la fin de (T-174) par la probabilité $1 + \cos(\varphi_{k+1} - \varphi_M)$ de trouver φ_{k+1} et intégrons sur φ_{k+1} . On obtient

$$\overline{W(\varphi/\varphi_{k+1}, \varphi_k \dots \varphi_1)} \propto 1 + \frac{1}{2} + (\varphi - \varphi_M)^2 \left[\frac{1 + \frac{1}{2}}{\sigma_k^2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \right]$$

$$= \frac{3}{2} - (\varphi - \varphi_M)^2 \frac{3}{2} \left[\frac{1}{\sigma_k^2} + \frac{1}{6} \right]$$

$$= \frac{3}{2} \left[1 - (\varphi - \varphi_M)^2 \left[\frac{1}{\sigma_k^2} + \frac{1}{6} \right] \right] \propto e^{-\frac{(\varphi - \varphi_M)^2}{\sigma_{k+1}^2}}$$

 avec $\frac{1}{\sigma_{k+1}^2} = \frac{1}{\sigma_k^2} + \frac{1}{6}$
 On a donc $\sigma_{k+1} < \sigma_k$
 La distribution W s'affine donc en moyenne après chaque nouvelle détection

Comportement asymptotique de la largeur de $W(\varphi/\varphi_k \dots \varphi_1)$ quand $k \rightarrow \infty$ T.177

$$\frac{1}{\sigma_{k+1}^2} = \frac{1}{\sigma_k^2} + \frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{\sigma_{k+2}^2} = \frac{1}{\sigma_{k+1}^2} + \frac{1}{6} \dots$$

$$\frac{1}{\sigma_{k+N}^2} = \frac{1}{\sigma_k^2} + \frac{N}{6} \approx \frac{N}{6} \text{ quand } N \gg \frac{1}{\sigma_k^2}$$

Au bout d'un nombre N suffisamment grand de détentions, la largeur de W décroît donc comme $\frac{1}{\sqrt{N}}$

La distribution de phase relative s'affine donc de plus en plus, en $\frac{1}{\sqrt{N}}$, quand le nombre N de détentions croît

Après chaque détention, le centre de W se déplace d'une quantité proportionnelle à $\frac{1}{N}$ dans le sens de la nouvelle valeur trouvée

Brouillage de la phase relative φ entre 2 condensats dû aux interactions

Problème étudié (Refs 2 à 5) T.178

- 2 condensats bien séparés, dans 2 pièges différents 1 et 2
On suppose $\bar{N}_1 = \bar{N}_2 = \bar{N}$

- A $t=0$, on suppose qu'il y a une phase relative φ bien définie entre les 2 condensats.

Ils sont décrits par un état cohérent relatif $\hat{P}_{AA}(\varphi)$. Mélange statistique de produits d'états cohérents

$$|A e^{i\theta_1}, A e^{i(\theta_1 - \varphi)}\rangle$$

avec $A = \sqrt{\bar{N}}$ et φ fixés, θ , équipartie

- Les interactions entre atomes à l'intérieur de chaque condensat sont décrites par une théorie de champ moyen

On néglige les interactions entre atomes du condensat 1 et atomes du condensat 2

Grandeur physique étudiée T.179

$G^{(1)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, t)$: Fonction de corrélation d'ordre 1 entre 2 points: \vec{r}_1 situé dans le condensat 1, \vec{r}_2 dans le condensat 2

$$G^{(1)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, t) = \text{Tr} \{ \hat{\rho}(t) \hat{\psi}^+(\vec{r}_1) \hat{\psi}(\vec{r}_2) \}$$

$\hat{\rho}(t)$: Opérateur densité du système à l'instant t , parti à l'instant $t=0$ de $\hat{P}_{AA}(\varphi)$

$$\hat{\psi}(\vec{r}) = \psi_1(\vec{r}) \hat{a}_{\psi_1} + \psi_2(\vec{r}) \hat{a}_{\psi_2}$$

$$\hat{\psi}^+(\vec{r}) = \psi_1^*(\vec{r}) \hat{a}_{\psi_1}^+ + \psi_2^*(\vec{r}) \hat{a}_{\psi_2}^+$$

$\psi_1(\vec{r}) (\psi_2(\vec{r}))$: Fonction d'onde décrivant l'état dans lequel sont condensés les atomes du condensat 1 (2). Solution de l'équation de Gross-Pitaevskii correspondant à \bar{N} atomes. (On néglige les variations de ψ_1 et ψ_2 quand N varie de $\sqrt{\bar{N}}$ autour de \bar{N} . Par contre, on tient compte des variations de $E(N)$).

Expression de $G^{(1)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, t)$ T.180

Comme $\psi_1(\vec{r}_2) = \psi_2(\vec{r}_1) = 0$, on a

$$G^{(1)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, t) = \psi_1^*(\vec{r}_1) \psi_2(\vec{r}_2) \text{Tr} \{ \hat{\rho}(t) \hat{a}_{\psi_1}^+ \hat{a}_{\psi_2} \}$$

Valeur de $G^{(1)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, 0)$

$$\text{Tr} \{ \hat{\rho}(0) \hat{a}_{\psi_1}^+ \hat{a}_{\psi_2} \} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta$$

$$\langle A e^{i\theta_1}, A e^{i(\theta_1 - \varphi)} | \hat{a}_{\psi_1}^+ \hat{a}_{\psi_2} | A e^{i\theta_1}, A e^{i(\theta_1 - \varphi)} \rangle$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta, A e^{i(\theta_1 - \varphi)} A e^{-i\theta_1} = A^2 e^{-i\varphi}$$

Pour simplifier, on va supposer $\varphi = 0$

$$G^{(1)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, 0) = A^2 \psi_1^*(\vec{r}_1) \psi_2(\vec{r}_2) = \bar{N} \psi_1^*(\vec{r}_1) \psi_2(\vec{r}_2)$$

Il y a donc une cohérence spatiale non nulle entre les 2 condensats à l'instant initial $t=0$

Comment cette cohérence spatiale va-t-elle évoluer au cours du temps?

Evolution en l'absence d'interactions

$$\hat{\rho}(t) = e^{-i\hat{H}t/\hbar} \hat{\rho}(0) e^{i\hat{H}t/\hbar} \quad \text{T-181}$$

\hat{H} : Hamiltonien en l'absence d'interactions

$$\hat{H} = \hat{H}_1 + \hat{H}_2 = E_0 (\hat{N}_1 + \hat{N}_2)$$

E_0 : Energie de l'état fondamental de l'hamiltonien à 1 particule (E_0 est identique pour les 2 condensats).

$$G^{(1)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, t) = \psi_1^*(\vec{r}_1) \psi_2(\vec{r}_2) \times \text{Tr} \{ e^{-i\hat{H}t/\hbar} \hat{\rho}(0) e^{i\hat{H}t/\hbar} \hat{a}_{\psi_1}^+ \hat{a}_{\psi_2} \}$$

$$= \text{Tr} \{ \hat{\rho}(0) e^{i\hat{H}t/\hbar} \hat{a}_{\psi_1}^+ e^{-i\hat{H}t/\hbar} e^{i\hat{H}t/\hbar} \hat{a}_{\psi_2} e^{-i\hat{H}t/\hbar} \}$$

$$= \hat{a}_{\psi_1}^+ e^{iE_0 t/\hbar} \hat{a}_{\psi_2} e^{-iE_0 t/\hbar}$$

$$G^{(1)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, t) = \psi_1^*(\vec{r}_1) \psi_2(\vec{r}_2) \text{Tr} \{ \hat{\rho}(0) \hat{a}_{\psi_1}^+ \hat{a}_{\psi_2} \}$$

$$= \bar{N} \psi_1^*(\vec{r}_1) \psi_2(\vec{r}_2)$$

En l'absence d'interactions, $G^{(1)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, t)$ n'évolue donc pas et la phase relative ne se brouille pas

Discussion qualitative du brouillage

Les seuls éléments de matrice non nuls de \hat{a}_{ψ_2} sont entre $|N_2\rangle$ et $\langle N_2-1|$

Les fréquences de Bohr apparaissant dans l'évolution de $\hat{a}_{\psi_2}(t)$ sont donc toutes les fréquences $[E(N_2) - E(N_2-1)]/\hbar$, quand N_2 varie dans un intervalle de largeur \sqrt{N} autour de \bar{N} . Comme $E(N)$ n'est plus une fonction linéaire de N , ces fréquences vont être légèrement différentes les unes des autres et s'étendre sur un intervalle de largeur $\Delta\omega$

Au bout d'un temps $1/\Delta\omega$, les battements entre ces diverses fréquences vont amortir $G^{(1)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, t)$

Par ailleurs, comme N est discret, les différentes fréquences vont être séparées par des intervalles $\delta\omega$ à peu près égaux et il y aura donc des récurrences au bout d'un temps $1/\delta\omega$

Evolution en présence d'interactions

On a toujours T-182

$$\hat{\rho}(t) = e^{-i\hat{H}t/\hbar} \hat{\rho}(0) e^{i\hat{H}t/\hbar}$$

$$\hat{H} = \hat{H}_1 + \hat{H}_2$$

$$G^{(1)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, t) = \psi_1^*(\vec{r}_1) \psi_2(\vec{r}_2) \times \text{Tr} \{ \hat{\rho}(0) \hat{a}_{\psi_1}^+(t) \hat{a}_{\psi_2}(t) \}$$

$$\hat{a}_{\psi_1}^+(t) = e^{i\hat{H}_1 t/\hbar} \hat{a}_{\psi_1}^+ e^{-i\hat{H}_1 t/\hbar}$$

$$\hat{a}_{\psi_2}(t) = e^{i\hat{H}_2 t/\hbar} \hat{a}_{\psi_2} e^{-i\hat{H}_2 t/\hbar}$$

Mais maintenant l'énergie d'un état $|N_1\rangle$ du condensat 1 n'est plus égale à $N_1 E_0$. A cause des interactions, c'est une fonction $E(N_1)$ qui n'est plus linéaire en N_1 , mais contient des termes quadratiques

On n'a donc plus une seule fréquence d'évolution dans la dépendance temporelle de $\hat{a}_{\psi_1}^+(t)$ et $\hat{a}_{\psi_2}(t)$

Etude quantitative

T-184

Expression de $E_1(N)$ et $E_2(N)$

$$E_1(N) = E_1(\bar{N}) + \frac{dE_1(N)}{dN} \Big|_{N=\bar{N}} (N-\bar{N}) + \frac{1}{2} \frac{d^2 E_1(N)}{dN^2} \Big|_{N=\bar{N}} (N-\bar{N})^2$$

$$\mu_1(\bar{N}) = \mu, \quad \frac{1}{2} \mu_1'(\bar{N}) = \frac{1}{2} \mu'$$

Expression analogue pour $E_2(N)$

On suppose $E_1(\bar{N}) = E_2(\bar{N}) = \bar{E}$

$$\mu_1 = \mu_2 = \mu, \quad \mu_1' = \mu_2' = \mu'$$

$$E_1(N) = \bar{E} + \mu(N-\bar{N}) + \frac{1}{2} \mu'(N-\bar{N})^2$$

$$E_2(N) = \bar{E} + \mu(N-\bar{N}) + \frac{1}{2} \mu'(N-\bar{N})^2$$

Calcul de $\hat{a}_{\psi_1}^+(t) = e^{i\hat{H}_1 t/\hbar} \hat{a}_{\psi_1}^+ e^{-i\hat{H}_1 t/\hbar}$

Les seuls éléments de matrice non nuls de $\hat{a}_{\psi_1}^+$ sont entre $|N\rangle$ et $\langle N+1|$

$$\langle N+1 | \hat{a}_{\psi_1}^+(t) | N \rangle = e^{i[E(N+1) - E(N)]t/\hbar} \sqrt{N+1}$$

$$= e^{i\mu t/\hbar} e^{\frac{i}{2} \mu' [(N+1-\bar{N})^2 - (N-\bar{N})^2] t/\hbar} \sqrt{N+1}$$

$$= e^{i[\mu - (\bar{N} - \frac{1}{2})\mu']t/\hbar} e^{i\mu' N t/\hbar} \sqrt{N+1}$$

$$= e^{i[\mu - (\bar{N} - \frac{1}{2})\mu']t/\hbar} \langle N+1 | \hat{a}_{\psi_1}^+ e^{i\mu' \hat{N} t/\hbar} | N \rangle$$

On en déduit

T-185

$$\hat{a}_{\psi_1}^+(t) = e^{i[\mu - (\bar{N} - \frac{1}{2})\mu']t/\hbar} \hat{a}_{\psi_1}^+ e^{i\mu' \hat{N}_1 t/\hbar}$$

Un calcul analogue donne

$$\hat{a}_{\psi_2}(t) = e^{-i[\mu - (\bar{N} - \frac{1}{2})\mu']t/\hbar} e^{-i\mu' \hat{N}_2 t/\hbar} \hat{a}_{\psi_2}$$

de sorte que

$$G^{(1)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, t) = \psi_1^*(\vec{r}_1) \psi_2(\vec{r}_2) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta$$

$$\langle A e^{i\theta_1}, A e^{i\theta_1} | \hat{a}_{\psi_1}^+ e^{i\mu' \hat{N}_1 t/\hbar} e^{-i\mu' \hat{N}_2 t/\hbar} \hat{a}_{\psi_2} | A e^{i\theta_1}, A e^{i\theta_1} \rangle$$

$$= \psi_1^*(\vec{r}_1) \psi_2(\vec{r}_2) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \langle A e^{i\theta_1} | \hat{a}_{\psi_1}^+ e^{i\mu' \hat{N}_1 t/\hbar} | A e^{i\theta_1} \rangle \times$$

$$\langle A e^{i\theta_1} | e^{-i\mu' \hat{N}_2 t/\hbar} \hat{a}_{\psi_2} | A e^{i\theta_1} \rangle$$

Comme $|A e^{i\theta_1}\rangle$ est ket propre de \hat{a}_{ψ_2}
 et que $\langle A e^{i\theta_1}|$ est bra propre de $\hat{a}_{\psi_1}^+$, on a

$$G^{(1)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, t) = \psi_1^*(\vec{r}_1) \psi_2(\vec{r}_2) A^2 \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta$$

$$\langle A e^{i\theta_1} | e^{i\mu' \hat{N}_1 t/\hbar} | A e^{i\theta_1} \rangle \langle A e^{i\theta_1} | e^{-i\mu' \hat{N}_2 t/\hbar} | A e^{i\theta_1} \rangle$$

Calcul de $\langle A e^{i\theta_1} | e^{i\mu' \hat{N}_1 t/\hbar} | A e^{i\theta_1} \rangle$

T-186

$$|A e^{i\theta_1}\rangle = e^{-A^2/2} \sum_{N_1=0}^{\infty} \frac{A^{N_1}}{\sqrt{N_1!}} e^{iN_1\theta_1} |N_1\rangle$$

$$e^{i\mu' \hat{N}_1 t/\hbar} |A e^{i\theta_1}\rangle = e^{-A^2/2} \sum_{N_1=0}^{\infty} \frac{A^{N_1}}{\sqrt{N_1!}} e^{iN_1(\theta_1 + \frac{\mu' t}{\hbar})} |N_1\rangle$$

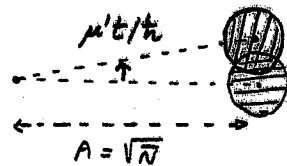
$$= |A e^{i(\theta_1 + \mu' t/\hbar)}\rangle$$

$$\langle A e^{i\theta_1} | e^{i\mu' \hat{N}_1 t/\hbar} | A e^{i\theta_1} \rangle = \langle A e^{i\theta_1} | A e^{i(\theta_1 + \mu' t/\hbar)} \rangle$$

On a de même

$$\langle A e^{i\theta_1} | e^{-i\mu' \hat{N}_2 t/\hbar} | A e^{i\theta_1} \rangle = \langle A e^{i\theta_1} | A e^{i(\theta_1 - \mu' t/\hbar)} \rangle$$

On voit ainsi apparaître le produit scalaire de 2 états cohérents $|\alpha\rangle$ et $|\beta\rangle$ où α et β ont même module $|\alpha| = |\beta| = A = \sqrt{\bar{N}}$ et se déduisent l'un de l'autre par une rotation d'angle $\mu' t/\hbar$ ou $-\mu' t/\hbar$



Ces produits scalaires ne dépendent pas de θ_1 et sont complexes conjugués l'un de l'autre

Résultat final

T-187

$$G^{(1)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, t) = \bar{N} \psi_1^*(\vec{r}_1) \psi_2(\vec{r}_2) |\langle A | A e^{i\mu' t/\hbar} \rangle|^2$$

Or, on a pour le produit scalaire de 2 états cohérents $|\alpha\rangle$ et $|\beta\rangle$ le résultat

$$|\langle \alpha | \beta \rangle|^2 = e^{-|\alpha - \beta|^2}$$

Ce produit scalaire tend très vite vers 0 quand $|\alpha - \beta| > 1$

$$|A - A e^{i\mu' t/\hbar}| = 2A \left| \sin \frac{\mu' t}{2\hbar} \right|$$

Comme $A = \sqrt{\bar{N}} \gg 1$, on peut remplacer sur $\frac{\mu' t}{2\hbar}$ par $\frac{\mu' t}{2\hbar}$ pour les valeurs de t telles que le produit scalaire n'est pas nul

On en déduit

$$G^{(1)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, t) = \bar{N} \psi_1^*(\vec{r}_1) \psi_2(\vec{r}_2) e^{-A^2 \mu'^2 t^2 / \hbar^2}$$

$$= \bar{N} \psi_1^*(\vec{r}_1) \psi_2(\vec{r}_2) e^{-\bar{N} \mu'^2 t^2 / \hbar^2}$$

Temps de cohérence T_{coh}

T-188

$$G^{(1)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, t) = \bar{N} \psi_1^*(\vec{r}_1) \psi_2(\vec{r}_2) e^{-(t/T_{coh})^2}$$

$$T_{coh} = \frac{\hbar}{\mu' \sqrt{\bar{N}}}$$

La cohérence spatiale entre les 2 condensats s'amortit au bout d'un temps égal à T_{coh}

Dans le régime de Thomas-Fermi, on a (voir T-18) $\mu \propto N^{2/5}$, de sorte que $\mu' = \frac{d\mu}{dN} \Big|_{N=\bar{N}} = \frac{2}{5} \frac{\mu}{\bar{N}}$

$$T_{coh} = \frac{5}{2} \frac{\hbar \sqrt{\bar{N}}}{\mu}$$

T_{coh} est typiquement de l'ordre de 1 sec

Temps de récurance T_{rec}

$\langle A | A e^{i\mu' t/\hbar} \rangle$ redescend égal à 1 au bout d'un temps T_{rec} tel que $\frac{\mu' T_{rec}}{\hbar} = 2\pi$ (les 2 cercles de T-186 ont fait un tour complet)

$$T_{rec} = \frac{2\pi \hbar}{\mu'} = \frac{\hbar}{d\mu/dN} = \frac{5}{2} \frac{\hbar \bar{N}}{\mu} \gg T_{coh}$$

Références

- (1) J. Cirac, C. Gardiner, M. Naraschewski, P. Zoller
Phys. Rev. A 54, R 3714 (1996)
- (2) Y. Castin, J. Dalibard
Phys. Rev. A 55, 4330 (1996)
- (3) M. Lewenstein, L. You
Phys. Rev. Lett. 77, 3489 (1996)
- (4) E. Wright, D. Walls, J. Garrison
Phys. Rev. Lett. 77, 2158 (1996)
- (5) K. Mølmer, Phys. Rev. A 58, 558 (1998)

① Introduction T-189 - T-192

- But de ce cours
- Lien entre la longueur de cohérence et la distribution d'impulsion

② Méthodes optiques de mesure de la distribution de vitesse

T.193 - T.199

- Transitions à 1 photon
- Transitions à 2 photons
 - entre 1 état fondamental et 1 état métastable
 - entre 2 états fondamentaux de nombres quantiques internes différents
 - entre 2 états fondamentaux de même nombre quantique interne
- Premières expériences utilisant les résonances induites par le recul

③ Application à un condensat de Bose-Einstein T.200 - T.214

- Principe de l'expérience - Conditions de résonance
- Effet des interactions - Condensat homogène
- Effet des interactions - Condensat inhomogène - Approximations
- Distribution des vitesses des atomes d'un condensat à la limite de Thomas-Fermi
- Distribution des valeurs de la densité d'atomes
- Déplacement et élargissement du spectre Doppler dû aux interactions

④ Expérience de M.I.T. T.215 - T.219

- Exemple de spectre obtenu sur les atomes du condensat
- Etude par vélocimétrie Doppler de l'expansion balistique
- Etude de l'effet des interactions
- Etude de la largeur de la distribution d'impulsion en fonction de l'extension spatiale du condensat

⑤ Conclusion T-220

But de ce cours

T-189

- Décrire des expériences montrant que la longueur de cohérence d'un condensat est de l'ordre de l'extension spatiale de ce condensat - Voir Ref. 1
- Les théories de champ moyen prédisent que, pour $T \ll T_c$, tous les atomes sont condensés dans le même état quantique décrit par une fonction d'onde réelle $\psi(\vec{r})$, solution de l'équation de Gross-Pitaevskii. On a alors (voir T-37):

$$G^{(1)}(\vec{r}, \vec{r}') = N \psi(\vec{r}) \psi(\vec{r}')$$

$G^{(1)}(\vec{r}, \vec{r}')$ reste non nul pour \vec{r} et \vec{r}' séparés par une distance de l'ordre de la dimension du condensat.

- Peut-on vérifier expérimentalement une telle prédiction ?

Définition plus précise de la longueur de cohérence λ_c

T-190

- Dans un condensat inhomogène (atomes dans un piège), $G^{(1)}(\vec{r}, \vec{r}')$ dépend à la fois de \vec{r} et \vec{r}' , et non plus seulement de $\vec{r} - \vec{r}'$, comme c'est le cas pour un système homogène

Cohérence spatiale globale $G(\vec{a})$

$$G(\vec{a}) = \int d^3r G^{(1)}(\vec{r}, \vec{r} + \vec{a})$$

Somme de toutes les cohérences spatiales entre couples de points \vec{r} et $\vec{r} + \vec{a}$ séparés de \vec{a}

La longueur de cohérence λ_c peut être définie comme la longueur caractéristique de la décroissance de $G(\vec{a})$ quand $|\vec{a}|$ croît de 0 à $+\infty$

Lien entre $G(\vec{a})$ et la distribution d'impulsion $\mathcal{P}(\vec{p})$

T-191

- D'après (T-35)

$$G^{(1)}(\vec{r}, \vec{r} + \vec{a}) = N \langle \vec{r} + \vec{a} | \hat{\rho}^{(1)} | \vec{r} \rangle$$

$\hat{\rho}^{(1)}$: Opérateur densité à 1 particule

- Passons de la représentation $\{|\vec{r}\rangle\}$ à la représentation $\{|\vec{p}\rangle\}$

$$\langle \vec{r} | \vec{p} \rangle = \left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right)^{3/2} e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}/\hbar}$$

$$\langle \vec{r} + \vec{a} | \hat{\rho}^{(1)} | \vec{r} \rangle = \int d^3p \int d^3p'$$

$$\langle \vec{r} + \vec{a} | \vec{p} \rangle \langle \vec{p} | \hat{\rho}^{(1)} | \vec{p}' \rangle \langle \vec{p}' | \vec{r} \rangle = \left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right)^3 \int d^3p \int d^3p' e^{i\vec{p}\cdot\vec{a}/\hbar} e^{i(\vec{p}-\vec{p}')\cdot\vec{r}/\hbar} \langle \vec{p} | \hat{\rho}^{(1)} | \vec{p}' \rangle$$

$$G(\vec{a}) = \int d^3r G^{(1)}(\vec{r}, \vec{r} + \vec{a}) = \frac{N}{(2\pi\hbar)^3} \int d^3p \int d^3p' e^{i\vec{p}\cdot\vec{a}/\hbar} \langle \vec{p} | \hat{\rho}^{(1)} | \vec{p}' \rangle \int d^3r e^{i(\vec{p}-\vec{p}')\cdot\vec{r}/\hbar}$$

$$G(\vec{a}) = \int d^3p e^{i\vec{p}\cdot\vec{a}/\hbar} \underbrace{N \langle \vec{p} | \hat{\rho}^{(1)} | \vec{p} \rangle}_{\mathcal{P}(\vec{p})}$$

$G(\vec{a})$ est donc la transformée de Fourier de $\mathcal{P}(\vec{p})$

Principe de l'expérience

T-192

- Mesurer la distribution d'impulsion $\mathcal{P}(p)$ (ou la distribution de vitesse) et en particulier la largeur Δp de $\mathcal{P}(p)$
- Comme $G(a)$ est la T.F. de $\mathcal{P}(p)$, la largeur de $G(a)$, c-à-d la longueur de cohérence λ_c , est de l'ordre de $\hbar/\Delta p$
- On compare alors $\hbar/\Delta p$ à l'extension spatiale du condensat

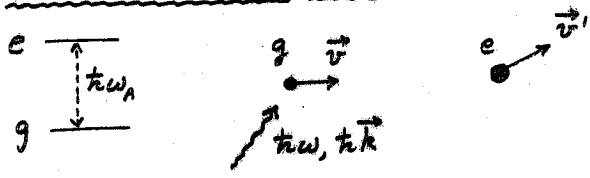
Peut-on mesurer $\mathcal{P}(p)$ par des méthodes de temps de vol ?

A cause des interactions répulsives, les atomes sont accélérés au cours de la phase d'expansion balistique et leurs vitesses changent.

Les méthodes de temps de vol ne donnent donc pas accès à la distribution des vitesses dans le condensat

Méthodes optiques de mesure de $P(\vec{P})$ basées sur l'effet Doppler T-193

Transitions à un photon



$$\begin{cases} M\vec{v} + \hbar\vec{k} = M\vec{v}' \\ E_g + \frac{1}{2}Mv^2 + \hbar\omega = E_e + \frac{1}{2}Mv'^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v^2 + \frac{\hbar^2 k^2}{M^2} + 2\frac{\hbar\vec{k} \cdot \vec{v}}{M} = v'^2 \\ \hbar\omega = \hbar\omega_A + \frac{1}{2}M(v'^2 - v^2) \end{cases}$$

$$\omega = \omega_A + \underbrace{\frac{\hbar k^2}{2M}}_{\text{Recul}} + \underbrace{\frac{\hbar \cdot \vec{v}}{M}}_{\text{Effet Doppler}}$$

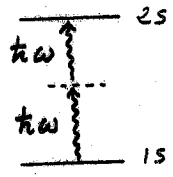
$$\Delta v \approx 1 \text{ mm/s} \rightarrow \frac{\Delta\omega}{2\pi} \approx 3 \text{ KHz}$$

La largeur naturelle de l'état excité est en général très supérieure à cette valeur et l'effet Doppler est trop petit pour être détecté

Transitions à 2 photons entre 2 états de très longue durée de vie T-194

① Absorption de 2 photons entre 1 état fondamental et 1 état métastable

Transition 1s ↔ 2s de l'atome d'Hydrogène

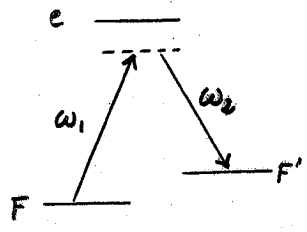


L'état 2s a une très longue durée de vie et donc une très faible largeur naturelle.

Les 2 photons $\hbar\omega = (E_{2s} - E_{1s})/2$ se propagent dans le même sens. La condition de résonance est alors sensible à l'effet Doppler

Méthode utilisée pour étudier la distribution des vitesses d'un condensat d'atomes d'Hydrogène (Réf. 2)

② Effet Raman stimulé entre 2 états fondamentaux de nombres quantiques internes différents T-195

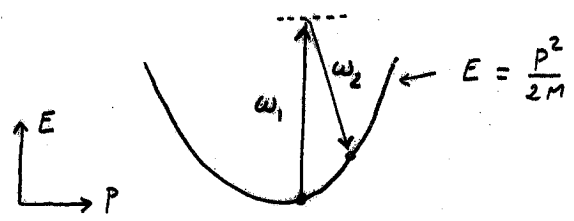


F et F' sont des états fondamentaux de très longue durée de vie

Transitions par effet Raman stimulé entre 2 niveaux hyperfins différents d'un atome alcalin avec des photons se propageant dans des sens opposés (pour avoir une condition de résonance sensible à l'effet Doppler)

- Méthode utilisée pour
- mesurer des vitesses
 - exciter dans F' un groupe d'atomes de vitesses bien définies (Voir Réf. 3)

③ Effet Raman stimulé entre 2 états fondamentaux de mêmes nombres quantiques internes (Refs 4 à 7) T-196



L'absorption d'un photon ω_1 suivie de l'émission stimulée d'un photon ω_2 relie 2 états fondamentaux ayant le même nombre quantique interne mais des nombres quantiques externes (impulsion) différents

- Autres dénominations pour un tel effet
 - Effet Compton stimulé
 - Résonance induite par le recul
 - Effet Rayleigh stimulé
 - Effet Bragg

VII-4

Condition de résonance pour les résonances induites par le recul

T-197

$$\begin{cases} M\vec{v} + \hbar\vec{k}_1 - \hbar\vec{k}_2 = M\vec{v}' \\ \frac{1}{2}Mv^2 + \hbar\omega_1 - \hbar\omega_2 = \frac{1}{2}Mv'^2 \end{cases}$$

$$\omega_1 - \omega_2 = \delta\omega \quad \vec{k}_1 - \vec{k}_2 = \vec{K}$$

$$\delta\omega = \frac{\hbar K^2}{2M} + \vec{K} \cdot \vec{v}$$

- Pour avoir la plus grande sensibilité à l'effet Doppler, on a intérêt à prendre \vec{k}_1 et \vec{k}_2 de sens opposés.

On a alors $\vec{K} \approx 2\vec{k}_1 = 2\vec{k}_2$

$$\delta\omega = 4 \frac{\hbar k^2}{2M} + 2\vec{k} \cdot \vec{v}$$

On mesure la vitesse parallèle à \vec{k}

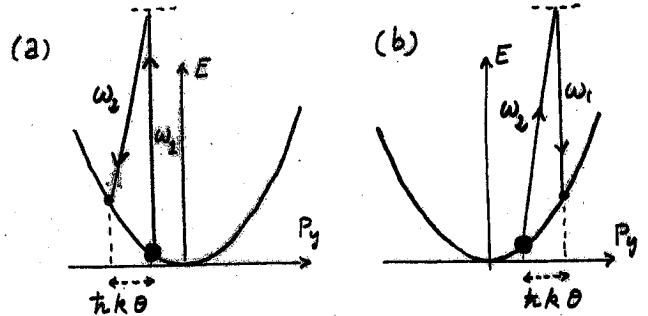
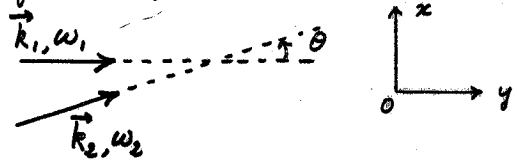
- Si \vec{k}_1 et \vec{k}_2 font un petit angle θ , $|\vec{K}| \approx 2k \sin \frac{\theta}{2} \approx k\theta$ et \vec{K} est à peu près perpendiculaire à \vec{k}

On mesure la vitesse perpendiculaire à \vec{k}

Mesure de la distribution des vitesses des atomes d'une mélasse optique

T-198

(Refs. 5 à 7)



Plus $|p_y|$ est petit, plus l'état est peuplé

Le faisceau ω_2 est amplifié si $\omega_2 < \omega_1$ (Fig. a), absorbé si $\omega_2 > \omega_1$ (Fig. b)

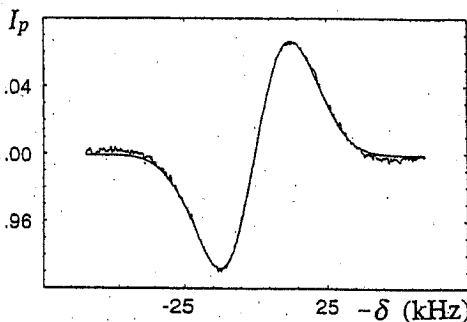
Le signal est proportionnel à $P(v) - P(v - \delta v)$
 ou $\delta v = \frac{\delta p_y}{M} \approx \frac{\hbar k \theta}{M}$

Exemple de signal observé sur la transmission du faisceau ω_2

T-199

Si la largeur Doppler de la mélasse optique est grande devant $\hbar k \theta / M$ (θ assez petit), le signal, proportionnel à $P(v) - P(v - \delta v)$ est proportionnel à la dérivée d'une Gaussienne

Figure extraite de la Ref. 7



Première mesure de velocimétrie d'une mélasse par résonances induites par le recul

Mesure optique de $P(p)$ pour un condensat

T-200

Principe (voir Ref. 1)

- Excitation par 2 faisceaux laser \vec{k}_1, ω_1 et \vec{k}_2, ω_2 avec \vec{k}_1 et \vec{k}_2 de sens opposés
 ω_1 et ω_2 sont loins de toute résonance optique - Emission spontanée négligeable

- On balaye $\delta\omega = \omega_1 - \omega_2$

- Pour chaque valeur de $\delta\omega$, les atomes de vitesse \vec{v} telle que

$$\delta\omega = \frac{\hbar K^2}{2M} + \vec{K} \cdot \vec{v}$$

où $\vec{K} = \vec{k}_1 - \vec{k}_2$, subissent une transition par effet Raman stimulé qui ne change pas leur état interne mais leur transfère une impulsion $\hbar\vec{K}$ qui leur permet de s'échapper du condensat

- L'étude de la variation avec $\delta\omega$ du nombre d'atomes qui s'échappent du condensat permet de déterminer la distribution des vitesses des atomes condensés (dans la direction de \vec{K})

Effet des interactions

T-201

- La condition de résonance $\delta\omega = \frac{\hbar k^2}{2M} + \vec{k} \cdot \vec{v}$ a été établie pour des atomes libres
- Il faudrait en toute rigueur étudier le spectre des excitations élémentaires du condensat et calculer la différence d'énergie des couples d'états reliés par la transition d'effet Raman stimulé

Un cas simple : Système homogène

- Pour un système homogène, la théorie de Bogolubov donne la relation de dispersion des excitations élémentaires (voir T-16)

$$\hbar\omega(k) = \sqrt{\frac{\hbar^2 k^2}{2M} \left(\frac{\hbar^2 k^2}{2M} + 2n_0 g \right)}$$

où n_0 est la densité d'atomes, $g = \frac{4\pi\hbar^2 a}{M}$ a étant la longueur de diffusion

- Le condensat correspond à $k=0$
- Après le transfert d'impulsion $\hbar\vec{k}$ par effet Raman stimulé, l'état atteint a une énergie $\hbar\omega(\vec{k})$

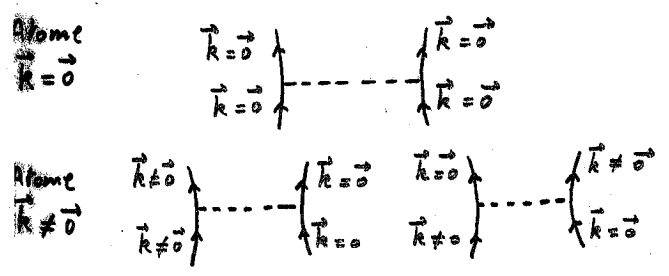
La condition $\frac{\hbar^2 k^2}{2M} \gg n_0 g$ est en général largement réalisée quand \vec{k} est un vecteur d'onde dans le domaine optique. On a alors

$$\hbar\omega(k) \approx \frac{\hbar^2 k^2}{2M} + n_0 g \quad \text{T-202}$$

La variation d'énergie d'un atome initialement immobile et gagnant une impulsion $\hbar\vec{k}$ n'est pas simplement l'énergie cinétique correspondante $\frac{\hbar^2 k^2}{2M}$

Son énergie d'interaction avec les autres atomes n'est pas la même suivant qu'il est condensé ($\vec{k}=\vec{0}$) ou qu'il a une impulsion $\vec{k} \neq \vec{0}$. Cette différence d'énergie d'interaction est égale à $n_0 g$ (si \vec{k} est suffisamment grand)

Origine de cette différence : Terme d'échange dans l'interaction



Cas d'un condensat inhomogène

T-203

- 2 modifications importantes par rapport au cas homogène
- ① L'impulsion des atomes condensés n'est plus nulle. L'extension spatiale finie du condensat entraîne une dispersion d'impulsion qui est précisément la quantité que l'on veut mesurer
- ② La densité d'atomes n'est plus constante. Elle varie avec \vec{r} : $n(\vec{r})$

Traitement approché

Chaque élément de volume d^3r du condensat contient $n(\vec{r})d^3r$ atomes. On considère le condensat comme homogène au voisinage de \vec{r} et on introduit une condition de résonance locale au point \vec{r} par l'équation

$$\delta\omega = \frac{\hbar k^2}{2M} + \frac{g n(\vec{r})}{\hbar} + \vec{k} \cdot \vec{v}$$

Prédictions du traitement approché

T-204

- Chaque élément d^3r donne un spectre Doppler correspondant à la distribution des valeurs de $\vec{k} \cdot \vec{v}$, décalé de $\frac{\hbar k^2}{2M} + \frac{g n(\vec{r})}{\hbar}$
- Par rapport à la fréquence $\hbar k^2/2M$, le spectre attendu $I(\delta\omega)$ (nombre d'atomes quittant le condensat en fonction de $\delta\omega$) est la convolution du spectre Doppler correspondant à la distribution de $\vec{k} \cdot \vec{v}$ par la courbe donnant la répartition des valeurs possibles du déplacement $g n/\hbar$

2 Problèmes à résoudre

- Distribution des valeurs de $\vec{k} \cdot \vec{v}$
- Distribution des valeurs de n

Pour un calcul plus rigoureux du signal

Voir les calculs en cours du "facteur de structure dynamique" dans l'équipe de Trento (S. Stringari, L. Pitaevskii)

VII-6

Distribution d'impulsion d'un condensat à la limite de Thomas-Fermi

T-205

Fonction d'onde du condensat

- Normalisation choisie $\int |\psi(\vec{r})|^2 d^3r = N$
 - Expression de $|\psi(\vec{r})|^2$ (voir T-12)
- $$|\psi(\vec{r})|^2 = \frac{1}{g} \left[\mu - \frac{1}{2} m (\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2) \right]$$
- $|\psi(\vec{r})|^2$ s'annule en $x = \pm x_0, y = \pm y_0, z = \pm z_0$
- $$\frac{1}{2} m \omega_x^2 x_0^2 = \mu = \frac{1}{2} m \omega_y^2 y_0^2 = \frac{1}{2} m \omega_z^2 z_0^2$$

- Densité au centre

$$|\psi(\vec{0})|^2 = n_0 = \frac{\mu}{g} \rightarrow \mu = g n_0$$

- On peut donc écrire $|\psi(\vec{r})|^2$ sous la forme

$$|\psi(\vec{r})|^2 = n_0 \left[1 - \left(\frac{x}{x_0}\right)^2 - \left(\frac{y}{y_0}\right)^2 - \left(\frac{z}{z_0}\right)^2 \right]$$

Paraboles inversées suivant Ox, Oy, Oz

- Fonction d'onde $\psi(\vec{r})$

Comme $\psi(\vec{r})$ est réelle

$$\psi(x, y, z) = \sqrt{n_0} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{x_0}\right)^2 - \left(\frac{y}{y_0}\right)^2 - \left(\frac{z}{z_0}\right)^2}$$

Distribution $\mathcal{P}(P_x)$ d'impulsion suivant Ox (on suppose $\vec{k} \parallel Ox$)

T-206

$$\mathcal{P}(P_x) = \iint dP_y dP_z \mathcal{P}(P_x, P_y, P_z)$$

$$\mathcal{P}(P_x, P_y, P_z) = |\tilde{\Psi}(P_x, P_y, P_z)|^2$$

$$\tilde{\Psi}(P_x, P_y, P_z) = \left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right)^{3/2} \iiint dx dy dz n_0 e^{-i(P_x x + P_y y + P_z z)/\hbar} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{x_0}\right)^2 - \left(\frac{y}{y_0}\right)^2 - \left(\frac{z}{z_0}\right)^2}$$

- Changement de variables

$$\frac{x}{x_0} = \xi \quad \frac{y}{y_0} = \eta \quad \frac{z}{z_0} = \zeta \quad \vec{\rho} = \{\xi, \eta, \zeta\}$$

$$\frac{P_x}{\hbar/x_0} = k_x \quad \frac{P_y}{\hbar/y_0} = k_y \quad \frac{P_z}{\hbar/z_0} = k_z \quad \vec{k} = \{k_x, k_y, k_z\}$$

- Expression de $\tilde{\Psi}$

$$\tilde{\Psi}(k_x, k_y, k_z) = \frac{\sqrt{n_0 x_0 y_0 z_0}}{(2\pi\hbar)^{3/2}} I$$

où I est donné par l'intégrale

$$I = \int_{\rho \leq 1} d^3\rho e^{-i\vec{k} \cdot \vec{\rho}} \sqrt{1 - \rho^2}$$

$$= 2\pi \int_0^1 d\rho \rho^2 \sqrt{1 - \rho^2} \int_0^\pi d\theta \sin\theta e^{-i k \rho \cos\theta}$$

Calcul de I

T-207

$$\int_0^\pi d\theta \sin\theta e^{-i k \rho \cos\theta} = \frac{e^{i k \rho} - e^{-i k \rho}}{i k \rho}$$

$$I = \frac{2\pi}{i k} \int_{-1}^{+1} d\rho \rho \sqrt{1 - \rho^2} e^{i k \rho}$$

Changement de variables $\rho = \cos\alpha$
+ Intégration par parties

$$I = \frac{2\pi}{i k} \int_0^\pi d\alpha \sin^2\alpha \cos\alpha e^{i k \cos\alpha}$$

$$= -\frac{\pi}{k^2} \int_{-\pi}^{+\pi} d\alpha \cos^2\alpha e^{i k \cos\alpha}$$

Pour des raisons de parité, seule la partie paire en α de $e^{i k \cos\alpha}$ intervient

$$\cos(k \cos\alpha) = J_0(k) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n J_{2n}(k) \cos 2n\alpha$$

J_n : Fonction de Bessel d'ordre n

Seul, le terme $n=1$ contribue à I

$$I = \frac{2\pi}{k^2} J_2(k) \int_{-\pi}^{+\pi} d\alpha \cos^2 2\alpha = \frac{\pi}{k^2} J_2(k)$$

Expression de $\mathcal{P}(P_x, P_y, P_z)$

T-208

$$\tilde{\Psi}(\vec{k}) \propto \frac{J_2(k)}{k^2}$$

$$|\tilde{\Psi}(\vec{k})|^2 \propto \left| \frac{J_2(k)}{k^2} \right|^2$$

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \frac{1}{\hbar^2} [P_x^2 x_0^2 + P_y^2 y_0^2 + P_z^2 z_0^2]$$

$$\mathcal{P}(P_x, P_y, P_z) \propto \left[\frac{J_2\left(\sqrt{\frac{P_x^2 x_0^2 + P_y^2 y_0^2 + P_z^2 z_0^2}{\hbar^2}}\right)}{\frac{P_x^2 x_0^2 + P_y^2 y_0^2 + P_z^2 z_0^2}{\hbar^2}} \right]^2$$

L'intégrale sur P_y et P_z n'est pas aisée

Expression approchée de $J_2(k)/k^2$

$$J_2(k) = \left(\frac{k}{2}\right)^2 \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!(r+2)!} \left(\frac{k}{2}\right)^{2r}$$

$$= \left(\frac{k}{2}\right)^2 \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{6} \frac{k^2}{4} + \dots \right]$$

$$= \frac{k^2}{8} \left[1 - \frac{k^2}{12} + \dots \right]$$

On peut donc écrire

$$\left[\frac{J_2(k)}{k^2} \right]^2 = \frac{1}{64} \left[1 - \frac{k^2}{12} + \dots \right]^2$$

$$\approx \frac{1}{64} \left[1 - \frac{k^2}{6} \right]$$

$$\approx \frac{1}{64} e^{-k^2/6}$$

Expression approchée de $\mathcal{P}(P_x, P_y, P_z)$ T-209

Pour des valeurs pas trop élevées de P_x, P_y, P_z , on peut donc écrire

$$\mathcal{P}(P_x, P_y, P_z) \propto e^{-k^2/6} = \exp\left\{-\frac{P_x^2}{6\hbar^2/x_0^2}\right\} \exp\left\{-\frac{P_y^2}{6\hbar^2/y_0^2}\right\} \exp\left\{-\frac{P_z^2}{6\hbar^2/z_0^2}\right\}$$

L'intégrale sur P_y et P_z est alors immédiate et on trouve

$$\mathcal{P}(P_x) \propto \exp\left\{-\frac{P_x^2}{6\hbar^2/x_0^2}\right\}$$

La valeur quadratique moyenne de P_x est égale, dans cette approximation, à

$$\Delta P_x = \sqrt{3} \frac{\hbar}{x_0} = 1.73 \frac{\hbar}{x_0}$$

Remarques

- ① Dans la référence 1, c'est $\mathcal{P}(P_x, P_y=0, P_z=0)$ qui est calculé au lieu de $\iint dP_y dP_z \mathcal{P}(P_x, P_y, P_z)$. On trouve alors

$$\mathcal{P}(P_x, P_y=0, P_z=0) \propto \left[\frac{J_2\left(\frac{P_x x_0}{\hbar}\right)}{\frac{P_x^2 x_0^2}{\hbar^2}} \right]^2$$

$$\Delta P_x = \sqrt{\frac{81}{8}} \frac{\hbar}{x_0} = 1.62 \frac{\hbar}{x_0}$$

Remarques (suite)

T-210

- ② Le traitement présenté ici s'intéresse à la partie centrale de $\mathcal{P}(P_x)$ qui a la forme d'une courbe en cloche se rapprochant d'une Gaussienne

L'ajustement des résultats expérimentaux étant fait avec une Gaussienne, une telle approche doit donner une valeur raisonnable de ΔP_x

- ③ La fonction d'onde à l'approximation de Thomas-Fermi a une pente verticale en $x=x_0$, ce qui conduit à une divergence de la variance ΔP_x^2 de P_x .

Même après un traitement plus précis de la zone $x \approx x_0$, on obtient des valeurs élevées de ΔP_x différentes de la $1/2$ largeur à $1/e$. L'approximation faite ici est donc plus proche de l'expérience

- ④ Le profil Doppler est proportionnel à $\iint dP_y dP_z \mathcal{P}(P_x, P_y, P_z)$ et non à $\mathcal{P}(P_x, P_y=0, P_z=0)$

Distribution $\mathcal{P}(n)$ des valeurs de n

T-211

$$n(\vec{r}) = n_0 \left[1 - \left(\frac{x}{x_0}\right)^2 - \left(\frac{y}{y_0}\right)^2 - \left(\frac{z}{z_0}\right)^2 \right]$$

Après le changement de variables $x, y, z \rightarrow \xi, \eta, \zeta$ $\vec{r} \rightarrow \vec{\rho}$

$$n(\vec{\rho}) = n_0 (1 - \rho^2)$$

Chaque valeur de ρ contribue au signal avec un poids proportionnel au nombre d'atomes situés à cette valeur de ρ

Distributions $\mathcal{P}(\rho)$ des poids des diverses valeurs de ρ

$$\mathcal{P}(\rho) d\rho = N 4\pi x_0 y_0 z_0 \rho^2 d\rho n(\rho) = 4\pi N n_0 x_0 y_0 z_0 \rho^2 \sqrt{1-\rho^2} d\rho$$

N : Constante de normalisation déterminée par $\int_0^1 \mathcal{P}(\rho) d\rho = 1$

$$N = \frac{15}{8\pi} \frac{1}{n_0 x_0 y_0 z_0}$$

On a donc

$$\mathcal{P}(\rho) = \frac{15}{2} \rho^2 (1-\rho^2)$$

Calcul de $\mathcal{P}(n)$

T-212

A chaque valeur de ρ est associée une valeur de n par

$$n = n_0 (1 - \rho^2)$$

$$\mathcal{P}(n) dn = \mathcal{P}(\rho) d\rho$$

$$\mathcal{P}(n) = \mathcal{P}(\rho) \left| \frac{d\rho}{dn} \right|$$

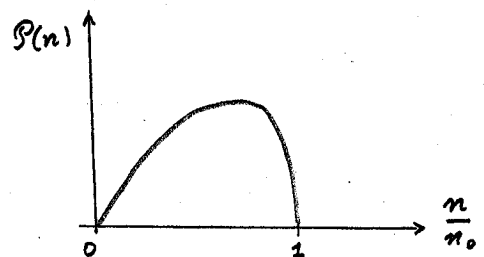
$$\mathcal{P}(\rho) = \frac{15}{2} \rho^2 (1-\rho^2) = \frac{15}{2} \left(1 - \frac{n}{n_0}\right) \frac{n}{n_0}$$

$$dn = -2n_0 \rho d\rho$$

$$\left| \frac{d\rho}{dn} \right| = \frac{1}{2n_0 \rho} = \frac{1}{2n_0} \sqrt{1 - \frac{n}{n_0}}$$

On en déduit

$$\mathcal{P}(n) = \frac{15}{4n_0^2} n \sqrt{1 - \frac{n}{n_0}}$$



VII-8

Valeur moyenne et écart quadratique moyen de n

T-213

$$\bar{n} = \int_0^{n_0} n P(n) dn$$

$$\overline{n^2} = \int_0^{n_0} n^2 P(n) dn$$

$$\Delta n = \sqrt{\overline{n^2} - \bar{n}^2}$$

Une série d'intégrations par parties donne

$$\int_0^1 u^2 \sqrt{1-u} du = \frac{16}{7 \times 15}$$

$$\int_0^1 u^3 \sqrt{1-u} du = \frac{4 \times 24}{15 \times 63}$$

On en déduit

$$\bar{n} = \frac{15}{4n_0^2} \int_0^{n_0} n^2 \sqrt{1-\frac{n}{n_0}} dn = \frac{4n_0}{7}$$

$$\overline{n^2} = \frac{15}{4n_0^2} \int_0^{n_0} n^3 \sqrt{1-\frac{n}{n_0}} dn = \frac{24}{63} n_0^2$$

$$\Delta n^2 = n_0^2 \frac{8}{147}$$

Déplacement du spectre dû aux interactions

$$(\Delta \omega)_{\text{inter.}} = \frac{g}{\hbar} \bar{n} = \frac{4}{7} \frac{g n_0}{\hbar}$$

Élargissement du spectre dû aux interactions

T-214

Si l'on approxime le profil de $P(n)$ par une Gaussienne, le spectre final, qui est le produit de convolution de 2 courbes approximées par des Gaussiennes, est aussi une Gaussienne.

Les variances s'ajoutent alors, et on obtient pour la variance $\Delta(\delta\omega)^2$ de $\delta\omega$

$$\begin{aligned} \Delta(\delta\omega)^2 &= [\Delta(\delta\omega)^2]_{\text{Doppler}} + [\Delta(\delta\omega)^2]_{\text{Inter}} \\ &= \alpha^2 \frac{\hbar^2}{2m^2} + \frac{8}{147} \frac{g^2 n_0^2}{\hbar^2} \end{aligned}$$

avec $\alpha^2 = 3$ ou $\frac{21}{8}$ suivant la théorie

Recapitulation

- L'effet des interactions est donc
- de déplacer le spectre Doppler
- d'élargir ce spectre

Le spectre Doppler ne dépend pas de n_0

L'effet des interactions ne dépend pas de α_0

Etude expérimentale (voir Ref. 1)

T-215

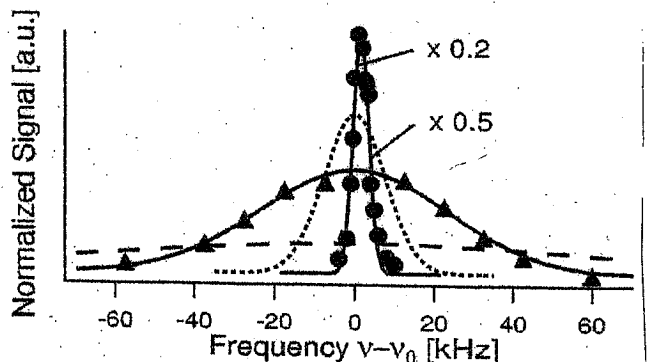
- Condensat en forme de cigare horizontal
- On fait varier n_0 et α_0 en changeant la raideur du piège et le nombre N d'atomes condensés
- On mesure n_0 par étude de l'expansion balistique, α_0 par mesure de N et des fréquences du piège
- Les faisceaux laser induisant la transition Raman sont appliqués un temps très court avant la coupure du piège. La durée de l'impulsion est suffisamment grande pour avoir une résolution $\lesssim 1$ KHz et suffisamment courte devant la période d'oscillation dans le piège
- Comme $g n_0 \ll \hbar^2 k^2 / 2m$, les atomes ayant subi la transition Raman (qui ont gagné une impulsion $2\hbar k$) se détachent nettement des autres, pendant l'expansion balistique

Exemple de spectre $I(\delta\omega/2\pi)$

T-216

Figure extraite de la Ref. 1

- Signal obtenu sur les atomes du condensat
- ▲ Signal obtenu après 3 ms d'expansion balistique (on mesure les vitesses acquises lors de cette expansion)
- Signal calculé pour une distribution $P(v_x)$ correspondant à l'état fondamental du piège
- Signal du bruit thermique

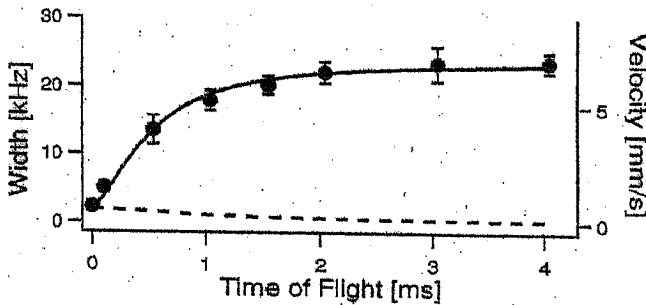


Etude par vélocimétrie Doppler de l'expansion balistique

T-217

Figure extraite de la ref 1

Les résonances induites par le recul permettent aussi d'étudier l'évolution temporelle de la distribution de vitesse des atomes au cours de l'expansion balistique



Courbe en trait plein : Prédiction théorique à partir des résultats de la Ref. 8

Courbe en trait tiré : Contribution de l'élargissement dû aux interactions et à la taille finie du nuage

Largeur du spectre en fonction de α_0

Figure extraite de la Ref 1

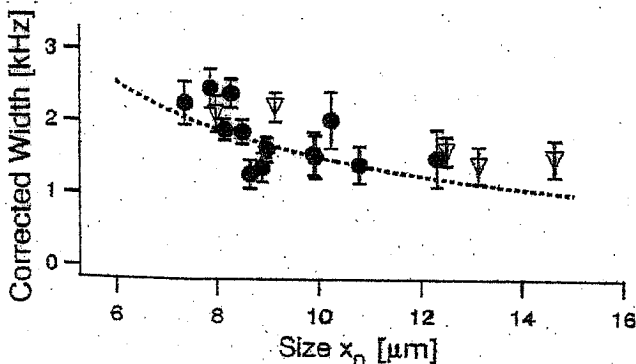
T-219

Résultats corrigés

- de la contribution des interactions
- de l'élargissement dû à la durée finie des impulsions laser

.... Courbe théorique calculée à

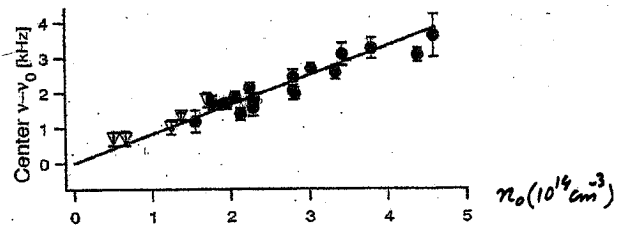
partir de $\Delta p_x = \sqrt{\frac{21}{8}} \frac{\hbar}{\alpha_0}$



Déplacement du spectre dû aux interactions

Figure extraite de la Ref. 1

T-218

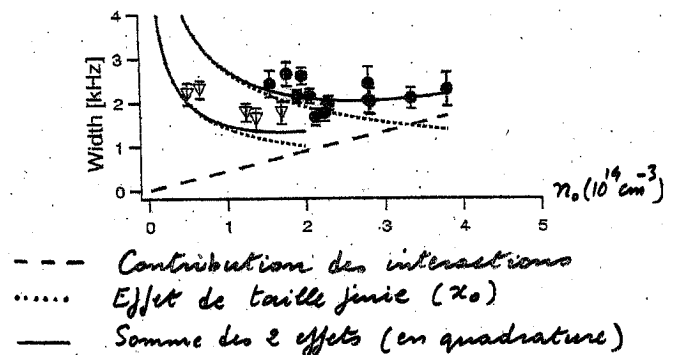


Les ronds et les triangles correspondent à 2 fréquences différentes du piège

Droite en trait plein : Théorie

Largeur du spectre en fonction de n_0

Figure extraite de la Ref. 1



- - - Contribution des interactions
- Effet de taille finie (α_0)
- Somme des 2 effets (en quadrature)

Conclusion

T-220

- ① Les résonances induites par le recul permettent d'étudier la distribution de vitesse des atomes condensés dans un piège
- ② La différence entre la dispersion des vitesses des atomes condensés et celle des atomes du nuage thermique est beaucoup plus importante que la différence de largeur des 2 pics obtenus après expansion balistique
- ③ Un traitement simplifié de l'effet des interactions permet de soustraire leur contribution et de montrer que Δp_x est en bon accord avec la largeur liée à l'extension spatiale finie α_0 du condensat
- ④ Une théorie plus quantitative du facteur de structure dynamique reste à faire

Références

- (1) - J. Stenger, S. Inouye, A. Chikkatur, D. Stampfer-Kurn, D. Pritchard, W. Ketterle, *Phys. Rev. Lett.* 82, 4569 (1999)
- (2) - D. Fried, T. Killian, L. Willmann, D. Landhuis, S. Moss, D. Kleppner, T. Graytak, *Phys. Rev. Lett.* 81, 3811 (1998)
- (3) - M. Kasevich, D. Weiss, E. Riis, K. Moler, S. Kasapi, S. Chu *Phys. Rev. Lett.* 66, 2297 (1991)
- (4) - J. Guo, P. Berman, B. Dubetsky, G. Grynberg, *Phys. Rev.* A46, 1426 (1992)
- (5) - J.-Y. Courtois, G. Grynberg, B. Lounis, P. Verkerk, *Phys. Rev. Lett.* 72, 3017 (1994)
- (6) - D. Meacher, D. Boiron, H. Metcalf, C. Salomon, G. Grynberg *Phys. Rev.* A50, R1992 (1994)
- (7) - J.-Y. Courtois, G. Grynberg, *Advances in Atomic, Molecular and Optical Physics*, Vol 36, p.87 (1996)
- (8) - Y. Castin, R. Dum, *Phys. Rev. Lett.* 77, 5315 (1996)

Etude de la longueur de cohérence
d'un condensat - Expérience de Gaithersburg

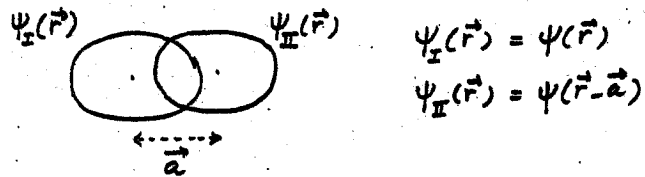
- ① Introduction T. 221 - T. 225
 - Principe de l'expérience
 - Autres expériences récentes utilisant des méthodes analogues
- ② Rappels sur la diffraction d'un jet atomique par un réseau lumineux périodique T. 226 - T. 236
 - Régime de Raman - Nath
 - Régime de Bragg
 - Description des phénomènes dans le référentiel au repos de l'atome
 - Exemples de résultats expérimentaux
- ③ L'expérience de Gaithersburg T. 237 - T. 246
 - Séquence temporelle
 - Effet des interactions
 - Correction des fluctuations
 - Résultats expérimentaux
 - Conclusion
- ④ Coupleur de sortie utilisant des transitions Raman stimulées entre un état piégeant et un état non piégeant T. 247 - T. 250
 - Principe
 - Résultats expérimentaux

Références T. 251 - T. 252

But de ce cours

Décrire une autre méthode de mesure de la longueur de cohérence λ_c d'un condensat (Ref. 1)

L'idée consiste à préparer 2 copies identiques du même condensat, séparées d'une distance a ,



puis de mesurer un signal proportionnel à l'intégrale de recouvrement I

$$I = \int \Psi_{II}^*(\vec{r}) \Psi_I(\vec{r}) d^3r = \int \psi^*(\vec{r}-\vec{a}) \psi(\vec{r}) d^3r$$

$$= \int \psi^*(\vec{r}) \psi(\vec{r}+\vec{a}) d^3r = \langle \vec{r}+\vec{a} | \rho^{(1)} | \vec{r} \rangle$$

On mesure ainsi directement la cohérence spatiale globale $G(\vec{a})$ introduite dans le cours VII (voir T-190)

Détermination de λ_c

- On mesure l'intégrale de recouvrement I pour diverses valeurs de a
- Si la phase du condensat est la même en tous les points du condensat, la décroissance de I avec a se fait sur une distance de l'ordre de l'extension spatiale du condensat

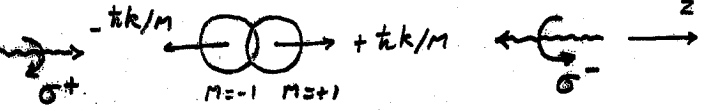
- Au lieu de mesurer la distribution d'impulsion $\mathcal{P}(\vec{p})$, qui n'est autre que la transformée de Fourier de $G(\vec{a})$ (expérience décrite dans le cours VII), on mesure ici directement $G(\vec{a})$

Autres expériences analogues

Mesure de $G(\vec{a})$ sur des nuages d'atomes ultrafroids (non condensés) obtenus par refroidissement subreseau utilisant des résonances noires sélectives en vitesse [Ref.2]

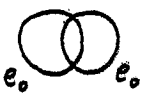
Mesure de $G(\vec{a})$ dans les expériences de refroidissement subreseau

- Le refroidissement de He métastable par piégeage cohérent de population sélectif en vitesse (VSCPT) porte les atomes dans une superposition de 2 paquets d'ondes dans les états $M = \pm 1$ du niveau 2^3S_1 , s'éloignant avec les vitesses $\pm \hbar k/M$



- On laisse les atomes en vol libre pendant une durée T_D . les 2 paquets d'ondes se séparent de $a = 2\hbar k T_D/M$

- On applique 2 faisceaux laser σ^+ et σ^- se propageant en sens inverse qui couplent l'état précédent à un état final formé de 2 paquets d'ondes immobiles dans le même état interne e_0 ($M=0$ de 2^3P_1)



- Le signal observé est proportionnel à la probabilité d'excitation de l'atome, elle-même proportionnelle à

$$\frac{1}{2} [1 + G(a)]$$

où $G(a)$ est l'intégrale de recouvrement des 2 paquets d'ondes avec l'atome dans e_0

- La motivation de cette expérience était de mesurer $\mathcal{P}(\vec{p})$

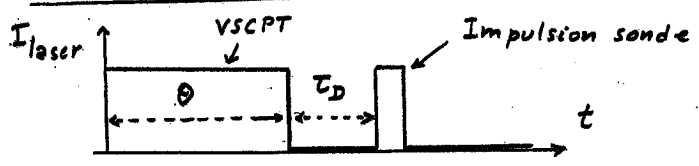
Le refroidissement subreseau permet d'atteindre des températures de l'ordre du nanokelvin, trop basses pour être mesurables par les méthodes de temps de vol traditionnelles, le nuage d'atomes ayant une extension spatiale initiale trop grande

- Il est plus facile alors de mesurer $G(\vec{a})$ et d'en déduire par transformée de Fourier $\mathcal{P}(\vec{p})$

Analogie avec la spectroscopie de Fourier en optique

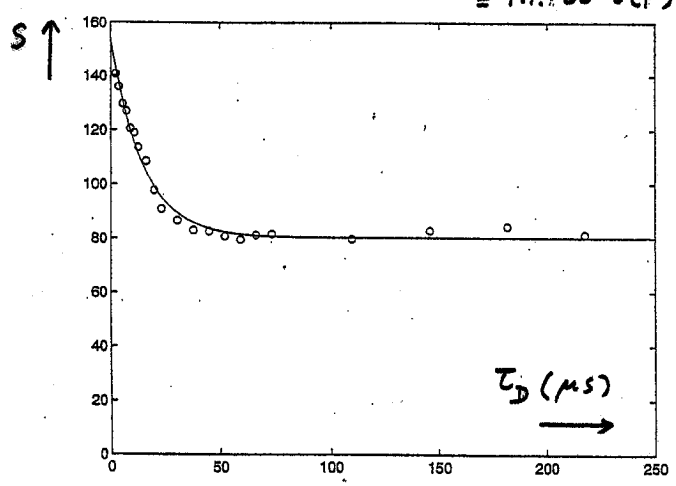
Exemple de résultat

T-225



$S \propto \frac{1}{2} (1 + G(a))$

$G(a) = \int dx \psi^*(x) \psi(x+a)$
= T.F. de $\mathcal{P}(p)$



$\frac{\delta p}{\hbar k} = \frac{1}{25}$

$T = \frac{T_{excit}}{625} = 8 \text{ nK}$

Figure extraite de la ref. 2

Comment préparer une "copie" d'un condensat ?

T-226

- Transition à 2 photons par effet Raman stimulé entre 2 états fondamentaux de même nombre quantique avec des impulsions laser très brèves
- Durée τ des impulsions $\ll \frac{\hbar}{E_{excit}} = \frac{2M}{\hbar k^2}$
- Dans l'expérience décrite dans le cours VII, on avait au contraire $\tau \gg \hbar/E_{excit}$ de manière à avoir des transitions Raman très sélectives en vitesse
- Pour bien comprendre les différences entre ces 2 régimes, il sera utile de revenir aux expériences de diffraction d'un jet atomique par une onde laser stationnaire et de discuter les différences entre le régime de Raman-Nath et le régime de Bragg

Diffraction d'un jet atomique par une onde laser stationnaire (Refs 3 à 7)

T-227

Jet atomique
Vitesse v
 $\lambda_{dB} = \frac{\hbar}{Mv}$

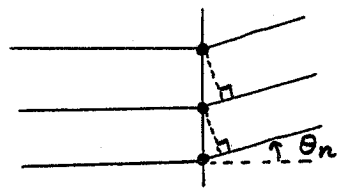


Onde laser stationnaire non-résonnante
Longueur d'onde λ
Epaisseur d

1 Régime de Raman-Nath

d est très petit

L'effet de la traversée de l'onde lumineuse est équivalent à celui d'une lame de phase pour l'onde de de Broglie



Pas du réseau $\lambda/2$

Angles θ_n de diffraction

$\sin \theta_n = 2n \frac{\lambda_{dB}}{\lambda_{opt}}$

$\frac{\lambda_{opt}}{2} \sin \theta_n = n \lambda_{dB}$
 $n = \pm 1, \pm 2, \dots$

Interprétation corpusculaire

T-228

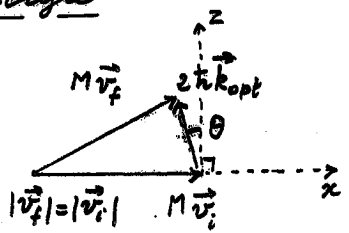
Transfert d'impulsion $2\hbar k_{opt}$ par des processus de redistribution (absorption dans une onde suivie d'une émission stimulée dans

$2n \frac{\hbar k_{opt}}{\hbar/\lambda_{opt}} = \frac{Mv \sin \theta_n}{\hbar/\lambda_{dB}}$

$\rightarrow \sin \theta_n = 2n \frac{\lambda_{dB}}{\lambda_{opt}}$

Conservation de l'énergie

La diffraction par un potentiel statique ne change pas le module de l'impulsion de l'atome



Le transfert d'impulsion $2\hbar k_{opt}$ de l'onde laser fait donc un angle θ avec Ox

$\theta = \frac{\hbar k_{opt}}{Mv}$

Ceci est possible à cause de l'extension finie d du faisceau laser entraînant une dispersion d'impulsion des photons $\sim \hbar/d$ suivant Ox

Condition de validité du régime de Raman-Nath T-229

\hbar/d doit être suffisamment grand pour permettre au transfert d'impulsion de l'onde laser de faire avec Oz un angle plus grand que $\theta = \hbar k_{opt} / Mv$

$$\frac{\hbar/d}{\hbar k_{opt}} \gg \frac{\hbar k_{opt}}{Mv}$$

$$\frac{d}{v} = \tau_{traversée} \ll \frac{M}{\hbar k_{opt}^2} = \frac{\hbar}{2 E_{recoil}}$$

Le temps de traversée de l'onde laser par l'atome doit être très court devant $\frac{\hbar}{E_{recoil}}$

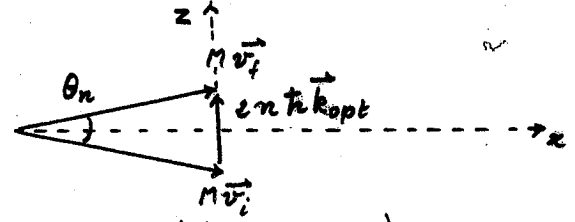
② Régime de Bragg $\tau_{traversée} \gg \frac{\hbar}{E_{recoil}}$

On a alors un faisceau laser très large.

La dispersion d'impulsion des photons suivant Ox est trop faible pour permettre une conservation simultanée de l'énergie et de l'impulsion si la vitesse atomique initiale est dirigée suivant Ox

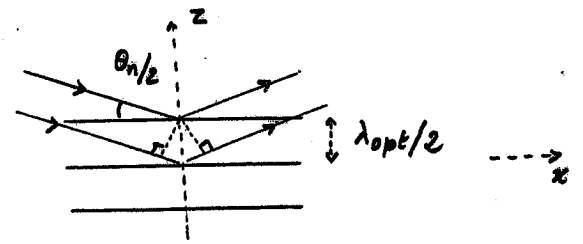
Diffraction de Bragg T-230

Interprétation corpusculaire



$$\sin \frac{\theta_n}{2} = \frac{n \hbar k_{opt}}{Mv} = n \frac{\lambda_{dB}}{\lambda_{opt}}$$

Interprétation ondulatoire



$$2 \frac{\lambda_{opt}}{2} \sin \frac{\theta_n}{2} = n \lambda_{dB}$$

$$\sin \frac{\theta_n}{2} = n \frac{\lambda_{dB}}{\lambda_{opt}}$$

La vitesse incidente doit être inclinée par rapport à Ox

Premières expériences de diffraction T-231

d'un jet atomique par une onde stationnaire

Voir références 3 à 6

Interferomètre atomique utilisant la diffraction de Bragg comme lame séparatrice

Voir référence 7

Preuve du caractère cohérent de la diffraction

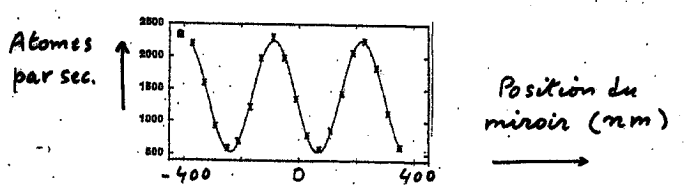
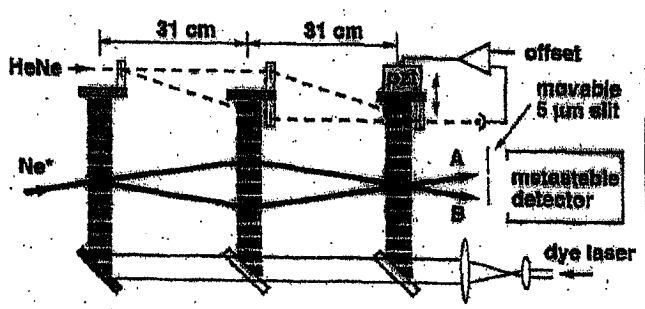


Figure extraite de la référence

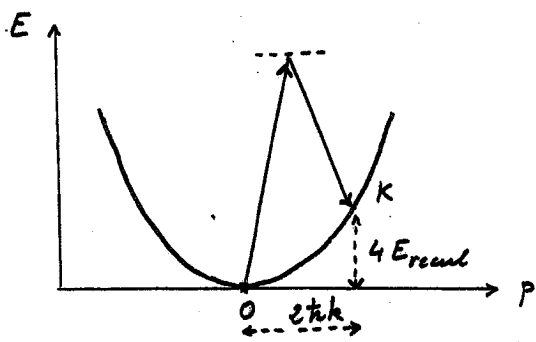
Description des phénomènes dans le référentiel au repos de l'atome T-232

- L'atome "voit" des impulsions laser de durée $\tau_{traversée}$
- Les régimes de Raman-Nath (et de Bragg) correspondent à des impulsions de durée très courte (très longue) devant \hbar/E_{recoil}
- La redistribution de photons entre les 2 ondes correspond, dans le référentiel au repos de l'atome, à une transition par effet Raman stimulé entre 2 états de même nombre quantique interne
- Si le régime étudié est celui de Bragg, l'angle de la trajectoire atomique avec le faisceau laser n'est pas égal à 90° .
Les 2 fréquences apparentes des 2 ondes laser se propageant en sens opposé subissent des décalages Doppler de signes contraires et ne sont plus identiques

Condensat soumis à 2 impulsions laser se propageant dans des sens opposés T.233

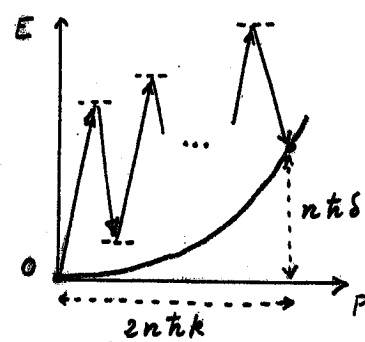
Situations équivalentes au régime de Bragg $\tau \gg \hbar/E_{reuil}$

La dispersion en énergie des impulsions laser, \hbar/τ , est beaucoup plus faible que l'écart d'énergie entre les 2 états reliés par la transition Raman



Si l'on part de O ($p=0, E=0$), on arrive à K ($p=2\hbar k, E=4 \frac{\hbar^2 k^2}{2M} = 4 E_{reuil}$)

Transitions de type Bragg d'ordre supérieur T.234



δ : Désaccord entre les 2 ondes laser
 n cycles absorption + émission stimulée

Résonance si $n\hbar\delta = n \frac{4\hbar^2 k^2}{2M} = 4n E_{reuil}$

Problème à 2 niveaux équivalent

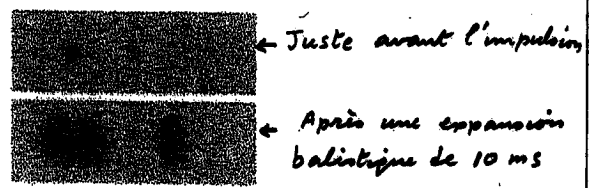
Le niveau de départ et le niveau final relié de manière résonnante au 1^{er} sont couplés avec une fréquence de Rabi effective proportionnelle à Ω_1^{2n}

Si la durée de l'impulsion τ est telle que $\hbar/\tau \ll \hbar k \delta p/M$ où δp est la dispersion d'impulsion du condensat, on peut transférer une tranche de vitesse bien définie du condensat (cas de l'expérience décrite dans le cours VII)

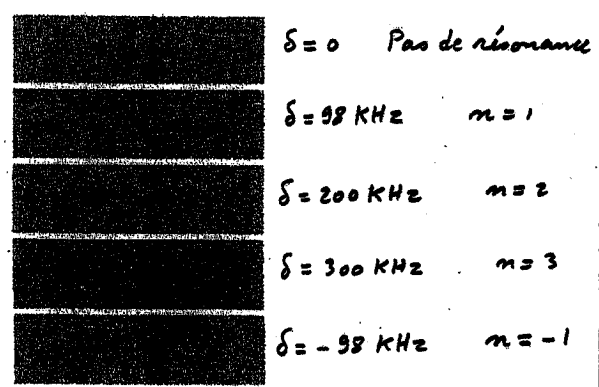
Exemples de résultats expérimentaux T.235

Figures extraites de la référence 8

- Transfert d'une tranche de vitesse après une phase d'expansion balistique
- Durée de l'impulsion : 55 μ s



- On diminue considérablement δp en ouvrant adiabatiquement le piège. Toute la distribution de vitesse est alors transférée
- Observation de résonances d'ordre supérieur



Situations équivalentes au régime de Raman-Nath T.236

$\tau \ll \frac{\hbar}{E_{reuil}}$

- Les impulsions laser sont alors très brèves.

Pour Na, $\frac{\hbar}{E_{reuil}} \approx 40 \mu$ s

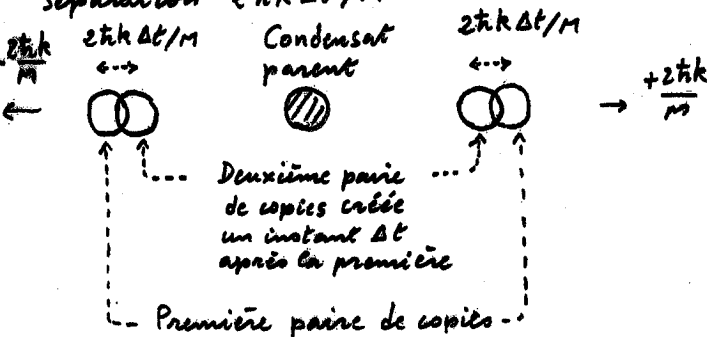
Les expériences de la référence sont faites avec $\tau = 100$ ns

- Il n'est plus alors nécessaire de prendre 2 fréquences différentes pour les 2 impulsions laser
- Des transferts de toutes les classes de vitesses du condensat sont alors possibles avec des changements d'impulsion $2n\hbar k, n = \pm 1, \pm 2, \dots$
- Si l'intensité laser n'est pas très élevée, les transferts $|n| > 1$ sont négligeables devant les transferts $n = \pm 1$

Principe de l'expérience de Gaithersburg

T.237

- Impulsions brèves d'onde stationnaire
 $T \ll \hbar/E_{\text{recul}}$
- Une première impulsion à $t=0$ crée 2 copies du condensat "parent" s'éloignant de ce condensat parent avec des vitesses $\pm 2\hbar k/M$
- A l'instant Δt , une 2^{ème} impulsion d'onde stationnaire crée 2 nouvelles copies séparées des 2 premières de $2\hbar k \Delta t/M$
- L'ensemble des 2 paires de copies s'éloigne du condensat parent à la vitesse $\pm 2\hbar k/M$, en gardant la même séparation $2\hbar k \Delta t/M$

Signal mesuré

T.238

- On mesure le nombre total d'atomes s'éloignant vers la droite N_d .
- Les 2 copies s'éloignant vers la droite sont cohérentes et ont un certain recouvrement. Le signal N_d est donc sensible à l'interférence entre les 2 copies et par suite à l'intégrale de recouvrement $G(a)$ entre ces 2 copies avec $a = 2\hbar k \Delta t/M$
- On recommence l'expérience en faisant varier Δt et donc a
- On obtient ainsi $G(a)$ en fonction de a

Déphasage entre les 2 copies s'éloignant vers la droiteNégligeons tout d'abord les interactions

Entre l'instant $t=0$ et l'instant $t=\Delta t$ où est créée la 2^{ème} copie, la 1^{ère} copie a une énergie $4E_{\text{recul}}$ par rapport au condensat. Elle accumule donc un déphasage $4E_{\text{recul}} \Delta t/\hbar$ par rapport à la 2^{ème} copie

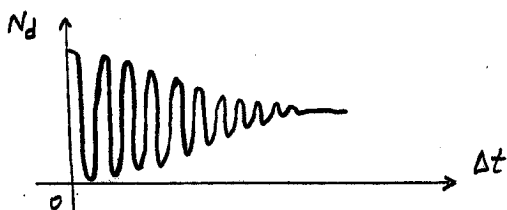
Interférence entre les 2 copies

T.239

- Après l'instant $t=\Delta t$, les 2 copies ont la même énergie et le déphasage entre elles, $4E_{\text{recul}} \Delta t/\hbar$, ne change plus
- Si Δt est suffisamment petit pour que l'écart $a = 2\hbar k \Delta t/M$ entre les 2 copies soit petit devant leur extension spatiale, le recouvrement des 2 copies est total et leur interférence ne dépend que du déphasage $4E_{\text{recul}} \Delta t/\hbar$ acquis entre 0 et Δt

On s'attend donc à observer une modulation de N_d à la fréquence $4E_{\text{recul}}/\hbar$ et un contraste 1

- Pour des valeurs plus grandes de Δt , les 2 copies ne se recouvrent plus et le contraste de la modulation diminue et s'annule quand $a = 2\hbar k \Delta t/M \gg \lambda_c$

Effet des interactions

T.240

Les atomes subissant la transition Raman acquièrent non seulement l'énergie cinétique $4E_{\text{recul}}$, mais aussi une énergie d'interaction supplémentaire $g_n(\vec{r})$ due au champ moyen, $n(\vec{r})$ étant la densité d'atomes en \vec{r}

Même effet que celui discuté dans le cours VII (voir T.201 et T.202)

Ordre de grandeur de l'effet des interactions

Calculé dans la référence 1

Change la fréquence de modulation du signal. Ajoute 0.3 KHz à la fréquence $4E_{\text{recul}}/\hbar \approx 100.1$ KHz

Effet faible

Procédure expérimentale

T.241

Une paire d'impulsions séparées de Δt serait en principe suffisante

Difficultés liées aux fluctuations

- de l'efficacité β du transfert Raman (fluctuations de l'intensité laser)
- du nombre d'atomes condensés N

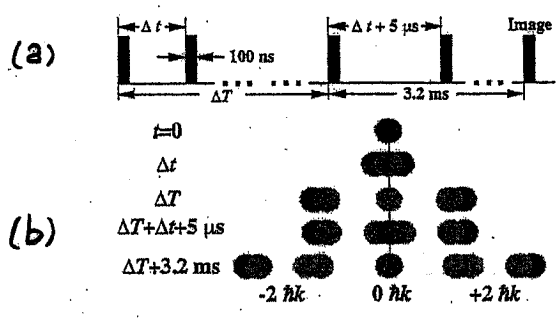
Solution utilisée pour ces difficultés

- On utilise 2 paires d'impulsions successives, la 1^{ère} paire avec une séparation Δt , la 2^{ème} avec une séparation $\Delta t + 5 \mu s$, $5 \mu s$ étant la demi-période des oscillations du signal N_d à la fréquence $4 E_{rec} / \hbar$
- La somme $N_d(\Delta t) + N_d(\Delta t + 5 \mu s)$ est indépendante de Δt et sert à normaliser le signal $N_d(\Delta t)$ pour le corriger des fluctuations mentionnées plus haut
- Le signal utilisé est donc

$$\frac{N_d(\Delta t)}{N_d(\Delta t) + N_d(\Delta t + 5 \mu s)}$$

T.242

(a) : Séquence temporelle



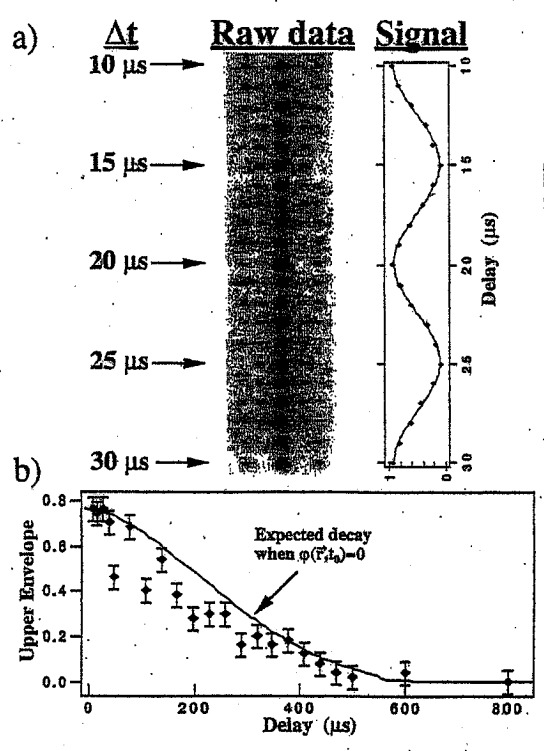
(b)

(b) Position des paires de copies aux divers instants

Figure extraite de la référence 1

Résultats expérimentaux

T.243

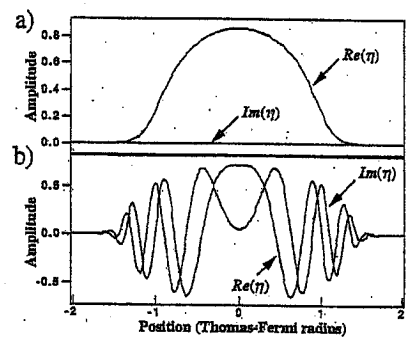


Figures extraites de la référence 1

Parties réelle et imaginaire de la solution de l'équation de Gross-Pitaevskii

T.244

Figures extraites de la référence 1



(a) Condensat piégé

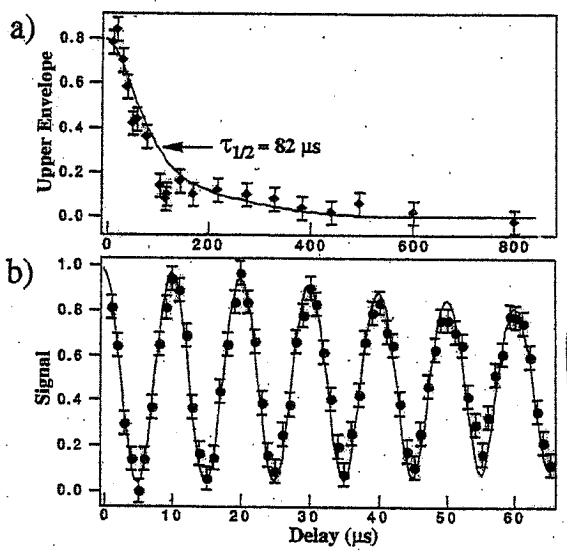
(b) Après une expansion balistique de 8 ms

Pour un condensat piégé, la fonction d'onde est réelle

Au cours de l'expansion balistique, les interactions accélèrent les atomes. Une phase variant avec \vec{r} apparaît

$\mathcal{P}(p)$ devient plus large et λ_c doit diminuer

Résultats expérimentaux après une expansion balistique de 1.2 ms T-245



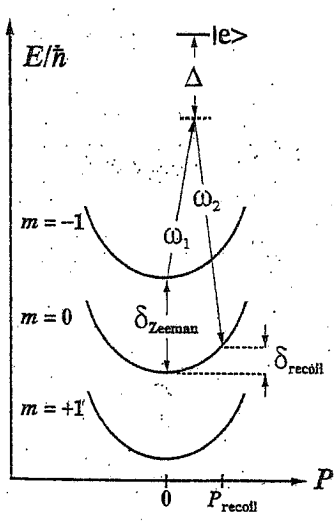
Figures extraites de la référence 1
 Les courbes en trait plein sont calculées à partir de l'équation de Gross-Pitaevskii
 L'amortissement du contraste est plus rapide que sur la courbe de T-
 La longueur de cohérence est donc plus petite

Conclusion T-246

- Les résultats de l'expérience décrite plus haut montrent que la longueur de cohérence du condensat piégé est de l'ordre de son extension spatiale
- La coupure du piège et l'expansion balistique qui s'ensuit font apparaître des variations de phases dues à l'accélération communiquée par les interactions et la longueur de cohérence diminue
- Les prédictions théoriques basées sur la résolution de l'équation de Gross-Pitaevskii sont, dans les 2 cas (condensat piégé et expansion balistique), en bon accord avec les observations expérimentales

Transitions par effet Raman stimulé entre un état piégeant (m = -1) et un état non piégeant (m = 0) T-247

Figure extraite de la référence 9



Laser à atomes avec coupleur de sortie basé sur l'effet Raman

Avantage
 Les atomes qui sortent ont une vitesse ($2\hbar k/m$) plus élevée que dans le système utilisant un coupleur de sortie radiofréquence

$P_{recoil} = 2\hbar k$ $\delta_{recoil} = 4 E_{recoil}$

Exemple de résultats expérimentaux T-248

- A - Condensat initial
- B - Avec des impulsions laser ayant des polarisations orthogonales, le transfert $m = -1 \rightarrow m = 0$ peut se faire
- C - Avec des polarisations parallèles, l'état interne ($m = -1$) ne peut pas changer

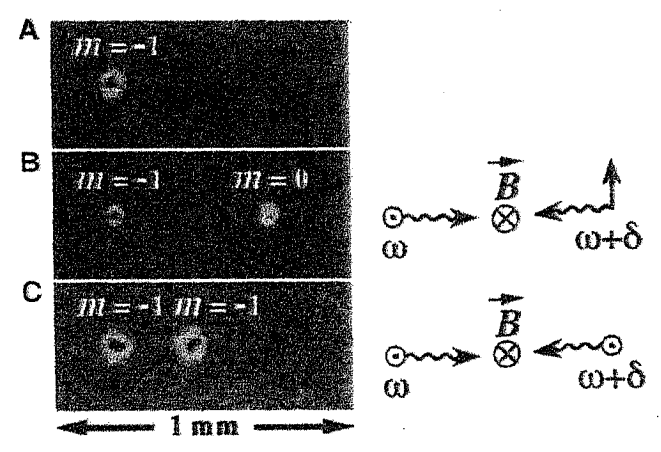
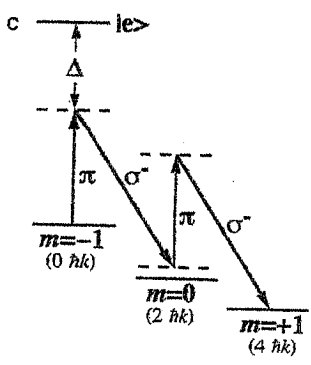
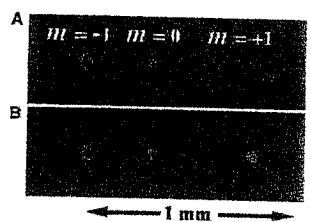


Figure extraite de la référence 9

Transitions Raman d'ordre supérieur

Figure extraite de la référence 9

T.249



- A - Piège coupé immédiatement après l'impulsion laser
- B - Piège maintenu 4 ms après l'impulsion laser. Les atomes dans l'état $m = +1$ sont accélérés

Atomes éjectés hors du condensat après

n impulsions laser

T.250

- A: $n = 1$ B: $n = 3$ C: 6
- D: Suite d'impulsions avec une fréquence de répétition de 20 KHz

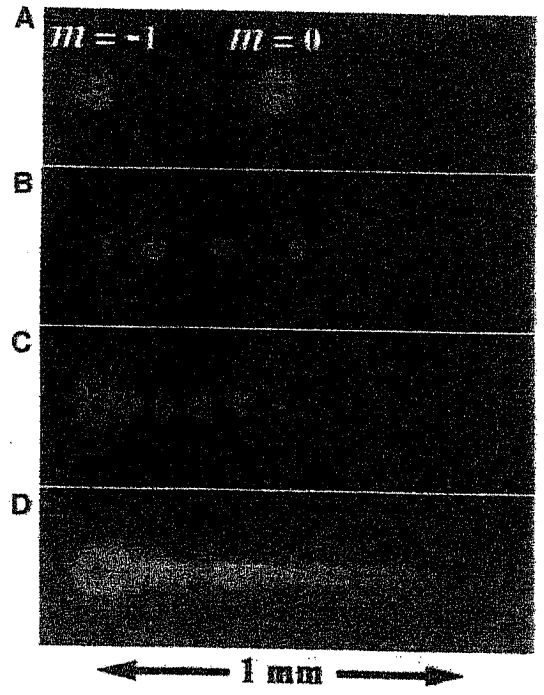


Figure extraite de la référence 9

Références

T.251

- (1) E. Hagley, L. Deng, M. Kozuma, M. Trippenbach, Y. Band, M. Edwards, M. Doery, P. Julienne, K. Helmerson, S. Rolston, W. Phillips, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 3112 (1999)
- (2) B. Sambaoca, T. Hijmans, S. Kulin, E. Rasel, E. Peik, M. Ledue, C. Cohen-Tannoudji *Phys. Rev. Lett.* **79**, 3146 (1997)
- (3) P. Moskowitz, P. Gould, S. Atlas, D. Pritchard, *Phys. Rev. Lett.* **51**, 370 (1983)
- (4) P. Gould, G. Ruff, D. Pritchard, *Phys. Rev. Lett.* **56**, 827 (1986)
- (5) P. Martin, B. Oldaker, A. Miklich, D. Pritchard *Phys. Rev. Lett.* **60**, 515 (1988)
- (6) C. Cohen-Tannoudji
Cours au Collège de France 1993-94
- (7) D. Giltner, R. McGowan, S. Lee *Phys. Rev. Lett.* **75**, 2638 (1995)

Références (suite)

T.252

- (8) M. Kozuma, L. Deng, E. Hagley, J. Wen, R. Lutwak, K. Helmerson, S. Rolston, W. Phillips, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 871 (1999)
- (9) E. Hagley, L. Deng, M. Kozuma, J. Wen, K. Helmerson, S. Rolston, W. Phillips *Science*, **283**, 1706 (12 March 1999)

Etude de la longueur de cohérence
d'un condensat - Expérience de Munich

- ① Introduction T. 253 - T. 255
 - Principe
 - Couplage de sortie
- ② Extraction d'atomes avec des impulsions RF très brèves T. 256 - T. 262
 - Etat du système après l'impulsion RF
 - Passage adiabatique
 - Résultats expérimentaux
- ③ Le piège "PVIC" T. 264 - T. 268
 - Principe - Cartes de champ
 - Avantages d'un tel piège
- ④ Extraction d'une onde de matière en régime quasi-continu T. 269 - T. 277
 - Exemple de résultat
 - Spectroscopie du condensat
 - Etude plus précise de l'extraction
 - Fonction d'onde de l'état final
 - Ordres de grandeur
 - Effet des interactions
- ⑤ Extraction de 2 ondes de matière T. 278 - T. 282
 - Interférences entre les 2 ondes sortantes
 - Calcul du signal
 - Résultats expérimentaux

Références T. 283

Longueur de cohérence d'un condensat

T.253

3 Méthodes différentes ont été utilisées

① Mesure de la distribution d'impulsion $\mathcal{P}(p)$ qui est la transformée de Fourier de la fonction de corrélation spatiale $G(a)$

M. I. T. Cours VII

② Mesure directe de $G(a)$
Intégrale de recouvrement de 2 "copies" du condensat séparées de a

Gaithersburg Cours VIII

③ Mesure directe de la cohérence entre 2 ondes de matière issues de 2 points différents du condensat

Munich Cours IX

But de ce cours

T.254

- Décrire une 3^{ème} méthode de mesure de la longueur de cohérence d'un condensat

Expérience réalisée à Munich (Ref. 1)

- L'idée consiste à extraire 2 ondes de matière de 2 points différents du condensat, séparés d'une distance a

On observe alors les interférences entre ces 2 ondes de matière une fois qu'elles ont quitté le condensat dont elles sont issues

- L'étude des variations avec a du contraste des franges d'interférence permet de déterminer le degré de cohérence entre les 2 ondes de matière, et par suite la cohérence spatiale entre les 2 points sources

Couplage de sortie

T.255

Il faut d'abord expliquer comment extraire une onde de matière d'un condensat

- Le cours VIII a décrit un 1^{er} exemple de coupleur de sortie utilisant des transitions Raman stimulées entre un état piégeant et un état non piégeant (T.247 à T.250)

- En fait, le 1^{er} coupleur de sortie réalisé utilisait des transitions de radiofréquence entre un état piégeant et un état non piégeant (Ref. 2)

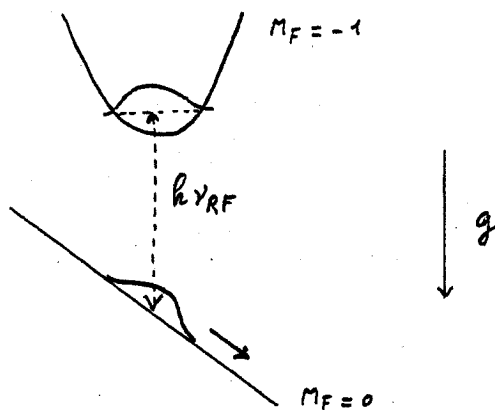
- Nous commencerons donc par une brève revue des coupleurs de sortie radiofréquence en distinguant

- le cas des impulsions RF brèves (Ref. 2)
- et celui des impulsions RF longues (Refs 1, 5)

Coupleurs de sortie RF avec des impulsions laser très brèves (Ref. 2)

T.256

- Les atomes condensés sont dans l'état piégeant $|F=1, M_F=-1\rangle$ du niveau hyperfin $F=1$ de Na



- Une impulsion RF de durée τ très courte les porte quasi-instantanément dans l'état non piégeant $M_F=0$, où ils subissent l'effet de l'accélération de la pesanteur g qui les fait tomber

Durée τ de l'impulsion RF T.257

Très courte devant

- les périodes de vibration du condensat
- la plage des fréquences de résonance du champ de radiofréquence quand on se déplace d'un point à l'autre du condensat

Cette plage dépend de la courbure du potentiel piégeant, des interactions, de la gravité g

Conséquences de cette durée courte

- L'impulsion RF peut être considérée comme résonnante pour tous les atomes du condensat
- Seuls les degrés de liberté de spin changent pendant l'impulsion RF, la fonction d'onde $\phi(\vec{r})$ des atomes condensés demeurant inchangée

Etat du système après l'impulsion RF T.258

Système à 2 états de spin $|1\rangle$ et $|2\rangle$

- Comme seuls les degrés de liberté de spin évoluent pendant τ , l'état final $|\psi_f\rangle$ s'écrit

$$|\psi_{\text{final}}\rangle = \prod_{i=1}^N |\phi\rangle_i [t|1\rangle + r|2\rangle];$$

où $\phi(\vec{r})$ est la fonction d'onde solution de l'équation de Gross-Pitaevskii, et où

$$t = \cos \frac{\omega_R \tau}{2} \quad r = \sin \frac{\omega_R \tau}{2}$$

ω_R : Fréquence de Rabi

- L'état $|\psi_{\text{final}}\rangle$ peut aussi s'écrire

$$|\psi_{\text{final}}\rangle = \sum_{n=0}^N \sqrt{\frac{N!}{n!(N-n)!}} t^{N-n} r^n |N-n, n\rangle$$

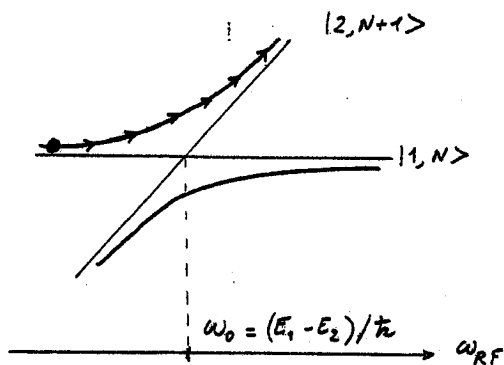
où $|N-n, n\rangle$ représente l'état avec $N-n$ atomes dans l'état 1, n dans l'état 2

On reconnaît là un état de phase relative (voir cours III, T.82)

- Proportion d'atomes transférés dans l'état 2

$$\frac{\langle n \rangle}{N} = |r|^2 = \sin^2 \frac{\omega_R \tau}{2}$$

Transfert par passage adiabatique T.259



$|1, N\rangle$: Atome dans l'état $|1\rangle$ avec N photons RF

$|2, N+1\rangle$: Atome dans l'état $|2\rangle$ avec $N+1$ photons RF

Formule de Landau-Zener pour un balayage de ω_{RF} à vitesse constante

$$|r|^2 = 1 - e^{-2\pi\Gamma} \quad |t|^2 = e^{-2\pi\Gamma}$$

$$\Gamma = \omega_R^2 \left(4 \frac{d\omega_{RF}}{dt} \right)^{-1}$$

Généralisation à un système à 3 niveaux T.260

Spin 1. $F=1, m_F = -1, 0, +1$

- Il faut remplacer

$$\cos \frac{\omega_R \tau}{2} |1\rangle + \sin \frac{\omega_R \tau}{2} |2\rangle$$

par

$$\cos\left(\frac{\omega_R \tau}{2}\right) |-1\rangle + i\sqrt{2} \sin(\omega_R \tau) |0\rangle - \sin^2\left(\frac{\omega_R \tau}{2}\right) |+1\rangle$$

- On peut également généraliser la formule de Landau-Zener

Résultat numérique approximé à

mieux que 0.1% près par

$$|a_{-1}|^2 = e^{-2\pi\Gamma}$$

$$|a_0|^2 = 2e^{-\pi\Gamma} (1 - e^{-\pi\Gamma})$$

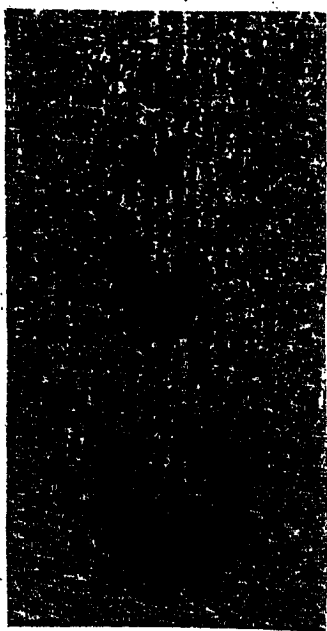
$$|a_1|^2 = (1 - e^{-\pi\Gamma})^2$$

$$\Gamma = \omega_R^2 \left(2 \frac{d\omega_{RF}}{dt} \right)^{-1}$$

Le balayage commence avec le système dans l'état $|1\rangle$

Image des atomes sortant du condensat

Succession d'impulsions séparées de 5 ms
(Figure extraite de la référence 3)

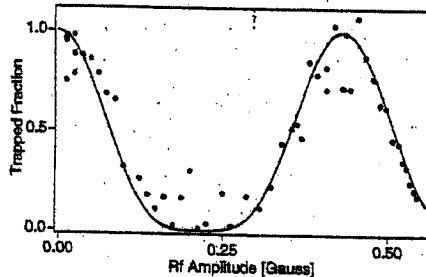


T-261

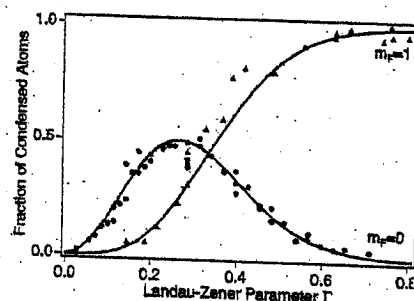
La forme en croissant est due à l'effet combiné des interactions répulsives entre atomes (qui produisent une expansion sphérique) et de la gravité.

Oscillations de Rabi du nombre d'atomes

restant condensés $\propto \cos^4\left(\frac{\omega_R T}{2}\right)$ d'après T-262 T.260



Transfert par passage adiabatique



Courbes en trait plein : Théorie
Figures extraites de la référence 2

Extraction d'atomes d'un condensat en régime continu

T.263

Intérêt

Réaliser un laser à atomes en régime continu

Problèmes à résoudre

1 - Reformuler le condensat au fur et à mesure que les atomes s'en échappent

Ce problème ne sera pas abordé ici

2 - Réaliser un coupleur de sortie en régime continu

La transition RF doit être induite par un champ RF d'amplitude constante et se produire dans une zone très bien définie

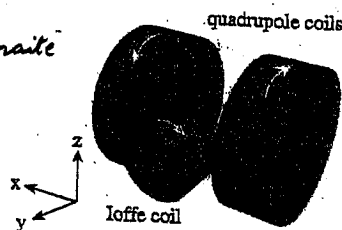
Difficultés soulevées par le point 2

Le champ magnétique dans lequel sont piégés les atomes doit être très stable

Le piège "QUIC" (Ref. 4)

T.264

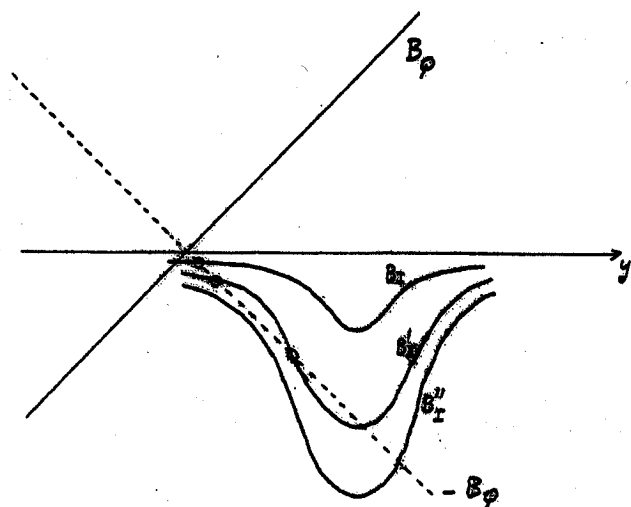
Figure extraite de la réf.



- Combinaison d'un piège quadrupolaire et d'une configuration Ioffe "Quadrupole Ioffe Configuration"
- Les atomes sont piégés dans un MOT
- Transférés ensuite dans un piège quadrupolaire (bobines d'axe Ox)
- On branche alors le courant dans la petite bobine de Ioffe d'axe Oy
- Le centre du piège quadrupolaire commence à se déplacer vers la bobine de Ioffe. Puis, un 2^{ème} zéro de champ apparaît. Enfin les 2 zéros se confondent et disparaissent pour donner un piège de Ioffe

Champ le long de Oy

T.265



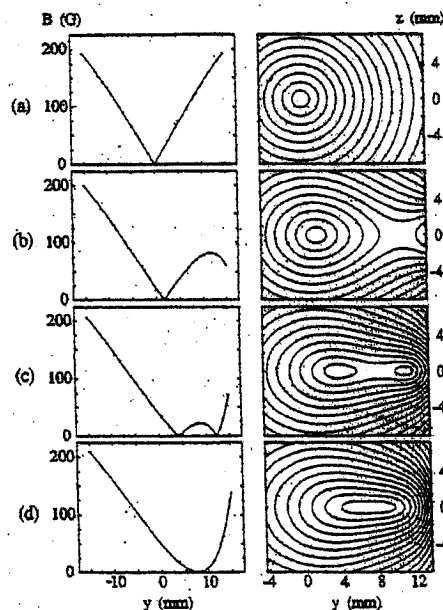
B_p : Champ créé par les bobines quadrupolaires
 B_z : Champ créé par la bobine de Ioffe pour 3 valeurs croissantes du champ $B'_I > B''_I > B_I$

Les points où s'annule le champ total sont donnés par les intersections de B_z et de la droite $-B_p$

Valeurs absolues du champ le long de Oy et contours d'égal |B| dans le plan yOz

T.266

Figure extraite de la référence 4



Une fois le piège de Ioffe réalisé (Fig. d), le champ minimum ("bias") peut être très faible

T.267



(a) → (e)

Images du nuage d'atome piégés à différentes étapes de la conversion du piège quadrupolaire en piège Ioffe

(f)

Retour en arrière du piège de Ioffe à une situation correspondant à 2 zéros de |B|

Figure extraite de la référence 4

Avantages d'un tel piège

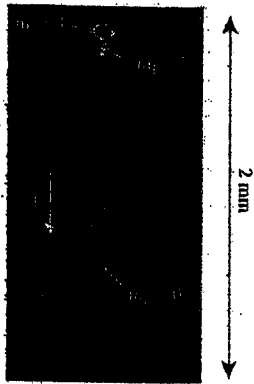
T.268

- Permet d'obtenir aisément un condensat après refroidissement évaporatif
- Piège très compact et opérant avec de courants ~~pas~~ élevés (≤ 25 A)
 La puissance dissipée reste inférieure à 600 W.
- Possibilité de placer le piège à l'intérieur d'un blindage de μ -métal qui réduit les fluctuations du champ environnant.
 Avec une alimentation de courant bien stabilisée, les fluctuations du champ agissant sur les atomes sont réduites à un niveau de 0.1 mG
- Possibilité de contrôler précisément et de manière stable le point où les atomes sont extraits du condensat sous l'effet d'un champ RF d'amplitude constante

IX-6

Exemple de faisceau de sortie obtenu après 15 ms d'irradiation RF T.265

Figure extraite de la référence 5



Expérience faite sur des atomes condensés dans l'état $F=2, M_F=2$ de ^{87}Rb

Observation des atomes après une période d'expansion balistique

Un gradient de champ magnétique appliqué pendant cette période permet de séparer spatialement les atomes restés dans $M_F=2$ et $M_F=+1$

Le laser à atomes cesse de fonctionner quand il ne reste plus d'atomes dans le condensat

Régions du piège où le champ RF est résonnant T.270

Les lignes d'égal $|B|$ dans les plans xOz (et yOz) sont des cercles (et des ellipses) centrés sur Oy (et Oz)

A cause de la gravité, le centre du condensat est déplacé vers le bas de $7.67 \mu\text{m}$

A chaque valeur de ω_{RF} correspond une région du condensat d'où les atomes peuvent s'échapper

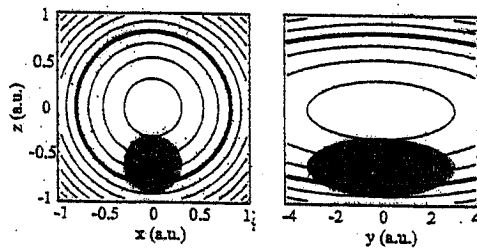
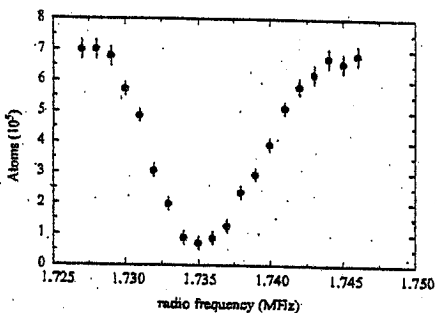


Figure extraite de la référence 5

Spectroscopie du condensat T.271

En variant la fréquence ν_{RF} du champ RF, on explore des différentes régions résonnantes du condensat

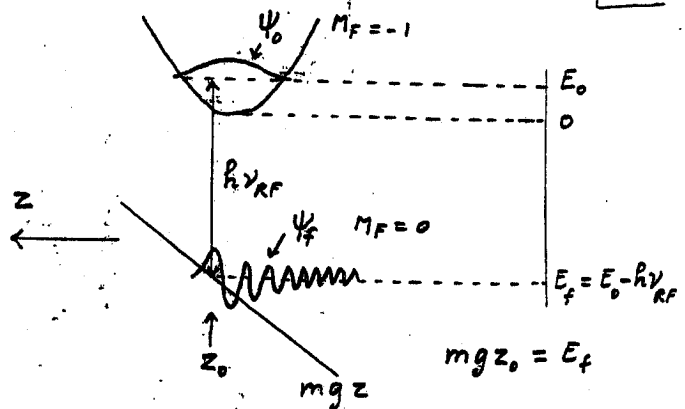
Figure extraite de la référence 5



En supposant une distribution de Thomas-Fermi pour $n(\vec{r})$, on trouve que les atomes peuvent être extraits pour ν_{RF} variant dans un intervalle de largeur $\Delta\nu = 10.2 \text{ KHz}$

Expérimentalement, on trouve $\Delta\nu = 13.1 \text{ KHz}$

Etude plus précise de l'extraction
Négligeons tout d'abord les interactions T.272



- Initialement, tous les atomes sont dans $M_F = -1$ et dans l'état fondamental Ψ_0 du piège

- La perturbation sinusoïdale de fréquence ν_{RF} couple l'état précédent à l'état $M_F = 0$, Ψ_f situé à une distance $h\nu_{RF}$ en dessous. Ψ_f est un état du spectre continu dans le potentiel mgz

z_0 : Abscisse de l'intersection du potentiel mgz avec l'horizontale d'ordonnée $E_0 - h\nu_{RF}$

Fonction d'onde ψ_f de l'état final

T.273

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi_f}{dz^2} + mgz \psi_f = E_f \psi_f$$

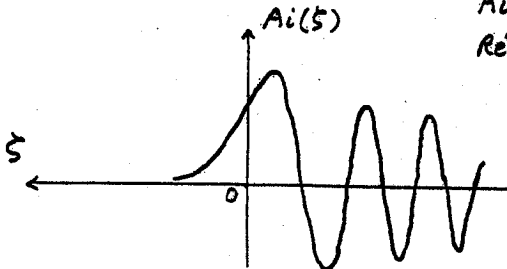
$$\frac{d^2 \psi_f}{dz^2} - \frac{2m^2 g}{\hbar^2} \left(z - \frac{E_f}{mg} \right) \psi_f = 0$$

Posons $\xi = \frac{1}{\ell} \left(z - \frac{E_f}{mg} \right)$ $\ell^3 = \frac{\hbar^2}{2m^2 g}$

$$\frac{d^2 \psi_f}{d\xi^2} - \xi \psi_f = 0$$

Solution de cette équation: Fonction d'Airy

$Ai(\xi)$
Référence 6



- Décroissance rapide pour $\xi > 0$, en $\xi^{-1/4} e^{-\frac{2}{3}\xi^{3/2}}$
- Pour $\xi \gg 1$, $Ai(\xi) \propto |\xi|^{-1/4} \exp(i\frac{2}{3}|\xi|^{3/2})$
- Largeur du 1^{er} lobe au voisinage de $\xi = 0$
 $\Delta \xi \approx 1 \rightarrow \Delta z \approx \ell$

Ordres de grandeur

T.275

- Pour $87Rb$

$$\ell = \left(\frac{\hbar^2}{2m^2 g} \right)^{1/3} \approx 0.3 \mu m$$

- L'extension de l'état fondamental du piège dans la direction z vaut

$$\Delta z_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m \omega_{\perp}}} \approx 0.9 \mu m$$

$$\omega_{\perp} / 2\pi = 140 \text{ Hz}$$

- Comme le condensat "gonfle" sous l'effet des interactions répulsives entre atomes, on a pour la largeur du condensat une valeur de l'ordre de 3 à 4 μm

- On a donc bien $\Delta z \gg \ell$, et on peut considérer que les atomes sont extraits d'une région d'altitude z_0 bien définie

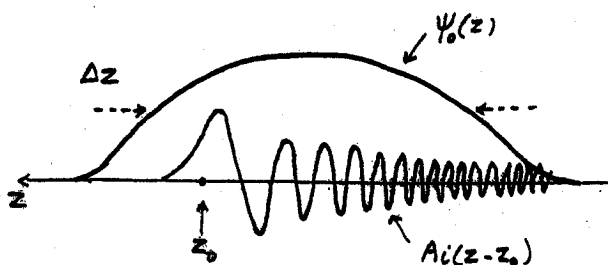
Amplitude de transition $\psi_0 \rightarrow \psi_f$

T.274

Proportionnelle à l'intégrale de recouvrement de l'état initial ψ_0 avec l'état final ψ_f

$$\int \psi_0(z) Ai(z-z_0) dz$$

Analogie avec un facteur de Franck-Condon



$$z_0 = \frac{E_f}{mg} = \frac{E_0 - \hbar \nu_{RF}}{mg}$$

L'essentiel de la contribution à l'intégrale de recouvrement provient du voisinage de z_0 . A partir des transformées de Fourier de ψ_0 et ψ_f , on peut montrer (Y. Castin) que pour $\Delta z \gg \ell$

$$\int \psi_0(z) Ai(z-z_0) dz \propto \psi_0(z_0)$$

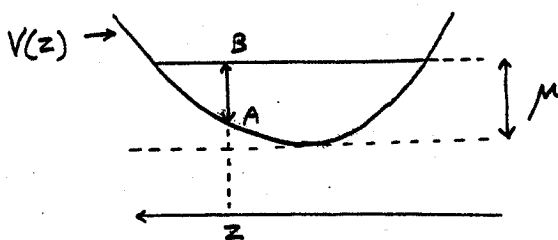
Effet des interactions

T.276

Limite de Thomas-Fermi

Détermination graphique de $gn(z)$

L'énergie de ψ_0 est égale au potentiel chimique μ (et non à E_0)



En chaque point z , on a

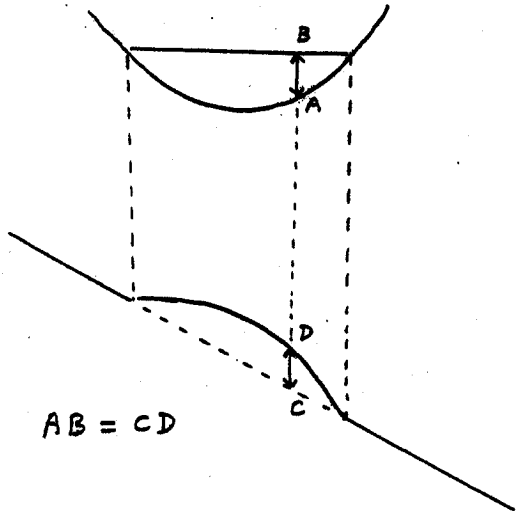
$$V(z) + gn(z) = \mu$$

puisque l'on néglige l'énergie cinétique

On en déduit que $gn(z)$ est égal à la longueur du segment AB

Potentiel "vu" par les atomes sortant du condensat

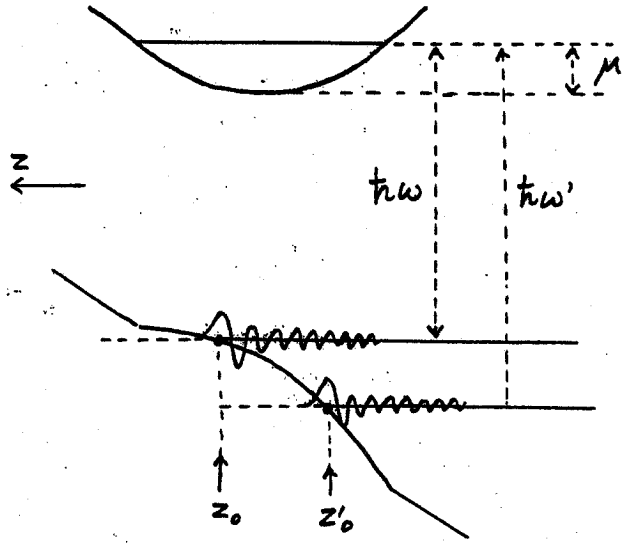
T.299



Un traitement approché simple consiste à ajouter le terme $mgz(z)$ au potentiel en l'absence d'interaction. Ce résultat demeure valable tant que $m(z)$ n'a pas trop changé par suite de la perte d'atomes.

Extraction de 2 ondes de matière T.298

Application de 2 champs RF de fréquence ω et ω' .
Les altitudes z_0 et z'_0 des points d'où sortent les 2 ondes de matière sont données par la construction suivante.



Interférences entre les 2 ondes sortantes

T.299

Pour simplifier, on néglige les interactions.

$$\Phi_{out}(\xi) \propto \frac{1}{|\xi|^{1/4}} \exp\left\{i\left[\frac{2}{3}|\xi|^{3/2} - (\mu - \hbar\omega)\frac{\xi}{\hbar}\right]\right\}$$

$$\Phi_{out}(\xi') \propto \frac{1}{|\xi'|^{1/4}} \exp\left\{i\left[\frac{2}{3}|\xi'|^{3/2} - (\mu - \hbar\omega')\frac{\xi'}{\hbar}\right]\right\}$$

$$\xi = \frac{1}{e}(z - z_0) \quad \begin{cases} z_0 = \frac{E_f}{mg} = \frac{\mu - \hbar\omega}{mg} \\ z'_0 = \frac{E'_f}{mg} = \frac{\mu - \hbar\omega'}{mg} \end{cases}$$

$$\xi - \xi' = \frac{E'_f - E_f}{mge} = \frac{\hbar\Delta\omega}{mge} \quad \Delta\omega = \omega - \omega'$$

Signal $S = |\Phi_{out}(\xi) + \Phi_{out}(\xi')|^2$

$$S \propto \frac{1}{|\xi|^{1/2}} \left| e^{i\left(\frac{2}{3}|\xi|^{3/2} + \omega t\right)} + e^{i\left(\frac{2}{3}|\xi'|^{3/2} + \omega' t\right)} \right|^2$$

$$S \propto \frac{1}{|\xi|^{1/2}} \left\{ 1 + 1 + 2 \cos\left[\frac{2}{3}(|\xi|^{3/2} - |\xi'|^{3/2}) + (\omega - \omega')t\right] \right\}$$

Expressions du signal S

T.280

$$|\xi|^{3/2} = |\xi + \xi' - \xi|^{3/2} = |\xi|^{3/2} + \frac{2}{3}(\xi' - \xi)|\xi|^{1/2}$$

On en déduit

$$\frac{2}{3}(|\xi|^{3/2} - |\xi'|^{3/2}) = (\xi - \xi')|\xi|^{1/2}$$

$$\xi - \xi' = \frac{\hbar\Delta\omega}{mge} = \frac{\Delta z}{e}$$

et par suite

$$S \propto \frac{1}{\sqrt{z}} \left\{ \frac{1}{2} + \cos[q\sqrt{z} + (\omega - \omega')t] \right\}$$

où $q = \frac{\Delta z}{e^{3/2}} = \frac{m\Delta z\sqrt{2g}}{\hbar}$

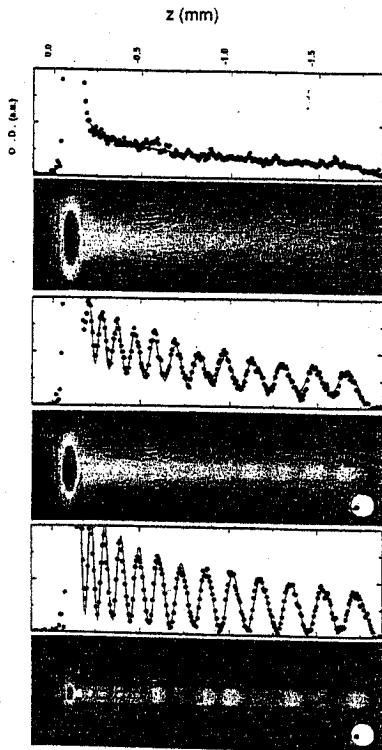
On ajuste les résultats expérimentaux par

$$S \propto \frac{1}{\sqrt{z}} \left\{ \frac{1}{2} + V \cos[q\sqrt{z} + (\omega - \omega')t] \right\}$$

où V est introduit pour caractériser le contraste des franges d'interférence.

Figure extraite de la référence 1

T.281



$T > T_c$

$T \sim T_c$

$T \ll T_c$

Batttements entre les 2 ondes sortantes

$$\Delta z = 465 \text{ nm} \quad (\omega - \omega')/2\pi = 1000 \text{ Hz}$$

Références

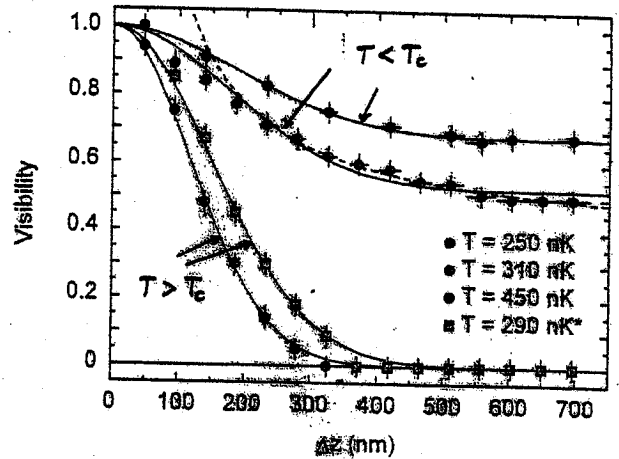
T.283

- (1) I. Bloch, T. Hänsch, T. Esslinger
Nature, à paraître
- (2) M.O. Mewes, M. Andrews, D. Kurn,
D. Durfee, C. Townsend, W. Ketterle
Phys. Rev. Lett. 78, 582 (1997)
- (3) W. Ketterle, D. Durfee, D. Stamper-Kurn
Proceedings of the International School
of Physics "Enrico Fermi", Course CXL
M. Inguscio, S. Stringari, C. Wieman (Eds)
p. 67 (1999)
- (4) T. Esslinger, I. Bloch, T. Hänsch
Phys. Rev. A 58, R2664 (1998)
- (5) I. Bloch, T. Hänsch, T. Esslinger
Phys. Rev. Lett. 82, 3008 (1999)
- (6) L. Landau, E. Lifchitz
Mécanique Quantique
Editions Mir, Moscou, 1988

IX-9

Courbe extraite de la référence 1

T.28.



Pour $T > T_c$, le contraste tend vers 0
quand $\Delta z \rightarrow \infty$

Pour $T < T_c$, le contraste tend vers une
constante

Les courbes en trait plein sont des
fits Gaussiens

La courbe en trait tiré pour $T < T_c$
est un fit en $1/\Delta z$

Phase relative de 2 condensats
simultanément présents dans le même piège

① Introduction T. 284 - T. 285

- But de ce cours
- Sous-niveaux fondamentaux de 87Rb

② Production d'un mélange de 2 condensats par refroidissement sympathique T. 286 - T. 291

- Principe
- Résultats expérimentaux
- Une telle méthode est-elle généralisable à d'autres alcalins?

③ Une autre méthode pour préparer un mélange de 2 condensats T. 292 - T. 293

- Transition à 2 photons microonde + radiofréquence
- Diverses études possibles

④ Etude de la dynamique des 2 condensats T. 294 - T. 302

- Mélange ou séparation?
- Exemples de résultats

⑤ Etude de la phase relative des 2 condensats T. 303 - T. 315

- Comportement aux temps T très courts
- Temps T plus longs
- Temps T beaucoup plus longs
- Brouillage de la phase relative dû aux interactions

Références T. 316 - T. 317

Phase relative de 2 condensats simultanément présents dans un piège [T.284]

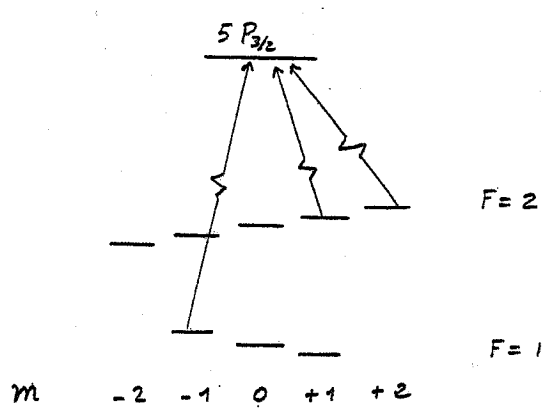
But de ce cours

- Décrire des expériences réalisées à Boulder et portant sur des mélanges de 2 condensats d'atomes de ^{87}Rb préparés dans les niveaux hyperfins $F=1$ et $F=2$ (Références 1 à 6)
- Comment préparer et détecter de tels mélanges ?
- Quelle est leur dynamique sous l'effet des interactions entre atomes ?
- Peut-on les préparer avec une phase relative bien définie et suivre l'évolution ultérieure de cette phase ?

Autres expériences analogues à M.I.T.

sur des condensats d'atomes de Sodium dans des niveaux Zeeman différents, piégés dans un piège laser (Référence 7)

Sous-niveaux de l'état fondamental de ^{87}Rb [T.285]



Dans un piège magnétique, peuvent être piégés les atomes dans les sous-niveaux

$F=2, m=2$ $F=2, m=1$
 $F=1, m=-1$

Par pompage optique, on peut préparer les atomes dans l'un de ces 3 états

On peut détecter optiquement et séparément les populations de ces états

Production d'un mélange de 2 condensats par refroidissement "sympathique" [T.286]

Référence 1

Principe

- On piège simultanément dans un piège magnétique des atomes de ^{87}Rb dans les états $F=2, m=2$ et $F=1, m=-1$
- Comme le moment magnétique de l'état $m=2$ est 2 fois plus grand que celui de l'état $m=-1$, le piège est plus confinant pour l'état $m=2$.
Le nuage d'atomes dans l'état $m=-1$ s'étend plus loin
- L'évaporation RF enlève préférentiellement les atomes $F=1, m=-1$ du piège à l'extrémité du nuage
- Les collisions avec les atomes $F=1, m=-1$ ainsi refroidis diminuent la température des atomes $F=2, m=+2$ et on arrive à obtenir ainsi 2 condensats

Evolution de la température et du nombre d'atomes dans chaque état au cours du refroidissement évaporatif [T.287]

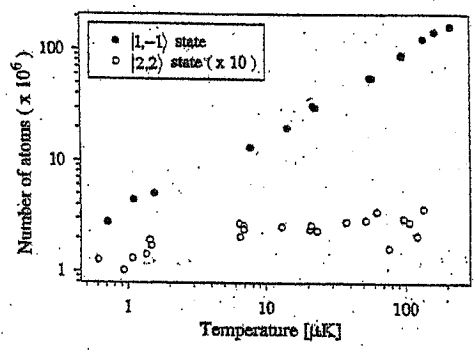


Figure extraite de la référence 1

On constate que le nombre d'atomes dans l'état $F=1, m=-1$ diminue au cours du refroidissement évaporatif alors que le nombre d'atomes dans l'état $F=2, m=+2$ ne change pas

Intérêt du refroidissement "sympathique"

- Mis ici en évidence pour la 4^{ème} fois sur des atomes neutres. T. 288

Auparavant démontré sur des ions qui interagissent avec un potentiel de Coulomb à longue portée (Ref. 11)

- Possibilité de refroidir des isotopes rares ou fermioniques

Pour des fermions polarisés dans le même état de spin, le principe de Pauli interdit les collisions dans l'onde s, les sections efficaces des collisions élastiques sont très faibles et le refroidissement évaporatif très inefficace

- Il est plus judicieux de refroidir un isotope bosonique par évaporation et de refroidir l'isotope fermionique par refroidissement sympathique

Image des 2 condensats

T. 289

- A cause de la gravité, le centre de chaque condensat est déplacé vers le bas, le condensat $F=1, m=-1$ davantage que le condensat $F=2, m=+2$ car le piège est moins raide
- En inclinant légèrement l'axe horizontal du piège (comme de cigare horizontal), on peut séparer spatialement les 2 condensats

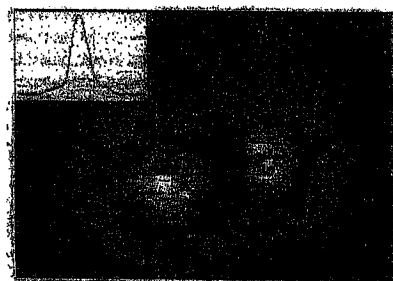


Figure extraite de la référence 1

Image de 2 condensats s'interpénétrant

T. 290

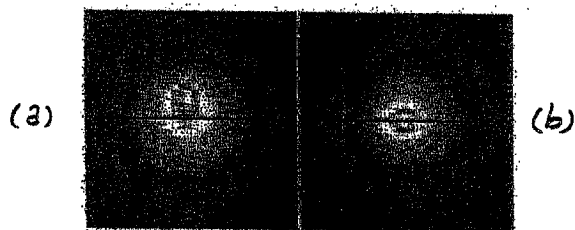


Figure extraite de la référence 1

- Sur la figure b, on a un condensat pur, dans l'état $F=2, m=2$
- Sur la figure a, les 2 condensats sont présents, mais on ne détecte optiquement que le condensat $F=2, m=2$
- Le condensat $F=2, m=2$, que l'on détecte est repoussé vers le haut par le condensat $F=1, m=-1$, non visible ici
- Les centres des images thermiques sont par contre confondus

Une telle expérience est-elle généralisable aux autres alcalins ?

T. 291

- Le refroidissement sympathique d'atomes préparés dans des niveaux hyperfins différents ne peut fonctionner que si les collisions d'échange de spin, qui sont des collisions inélastiques, restent négligeables devant les collisions élastiques
- Ceci est réalisé pour $87Rb$ à cause d'une coïncidence accidentelle entre les longueurs de diffusion a_s et a_T des potentiels singulet et triplet de spin, conduisant à une interférence destructive pour l'amplitude d'échange. Les sections efficaces d'échange de spin, proportionnelles à $(a_s - a_T)^2$, sont alors très faibles
- Une telle circonstance favorable ne se produit pas pour les autres alcalins (Voir Références 8 à 10)

Une autre méthode pour préparer un mélange de 2 condensats T-292

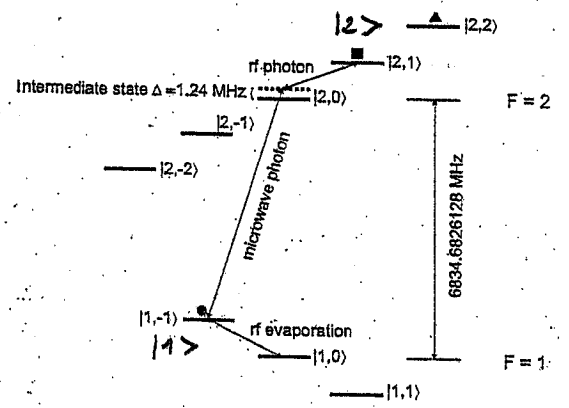


Figure extraite de la référence 2
 Une transition à 2 photons (microonde + radiofréquence) permet de passer de l'état $|1\rangle = |F=1, m=-1\rangle$ à l'état $|2\rangle = |F=2, m=2\rangle$
 On part d'un condensat dans $|1\rangle$ après refroidissement évaporatif
 Couplage de Rabi effectif entre $|1\rangle$ et $|2\rangle$
 Impulsions $\pi/2, \pi \dots$

Diverses études possibles T-293

- ① Après l'impulsion microonde - RF, on peut préparer un état initial contenant des proportions choisies des condensats $|1\rangle$ et $|2\rangle$
 Comme les 2 condensats peuvent être détectés séparément et qu'ils ne se transforment pas spontanément l'un dans l'autre, on peut les considérer comme 2 fluides discernables
 Quelle est leur dynamique sous l'effet des interactions ?
- ② L'impulsion crée une certaine phase relative entre les 2 condensats
 Un instant T après, une 2^{ème} impulsion peut fournir un signal d'interférence sensible à la nouvelle valeur de la phase relative.
 Quelle est l'évolution de la phase relative entre les 2 condensats ?

Etude de la dynamique T-294

Etat initial
 Après avoir préparé un condensat $|1\rangle$, une impulsion très brève peut préparer
 - soit un condensat $|2\rangle$ (impulsion π)
 - soit une superposition linéaire de $|1\rangle$ et $|2\rangle$ (impulsion $\pi/2$)
 Si l'impulsion est très brève, la fonction d'onde initiale du condensat $|1\rangle$, $\phi_0(\vec{r})$, ne change pas. Seul l'état de spin change
 Impulsion π : $|1\rangle \rightarrow |2\rangle$
 Impulsion $\pi/2$: $|1\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle + |2\rangle)$

Paramètres sur lesquels on peut jouer
 En réglant le champ magnétique, en utilisant la gravité et certaines caractéristiques du piège TOP (voir Ref.), on peut faire en sorte que les centres des 2 pièges pour $|1\rangle$ et $|2\rangle$ soient
 - soit confondus
 - soit légèrement décalés verticalement (voir référence 2)

Evolution après l'impulsion T-295

- Equations de Gross-Pitaevskii couplées

$$\begin{cases} i\hbar \dot{\phi}_1 = [-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_1 + g_1 |\phi_1|^2 + g_{12} |\phi_2|^2] \phi_1 \\ i\hbar \dot{\phi}_2 = [-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_2 + g_2 |\phi_2|^2 + g_{21} |\phi_1|^2] \phi_2 \end{cases}$$

$$g_i = \frac{4\pi\hbar^2}{m} a_i \quad g_{ij} = \frac{4\pi\hbar^2}{m} a_{ij} \quad a_{ij} = a_{ji}$$
 Equations qui conservent les nombres N_1 et N_2 d'atomes dans chaque condensat
 - Etude à partir de ces équations de la structure de l'état fondamental et des premiers états excités
 - Pour ^{87}Rb , la coïncidence entre a_s et a_r entraîne que

$$g_1 \approx g_2 \approx g_{12}$$
 De manière plus précise

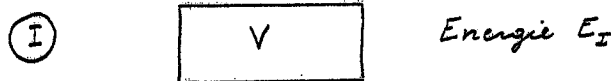
$$g_1 : g_{12} : g_2 = 1.03 : 1 : 0.97$$

Mélange ou séparation ? T. 296

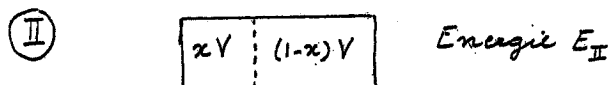
Si g_{12} était beaucoup plus grand que g_1 et g_2 , on conçoit que les 2 condensats auraient tendance à se séparer pour minimiser les interactions 1-2

Dérivation de la condition de séparation pour un système homogène

2 états possibles



2 condensats mélangés
 N atomes $|1\rangle$ dans V
 N atomes $|2\rangle$ dans V



2 condensats séparés
 N atomes $|1\rangle$ dans xV
 N atomes $|2\rangle$ dans (1-x)V

Calcul de E_I T. 297

$$E_I = \frac{1}{2} g_1 \frac{N^2}{V} + \frac{1}{2} g_2 \frac{N^2}{V} + g_{12} \frac{N^2}{V}$$

$$= \frac{N^2}{2V} (g_1 + g_2 + 2g_{12})$$

Calcul de E_{II}

$$E_{II} = \frac{1}{2} g_1 \frac{N^2}{xV} + \frac{1}{2} g_2 \frac{N^2}{(1-x)V} = \frac{N^2}{2V} \underbrace{\left[\frac{g_1}{x} + \frac{g_2}{1-x} \right]}_{G(x)}$$

La valeur optimale de x est celle qui minimise G(x)

$$\frac{dG}{dx} = -\frac{g_1}{x^2} + \frac{g_2}{(1-x)^2} = 0 \rightarrow g_1(1-x)^2 = g_2 x^2$$

$$\rightarrow x = \frac{\sqrt{g_1}}{\sqrt{g_1} + \sqrt{g_2}} \quad (1-x) = \frac{\sqrt{g_2}}{\sqrt{g_1} + \sqrt{g_2}}$$

$$G(x) = \sqrt{g_1}(\sqrt{g_1} + \sqrt{g_2}) + \sqrt{g_2}(\sqrt{g_1} + \sqrt{g_2})$$

$$= (\sqrt{g_1} + \sqrt{g_2})^2 = g_1 + g_2 + 2\sqrt{g_1 g_2}$$

$$E_{II} = \frac{N^2}{2V} [g_1 + g_2 + 2\sqrt{g_1 g_2}]$$

On en déduit $E_I - E_{II} = \frac{N^2}{V} [g_{12} - \sqrt{g_1 g_2}]$

- ① Si $g_{12} > \sqrt{g_1 g_2}$ $E_I > E_{II}$ Séparation
- ② Si $g_{12} < \sqrt{g_1 g_2}$ $E_I < E_{II}$ Mélange

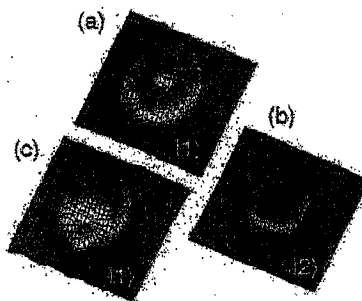
Revenons aux 2 condensats $|1\rangle$ et $|2\rangle$ dans un piège T. 298

Comme g_{12} est très voisin de $\sqrt{g_1 g_2}$ pour ^{87}Rb , l'état du système sera très sensible aux symétries des 2 pièges

- Si les 2 potentiels V_1 et V_2 sont identiques, le fait que $g_1 > g_2$ peut favoriser une structure où le condensat 1 est au pourtour du condensat 2 pour diminuer sa densité
- Un déplacement des centres des 2 pièges peut favoriser par contre une séparation verticale plutôt que radiale
- Ces 2 types de structure ont été observées

Exemple d'image des 2 condensats T. 299

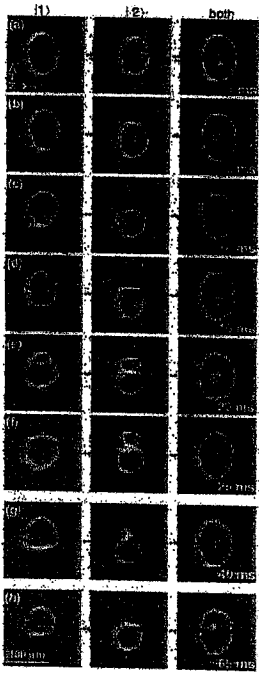
Figure extraite de la référence 4



- (a) Image du condensat $|1\rangle$ formant un anneau
Forme de cratère
- (b) Image du condensat $|2\rangle$ au centre du cratère précédent
- (c) Déplacement des centres des pièges conduisant à un déplacement du condensat $|1\rangle$ vers le haut

Etude détaillée de la dynamique T.300

Figure extraite de la référence 4



A $t=0$, une impulsion $\pi/2$ prépare une superposition des 2 condensats
 On peut étudier séparément l'évolution de $|1\rangle$, $|2\rangle$ et de la somme des 2

Caractéristiques intéressantes T.301

① Les structures spatiales des condensats $|1\rangle$ et $|2\rangle$ évoluent de manière importante et se stabilisent au bout d'un certain temps.

L'écart final des 2 distributions est grand devant l'écart entre les centres des 2 pièges

Il y a cependant une zone où les 2 condensats se recouvrent

Evolution temporelle des positions des centres des 2 distributions

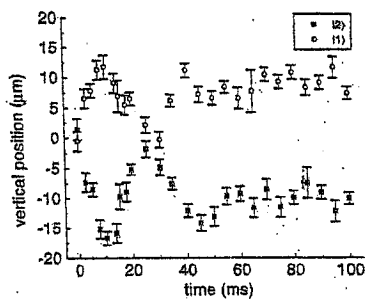


Figure extraite de la référence 4

② La somme des densités des 2 condensats évolue par contre très peu T.302

Interprétation d'un tel résultat
 à la limite de Thomas-Fermi

- Les équations de T. montrent que si V_1 est très voisin de V_2 , et si g_1, g_2, g_{12} sont très peu différents, la forme de $|\phi_1|^2 + |\phi_2|^2$ est, en régime stationnaire, une parabole inversée
- Si le condensat $|1\rangle$ est tout seul, on obtient la même parabole inversée en régime stationnaire - Idem pour $|2\rangle$
- L'état initial obtenu après l'impulsion $\pi/2$ est donc très peu différent de l'état stationnaire pour $|\phi_1|^2 + |\phi_2|^2$. On comprend pourquoi $|\phi_1|^2 + |\phi_2|^2$ évolue peu
- Par contre, $|\phi_1|^2$ est sensible aux petites différences existant entre g_1, g_2, g_{12}
 Idem pour $|\phi_2|^2$

Etude de la phase relative (Ref.5) T.303

- Une 1^{ère} impulsion $\pi/2$ introduit une phase relative, bien définie entre les 2 condensats
- Une 2^{ème} impulsion appliquée un temps T après permet de "lire" la nouvelle valeur de la phase relative

Analogie avec les franges de Ramsey dans le domaine temporel

Le comportement de la phase relative dépend des valeurs de T

① Temps T très courts

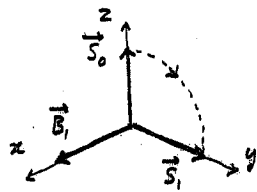
La dynamique spatiale des condensats est négligeable pendant le temps T

Juste après la 1^{ère} impulsion, le recouvrement des 2 condensats est parfait

Seule la dynamique des degrés de liberté de spin est à prendre en compte

Evolution des degrés de liberté de spin

Description en termes de spin fictif $\pi/2$ dans le référentiel tournant T-304

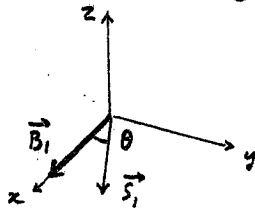


La 1^{ère} impulsion $\pi/2$ fait tourner \vec{S} de $\pi/2$ autour de \vec{B}_1
 $\vec{S}_0 \rightarrow \vec{S}_1$
 Angle $\pi/2$ entre \vec{B}_1 et \vec{S}_1

Pendant le temps d'évolution libre T

\vec{S}_1 tourne dans le plan horizontal à une fréquence $\omega_0/2\pi$ différente de celle, $\omega/2\pi$, de l'oscillateur qui délivre l'impulsion

Quand on applique la 2^{ème} impulsion $\pi/2$ l'angle entre \vec{B}_1 et \vec{S}_1 n'est plus égal à $\pi/2$ mais à $\frac{\pi}{2} + \delta T$ où $\delta = \omega - \omega_0$

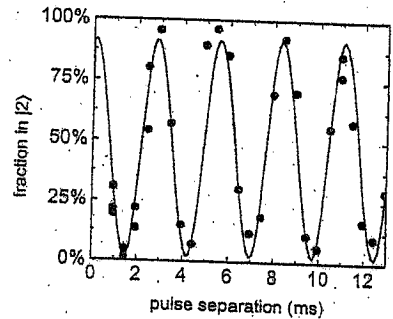


$\theta = \frac{\pi}{2} + \delta T$
 La précession de \vec{S}_1 autour de \vec{B}_1 va faire apparaître des populations de $|1\rangle$ et $|2\rangle$ variant périodiquement avec T

Exemple de franges de Ramsey T-305

observées pour des temps T très courts

Figure extraite de la référence 6



Le transfert de population vers l'état $|2\rangle$ est une fonction périodique du délai T entre les 2 impulsions $\pi/2$

On a ici $\frac{\delta}{2\pi} = 360 \text{ Hz}$

② Pour des temps T plus longs T-306

Les 2 condensats sont en mouvement

Ils n'ont plus chacun une seule phase. Des gradients de phase apparaissent

De plus, les 2 condensats se séparent et leur recouvrement diminue

↳ Diminution du contraste des franges

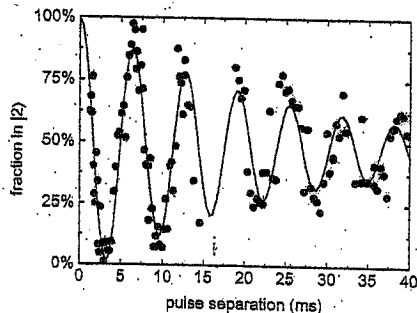


Figure extraite de la référence 6

③ Pour des temps T encore beaucoup plus longs T-307

- Les condensats ont atteint un régime stationnaire. Ils sont immobiles et on peut penser qu'il n'y a plus de gradient de phase pour chacun d'eux

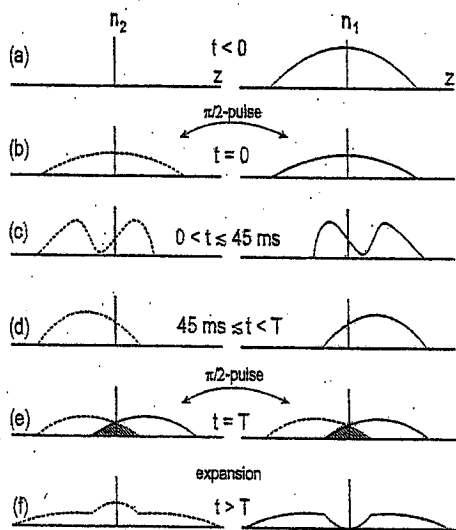
- L'interférence entre les 2 condensats ne peut cependant être observée que dans la zone où ils ont un recouvrement

- La 2^{ème} impulsion $\pi/2$ va donc augmenter la densité de l'un des 2 condensats dans cette zone de recouvrement (interférence constructive) tout en diminuant la densité de l'autre (interférence destructive)

Séquence temporelle

T-308

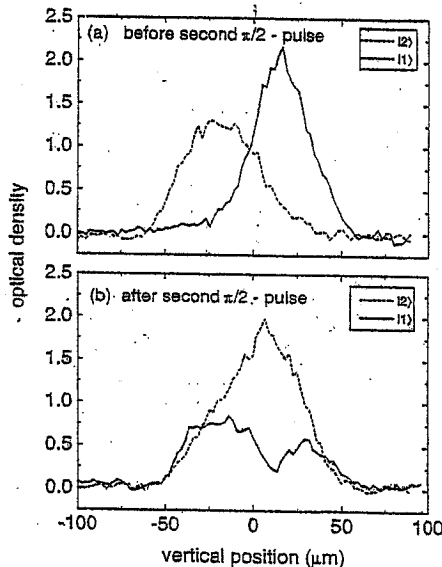
Figure extraite de la référence 5



En (f), l'interférence est supposée constructive pour n_2 , destructive pour n_1

Figure extraite de la référence 5

T-309

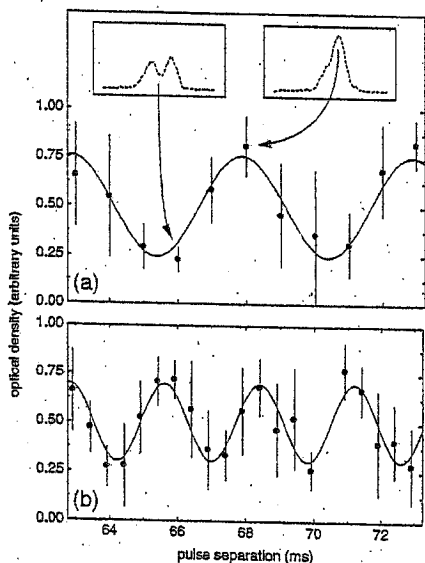


Exemple de résultats expérimentaux montrant dans la zone de recouvrement - une interférence constructive pour n_2 - une interférence destructive pour n_1

Variation du signal d'interférence avec T

Figure extraite de la référence 5

T-310



Entre (a) et (b), l'écart $\delta = \omega - \omega_0$ a été augmenté de $2\pi \times 360$ Hz
La période des franges diminue

Brouillage de la phase relative sous l'effet des interactions

T-311

- La dispersion sur $N_1 - N_2$, essentielle pour avoir une phase relative initiale, entraîne un brouillage de la phase relative au cours du temps. (Voir cours VI, T. 178 \rightarrow T. 188). On suppose ici $N_1 + N_2 = Cte$
- Ce brouillage est dû au fait que les fréquences de Bohr

$$\Omega(N_1, N_2) = \frac{1}{\hbar} [E(N_1+1, N_2-1) - E(N_1, N_2)]$$

apparaissant dans l'évolution de la fonction de corrélation $\langle \hat{a}_{\psi_1}^+ \hat{a}_{\psi_2} \rangle$ sont dispersées sur un intervalle $\Delta\Omega$ quand N_1 et N_2 varient dans un intervalle ΔN autour de \bar{N}_1 et \bar{N}_2 (avec $N_1 + N_2 = \bar{N}_1 + \bar{N}_2$)

- Par rapport au cours VI, on va tenir compte ici des interactions entre les 2 condensats ($g_{12} \neq 0$), alors que dans le cours VI, seuls g_1 et g_2 étaient non nuls

Voir référence 12

Calcul de $E(N_1+1, N_2-1) = E(N_1, N_2)$ T-312

$$E(N_1+1, N_2-1) \approx \left(\frac{\partial}{\partial N_1} - \frac{\partial}{\partial N_2} \right) E(N_1, N_2) = \mu_1(N_1, N_2) - \mu_2(N_1, N_2)$$

La différence des potentiels chimiques $\mu_1, -\mu_2$ joue en quelque sorte le rôle de la fréquence de Larmor pour un spin 1/2

Calcul de la dispersion $\Delta\Omega$ sur $(\mu_1, -\mu_2)/\hbar$ quand N_1 et N_2 varient sur un intervalle ΔN autour de \bar{N}_1 et \bar{N}_2

$$\begin{aligned} \hbar\Omega(N_1, N_2) &= \mu_1(N_1, N_2) - \mu_2(N_1, N_2) \\ \Delta\Omega &\approx \Omega(\bar{N}_1 + \Delta N, \bar{N}_2 - \Delta N) - \Omega(\bar{N}_1, \bar{N}_2) \\ &\approx \Delta N \left(\frac{\partial}{\partial N_1} - \frac{\partial}{\partial N_2} \right) \Omega(N_1, N_2) \Big|_{N_1=\bar{N}_1, N_2=\bar{N}_2} \end{aligned}$$

Temps de brouillage : $T_{coh} \approx \frac{1}{\Delta\Omega}$

Pour calculer un ordre de grandeur de $\Delta\Omega$ on va se limiter au cas simple d'un mélange homogène de 2 condensats dans une boîte $V = L^3$

Expression de $E(N_1, N_2)$ pour un mélange homogène de 2 condensats T-313

$$E(N_1, N_2) = \frac{1}{2} g_1 \frac{N_1^2}{V} + \frac{1}{2} g_2 \frac{N_2^2}{V} + g_{12} \frac{N_1 N_2}{V}$$

Expression de $\mu_1(N_1, N_2)$ et $\mu_2(N_1, N_2)$

$$\mu_1(N_1, N_2) = \frac{\partial}{\partial N_1} E(N_1, N_2) = g_1 \frac{N_1}{V} + g_{12} \frac{N_2}{V}$$

$$\mu_2(N_1, N_2) = \frac{\partial}{\partial N_2} E(N_1, N_2) = g_2 \frac{N_2}{V} + g_{12} \frac{N_1}{V}$$

$$\mu_1(N_1, N_2) - \mu_2(N_1, N_2) =$$

$$g_1 \frac{N_1}{V} - g_2 \frac{N_2}{V} + g_{12} \frac{N_2 - N_1}{V}$$

$$\hbar\Omega(N_1, N_2) = \mu_1(N_1, N_2) - \mu_2(N_1, N_2)$$

Calcul de $\Delta\Omega$

$$\begin{aligned} \Delta\Omega &= \Delta N \left(\frac{\partial}{\partial N_1} - \frac{\partial}{\partial N_2} \right) \Omega(N_1, N_2) \Big|_{N_1=\bar{N}_1, N_2=\bar{N}_2} \\ &= \frac{\Delta N}{\hbar V} (g_1 + g_2 - 2g_{12}) \end{aligned}$$

Cas où $g_{12} = 0$, mais où $g_1 \neq 0, g_2 \neq 0$ T-314

- On a alors $\Delta\Omega = \frac{\Delta N}{\hbar V} (g_1 + g_2)$

- Prenons

$$\bar{N}_1 = \bar{N}_2 = \frac{N}{2} \quad g_1 = g_2 = g$$

$$\Delta N = \sqrt{N}$$

On obtient $\Delta\Omega = \frac{\sqrt{N}}{\hbar V} g$

- Par ailleurs

$$\mu_1 = \mu_2 = \mu = \frac{gN}{V}$$

de sorte que $\mu' = \frac{\partial \mu}{\partial N} = \frac{g}{V}$

On en déduit

$$\Delta\Omega = \frac{\mu' \sqrt{N}}{\hbar}$$

et donc $T_{coh} = \frac{1}{\Delta\Omega} = \frac{\hbar}{\mu' \sqrt{N}}$

On retrouve le résultat du cours VI (voir T.188)

Cas où $g_{12} \neq 0$ et où $g_1 + g_2 - 2g_{12} = 0$

On trouve alors $\Delta\Omega = 0$ et $T_{coh} = \infty$

Les interactions entre les condensats 1 et 2 peuvent supprimer le brouillage de phase !

Interprétation physique T-315

- Pour un ΔN donné, ce qui compte, c'est la variation de $\mu_1 - \mu_2$ quand N_1 augmente de +1 et N_2 diminue de -1

- Cas $g_{12} = 0$

Quand N_1 augmente, μ_1 augmente (il y a davantage d'atomes dans le condensat 1)

En même temps N_2 diminue et μ_2 diminue

Donc $\mu_1 - \mu_2$ augmente

- Cas $g_{12} \neq 0$

Quand on fait passer un atome du condensat 2 au condensat 1, l'interaction d'un atome du condensat 1 avec les autres atomes de ce condensat 1 augmente car N_1 augmente. Mais en même temps, l'interaction de cet atome avec les atomes du condensat 2 diminue car N_2 diminue. La variation de μ_1 peut donc être plus faible - Idem pour μ_2

- Pour $g_{12} = 0$, on a à peu près $g_{12} = g_1 + g_2$

On peut ainsi comprendre la "robustesse" de la phase relative survivant après une dynamique spatiale complexe des 2 condensats

Références

T-316

T-317

- (1) C. Myatt, E. Burt, R. Ghrist, E. Cornell, C. Wieman, *Phys. Rev. Lett.* 78, 586 (1997)
- (2) D. Hall, J. Ensher, D. Jin, R. Matthews, C. Wieman, E. Cornell, *S.P.I.E.*, 3270, 98 (1998)
- (3) M. Matthews, D. Hall, D. Jin, J. Ensher, C. Wieman, E. Cornell, F. Dalfovo, C. Minniti, S. Stringari, *Phys. Rev. Lett.* 81, 243 (1998)
- (4) D. Hall, M. Matthews, J. Ensher, C. Wieman, E. Cornell, *Phys. Rev. Lett.* 81, 1539 (1998)
- (5) D. Hall, M. Matthews, C. Wieman, E. Cornell *Phys. Rev. Lett.* 81, 1543 (1998)
- (6) E. Cornell, D. Hall, M. Matthews, C. Wieman, *J. Low Temp. Phys* 113, 151 (1998)
- (7) W. Ketterle, D. Durfee, D. Stamper-Kurn
Proceedings of the International School of Physics "Enrico Fermi", Course CX L
M. Inguscio, S. Stringari, C. Wieman (Eds)
p. 67 (1999)
- (8) J. Burke, J. Bohn, D. Esry, C. Greene *Phys. Rev.* A55, R2511 (1997)
- (9) S. Kokkelmans, H. Boesten, B. Verhaar *Phys. Rev.* A55, R1589 (1997)
- (10) P. Julienne, F. Mies, E. Tiesinga, C. Williams, *Phys. Rev. Lett.* 78, 1880 (1997)
- (11) D. Larson, J. Bergquist, J. Bollinger, W. Itano, D. Wineland, *Phys. Rev. Lett.* 57, 70 (1986)
- (12) A. Sinatra, Y. Castin
The Europ. Phys. Journal D
A parasite