

COLLÈGE DE FRANCE

COURS DE PHYSIQUE

ATOMIQUE ET MOLÉCULAIRE

Claude COHEN-TANNOUJJI

ANNÉE SCOLAIRE : 1995 - 1996

TABLES DES MATIÈRES

INTRODUCTION GÉNÉRALE	I-1
Résumé du cours 1993-1994 (le cours 94-95 n'a pas eu lieu)	I-1
Introduction au cours 1995-1996	I-5
1 - Etat actuel du refroidissement laser	I-5
a) Quelques repères importants sur l'échelle des vitesses	I-5
b) Le refroidissement subrecul.....	I-5
c) Les problèmes posés par le refroidissement subrecul.....	I-6
2 - Etat actuel du piégeage d'atomes neutres	I-7
a) Pourquoi est-il important de piéger des atomes neutres ?	I-7
b) Pourquoi faut-il au préalable refroidir les atomes ?	I-7
c) Pièges dissipatifs et pièges non dissipatifs	I-7
d) Problèmes posés par les pièges.....	I-8
3 - Quelques tendances d'évolution du domaine de recherche	I-9
a) Développement des domaines d'application des atomes ultrafroids.....	I-9
b) Des points de contact fructueux avec d'autres disciplines ou d'autres domaines de recherche.....	I-9
c) Vers de nouveaux états de la matière.....	I-10
4 - Buts du cours 1995-1996	I-10
 ETUDE D'UN MODÈLE SIMPLE COMBINANT EFFET SISYPHE ET REFROIDISSEMENT SUBRECU	 II-1
1 - Introduction	II-1
1.1 - Revue de quelques types d'effet Sisyphe déjà connus	II-1
1.2 - Buts de ce cours.....	II-2
 1ÈRE PARTIE : TRAITEMENT SEMI-CLASSIQUE	 II-3
2 - Le modèle	II-3
2.1 - Transition atomique et configuration laser	II-3
2.2 - Approximations	II-3
2.3 - Les paramètres physiques importants.....	II-4
2.4 - Présentation qualitative du mécanisme de refroidissement.....	II-5
3 - Les grandes lignes du calcul semi-classique	II-6
3.1 - Evolution de la matrice densité d'un atome immobile	II-6
3.2 - Effet du mouvement - Hamiltonien motionnel.....	II-7
3.3 - Equations de Bloch optiques	II-8
3.4 - Expression semi-classique de la force moyenne	II-8

3.5 - Elimination adiabatique de l'état excité	II-9
3.6 - Méthodes de résolution des équations de Bloch optiques.....	II-10
2ÈME PARTIE : UN NOUVEAU TYPE D'EFFET SISYPHE	III-1
4 - Transfert induit par le mouvement entre $ \psi_{NC}\rangle$ et $ \psi_C\rangle$	III-1
4.1 - Origine physique du transfert.....	III-1
4.2 - Calcul simple du taux de transfert.....	III-3
4.3 - Population stationnaire de l'état couplé aux très faibles vitesses	III-4
5 - Force de friction moyenne - Discussion physique	III-5
5.1 - Calcul simple aux très faibles vitesses	III-5
5.2 - Bilan des divers échanges d'énergie	III-7
5.3 - Etude qualitative d'autres régimes de vitesse.....	III-8
6 - Diffusion en impulsion	III-9
6.1 - Ordre de grandeur du coefficient de diffusion D	III-9
6.2 - Température de quasi-équilibre	III-10
6.3 - Dépendances spatiales.....	III-10
Appendice A	III-11
3ÈME PARTIE : LE RÉGIME QUANTIQUE.....	IV-1
7 - Insuffisances du traitement semiclassique.....	IV-1
8 - Les ingrédients essentiels du refroidissement subrecul (par VSCPT)	IV-1
8.1 - Existence d'états non couplés au champ laser (pour une transition $1\leftrightarrow 1$)	IV-1
8.2 - Etude de l'état non couplé en représentation p	IV-3
8.3 - Existence d'un état noir	IV-4
8.4 - Durée de vie des états quasi-noirs.....	IV-5
9 - Revue de quelques approches quantitatives.....	IV-6
9.1 - Equations de Bloch optiques généralisées.....	IV-6
9.2 - Approches utilisant la théorie des bandes.....	IV-6
9.3 - Simulations Monte-Carlo	IV-8
UNE NOUVELLE DESCRIPTION DU REFROIDISSEMENT SUBRECU :	
PIÉGEAGE ET RECYCLAGE	V-1
1 - Introduction	V-1
2 - Modélisation du refroidissement subrecul par une marche aléatoire.....	V-1
3 - Piégeage et recyclage.....	V-3
4 - Distribution $P(\tau)$ des temps de piégeage	V-4
4.1 - Hypothèses sur le piège.....	V-4
4.2 - Calcul simple de $P(\tau)$ à une dimension.....	V-4

4.3 - Extension à un nombre quelconque de dimensions.....	V-5
4.4 - Extension à d'autres formes de pièges.....	V-6
4.5 - Discussion physique.....	V-6
5 - Distribution $\hat{P}(\hat{\tau})$ des temps de premier retour - Etude de quelques cas simples.....	V-7
5.1 - Mouvement brownien usuel à 1 dimension.....	V-7
5.2 - Mouvement brownien à 1 dimension avec effet Doppler.....	V-9
5.3 - Temps moyen de retour dans le piège en présence de friction.....	V-10
Appendice B	V-11
DISTRIBUTIONS LARGES - LOIS DE LÉVY	VI-1
1 - Introduction - Buts de ce chapitre.....	VI-1
2 - Théorème de la limite centrale généralisé.....	VI-1
2.1 - Hypothèses sur la distribution de probabilité $P(\tau)$	VI-1
2.2 - Sommes de Lévy - Problème posé.....	VI-2
2.3 - Changement de variables $T_N \rightarrow \mu_N$	VI-2
2.4 - Distribution de probabilité de μ_N à la limite $N \rightarrow \infty$ - Lois de Lévy.....	VI-2
2.5 - Allure des lois de Lévy.....	VI-3
3 - Propriétés importantes des sommes de Lévy pour $0 < \mu < 1$	VI-4
3.1 - Dépendance en N d'une somme de Lévy T_N	VI-4
3.2 - Ordre de grandeur du terme le plus grand dans une somme de Lévy.....	VI-5
3.3 - Importance des événements rares - Vols de Lévy.....	VI-7
3.4 - Importance des fluctuations.....	VI-8
4 - Processus ponctuel associé à la distribution $P(\tau)$. Loi d'arrosage.....	VI-9
4.1 - Position du problème.....	VI-9
4.2 - Cas d'une distribution $P(\tau)$ étroite.....	VI-9
4.3 - Cas d'une distribution large en $\tau^{-(1+\mu)}$ avec $0 < \mu < 1$	VI-10
PROPRIÉTÉS ASYMPTOTIQUES DU REFROIDISSEMENT SUBRECOL	VII-1
1 - Introduction.....	VII-1
2 - Compétition entre piégeage et diffusion hors du piège.....	VII-1
2.1 - Importance des exposants μ et $\hat{\mu}$	VII-1
2.2 - Moyenne temporelle et moyenne d'ensemble.....	VII-2
2.3 - Expression exacte de la proportion f d'atomes piégés.....	VII-3
3 - Probabilité par unité de temps d'entrer dans le piège.....	VII-3
3.1 - Processus ponctuel associé aux distributions $P(\tau)$ et $\hat{P}(\hat{\tau})$	VII-3
3.2 - Cas où $\langle \tau \rangle$ et $\langle \hat{\tau} \rangle$ sont finis ($\mu > 1$ et $\hat{\mu} > 1$).....	VII-4
3.3 - Cas où $\langle \hat{\tau} \rangle$ est fini et $\langle \tau \rangle$ infini ($\mu < 1$ et $\hat{\mu} > 1$).....	VII-4
3.4 - Cas où $\langle \tau \rangle$ et $\langle \hat{\tau} \rangle$ sont infinis ($\mu < 1$ et $\hat{\mu} < 1$).....	VII-4
4 - Etude quantitative de l'efficacité du refroidissement.....	VII-5

4.1 - Autres expressions équivalentes de la proportion d'atomes piégés $f(\theta)$	VII-5
4.2 - Cas où $\langle \tau \rangle$ et $\langle \hat{\tau} \rangle$ sont finis ($\mu > 1$ et $\hat{\mu} > 1$)	VII-6
4.3 - Cas où $\langle \hat{\tau} \rangle$ est fini et $\langle \tau \rangle$ infini ($\mu < 1$ et $\hat{\mu} > 1$)	VII-6
4.4 - Cas où $\langle \tau \rangle$ et $\langle \hat{\tau} \rangle$ sont infinis ($\mu < 1$ et $\hat{\mu} < 1$)	VII-8
4.5 - Comparaison de ces prédictions avec les résultats de simulations Monte Carlo du refroidissement VSCPT à 1 dimension.....	VII-9
5 - Etude quantitative de la distribution d'impulsion $P(p)$ des atomes piégés	VIII-1
5.1 - Rappel des arguments qualitatifs utilisés dans les premières descriptions du refroidissement subrecul	VIII-1
5.2 - Etablissement de l'expression donnant $P(p)$	VIII-2
5.3 - Etude du cas où $\langle \tau \rangle$ est infini et $\langle \hat{\tau} \rangle$ fini : $\mu < 1$ $\hat{\mu} > 1$	VIII-4
5.4 - Etude du cas où $\langle \tau \rangle$ et $\langle \hat{\tau} \rangle$ sont finis (μ et $\hat{\mu} > 1$).....	VIII-8
5.5 - Conclusion - Importance des statistiques de Lévy.....	VIII-10
OPTIMISATION DU REFROIDISSEMENT SUBRECU.....	IX-1
1 - Introduction	IX-1
2 - Brefs rappels sur le refroidissement Raman 1D	IX-1
3 - Refroidissement Raman 1D avec des impulsions carrées	IX-4
3.1 - Pourquoi est-il intéressant de changer la forme des impulsions ?	IX-4
3.2 - Valeur optimale de l'exposant α	IX-4
3.3 - Vérification expérimentale des idées précédentes.....	IX-5
4 - Optimisation du refroidissement Raman 1D (avec des impulsions carrées).....	IX-8
4.1 - Lien entre la largeur du trou Raman et la durée de l'impulsion carrée.....	IX-8
4.2 - Choix de la séquence d'impulsions.....	IX-8
4.3 - Lien entre la largeur p_0 du trou Raman et le taux d'excitation $1/\tau_0$ en dehors du trou Raman	IX-9
4.4 - Choix de la grandeur physique à optimiser.....	IX-9
4.5 - Calcul de la valeur optimale de la largeur p_0 du trou Raman.....	IX-10
4.6 - Discussion physique	IX-11
RÉCAPITULATION GÉNÉRALE	X-1
Filtrage et Recyclage.....	X-1
Importance de l'exposant $\mu = D/\alpha$	X-1
Forme des distributions d'impulsion (le long d'un axe).....	X-2
Appendice C - Lois de Lévy tronquées.....	X-3
Problème physique	X-3
Distribution stationnaire d'impulsion (le long d'une axe).....	X-3
Transition entre le régime des lois de Lévy et celui de la loi normale.....	X-4

Résumé du cours 1993-94 (Le cours 1994-95 n'a pas eu lieu)

Le cours 1993-1994 a poursuivi l'étude, commencée lors du cours précédent, de l'interférométrie atomique. Il s'agit de décrire et d'analyser des expériences récentes permettant d'observer des phénomènes d'interférence, analogues à ceux qui sont bien connus en optique, et où les ondes lumineuses sont remplacées par les ondes de de Broglie associées au centre de masse d'un atome.

Le cours commence par un bref rappel du formalisme théorique mis en place dans le cours précédent et reposant sur les intégrales de chemin de Feynman. On redonne l'expression du propagateur quantique permettant de décrire la propagation de la fonction d'onde d'une particule, et on étudie un certain nombre de situations simples (limite semiclassique, Lagrangiens quadratiques en coordonnées et vitesses) où la phase du propagateur est aisément calculable en fonction d'une intégrale de chemin évaluée le long d'une trajectoire classique. Une telle approche est particulièrement bien adaptée à l'analyse d'expériences d'interférométrie atomique en présence de champs extérieurs ayant une variation spatiale suffisamment lente (comme le champ de gravitation) ou de champs inertiels, apparaissant par exemple dans un référentiel en mouvement de rotation. Le déphasage entre les deux bras de l'interféromètre peut alors être écrit sous la forme d'une intégrale de chemin évaluée le long d'une trajectoire classique fermée. Pour des champs extérieurs ou inertiels suffisamment faibles, il est même possible d'utiliser la trajectoire libre, c'est-à-dire non perturbée par le champ.

Diffraction d'ondes de de Broglie atomiques par des réseaux de fentes

Une telle approche est tout d'abord appliquée au problème de la diffraction d'une onde plane de de Broglie par un réseau de fentes périodiquement espacées. Les angles de diffraction sont calculés en fonction de la longueur

d'onde de de Broglie λ de la particule incidente et de la distance d entre deux fentes successives.

Deux séries d'expériences réalisées, l'une au M.I.T. sur des atomes de Sodium, l'autre à Constance sur des atomes d'Hélium métastable, sont alors décrites car elles ont permis de mettre en évidence ces phénomènes de diffraction. On analyse également une troisième série d'expériences utilisant des réseaux circulaires de fentes concentriques (zones de Fresnel) et permettant de focaliser des ondes de de Broglie atomiques.

L'utilisation de trois réseaux de fentes, identiques et équidistants, permet de réaliser un interféromètre atomique à division d'amplitude. Le premier réseau R_1 décompose l'onde atomique incidente en deux ondes cohérentes qui sont diffractées par le deuxième réseau R_2 et viennent finalement se recombinaer sur le troisième réseau R_3 . Un tel interféromètre a été réalisé récemment au M.I.T. Il a l'avantage d'être achromatique. De plus, pour des fentes suffisamment rapprochées sur chaque réseau, et des distances suffisamment grandes entre R_1 et R_2 (ou R_2 et R_3), la séparation des deux faisceaux atomiques incidents au niveau de R_2 peut être supérieure à leur largeur. Il est possible alors d'insérer une cloison entre les deux faisceaux et de perturber de manière différente les atomes qui passent par l'un ou l'autre chemin, une telle perturbation étant détectée par un déplacement des franges observées à la sortie de l'interféromètre. Deux résultats récents obtenus au moyen d'un tel interféromètre sont alors décrits. L'un concerne la polarisation de l'état fondamental de l'atome de Sodium qui a pu être mesurée en appliquant un champ électrique sur l'un des deux côtés de la cloison, l'autre la mesure de la partie réelle de l'amplitude de diffusion vers l'avant lors de collisions des atomes de Sodium avec un gaz rare introduit sur l'un des deux côtés de la cloison.

Diffraction d'ondes de de Broglie atomiques par des ondes laser stationnaires quasi-résonnantes

Un atome traversant à angle droit une onde laser stationnaire quasi-résonnante subit une perturbation périodique dans l'espace. Il s'agit là d'une situation analogue à celle rencontrée lors de la traversée d'un réseau de fentes équidistantes. Le cours se poursuit par une analyse des différents phénomènes de diffraction qui peuvent être observés dans de telles conditions. L'étude est tout d'abord restreinte au cas où la durée T de traversée de l'onde stationnaire par l'atome est suffisamment brève pour que tout processus d'émission spontanée d'un photon par l'atome puisse être négligée.

Considérations générales

On commence par analyser les conséquences des principes de conservation. Comme les seuls processus possibles sont des absorptions et émissions induites

de photons laser par l'atome, l'impulsion de ce dernier ne peut varier que par des multiples entiers n de l'impulsion $\hbar k_L$ d'un photon laser, n étant pair si l'atome, partant de l'état fondamental g , se retrouve dans l'état g à l'issue du processus, n étant impair si l'atome, partant de g , se retrouve dans l'état excité e . Lorsque n est pair, le processus physique correspond à une redistribution de photons entre les deux ondes progressives formant l'onde laser : $n/2$ photons disparaissent d'une onde progressive pour réapparaître dans l'autre. Ces processus de redistribution sont prépondérants par rapport aux autres quand le désaccord de fréquence $\delta = \omega_L - \omega_A$ entre la fréquence laser ω_L et la fréquence atomique ω_A est suffisamment grand.

Comme l'onde laser est monocromatique de fréquence ω_L , l'énergie du champ laser ne change pas au cours d'un processus de redistribution. L'énergie $n\hbar\omega_L/2$ des $n/2$ photons qui disparaissent d'une onde est égale à celle, $n\hbar\omega_L/2$ des $n/2$ photons qui réapparaissent dans l'autre onde. La conservation de l'énergie globale entraîne alors que l'impulsion finale \mathbf{p}_f de l'atome doit avoir le même module que l'impulsion initiale \mathbf{p}_i , puisque l'énergie de l'atome, qui se réduit à l'énergie cinétique, est proportionnelle à p^2 . L'extrémité des vecteurs impulsion \mathbf{p}_f de l'atome, à l'issue de la traversée de l'onde, doit donc être située sur la même sphère que le vecteur \mathbf{p}_i décrivant l'impulsion initiale.

Une telle analyse conduit alors tout naturellement à distinguer deux régimes limites. Le premier correspond à une onde laser très focalisée, avec un rayon focal w_0 très petit. L'impulsion des photons laser a alors une dispersion de l'ordre de $\delta p \sim \hbar/w_0$ dans la direction perpendiculaire à la direction de propagation moyenne des ondes laser. Comme \mathbf{p}_i et \mathbf{p}_f diffèrent de n fois l'impulsion $\hbar k_L$ d'un photon laser (avec n pair), et que $\hbar k_L$ peut varier légèrement en direction, les extrémités de \mathbf{p}_i et \mathbf{p}_f peuvent être situées sur la même sphère, quelle que soit la direction initiale de \mathbf{p}_i (dans un certain intervalle angulaire autour d'une direction moyenne perpendiculaire à la direction de l'onde laser). Un tel régime, correspondant à des largeurs de traversée w_0 de l'onde laser très faibles, est appelé « régime de Raman-Nath ». L'autre régime correspond à des largeurs de traversée w_0 suffisamment grandes pour qu'on puisse considérer que tous les photons laser ont une impulsion laser $\hbar k_L$ exactement parallèle à la direction κ de l'onde laser. Les impulsions \mathbf{p}_i et \mathbf{p}_f qui diffèrent d'un nombre pair de fois $\hbar k_L$ doivent donc être symétriques par rapport à κ . La diffraction ne peut alors se produire que pour certaines directions bien définies de \mathbf{p}_i comme dans la diffraction de Bragg par un cristal. C'est pourquoi un tel régime est appelé « régime de Bragg ».

Régime de Raman-Nath

On montre tout d'abord que l'approximation à la base d'un tel régime consiste à négliger l'énergie cinétique de l'atome le long de l'onde laser ou, ce qui revient au même, à négliger le déplacement de l'atome le long de l'onde

laser au cours de la traversée de l'onde laser. La situation est alors tout à fait analogue à celle de la diffraction par un réseau de phase mince en optique.

Pour calculer le déphasage $\Phi(z)$ en chaque point z de traversée, il est commode d'utiliser la base des états de l'atome « habillé » par les photons laser. Un tel calcul est exposé en détail et conduit à des expressions analytiques pour les amplitudes des ondes diffractées, faisant intervenir des fonctions de Bessel. Les expressions obtenues sont interprétées physiquement et confrontées aux résultats expérimentaux obtenus au M.I.T. sur des atomes de Sodium.

Régime de Bragg

Dans la diffraction de Bragg d'ordre le plus bas, p_i et p_f diffèrent de $2\hbar k_L$. On montre que les états atomiques correspondants sont couplés par un processus Raman stimulé résonnant. A ce processus résonnant est associée une oscillation de Rabi dont la fréquence est calculée. L'effet des couplages des états initial et final avec d'autres états excités non résonnants est également évalué de manière à déterminer à quelle condition un tel couplage ne brouille pas l'oscillation de Rabi. Ces considérations sont généralisées à des processus de Bragg d'ordre supérieur, où p_i et p_f diffèrent de $4\hbar k_L$, $6\hbar k_L$... L'étude expérimentale du régime de Bragg est également présentée.

L'approche théorique utilisée pour le régime de Bragg s'applique également à l'étude des « Dopplérons », qui sont des processus résonnants où l'atome passe de l'état fondamental g à l'état excité e par un nombre impair de processus d'absorption et d'émission stimulée.

Lame séparatrice magnéto-optique

On revient au régime de Raman-Nath et on décrit une proposition récente de T. Pfau, C. S. Adams et J. Mlynek conduisant à des séparations angulaires mieux définies pour les ondes diffractées obtenues après traversée de l'onde laser.

Le schéma proposé utilise un effet Zeeman et une configuration laser présentant un gradient de polarisation. L'idée essentielle est qu'une telle configuration donne naissance à des niveaux d'énergie pour l'atome habillé variant de manière triangulaire avec la position z de traversée de l'onde laser, et non pas de manière sinusoïdale. Le calcul des intensités des ondes diffractées pour un tel réseau de phase mince conduit alors à un spectre d'intensités très resserré autour de deux valeurs opposées. Un tel dispositif pourrait donc jouer le rôle d'une lame séparatrice pour ondes de de Broglie permettant d'obtenir une séparation angulaire importante et bien définie.

Effet Stern et Gerlach optique

Dans les expériences analysées plus haut, l'extension latérale du paquet d'ondes atomique incident, le long de l'onde laser, est grande devant la longueur d'onde laser λ . Une autre situation intéressante est celle d'un paquet d'ondes incident très localisé, d'extension latérale très petite devant λ . Dans certaines conditions, un tel paquet d'ondes incident peut se séparer en deux paquets d'ondes cohérents se propageant avec des vitesses opposées le long de l'onde laser. C'est l'effet Stern et Gerlach optique.

Pour ce problème également, il est utile d'introduire les niveaux d'énergie de l'atome habillé par les photons laser. Au point de traversée, on a 2 niveaux dont les énergies présentent des gradients de signes opposés le long de l'onde laser. Si l'atome est dans une superposition linéaire des deux états correspondants, les forces s'exerçant sur chacune des deux composantes du paquet d'ondes vont être de signes opposés et le paquet d'ondes incident va se séparer en deux parties. On présente en détail un tel calcul et on précise le critère de non-adiabacité qui, lorsqu'il est satisfait, entraîne que l'atome entrant dans l'onde laser ne suit pas adiabatement le niveau habillé se raccordant par continuité à l'état fondamental g en dehors de l'onde laser. C'est dans de telles conditions que l'atome peut traverser l'onde laser en étant préparé dans une superposition linéaire des deux niveaux habillés et que l'effet Stern et Gerlach optique peut alors être observé.

Une expérience récente réalisée à Constance est également décrite. Elle a permis d'observer pour la première fois l'effet Stern et Gerlach optique et de vérifier ses principales caractéristiques.

Transition entre le régime diffractif et le régime diffusif

Le cours se poursuit par la présentation d'un modèle simple élaboré dans notre laboratoire et permettant de comprendre simplement comment le mouvement d'un atome dans une onde laser est perturbé quand la durée d'interaction T devient suffisamment grande devant la durée de vie radiative τ_R de l'état excité e pour que les processus d'émission spontanée, ignorés dans ce qui précède, ne puissent plus être négligés. En l'absence d'émission spontanée, l'évolution du système atome + champ laser est purement Hamiltonienne, et la traversée de l'onde laser transforme l'onde de de Broglie incidente en une superposition d'ondes de de Broglie cohérentes entre elles : c'est le « régime diffractif ». L'autre limite, où la durée d'interaction T est suffisamment longue devant τ_R pour que de nombreux processus d'émission spontanée aient le temps de se produire, correspond à une situation où le mouvement de l'atome, analogue à un mouvement Brownien, peut être décrit en termes de force moyenne et de coefficient de diffusion de l'impulsion.

C'est le « régime diffusif ». Le problème posé est de comprendre comment on passe continûment d'un régime à l'autre quand on fait croître la durée d'interaction T .

Le modèle simple utilisé pour aborder ce problème est celui de la traversée d'une onde laser stationnaire par un atome dans le régime de Raman-Nath, aucune restriction n'étant cependant faite sur les valeurs relatives de T et τ_R . A partir des équations du mouvement, une expression analytique simple est obtenue pour le propagateur de la fonction de Wigner représentant l'état du centre de masse de l'atome. Ce propagateur $G(x, q, T)$ peut être interprété comme une « quasi-probabilité » de transfert d'impulsion $\hbar q$ pour un atome traversant l'onde stationnaire au point x . On montre alors qu'un tel propagateur permet de comprendre de manière synthétique plusieurs effets physiques étudiés généralement avec des formalismes différents : diffraction d'une onde de Broglie et effet Stern et Gerlach optique (à la limite $T \ll \tau_R$), force moyenne et coefficient de diffusion de l'impulsion (à la limite $T \gg \tau_R$), transition du régime diffractif au régime diffusif et destruction progressive des cohérences spatiales (pour $T \sim \tau_R$), statistique du nombre de photons de fluorescence émis pendant un temps donné T (pour $T \sim \tau_R$ et $T \gg \tau_R$).

Effets d'interférence quantique pour un atome situé à un nœud d'une onde stationnaire

Un atome situé à un nœud d'une onde stationnaire ne « voit » pratiquement pas de lumière et émet donc très peu de photons de fluorescence. La théorie standard des forces radiatives prévoit cependant, dans le régime diffusif, un coefficient de diffusion de l'impulsion de l'atome, aussi important aux nœuds qu'aux ventres. On présente une approche simple, développée au laboratoire, permettant de résoudre un tel paradoxe.

L'approche suivie consiste à partir d'excitations élémentaires du mode du champ de rayonnement correspondant à l'onde laser stationnaire. Chacun des photons associés à ces excitations élémentaires est dans une superposition linéaire de deux états d'impulsions opposées. On étudie alors la diffusion d'un tel photon par un atome dont l'état est décrit par un paquet d'ondes très localisé au voisinage d'un nœud du mode correspondant à l'état stationnaire. Une expression analytique est obtenue pour l'état du système atome + champ à l'issue du processus de diffusion. L'étude de cette expression permet alors d'interpréter physiquement la diffusion d'impulsion « anormale » comme étant due à une interférence quantique entre deux amplitudes de diffusion de photon par l'atome, l'une vers l'avant, l'autre vers l'arrière. Une telle approche permet également de comprendre l'importance des corrélations quantiques qui s'établissent entre l'atome et le champ et de montrer qu'elles sont responsables de l'apparition d'une redistribution de photons entre les

deux ondes progressives formant l'onde stationnaire, corrélée avec l'impulsion atomique. C'est une telle redistribution qui est responsable de la diffusion d'impulsion atomique, et non pas la diffusion des photons incidents vers les modes initialement vides du champ de rayonnement.

Effets Aharonov-Bohm scalaire et vectoriel *Généralisations à des particules neutres*

En 1959, Aharonov et Bohm ont proposé des expériences d'interférométrie sur des ondes de de Broglie électroniques, démontrant l'importance du rôle joué par les potentiels scalaire et vecteur en mécanique quantique. Dans ces schémas expérimentaux, l'électron traverse des régions de l'espace où les champs électrique et magnétique sont rigoureusement nuls, alors que les potentiels scalaire et vecteur ne le sont pas. Aharonov et Bohm montrent alors que ces potentiels peuvent donner naissance à un déphasage entre les fonctions d'onde se propageant dans les deux bras de l'interféromètre, déphasage qui se traduit par un déplacement des franges d'interférence. Ce déphasage est de nature topologique : il ne dépend pas de la forme exacte des chemins suivis dans les deux bras de l'interféromètre. Il est également indépendant de la vitesse des particules. Le cours 1993-1994 se termine par une présentation des effets Aharonov-Bohm scalaire et vectoriel et par une discussion des possibilités de généraliser de tels effets à des particules neutres comme des neutrons ou des atomes.

Dans l'effet Aharonov-Bohm scalaire, l'électron traverse, dans les deux bras de l'interféromètre, des cylindres creux equipotentiels entre lesquels on applique une différence de potentiel V pendant un certain intervalle de temps T au cours duquel les paquets d'ondes électroniques sont entièrement contenus à l'intérieur des cylindres. L'électron ne « voit » alors aucun champ électrique et n'est soumis à aucune force électrique pendant toute la durée de l'expérience. Il apparaît cependant un déphasage Φ entre les deux bras égal à $-qVT/\hbar$ où q est la charge de l'électron. On présente un argument de Furry et Ramsey montrant qu'un tel déphasage est essentiel pour préserver la cohérence interne de la mécanique quantique. Sans un tel déphasage, il serait en effet possible de déterminer par quel chemin l'électron passe (en mesurant par exemple la charge induite sur un cylindre par le passage à l'intérieur d'une particule chargée), sans perturber le système de franges observables à la sortie de l'interféromètre.

L'effet Aharonov-Bohm scalaire, tel qu'il a été proposé en 1959, n'a pas été encore observé. Récemment, de nouvelles expériences, généralisant un tel effet à des particules neutres, ont été réalisées. Ces expériences, effectuées sur des neutrons et des atomes d'hydrogène, sont passées en revue et décrites. Elles diffèrent de l'effet Aharonov-Bohm scalaire original dans la mesure où

la particule se propage dans des régions où les champs sont non nuls, et pas seulement les potentiels. Par contre, elles partagent avec l'effet Aharonov-Bohm scalaire un certain nombre de propriétés importantes qui ont motivé leur réalisation : absence de force agissant sur le centre de masse de la particule, insensibilité du déphasage à la vitesse de la particule, et par suite possibilité d'observer des franges même si la différence de marche associée au déphasage Aharonov-Bohm est supérieure à la longueur de cohérence des paquets d'ondes.

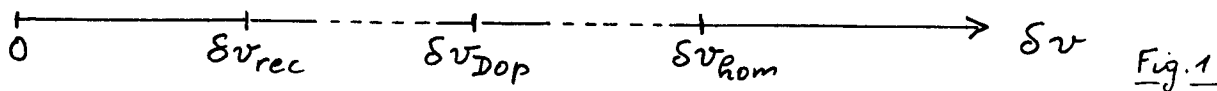
Dans l'effet Aharonov-Bohm vectoriel, les deux bras de l'interféromètre à électron enferment un solénoïde très long alimenté par un courant. Le champ magnétique B n'est non nul qu'à l'intérieur du solénoïde et aucune force magnétique ne s'exerce donc sur l'électron qui évolue à l'extérieur du solénoïde. Le potentiel vecteur est cependant non nul dans cette région et il fait apparaître un déphasage Φ entre les deux bras de l'interféromètre égal à qF/\hbar où F est le flux du champ B à travers la surface enfermée entre ces deux bras.

Un effet analogue au précédent a été proposé pour des particules neutres par Aharonov, Anandan et Casher. Il concerne des particules neutres possédant un moment magnétique μ et évoluant dans un champ électrique statique E dont la configuration est telle qu'aucune force électrique ne s'exerce sur le centre de masse de la particule. Un certain nombre de résultats concernant la dynamique d'un moment magnétique dans un champ électrique sont établis et discutés physiquement. Ils permettent de préciser les caractéristiques importantes de l'effet Aharonov-Anandan-Casher et de souligner les analogies et différences entre un tel effet et l'effet Aharonov-Bohm vectoriel. Des expériences récentes, ayant permis d'observer un tel effet sur des neutrons et des molécules TIF, sont également passées en revue.

Thème général : Atomes ultrafroids - Approches statistiques et perspectives nouvelles.

① Etat actuel du refroidissement laser

a - Quelques repères importants sur l'échelle des vitesses



Largeur homogène Δv_{hom}

$$k \Delta v_{hom} \approx \Gamma \quad (1.1)$$

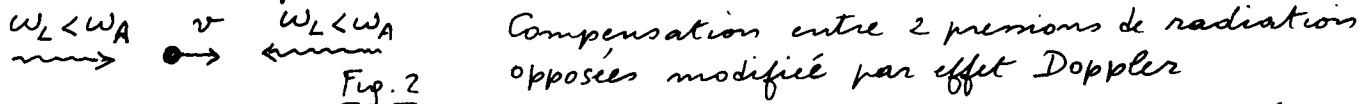
$$k = 2\pi/\lambda_{laser}$$

Γ = Largeur naturelle du niveau excité e

Δv_{hom} : Largeur du trou creusé dans un profil Doppler large par une excitation laser monochromatique (Spectro. sub-Doppler)

Limite Doppler Δv_{Dop}

- Principe du refroidissement Doppler (Hansch, Schawlow, Wineland, Dehmelt)



- Limite due à l'échauffement produit par l'émission spontanée (Wineland - Itano - Gordon - Ashkin - Letokhov - Minsgin - Pavlik).

$$M \Delta v_{Dop}^2 \approx \hbar \Gamma \quad (1.2)$$

$$\frac{\Delta v_{Dop}}{\Delta v_{hom}} \approx \sqrt{\epsilon} \quad (1.3)$$

$$\epsilon = \frac{E_R}{\hbar \Gamma} = \frac{\hbar^2 k^2 / 2M}{\hbar \Gamma} \ll 1 \quad (1.4)$$

Limite associée au recul Δv_{rec}

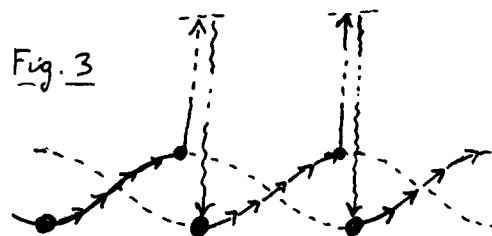
$$\Delta v_{rec} = \hbar k / M \quad (1.5)$$

Δv_{rec} : vitesse de recul de l'atome (de masse M) lors de l'émission ou de l'absorption d'un seul photon (d'impulsion $\hbar k$).

- Δv_{rec} est la limite des méthodes de refroidissement sub-Doppler, beaucoup plus efficaces que le refroidissement Doppler, apparues à la fin des années 80 (Gaithersburg, Paris, Stanford)

Exemple : refroidissement Sisyphé (Paris)

Par suite de corrélations entre les modulations spatiales de déplacements lumineux et de taux de pompage optique, l'atome en mouvement gravit plus souvent des collines de potentiel qu'il n'en descend (voir cours 90-91)



b - Le refroidissement subrecul

Définition

$$0 < \Delta v < \Delta v_{rec} \iff \delta p < \hbar k \quad (1.6)$$

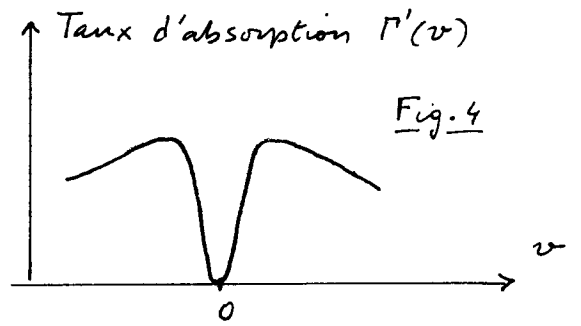
$$\delta p < \hbar k \rightarrow \hbar / \delta p > \hbar / \hbar k \rightarrow \lambda_{deBroglie} = \hbar / \delta p > \lambda_{laser} = 2\pi / k \quad (1.7)$$

Les atomes deviennent délocalisés dans l'onde laser.

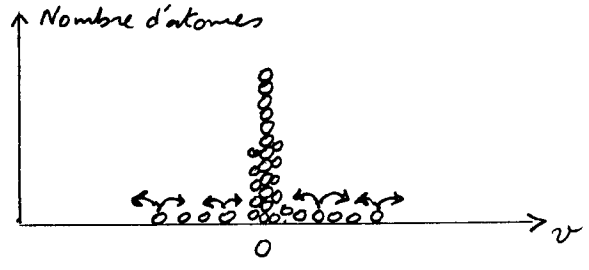
Principe général des méthodes de refroidissement subrecul.

Combinaison de 2 effets :

(i) Filtrage dans l'espace des vitesses bloquant l'absorption de lumière par les atomes $v \approx 0$.
↳ Suppression pour ces atomes ultrafroids du recul aléatoire consécutif à la réémission spontanée de photons.



(ii) Recyclage des atomes.
Pompage optique des atomes dans l'espace des vitesses transférant les atomes des états $v \neq 0$ (où ils absorbent de la lumière) vers les états $v \approx 0$ où ils se retrouvent piégés et s'accumulent.



Les 2 méthodes subrecul actuellement démontrées

(i) VSCPT ("Velocity Selective Coherent Population Trapping") - Paris 1988.
(voir cours 91-92)

Filtrage : blocage de l'absorption par interférence quantique destructive entre 2 amplitudes d'absorption (introduction, grâce à l'effet Doppler, d'une sélectivité en vitesse dans les états "noirs" découverts à Pise en 1976).

Recyclage : Marche au hasard dans l'espace des v - Diffusion d'impulsion due aux photons émis spontanément par les atomes $v \neq 0$.

(ii) Raman Stanford 1992 - Paris 1994

Filtrage : Impulsions Raman dont le profil spectral est ajusté pour ne pas exciter les atomes $v \approx 0$.

Recyclage : Transferts d'impulsions associés aux impulsions Raman poussant les atomes vers $v = 0$ dans l'espace des v .

C - Les problèmes posés par le refroidissement subrecul.

Exemples de problèmes

- Les 2 méthodes précédentes ont été démontrées d'abord à 1 dimension. Peut-on les étendre à 2 et 3 dimensions ?
- Peut-on améliorer VSCPT en introduisant une friction qui augmente l'efficacité du recyclage ? Importante pour le passage à 2D et 3D, car une marche au hasard pure dans l'espace des v , devient de plus en plus inefficace, quand la dimension de l'espace augmente, pour ramener les atomes vers $v = 0$.
- Comment allonger le temps d'interaction Θ entre atomes et laser ? Peut-on étendre ces méthodes à des atomes piégés ?
- Quelles sont les limites de ces méthodes aux temps longs ($\Theta \rightarrow \infty$) ? Jusqu'où peut-on diminuer la largeur δv de la distribution des vitesses ? Vers quelle valeur tend la proportion d'atomes refroidis ? Augmente-t-on la densité dans l'espace des phases ?
- Pour des conditions expérimentales données, par exemple pour une valeur donnée de Θ , comment optimiser le refroidissement ? Quelle est la meilleure stratégie ?

Les difficultés d'une analyse quantitative.

- Nécessité d'un traitement complètement quantique ($\lambda_{\text{de Broglie}} > \lambda_{\text{Laser}}$)
- Difficultés rencontrées par les méthodes traditionnelles de l'optique quantique (équations de Bloch optiques) aux temps longs ($\Theta \rightarrow \infty$):
 - Discrétisation de plus en plus fine de l'impulsion atomique, qui devient nécessaire à cause de l'apparition de structures de plus en plus étroites dans la distribution d'impulsion quand $\Theta \rightarrow \infty$.
 - Intervalle total à prendre en compte sur l'axe des p qui devient de plus en plus grand à cause de la diffusion en impulsion qui croît quand $\Theta \rightarrow \infty$.

↳ Impossibilité de résoudre numériquement les équations de Bloch optiques à la limite $\Theta \rightarrow \infty$, et donc de déterminer de cette façon les limites ultimes du refroidissement subrecoil.

Nécessité de nouvelles approches plus globales et plus performantes.

② Etat actuel du piégeage d'atomes neutres

a - Pourquoi est-il important de piéger des atomes neutres ?

- Temps de confinement plus longs, permettant un refroidissement plus efficace, une précision plus élevée.
- Possibilité d'atteindre des densités atomiques n plus élevées.
But poursuivi par plusieurs équipes : atteindre les régimes de dégénérescence quantique $n \lambda_{\text{de Broglie}}^3 > 1$

b - Pourquoi faut-il au préalable refroidir les atomes ?

- La profondeur U des pièges pour atomes neutres est très faible (inférieure au degré Kelvin), bien plus faible que celle des pièges à ions (où on peut agir sur la charge de l'ion). Le refroidissement laser des atomes permet de diminuer suffisamment l'énergie cinétique désordonnée des atomes pour qu'ils puissent rester piégés dans un puits de potentiel de profondeur faible.
- Le développement des méthodes de refroidissement laser permettant d'atteindre des températures de plus en plus basses explique le foisonnement des nouvelles méthodes de piégeage qui ont été proposées et démontrées au cours des dernières années.

c - Pièges dissipatifs et pièges non dissipatifs

2 grandes catégories de pièges suivant qu'existent ou non des forces de friction (dissipatives) superposées aux forces de rappel assurant le piégeage des atomes

Exemples de piège dissipatif

(i) Piège magnéto-optique ou MOT ("Magneto Optical Trap")

- Proposition à 1D (J. Dalibard 1986) - Extension à 3D et démonstration (Bell-MIT 1987)
- le plus couramment utilisé dans le monde.
- Utilise la pression de radiation résonnante exercée par des ondes laser convergemment polarisées en présence d'un gradient de champ magnétique
- Combine piégeage et friction (Doppler et sub-Doppler). Fonctionne en cellule relativement profonde et de grand volume

(ii) Réseaux optiques brillants (Paris, Garching, Munich)

Atomes piégés dans un réseau périodique de micropuits de potentiel.

Exemples de pièges non dissipatifs :

(i) Pièges magnétostatiques (sans lumière).

Gradients de champ magnétique \vec{B} . Configurations présentant un minimum du module $|\vec{B}|$ de \vec{B} . Les atomes dont l'énergie magnétique croît avec $|\vec{B}|$ ("Low-field seekers") sont attirés vers les minima de $|\vec{B}|$.

Gaithersburg (1985), MIT (1987), Amsterdam (1988)

(ii) Gradients d'intensité d'une onde laser très désaccordée de résonance

Suivant le signe du désaccord $\delta = \omega_L - \omega_A$ entre la fréquence laser ω_L et la fréquence atomique ω_A , les atomes sont attirés ($\delta < 0$) vers les régions de haute intensité ou repoussés hors de ces régions ($\delta > 0$)

- Foyer d'une onde laser très désaccordée (Bell 1986)
- Cavité gravitationnelle : atomes rebondissant sur le "mur" associé à une onde évanescente à la surface d'un miroir (Stanford, Paris, Gaithersburg)
- Réseaux optiques noirs ou gris (Paris, Munich, Constance)

d - Problèmes posés par les pièges

Limitations de densité

Diffusion multiple qui introduit une répulsion effective entre atomes, ou collisions mettant en jeu des états excités avec des grandes sections efficaces. Phénomènes apparaissant essentiellement dans des pièges dissipatifs comme le MOT.

Solutions : Ménager une région de l'espace où les atomes sont protégés des effets néfastes de la lumière. Trou dans le faisceau de repompage. Les atomes sont maintenus temporairement dans un niveau hyperfin non résonnant où leur densité peut croître.

Piège "Dark spot" (Dark Spontaneous - Force Optical Trap)
(MIT 1993)

Perturbations des niveaux d'énergie

Inévitable : L'absence de monopole (comme la charge globale d'un ion) nécessite, pour piéger un atome neutre, de distordre ses niveaux d'énergie interne.

Inconvénients pour les mesures de haute précision ou les tentatives de généraliser les méthodes de refroidissement subséquent à des atomes piégés.

Solutions possibles

- Couper brusquement les champs de piégeage.

Il n'est pas toujours facile de couper brusquement un champ magnétique. Intérêt des pièges comme le TROP ("Trap Relying on Optical Pumping - Paris 1994), pièges dissipatifs basés sur le pompage optique et n'utilisant pas de champ magnétique.

- Faire en sorte que les différences d'énergie entre sous-niveaux fondamentaux ne varie pas d'un point à l'autre dans le piège (condition de résonance Raman non modifiée par le piégeage)

Pièges laser très désaccordés ou pièges électrostatique combinant déplacements lumineux et déplacements Stark (Paris 1995)

Fuites dans les pièges magnétostatiques

Transitions non adiabatiques de Majorana faisant passer, au voisinage d'un zéro de $|\vec{B}|$, les atomes dans un niveau non piégeant.

Solutions possibles

- Utiliser des configurations de champ sans zéros pour $|\vec{B}|$
Pièges de Ioffé (MIT Amsterdam)
- Empêcher les atomes d'arriver en un zéro de $|\vec{B}|$ en les repoussant au moyen d'un faisceau laser très désaccordé (MIT)
- Faire tourner, au moyen de champs magnétiques auxiliaires, le zéro de $|\vec{B}|$ suffisamment rapidement dans l'espace pour que le potentiel de piégeage moyenné n'ait plus de zéros
Piège TOP ("Time-Averaged Orbiting Potential" Boulder 1995)

③ Quelques tendances d'évolution du domaine de recherche

a - Développement des domaines d'application des atomes ultrafroids

Métrie et spectroscopie à haute résolution

- Exemple des horloges atomiques à atomes froids (Fontaines à atomes - Projets d'horloge en satellite)
Importance pour le système GPS ("Global Positioning System") et les tests de relativité générale.
- Exemple de la mesure de \hbar/M

Optique atomique et interférométrie atomique

Extension aux ondes de de Broglie atomiques des dispositifs et des méthodes utilisées pour la lumière (voir cours 92-93 et 93-94)

Optique non linéaire

Les atomes ultrafroids utilisés comme un milieu non linéaire pour réaliser de la conjugaison de phase, des états comprimés...

b - Des points de contact fructueux avec d'autres disciplines ou d'autres domaines de recherche

Les réseaux optiques d'atomes

- Atomes piégés et refroidis aux nœuds d'un réseau spatial périodique de micropuits de potentiel créés par la lumière
- Utilisation de concepts développés en physique des solides (Bandes de niveaux d'énergie, Oscillations de Bloch...)

Simulations Monte Carlo et vols de Lévy

- Nouvelles méthodes d'analyse quantitative des limites ultimes du refroidissement laser - Approches statistiques beaucoup plus performantes que les équations de Bloch optiques.
- Echanges fructueux avec la physique statistique (diffusion anormale), la théorie de la mesure (sauts quantiques).

Le refroidissement évaporatif

- Méthode de refroidissement très efficace utilisant les collisions élastiques entre atomes piégés dans un piège non dissipatif.
Principe: Lors d'une collision entre 2 atomes piégés, l'un des 2 atomes peut acquérir une énergie suffisante pour s'échapper du piège. Après rethermalisation par collisions, les atomes restant dans le piège ont une énergie moyenne, et donc une température, plus basse.

- Méthode initialement développée lors des recherches sur l'hydrogène polarisé (MIT, Amsterdam), et étendue très récemment avec beaucoup de succès à des alcalins piégés, préalablement refroidis par laser (MIT, Stanford, Boulder, Houston)

C - Vers de nouveaux états de la matière

- Observation très récente par l'équipe de E. Cornell à Boulder (M.H. Anderson, J.R. Ensher, M.R. Matthews, C.E. Wieman, E.A. Cornell, Science, 269, 198, 1995) d'une condensation de Bose Einstein sur des atomes ^{87}Rb , piégés dans un piège TOP après refroidissement laser, puis refroidis par évaporation. Première observation d'une condensation d'un gaz de Bose-Einstein : Nombre macroscopique d'atomes se condensant dans l'état fondamental du piège.
- Autres observations du même type sur des atomes de ^7Li (C.C. Bradley, C.A. Sackett, J.J. Tollett, R.G. Hulet, PRL 75, 1687, 1995)
- Perspectives fascinantes ouvertes par la réalisation de tels condensats d'atomes.
- Etude, par plusieurs groupes, de divers schémas pour réaliser un "laser à atomes", où un nombre macroscopique d'atomes serait condensé dans un mode unique d'une cavité atomique par interaction avec un réservoir non thermique.
Pompage optique des atomes dans un mode de la cavité avec amplification due au facteur de Bose et pertes sélectives privilégiant un mode.

④ Buts du cours 1995-96

- Décrire un certain nombre de développements récents sur les atomes ultrafroids, en privilégiant des approches générales comme les approches statistiques (vols de Lévy) donnant un éclairage nouveau sur les limites ultimes du refroidissement laser.
- Aborder l'étude d'autres méthodes de refroidissement, comme le refroidissement évaporatif et préparer ainsi le terrain pour les cours des années ultérieures où seront abordés les effets de dégénérescence éventuelle.

Références générales

Comptes rendus des dernières conférences de Physique Atomique (Boulder - Août 1994) et de Spectroscopie Laser (Capri, Juin 1995)

Des références plus détaillées seront données dans les chapitres suivants de ce cours sur les sujets qui y seront abordés.

① Introduction

1-1 Revue de quelques types d'effet Sisyphes déjà connus

Principe de l'effet Sisyphes

- Système atomique avec des niveaux d'énergie modulés spatialement.
- L'atome arrive dans un tel niveau, y reste un certain temps et en repart.
- Entre l'instant d'arrivée et l'instant de départ, l'atome gravite en moyenne plus de collines de potentiel qu'il n'en descend, ce qui le ralentit.
- L'énergie potentielle ainsi gagnée est ensuite dissipée sous forme de rayonnement.

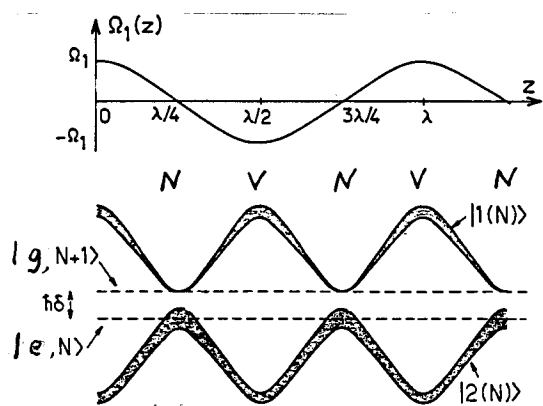
1^{er} exemple : effet Sisyphes à haute intensité (ou mélanges "bleus") [1-2]

Fig. 1

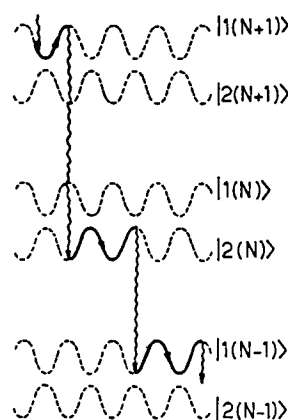


Fig. 2

- Atome à 2 niveaux e, g dans une onde stationnaire laser intense désaccordée vers le bleu ($\delta = \omega_L - \omega_A > 0$)
- Les énergies des niveaux habillés du système "atome + photons laser" sont modulées spatialement (Fig. 1). Aux noeuds N , la fréquence de Rabi $\Omega_1(z)$ est nulle et les états habillés $|1(N)\rangle$ et $|2(N)\rangle$ coïncident avec les états non couplés $|g, N+1\rangle$ et $|e, N\rangle$, séparés par $\hbar\delta$. $|g, N+1\rangle$ est au dessus de $|e, N\rangle$ puisque $\delta > 0$. Aux ventres V , la fréquence de Rabi est maximale en module, et la séparation entre $|1(N)\rangle$ et $|2(N)\rangle$ est maximale.
- Aux noeuds, $|1(N)\rangle = |g, N+1\rangle$ est stable radiativement et n'a pas de largeur, alors que $|2(N)\rangle = |e, N\rangle$ est instable et a la largeur naturelle Γ de e . Aux ventres V , si $|\Omega_1| \gg \delta$, les 2 niveaux habillés $|1(N)\rangle$ et $|2(N)\rangle$ contiennent la même proportion de l'état instable $|e, N\rangle$ et ont la même largeur $\Gamma/2$.
- Quel que soit le niveau habillé sur lequel on se déplace le long de Oz , la largeur radiative est la plus grande, et donc le temps de départ est le plus grand, au sommet des collines de potentiel.

↳ Dans la cascade radiative de l'atome habillé en mouvement le long de l'axe Oz , l'atome arrive dans un niveau habillé préférentiellement au fond d'une vallée et en repart au sommet d'une colline (Fig. 2)

2^{ème} exemple : effet Sisyphes à basse intensité - Refroidissement sub-Doppler [3]

- Pompage optique et déplacements lumineux dépendant de la polarisation lumineuse.
- En présence d'une modulation de polarisation (cas de la configuration

lin \perp lin de la Fig. 3a), les déplacements lumineux des 2 sous-niveaux $g_{\pm 1/2}$ sont modulés spatialement de même que les temps de pompage optique d'un sous-niveau à l'autre.

- Les corrélations entre ces 2 modulations peuvent être telles que l'atome en mouvement gravit plus de collines de potentiel qu'il n'en descend.

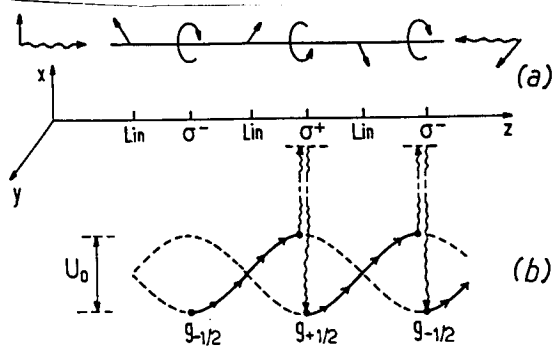


Fig. 3

3^{ème} exemple : effet Sisyphus assisté par champ magnétique [4-7]
 Effet "MASE" ("Magnetically Assisted Sisyphus Cooling") ou "MILC" ("Magnetically Induced Laser Cooling").

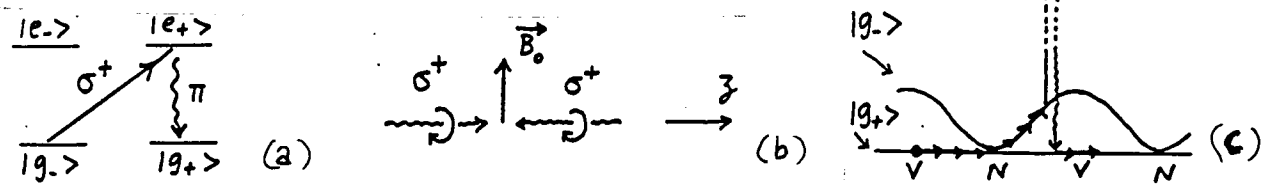


Fig. 4

- Atome avec une transition $J_g=1/2 \leftrightarrow J_e=1/2$ (Fig. 4a) dans une onde laser stationnaire σ^+ (Fig. 4b), sans gradient de polarisation. Les atomes sont pompés optiquement dans $|g_+>$ (Fig. 4a). Le sous-niveau $|g_+>$ n'est pas déplacé, alors que le déplacement de $|g_->$, positif si $\delta = \omega_L - \omega_A > 0$, est modulé spatialement.
- On ajoute un petit champ magnétique statique \vec{B}_0 perpendiculaire aux ondes laser (Fig. 4b).
- Le mélange entre les fonctions d'ondes produit par \vec{B}_0 est maximal au voisinage des noeuds N. Un atome en mouvement le long de Oz et initialement dans $|g_+>$ peut donc passer dans $|g_->$ au voisinage d'un noeud. Il gravit alors la colline de potentiel en ayant une probabilité de plus en plus grande, quand il se rapproche d'un ventre V, d'être repompé dans $|g_+>$.

Dans les 3 exemples précédents, la dissipation d'énergie est assurée par les photons émis spontanément qui ont, en moyenne, une énergie plus grande que les photons laser absorbés.

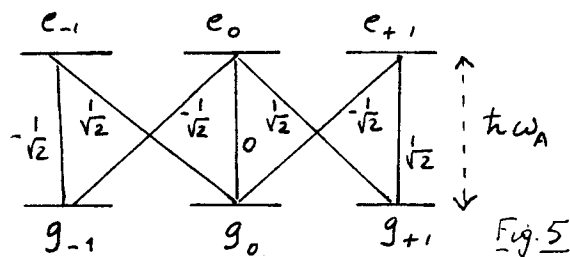
1.2 Buts de ce cours

- Montrer qu'un refroidissement Sisyphus peut coexister avec un refroidissement VSCPT subrecoil utilisant des états noirs sélectifs en vitesse. Un tel résultat est important car la friction associée à l'effet Sisyphus augmente considérablement l'efficacité du remplissage des états noirs. La proportion d'atomes refroidis dans le piège subrecoil peut être alors beaucoup plus importante, surtout à 2D et 3D.
- Identifier, sur un modèle semi-classique simple les mécanismes physiques permettant à l'atome d'effectuer des transitions de l'état non couplé vers l'état couplé dont l'énergie est modulée spatialement.
- Evaluer l'ordre de grandeur de la force de friction et étudier sa dépendance vis à vis des divers paramètres.
- Donner un aperçu de ^{quelques} approches quantiques, indispensables pour étudier la phase de refroidissement VSCPT.
- Références : [8-10]

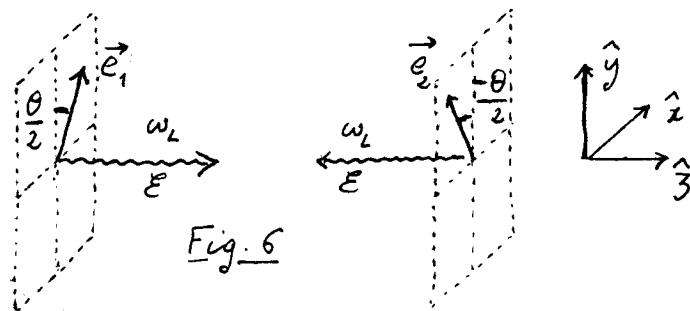
② Le modèle

2.1 Transition atomique et configuration laser

- Transition $J_g = 1 \leftrightarrow J_e = 1$
Intérêt d'un tel choix : on sait [voir § 8] qu'il y a toujours un état parfaitement noir quel que soit le nombre de dimensions.
Pour toute configuration laser, il y aura toujours un refroidissement VSCPT.



- de même amplitude E et fréquence omega_L
2 ondes laser se propageant en sens opposés le long de l'axe O_z avec des polarisations linéaires \vec{e}_1 et \vec{e}_2 faisant des angles $+\theta/2$ et $-\theta/2$, respectivement, avec l'axe \hat{y} .



Configuration "lin ∇ lin"

Quand $\theta \neq \pi/2$, l'intensité totale est modulée spatialement le long de \hat{z} .

Il en est de même des déplacements lumineux de certains niveaux et un effet Sisyphe peut apparaître.

- Expression du champ laser

$$\vec{E}(z, t) = \vec{E}^{(+)}(z) e^{-i\omega_L t} + c.c... \quad (2.1)$$

Si l'on prend

$$\vec{E}^{(+)}(z) = \frac{E}{\sqrt{2}} \left[\cos(kz + \frac{\theta}{2}) \vec{e}_{+1} + \cos(kz - \frac{\theta}{2}) \vec{e}_{-1} \right] \quad (2.2)$$

avec

$$\vec{e}_{\pm 1} = \mp (\vec{e}_x \pm i\vec{e}_y) / \sqrt{2} \quad (2.3)$$

on trouve

$$\vec{E}^{(+)}(z) = -i \frac{E}{2} \left[\vec{e}_1 e^{ikz} + \vec{e}_2 e^{-ikz} \right] \quad (2.4)$$

avec

$$\vec{e}_1 = \vec{e}_x \sin \frac{\theta}{2} + \vec{e}_y \cos \frac{\theta}{2} \quad \vec{e}_2 = -\vec{e}_x \sin \frac{\theta}{2} + \vec{e}_y \cos \frac{\theta}{2} \quad (2.5)$$

ce qui correspond bien à la configuration de la figure 6.

D'après (2.2), on peut encore considérer la configuration laser comme une superposition de 2 ondes laser stationnaires σ^+ et σ^- , déphasées l'une par rapport à l'autre.

2.2 Approximations

- On se limite ici à un problème à 1 dimension.
- Les variables externes du centre de masse sont traitées classiquement. Traitement valable si $\lambda_{de\ Broglie} \ll \lambda_{laser}$, c-à-d tout que $Sp > \hbar k$. On désire étudier le pré-refroidissement Sisyphe précédant l'apparition du régime subrecoil.
- Vitesse v imposée. On "tire" l'atome à vitesse fixe v et on cherche à calculer la force moyenne qu'il peut exercer sur lui pour lui donner un tel mouvement. On néglige ainsi les changements de vitesse aléatoires communiqués à l'atome par les photons émis spontanément, phénomène qui joue un rôle très important dans le régime subrecoil (diffusion de l'atome vers l'état noir)
- On interprétera les phénomènes physiques à la limite des grands désaccords
Désaccord $\delta = \omega_L - \omega_A \gg$ largeur naturelle Γ (2.6)
- On se limite aux 3 sous-niveaux Zeeman g_{-1}, e_0, g_{+1} , car le sous-niveau g_0 est très rapidement vidé par pompage optique et les atomes ne peuvent ensuite y revenir à cause de la nullité du coefficient de Clebsch-Gordan $g_0 \leftrightarrow e_0$.

Intensité lumineuse totale

- Dans (2.2), les 2 vecteurs polarisation \vec{e}_{\pm} , sont orthogonaux. L'intensité lumineuse totale varie donc comme la somme des carrés des 2 coefficients de \vec{e}_{\pm} . On introduira donc le paramètre sans dimension :

$$D(z) = \cos^2(kz + \frac{\theta}{2}) + \cos^2(kz - \frac{\theta}{2}) = 1 + \cos\theta \cos 2kz \quad (2.7)$$

- Comme $D(z)$, l'intensité totale est modulée spatialement avec une période spatiale $2\pi/2k = \lambda/2$. $D(z)$ oscille entre une valeur minimale $1 - \cos\theta = 2\sin^2\frac{\theta}{2}$ atteinte pour $\cos 2kz = -1$ ($z = \lambda/4, 3\lambda/4 \dots$) et une valeur maximale $1 + \cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2}$ atteinte pour $\cos 2kz = 1$ ($z = 0, \lambda/2 \dots$)

Hamiltonien d'interaction $V_{AL}(z)$ entre atome et laser

En se limitant aux 3 sous-niveaux g_{-1} , e_0 et g_{+1} et en utilisant les coefficients de Clebsch-Gordan de la figure 5, on obtient :

$$V_{AL}(z) = \frac{\hbar\Omega}{2} \left[-|e_0\rangle\langle g_{-1}| \cos(kz + \frac{\theta}{2}) + |e_0\rangle\langle g_{+1}| \cos(kz - \frac{\theta}{2}) \right] e^{-i\omega_L t} \quad (2.8)$$

$$\text{ou} \quad \Omega = -\frac{1}{\hbar} \mathcal{D} \mathcal{E} \quad (2.9)$$

est la fréquence de Rabi associée à l'amplitude \mathcal{E} du champ et \mathcal{D} l'élément de matrice réduit du dipôle atomique.

Etat couplé $|\Psi_C(z)\rangle$ et état non couplé $|\Psi_{NC}(z)\rangle$

- La forme (2.8) de $V_{AL}(z)$ suggère d'introduire les 2 combinaisons linéaires orthogonales suivantes de $|g_{+1}\rangle$ et $|g_{-1}\rangle$:

$$\begin{cases} |\Psi_C(z)\rangle = \frac{1}{\sqrt{D(z)}} \left[\cos(kz - \frac{\theta}{2}) |g_{+1}\rangle - \cos(kz + \frac{\theta}{2}) |g_{-1}\rangle \right] \end{cases} \quad (2.10.a)$$

$$\begin{cases} |\Psi_{NC}(z)\rangle = \frac{1}{\sqrt{D(z)}} \left[\cos(kz + \frac{\theta}{2}) |g_{+1}\rangle + \cos(kz - \frac{\theta}{2}) |g_{-1}\rangle \right] \end{cases} \quad (2.10.b)$$

Avec ces nouveaux états, $V_{AL}(z)$ peut être réécrit sous la forme

$$\text{ou} \quad V_{AL}(z) = \frac{\hbar\Omega(z)}{2} \left[|e_0\rangle\langle\Psi_C(z)| e^{-i\omega_L t} + |\Psi_C(z)\rangle\langle e_0| e^{i\omega_L t} \right] \quad (2.11)$$

$$\text{ou} \quad \Omega(z) = \Omega \sqrt{D(z)} \quad (2.12)$$

est une fréquence de Rabi dépendant de z et proportionnelle à la racine carrée de l'intensité lumineuse totale en z .

Il apparaît ainsi clairement que, dans l'état fondamental, seul l'état $|\Psi_C(z)\rangle$ est couplé au champ laser alors que $|\Psi_{NC}(z)\rangle$ ne l'est pas.

- Pour la suite des calculs de ce chapitre, il est utile de calculer les dérivées spatiales de $|\Psi_C(z)\rangle$ et $|\Psi_{NC}(z)\rangle$. Un calcul simple donne :

$$\begin{cases} \frac{d}{dz} |\Psi_C(z)\rangle = \frac{k \sin\theta}{1 + \cos\theta \cos 2kz} |\Psi_{NC}(z)\rangle = \frac{k \sin\theta}{D(z)} |\Psi_{NC}(z)\rangle \end{cases} \quad (2.13.a)$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dz} |\Psi_{NC}(z)\rangle = \frac{-k \sin\theta}{1 + \cos\theta \cos 2kz} |\Psi_C(z)\rangle = -\frac{k \sin\theta}{D(z)} |\Psi_C(z)\rangle \end{cases} \quad (2.13.b)$$

Remarque : $\langle\Psi_C(z)|\Psi_C(z)\rangle = 1 \quad \forall z$. On a de même $\langle\Psi_{NC}(z)|\Psi_{NC}(z)\rangle = 1 \quad \forall z$

et $\langle\Psi_{NC}(z)|\Psi_C(z)\rangle = 0 \quad \forall z$. En dérivant ces équations par rapport à z , on peut retrouver aisément que $\langle\Psi_C(z)|(\frac{d}{dz} |\Psi_C(z)\rangle)\rangle = 0 = \langle\Psi_{NC}(z)|(\frac{d}{dz} |\Psi_{NC}(z)\rangle)\rangle$ et que $\langle\Psi_{NC}(z)|(\frac{d}{dz} |\Psi_C(z)\rangle)\rangle = -\langle\Psi_C(z)|(\frac{d}{dz} |\Psi_{NC}(z)\rangle)\rangle^*$.

- Nous supposons l'intensité laser suffisamment faible pour que la transition atomique ne soit pas saturée

$$s(z) = \frac{\Omega^2(z)/2}{\delta^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} \ll 1 \quad (2.14)$$

$s(z)$ est le paramètre de saturation au point z .

- L'état couplé $|\psi_c(z)\rangle$ acquiert un déplacement lumineux $\hbar\delta'_c(z)$ et une largeur radiative $\hbar\Gamma'_c(z)$ où $\delta'_c(z)$ et $\Gamma'_c(z)$ sont donnés par :

$$\delta'_c(z) = \delta \frac{s(z)}{2} = \delta' D(z) \quad (2.15.a) \quad \Gamma'_c(z) = \Gamma \frac{s(z)}{2} = \Gamma' D(z) \quad (2.15.b)$$

où
$$\delta' = \delta \frac{\Omega^2/4}{\delta^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} \quad (2.16.a) \quad \Gamma' = \Gamma \frac{\Omega^2/4}{\delta^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} \quad (2.16.b)$$

ne dépendent pas de z . La dépendance en z de $\delta'_c(z)$ et $\Gamma'_c(z)$ est la même que celle de l'intensité lumineuse totale (proportionnelle à $D(z)$).

- L'état non couplé $|\psi_{nc}(z)\rangle$ a un déplacement et une largeur nuls

$$\delta'_{nc}(z) = \Gamma'_{nc}(z) = 0 \quad (2.17)$$

2.4 Présentation qualitative du mécanisme de refroidissement

Le cycle Sisyphé

- L'état $|\psi_{nc}\rangle$ n'absorbant pas de lumière est le plus peuplé. Considérons un atome initialement dans l'état $|\psi_{nc}\rangle$ dont l'énergie est nulle et ne dépend pas de z . Supposons que cet atome est animé d'une vitesse v (Fig. 7)

- les fonctions d'onde $|\psi_{nc}(z)\rangle$ et $|\psi_c(z)\rangle$ dépendant de z , il y a, pour un atome en mouvement ($z = vt$), des couplages

"non-adiabatiques" entre $|\psi_{nc}(z)\rangle$ et $|\psi_c(z)\rangle$ proportionnels d'après (2.13) à :

$$\langle \psi_c(z) | \left(\frac{d}{dt} |\psi_{nc}(z)\rangle \right) \rangle = v \langle \psi_c(z) | \left(\frac{d}{dz} |\psi_{nc}(z)\rangle \right) \rangle = -\frac{\hbar v \sin \theta}{D(z)} \quad (2.18)$$

- Comme $D(z)$ figure au dénominateur de (2.18), le couplage non-adiabatique entre $|\psi_{nc}(z)\rangle$ et $|\psi_c(z)\rangle$ est maximal aux minima d'intensité, où $|\psi_c(z)\rangle$ est le plus proche de $|\psi_{nc}(z)\rangle$. Il va se produire des transitions non-adiabatiques entre $|\psi_{nc}(z)\rangle$ et $|\psi_c(z)\rangle$ préférentiellement aux minima d'intensité, par exemple au voisinage de $z = \lambda/4$ (double flèche verticale de la figure 7)

- Nous supposons ici $\delta > 0$ (désaccord laser bleu) de sorte que $\delta' > 0$ (voir (2.16.a)). Par suite, $|\psi_c\rangle$ est au dessus de $|\psi_{nc}\rangle$. Une fois parti dans $|\psi_c\rangle$, l'atome gravit donc une colline de potentiel. Au fur et à mesure qu'il se rapproche du sommet, $\Gamma'_c(z)$ augmente comme $D(z)$. L'atome a alors une chance de plus en plus grande de subir un cycle de pompage optique qui le ramène dans $|\psi_{nc}\rangle$ (flèches ondulées verticales de la figure 7).

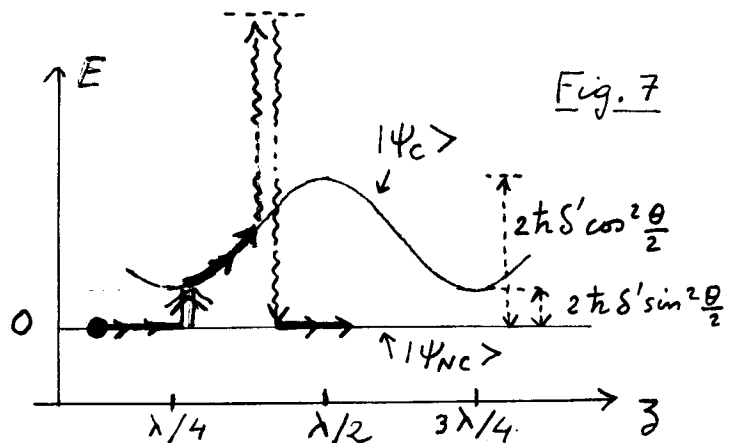


Fig. 7

- L'explication précédente, qui est celle donnée habituellement, laisse dans l'ombre un certain nombre de points. Quelle est la nature exacte de la transition non-adiabatique qui fait passer le système de $|\Psi_{nc}\rangle$ à $|\Psi_c\rangle$? Est-ce une transition du type Landau-Zener? Fait-elle intervenir une dissipation? D'où vient l'énergie qui il faut fournir à l'atome pour le faire passer de $|\Psi_{nc}\rangle$ à $|\Psi_c\rangle$, énergie qui est au moins égale à $2\hbar\delta \sin^2 \frac{\theta}{2}$ d'après la figure 7?
- Ce problème des transitions non-adiabatiques étant très général, nous allons l'analyser en détail. Nous présentons tout d'abord les grandes lignes d'un calcul semi-classique de l'effet (§3). Puis, nous essaierons d'interpréter les résultats obtenus et d'en extraire des images physiques simples (§4).

③ Les grandes lignes du calcul semi-classique.

3.1 Evolution de la matrice densité d'un atome immobile.

Commençons par supposer l'atome immobile en Z .

Termes d'évolution liés à l'interaction avec le champ laser.

- Si ρ est l'opérateur densité atomique, on a :

$$i\hbar \left(\frac{d\rho}{dt} \right)_{\text{laser}} = [V_{AL}(Z), \rho] \quad (2.19)$$

- Dans (2.8) et (2.11), on a fait l'approximation du "champ tournant" (pas de termes en $|e\rangle\langle g|e^{i\omega_L t}$ ou $|g\rangle\langle e|e^{-i\omega_L t}$ qui sont "antirésonnants")
On peut alors éliminer la dépendance temporelle de $V_{AL}(Z)$, ce qui est l'équivalent du "passage dans le référentiel tournant" de la RMN, au moyen d'un changement de variables. Dans les termes d'évolution propre (voir équations (2.21) plus loin), il faut alors remplacer la fréquence atomique ω_A par $\omega_A - \omega_L = -\delta$

- On obtient ainsi, compte tenu de (2.11) :

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt} \rho_{e,e} \right)_{\text{laser}} &= i \frac{\Omega(Z)}{2} (\rho_{e,c} - \rho_{c,e}) = - \left(\frac{d}{dt} \rho_{c,c} \right)_{\text{laser}} \\ \left(\frac{d}{dt} \rho_{e,c} \right)_{\text{laser}} &= i \frac{\Omega(Z)}{2} (\rho_{ee} - \rho_{cc}) = - \left(\frac{d}{dt} \rho_{c,e} \right)_{\text{laser}} \\ \left(\frac{d}{dt} \rho_{c,nc} \right)_{\text{laser}} &= -i \frac{\Omega(Z)}{2} \rho_{e,nc} \\ \left(\frac{d}{dt} \rho_{e,nc} \right)_{\text{laser}} &= -i \frac{\Omega(Z)}{2} \rho_{c,nc} \\ \left(\frac{d}{dt} \rho_{nc,nc} \right)_{\text{laser}} &= 0 \end{aligned} \quad (2.20)$$

Termes d'évolution propre . Les seuls non nuls sont :

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt} \rho_{e,c} \right)_{\text{ev.pr.}} &= i\delta \rho_{ec} = \left(\frac{d}{dt} \rho_{c,e} \right)_{\text{ev.pr.}}^* \\ \left(\frac{d}{dt} \rho_{e,nc} \right)_{\text{ev.pr.}} &= i\delta \rho_{e,nc} = \left(\frac{d}{dt} \rho_{e,nc} \right)_{\text{ev.pr.}}^* \end{aligned} \quad (2.21)$$

Terme de relaxation radiative (dus à l'émission spontanée)

- Commençons par les écrire dans la base $\{|e_0\rangle, |g_+\rangle, |g_-\rangle\}$

$$\left(\frac{d}{dt} \rho_{ee} \right)_{\text{em.sp.}} = -\Gamma \rho_{ee} \quad (2.22.a)$$

$$\left(\frac{d}{dt} \rho_{e,g_+} \right)_{\text{em.sp.}} = -\frac{\Gamma}{2} \rho_{e,g_+} \quad \left(\frac{d}{dt} \rho_{e,g_-} \right)_{\text{em.sp.}} = -\frac{\Gamma}{2} \rho_{e,g_-} \quad (2.22.b)$$

$$\left(\frac{d}{dt} \rho_{g_+g_+} \right)_{\text{em.sp.}} = +\frac{\Gamma}{2} \rho_{ee} \quad \left(\frac{d}{dt} \rho_{g_+g_-} \right)_{\text{em.sp.}} = \frac{\Gamma}{2} \rho_{ee} \quad \left(\frac{d}{dt} \rho_{g_-g_-} \right)_{\text{em.sp.}} = 0 \quad (2.22.c)$$

- La 1^{ère} ligne décrit le départ des atomes de e avec un taux Γ . La 2^{ème} ligne décrit l'amortissement des cohérences optiques avec un taux $\Gamma/2$. La 3^{ème} ligne exprime que les atomes quittant e ont une chance sur deux d'arriver dans g_+ ou g_- . Il n'y a pas d'alimentation de la cohérence Zeeman ρ_{g_+,g_-} par émission spontanée à partir de la population ρ_{ee} , à cause de la symétrie sphérique de l'émission spontanée.

- En réécrivant les équations (2.22) dans la base $\{|e\rangle, |\psi_c\rangle, |\psi_{NC}\rangle\}$, on obtient :

$$\left(\frac{d}{dt} \rho_{ee}\right)_{em.sp.} = -\Gamma \rho_{ee} \quad (2.23.a)$$

$$\left(\frac{d}{dt} \rho_{e,c}\right)_{em.sp.} = -\frac{\Gamma}{2} \rho_{e,c} \quad \left(\frac{d}{dt} \rho_{e,NC}\right)_{em.sp.} = -\frac{\Gamma}{2} \rho_{e,NC} \quad (2.23.b)$$

$$\left(\frac{d}{dt} \rho_{c,c}\right)_{em.sp.} = +\frac{\Gamma}{2} \rho_{e,e} \quad \left(\frac{d}{dt} \rho_{NC,NC}\right)_{em.sp.} = +\frac{\Gamma}{2} \rho_{ee} \quad \left(\frac{d}{dt} \rho_{c,NC}\right)_{em.sp.} = 0 \quad (2.23.c)$$

3.2 Effet du mouvement - Hamiltonien motionnel

- On suppose maintenant l'atome en mouvement à la vitesse v : $z = vt$

- Considérons un élément de matrice $\rho_{ij} = \langle i | \rho | j \rangle$ de ρ avec $i, j = e, c, NC$. Comme $|j\rangle$ et $\langle i|$ dépendent de z , et donc de t puisque $z = vt$, il apparaît des termes supplémentaires dans la vitesse de variation $\frac{d}{dt}(\langle i | \rho | j \rangle)$. En plus du terme $\langle i | \frac{d\rho}{dt} | j \rangle$, correspondant à la somme des vitesses de variation calculés dans le § 3.1 précédent, apparaissent des termes supplémentaires liés au mouvement, qu'on peut appeler "termes motionnels".

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt} \rho_{ij}\right)_{mot} &= \left(\frac{d}{dt} \langle i | \rho | j \rangle\right) + \langle i | \rho \left(\frac{d}{dt} | j \rangle\right) \\ &= v \left[\left(\frac{d}{dz} \langle i | \rho | j \rangle\right) + \langle i | \rho \left(\frac{d}{dz} | j \rangle\right) \right] \end{aligned} \quad (2.24)$$

- Introduisons la matrice

$$A_{kl} = \langle k | \left(\frac{d}{dz} | l \rangle\right) \quad (2.25)$$

D'après la remarque du bas de la page (II-4)

$$A_{kl}^* = \left(\frac{d}{dz} \langle l | \right) | k \rangle = -A_{lk} \quad (2.26)$$

- En utilisant la relation de fermeture $\sum_k |k\rangle \langle k| = \mathbb{1}$ dans la 2^{ème} ligne de (2.24), on obtient alors

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt} \rho_{ij}\right)_{mot} &= v \sum_k \left[\underbrace{\left(\frac{d}{dz} \langle i | \right) | k \rangle}_{=-A_{ik} \text{ d'après (2.26)}} \langle k | \rho | j \rangle + \langle i | \rho | k \rangle \underbrace{\langle k | \left(\frac{d}{dz} | j \rangle\right)}_{=A_{kj} \text{ d'après (2.25)}} \right] \\ &= -v [A, \rho]_{ij} \end{aligned} \quad (2.27)$$

- On peut enfin réécrire (2.27) sous la forme :

$$\left(\frac{d}{dt} \rho_{ij}\right)_{mot} = \frac{1}{i\hbar} [V_{mot}, \rho]_{ij} \quad (2.28)$$

$$\text{ou} \quad (V_{mot})_{kl} = -i\hbar v A_{kl} = -i\hbar v \langle k | \left(\frac{d}{dz} | l \rangle\right) \quad (2.29)$$

V_{mot} apparaît comme un hamiltonien permettant de décrire les termes motionnels (2.24). L'équation (2.26) entraîne que :

$$(V_{mot})_{kl} = (V_{mot})_{lk}^* \quad (2.30)$$

ce qui montre que V_{mot} est hermitique.

- En utilisant (2.13) et le fait que $\frac{d}{dz}|e_0\rangle = 0$, on trouve que, dans la base $\{|e_0\rangle, |\psi_c(z)\rangle, |\psi_{nc}(z)\rangle\}$, les seuls éléments de matrice non nuls de V_{mot} sont les éléments non diagonaux entre $|\psi_c(z)\rangle$ et $|\psi_{nc}(z)\rangle$

$$\langle \psi_c(z) | V_{mot} | \psi_{nc}(z) \rangle = \frac{i\hbar k v \sin \theta}{D(z)} = \langle \psi_{nc}(z) | V_{mot} | \psi_c(z) \rangle^* \quad (2.31)$$

Pour simplifier les notations, il nous arrivera de poser :

$$\frac{k v \sin \theta}{D(z)} = \frac{k v \sin \theta}{1 + \cos \theta \cos 2kz} = w(z) \quad (2.32)$$

3.3 Equations de Bloch optiques

- les équations de Bloch optiques s'obtiennent en ajoutant, pour chaque élément de matrice P_{ij} , les vitesses de variations (2.20), (2.21), (2.23) et (2.28) calculées plus haut.

- Nous n'écrivons pas ici toutes ces équations. Donnons, à titre d'exemple, celle décrivant l'évolution de la cohérence optique $P_{e,c}$

$$\frac{d}{dt} P_{e,c} = i(\delta + i\frac{\Gamma}{2})P_{e,c} + i\frac{\Omega(z)}{2}(P_{e,e} - P_{c,c}) + \frac{k v \sin \theta}{D(z)} P_{e,nc} \quad (2.33)$$

- Comme z et t sont reliés par $z = vt$, il n'y a qu'une seule variable dans le problème, z ou t . Si l'on choisit la variable z , le membre de gauche de (2.33) s'écrit $v \frac{d}{dz} P_{e,c}$

3.4 Expression semi-classique de la force moyenne [voir Ref 11, § 2]

- A partir des équations de Heisenberg des opérateurs position \hat{z} et impulsion \hat{p} du centre de masse de l'atome, on obtient pour la force moyenne \vec{F} , l'expression

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \frac{d}{dt} \langle \hat{p} \rangle = i\hbar \langle [\hat{p}, \hat{H}] \rangle \\ &= - \left\langle \frac{d}{dz} V_{AL}(\hat{z}) \right\rangle \end{aligned} \quad (2.34)$$

- Dans (2.34), \hat{z} , \hat{p} sont des opérateurs, de même que l'hamiltonien \hat{H} du système global. L'expression semi-classique de \vec{F} s'obtient en remplaçant dans (2.34) l'opérateur \hat{z} par la position classique de l'atome z , ce qui revient à utiliser l'expression semi-classique (2.8) de $V_{AL}(z)$. En dérivant (2.8) par rapport à z et en prenant la valeur moyenne (qui ne peut plus porter alors que sur les degrés de liberté internes), on obtient :

$$\vec{F} = -\frac{\hbar k \Omega}{2} \left[\sin(kz - \frac{\theta}{2})(P_{g_{+1}, e_0} + P_{e_0, g_{+1}}) - \sin(kz + \frac{\theta}{2})(P_{g_{-1}, e_0} + P_{e_0, g_{-1}}) \right] \quad (2.35)$$

Les facteurs $e^{\pm i\omega_L t}$ ont disparu dans la transformation associée au passage dans le référentiel tournant. La force moyenne \vec{F} peut donc être exprimée en fonction des cohérences optiques.

- En utilisant (2.10), on pourrait également exprimer \vec{F} en fonction de $P_{e,c}$, $P_{e,nc}$, $P_{c,e}$, $P_{nc,e}$.

Principe

- La condition (2.14) entraîne que les temps caractéristiques τ_g d'évolution de l'état fondamental sont beaucoup plus longs que ceux relatifs à l'état excité, τ_e (de l'ordre de Γ^{-1}).

Nous supposons aussi ici que, pendant le temps de vie de l'état excité, Γ^{-1} , l'atome se déplace très peu devant λ , ce qui revient à supposer :

$$kv \ll \Gamma \quad (2.36)$$

- Considérons alors l'équation (2.33). Après un régime transitoire durant un temps de l'ordre de Γ^{-1} , $P_{e,c}$ va être "asservi" à l'évolution lente de l'état fondamental, de sorte que dans le membre de gauche $dP_{e,c}/dt$ est de l'ordre de $(\tau_g)^{-1} P_{e,c}$ et est donc négligeable devant le terme $i(\delta + i\frac{\Gamma}{2}) P_{e,c}$ du membre de droite (puisque $\Gamma \gg \tau_g^{-1}$). On peut, de même, compte tenu de (2.36), négliger le dernier terme de (2.33). On obtient ainsi une équation algébrique permettant d'exprimer $P_{e,c}$ en fonction de $P_{c,c}$ et $P_{e,e}$. En fait, on peut aussi négliger la contribution de $P_{e,e}$ à $P_{e,c}$, qui sera au moins d'ordre 3 en $\Omega(3)$ et obtenir finalement :

$$P_{e,c} = \frac{\Omega(3)/2}{\delta + i\frac{\Gamma}{2}} P_{c,c} \quad (2.37)$$

En procédant de même avec les équations donnant $\dot{P}_{e,nc}$ et $P_{e,e}$ on peut éliminer tous les éléments de matrice de P faisant intervenir au moins une fois l'état excité e .

- Notons enfin que, dans un tel calcul à l'ordre 0 en kv/Γ , on perd le refroidissement Doppler.

Nouvelles équations de Bloch réduites

- Les nouvelles équations auxquelles on parvient ainsi ne font plus intervenir que l'état fondamental. Elles s'écrivent :

$$\begin{cases} \dot{P}_{nc,c} = i \left[\delta'_c(3) + i\frac{\Gamma'_c(3)}{2} \right] P_{nc,c} + \frac{kv \sin \theta}{D(3)} (P_{nc,nc} - P_{cc}) \quad (2.38.a) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{P}_{cc} = -\frac{\Gamma'_c(3)}{2} P_{cc} + \frac{kv \sin \theta}{D(3)} (P_{c,nc} + P_{nc,c}) \quad (2.38.b) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{P}_{nc,nc} = +\frac{\Gamma'_c(3)}{2} P_{cc} - \frac{kv \sin \theta}{D(3)} (P_{c,nc} + P_{nc,c}) \quad (2.38.c) \end{cases}$$

- Les derniers termes des 3 équations, en $kv \sin \theta / D(3)$, décrivent les couplages motionnels.

- Le 1^{er} terme de (2.38.a) exprime que la cohérence entre $|\psi_c\rangle$ et $|\psi_{nc}\rangle$ évolue à la fréquence $(E_c - E_{nc})/\hbar = \delta'_c$ et est amorti avec un temps $(\Gamma'_c + \Gamma'_{nc})/2 = \Gamma'_c/2$ (puisque $\Gamma'_{nc} = 0$)

- Les premiers termes de (2.38.b) et (2.38.c) expriment que les atomes quittent $|\psi_c\rangle$ par absorption avec un taux Γ'_c et reviennent, avec une chance sur 2 dans $|\psi_c\rangle$, une chance sur 2 dans $|\psi_{nc}\rangle$.

- l'élimination des cohérences optiques permet de réexprimer \mathcal{F} en fonction de $P_{c,c}$, $P_{nc,nc}$ et $P_{c,nc}$. On trouve :

$$\mathcal{F} = -P_{cc} \frac{d}{dz} [\hbar \delta'_c(z)] - \left\{ \hbar [\delta'_c(z) + i \frac{\Gamma'_c(z)}{2}] \frac{k \sin \theta}{D(z)} P_{nc,c} + c.c. \right\} \quad (2.39)$$

- Le 1^{er} terme de (2.39) correspond à l'interprétation habituelle de la force dipolaire en termes de gradients spatiaux de niveaux habillés. Seul le niveau $|\psi_c\rangle$ a une énergie $E_c(z) = \hbar \delta'_c(z)$ variant avec z . Le 1^{er} terme de (2.39) est la force correspondant à $-dE_c(z)/dz$, pondérée par la probabilité d'occupation P_{cc} de $|\psi_c\rangle$.

3.6 Méthodes de résolution des équations de Bloch optiques.

D'après (2.39), \mathcal{F} dépend de P_{cc} , $P_{nc,c}$ et $P_{c,nc}$. Le calcul de \mathcal{F} nécessite donc de résoudre les équations (2.38).

Méthode générale

- Prenons z comme variable et récrivons par exemple (2.38.a) sous la forme

$$v \frac{d}{dz} P_{nc,c}(z) = i \left[\delta'_c(z) + i \frac{\Gamma'_c(z)}{2} \right] P_{nc,c}(z) + \frac{k v \sin \theta}{D(z)} [P_{nc,nc}(z) - P_{c,c}(z)] \quad (2.40)$$

- Comme $\delta'_c(z)$, $\Gamma'_c(z)$ et $D(z)$ sont des fonctions périodiques de z , de période $\lambda/2$, il en est de même de la solution des équations de Bloch optiques. On peut donc développer $P_{cc}(z)$, $P_{nc,nc}(z)$, $P_{c,nc}(z)$, $P_{nc,c}(z)$ en série de Fourier et reporter ces développements dans l'équation (2.40) et les équations analogues correspondant à (2.38.b) et (2.38.c). On obtient ainsi des relations de récurrence entre les coefficients des développements en séries de Fourier, équations qui peuvent être résolues par la méthode des fractions continues [ref. 12].

- Une telle méthode générale permet d'obtenir numériquement la courbe donnant les variations de \mathcal{F} avec v , et de mettre en particulier en évidence des variations résonnantes autour de certaines valeurs de v ("Dopplérons") - Voir par exemple la figure 2 de la référence [10].

Méthode perturbative à la limite des très faibles vitesses

- Nous insisterons plus ici sur une méthode perturbative permettant d'obtenir des expressions analytiques pour les éléments de matrice de ρ et pour \mathcal{F} à la limite des très faibles vitesses (développement en puissances de $k v / \Gamma'_c$). Nous pourrions en effet de ces équations extraire de l'interprétation physique pour les mécanismes intervenant dans le cycle Si-syphé de la figure 7, en particulier pour le "transport non-adiabatique" entre $|\psi_{nc}\rangle$ et $|\psi_c\rangle$.

- Revenons à l'équation (2.40) et développons les éléments de matrice de ρ en puissances de $k v$

$$\rho_{ij} = \sum_{n=0}^{\infty} \rho_{ij}^{(n)} \quad (2.41)$$

où $\rho_{ij}^{(n)}$ est d'ordre n en $(k v)$. En reportant de tels développements dans (2.40) et en égalant les termes de même ordre de part et d'autre du signe = on obtient :

$$v \frac{d}{dz} \rho_{nc,c}^{(n)}(z) = i \left[\delta'_c(z) + i \frac{\Gamma'_c(z)}{2} \right] \rho_{nc,c}^{(n)}(z) + \frac{k v \sin \theta}{D(z)} [\rho_{nc,nc}^{(n-1)}(z) - \rho_{cc}^{(n-1)}(z)] \quad (2.42)$$

- La solution d'ordre 0 s'obtient aisément en faisant $v=0$ dans (2.38) II-17
On obtient

$$P_{c,c}^{(0)} = 0 \quad P_{nc,nc}^{(0)} = 1 \quad P_{c,nc}^{(1)} = P_{nc,c}^{(1)} = 0 \quad (2.43)$$

- Connaissant la solution d'ordre 0, l'équation (2.42) et les autres équations analogues associées à (2.38.b) et (2.38.c) donnent la solution d'ordre 1, et ainsi de suite. Nous nous contenterons ici de donner quelques termes d'ordre 1 et 2 qui nous serviront pour la discussion physique de §§ 4 et 5

$$P_{cc}^{(1)} = P_{nc,nc}^{(1)} = 0 \quad (2.44)$$

$$P_{nc,c}^{(1)} = (P_{c,nc}^{(1)})^* = \frac{i}{\delta'_c(3) + i \frac{\Gamma'_c(3)}{2}} \frac{k v \sin \theta}{D(3)} \quad (2.45)$$

$$P_{cc}^{(2)} = \frac{2}{\delta'_c(3)^2 + \frac{\Gamma'_c(3)^2}{4}} \left[\frac{k v \sin \theta}{D(3)} \right]^2 \quad (2.46)$$

- En ce qui concerne \mathcal{F} , on trouve que $\mathcal{F} = 0$ à l'ordre 1 et 2. A l'ordre 2, c'est la moyenne spatiale de \mathcal{F} qui est nulle. Enfin à l'ordre 3, on trouve une moyenne spatiale non nulle égale à

$$\overline{\mathcal{F}} = -\frac{16}{5\pi} \frac{1}{2} k (k v)^3 \frac{\sin^2 \theta \cos \theta}{\delta' \Gamma'} \left| \int_0^{2\pi} \frac{du \cos u}{(1 + \cos \theta \cos u)^5} \right| \quad (2.47)$$

References

- [1] J. Dalibard, C. Cohen-Tannoudji, J.O.S.A. B2, 1707 (1985)
- [2] A. Aspect, J. Dalibard, A. Heidmann, C. Salomon, C. Cohen-Tannoudji, P.R.L. 57, 48 (1986)
- [3] J. Dalibard, C. Cohen-Tannoudji, J.O.S.A. B6, 2023 (1989)
- [4] B. Sheehy, S.Q. Shang, P. van der Straten, S. Hatamian, H. Metcalf, P.R.L. 64, 858 (1990)
- [5] D. Weiss, E. Riis, Y. Shvy, J. Ungar, S. Chu, J.O.S.A. B6, 2072 (1989)
- [6] O. Emile, R. Kaiser, C. Gerz, H. Wallis, A. Aspect, C. Cohen-Tannoudji, J. Phys. II France 3, 1709 (1993)
- [7] C. Valentini, M.C. Gagne', J. Xu, P. Pillet, Europhys. Lett. 17, 133 (1991)
- [8] M. Shahriar, P. Hemmer, M. Prentiss, P. Marte, J. Meris, D. Katz, N. Bigelow, T. Cai, P.R.A 48, R4035 (1993)
- [9] P. Marte, R. Dum, R. Taiels, P. Zoller, M. Shahriar, M. Prentiss, P.R.A 49, 4826 (1994)
- [10] M. Weidemüller, T. Esslinger, M. Ol'shanii, A. Hemmerich, T. Hänsch, Europhys. Lett. 27, 109 (1994)
- [11] C. Cohen-Tannoudji, in Fundamental Systems in Quantum Optics, Les Houches, Session LIII, ed. by J. Dalibard, J.M. Raimond, J. Zinn-Justin, Elsevier, 1992.
- [12] V. Minogin, O. Serimaa, Opt. Commun. 30, 373 (1990)

2^{ème} Partie : Un nouveau type d'effet Sisyphé

④ Transfert induit par le mouvement entre $|\psi_{NC}\rangle$ et $|\psi_C\rangle$

4.1 Origine physique du transfert

Niveaux habillés et processus radiatifs pour $\Omega = 0, v = 0$ (Fig. 8 a)

- Supposons d'abord la fréquence de Rabi Ω nulle ($V_{AL} = 0$) et l'atome immobile ($v = 0$) en un point donné z .
- Les niveaux d'énergie du système atome + photons laser se groupent en multiplicités de dimension 3: $\{|e_0, N\rangle, |g_{+1}, N+1\rangle, |g_{-1}, N+1\rangle\} \dots$, N étant le nombre de photons laser. La distance entre 2 multiplicités est $\hbar\omega_L$. A l'intérieur d'une multiplicité, $|g_{+1}, N+1\rangle$ et $|g_{-1}, N+1\rangle$ sont dégénérées et à une distance $\hbar\delta$ au dessus de $|e_0, N\rangle$ ($\delta > 0$).
- Des 3 niveaux d'une multiplicité donnée, seul $|e_0, N\rangle$ est instable radiativement et a une largeur $\hbar\Gamma$. L'état $|e_0, N\rangle$ peut se désintégrer radiativement par émission spontanée vers les états $|g_{+1}, N\rangle$ et $|g_{-1}, N\rangle$ de la multiplicité inférieure (flèches ondulées de la figure 8.a). Noter que, V_{AL} étant nul, les photons laser restent "spectateurs" au cours d'une transition d'émission spontanée, de sorte que $\Delta N = 0$ pour ① et ②. La figure 8.a' donne une autre représentation diagrammatique de ① et ② où ne figurent pas les nombres quantiques N .

Niveaux habillés et processus radiatifs pour $\Omega \neq 0, v = 0$ (Fig. 8 b)

- On branche maintenant le couplage V_{AL} ($\Omega \neq 0$), mais l'atome est toujours immobile ($v = 0$) en z .
- La combinaison linéaire $|\psi_C, N+1\rangle$ de $|g_{+1}, N+1\rangle$ et $|g_{-1}, N+1\rangle$ (où $|\psi_C\rangle$ est donné par (2.10.a)) est couplée à $|e_0, N\rangle$ (un atome dans $|\psi_C\rangle$ en présence de $N+1$ photons laser peut absorber un photon laser et passer dans $|e_0\rangle$), alors que la combinaison linéaire orthogonale $|\psi_{NC}, N+1\rangle$ n'est pas couplée à $|e_0, N\rangle$.
- Sous l'effet du couplage $\hbar\Omega(z)/2$ entre $|\psi_C, N+1\rangle$ et $|e_0, N\rangle$, ces 2 états se repoussent: l'état $|\psi_C, N+1\rangle$ est déplacé vers le haut de $\hbar\delta'_C$ (déplacement lumineux de $|\psi_C\rangle$). La "contamination" de $|\psi_C, N+1\rangle$ par $|e_0, N\rangle$ transfère à $|\psi_C, N+1\rangle$ une partie de l'instabilité radiative de $|e_0, N\rangle$: l'état $|\psi_C, N+1\rangle$ acquiert une largeur radiative $\hbar\Gamma'_C$.
- L'instabilité radiative acquise par $|\psi_C, N+1\rangle$ se traduit par l'apparition de transitions radiatives spontanées nouvelles partant de $|\psi_C, N+1\rangle$ et allant vers les états de la multiplicité inférieure. A l'ordre le plus bas en Ω/δ , on obtient les transitions ③ et ④ de la figure 8 b, de fréquences égales à ω_L et $\omega_L + \delta'_C$, respectivement.
- La figure 8 b' donne une autre représentation diagrammatique de ces 2 processus, les photons laser absorbés étant représentés par des flèches droites montantes, les photons émis spontanément par des flèches ondulées descendantes. La transition ③ correspond à une diffusion Rayleigh, à partir de $|\psi_C\rangle$, la transition ④ à une diffusion Raman spontanée anti-Stokes, l'atome partant de $|\psi_C\rangle$ et aboutissant dans $|\psi_{NC}\rangle$.

Remarque: En toute rigueur, il faudrait une autre notation pour l'état $|\psi_C, N+1\rangle$ de la figure 8.b, car il est perturbé par V_{AL} et contaminé par $|e_0, N\rangle$.

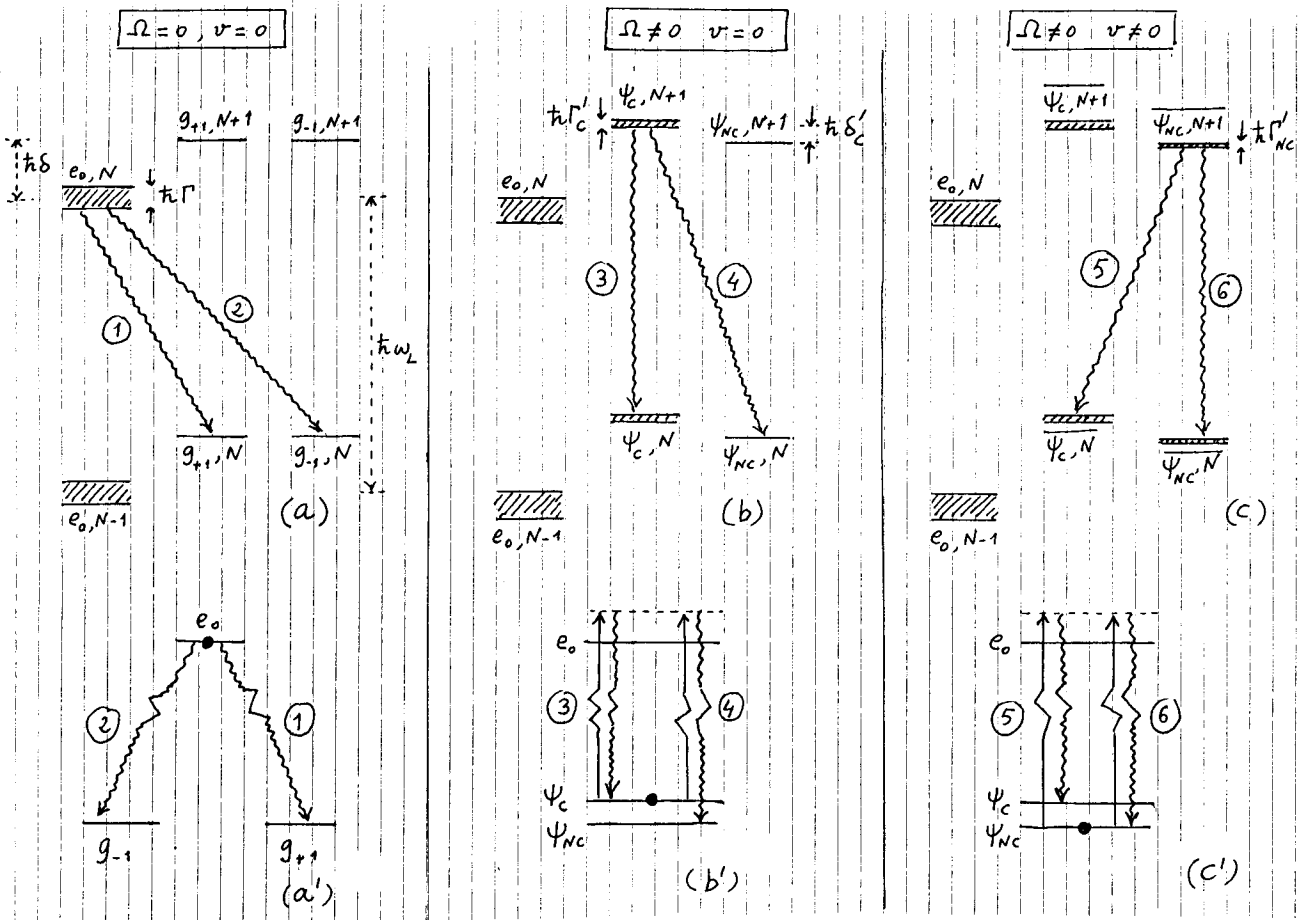


Fig. 8

Niveaux habillés et processus radiatifs pour $\Omega \neq 0, v \neq 0$ (Fig. 8c)

- Nous supposons maintenant l'atome en mouvement à la vitesse v et essayons de décrire les phénomènes sur des échelles de temps suffisamment courtes pour que l'atome se déplace sur des distances petites devant λ pendant ce temps.
- Le couplage motional introduit par le mouvement entre $|\psi_{c,N+1}\rangle$ et $|\psi_{c,N}\rangle$ (voir Eq. (2.31)), va faire que les 2 niveaux perturbés $|\psi_{c,N+1}\rangle$ et $|\psi_{c,N}\rangle$ se repoussent légèrement (Ici, nous utilisons des notations différentes pour désigner les états non perturbés par V_{mot} et les états perturbés par V_{mot}). De plus, la contamination de $|\psi_{c,N+1}\rangle$ par $|\psi_{c,N}\rangle$ va conférer une petite largeur radiative $\hbar\Gamma'_{NC}$ à $|\psi_{c,N+1}\rangle$

Remarque Le couplage V_{mot} peut être traité perturbativement si l'élément de matrice de V_{mot} entre $|\psi_{c,N+1}\rangle$ et $|\psi_{c,N}\rangle$, de l'ordre de $\hbar kv$ est petit devant l'écart entre ces 2 états, de l'ordre de $\hbar\delta'_c$ (rappelons que $|\delta| \gg \Gamma$, de sorte que $|\delta'_c| \gg \Gamma'_c$). La largeur Γ'_{NC} est alors très petite devant Γ'_c . Aux plus grandes vitesses, quand kv devient de l'ordre de δ'_c ou plus grand, V_{mot} mélange complètement les 2 états qui se partagent alors la largeur $\hbar\Gamma'_c$, chacun ayant une largeur de l'ordre de $\hbar\Gamma'_c/2$.

- L'instabilité radiative de $|\psi_{c,N+1}\rangle$ se traduit par l'apparition de transitions radiatives spontanées supplémentaires à partir de cet état. A l'ordre le plus bas en Ω/δ et kv/δ'_c , ce sont les transitions (5) et (6) de la figure (8.c), ou encore de la figure (8.c'). En particulier, la transition $|\psi_{c,N+1}\rangle \rightarrow |\psi_{c,N}\rangle$ correspond à une diffusion Raman spontanée Stokes, avec passage de l'atome de ψ_{NC} à ψ_c (voir processus (5) sur la Fig. 8c').

En conclusion, le mouvement rend possibles des transitions de $|\Psi_{NC}\rangle$ vers $|\Psi_C\rangle$, transitions qui sont interdites pour $v=0$. Ces transitions sont des transitions Raman spontanées Stokes qui deviennent permises à cause de la déstabilisation de l'état non couplé par l'hamiltonien motional V_{mot} . La double flèche verticale de la figure 7 doit être remplacé par le processus Raman spontané Stokes (5) de la figure 8c'. Le bilan énergétique devient également très clair. L'énergie interne gagnée par l'atome lors du passage $\Psi_{NC} \rightarrow \Psi_C$ est perdue par le champ puisqu'un photon laser $\hbar\omega_L$ disparaît et est remplacé par un photon $\hbar(\omega_L - \delta'_C)$ d'énergie plus faible.

4.2 Calcul simple du temps de transfert

Expression générale

- Après élimination adiabatique de l'état excité, on peut se limiter aux 2 états $|\Psi_{C,N+1}\rangle$ et $|\Psi_{NC,N+1}\rangle$ de chaque multiplicité 3×3 de la figure 8. L'évolution réduite à l'intérieur de chaque multiplicité $\{|\Psi_{C,N+1}\rangle, |\Psi_{NC,N+1}\rangle\}$ est alors décrite par l'hamiltonien effectif non hermitique [voir Ref [13], chap. III].

$$H_{eff} = \hbar \begin{bmatrix} \delta'_C(z) - i \frac{\Gamma'_{NC}(z)}{2} & iW(z) \\ -iW(z) & 0 \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

où les éléments diagonaux représentent des déplacements lumineux et largurs radiatives dus à V_{AL} et où les éléments non diagonaux sont les couplages motionnels entre $|\Psi_C(z)\rangle$ et $|\Psi_{NC}(z)\rangle$ (voir Eqs. 2.31 et 2.32)

$$\langle \Psi_C(z) | V_{mot} | \Psi_{NC}(z) \rangle = i\hbar W(z) = \frac{i\hbar k v \sin \theta}{D(z)} = \frac{i\hbar k v \sin \theta}{1 + \cos \theta \cos 2kz} \quad (3.2)$$

- Soit $\hbar \left(\delta'_{NC} - i \frac{\Gamma'_{NC}}{2} \right)$ la valeur propre de (3.1) qui tend vers 0 quand $w \rightarrow 0$. $\hbar \delta'_{NC}$ et $\hbar \Gamma'_{NC}$ sont le déplacement radiatif et l'élargissement radiatif de $|\Psi_{NC}\rangle$ induits par le mouvement. $\Gamma'_{NC}(z)$ est le taux de départ de l'état $|\Psi_{NC,N+1}\rangle$ de la figure 8.c, c-à-d la somme des taux des transitions (5) et (6). Comme ces 2 transitions sont également probables, on en déduit que le taux de transition (5) des figures 8.c ou 8.c', c-à-d encore le taux de transfert radiatif $\Psi_{NC} \rightarrow \Psi_C$ induit par le mouvement est $\Gamma'_{NC}/2$. Nous noterons un tel taux $\Gamma'_{NC \rightarrow C}(z)$. On a donc :

$$\Gamma'_{NC \rightarrow C}(z) = \frac{\Gamma'_{NC}(z)}{2} \quad (3.3)$$

Expression perturbative à la limite des faibles vitesses

- Si les éléments non diagonaux de (3.1) sont petits devant la différence entre éléments diagonaux, c-à-d (puisque $|\delta'_C| \gg \Gamma'_C$) si :

$$|W(z)| \ll \delta'_C(z) \quad (3.4)$$

ce qui implique une faible vitesse

$$|k v \sin \theta| \ll \delta'_C D(z) \quad (3.4.b)$$

le calcul de la valeur propre de (3.1) qui tend vers 0 quand $w \rightarrow 0$ peut être fait perturbativement et donne

$$\delta'_{NC}(z) - i \frac{\Gamma'_{NC}(z)}{2} = \frac{w^2(z)}{-\delta'_C(z) + i \Gamma'_C(z)/2} \quad (3.5)$$

d'où l'on tire

$$\Gamma'_{NC}(z) = \Gamma'_C(z) \frac{w^2(z)}{\delta'^2_C(z) + \frac{\Gamma'^2_C(z)}{4}} \quad (3.6)$$

- De (3.3) et (3.6), on déduit (en négligeant $\Gamma_c'^2$ devant $\delta_c'^2$ dans 3.6): III-4

$$|w(z)| \ll |\delta_c'(z)| \rightarrow \Gamma_{NC \rightarrow C}^{1 \text{ mot}}(z) \approx \frac{1}{2} \Gamma_c'(z) \frac{w^2(z)}{\delta_c'^2(z)} \quad (3.7)$$

- La dépendance spatiale du temps de transfert est contenue dans les facteurs $D(z) = 1 + \cos \theta \cos 2kz$ qui apparaissent dans $\Gamma_c'(z)$ et $\delta_c'(z)$ [voir (2.15)] et dans $w(z)$ [voir (2.32)]. On trouve ainsi

$$\Gamma_{NC \rightarrow C}^{1 \text{ mot}}(z) \sim \frac{1}{[D(z)]^3} \frac{1}{2} k^2 v^2 \sin^2 \theta \frac{\Gamma_c'}{\delta_c'^2} \quad (3.8)$$

Le transfert est donc maximal aux minima d'intensité, quand ψ_{NC} et ψ_c sont les plus proches l'un de l'autre, et varie plus rapidement avec z que l'intensité lumineuse [variation en $D(z)^{-3}$ au lieu de $D(z)$].

Limite des grandes vitesses

- On prend maintenant la limite opposée de (3.4), kv restant cependant très petit devant Γ pour que le traitement du § (3.5) reste valable [voir (2.36)]. Les 2 valeurs propres de (3.1) ont alors la même valeur imaginaire $-\frac{1}{2} \Gamma_c'(z)$. On déduit alors de (3.3)

$$|w(z)| \gg |\delta_c'(z)| \rightarrow \Gamma_{NC \rightarrow C}^{1 \text{ mot}}(z) \approx \frac{1}{4} \Gamma_c'(z) \quad (3.9)$$

- Alors qu'aux très faibles vitesses le temps de transfert varie en v^2 , il devient indépendant de v aux grandes vitesses.

4.3 Population stationnaire de l'état couplé aux très faibles vitesses

Régime de vitesses considéré

- Nous supposons maintenant $kv \ll \Gamma_c'(z)$ (3.10)

condition plus restrictive que (3.4) puisque $\delta_c'(z) \gg \Gamma_c'(z)$.

- La condition (3.10) exprime que l'atome se déplace très peu devant λ pendant le temps de vie $(\Gamma_c')^{-1}$ de l'état couplé ψ_c . Nous verrons plus loin que $(\Gamma_c')^{-1}$ est le temps d'établissement d'un régime stationnaire pour les populations de l'état $|\psi_c, N\rangle$ et $|\psi_{NC}, N\rangle$ de la figure 8.c. Nous supposons donc ici que l'atome se déplace suffisamment lentement pour que les populations des niveaux localisés aient le temps d'atteindre un équilibre local en chaque point z .

Equations du bilan détaillé

- Soient $\Pi_c(z)$ et $\Pi_{NC}(z)$ les "populations réduites" des niveaux localisés de la figure 8.c, sommes sur N des populations des états $|\psi_c, N+1\rangle$ et $|\psi_{NC}, N+1\rangle$ de la figure 8.c (voir Ref. 13 § VI.D.2). Leur évolution lors de la cascade radiative de l'atome localisé est régie par les équations de taux

$$\begin{cases} \dot{\Pi}_c(z) = -\Gamma_{C \rightarrow NC}'(z) \Pi_c(z) + \Gamma_{NC \rightarrow C}^{1 \text{ mot}}(z) \Pi_{NC}(z) & (3.11. a) \\ \dot{\Pi}_{NC}(z) = +\Gamma_{C \rightarrow NC}'(z) \Pi_c(z) - \Gamma_{NC \rightarrow C}^{1 \text{ mot}}(z) \Pi_{NC}(z) & (3.11. b) \end{cases}$$

Dans (3.11), $\Gamma_{NC \rightarrow C}^{1 \text{ mot}}$ est donné par (3.7). L'effet du couplage moléculaire V_{mot} sur $|\psi_c, N\rangle$ est négligeable, de sorte que le taux de départ de $|\psi_c, N\rangle$ est $\Gamma_c'(z)$. Comme l'atome a une chance sur 2 d'arriver dans chacun des 2 états de la multiplicité inférieure on a

$$\Gamma_{C \rightarrow NC}'(z) = \frac{\Gamma_c'(z)}{2} \quad (3.12)$$

- La constante de temps du régime transitoire des équations (3.11) est $[\Gamma_{C \rightarrow NC}' + \Gamma_{NC \rightarrow C}^{1 \text{ mot}}]^{-1} \sim (\Gamma_{C \rightarrow NC}')^{-1} = 2 \Gamma_c'(z)^{-1}$. Si (3.10) est vérifiée, l'atome a donc le temps d'atteindre en chaque point un état d'équilibre donné par l'équation de bilan détaillé

$$\Pi_c^{\text{st}}(z) \Gamma_{C \rightarrow NC}'(z) = \Pi_{NC}^{\text{st}}(z) \Gamma_{NC \rightarrow C}^{1 \text{ mot}}(z) \quad (3.13)$$

- Comme $\Gamma'_{NC \rightarrow C}{}^{\text{mot}}(z)$ est déjà d'ordre 2 en $k\nu$ [voir (3.8)], on peut remplacer dans (3.13), $\Pi_{NC}^{\text{st}}(z)$ par sa valeur d'ordre 0, qui vaut 1, et obtenir ainsi

$$\Pi_C^{\text{st}}(z) \approx \frac{\Gamma'_{NC \rightarrow C}{}^{\text{mot}}(z)}{\Gamma'_{C \rightarrow NC}(z)} = \frac{W^2(z)}{\delta_C'^2(z)} = \frac{k^2 v^2 \sin^2 \theta}{\delta_C'^2(z) D^2(z)} \quad (3.14)$$

Comparaison avec la solution des équations de Bloch optiques (E.B.O.)

- La comparaison de (3.14) et (2.43), (2.44), (2.46) montre que

$$\Pi_C^{\text{st}}(z) = \frac{1}{2} [P_{CC}^{(0)} + P_{CC}^{(1)} + P_{CC}^{(2)}] \quad (3.15)$$

$\Pi_C^{\text{st}}(z)$ ne coïncide donc pas avec la solution des E.B.O. à l'ordre 2 inclus

- La différence (facteur $\frac{1}{2}$) est due au fait que la solution des E.B.O. est calculée dans la base des états non perturbés par V_{mot} (fig. 8b), alors que $\Pi_C^{\text{st}}(z)$ est calculée dans la base des états perturbés (fig. 8c). En utilisant le développement perturbatif des états $|\Psi_{C,N}\rangle$ et $|\Psi_{NC,N}\rangle$, compte tenu de (3.2), on démontre aisément que

$$\sum_N \langle \Psi_{C,N} | P | \Psi_{C,N} \rangle = P_{CC}^{(2)} + \frac{iW(z)}{\delta_C'(z)} [P_{NC,C}^{(1)} - P_{C,NC}^{(1)}] + \frac{W^2(z)}{\delta_C'^2(z)} P_{NC,NC}^{(0)} \quad (3.16)$$

ce qui redonne bien $\Pi_C^{\text{st}}(z)$, compte tenu de (2.43), (2.45), (2.46). On trouve également que, à l'ordre 1 inclus en $k\nu$, $\sum_N \langle \Psi_{NC,N} | P | \Psi_{C,N} \rangle = 0$, alors que $P_{C,NC}^{(1)} = \sum_N \langle \Psi_{C,N} | P | \Psi_{NC,N} \rangle$ ne l'est pas [voir 2.45].

5) Force de friction moyenne - Discussion physique

5-1 Calcul simple aux très faibles vitesses

Principe du calcul

- Considérons un atome arrivant de la gauche à la vitesse v sur l'état non couplé (Fig. 9).

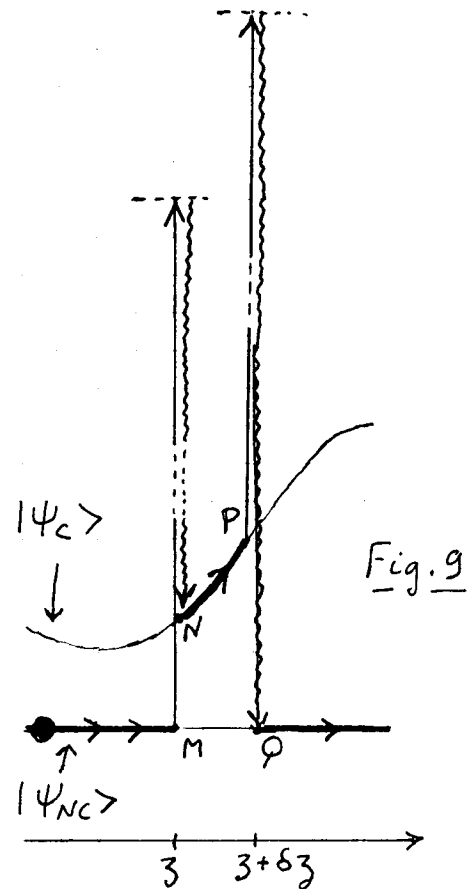
- L'atome a une certaine probabilité par unité de temps d'effectuer une transition Raman spontanée Stokes induite par le mouvement qui l'amène de $|\Psi_{NC}\rangle$ à $|\Psi_C\rangle$ (§ 4 ci-dessus). Supposons qu'une telle transition se produise au point M d'abscisse z . L'atome passe du point M au point N (Fig. 9). Au cours d'une telle transition, l'énergie du champ de rayonnement diminue de MN, puisque le photon réémis spontanément est moins énergétique que le photon absorbé.

- L'atome reste un certain temps dans l'état $|\Psi_C\rangle$ avant de retourner dans l'état $|\Psi_{NC}\rangle$ par un processus Raman spontané anti-Stokes (flèche ④ de la Fig. 8b). Supposons que cette transition se produise au point P, d'abscisse $z + \delta z$, ramenant l'atome de P à Q.

δz est de l'ordre de $v (\Gamma'_{C \rightarrow NC})^{-1}$ où $\Gamma'_{C \rightarrow NC}$ est donné en (3.12). La condition (3.10) de très faible vitesse signifie que $\delta z \ll \lambda$. Au cours d'une telle transition, l'énergie du champ de rayonnement augmente de PQ. Globalement, à l'issue du cycle MNPQ, l'énergie du rayonnement a augmenté de

$$(\delta W)_{\text{ray}} = \hbar [\delta_C'(P) - \delta_C'(Q)] = \hbar [\delta_C'(z + \delta z) - \delta_C'(z)] \quad (3.17)$$

- Après le point Q, l'atome reste dans l'état $|\Psi_{NC}\rangle$ jusqu'au prochain cycle, le temps moyen entre 2 tels cycles étant de l'ordre de $(\Gamma'_{NC \rightarrow C}{}^{\text{mot}})^{-1}$.



- Soit F la force radiative exercée par le champ laser sur l'atome. Pour déplacer l'atome à la vitesse v , il faut appliquer à l'atome une force $-F$. La puissance moyenne nécessaire pour déplacer l'atome à la vitesse v est donc $-Fv$, où la barre horizontale signifie une moyenne spatiale. Cette puissance moyenne dissipée pour déplacer l'atome se retrouve dissipée en régime stationnaire sous forme de rayonnement. On peut donc écrire

$$-Fv = \overline{(dW/dt)}_{\text{ray}} \quad (3.18)$$

Le principe du calcul de F consiste donc à calculer la puissance dissipée dans le rayonnement au moyen de (3.17) et des divers taux calculés dans le §4, à en effectuer la moyenne spatiale, puis à utiliser (3.18).

Puissance moyenne dissipée dans le rayonnement

- Cette puissance moyenne s'écrit, compte tenu de (3.17) :

$$\overline{\left(\frac{dW}{dt}\right)}_{\text{ray}} = \frac{2}{\lambda} \int_0^{\lambda/2} dz \Gamma'_{NC \rightarrow C}(\beta) \hbar [\delta'_c(\beta + \delta\beta) - \delta'_c(\beta)] \quad (3.19)$$

$(2/\lambda) \int_0^{\lambda/2} dz$ correspond à la moyenne spatiale sur une période $\lambda/2$ de l'intensité lumineuse ; $\Gamma'_{NC \rightarrow C}(\beta)$ est la probabilité par unité de temps pour que le cycle $MNPQ$ de la figure 9 commence au point d'abscisse β . $\hbar [\delta'_c(\beta + \delta\beta) - \delta'_c(\beta)]$ est l'énergie gagnée par le rayonnement quand un tel cycle se produit

- Comme $\delta\beta \ll \lambda$ d'après (3.10), on peut faire un développement limité du crochet de (3.19)

$$\delta'_c(\beta + \delta\beta) - \delta'_c(\beta) = \delta\beta \left(\frac{d}{d\beta} \delta'_c(\beta)\right) + \frac{1}{2} \delta\beta^2 \left(\frac{d^2}{d\beta^2} \delta'_c(\beta)\right) + \dots \quad (3.20)$$

En fait, le temps δt passé par l'atome dans l'état $1\psi_c$ (portion NP du cycle) n'est pas une variable certaine, mais une variable aléatoire distribuée suivant la loi $\Gamma'_{c \rightarrow NC}(\beta) e^{-\Gamma'_{c \rightarrow NC}(\beta) \delta t}$. Il en est de même de $\delta\beta = v \delta t$. Il faut donc remplacer dans (3.20) $\delta\beta$ et $\delta\beta^2$ par leur valeur moyenne calculée à partir de cette loi exponentielle. On trouve, compte tenu de (3.12)

$$\overline{\delta\beta} = v (\Gamma'_{c \rightarrow NC}(\beta))^{-1} = 2v / \Gamma'_c(\beta) \quad (3.21.a)$$

$$\overline{\delta\beta^2} = 2 \overline{\delta\beta}^2 = 8v^2 / \Gamma'_c(\beta)^2 \quad (3.21.b)$$

- Replaçons (3.21) dans (3.20), puis (3.20) dans (3.19). Il vient, compte tenu de (3.8) et (2.15)

$$\begin{aligned} \overline{\left(\frac{dW}{dt}\right)}_{\text{ray}} &= \frac{2}{\lambda} \int_0^{\lambda/2} dz \left[\frac{1}{2} k^2 v^2 \sin^2 \theta \frac{\Gamma'}{\delta^{1/2}} \frac{1}{D^3(\beta)} \right] \left[\frac{2\hbar \delta' v}{\Gamma'} \frac{1}{D(\beta)} \frac{d}{d\beta} D(\beta) \right] \\ &+ \frac{2}{\lambda} \int_0^{\lambda/2} dz \left[\frac{1}{2} k^2 v^2 \sin^2 \theta \frac{\Gamma'}{\delta^{1/2}} \frac{1}{D^3(\beta)} \right] \left[\frac{4\hbar \delta' v^2}{\Gamma'^2} \frac{1}{D^2(\beta)} \frac{d^2}{d\beta^2} D(\beta) \right] + \dots \end{aligned} \quad (3.22)$$

Toute la dépendance en β apparaît via la fonction $D(\beta) = 1 + \cos \theta \cos 2k\beta$ qui caractérise les variations spatiales de l'intensité lumineuse et qui est une fonction paire de β . Comme $dD(\beta)/d\beta$ est une fonction impaire de β l'intégrale de la 1^{ère} ligne de (3.22), qui représente la contribution du terme d'ordre 1 de (3.20) s'annule. Compte tenu de $d^2 D(\beta) d\beta^2 = -4k^2 \cos \theta \cos 2k\beta$ le terme de la 2^{ème} ligne donne

$$\overline{\left(\frac{dW}{dt}\right)}_{\text{ray}} = -8(kv)^4 \frac{\hbar}{\delta' \Gamma'} \cos \theta \sin^2 \theta \frac{2}{\lambda} \int_0^{\lambda/2} dz \frac{\cos 2k\beta}{(1 + \cos \theta \cos 2k\beta)^5} \quad (3.23)$$

Dans l'intégrale sur β , effectuons le changement de variable $2k\beta = u$. Puis divisons (3.23) par $-v$ pour obtenir F d'après (3.18). On obtient finalement

$$\overline{F} = - \frac{4}{\pi} \hbar k (k v)^3 \frac{\sin^2 \theta \cos \theta}{\delta' P'} \left| \int_0^{2\pi} du \frac{\cos u}{(1 + \cos \theta \cos u)^5} \right| \quad (3.24)$$

- Comparons (3.24) à (2.47). On voit que le raisonnement physique suivi dans ce paragraphe redonne pour la force moyenne des résultats quasiment identiques à ceux fournis par le calcul utilisant les équations de Bloch optiques. La seule différence est le facteur numérique en tête de la formule qui vaut $-4/\pi = -20/5\pi$ au lieu de $-16/5\pi$

- En fait, la différence précédente entre les facteurs numériques peut être comprise physiquement et corrigée séparément. Revenons à la 1^{ère} ligne de (3.22). Pour calculer $\overline{\delta z}$ (voir Eq. 3.21.a), nous avons négligé la variation de $\Gamma'_{c \rightarrow nc}(z)$ avec z quand l'atome parcourt le segment NP de la figure 9. Il s'agit là d'une petite correction. Mais comme le terme de la 1^{ère} ligne de (3.22) est d'un ordre en $k v / P'_c$ inférieur à celui de la 2^{ème} ligne, une petite correction sur ce terme peut donner une contribution du même ordre que celle de la 2^{ème} ligne. En fait, c'est bien ce que donne un calcul de cette correction (voir Appendice A).

On trouve que la correction sur le terme d'ordre 1 de (3.22), liée à la variation spatiale de $\Gamma'_{c \rightarrow nc}(z)$ a la même forme que (3.24) au remplacement près de $-4/\pi$ par $+4/5\pi$. Ajoutée à (3.24), elle redonne bien un coefficient $(-4/\pi) + (4/5\pi) = -16/5\pi$ égal à celui de (2.47).
 Interprétons ici le signe de la correction. Considérons pour cela 2 points symétriques par rapport à un minimum de $\Gamma'_{c \rightarrow nc}(z)$. A gauche du minimum, l'atome devale la pente sur le segment NP du cycle, alors qu'à droite il gravit une colline. Si les durées des 2 temps passés dans $|\psi_c\rangle$ à droite et à gauche sont égales, les contributions du terme linéaire en v se compensent. C'est pourquoi la moyenne spatiale de (3.22) est nulle. Tenons compte maintenant des variations spatiales de $\Gamma'_{c \rightarrow nc}(z)$. Sur le segment de gauche, l'atome se rapproche du minimum de $D(z)$; $\Gamma'_{c \rightarrow nc}(z)$ diminue donc (puisque $\Gamma'_c(z) = P'_c D(z)$) et l'atome reste plus longtemps sur la pente qu'il devale. A droite du minimum, l'atome s'éloigne du minimum, $\Gamma'_{c \rightarrow nc}(z)$ augmente et l'atome reste moins longtemps sur $|\psi_c\rangle$. L'atome est donc davantage accéléré à gauche qu'il n'est ralenti à droite, ce qui explique pourquoi cette correction diminue la friction calculée en (3.24)

5.2 Bilan des divers échanges d'énergie

- Les divers termes qui apparaissent dans la 2^{ème} ligne de (3.22), $\Gamma'_{nc \rightarrow c}(z)$, δz^2 , $d^2 D(z)/dz^2$ présentent tous un maximum quand z varie au voisinage d'un minimum d'intensité (minimum de $D(z)$). La fonction figurant dans l'intégrale de (3.24), qui décrit les variations spatiales de $(\delta W)_{ray}$, est très "piquée" au voisinage des valeurs $\cos u = \cos 2kz = -1$, c'est à dire aux minima de $D(z)$. Or, en ces points la pente du niveau d'énergie ψ_c est nulle (c'est la courbure qui est importante en ces points). Un tel résultat peut paraître surprenant à 1^{ère} vue, puisque l'image des forces dipolaires reliant les foyers aux gradients spatiaux des niveaux habillés, suggérerait plutôt que les points importants sur l'axe des z pour la force de friction sont les points où la pente des niveaux est maximale

- Pour résoudre un tel paradoxe, faisons le bilan des énergies reçues par le système quand on le déplace de z à $z + dz = z + v dt$. Il faut exercer sur lui une force équilibrant la force radiative $F(z)$. On fournit donc au système un travail

$$dW = -F(z) v dt = -F(z) dz \quad (3.25) \quad \text{III-8}$$

L'énergie dissipée sous forme de rayonnement peut être considérée comme une énergie de ordonné, une "chaleur" fournie à l'extérieur. Le système reçoit donc une chaleur dQ , opposée à cette énergie dissipée

$$dQ = -\left(\frac{dW(z)}{dt}\right)_{\text{ray}} dt = -\left(\frac{dW(z)}{dt}\right)_{\text{ray}} \frac{dz}{v} \quad (3.26)$$

En appliquant le 1^{er} principe de la thermodynamique, l'énergie interne U du système change de

$$dU = dW + dQ \quad (3.27)$$

En utilisant la périodicité spatiale des énergies et des populations de niveaux d'énergie, on trouve que U prend la même valeur en 2 points distants de $\lambda/2$. On en déduit que

$$\int_0^{\lambda/2} dU = U(\lambda/2) - U(0) = 0 \quad (3.28)$$

Il suffit alors d'intégrer (3.27) entre 0 et $\lambda/2$ pour obtenir, compte tenu de (3.25) et (3.26)

$$\int_0^{\lambda/2} F(z) dz = -\frac{1}{v} \int_0^{\lambda/2} \left(\frac{dW}{dt}(z)\right)_{\text{ray}} dz \quad (3.29)$$

ce qui n'est autre que l'égalité (3.18) utilisée plus haut pour calculer \bar{F} .

- Le raisonnement précédent montre que dW et dQ n'ont aucune raison d'être opposés en chaque point z puisque leur somme vaut dU qui n'est pas nulle. Les maxima de $|F(z)|$ n'ont donc aucune raison de coïncider avec les maxima de $|(dW/dt)_{\text{ray}}|$. Par contre leurs intégrales coïncident au signe près, ce qui permet de calculer la moyenne spatiale de F à partir de la moyenne spatiale de l'énergie dissipée.

5.3 Etude qualitative d'autres régimes de vitesse

- Le comportement en $-v^3$ de la force moyenne que nous venons de calculer n'est valable qu'aux très faibles vitesses : $k v \ll \Gamma'_c$ (voir 3.10)
- Comme nous avons supposé $\delta \gg \Gamma$, on a $\delta'_c \gg \Gamma'_c$, et on peut donc envisager un autre domaine de vitesse

$$\Gamma'_c \ll k v \ll \delta'_c \quad (3.30)$$

Comme $k v \ll \delta'_c$ (voir 3.4), on peut continuer à utiliser l'expression perturbative (3.7) du taux de transfert $\Gamma'_{NC \rightarrow C}$, qui varie donc en $k^2 v^2 \Gamma'_c / \delta_c'^2$. Par contre, comme $k v \gg \Gamma'_c$, l'atome parcourt plusieurs λ dans $|\psi_c\rangle$ avant de retourner dans $|\psi_{NC}\rangle$. Comme il passe préférentiellement de ψ_{NC} à ψ_c aux minima de $D(z)$, et ensuite de ψ_c à ψ_{NC} aux maxima de $D(z)$, l'énergie moyenne perdue par cycle est de l'ordre de $\hbar \delta'_c$. On en déduit que

$$\left(\frac{dW}{dt}\right)_{\text{ray}} \sim k^2 v^2 \frac{\Gamma'_c}{\delta_c'^2} \times \hbar \delta'_c \sim \hbar k^2 v^2 \frac{\Gamma'_c}{\delta'_c} \quad (3.31)$$

et par suite compte tenu de (3.18)

$$\bar{F} = -\hbar k^2 v \frac{\Gamma'_c}{\delta'_c} \quad (3.32)$$

Dans le domaine (3.30), on a donc une force de friction linéaire en v du même ordre que celle trouvée dans les configurations $\sigma^+ - \sigma^-$ dans une transition $J_g=1 \leftrightarrow J_e=2$ (voir Ref. 3). Le taux d'amortissement

de la vitesse dans ce régime est $(\hbar k^2/M) \rho'_c / \delta'_c$, comme dans une mélasse sub-Doppler $\sigma^+ \sigma^-$.

- Supposons maintenant

$$(\delta'_c)_{\min} < kv < (\delta'_c)_{\max} \tag{3.32}$$

où $(\delta'_c)_{\min}$ et $(\delta'_c)_{\max}$ sont les valeurs minimale et maximale de δ'_c . Comme $kv > (\delta'_c)_{\min}$, on peut maintenant utiliser l'expression (3.9) du taux de transfert aux minima de $D(z)$ où ce taux est maximum. On a donc $\Gamma'_{NC \rightarrow C} \sim \rho'_c$. Comme plus haut, le fait que l'atome parcourt plusieurs λ dans ψ_c avant de repasser dans ψ_{NC} et le fait que les niveaux d'énergie ne sont pas trop perturbés puisque $kv < (\delta'_c)_{\max}$, entraînent que l'énergie moyenne perdue par cycle est de l'ordre de $\hbar \delta'_c$. On en déduit

$$\overline{F} \sim -\frac{1}{v} \rho'_c \hbar \delta'_c \tag{3.33}$$

La force moyenne doit donc partir en $-v^3$, puis varier linéairement en $-v$, enfin décroître en $-\frac{1}{v}$.

Il ne faut pas oublier cependant que, quand kv devient de l'ordre de δ'_c , la perturbation V_{mot} , qui apparait dans le référentiel au repos de l'atome comme une perturbation périodique, de fréquence kv , peut induire des transitions résonnantes entre ψ_c et ψ_{NC} . Il en résulte des variations résonnantes de F pour certaines valeurs de v (Dopplers)

- Notons enfin que dans tout ce qui précède on a supposé $kv \ll \Gamma$ (pour pouvoir éliminer adiabatiquement les cohérences optiques - voir § 3.5). Physiquement, une telle condition exprime ici que chacune des 2 transitions Raman de la figure 9 peut être considérée comme instantanée. La différence entre les abscisses de M et N, ou P et Q, est extrêmement petite à l'échelle de λ .

⑥ Diffusion en impulsions

6-1 Ordre de grandeur du coefficient de diffusion D

- Partons de l'expression donnant D (ref. [11]).

$$D \sim \int_0^\infty \langle F(t) F(t-\tau) \rangle d\tau \tag{3.34}$$

où $F(t)$ est la force instantanée agissant sur l'atome (en toute rigueur, il faut prendre $\delta F = F(t) - \langle F(t) \rangle$, mais la contribution de $\langle F(t) \rangle$ à (3.34) est ici négligeable). L'étude de la cascade radiative de l'atome habillé conduit pour F à l'image d'une force dont la valeur instantanée est liée au gradient spatial de l'énergie du niveau habillé dans lequel l'atome se trouve, force qui change brusquement quand l'atome saute par émission spontanée d'un niveau habillé à l'autre (ref. [1]). Ici, $F(t)$ n'est non nulle que quand l'atome est dans l'état ψ_c . Cette force vaut alors $-d(\hbar \delta'_c)/dz$. Comme l'atome ne reste dans ψ_c qu'un temps de l'ordre de $1/\rho'_c$, le temps de corrélation τ_c de la fonction de corrélation de F apparaissant dans (3.34) est de l'ordre de $1/\rho'_c$. On peut donc écrire, en ordre de grandeur

$$D \sim \langle F^2(t) \rangle \tau_c \sim \Pi_c^{st}(z) \left(-\frac{d}{dz} \hbar \delta'_c(z) \right)^2 \frac{1}{\rho'_c(z)} \tag{3.35}$$

- En utilisant (3.14), (2.15.a) et (2.15.b), on obtient en ordre de grandeur (et en ignorant toutes les dépendances spatiales, décrites par $D(z)$ et sur lesquelles nous reviendrons plus loin)

$$D(v) \sim \frac{k^2 v^2}{\delta_c'^2} \frac{\hbar^2 k^2 \delta_c'^2}{\Gamma_c'} \frac{1}{\Gamma_c'} = \beta v^2 \quad \text{avec} \quad \beta = \frac{\hbar^2 k^4}{\Gamma_c'} \quad (3.36)$$

6.2 Température de quasi-équilibre

- A partir de l'équation de Fokker-Planck décrivant l'évolution de la fonction de distribution des vitesses $p(v)$ d'une particule soumise à une force $F(v)$ et dont l'impulsion diffuse avec un coefficient $D(v)$, on peut montrer que $p(v)$ tend vers un état d'équilibre donné par

$$p_{eq}(v) \sim e^{+M \int dv' \frac{F(v')}{D(v')}} \quad (3.37)$$

D'après (3.24) $F(v) \sim -\alpha v^3$ avec $\alpha = \frac{\hbar k^4}{\delta_c' \Gamma_c'}$ (3.38)

On en déduit que $p_{eq}(v) \sim e^{-\frac{Mv^2}{2} \frac{\alpha}{\beta}}$ (3.39)

ce qui correspond à une température d'équilibre donnée par $k_B T_{eq} \sim \frac{\beta}{\alpha} \sim \hbar \delta_c'$ (3.40)

Comme dans tous les effets Siÿphre, on retrouve une température correspondant à la profondeur des puits de potentiel formés par les modulations spatiales des niveaux d'énergie (ref. [3]).

- En toute rigueur, il n'y a pas dans le problème étudié ici d'état d'équilibre. Pour une transition $J_g=1 \leftrightarrow J_c=1$, il y a un vrai état noir quantique dans lequel les atomes viennent s'accumuler. Après la phase de pré-refroidissement Siÿphre, étudiée dans ce chapitre, et durant un temps de l'ordre de $(E_{rec} \Gamma_c' / \hbar \delta_c')^{-1}$ [voir haut de la page III-9], il y a une phase VSCPT qui dure un temps beaucoup plus long [voir les calculs et les résultats de la ref. [9]] et qui n'a pas de limite inférieure en T. L'état (3.39) n'est donc pas un vrai état d'équilibre, mais un état de quasi-équilibre atteint rapidement par effet Siÿphre, avant que le refroidissement VSCPT, beaucoup plus lent, n'ait eu le temps de se manifester.

Remarque

Nous avons utilisé en (3.38) la valeur de F aux très faibles vitesses (régime (3.10)). A des vitesses plus élevées (régime 3.30), $F(v)$ est multiplié par un facteur $\Gamma_c'^2 / k^2 v^2 \sim 1 / k^2 v^2 \tau_c^2$ (comparer (3.31) à (3.38)). En fait, dans le régime (3.10), la particule parcourt plusieurs λ dans ψ_c avant de changer d'état et la fonction de corrélation apparaissant dans (3.34) est alors une fonction oscillante de fréquence $\Omega = kv$ et amortie au bout d'un temps $\tau_c = 1/\Gamma_c'$. Son intégrale est alors réduite par rapport à la valeur (3.35) par un facteur $1/\Omega^2 \tau_c^2 = \Gamma_c'^2 / k^2 v^2$ qui est le même que le facteur de réduction de F . Le rapport $F(v')/D(v')$ ne change donc pas dans (3.37) et le résultat (3.40) demeure valable dans le régime (3.10).

6.3 Dépendances spatiales

- Revenons à (3.35). La dépendance spatiale de D est en $\sin^2 2kz / D(z)^5$. Le terme en $[D(z)]^{-5}$ provient de $\Pi_c^{st}(z) \sim D(z)^{-4}$ et de $1/\Gamma_c'(z) \sim D(z)^{-1}$. Le terme en $\sin^2 2kz$ provient de $[dD(z)/dz]^2$ (carré de la pente des niveaux ψ_c).

- Pour F (voir expression (3.24)), la dépendance spatiale de la fonction III-11
 à intégrer sur $u = 2kz$ est en $\cos 2kz / D(z)^5$. Le terme en $D(z)^{-5}$ provient
 de $\Gamma_{NC \rightarrow C}^{\text{mot}}(z) \sim D(z)^{-3}$ et de $\delta z^2 \sim 1/\Gamma'_c(z)^2 \sim D(z)^{-2}$. Le terme en $\cos 2kz$ provient
 de $d^2 D(z)/dz^2$ (courbure des niveaux).

- Comme nous l'avons déjà mentionné plus haut, la fonction $D(z)^{-5}$
 est très "piquée" au voisinage des minima de l'énergie, à δ_c de ψ_c . La
 courbe $\cos 2kz$ a aussi le plus grand module en ces points. En fait, la
 courbure des niveaux ψ_c est également importante au voisinage des
 maxima de δ_c , avec un signe opposé. Mais alors $D(z)^{-5}$ est très petit.
 C'est ce qui explique pourquoi la moyenne spatiale de (3.24) est non nulle
 et conduit à une friction. Pour le coefficient de diffusion par contre, le
 carré de la pente des niveaux d'énergie est nul aux points où $D(z)^{-5}$ est
 très grand. La moyenne spatiale défavorise donc $D(z)$ par rapport à $F(z)$.
 On peut peut être trouver là l'origine du fait que le refroidissement
 Sisyphe étudié ici conduit à une température d'équilibre plus basse
 que celles obtenues dans les configurations usuelles lin \perp lin sur une
 transition $J_g = 1/2 \leftrightarrow J_e = 3/2$ [voir Ref. [9]]. Rappelons (voir Ref [3])
 que les moyennes spatiales apparaissant dans ce dernier cas (lin \perp lin)
 dans les expressions donnant D et F font intervenir $\cos^4 kz$ et $\cos^2 kz$
 qui ont leur maxima aux mêmes endroits.

Références (suite de la liste de la page II-11)

[13] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, G. Grynberg, *Processus d'interactions entre
 photons et atomes*, InterEditions et Editions du CNRS, Paris 1988)

Appendice A

- Pour simplifier les notations, appelons $\gamma(z)$ le taux de départ (3.12) de l'état c
 vers l'état NC , et notons $\gamma'(z_0)$ la valeur de la dérivée $d\gamma/dz$ en $z = z_0$. Considérons
 un atome de vitesse v , se trouvant en z_0 à $t = 0$; $z = z_0 + vt$. La population $\Pi_c(t)$ de
 l'état c pour un tel atome obéit à l'équation

$$d\Pi_c(t)/dt = -\gamma(z_0 + vt)\Pi_c(t) \approx -[\gamma(z_0) + vt\gamma'(z_0)]\Pi_c(t) \quad (A.1)$$

dont la solution, à l'ordre 1 inclus en v , s'écrit, compte tenu de $\Pi_c(0) = 1$:

$$\Pi_c(t) = \exp\left\{-\int_0^t dt' [\gamma(z_0) + vt'\gamma'(z_0)]\right\} \approx e^{-\gamma(z_0)t} [1 - \gamma'(z_0)v t^2/2] \quad (A.2)$$

- Soit $P(t)dt = -(d\Pi_c(t)/dt)dt$ la probabilité pour l'atome de rester dans
 l'état c un temps compris entre t et $t+dt$. De (A.2) on déduit

$$P(t) = -d\Pi_c(t)/dt = e^{-\gamma(z_0)t} \left\{ \gamma(z_0)[1 - \gamma'(z_0)v t^2/2] + \gamma'(z_0)v t \right\} \quad (A.3)$$

On en déduit que le temps moyen passé dans l'état c par un atome arrivant
 dans cet état au point z_0 et animé d'une vitesse v vaut: $\delta t = \int_0^\infty dt t P(t)$
 et que la distance moyenne parcourue vaut $\overline{\delta z} = v \delta t$. De (A.3) on déduit

$$\overline{\delta z} = \frac{v}{\gamma(z_0)} - \frac{\gamma'(z_0)}{\gamma(z_0)^3} v^2 = \frac{2v}{\Gamma'_c(z)} - 4v^2 \left(\frac{d\Gamma'_c}{dz} \right)_{z=z_0} \frac{1}{\Gamma'_c(z_0)^3} \quad (A.4)$$

On est revenu à la notation (3.12): $\gamma = \Gamma'_c/2$. Le dernier terme de (A.4),
 qui en v^2 , représente la correction qu'il faut apporter à (3.21.a) pour tenir compte
 de la variation avec z de $\Gamma'_c(z)$. La correction correspondante à la 1^{ère} ligne
 de (3.22) donne une contribution du même ordre que la 2^{ème} ligne. On tombe
 sur une intégrale en z

$$\int_0^{\lambda/2} dz \frac{\sin^2 2kz}{(1 + \cos \theta \cos 2kz)^6} \quad (A.5)$$

qu'on peut intégrer par parties pour arriver à une correction δF à \overline{F} identique
 à (3.24) au remplacement près des coefficient $-4/\pi$ par $+4/5\pi$

3^{ème} Partie : Le régime quantique

7 Insuffisances du traitement semiclassique

- Le traitement des paragraphes ci-dessus suppose l'atome en mouvement à une vitesse imposée v . Il néglige les changements de vitesse aléatoires, de l'ordre de $v_R = \hbar k / m$, communiqués à l'atome par les photons émis spontanément.
- Ces changements de vitesse ont un premier effet: ils augmentent l'énergie cinétique de l'atome à l'issue de chacun des cycles Rayleigh ou Raman des figures 8 b' et 8 c'. Ce chauffage lié au recul est ignoré dans les bilans d'échanges d'énergie décrits plus haut. Le coefficient de diffusion estimé au § 6 ne tient compte que des fluctuations des forces dipolaires.
- Une autre conséquence très importante du changement aléatoire de vitesse de l'atome est liée à la dépendance en vitesse du temps de départ $\Gamma_{NC}^{mot}(v)$ de l'état non couplé, temps qui varie en v^2 (voir Eq. 3.6). Après avoir émis spontanément un photon, l'atome a une probabilité plus grande ou moins grande d'absorber un nouveau photon, suivant que sa vitesse a augmenté ou diminué. En particulier, s'il retombe dans l'état $|\Psi_{NC}\rangle$ avec une vitesse très proche de 0, il peut rester piégé un temps très long dans cet état. Cette sélection en vitesse, liée à la dépendance en v du temps d'excitation, et la marche aléatoire dans l'espace des vitesses, liée aux reculs aléatoires subis par l'atome, constituent des ingrédients essentiels des méthodes de refroidissement subrecoil (VSCPT et Raman). Il est donc indispensable de tenir compte des changements de vitesse de l'atome.
- Quand la dispersion en impulsions δp de l'atome se rapproche de $\hbar k$ sous l'effet du pré-refroidissement Sisyphé, ou descend même en dessous de $\hbar k$ sous l'effet du refroidissement VSCPT, la longueur d'onde de de Broglie de l'atome, $\lambda_{dB} = \hbar / \delta p$, devient de l'ordre de ou supérieure à la longueur d'onde laser $\lambda_L = \hbar / \hbar k$. L'atome devient alors délocalisé dans l'onde laser et il n'est plus possible de négliger la longueur de cohérence spatiale de l'atome, comme le fait le traitement semiclassique. Un traitement quantique de tous les degrés de liberté, internes et externes, devient indispensable. Deux représentations sont couramment utilisées.

Représentation impulsion

Les états de base sont caractérisés par 1. nombre quantique interne, g_+ , g_- ou g_0 et un nombre quantique externe p , impulsion du centre de masse. Par exemple, l'état $|g_+, p\rangle$ représente un atome dans l'état $|g_+\rangle$ avec une impulsion p .

Représentation position

Le ket $|\Psi\rangle$ décrivant l'état de la particule est représenté par autant de fonctions d'onde qu'il y a d'états internes. Par exemple, $\langle g_-, \vec{r} | \Psi \rangle = \Psi_{g_-}(\vec{r})$ est l'amplitude de probabilité de trouver la particule au point \vec{r} dans $|g_-\rangle$.

8 Les ingrédients essentiels du refroidissement subrecoil (par VSCPT)

8-1 Existence d'états non couplés au champ laser (pour une transition $1 \leftrightarrow 1$)

- Nous rappelons ici, sous une forme légèrement différente, la démonstration de la référence [14], valable pour une transition $1 \leftrightarrow 1$ et pour une configuration

laser quelconque, à 1, 2 ou 3 dimensions (plus générale que la configuration lin $\Delta \oplus$ lin considérée dans ce chapitre.

- Soit $\vec{E}_L^{(+)}(\vec{r})$ la partie de fréquence positive du champ laser qui peut s'écrire, dans le cas le plus général

$$\vec{E}_L^{(+)}(\vec{r}) = E_+(\vec{r}) \vec{e}_{+1} + E_0(\vec{r}) \vec{e}_0 + E_-(\vec{r}) \vec{e}_{-1} \quad (4.1)$$

avec
$$\vec{e}_{\pm 1} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{e}_x \pm i \vec{e}_y) \quad \vec{e}_0 = \vec{e}_z \quad (4.2)$$

- Soit par ailleurs
$$\Psi_g(\vec{r}) |g_{+1}\rangle + \Psi_{g_0}(\vec{r}) |g_0\rangle + \Psi_{g_-}(\vec{r}) |g_{-1}\rangle \quad (4.3)$$

l'état le plus général d'un atome dans l'état fondamental, les 3 composantes $E_m(\vec{r})$ et les 3 composantes $\Psi_{g_m}(\vec{r})$ (avec $m = +, 0, -$) sont les composantes sphériques de 2 champs vectoriels $\vec{E}_L^{+}(\vec{r})$ et $\vec{\Psi}_g(\vec{r})$ [Dans l'état fondamental, l'atome a un spin 1 et sa fonction d'onde est bien un champ vectoriel].

- Posons nous alors la question suivante : Peut-on choisir les Ψ_{g_m} de façon que, par interaction avec le champ laser, l'amplitude de probabilité d'arriver dans n'importe quel sous niveau excité e_m soit nulle ?

Considérons d'abord l'état $|e_{-1}\rangle$. D'après la figure 5 (page II-2), on peut arriver dans $|e_{-1}\rangle$, soit à partir de g_{-1} (fonction d'onde Ψ_{g_-}) par absorption d'un photon π (composante E_0 de \vec{E}_L^{+} , coefficient de Clebsch-Gordan $-1/\sqrt{2}$); soit à partir de g_0 (fonction d'onde Ψ_{g_0}) par absorption d'un photon σ^- (composante E_- de \vec{E}_L^{+} , coef. de c.G. : $+1/\sqrt{2}$). La fonction d'onde obtenue dans $|e_{-1}\rangle$ après interactions avec le champ (4.1) est donc proportionnelle à

$$\Psi_{g_-}(\vec{r}) \cdot E_0(\vec{r}) \cdot (-1/\sqrt{2}) + \Psi_{g_0}(\vec{r}) \cdot E_-(\vec{r}) \cdot (+1/\sqrt{2}) \quad (4.4)$$

Si l'on veut que l'amplitude d'arriver dans $|e_{-1}\rangle$ soit nulle, il faut donc que

$$\Psi_{g_-}(\vec{r}) / E_-(\vec{r}) = \Psi_{g_0}(\vec{r}) / E_0(\vec{r}) \quad (4.5)$$

Un raisonnement analogue montrerait que l'amplitude d'arriver dans $|e_0\rangle$ est nulle si

$$\Psi_{g_-}(\vec{r}) / E_-(\vec{r}) = \Psi_{g_+}(\vec{r}) / E_+(\vec{r}) \quad (4.6)$$

et que celle d'arriver dans $|e_{+1}\rangle$ est nulle si

$$\Psi_{g_+}(\vec{r}) / E_+(\vec{r}) = \Psi_{g_0}(\vec{r}) / E_0(\vec{r}) \quad (4.7)$$

- En fait, les 3 équations (4.5), (4.6) et (4.7) sont compatibles et sont satisfaites si

$$\Psi_{g_m}(\vec{r}) = \alpha(\vec{r}) E_m(\vec{r}) \quad \forall \vec{r} \text{ et } \forall m \quad (4.8)$$

On en déduit que tout état fondamental décrit par une fonction d'onde vectorielle $\vec{\Psi}_g(\vec{r})$, proportionnelle en chaque point au champ laser $\vec{E}_L^{(+)}(\vec{r})$

$$\vec{\Psi}_g(\vec{r}) = \alpha(\vec{r}) \vec{E}_L^{(+)}(\vec{r}) \quad \forall \vec{r} \quad (4.9)$$

est un état non couplé au champ laser. Plusieurs amplitudes d'absorption d'un photon partent des sous niveaux de g pour arriver dans les sous-niveaux de e , mais elles interfèrent toutes destructivement.

- Dans (4.8), $\alpha(\vec{r})$ est une fonction scalaire quelconque de \vec{r} , qui peut toujours être développée en ondes planes $e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}/\hbar}$. On peut donc introduire un ensemble d'états non couplés $\vec{\Psi}_{NC}^{\vec{p}}(\vec{r})$ paramétrés par \vec{p}

$$\vec{\Psi}_{NC}^{\vec{p}}(\vec{r}) = e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}/\hbar} \vec{E}_L^{(+)}(\vec{r}) \quad (4.10)$$

Remarque : Une autre démonstration de (4.9) peut être donnée en utilisant l'invariance par rotation de l'amplitude de transition [voir Ref. 14 et cours 1991-92 pages VI-8 et VI-9]

Revenons à la configuration lin $\Delta\theta$ lin étudiée dans ce chapitre. Nous allons étudier la structure des états non couplés de cette configuration en représentation p et comparer les résultats obtenus avec ceux de la configuration $\sigma^+ \sigma^-$ (voir Ref. 15 et cours 1991-92).

Expression de l'état non couplé en représentation p

- Partons de l'expression (2.2) du champ laser. Développons les 2 fonctions $\cos(kz \pm \theta/2)$ en $\exp(\pm ikz) \exp(\pm i\theta/2)$. Pour obtenir l'état non couplé (4.10) à partir de cette expression, il faut remplacer $\vec{e}_{\pm 1}$ par $|g_{\pm 1}\rangle$ et multiplier la fonction d'onde ainsi obtenue par $\exp(i\vec{p}\vec{z}/\hbar)$ (à 1 dimension, $\vec{p}\cdot\vec{r}/\hbar = p z/\hbar$). On obtient ainsi (en notations de Dirac)

$$|\Psi_{NC}^P\rangle = \frac{1}{2} [e^{i\theta/2} |g_{+1}, p+\hbar k\rangle + e^{-i\theta/2} |g_{+1}, p-\hbar k\rangle + e^{-i\theta/2} |g_{-1}, p+\hbar k\rangle + e^{i\theta/2} |g_{-1}, p-\hbar k\rangle] \quad (4.11)$$

- Les 4 états à l'intérieur du crochet sont orthogonaux et normés (avec des conditions aux limites périodiques pour p). $|\Psi_{NC}^P\rangle$ est donc lui aussi normé.

Couplages induits par l'interaction atome-laser V_{AL}

- Dans un traitement quantique du mouvement atomique, \hat{z} doit être remplacé par l'opérateur position \hat{z} dans l'expression (2.8) de V_{AL} . Le développement en exponentielles de $\cos(k\hat{z} \pm \theta/2)$ fait alors apparaître les opérateurs de translation de l'impulsion $\exp(\pm ik\hat{z}) = \sum |p \pm \hbar k\rangle \langle p|$, de sorte que

$$V_{AL} = \frac{\hbar\Omega}{4} \sum_P [-e^{i\theta/2} |e_0, p+\hbar k\rangle \langle g_{-1}, p| - e^{-i\theta/2} |e_0, p-\hbar k\rangle \langle g_{-1}, p| + e^{-i\theta/2} |e_0, p+\hbar k\rangle \langle g_{+1}, p| + e^{i\theta/2} |e_0, p-\hbar k\rangle \langle g_{+1}, p|] \quad (4.12)$$

+ h.c.

L'expression (4.12) permet de calculer tous les éléments de matrice non nuls de V_{AL} . Le champ laser est une superposition linéaire de 2 ondes stationnaires σ^+ et σ^- d'après (2.2). L'onde stationnaire σ^+ (σ^-) ne peut exciter les atomes qu'à partir de $|g_{-1}\rangle$ ($|g_{+1}\rangle$) et change p de $+\hbar k$ ou $-\hbar k$

- On voit ainsi que les états de base du système se groupent en familles de dimension infinie d'états couplés de proche en proche par V_{AL} . La figure 10 représente une telle famille. Les états sont rangés, verticalement suivant le nombre quantique interne (g_{+1}, g_0, g_{-1}), horizontalement suivant la valeur de l'impulsion. Les flèches obliques représentent les couplages induits par V_{AL} . Les quantités $\pm e^{\pm i\theta/2}$ écrites à côté de ces flèches représentent les valeurs correspondantes des éléments de matrice de V_{AL} (au facteur $\hbar\Omega/4$ global près, le même pour toutes les transitions), l'état g figurant dans le ket, l'état e dans le bra (sinon il faut prendre les complexes conjugués)

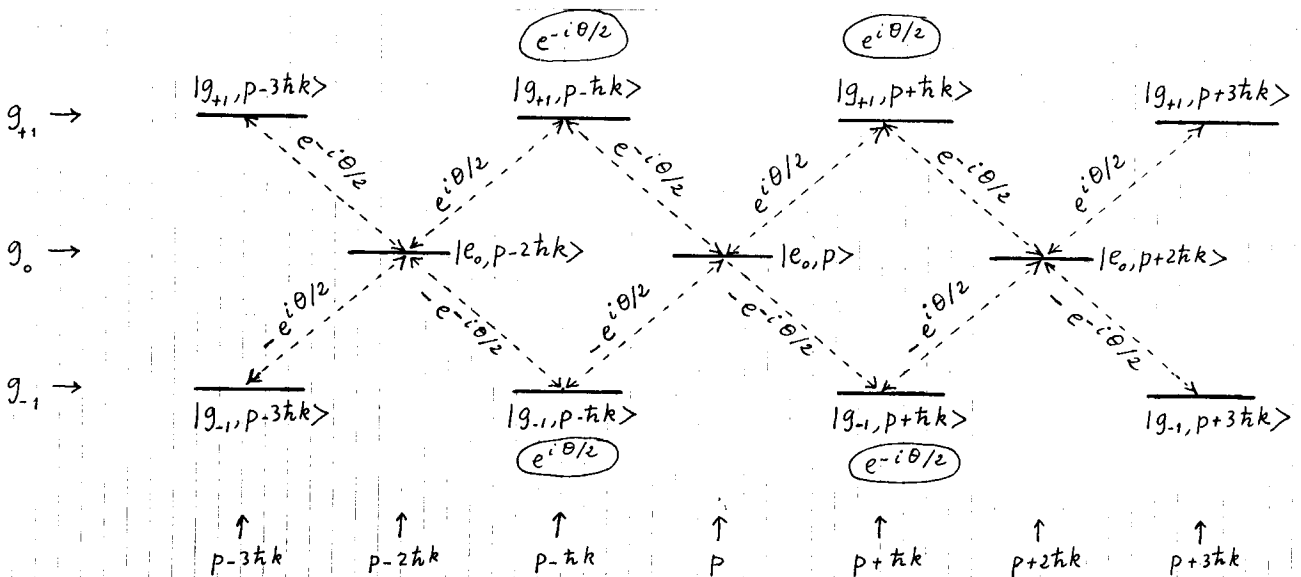
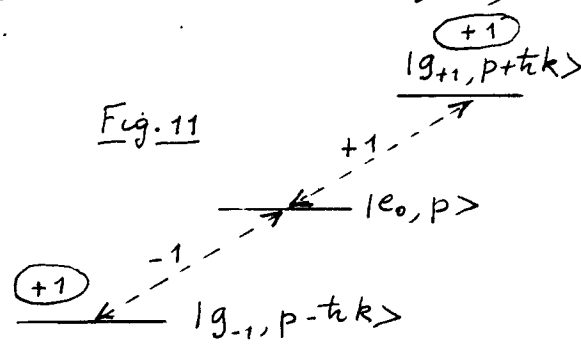


Fig. 10

- Sous l'effet des seuls couplages dus à V_{AL} , l'impulsion de l'atome pourrait augmenter ou diminuer indéfiniment par multiples de $\pm \hbar k$. Il s'agit là d'un processus de redistribution de photons entre les 2 ondes progressives formant chaque onde stationnaire σ^+ ou σ^- . On peut interpréter ainsi, en termes de photons, les forces dipolaires associées, dans le traitement semi-classique, au gradient spatial du niveau couplé $|\psi_c\rangle$.

- Dans le cas de la configuration $\sigma^+ - \sigma^-$, le champ laser est une superposition de 2 ondes progressives σ^+ et σ^- (et non plus stationnaires) se propageant en sens inverses. Les états de base couplés par V_{AL} se groupent alors en familles jinies de 3 états (voir Fig. 11). Il n'y a plus alors de redistribution de photons. Dans le traitement semi-classique, l'énergie de l'état couplé ne dépend pas de z .



Interférences destructives apparaissant pour l'état non couplé

- L'état non couplé (4.11) est une superposition linéaire de 4 des états de base de la famille infinie représentée sur la figure 10. Les coefficients de cette superposition sont les quantités entourées d'un rond sur la figure (au facteur 1/2 près, le même pour les 4 états). On voit alors clairement les interférences destructives à l'origine du caractère non couplé de $|\psi_{NC}^P\rangle$.

Par exemple, l'amplitude de probabilité d'aller de $|g_{+1}, p + \hbar k\rangle$ à $|e_0, p\rangle$ est égale au produit de l'amplitude, $e^{i\theta/2}$, d'être dans $|g_{+1}, p + \hbar k\rangle$ par l'amplitude, $e^{i\theta/2}$, de la transition, soit en tout $e^{i\theta}$. Cette amplitude est l'opposé de celle d'aller de $|g_{-1}, p - \hbar k\rangle$ à $|e_0, p\rangle$, égale à $e^{i\theta/2} \times (-e^{i\theta/2}) = -e^{i\theta}$. On verrait de la même façon que les 2 amplitudes d'aller de $|g_{+1}, p - \hbar k\rangle$ et $|g_{-1}, p + \hbar k\rangle$ à $|e_0, p\rangle$ valent, respectivement, $e^{-i\theta/2} \times e^{-i\theta/2} = e^{-i\theta}$ et $e^{-i\theta/2} \times (-e^{-i\theta/2}) = -e^{-i\theta}$ et se compensent exactement. Enfin, l'état $|e_0, p + 2\hbar k\rangle$ peut être atteint, soit à partir de $|g_{+1}, p + \hbar k\rangle$, soit à partir de $|g_{-1}, p + \hbar k\rangle$, avec des amplitudes respectivement égales à $e^{i\theta/2} e^{-i\theta/2} = 1$ et $e^{-i\theta/2} \times (-e^{i\theta/2}) = -1$, qui interfèrent donc destructivement. Un même raisonnement s'applique à $|e_0, p - 2\hbar k\rangle$.

- Finalement, les 4 états de base figurant dans (4.11) peuvent être couplés individuellement à 2 des 3 états excités $|e_0, p - 2\hbar k\rangle$, $|e_0, p\rangle$, $|e_0, p + 2\hbar k\rangle$. Mais les coefficients de la superposition linéaire (4.11) sont tels que les amplitudes d'excitation interfèrent destructivement 2 par 2.

- Dans le cas de la configuration $\sigma^+ - \sigma^-$ (Fig. 4.11), l'état non couplé est la superposition linéaire symétrique de $|g_{+1}, p + \hbar k\rangle$ et $|g_{-1}, p - \hbar k\rangle$.

8-3 Existence d'un état noir.

- Dans le traitement quantique de cette partie, l'hamiltonien total doit contenir l'opérateur énergie cinétique $\hat{p}^2/2M$ où \hat{p} est l'opérateur impulsion. Les états de base de la figure 10 sont des états propres de $\hat{p}^2/2M$. En particulier, les 4 états apparaissant dans (4.11) ont des énergies cinétiques égales à $(p + \hbar k)^2/2M$ pour $|g_{\pm 1}, p + \hbar k\rangle$, à $(p - \hbar k)^2/2M$ pour $|g_{\pm 1}, p - \hbar k\rangle$.

- Considérons à $t=0$ un atome dans l'état $|\psi(t=0)\rangle = |\psi_{NC}^P\rangle$. Un tel état n'évoluera pas sous le seul effet de V_{AL} puisque $V_{AL}|\psi_{NC}^P\rangle = 0$. Il ne se désintègrera pas par émission spontanée puisque les états g sont des états fondamentaux. Par contre $|\psi_{NC}^P\rangle$ peut évoluer à cause de $\hat{p}^2/2M$ (évolution propre). Comme $|\psi_{NC}^P\rangle$ est une superposition d'états d'énergies cinétiques différentes, il va apparaître un déphasage entre les exponentielles d'évolution propre qui multiplieront $|g_{+1}, p + \hbar k\rangle$ et celles qui multiplieront $|g_{+1}, p - \hbar k\rangle$. L'état $|\psi(t)\rangle$ pour $t > 0$ ne coïncide plus avec $|\psi_{NC}^P\rangle$ et les amplitudes d'excitation à partir des diverses composantes de $|\psi(t)\rangle$ n'interfèrent plus destructivement.

- Le raisonnement précédent montre alors que l'état $|\Psi_{NC}^{p=0}\rangle$ est privilégié. Les énergies cinétiques des 4 états de base de (4.11) sont en effet égales à $\hbar^2 k^2 / 2M$ quand $p=0$. Les exponentielles d'évolution libre sont alors toutes égales à $e^{-i\hbar k^2 t / 2M}$ et n'introduisent qu'un facteur de phase global qui ne change pas l'état physique. L'état

$$|\Psi_{NC}^{p=0}\rangle = \frac{1}{2} [e^{i\theta/2} |g_{+1}, +\hbar k\rangle + e^{-i\theta/2} |g_{+1}, -\hbar k\rangle + e^{-i\theta/2} |g_{-1}, +\hbar k\rangle + e^{i\theta/2} |g_{-1}, -\hbar k\rangle] \quad (4.13)$$

est donc un piège parfait pour les atomes qui ne peuvent le quitter, ni par absorption d'un photon, ni par émission spontanée, ni par évolution propre. L'état (4.13) est appelé "état noir"

Remarque : Le résultat précédent demeure valable à un nombre quelconque de dimensions. Si l'on fait $\vec{p} = \vec{0}$ dans (4.10), on obtient pour $\Psi_{NC}^{\vec{p}=\vec{0}}$ une fonction d'onde isomorphe au champ laser. Or le champ laser monochromatique, de fréquence ω_L , peut toujours être développé en ondes planes dont les vecteurs d'onde \vec{k}_i ont le même module $|\vec{k}_i| = \omega_L / c$. Il en est donc de même pour $\Psi_{NC}^{\vec{p}=\vec{0}}$. Comme l'énergie cinétique des diverses ondes planes $e^{i\vec{k}_i \cdot \vec{r}}$ est égale à $\hbar^2 k_i^2 / 2M = \hbar^2 \omega_L^2 / 2Mc^2$, et est donc indépendante de i , on en déduit que $|\Psi_{NC}^{\vec{p}=\vec{0}}\rangle$ est état propre de $\hat{p}^2 / 2M$ et est donc un état stationnaire.

8-4 Durée de vie des états quasi-noirs

- Faisons agir $\hat{p}^2 / 2M$ sur l'expression (4.11) de $|\Psi_{NC}^p\rangle$. Les énergies cinétiques des 4 états de base contiennent toutes un terme $p^2 / 2M + \hbar^2 k^2$ indépendant de l'état et un terme $\pm \hbar k p / M$ qui varie d'un état à l'autre. On obtient donc :

$$\frac{\hat{p}^2}{2M} |\Psi_{NC}^p\rangle = \left(\frac{p^2}{2M} + \frac{\hbar^2 k^2}{2M} \right) |\Psi_{NC}^p\rangle + \frac{\hbar k p}{M} |\Phi_C^p\rangle \quad (4.14)$$

avec

$$|\Phi_C^p\rangle = \frac{1}{2} [e^{i\theta/2} |g_{+1}, p+\hbar k\rangle - e^{-i\theta/2} |g_{+1}, p-\hbar k\rangle + e^{-i\theta/2} |g_{-1}, p+\hbar k\rangle - e^{i\theta/2} |g_{-1}, p-\hbar k\rangle] \quad (4.15)$$

A cause des changements de signe dans les 2^{ème} et 4^{ème} termes de (4.15) par rapport à (4.11), les transitions de $|\Phi_C^p\rangle$ vers les états excités comme $|e_0, p\rangle$ ne sont plus destructives. L'état $|\Phi_C^p\rangle$ est donc couplé au laser. Il va se désintégrer radiativement avec un taux de l'ordre de Γ' et acquies un déplacement lumineux de l'ordre de $\hbar \delta'$ [voir Eq. (2.16)].

- L'équation (4.14) montre que $\hat{p}^2 / 2M$ couple $|\Psi_{NC}^p\rangle$ à $|\Phi_C^p\rangle$ et contamine donc l'état $|\Psi_{NC}^p\rangle$ par l'état instable $|\Phi_C^p\rangle$. On en déduit que $|\Psi_{NC}^p\rangle$ va se désintégrer radiativement avec un taux qui, à la limite $\hbar k p / M \ll \Gamma'$, va varier en $\frac{\hbar^2 p^2}{M^2} \Gamma' / \delta'^2$.

Remarques

(i) Le raisonnement précédent n'est que qualitatif. L'état $|\Phi_C^p\rangle$ ne se désintègre pas avec une seule constante de temps. D'autres états fondamentaux de la figure 10 sont couplés aux mêmes états excités que $|\Phi_C^p\rangle$ et ces autres états fondamentaux sont eux mêmes couplés par $\hat{p}^2 / 2M$ à d'autres états $|\Psi_{NC}^{p+2n\hbar k}\rangle$ ($n = \pm 1, \pm 2, \dots$) analogues à $|\Psi_{NC}^p\rangle$. Il faudrait en toute rigueur déterminer les modes propres de désintégration radiative de l'état fondamental. L'approche utilisant la théorie des bandes (voir § 9.2 plus loin) est mieux adaptée que la représentation p à ce genre de problème car elle tient compte de la périodicité spatiale du potentiel lumineux associé à V_{AL} . On peut alors justifier plus rigoureusement qu'il existe, en plus de l'état noir (4.13), de durée de vie infinie, d'autres états quasi-noirs, repérés par une quasi-impulsion p , dont la largeur radiative tend vers 0 comme p^2 quand $p \rightarrow 0$.

(ii) Le cas de la configuration $\sigma^+ \sigma^-$ est beaucoup plus simple. La combinaison linéaire antisymétrique de $|g_{-1}, p - \hbar k\rangle$ et $|g_{+1}, p + \hbar k\rangle$ est un état $|\Psi_C^P\rangle$ couplé à $|e_0, p\rangle$, ayant une durée de vie radiative bien définie (voir Fig. 11). Il en est de même de $|\Psi_{NC}^P\rangle$ sous l'effet du couplage motional introduit par $\hat{p}^2/2M$ entre $|\Psi_{NC}^P\rangle$ et $|\Psi_C^P\rangle$.

En conclusion de ce paragraphe, on peut dire que l'utilisation de la représentation p nous a permis de généraliser, au moins de manière qualitative, à la configuration lin $\Delta \theta$ lin les résultats essentiels obtenus précédemment dans le cas plus simple de la configuration $\sigma^+ \sigma^-$: existence dans l'état fondamental d'un état noir $p=0$ et d'états quasi-noirs $p \neq 0$ qui deviennent de plus en plus noirs quand $p \rightarrow 0$. Cette sélectivité en impulsions, jointe aux changements aléatoires d'impulsion lors des processus d'émission spontanée est à la base du mécanisme de refroidissement VSCPT qui accumule les atomes dans l'état noir [voir Fig. 4 page I.6]. La signature d'un tel refroidissement est d'apparition d'un double pic dans la distribution d'impulsions, puisqu'une mesure de \hat{p} sur l'état noir (4.13) donne 2 valeurs possibles $+\hbar k$ et $-\hbar k$.

⑨ - Revue de quelques approches quantitatives

9.1 Equations de Bloch optiques généralisées

Une telle approche a déjà été utilisée pour la configuration $\sigma^+ \sigma^-$ (voir Ref. 15). Elle peut se généraliser à la configuration lin $\Delta \theta$ lin. Les éléments de matrice de l'opérateur densité ρ évoluent sous l'effet de V_{AL} , de $\hat{p}^2/2M$, de l'hamiltonien atomique interne $H_A^{int} = \hbar \omega_A |e_0\rangle\langle e_0|$. Il faut introduire en plus les termes de relaxation radiative dus à l'émission spontanée. Les équations sont beaucoup plus complexes que dans le cas $\sigma^+ \sigma^-$. Tout d'abord, V_{AL} couple entre eux une infinité d'états (voir Fig. 10). Il y a également des cohérences entre états d'impulsions différentes, comme $\langle e_0, p | \rho | e_0, p' \rangle$ ou $\langle g_m, p | \rho | g_{m'}, p' \rangle$ ($m, m' = \pm 1$). Ces cohérences reflètent le caractère non homogène de la distribution spatiale des atomes, dû aux ondulations spatiales du potentiel optique associé à V_{AL} . Comme nous l'avons vu plus haut dans les 2 premières parties de ce chapitre, la dépendance spatiale des champs de départ des états fondamentaux et des déplacements lumineux joue un rôle essentiel dans le pré-refroidissement Sisyphus.

9.2 Approches utilisant la théorie des bandes

- Le principe d'une telle approche, particulièrement commode à la limite des grands désaccords ($|B| \gg \Gamma$), est le suivant (voir Ref. 16): On commence par diagonaliser l'hamiltonien $H_0 = \hat{p}^2/2M + H_A^{int} + V_0(\hat{z})$ où $V_0(\hat{z})$ est l'opérateur décrivant le déplacement lumineux de l'état fondamental. $V_0(\hat{z})$ dépend non seulement de l'opérateur position \hat{z} , mais agit aussi sur les degrés

de liberté internes. En un point donné z_0 , les valeurs propres de $U_0(z_0)$ sont les sous-niveaux de l'état fondamental ayant un déplacement lumineux bien défini, égal à la valeur propre correspondante de $U_0(z_0)$, de l'ordre de $\hbar \delta'$ [voir § 2.3.]. Comme $U_0(z)$ est périodique, de période $\lambda/2$, les valeurs propres de H_0 forment des bandes d'énergie dont les niveaux sont repérés par un nombre quantique n (indice de bande) et une quasi-impulsion p variant dans la 1^{ère} zone de Brillouin $-\hbar k \leq p \leq +\hbar k$. On tient ensuite compte des transitions radiatives entre bandes d'énergie dues aux absorptions et réémissions spontanées de photons (caractérisées par des temps de l'ordre de Γ'). La condition $|\delta| \gg \Gamma'$, qui entraîne $|\delta'| \gg \Gamma'$, permet alors de simplifier les équations d'évolution dans la base des bandes (approximation séculaire) et de les remplaçant par des équations de Vanse reliant les seules populations des diverses bandes. Une telle approche a été appliquée au problème du refroidissement laser d'une transition $1 \leftrightarrow 1$ en configurations lin $\Delta \oplus$ lin [voir Ref. 9].

- Illustrons les considérations générales précédentes en montrant comment on peut calculer les modes propres de désintégration radiative du système en configuration lin $\Delta \oplus$ lin [problème évoqué dans la remarque (i) du bas de la page IV-5].

Commençons par le cas plus simple de la configuration $\sigma^+ - \sigma^-$. Les modes propres de désintégration pour la famille des 3 états de la figure 11 s'obtiennent en diagonalisant un hamiltonien effectif non hermitique H_{eff} , tenant compte des couplages de Rabi dus à V_{AL} entre les 3 états, de l'énergie cinétique et de l'énergie interne de chaque état, et de l'instabilité radiative de l'état $|e_0, p\rangle$ décrite en ajoutant un terme imaginaire, $-i\hbar\Gamma/2$ à l'énergie interne de cet état. La diagonalisation de H_{eff} donne 3 valeurs propres dont les parties imaginaires sont de l'ordre, respectivement, de $\Gamma/2$ (désintégration de e), $\Gamma_c/2$ (désintégration de l'état couplé $|\psi_c\rangle$), $\Gamma_{nc}(p)/2 \sim p^2$ (désintégration de l'état quasi-noir $|\psi_{nc}(p)\rangle$).

Un calcul analogue peut être fait pour la configuration lin $\Delta \oplus$ lin. Mais il faut alors diagonaliser un hamiltonien effectif H_{eff} , de dimension infinie, ayant la même structure que le précédent, mais agissant maintenant dans la multiplicité infinie d'états de la figure 10. On note sur cette figure que, sur chaque ligne horizontale (c-à-d pour chaque état interne), les impulsions des états diffèrent par des nombres pairs de $\hbar k$: $2n\hbar k$ ($n = \pm 1, \pm 2, \dots$). Si l'on considère une superposition linéaire quelconque $|\psi\rangle$ des états de la figure 10, les fonctions d'onde multipliant $|g_{+1}\rangle$, $|g_0\rangle$ ou $|g_{-1}\rangle$ sont donc de la forme $e^{ipz/\hbar} u(z)$, où $-\hbar k \leq p \leq +\hbar k$, et où $u(z)$ est une fonction périodique de z (dont les coefficients du développement en série de Fourier sont les coefficients du développement de $|\psi\rangle$). On reconnaît là une fonction de Bloch, de quasi-impulsion p . La diagonalisation de H_{eff} dans la famille infinie d'états de la figure 10 va donc donner tous les états de même quasi-impulsion p dans le diagramme d'énergie des bandes. Les parties imaginaires des valeurs propres seront les temps de désintégration des états propres correspondants, qui peuvent donc être considérés comme des modes propres de désintégration radiative, de quasi-impulsion p .

La démarche que nous venons d'esquisser ne fait aucune hypothèse sur la saturation et sur les valeurs respectives de δ et Γ . Si la transition n est pas saturée, on peut éliminer adiabatiquement les états $|e_0, p + 2n\hbar k\rangle$ et se ramener au problème de la désintégration du seul état fondamental.

Si $|\delta| \gg \Gamma$, le problème peut être encore simplifié en négligeant Γ' dans une première étape. L'hamiltonien à diagonaliser est alors $\hat{p}^2/2m + H_A^{int} + V_0(\hat{z})$. Les termes en Γ' sont ensuite traités perturbativement.

9.3 - Simulations Monte Carlo

- L'application de telles méthodes au refroidissement VSCPT a été faite tout d'abord dans le cas simple d'une configuration $5^+ - 5^-$ [Refs 17 à 19]. Entre 2 émissions spontanées consécutives, un atome donné évolue à l'intérieur d'un sous-espace fini à 3 états (voir Fig. 11). L'évolution de son état $|\psi(t)\rangle$ est régie par l'hamiltonien effectif non hermitique H_{eff} mentionné plus haut. L'indice p , qui caractérise les 3 états du sous espace, est une constante du mouvement au cours d'une telle évolution. Connaissant $|\psi(t)\rangle$, on peut calculer la probabilité $W(t)dt = \Gamma |\langle e_0, p | \psi(t) \rangle|^2 dt$ pour que l'atome quitte ce sous-espace par émission spontanée entre t et $t+dt$ et saute dans une nouvelle multiplicité de 3 états couplés par V_{AL} , caractérisée par un nouvel indice p' , avec $|p-p'| \leq \hbar k$. Comme $|\psi(t)\rangle$ est une superposition linéaire de 3 modes de désintégration radiative, de taux $\Gamma_1 \sim \Gamma$, $\Gamma_2 \sim \Gamma'$, $\Gamma_3 = \Gamma'_{NC}(p)$, la fonction délai $W(t)$, qui donne la distribution de probabilité des intervalles de temps séparant 2 émissions spontanées successives est une superposition d'exponentielles décroissantes dont certaines peuvent avoir un temps d'amortissement très long quand $p \rightarrow 0$. On peut alors, connaissant $W(t)$ et le diagramme angulaire d'émission spontanée, tirer au sort l'instant où l'émission spontanée se produit et la direction d'émission du photon. On connaît alors la nouvelle famille p' dans laquelle l'atome arrive après le saut, et ainsi de suite. On remplace ainsi l'étude de l'évolution de l'opérateur densité ρ d'un ensemble statistique d'atomes (équations de Bloch optiques généralisées) par l'étude de l'évolution stochastique d'un seul atome. On recommence le même calcul sur un grand nombre N d'atomes et on moyenne les résultats correspondant à l'observable mesurée au bout d'un temps d'interaction Θ .

La figure 12 représente les résultats d'une telle évolution stochastique individuelle et montre les variations aléatoires de p au cours du temps, mesuré en unités de Γ^{-1} . Chaque discontinuité correspond à un saut quantique d'émission spontanée au cours duquel p change brusquement. On constate que, plus p est proche de 0, plus long peut être le temps séparant 2 sauts. Cette propriété se retrouve à toutes les échelles (voir encart). La marche au hasard sur l'axe de t est également dominée par quelques rares événements. Un seul événement, correspondant au délai le plus long, parmi 4000 événements (nombre de sauts sur cette figure) représente 70% du temps total. Nous reviendrons plus loin en détail sur les propriétés de telles marches aléatoires "anormales".

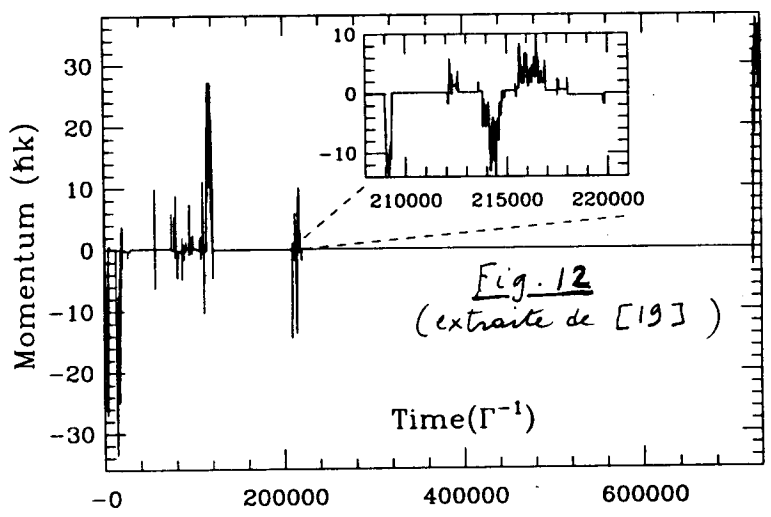


Fig. 12 (extraite de [19])

La figure 13 montre la distribution d'impulsion obtenue en laissant évoluer 10000 atomes comme sur la figure 12 et en mesurant au bout d'un temps $\Theta = 5000 \Gamma^{-1}$ l'impulsion de chaque atome. La figure 13 a montré

le nuage de points obtenues en portant en ordonnées l'impulsion de chaque atome dont le numéro est repéré sur l'axe des abscisses. La figure 13.b donne l'histogramme des valeurs de p déduit de la figure 13.a en prenant une largeur de canal d'échantillonnage de 0.25 $\hbar k$ pour la figure principale et de 0.05 $\hbar k$ pour l'encart

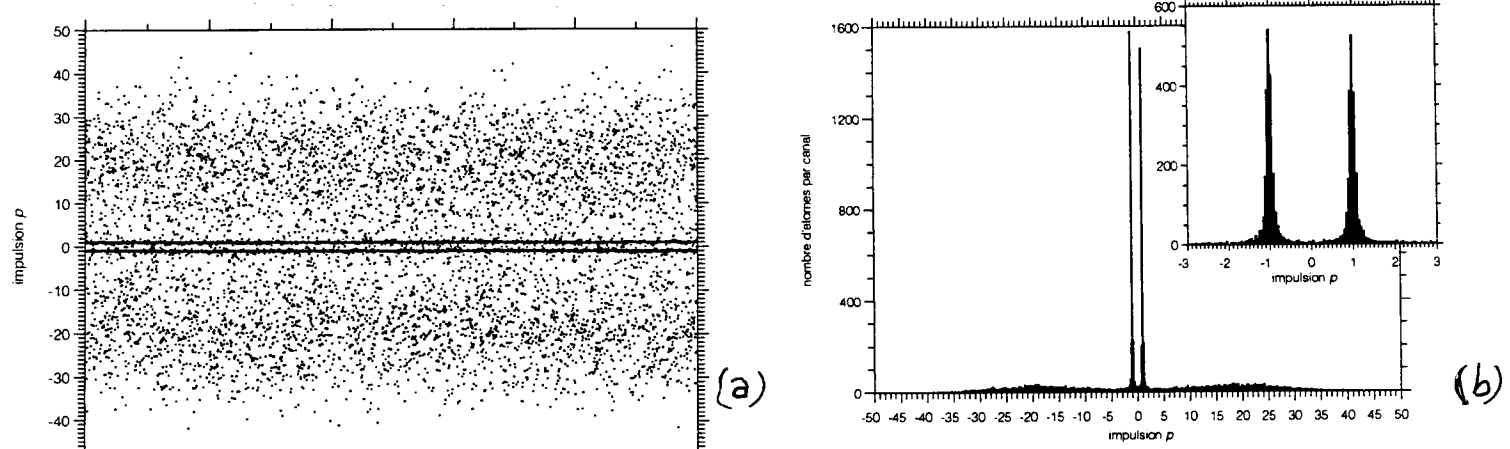


Fig. 13 (extraite de [18])

- Le cas de la configuration lin $\Delta 0$ lin est plus complexe. Entre 2 émissions spontanées consécutives, l'atome évolue dans une multiplicité infinie d'états (Fig. 10), et il n'est plus possible de calculer analytiquement la fonction délai comme précédemment. D'autres méthodes Monte Carlo plus générales ont été développées pour traiter ce genre de problèmes : méthodes "Monte Carlo Wave Function", ou MCWF (voir Refs 20, 21). Le temps est découpé en petits intervalles Δt . Entre t et $t+\Delta t$, l'état $|\psi(t)\rangle$ de l'atome change de $|\Delta\psi(t)\rangle = -iH_{eff}|\psi(t)\rangle \Delta t/\hbar$, où H_{eff} est l'hamiltonien effectif mentionné plus haut (§ 9.2). A l'issue de l'intervalle Δt , on fait un tirage au sort pour déterminer si une émission spontanée se produit ou non, et si oui, dans quelle direction le photon est émis. Si l'émission spontanée ne s'est pas produite, on renormalise à 1 l'état obtenu $|\psi(t+\Delta t)\rangle = |\psi(t)\rangle + |\Delta\psi(t)\rangle$ et on laisse l'évolution se poursuivre sous l'effet du même H_{eff} entre $t+\Delta t$ et $t+2\Delta t$. Si par contre une émission spontanée s'est produite, on détermine l'état de l'atome juste après le saut correspondant et on reprend une nouvelle évolution stochastique sous l'effet du nouvel hamiltonien effectif correspondant à la nouvelle famille d'états dans laquelle l'atome se trouve, et ainsi de suite. Plusieurs courbes de la référence [9] ont été obtenues par une telle méthode.

Références (suite des références des pages II-11 et III-11)

[14] - M.A. Ol'shanii, V. Munogin, in Proceedings of Light Induced Kinetic Effects, ed. by L. Moi et al. (Pise, 1991) - Mêmes auteurs, Optics Comm. **89**, 393 (1992)
 [15] - A. Aspect, E. Arimondo, R. Kaiser, N. Vansteenkiste, C. Cohen-Tannoudji, JOSA **B6**, 2112 (1989)
 [16] - Y. Castin, J. Dalibard, Europhys. Lett. **14**, 761 (1991)
 [17] - C. Cohen-Tannoudji, F. Bardou, A. Aspect, in Laser Spectroscopy X, ed. by M. Ducloux et al., World Scientific, 1992
 [18] - F. Bardou, Thèse de Doctorat, Paris 1995
 [19] - F. Bardou, J.P. Bouchaud, O. Emile, A. Aspect, C. Cohen-Tannoudji, P.R.L. **72**, 203 (1994)
 [20] - J. Dalibard, Y. Castin, K. Mølmer, P.R.L. **68**, 580 (1992) et JOSA **B10**, 524 (1993)
 [21] - P. Marte, R. Dum, R. Taiieb, P. Zoller, Phys Rev **A47**, 1107 et 1378 (1993), Phys. Rev. Lett. **71**, 1335 (1993).

Une nouvelle description du refroidissement subrecul : Piégeage et recyclage

① Introduction

Les difficultés des méthodes traditionnelles

- Toutes les approches théoriques évoquées dans le § 9 du chapitre précédent (page IV.6 et suivantes) pour analyser quantitativement le refroidissement subrecul deviennent de moins en moins précises aux temps d'interaction Θ très longs, et ce d'autant plus que le nombre de dimensions d'espace refroidies est plus élevé. Les temps de calcul deviennent prohibitivement longs et il devient très difficile d'évaluer les performances du refroidissement VSCPT à la limite $\Theta \rightarrow \infty$.
- Il serait pourtant important de pouvoir répondre de manière précise à un certain nombre de questions : la proportion d'atomes refroidis tend-elle vers 0 ou vers une limite finie quand $\Theta \rightarrow \infty$? Comment varie la largeur δp de la distribution en impulsions $\mathcal{P}(p)$ des atomes ? La densité dans l'espace des phases croit-elle avec Θ ? ...

Motivations d'une telle étude.

- Le but de ce chapitre et des 3 suivants est de présenter une nouvelle approche au refroidissement subrecul qui permet d'apporter des éléments de réponse aux questions précédentes. Cette approche s'applique aussi bien au refroidissement VSCPT qu'au refroidissement Raman. Elle repose sur une schématisation du refroidissement subrecul par un modèle suffisamment simple pour permettre des calculs analytiques tout en conservant les ingrédients essentiels qui caractérisent un tel refroidissement. Elle permet d'établir des liens fructueux entre le refroidissement laser et la description statistique des processus de diffusion anormaux ("vols de Lévy").
- Une telle étude a été faite en collaboration avec Jean-Philippe Bouchaud, et représente une partie importante du travail de thèse de François Bardou [1].

② Modélisation du refroidissement subrecul par une marche aléatoire.

Le modèle

- Comme le suggèrent les résultats des simulations Monte-Carlo [voir Fig. 12 page IV-8] et les considérations du § 8.4 du chapitre précédent (page IV.5) sur la durée de vie des états quasi-stationnaires, l'évolution de l'impulsion de l'atome (plus exactement de la quasi-impulsion p caractérisant la famille d'états couplés par V_{AL}) est une marche au hasard dans l'espace des p . La longueur de chaque pas est de l'ordre de $\hbar k$. La probabilité $\Gamma'(p)$ par unité de temps de chaque saut dépend de p et tend vers 0 comme p^2 quand $p \rightarrow 0$.
- En l'absence de refroidissement Sisyphus, l'impulsion de l'atome peut diffuser jusqu'à l'infini (Fig. 1a). Aux très grandes valeurs de p , il y a une décroissance de $\Gamma'(p)$ liée au désaccord Doppler sur la raie optique qui devient suffisamment grand pour diminuer le taux d'absorption. En présence de pré-refroidissement Sisyphus, la diffusion de p est limitée par une friction qui ramène p vers 0. Nous modéliserons une telle friction par des "murs" qui empêchent l'atome de diffuser au-delà d'une certaine valeur p_{max} et qui le réfléchissent dès que $|p|$ atteint p_{max} (Fig. 1b)

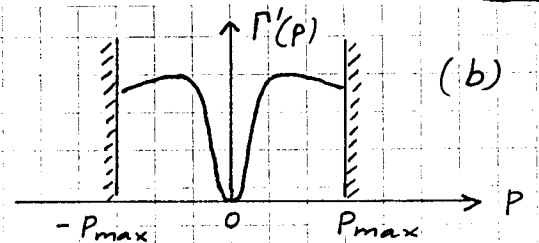
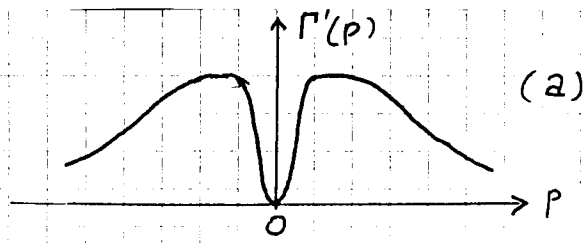


Fig. 1

Les insuffisances d'un tel modèle et comment peut-on le justifier.

- Une telle schématisation du refroidissement VSCPT est extrême.
 - (i) Elle décrit l'état de l'atome entre 2 sauts par un seul nombre : la quasi-impulsion p alors qu'en réalité un tel état est décrit par une fonction d'onde qui évolue à l'intérieur d'un sous-espace analogue à celui de la figure 10 page IV.3.
 - (ii) La probabilité de chaque saut ne dépend que de p et elle est décrite par un seul taux $\Gamma'(p)$. En réalité, la fonction délai qui donne la distribution des intervalles de temps séparant 2 sauts successifs est une superposition de plusieurs exponentielles, 6 dans le cas simple de la figure 11 page IV.4, une infinité dans le cas plus général de la figure 10. De plus, le poids de chaque exponentielle dépend de l'état de l'atome après chaque saut.
 - (iii) Le modèle ne tient compte d'aucune dépendance spatiale des phénomènes. Le pré-refroidissement Si-syphé est en particulier décrit par de murs dans l'espace des p , alors que nous avons vu dans les cours II et III que les taux de transferts de l'état non couplé vers l'état couplé avaient une forte dépendance spatiale.
- En fait, les insuffisances précédentes ne sont pas trop graves aux temps très longs, quand la dispersion δp des valeurs de l'impulsion est devenue plus petite que $\hbar k$. L'atome est alors délocalisé dans l'onde laser ($\lambda_{\text{de Broglie}} > \lambda_{\text{laser}}$) et les dépendances spatiales sont moyennées. Nous verrons également plus loin qu'une propriété essentielle du refroidissement subreuil est l'existence de "temps de piégeage" très longs de l'atome au voisinage de $p=0$. Or ces temps très longs sont les durées de vie des états quasi-noirs, c'est à dire les inverses des taux $\Gamma'(p)$ les plus petits, ceux qui tendent vers 0 quand $p \rightarrow 0$. Le fait de ne garder qu'un taux $\Gamma'(p)$ dans les modèles des figures 1a et 1b, celui qui tend vers 0 quand $p \rightarrow 0$, permet donc de décrire correctement la queue aux temps très longs de la distribution des temps de piégeage de l'atome au voisinage de $p=0$. On peut ainsi rendre compte, à des préfacteurs près, de la dépendance temporelle de l'efficacité du refroidissement. Enfin, le fait que le refroidissement Si-syphé s'effectue avec une constante de temps beaucoup plus courte que le refroidissement VSCPT permet de justifier le modèle très schématisé de la figure 1b. Les murs de cette figure en $|p| = P_{\text{max}}$ font qu'un atome qui s'échappe du piège au voisinage de $p=0$ revient dans le piège au bout d'un temps beaucoup plus court que les temps pendant lesquels il peut rester piégé.

③ Piégeage et recyclage

Un piège dans l'espace des impulsions

- Introduisons dans l'espace des impulsions une zone définie par

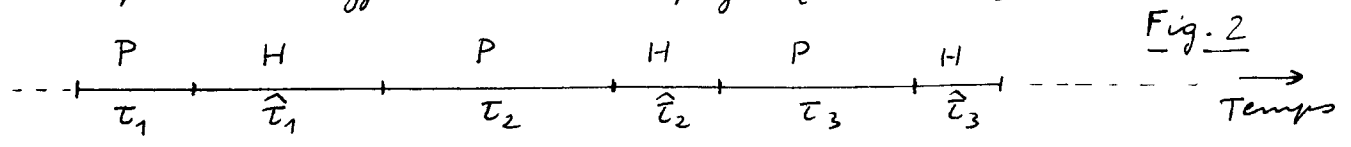
$$|P| < P_{\text{trap}} \tag{5.1}$$

et constituant ce que nous appellerons un piège. Un atome satisfaisant (5.1) sera dans le piège. Un atome tel que $|P| > P_{\text{trap}}$ sera hors du piège

- Le choix de P_{trap} est arbitraire. En principe, pour des temps d'interaction \ominus suffisamment longs, la dispersion δp d'impulsion sera plus petite que P_{trap} et les résultats du modèle ne devraient pas dépendre du choix particulier fait pour P_{trap} .

Phases de piégeage et phases de diffusion hors du piège.

- Revenons aux simulations Monte-Carlo de la figure 12 page IV-8. L'impulsion de l'atome varie aléatoirement au cours du temps et $|P|$ passe successivement de valeurs inférieures à P_{trap} à des valeurs supérieures à P_{trap} . L'évolution au cours du temps apparaît donc comme une succession de phases de piégeage (notées P sur la figure 2) alternant avec des phases de diffusion hors du piège (notées H)



- Nous noterons $\tau_1, \tau_2, \tau_3 \dots$ les durées des phases de piégeage, $\hat{\tau}_1, \hat{\tau}_2, \hat{\tau}_3 \dots$ les durées des phases de diffusion hors du piège. Les $\hat{\tau}_i$ sont en fait des temps de premier retour dans le piège. Les τ_i sont des variables aléatoires indépendantes de même que les $\hat{\tau}_i$.

Distributions des temps de piégeage et des temps de premier retour

- Nous noterons $P(\tau)$ la distribution des temps de piégeage, $\hat{P}(\hat{\tau})$ la distribution des temps de premier retour. Un premier problème à résoudre est de déterminer ces 2 distributions à partir des caractéristiques $[P'(P), P_{\text{max}} \dots]$ qui définissent les modèles des figures 1a et 1b.

- Une fois $P(\tau)$ et $\hat{P}(\hat{\tau})$ calculées, on peut alors s'intéresser au temps total passé dans le piège et hors du piège après N phases alternées de piégeage et de diffusion hors du piège

$$T(N) = \sum_{i=1}^N \tau_i \quad \hat{T}(N) = \sum_{i=1}^N \hat{\tau}_i \tag{5.2}$$

La comparaison de $T(N)$ et $\hat{T}(N)$ permettra de voir si l'atome passe la majeure partie de son temps dans le piège ou hors du piège, et d'évaluer ainsi l'efficacité du refroidissement.

- A première vue, comme les variables τ_i sont indépendantes, de même que les $\hat{\tau}_i$, il semble que la distribution des valeurs de $T(N)$ et $\hat{T}(N)$ puisse être obtenue à partir du théorème de la limite centrale. En fait, nous allons voir que les distributions $P(\tau)$ et $\hat{P}(\hat{\tau})$ peuvent être si larges qu'un tel théorème ne s'applique plus et doit être remplacé par un autre. Un certain nombre de caractéristiques essentielles du refroidissement subrecoil apparaîtront alors plus clairement.

④ Distribution P(τ) des temps de piégeage

4.1 Hypothèses sur le piège

(i) L'atome entre dans le piège par un saut d'impulsion, consécutif à un processus d'émission spontanée, et dont la projection sur un axe donné peut varier entre -tk et +tk. Nous supposons que la largeur Ptrap du piège est très petite devant tk

Ptrap << tk (5.3)

Première conséquence de (5.3)

Le piège est "arrosé" de manière uniforme par les atomes qui y pénètrent, car la largeur du piège est très petite devant la dispersion des changements d'impulsion après chaque saut.

Deuxième conséquence de (5.3)

Considérons un atome qui est entré dans le piège. Le prochain saut qu'il va faire va changer son impulsion d'une valeur très grande devant la largeur du piège, de sorte qu'il va quitter à coup sur le piège. Nous négligerons donc les processus où l'atome effectue 1 ou plusieurs sauts avant de quitter le piège.

(ii) Soit p0 la largeur en impulsion du "trou" de Γ'(p) au voisinage de p=0 (Fig.1). L'effet Doppler kp0/M associé à p0 est de l'ordre de la largeur des résonances Raman entre sous-niveaux fondamentaux qui jouent un rôle essentiel aussi bien dans le refroidissement VSCPT que dans le refroidissement Raman. Nous supposons que

Ptrap << p0 (5.4)

Conséquence de (5.4)

A l'intérieur du piège, on peut se limiter au terme parabolique dans le développement de Γ'(p) en puissances de p

|p| < Ptrap Γ'(p) ~ 1/τ0 (p/p0)^2 (5.5)

1/τ0 donne l'ordre de grandeur de Γ'(p) dans le plateau de la figure 1 (en dehors du trou Raman).

4.2 Calcul simple de P(τ) à une dimension

- Considérons un atome qui est entré dans le piège. Comme l'arrosage du piège est uniforme, la probabilité Π(p)dp que cet atome ait une impulsion comprise entre p et p+dp est uniforme entre Ptrap et -Ptrap. On a donc, compte tenu de la normalisation

Π(p) = 1 / (2Ptrap) (3.6)

- Commençons par supposer que le temps de séjour τ dans le piège d'un atome d'impulsion p est relié à p de manière parfaitement déterministe

τ(p) = 1 / Γ'(p) (5.7)

c'est à dire encore, compte tenu de (5.5)

τ(p) = A / p^2 A = τ0 p0^2 (5.8)

- La figure 3 donne les variations de τ(p) avec p. τ(p) varie entre une valeur minimale

$$\tau_{\text{trap}} = A / P_{\text{trap}}^2 = \tau_0 P_0^2 / P_{\text{trap}}^2 \quad (5.9)$$

atteinte pour $p = \pm P_{\text{trap}}$ et l'infini

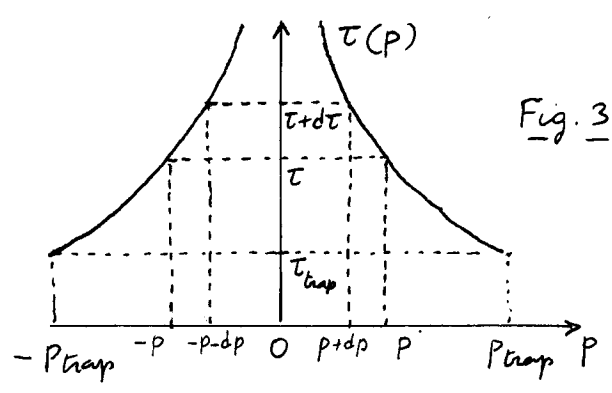


Fig. 3

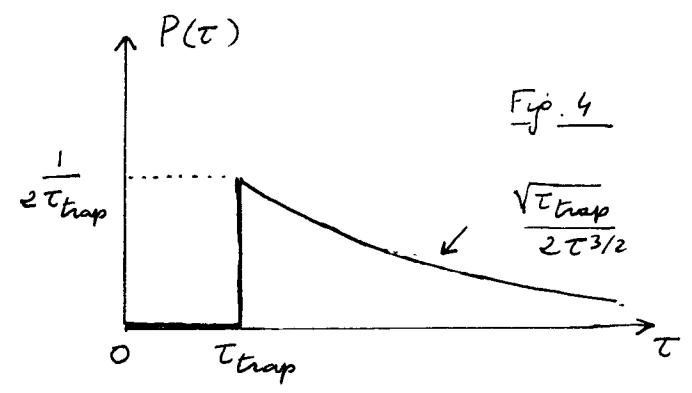


Fig. 4

- Une construction géométrique simple (Fig. 3) montre que les atomes restant dans le piège un temps compris entre τ et $\tau + d\tau$ sont ceux dont l'impulsion est comprise dans 2 intervalles symétriques par rapport à $p = 0$: $[p, p + dp]$ et $[-p, -p - dp]$, p et τ étant reliés par (5.8) et dp et $d\tau$ par

$$|d\tau| / |dp| = |\tau'(p)| = 2A / |p|^3 = 2\tau_0 P_0^2 / |p|^3 \quad (5.10)$$

On en déduit

$$P(\tau) |d\tau| = 2\pi(p) |dp| \quad (5.11)$$

c'est à dire encore, compte tenu de (5.6) et (5.10)

$$P(\tau) = 2\pi(p) \frac{|dp|}{|d\tau|} = \frac{1}{P_{\text{trap}}} \frac{|p|^3}{2\tau_0 P_0^2} = \frac{1}{2} \frac{P_0}{P_{\text{trap}}} \frac{\sqrt{\tau_0}}{\tau^{3/2}} = \frac{\sqrt{\tau_{\text{trap}}}}{2\tau^{3/2}} \quad (5.12)$$

On trouve ainsi que $P(\tau)$ décroît avec τ suivant une loi de puissance en $1/\tau^{3/2}$ (Fig. 4)

- Le calcul précédent peut être aisément généralisé au cas où la relation entre τ et p n'est pas déterministe comme dans (5.7). Il est plus réaliste par exemple de considérer que, pour un atome d'impulsion p , τ est une variable aléatoire, dont la loi de probabilité $P(\tau/p)$ est donnée par :

$$P(\tau/p) = \Gamma'(p) e^{-\Gamma'(p)\tau} \quad (5.13)$$

Une telle loi conduit à $\langle \tau \rangle = 1/\Gamma'(p)$ pour un atome d'impulsion p . Le calcul conduisant à (5.12) peut alors être repris en partant de la relation

$$P(\tau) = \int_{-P_{\text{trap}}}^{+P_{\text{trap}}} dp P(\tau/p) \pi(p) \quad (5.14)$$

et en utilisant pour $P(\tau/p)$ l'équation (5.13) [au lieu de $\delta(\tau - 1/\Gamma'(p))$].

On trouve alors (voir Ref. [1]) que $P(\tau)$ n'est plus alors en toute rigueur donné par une loi de puissance, sauf pour $\tau \rightarrow \infty$, où l'on obtient

$$P(\tau) \underset{\tau \rightarrow \infty}{\approx} \frac{1}{2} \frac{P_0}{P_{\text{trap}}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \frac{\sqrt{\tau_0}}{\tau^{3/2}} = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \frac{\sqrt{\tau_{\text{trap}}}}{2\tau^{3/2}} \quad (5.15)$$

où Γ est la fonction gamma. On retrouve bien (5.12) au facteur $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ près.

4.3 Extension à un nombre quelconque de dimensions.

- Dans ce paragraphe, p désigne le module $|\vec{p}|$ de \vec{p} . Les figures 1a et 1b demeurent valables à condition de ne conserver que la région $p > 0$. Nous supposons toujours les conditions (5.3) et (5.4) remplies.

- A D dimensions, le volume $V(p)$ de l'espace des impulsions correspondant à un module de \vec{p} inférieur à p varie comme p^D . L'élément de volume dV correspondant à $p \leq |\vec{p}| \leq p+dp$ varie donc comme $Dp^{D-1} dp$. Comme l'arrosage du piège est uniforme d'après (5.3), on en déduit que la distribution $\Pi(p)$ des valeurs de p pour un atome entrant dans le piège est donnée par

$$\Pi(p) = \frac{dV/dp}{V(P_{trap})} = \frac{D p^{D-1}}{P_{trap}^D} \tag{5.16}$$

expression qui coïncide bien avec (5.6) pour $D=1$, si on note que p varie maintenant entre 0 et P_{trap} et non plus entre $-P_{trap}$ et $+P_{trap}$.

- Le calcul fait plus haut pour $P(\tau)$ peut alors être repris en reportant (5.16) dans (5.14) (et en remplaçant $\int_{-P_{trap}}^{+P_{trap}}$ par $\int_0^{P_{trap}}$). On obtient

$$P(\tau) \underset{\tau \rightarrow \infty}{\approx} \frac{D}{2} \left(\frac{P_0}{P_{trap}} \right)^D \Gamma\left(\frac{D}{2}\right) \frac{\tau_0^{D/2}}{\tau^{1+D/2}} = \frac{D}{2} \Gamma\left(\frac{D}{2}\right) \frac{\tau_{trap}^{D/2}}{\tau^{1+D/2}} \tag{5.17}$$

4.4 Extension à d'autres formes de pièges.

- Il est d'intérêt d'envisager le cas où $\Gamma'(p)$ varie au voisinage de $p=0$ suivant une loi de puissance autre que p^2 . Considérons par exemple le cas où

$$\Gamma'(p) \underset{p \rightarrow 0}{\approx} \frac{1}{\tau_0} \left(\frac{p}{P_0} \right)^\alpha \tag{5.18}$$

De telles situations peuvent par exemple être réalisées dans le refroidissement Raman en prenant des formes spectrales appropriées pour les impulsions Raman stimulées. Des impulsions triangulaires en temps (produit de convolution de 2 impulsions carrées) ont par exemple des densités spectrales variant en $(\omega - \omega_0)^4$ autour des zéros ω_0 de ces densités. Une telle situation conduirait alors à $\alpha=4$ dans (5.18).

- Le calcul du paragraphe précédent peut être aisément étendu à une telle situation. Il suffit d'utiliser (5.18) dans l'expression (5.13) de $P(\tau/p)$. On obtient ainsi

$$P(\tau) \underset{\tau \rightarrow \infty}{\approx} \frac{D}{\alpha} \left(\frac{P_0}{P_{trap}} \right)^D \Gamma\left(\frac{D}{\alpha}\right) \frac{\tau_0^{D/\alpha}}{\tau^{1+D/\alpha}} = \frac{D}{\alpha} \Gamma\left(\frac{D}{\alpha}\right) \frac{\tau_{trap}^{D/\alpha}}{\tau^{1+D/\alpha}} \tag{5.19}$$

où τ_{trap} est donné par une expression généralisant (5.9)

$$\tau_{trap} = \tau_0 P_0^\alpha / P_{trap}^\alpha \tag{5.20}$$

4.5 Discussion physique

- Les calculs précédents montrent finalement que, pour $\tau \rightarrow \infty$, la distribution $P(\tau)$ des temps de piégeage varie comme $\tau^{-(1+\mu)}$

$$P(\tau) \underset{\tau \rightarrow \infty}{\approx} \tau^{-(1+\mu)} \tag{5.21}$$

où l'exposant $\mu = \frac{D}{\alpha}$ (5.22)

contient toute la dépendance liée à la dimension d'espace D et à la forme du piège (exposant α).

- Plus μ est petit, plus lente est la décroissance de $P(\tau)$ avec τ , plus longues peuvent être les phases de piégeage autour de $p=0$, plus efficace est le refroidissement.

(i) Pour α fixé, on voit donc que le piègeage est d'autant moins efficace que la dimension est plus élevée. Ceci se comprend aisément: les phases de piègeage très longues apparaissent pour les atomes tombant dans le piège au voisinage immédiat de $p=0$. Or, le poids statistique des régions de p petit diminue en valeur relative comme p^{D-1} quand D augmente [voir équation (5.16)].

(ii) Pour D fixé, μ est d'autant plus petit que α est plus grand. Pour avoir des phases de piègeage aussi longues que possible, on a intérêt à ce que $P'(p)$ croisse le plus lentement possible avec p .

- Pour $\mu > 0$, l'intégrale de $P(\tau)$ converge quand $\tau \rightarrow \infty$, comme il se doit pour une distribution de probabilité. Par contre, l'intégrale de $\tau P(\tau)$, qui intervient dans le calcul de la valeur moyenne $\langle \tau \rangle$ de τ , ne converge plus nécessairement. Par exemple, pour $\mu = 1/2$ ($D=1, \alpha=2$) ou $\mu = 1$ ($D=2, \alpha=2$), $\langle \tau \rangle = \infty$. Il est clair que le théorème de la limite centrale ne peut plus alors s'appliquer à la somme (5.2) des τ_i .

5) Distribution $\hat{P}(\hat{\tau})$ des temps de premier retour - Etude de quelques cas simples.

5.1 Mouvement brownien usuel à 1 dimension

Le problème considéré

- Une particule se déplace sur l'axe des p en faisant des sauts à des intervalles de temps réguliers τ_0 , indépendants de sa position sur l'axe des p . L'amplitude de chaque saut est une variable aléatoire, de valeur moyenne nulle et de variance Δp^2 (Dans le refroidissement laser, $\Delta p^2 \sim \hbar^2 k^2 / 3$).
- La particule part d'une petite région $[-P_{trap}, P_{trap}]$ autour de $p=0$. Quelle est la distribution $P_1(N)$ du nombre de sauts qu'elle doit faire pour revenir la 1^{ère} fois dans le piège après l'avoir quitté?

La méthode suivie

- On calcule d'abord la probabilité $P_0(N)$ de trouver la particule dans le piège, indépendamment du nombre de sorties et de retour qu'elle a fait depuis l'instant initial.
- On relie ensuite $P_0(N)$ aux probabilités des événements où la particule a fait 1 sortie, 2 sorties, 3 sorties... Or ces probabilités s'expriment en fonction de produits de convolution faisant intervenir $P_1(N)$ 1 fois, 2 fois, 3 fois... Par transformation de Laplace, on obtient alors une équation algébrique permettant de calculer la transformée de Laplace $\tilde{P}_1(E)$ de $P_1(N)$.

Probabilité $P_0(N)$ de rester dans le piège après N sauts

- Après un grand nombre N de sauts, la distribution de probabilité de p est une gaussienne centrée en $p=0$ et de variance $N \Delta p^2$

$$P(p, N) = \frac{1}{\sqrt{2\pi N \Delta p^2}} e^{-p^2 / 2N \Delta p^2} \tag{5.23}$$

- La probabilité de trouver la particule dans le piège de largeur $2P_{trap} \ll \Delta p$ vaut donc

$$P_0(N) = P(p=0, N) \cdot 2P_{trap} = \frac{2P_{trap}}{\Delta p} \frac{1}{\sqrt{2\pi N}} \tag{5.24}$$

Considérons N comme une variable continue, ce qui est valable si $N \gg 1$, et introduisons la transformée de Laplace $\tilde{P}_0(E)$ de $P_0(N)$:

$$\tilde{P}_0(E) = \int_0^\infty e^{-EN} P_0(N) dN \tag{5.25}$$

En reportant (5.24) dans (5.25), on obtient

$$\tilde{P}_0(E) = \frac{2P_{trap}}{\Delta P} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-EN} \frac{1}{\sqrt{N}} dN = \frac{2P_{trap}}{\Delta P} \frac{1}{\sqrt{2\pi E}} \int_0^\infty e^{-u} u^{-1/2} du = \frac{2P_{trap}}{\Delta P} \frac{1}{\sqrt{2E}} \tag{5.26}$$

$= \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$

Autre expression équivalente de $P_0(N)$.

- La particule peut tout d'abord ne pas avoir quitté le piège après N sauts. Comme nous supposons toujours $P_{trap} \ll \Delta P$, la probabilité d'un tel événement $\pi_0(N)$ n'est non nulle que si $N=0$ (la particule quitte le piège dès le 1^{er} saut):

$$\pi_0(N) = \delta_{N,0} \tag{5.27}$$

- Elle peut se retrouver dans le piège au bout de N sauts après en être sortie une seule fois. La probabilité correspondante $\pi_1(N)$ n'est autre que $P_1(N)$

$$\pi_1(N) = P_1(N) \tag{5.28}$$

- Elle peut se retrouver dans le piège au bout de N sauts après 2 sorties, la 1^{ère} durant n sauts, la 2^{ème} $N-n$. En sommant sur n , on obtient:

$$\pi_2(N) = \sum_n P_1(n) P_1(N-n) = P_1(N) \otimes P_1(N) \tag{5.29}$$

qui n'est autre que le produit de convolution de $P_1(N)$ par lui-même. On trouverait de même que les retours de la particule dans le piège après 3 sorties ont une probabilité $\pi_3(N) = P_1(N) \otimes P_1(N) \otimes P_1(N)$ etc...

- En sommant sur toutes ces possibilités, on obtient

$$P_0(N) = \delta_{N,0} + P_1(N) + P_1(N) \otimes P_1(N) + P_1(N) \otimes P_1(N) \otimes P_1(N) + \dots \tag{5.30}$$

Calcul de $\tilde{P}_1(E)$ et $P_1(N)$

- La transformation de Laplace transforme le produit de convolution en produit ordinaire. L'équation (5.30) devient donc

$$\tilde{P}_0(E) = 1 + \tilde{P}_1(E) + \tilde{P}_1^2(E) + \tilde{P}_1^3(E) + \dots = \frac{1}{1 - \tilde{P}_1(E)} \tag{5.31}$$

Comme on connaît $\tilde{P}_0(E)$ d'après (5.26), on en déduit

$$\tilde{P}_1(E) = \frac{\tilde{P}_0(E) - 1}{\tilde{P}_0(E)} = 1 - \frac{\Delta P}{P_{trap} \sqrt{2}} \sqrt{E} \tag{5.32}$$

- Les calculs faits plus haut sur $P_0(N)$ et $P_1(N)$ ne sont valables que pour $N \gg 1$. L'équation (5.32) n'est donc valable que pour E petit. Or on peut montrer (voir Appendice B) qu'une distribution (normalisée) variant en $N^{-3/2}$ pour $N \gg 1$ a une transformée de Laplace variant en $1 - 2a\sqrt{\pi} \sqrt{E}$ pour E petit. On déduit alors de (5.32) que $P_1(N)$ se comporte, pour $N \gg 1$, comme

$$P_1(N) \underset{N \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\Delta P}{2P_{trap}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{N^{3/2}} \tag{5.33}$$

- Comme tous les pas durent le même temps τ_0 , les temps $\hat{\tau}$ de premiers retours sont reliés à N par $\hat{\tau} = N\tau_0$, et la distribution $\hat{P}(\hat{\tau})$ des temps de premiers retours s'obtient en utilisant $\hat{P}(\hat{\tau}) d\hat{\tau} = P_1(N) dN$ et $\hat{\tau} = N\tau_0$. On déduit alors de (5.33)

$$\hat{P}(\hat{\tau}) \underset{\hat{\tau} \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\hat{B}}{\hat{\tau}^{3/2}} \quad \hat{B} = \frac{\Delta P}{2P_{trap}} \sqrt{\frac{\tau_0}{2\pi}} \tag{5.34}$$

Là encore, on obtient une distribution ayant une décroissance très lente, en loi de puissance pour $\hat{\tau} \rightarrow \infty$, si lente que $\langle \hat{\tau} \rangle = \infty$.

- Nous supposons maintenant que la durée τ_0 entre 2 sauts successifs dépend de p et croît quand $p \rightarrow \infty$ à cause de la décroissance de $\Gamma'(p)$ due à l'effet Doppler (voir Fig. 1a). Plus précisément, $\Gamma'(p)$ décroît comme $1/p^2$ quand l'effet Doppler kp/m devient supérieur à la largeur naturelle Γ de e . Nous supposons donc que

$$\tau(p) \approx \tau_0 \frac{p^2}{p_D^2} \quad \text{quand } p > p_D \quad (5.35)$$

- La distribution $P_1(N)$ des nombres de sauts nécessaires à un premier retour est une propriété "géométrique" indépendante du temps $\tau(p)$ entre sauts. Elle reste toujours donnée par (5.33).

- En moyenne, une marche de N pas conduisant à un premier retour s'étend de 0 à p_N le long de l'axe des p , avec pour ordre de grandeur de p_N

$$p_N^2 \approx N \Delta p^2 \quad (5.36)$$

Soit dN/dp la densité du nombre de pas effectués au voisinage de p au cours d'une telle marche. C'est une quantité lentement variable que nous approximerons par une constante

$$dN/dp \approx N/p_N \quad (5.37)$$

- On en déduit que l'ordre de grandeur du temps total $\hat{\tau}(N)$ mis par une marche de N pas conduisant à un premier retour est

$$\begin{aligned} \hat{\tau}(N) &\approx \int_0^{p_N} \frac{dN}{dp} \tau(p) dp \approx \frac{N}{p_N} \frac{\tau_0}{p_D^2} \int_0^{p_N} p^2 dp \\ &\approx \frac{N}{3} \frac{\tau_0}{p_D^2} p_N^2 \approx \frac{\tau_0}{3} \frac{\Delta p^2}{p_D^2} N^2 \end{aligned} \quad (5.38)$$

$\hat{\tau}(N)$ varie donc comme N^2 , et non plus comme $N\tau_0$, comme c'était le cas pour une marche avec des temps τ_0 entre sauts indépendants de p . Un tel résultat se comprend bien physiquement. Quand N croît, la particule explore des régions de plus en plus étendues sur l'axe de p , où sa diffusion est ralentie et elle met de plus en plus de temps à revenir.

- L'équation $\hat{P}(\hat{\tau}) d\hat{\tau} = P_1(N) dN$ utilisée dans le § 5.1 précédent pour relier $\hat{P}(\hat{\tau})$ à $P_1(N)$ demeure toujours valable mais il faut utiliser maintenant la relation $\hat{\tau} \sim \tau_0 \frac{\Delta p^2}{p_D^2} N^2$ au lieu de $\hat{\tau} = N\tau_0$. On en déduit que

$$d\hat{\tau}/dN \sim \tau_0 \frac{\Delta p^2}{p_D^2} N \sim \sqrt{\tau_0} \frac{\Delta p}{p_D} \hat{\tau}^{1/2} \quad (5.39)$$

de sorte que, compte tenu de (5.33)

$$\hat{P}(\hat{\tau}) = P_1(N) \frac{dN}{d\hat{\tau}} \sim \frac{\Delta p}{p_{\text{trap}}} \frac{1}{N^{3/2}} \frac{p_D^2}{\Delta p^2} \frac{1}{\tau_0} \frac{1}{N} \sim \frac{\Delta p}{p_{\text{trap}}} \left(\frac{\Delta p}{p_D}\right)^{1/2} \frac{\tau_0^{1/4}}{\hat{\tau}^{5/4}} \quad (5.40)$$

Dans tous les calculs qui précèdent, nous avons remplacé les divers facteurs numériques par 1, compte tenu de l'approximation (5.37) faite sur dN/dp . Le but poursuivi est simplement de montrer comment le ralentissement de la diffusion dû à l'effet Doppler élargit la distribution des temps de premier retour qui décroît plus lentement, en $\hat{\tau}^{-5/4}$ au lieu de $\hat{\tau}^{-3/2}$.

- Nous n'étendrons pas ici les calculs des §§ 5.1 et 5.2 à des dimensions $D > 1$. Le modèle nous confiné de la figure 1a n'est en effet pas intéressant pour le refroidissement subrept avec $D > 1$. Nous avons vu en effet au § 4.3 que le piégeage est de moins en moins efficace quand D croît. Par ailleurs, on conçoit aisément [voir aussi Refs 2, 3]

que le recyclage, c'est à dire le retour dans le piège, est de plus en plus difficile. Le refroidissement suborenel à des dimensions $D > 1$ n'est donc réaliste qu'en présence de friction, et il nous semble plus intéressant d'étudier le temps moyen de premier retour en présence de friction, modélisé par les murs de la figure 1 b.

5.3 Temps moyen de retour dans le piège en présence de friction

- Nous supposons maintenant D quelconque. La démarche suivie est tout à fait analogue à celle du § 5.1
- Calculons tout d'abord $P_0(N)$, probabilité d'être dans le piège après N sauts. Les murs de la figure 1 b en $p = p_{max}$ réfléchissent la particule dès que p atteint p_{max} .

Comme la particule ne peut plus aller à l'infini, son mouvement est confiné et, pour $N \gg 1$, elle aura exploré uniformément toutes les régions de la sphère $p < p_{max}$. La probabilité qu'elle soit dans le piège de rayon p_{trap} est donc tout simplement le rapport des volumes du piège et de la sphère de rayon p_{max} .

$$P_0(N) \underset{N \rightarrow \infty}{\simeq} \left(\frac{p_{trap}}{p_{max}} \right)^D \quad (5.41)$$

La transformée de Laplace de (5.41) s'obtient immédiatement

$$\tilde{P}_0(E) \underset{E \rightarrow 0}{\simeq} \left(\frac{p_{trap}}{p_{max}} \right)^D \frac{1}{E} \quad (5.42)$$

- Le raisonnement fait dans le § 5.1 pour relier $P_0(N)$ à la distribution $P_1(N)$ du nombre de pas nécessaires à un premier retour demeure en tout point valable et conduit à la relation (5.31) entre $\tilde{P}_0(E)$ et $\tilde{P}_1(E)$. De (5.31) et (5.42), on déduit alors que

$$\tilde{P}_1(E) \underset{E \rightarrow 0}{\simeq} 1 - \left(\frac{p_{max}}{p_{trap}} \right)^D E \quad (5.43)$$

- A la différence du cas du § 5.1, $\tilde{P}_1(E)$ décroît maintenant linéairement en E à partir de $\tilde{P}_1(0) = 1$, et non plus en \sqrt{E} . Un tel résultat signifie que N a une valeur moyenne finie. En effet, le développement de e^{-EN} dans l'équation $\tilde{P}_1(E) = \int_0^\infty e^{-EN} P_1(N) dN$ donne

$$\tilde{P}_1(E) = \int_0^\infty P_1(N) dN - E \int_0^\infty N P_1(N) dN + \dots = 1 - E \langle N \rangle + \dots \quad (5.44)$$

ce qui donne, par comparaison avec (5.43), le nombre moyen de pas pour un premier retour

$$\langle N \rangle = \left(\frac{p_{max}}{p_{trap}} \right)^D \quad (5.45)$$

- Le résultat (5.45) appelle un certain nombre de commentaires physiques
 - (i) Tout en restant fini, $\langle N \rangle$ croît vite avec D .
 - (ii) $\langle N \rangle$ ne dépend pas de la taille Δp des pas. Quand Δp croît, la particule doit effectuer moins de pas pour retourner de p_{max} vers l'origine, mais elle a alors de plus en plus de mal pour tomber dans le volume $(p_{trap})^D$ du piège. Finalement, seul compte le rapport des volumes de confinement au volume du piège.
- Si la durée τ_0 séparant 2 sauts successifs est indépendante de p , on déduit aisément de (5.45) la valeur $\langle \hat{\tau} \rangle$ du temps moyen de premier retour dans le piège

$$\langle \hat{\tau} \rangle = \tau_0 \langle N \rangle = \tau_0 \left(\frac{p_{max}}{p_{trap}} \right)^D \quad (5.46)$$

- Problème. Soit $P(N)$ une distribution normalisée

$$\int_0^{\infty} P(N) dN = 1 \quad (B-1)$$

dont le comportement asymptotique pour N grand est en $N^{-(1+\mu)}$ avec $0 < \mu < 1$

$$N > N_0 \quad P(N) \simeq a N^{-(1+\mu)} \quad (B-2)$$

Comme $0 < \mu < 1$, l'intégrale $\int_0^{\infty} N P(N) dN$ diverge et $\langle N \rangle = \infty$. Quel est le comportement de la transformée de Laplace $\tilde{P}(E)$ de $P(N)$ quand $E \ll 1/N_0$?

- Introduisons la quantité

$$\int_0^{\infty} (e^{-EN} - 1) P(N) dN = \tilde{P}(E) - 1 \quad (B-3)$$

et séparons l'intégrale en N en 2 parties : $I_1 = \int_0^{N_0} \dots$ et $I_2 = \int_{N_0}^{\infty} \dots$

- Dans la première intégrale

$$I_1 = \int_0^{N_0} (e^{-EN} - 1) P(N) dN \quad (B-4)$$

on peut utiliser $|e^{-EN} - 1| < EN_0$ puisque $0 < N < N_0$, de sorte que

$$|I_1| < EN_0 \int_0^{N_0} P(N) dN < EN_0 \rightarrow 0 \quad \text{si } EN_0 \rightarrow 0 \quad (B-5)$$

- Dans la 2^{ème} intégrale, on peut utiliser la forme (B-2) de $P(N)$ puisque $N > N_0$

$$I_2 = a \int_{N_0}^{\infty} \frac{e^{-EN} - 1}{N^{1+\mu}} dN \quad (B-6)$$

Pour calculer la contribution du terme en e^{-EN} , faisons une intégration par parties

$$\begin{aligned} a \int_{N_0}^{\infty} \frac{e^{-EN}}{N^{1+\mu}} dN &= -\frac{a}{\mu} \left[e^{-EN} N^{-\mu} \right]_{N_0}^{\infty} - \frac{aE}{\mu} \int_{N_0}^{\infty} e^{-EN} N^{-\mu} dN \\ &= \underbrace{\frac{a}{\mu} e^{-EN_0} N_0^{-\mu}}_{\simeq \frac{a}{\mu} N_0^{-\mu} \text{ si } EN_0 \rightarrow 0} - \frac{aE^{\mu}}{\mu} \underbrace{\int_{N_0 E}^{\infty} e^{-u} u^{-\mu} du}_{\simeq \Gamma(1-\mu) \text{ si } EN_0 \rightarrow 0} \end{aligned} \quad (B-7)$$

Par ailleurs, le 2^{ème} terme de (B-6) vaut

$$-a \int_{N_0}^{\infty} \frac{dN}{N^{1+\mu}} = \frac{a}{\mu} \left[N^{-\mu} \right]_{N_0}^{\infty} = -\frac{a}{\mu} N_0^{-\mu} \quad (B-8)$$

En ajoutant (B-7) et (B-8), on obtient

$$I_2 \simeq -\frac{a}{\mu} \Gamma(1-\mu) E^{\mu} \quad \text{si } EN_0 \rightarrow 0 \quad (B-9)$$

- En ajoutant (B-5) et (B-9) et en utilisant (B-3), on obtient

$$\tilde{P}(E) \simeq 1 - \frac{a}{\mu} \Gamma(1-\mu) E^{\mu} \quad \text{si } EN_0 \rightarrow 0 \quad (B-10)$$

En particulier, pour $\mu = 1/2$, on a $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ et on retrouve le résultat utilisé pour passer de (5.32) à (5.33)

Références

- [1] - F. Bardou, Thèse de doctorat, Paris 1995
- [2] - F. Bardou, J.-P. Bouchaud, O. Emile, A. Aspect, C. Cohen-Tannoudji, Phys. Rev. Lett. 72, 203 (1994)
- [3] - J.-P. Bouchaud, A. Georges, Phys. Rep. 195, 127 (1990)

① Introduction - Buts de ce chapitre :

- Dans le chapitre précédent, le refroidissement subrecul a été modélisé par une marche aléatoire dans l'espace des impulsions faisant apparaître l'évolution de l'atome comme une suite alternée de phases de piégeage et de phases de diffusion hors du piège. Les distributions $P(\tau)$ des temps de piégeage τ , et $\hat{P}(\hat{\tau})$ des temps de diffusion hors du piège $\hat{\tau}$, ont été calculées dans un certain nombre de situations.
- Il est apparu alors que, dans de nombreux cas, les distributions $P(\tau)$ et $\hat{P}(\hat{\tau})$ avaient une décroissance très lente, décrite par une loi de puissance, en $\tau^{-(1+\mu)}$, quand $\tau \rightarrow \infty$, μ pouvant prendre des valeurs plus petites que 1 (par exemple, $\mu = 1/2$ ou $\mu = 1/4$). Tout en étant normalisables, de telles distributions sont larges, si larges que la valeur moyenne de τ , $\int_0^\infty d\tau \tau P(\tau)$, peut être infinie. Pour calculer le temps total passé dans le piège, $T_N = \sum_{i=1}^N \tau_i$, et le temps total passé hors du piège, $\hat{T}_N = \sum_{i=1}^N \hat{\tau}_i$, après N entrées et sorties, il n'est plus alors possible d'appliquer le théorème de la limite centrale aux sommes de variables aléatoires indépendantes que sont T_N et \hat{T}_N . S'il était valable, un tel théorème prédirait par exemple que, à la limite $N \gg 1$, T_N est distribué suivant une gaussienne centrée en $N\bar{\tau}$ et de variance $N\sigma^2$, où $\bar{\tau}$ et σ^2 sont les valeur moyenne et variance de $P(\tau)$.
- Il se trouve en fait que les distributions de sommes de variable aléatoires indépendantes, décrites toutes par une même loi ayant un comportement asymptotique en $\tau^{-(1+\mu)}$, ont été étudiées en détail par Paul Lévy, et obéissent à un théorème de la limite centrale généralisé. Le but de ce chapitre est de rappeler les résultats essentiels de ces études, de manière à pouvoir les appliquer, dans les chapitres suivants, au problème de la limite asymptotique du refroidissement subrecul.
- Il n'est pas question ici de présenter une démonstration rigoureuse du théorème de la limite centrale généralisé. Nous nous contenterons d'énoncer les résultats et de présenter des arguments simples permettant de les rendre plausibles. Nous insisterons sur la signification physique des résultats obtenus et sur les différences apparaissant avec le cas des distributions étroites pour lesquelles le théorème de la limite centrale habituel s'applique. Pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur à des ouvrages ou des articles plus spécialisés [voir Refs [1] à [3]].

② Théorème de la limite centrale généralisé

2.1 - Hypothèses sur la distribution de probabilité $P(\tau)$

- Soit τ une variable aléatoire pouvant varier entre 0 et $+\infty$, décrite par une distribution de probabilité normalisée $P(\tau)$

$$\int_0^\infty d\tau P(\tau) = 1 \quad (6.1)$$

- Pour τ suffisamment grand, $P(\tau)$ varie en loi de puissance

$$P(\tau) \underset{\tau \rightarrow \infty}{\sim} \frac{B}{\tau^{1+\mu}} \quad (6.2)$$

où B et μ sont positifs ($B > 0$ car P est une pbté, $\mu > 0$ pour que 6.1 converge).

- Si $0 < \mu \leq 1$, la valeur moyenne de τ , $\int_0^\infty \tau P(\tau) d\tau$, diverge.
- Si $1 < \mu \leq 2$, la valeur moyenne de τ est finie, mais la valeur moyenne de τ^2 , $\int_0^\infty \tau^2 P(\tau) d\tau$, diverge, de même donc que la variance.

Le théorème de la limite centrale généralisé s'applique à l'une des 2 situations précédentes, c'est à dire au cas où $0 < \mu \leq 2$. Le cas $\mu > 2$, pour lequel les valeurs moyennes de τ et τ^2 sont finies, relève du théorème de la limite centrale habituel.

2.2 - Sommes de Lévy - Problème posé

- Soit
$$T_N = \sum_{i=1}^N \tau_i \tag{6.3}$$

une somme de variables aléatoires indépendantes, décrites toutes par la même loi $P(\tau)$, de comportement asymptotique (6.2) avec $0 < \mu \leq 2$. T_N est appelée "somme de Lévy".

- Le problème qui se pose est le suivant : Peut-on, par un changement d'échelle sur T_N , et éventuellement après un recentrage, définir à partir de T_N une nouvelle variable u_N , telle que la distribution de probabilité de u_N soit décrite par une loi indépendante de N , quand $N \rightarrow \infty$?

2.3 - Changement de variables $T_N \rightarrow u_N$

- Nous distinguerons 2 cas, suivant que $0 < \mu \leq 1$ ou que $1 < \mu \leq 2$.

- $0 < \mu \leq 1$ $\langle \tau \rangle$ et $\langle \tau^2 \rangle$ sont infinis.

$$\begin{cases} u_N = \frac{T_N}{N^{1/\mu}} & \text{si } 0 < \mu < 1 \end{cases} \tag{6.4.a}$$

$$\begin{cases} u_N = \frac{T_N}{N \ln N} & \text{si } \mu = 1 \end{cases} \tag{6.4.b}$$

- $1 < \mu \leq 2$ $\langle \tau \rangle$ est fini, mais $\langle \tau^2 \rangle$ est infini

$$\begin{cases} u_N = \frac{T_N - N \langle \tau \rangle}{N^{1/\mu}} & \text{si } 1 < \mu < 2 \end{cases} \tag{6.5.a}$$

$$\begin{cases} u_N = \frac{T_N - N \langle \tau \rangle}{\sqrt{N \ln N}} & \text{si } \mu = 2 \end{cases} \tag{6.5.b}$$

2.4 - Distribution de probabilité de u_N à la limite $N \rightarrow \infty$ - Lois de Lévy

- La nouvelle variable u_N , définie par (6.4) ou (6.5), est distribuée, à la limite $N \rightarrow \infty$, suivant une loi $\mathcal{L}_\mu^B(u)$ indépendante de N

$$\Pr\{u_a \leq u_N \leq u_b\} \underset{N \rightarrow \infty}{=} \int_{u_a}^{u_b} du \mathcal{L}_\mu^B(u) \tag{6.6}$$

$\mathcal{L}_\mu^B(u)$ est une fonction de u , appelée loi de Lévy, ne dépendant que des paramètres μ et B caractérisant le comportement asymptotique (6.2) de $P(\tau)$.

- $\mathcal{L}_\mu^B(u)$ peut être exprimée comme la transformée de Laplace inverse d'une fonction simple de s

$$\mathcal{L}_\mu^B(u) = \frac{1}{2\pi i} \int_{d-i\infty}^{d+i\infty} ds e^{su - B's^\mu} \tag{6.7}$$

où B' est une constante dépendant de μ et proportionnelle à B , qui sera discutée plus loin.

Remarques

(i) Si $\mu > 2$, la valeur moyenne $\langle \tau \rangle$ et la variance σ^2 de $P(\tau)$ sont finies.

On introduit :

$$u_N = \frac{T_N - N \langle \tau \rangle}{\sigma \sqrt{N}} \tag{6.8}$$

et le théorème de la limite centrale habituel exprime alors que :

$$\Pr \{ u_a \leq u_N \leq u_b \} \underset{N \rightarrow \infty}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{u_a}^{u_b} e^{-u^2/2} du \tag{6.9}$$

(ii) Nous nous sommes limités ici au cas où la variable τ est positive (comme il se doit pour un temps de piégeage). Les lois de Lévy s'appliquent aussi à des distributions $P(\tau)$ définies pour $\tau > 0$ et $\tau < 0$. Le comportement asymptotique pour $|\tau| \rightarrow \infty$ est toujours en $1/|\tau|^{1+\mu}$:

$$P(\tau) \underset{\tau \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{B_+}{\tau^{1+\mu}} \quad P(\tau) \underset{\tau \rightarrow -\infty}{\sim} \frac{B_-}{|\tau|^{1+\mu}} \tag{6.10}$$

La loi de Lévy dépend alors de l'asymétrie $\beta = \frac{B_+ - B_-}{B_+ + B_-}$. Si $\beta = 0$ (loi symétrique) c'est la transformée de Fourier de la loi de Lévy qui a une forme simple.

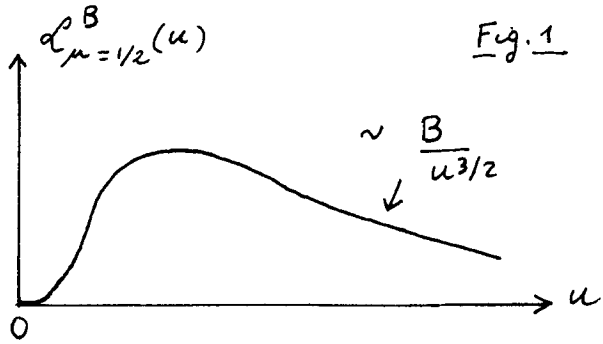
2.5 - Allure des lois de Lévy

- Considérons tout d'abord un cas particulier, le cas $\mu = 1/2$, où l'on peut donner une expression explicite de $\mathcal{L}_{1/2}^B(x)$

$$\mathcal{L}_{1/2}^B(u) = Y(u) \frac{B}{u^{3/2}} e^{-\frac{\pi B^2}{u}} \tag{6.11}$$

$Y(u)$ étant la fonction saut :

$$Y(u) = 1 \text{ pour } u > 0 \quad Y(u) = 0 \text{ pour } u < 0.$$



- L'allure des variations de $\mathcal{L}_{1/2}^B(u)$ avec u est représentée sur la figure 1. Pour $u \gg 1$, $\mathcal{L}_{1/2}^B(u)$ décroît lentement en $B/u^{3/2}$ car l'exponentielle tend alors vers $e^{-0} = 1$. Pour $u \rightarrow 0$, l'exponentielle domine et $\mathcal{L}_{1/2}^B(u)$ tend vers 0. En fait, toutes les dérivées de $\mathcal{L}_{1/2}^B(u)$ s'annulent en $u=0$.

- L'allure des variations de la figure 1 demeure valable pour toutes les lois $\mathcal{L}_\mu^B(u)$ avec $0 < \mu < 1$.

On a toujours une décroissance très lente quand $u \rightarrow \infty$, en loi de puissance

$$\mathcal{L}_\mu^B(u) \underset{u \rightarrow \infty}{\sim} \frac{B}{u^{1+\mu}} \quad \text{si } 0 < \mu < 1 \tag{6.12}$$

Notons que cette décroissance est exactement la même que celle de la distribution élémentaire $P(\tau)$, donnée en (6.2).

Pour $u \rightarrow 0$, $\mathcal{L}_\mu^B(u)$ tend très vite vers 0, toutes les dérivées s'annulant en $u=0$ [$\mathcal{L}_\mu^B(u)$ varie en $u^{\frac{\mu-2}{2(1-\mu)}} \exp\{-A_\mu/u^{\frac{\mu}{1-\mu}}\}$ où A_μ est une constante].

- Pour $1 < \mu < 2$, $\mathcal{L}_\mu^B(u)$ est non nul, aussi bien pour $u > 0$ que pour $u < 0$, puisque le changement de variables (6.5.a) a centré u_N autour de la valeur moyenne de T_N .

$\mathcal{L}_\mu^B(u)$ a la forme d'une courbe en cloche, centrée en $u=0$, ayant une largeur à mi-hauteur de l'ordre de $B^{1/\mu}$, et des ailes tendant rapidement vers 0 quand $|u| \rightarrow \infty$.

③ Propriétés importantes des sommes de Lévy pour $0 < \mu < 1$

Nous insistons ici plus particulièrement sur le cas $0 < \mu < 1$, car c'est dans ce cas que les sommes de Lévy T_N croissent très vite avec N et présentent des propriétés tout à fait inhabituelles.

3-1 Dépendance en N d'une somme de Lévy T_N

- La forme (6.4.a) du changement de variables $T_N \rightarrow u_N$ et le fait que u_N soit distribuée suivant une loi indépendante de N quand $N \rightarrow \infty$ montrent que T_N varie en $N^{1/\mu}$ quand $N \rightarrow \infty$. Une telle variation est beaucoup plus rapide que celle qui apparaîtrait si τ avait une valeur moyenne finie $\langle \tau \rangle$, et qui serait en $N \langle \tau \rangle$. Par exemple, si $\mu = 1/2$, T_N varie en N^2 . Si $\mu = 1/4$, T_N varie en N^4 .

- On peut rendre le résultat précédent "plausible" (sans le démontrer rigoureusement) en utilisant la forme, établie dans l'appendice B page V-11, de la transformée de Laplace $\tilde{P}(s)$ d'une distribution normalisée $P(\tau)$ variant asymptotiquement en $\frac{B}{\tau^{1+\mu}}$

$$P(\tau) \underset{\tau \rightarrow \infty}{\approx} \frac{B}{\tau^{1+\mu}} \quad \longrightarrow \quad \tilde{P}(s) \underset{s \rightarrow 0}{\approx} 1 - \frac{B}{\mu} \Gamma(1-\mu) s^\mu \quad (6.13)$$

On sait que, quand on compose 2 variables aléatoires indépendantes τ_1 et τ_2 , de même loi $P(\tau)$, la somme $\tau_1 + \tau_2$ est distribuée suivant une loi $P(\tau) \otimes P(\tau)$ qui est le produit de convolution de $P(\tau)$ par elle-même. Ce résultat se généralise de proche en proche: la somme de Lévy $T_N = \sum_{i=1}^N \tau_i$ est distribuée suivant une loi $P(\tau) \otimes P(\tau) \dots \otimes P(\tau) = P_N(T_N)$ égale au produit de convolution de $P(\tau)$ par elle-même N fois. La transformée de Laplace de $P_N(T_N)$ est donc tout simplement $[\tilde{P}(s)]^N$, et on déduit alors de (6.13) que:

$$\tilde{P}_N(s) \underset{s \rightarrow 0}{\approx} 1 - \frac{B}{\mu} \Gamma(1-\mu) N s^\mu \quad (6.14)$$

Changeons alors d'échelle sur T_N : $T_N \rightarrow T'_N = a_N T_N$. La nouvelle variable T'_N est distribuée suivant $P'_N(T'_N)$ telle que $P'_N(T'_N) dT'_N = P_N(T_N) dT_N$. En utilisant la définition de la transformation de Laplace, on montre aisément que si $\tilde{P}_N(s)$ est la transformée de Laplace de $P_N(T_N)$, la transformée de Laplace de $P'_N(T'_N)$ est $\tilde{P}'_N(s') = \tilde{P}_N(a_N s')$

$$P_N(T_N) \leftrightarrow \tilde{P}_N(s) \quad \implies \quad P'_N(T'_N) \leftrightarrow \tilde{P}'_N(s') = \tilde{P}_N(a_N s') \quad (6.15)$$

La comparaison de (6.14) et (6.15) montre alors que le comportement près de $s' = 0$ de la transformée de Laplace $\tilde{P}'_N(s')$ de $P'_N(T'_N)$ est

$$\tilde{P}'_N(s') \underset{s' \rightarrow 0}{\approx} 1 - \frac{B}{\mu} \Gamma(1-\mu) N a_N^\mu s'^\mu \quad (6.16)$$

Comment choisir alors a_N pour que ^(le) comportement pour $T'_N \gg 1$ de la distribution de la nouvelle variable T'_N soit indépendant de N ? Les termes dominants de la transformée de Laplace $\tilde{P}'_N(s')$ doivent être alors indépendants de N au voisinage de $s' = 0$, ce qui implique d'après (6.16) qu'il faut prendre $N a_N^\mu = 1$, c-à-d $a_N = 1/N^{1/\mu}$. C'est donc la variable $T'_N = a_N T_N = T_N / N^{1/\mu}$ qui a un comportement indépendant de N pour $T'_N \gg 1$.

- Le raisonnement précédent nous a permis de justifier le changement de variable (6.4.a), en montrant qu'il est nécessaire si l'on veut que la nouvelle variable $u_N = T'_N$ ait un comportement indépendant de N pour $u_N \gg 1$. Le théorème de la limite centrale généralisé (que nous ne démontrons pas ici) apporte plusieurs éléments supplémentaires. Tout d'abord, il indique que le comportement de la nouvelle variable définie en (6.4.a) est indépendant de N à la limite $N \rightarrow \infty$ aussi bien pour $u_N \gg 1$ que pour $u_N \ll 1$ ou quelconque. C'est donc toute la transformée de Laplace de $P'_N(T'_N)$, et non pas seulement les termes dominants au voisinage de $s'=0$, qui devient indépendante de N à la limite $N \rightarrow \infty$. De plus, un tel théorème donne l'expression explicite de cette transformée de Laplace. En explicitant le coefficient B' de (6.7) donné dans la référence [1], on obtient

$$\tilde{\mathcal{L}}_\mu^B(s') = \int_0^\infty \mathcal{L}_\mu^B(u) e^{-us'} du = \exp \left\{ - \frac{\pi B}{\mu \Gamma(\mu) \sin \pi \mu} s'^\mu \right\} \quad (6.17)$$

Le développement de l'exponentielle (6.17) au voisinage de $s' = 0$ donne

$$\tilde{\mathcal{L}}_\mu^B(s') \underset{s' \rightarrow 0}{\approx} 1 - \frac{\pi B}{\mu \Gamma(\mu) \sin \pi \mu} s'^\mu \quad (6.18)$$

que l'on peut réécrire

$$\tilde{\mathcal{L}}_\mu^B(s') \underset{s' \rightarrow 0}{\approx} 1 - \frac{B}{\mu} \Gamma(1-\mu) s'^\mu \quad (6.19)$$

si l'on utilise la relation $\Gamma(\mu) \Gamma(1-\mu) = \frac{\pi}{\sin \pi \mu}$ entre fonctions gamma.

L'équation (6.19) n'est autre que (6.16) si l'on choisit $N a_N^\mu = 1$.

- Notons enfin que la comparaison de (6.13) et (6.19) montre que la décroissance de $\mathcal{L}_\mu^B(u)$ pour $u \gg 1$ est identique à celle de $P(\tau)$ pour $\tau \gg 1$, résultat énoncé plus haut en (6.12).

3.2 - Ordre de grandeur des termes le plus grand dans une somme de Lévy

Terme le plus grand dans N tirages successifs d'une loi quelconque

- Soit $P(\tau)$ une distribution normalisée quelconque. Faisons N tirages successifs indépendants donnant les valeurs $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N$, et posons nous la question suivante : Quelle est la probabilité $P(\tau_M)$ d'obtenir lors d'un tirage une valeur $\tau > \tau_M$, tous les autres tirages fournissant des valeurs inférieures à τ_M ?

- Introduisons la probabilité

$$\pi_M = \int_{\tau_M}^\infty P(\tau) d\tau \quad (6.20)$$

d'obtenir une valeur supérieure à τ_M lors d'un tirage quelconque. La probabilité d'obtenir une valeur inférieure à τ_M est $1 - \pi_M$.

Comme le tirage donnant $\tau > \tau_M$ peut être le premier, ou le second, ... ou le N ième, on obtient pour la probabilité $P(\tau_M)$

$$P(\tau_M) = N \pi_M (1 - \pi_M)^{N-1} \tag{6.21}$$

- L'équation (6.21) permet alors de calculer simplement la valeur de τ_M , et donc celle de π_M , qui maximise $P(\tau_M)$. On a

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau_M} P(\tau_M) &= \left\{ \frac{d}{d\pi_M} [N \pi_M (1 - \pi_M)^{N-1}] \right\} \times \frac{d\pi_M}{d\tau_M} \\ &= -N (1 - \pi_M)^{N-2} (1 - N \pi_M) P(\tau_M) \end{aligned} \tag{6.22}$$

qui montre que $P(\tau_M)$ est maximum pour $\pi_M = \frac{1}{N}$

$$P(\tau_M) \text{ maximal pour } \pi_M = \int_{\tau_M}^{\infty} P(\tau) d\tau = \frac{1}{N} \tag{6.23}$$

- La valeur de τ_M donnée par (6.23), c'est à dire par $\int_{\tau_M}^{\infty} P(\tau) d\tau = 1/N$, donne l'ordre de grandeur du terme le plus grand obtenu lors de N tirages successifs indépendants. Comme π_M vaut $1/N$, on a une chance appréciable d'obtenir une telle valeur, puisque $N \pi_M = 1$.

En d'autres termes, on peut dire que, si l'on fait N tirage successifs indépendants, on a une chance importante que le terme le plus grand obtenu soit de l'ordre de ou supérieur à τ_M où τ_M est défini par $\int_{\tau_M}^{\infty} P(\tau) d\tau = 1/N$

Comparaison des distributions larges et étroites

Comment varie τ_M avec N ?

- Commençons par prendre une distribution étroite, par exemple

$$P(\tau) = \frac{1}{\tau_0} e^{-\tau/\tau_0} \tag{6.24}$$

l'équation (6.23), donne alors immédiatement

$$\tau_M = \tau_0 \ln N \tag{6.25}$$

En augmentant le nombre de tirage, on n'augmente donc que très lentement la valeur maximale des résultats obtenus. La croissance serait encore beaucoup plus lente si l'on prenait une gaussienne $e^{-\tau^2/\tau_0^2}$.

- Prenons maintenant une distribution large en $\tau^{-(1+\mu)}$ avec $0 < \mu < 1$, par exemple

$$P(\tau) = Y(\tau - \tau_0) \cdot \frac{\mu \tau_0^\mu}{\tau^{1+\mu}} \tag{6.26}$$

où Y est la fonction sans. L'équation (6.23) donne alors

$$\tau_M = \tau_0 N^{1/\mu} \tag{6.27}$$

Au lieu d'avoir une croissance logarithmique, comme en (6.25), on a maintenant une croissance en $N^{1/\mu}$, plus rapide que N ! τ_M croît aussi vite avec N que la somme de Lévy elle-même.

- Le calcul précédent montre qu'au bout de N tirages, on explore peu la région $\tau \gg \tau_M$. On peut donc calculer une valeur moyenne de τ en trouvant la distribution $P(\tau)$ après τ_M .

(Nous trouper, une telle distribution conduirait à $\langle \tau \rangle = \infty$). On peut ainsi estimer la somme de Lévy $T_N = \sum_{i=1}^N \tau_i$ par $N \langle \tau \rangle_{\text{trouper}$ où $\langle \tau \rangle_{\text{trouper}$ est calculé avec la distribution trouper

$$T_N = \sum_{i=1}^N \tau_i \simeq N \int_0^{T_M} \tau P(\tau) d\tau \quad (6.28)$$

A partir de (6.26) et (6.27), un calcul simple donne alors

$$T_N \simeq \frac{\mu}{1-\mu} \tau_0 N^{1/\mu} \quad (6.29)$$

qui est du même ordre de grandeur que T_M donné en (6.27).

On obtient ainsi un résultat remarquable : Dans une somme de Lévy T_N de N termes $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N$ obéissant à la même loi $P(\tau)$, de comportement asymptotique $\tau^{-(1+\mu)}$ avec $0 < \mu < 1$, le terme le plus grand de la somme est de l'ordre de grandeur de la somme elle-même.

3.3 - Importance des événements rares - Vols de Lévy.

- Considérons une particule effectuant une marche au hasard dont les pas τ_i (avec $\tau_i > 0$) sont distribués suivant une loi large, d'exposant $0 < \mu < 1$, par exemple (6.26). D'après les résultats du § 3.2 précédent, le déplacement total de la particule après N pas est "dominé" par un très petit nombre de pas dont l'amplitude est de l'ordre de grandeur du déplacement total. Une telle marche au hasard, dominée par un petit nombre de pas, est appelée "vol de Lévy". Nous avons déjà rencontré de telles situations sur la figure 12 du cours IV (page IV-8) représentant une simulation Monte-Carlo du refroidissement VSCPT en configuration 5^+-5^- . C'est d'ailleurs le caractère "anormal" de la marche au hasard le long de l'axe des temps obtenue après de telles simulations Monte-Carlo qui a suggéré de faire un rapprochement entre le refroidissement subrecool et les vols de Lévy [Ref [4]].

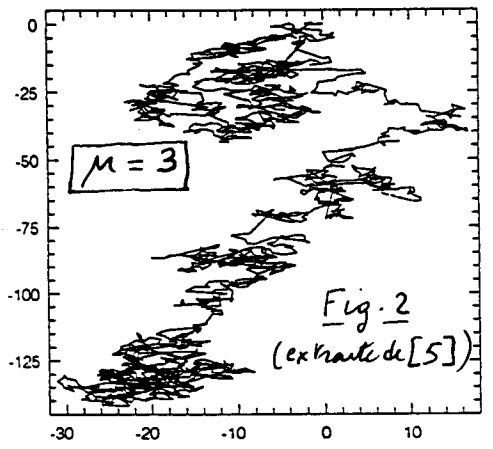
- La thèse de François Bardou (ref. [5]) contient des figures illustrant très clairement les propriétés essentielles des vols de Lévy. Pour rendre plus visible la marche, on suppose que la particule se déplace dans un plan (marche à 2 dimensions). Chaque pas, d'amplitude τ_i ($i=1, 2, \dots, N$), se fait dans une direction aléatoire, d'angle θ_i équipartie entre 0 et 2π . Les modules τ_i de chaque pas sont distribués suivant la loi (6.26). On compare les cas $\mu > 2$ (distributions étroites) et $0 < \mu < 1$ (distributions larges)

Pour tirer au sort N valeurs de τ_i ($N=2000$) distribuées suivant la loi (6.26), il est commode d'associer à τ une autre variable x , la relation $\tau(x)$ étant choisie de telle manière que, si x est équipartie entre 0 et 1, τ est distribué entre τ_0 et $+\infty$ suivant (6.26). Il est en effet plus simple de tirer au hasard un nombre entre 0 et 1 qu'une variable aléatoire distribué suivant une loi $P(\tau)$. On peut vérifier que si

$$\tau(x) = \frac{\tau_0}{(1-x)^{1/\mu}} \quad (6.30)$$

un tel objectif est atteint puisqu'on a bien $P(\tau) |d\tau| = 1 |dx|$. Quelle que soit la valeur de μ choisie, on effectue donc un tirage au sort de $N=2000$ nombres θ_i et x_i équiparties entre 0 et 2π , et 0 et 1, respectivement.

La figure 2, extraite de [5], représente les résultats obtenus pour $\mu = 3$, c-à-d pour une distributions $P(\tau)$ étroite. On retrouve bien l'allure d'un mouvement Brownien habituel



Pour la même valeur de τ_0 et la même procédure de tirage de $N = 2000$ couples de nombres aléatoires (θ_i, x_i) , la figure 3a (toujours extraite de [5]), représente les résultats obtenus pour $\mu = 1/2$. La différence est spectaculaire. Notez tout d'abord le changement d'échelle par rapport à la figure 2.

Le déplacement total de la particule est beaucoup plus important, ce qui montre bien qu'une somme de Lévy croît plus vite que N . Par ailleurs, bien qu'on ait le même nombre total de pas ($N = 2000$), on n'en distingue clairement que 5 ou 6. La raison est que 5 ou 6 pas sont si grands (notamment l'un d'entre eux) que, pour les représenter, il faut choisir une échelle qui "écrase" complètement les 1994 autres! En fait, si l'on agrandit la zone représentée par un cercle sur la figure 3a, on obtient la figure 3b où l'on voit apparaître des pas plus petits. Mais là encore, la marche au hasard a la même allure, à savoir une domination par un petit nombre de pas. Et il en est de même encore quand on agrandit le cercle de la figure 3b pour obtenir la figure 3c, et ainsi de suite

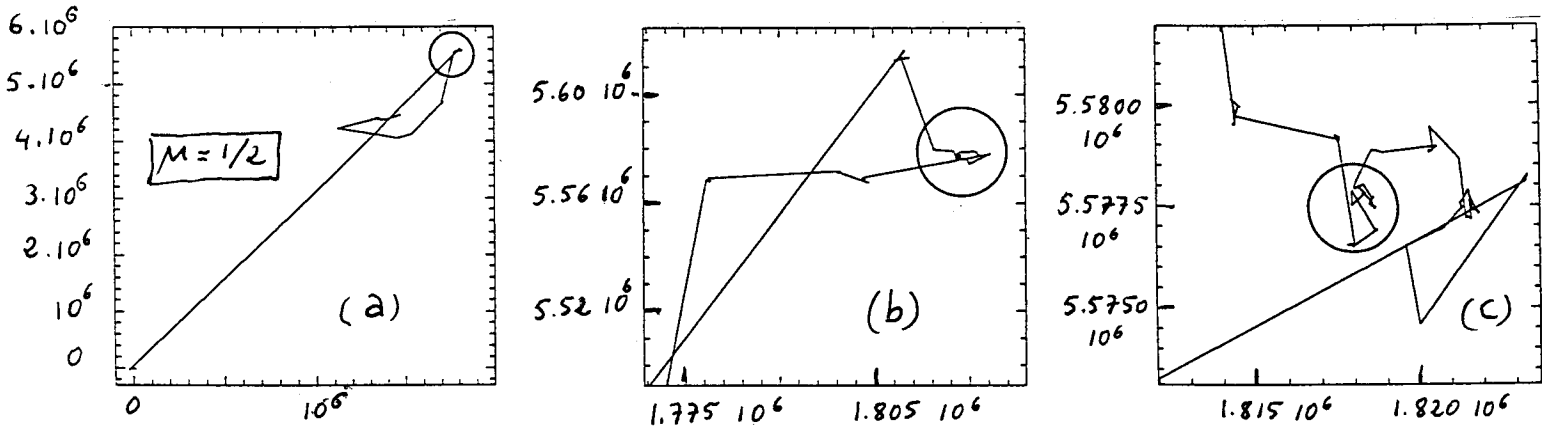


Fig. 3 (extraite de [5])

- En conclusion, on peut donc dire que les vols de Lévy sont des marches aléatoires "anormales", dominées par un petit nombre d'événements rares, et présentant un aspect auto-similaire quelle que soit l'échelle utilisée.

3.4 Importance des fluctuations

- Il ressort clairement de la discussion précédente que les fluctuations d'une somme de Lévy T_N sont du même ordre de grandeur que la somme elle-même. On ne diminue pas les fluctuations en augmentant le nombre de termes de la somme. Le comportement d'ensemble fluctue autant que le comportement individuel

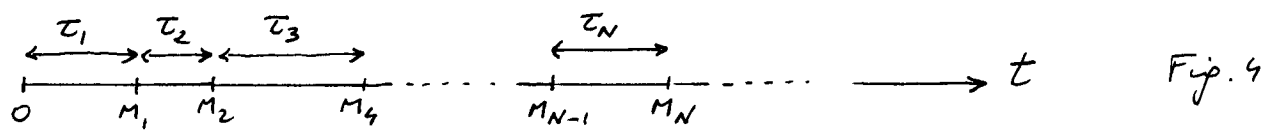
- Une telle situation diffère radicalement de celle rencontrée pour une loi étroite, où les fluctuations de la somme décroissent en valeur relative comme $1/\sqrt{N}$. Une telle différence est due au fait que la loi de Lévy $\mathcal{L}_\mu^B(u)$ ne dépend que du comportement asymptotique de la loi élémentaire $P(\tau)$ pour $\tau \rightarrow \infty$, alors que la loi normale ne dépend que des 2 premiers moments de $P(\tau)$.

④ - Processus ponctuel associé à la distribution $P(\tau)$.

Loi d'arrosage

4-1 Position du problème

- Considérons une particule qui progresse le long d'un axe t , qui est ici un axe des temps, mais qui pourrait tout aussi bien être un axe des positions. Cette progression se fait par des sauts successifs $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \dots$ indépendants les uns des autres et distribués tous suivant la même loi $P(\tau)$. Soient $M_1, M_2, M_3, \dots, M_N, \dots$ les positions successives de la particule, d'abscisses $\tau_1, \tau_1 + \tau_2, \tau_1 + \tau_2 + \tau_3, \dots, T_N = \sum_{i=1}^N \tau_i, \dots$ (Fig. 4)



N varie de 1 à $+\infty$. On obtient ainsi à partir de $P(\tau)$ un ensemble aléatoire infini et discret de points sur l'axe t (processus ponctuel).

- On considère plusieurs réalisations différentes de cet ensemble aléatoire de points et on se pose la question suivante: quelle est la probabilité $A(t)dt$ de trouver un point dans un petit intervalle $[t, t+dt]$? En d'autres termes, quelle est la densité de points sur l'axe t ? On peut également considérer $A(t)$ comme une "loi d'arrosage" associée à la distribution $P(t)$.

- Notons que la probabilité $A(t)dt$ ainsi définie ne présume en rien du nombre de sauts que la particule a dû effectuer avant d'arriver dans l'intervalle $[t, t+dt]$. On s'intéresse à la probabilité de la trouver dans cet intervalle, quel que soit le nombre de sauts effectués auparavant. Il faut donc calculer la probabilité $A_N(t)$ pour que le point M_N de la figure 4 soit dans l'intervalle $[t, t+dt]$, puis sommer $A_N(t)$ sur N de 1 à $+\infty$

4-2 Cas d'une distribution $P(\tau)$ étroite

- Commençons par étudier le cas d'une distribution $P(\tau)$ étroite ayant une valeur moyenne $\bar{\tau}$ et une variance σ^2 finies. D'après (6.8) et (6.9), la probabilité pour que le point M_N de la figure 10 soit dans l'intervalle $[t, t+dt]$ est $A_N(t)dt$, où

$$A_N(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi N\sigma^2}} e^{-\frac{(t - N\bar{\tau})^2}{2N\sigma^2}} \quad (6.31)$$

Pour obtenir $A(t)$, il faut sommer (6.31) sur N . En remplaçant la somme par une intégrale, on obtient

$$A(t) = \int_1^{\infty} dN \frac{1}{\sqrt{2\pi N\sigma^2}} e^{-\frac{(t - N\bar{\tau})^2}{2N\sigma^2}} \quad (6.32)$$

- Soit N_0 la valeur de N telle que la gaussienne de (6.32) soit centrée en t

$$t = N_0 \bar{\tau} \quad (6.33)$$

La gaussienne a alors une largeur $\sigma \sqrt{N_0}$. Posons

$$N = N_0 + n \quad (6.34)$$

On peut réécrire (6.32) sous la forme

$$A(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dn \frac{1}{\sqrt{2\pi(N_0+n)\sigma^2}} e^{-\frac{n^2 \bar{\tau}^2}{2(N_0+n)\sigma^2}} \quad (6.35)$$

- Soit δn la quantité dont n doit varier pour que le centre de la gaussienne se déplace d'une quantité de l'ordre de sa largeur $\sqrt{N_0} \sigma$ quand $n=0$. On a

$$\delta n \bar{t} \sim \sqrt{N_0} \sigma \quad (6.36)$$

De (6.33) et (6.36), on déduit alors

$$\frac{\delta n}{N_0} \sim \frac{1}{\sqrt{N_0}} \frac{\sigma}{\bar{t}} \sim \sqrt{\frac{\sigma^2}{t \bar{t}}} \quad (6.37)$$

ce qui montre que pour t suffisamment grand ($t \gg \sigma^2 / \bar{t}$), on a $\delta n \ll N_0$, ce qui permet alors de remplacer $N_0 + n$ par N_0 dans (6.35). L'intégrale donnant $A(t)$ est alors élémentaire

$$A(t) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi N_0 \sigma^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} dn e^{-\frac{n^2 \tau^2}{2 N_0 \sigma^2}} = \frac{1}{\bar{t}} \quad (6.38)$$

- Le résultat (6.38) est satisfaisant physiquement. Pour t suffisamment grand, on trouve que $A(t)$ tend vers une constante indépendante de t et égale à $1/\bar{t}$. Comme la distance moyenne entre 2 points successifs est égale à \bar{t} , il est normal de trouver une densité moyenne de points constante et égale à $1/\bar{t}$.

4.3 Cas d'une distribution large en $\tau^{-(1+\mu)}$ avec $0 < \mu < 1$

- Il faut maintenant utiliser (6.4) et (6.6) pour obtenir $A_N(t)$ qui vaut

$$A_N(t) = \frac{1}{N^{1/\mu}} \mathcal{L}_\mu^B \left(\frac{t}{N^{1/\mu}} \right) \quad (6.39)$$

La somme sur N de (6.39) et le remplacement de cette somme par une intégrale conduisent à :

$$A(t) = \int_1^\infty \frac{dN}{N^{1/\mu}} \mathcal{L}_\mu^B \left(\frac{t}{N^{1/\mu}} \right) \quad (6.40)$$

Le changement de variable $u = t/N^{1/\mu}$ permet de transformer (6.40) en

$$A(t) = \frac{\mu}{t^{1-\mu}} \int_0^t du u^{-\mu} \mathcal{L}_\mu^B(u) \quad (6.41)$$

- Si l'on pose

$$P(t) \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} \frac{B}{t^{\mu+1}} = \frac{\mu \tau_B^\mu}{t^{\mu+1}} \quad (6.42)$$

on peut vérifier que le maximum de la courbe $\mathcal{L}_\mu^B(u)$ est atteint pour une abscisse de l'ordre de τ_B [Par exemple, pour $\mu = 1/2$, on peut dériver l'expression 6.11 donnant $\mathcal{L}_{1/2}^B$ et utiliser $B = \frac{1}{2} \tau_B^{1/2}$]. Si $t \gg \tau_B$, on peut alors remplacer la borne supérieure de l'intégrale de (6.41) par $+\infty$. On voit ainsi apparaître le "moment" d'ordre $-\mu$ de la distribution $\mathcal{L}_\mu^B(u)$ qui est connu [voir Ref [1], Equations (B.30)]

$$\langle u^{-\mu} \rangle = \int_0^\infty du u^{-\mu} \mathcal{L}_\mu^B(u) = \frac{\sin \pi \mu}{\pi B} \quad (6.43)$$

On en déduit, compte tenu de $B = \mu \tau_B^\mu$

$$A(t) = \frac{\mu \sin \pi \mu}{\pi B} \frac{1}{t^{1-\mu}} = \frac{\sin \pi \mu}{\pi} \frac{1}{\tau_B} \left(\frac{\tau_B}{t} \right)^{1-\mu}$$

On trouve que $A(t)$ est homogène à l'inverse d'un temps, comme en (6.38), et décroît, quand t augmente, comme $(\tau_B/t)^{1-\mu}$.

- La décroissance de $A(t)$ avec t est une autre manifestation du fait que, au fur et à mesure que t croît, des intervalles de temps τ de plus en plus grands peuvent apparaître. Il se produit donc moins d'événements aux temps longs qu'aux temps courts. La densité des points associés à ces événements décroît. L'arrosage est moins dense.
- On peut dire encore que le fait que $A(t)$ dépende de t montre qu'il n'y a plus d'invariance des processus par translation dans le temps. Le processus a une "histoire". On pourrait en étudiant $A(t)$ déterminer à quelle date il a commencé.

Remarque

Des calculs analogues peuvent être faits pour des distributions variant en $\tau^{-(1+\mu)}$ avec $1 < \mu < 2$, pour lesquelles $\bar{\tau}$ est fini mais σ est infini (voir Ref. [5]). On trouve dans ce cas que, comme pour les distributions étroites, $A(t)$ tend, pour t suffisamment grand, vers une constante égale à $1/\bar{\tau}$.

Références

- [1] - J-P. Bouchaud, A. Georges, Phys. Rep. 195, 127 (1990)
- [2] - B.V. Gnedenko, A.N. Kolmogorov, Limit Distributions for Sums of Independent Random Variables, Addison Wesley, 1954
- [3] - P. Lévy, Théorie de l'Addition des Variables Aléatoires, Gauthier-Villars, 1954.
- [4] - F. Bardou, J.P. Bouchaud, O. Emile, A. Aspect, C. Cohen-Tannoudji Phys. Rev. Lett. 72, 203 (1994)
- [5] - F. Bardou, Thèse de doctorat, Paris 1995.

① Introduction

- Dans le cours V, nous avons modélisé le refroidissement subrecul par une marche au hasard dans l'espace des impulsions. Pendant certains intervalles de temps $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_i, \dots$, l'atome reste "piégé" dans des états quasistationnaires, caractérisés par une quasiimpulsion p inférieure à une certaine valeur P_{trap} . Entre 2 phases de piégeage, l'atome diffuse hors du piège, dans des états $p > P_{trap}$, et pendant des intervalles de temps $\hat{\tau}_1, \hat{\tau}_2, \dots, \hat{\tau}_i, \dots$. Dans de nombreux cas, nous avons calculé les distributions $P(\tau)$ et $\hat{P}(\hat{\tau})$ des temps de piégeage τ et des temps de premier retour dans le piège $\hat{\tau}$. Et nous avons montré que ces distributions avaient des comportements asymptotiques (aux temps longs) caractérisés par des lois de puissances en $\tau^{-(1+\mu)}$ ou $\hat{\tau}^{-(1+\hat{\mu})}$, μ et $\hat{\mu}$ pouvant être plus petits que 1.
- Dans le cours VI, nous avons montré que les sommes de variable aléatoires indépendantes, décrites par la même loi de probabilité ayant un comportement asymptotique en loi de puissance, n'obéissent plus au théorème usuel de la limite centrale. Nous avons introduit les nouvelles lois de probabilité, dites lois de Lévy, qui régissent le comportement de ces sommes de variables aléatoires indépendantes, et souligné un certain nombre de propriétés originales qui les caractérisent.
- Le fait que nous ayons trouvé au cours V des distributions de probabilité en $\tau^{-(1+\mu)}$ ou $\hat{\tau}^{-(1+\hat{\mu})}$ montre donc que les statistiques de Lévy s'introduisent tout naturellement dans le problème du refroidissement subrecul. Nous allons montrer effectivement dans ce cours que l'utilisation des résultats du cours VI permet d'effectuer un certain nombre de prédictions quantitatives sur les propriétés asymptotiques (aux temps d'interaction longs) du refroidissement subrecul: proportion d'atomes piégés, distribution d'impulsion de ces atomes... Nous montrerons également qu'un tel point de vue permet d'apporter un éclairage nouveau sur certaines propriétés du refroidissement subrecul, comme l'absence d'ergodicité.

② Compétition entre piégeage et diffusion hors du piège2.1 Importance des exposants μ et $\hat{\mu}$

- Supposons tout d'abord que les exposants μ et $\hat{\mu}$ caractérisant les comportements asymptotiques de $P(\tau)$ et $\hat{P}(\hat{\tau})$ soient tous deux inférieurs à 1.

$$\mu < 1 \quad \hat{\mu} < 1 \quad (7.1)$$

Considérons alors N périodes alternées de piégeage et de diffusion hors du piège. D'après le paragraphe 3.1 du cours VI, on peut dire que:

$$T_N = \sum_{i=1}^N \tau_i \propto N^{1/\mu} \quad \hat{T}_N = \sum_{i=1}^N \hat{\tau}_i \propto N^{1/\hat{\mu}} \quad (7.2)$$

Si $\mu < \hat{\mu}$, le temps total passé dans le piège, T_N , croîtra plus vite avec N que le temps total passé hors du piège. On s'attend donc à ce que la proportion d'atomes piégés tende vers 1 quand le temps d'interaction Θ

tend vers l'infini. La conclusion est opposée quand $\hat{\mu} < \mu$. Si $\mu = \hat{\mu}$, T_N et \hat{T}_N croissent de la même manière et on s'attend à ce que f tende vers une constante quand $\Theta \rightarrow \infty$.

- Supposons maintenant que l'un des 2 exposants, par exemple μ , reste inférieur à 1, alors que l'autre, $\hat{\mu}$, est supérieur à 1, de sorte que la valeur moyenne de $\hat{\tau}$ est finie. C'est ce qui se passe notamment, en présence de prérefroidissement Si-syphé.

$$\mu < 1 \quad \text{et} \quad \hat{\mu} > 1 \quad \langle \tau \rangle = \infty \quad \langle \hat{\tau} \rangle < \infty \quad (7.3)$$

Dans ce cas, on a

$$T_N = \sum_{i=1}^N \tau_i \propto N^{1/\mu} \gg N \quad \hat{T}_N = \sum_{i=1}^N \hat{\tau}_i \propto N \langle \hat{\tau} \rangle \quad (7.4)$$

Par suite, $T_N \gg \hat{T}_N$ quand $N \rightarrow \infty$ et on prédit que $f \rightarrow 1$ si $\Theta \rightarrow \infty$.

- Enfin si μ et $\hat{\mu}$ sont tous deux supérieurs à 1, de sorte que $\langle \tau \rangle$ et $\langle \hat{\tau} \rangle$ sont finis, T_N et \hat{T}_N croissent avec N comme $N \langle \tau \rangle$ et $N \langle \hat{\tau} \rangle$, respectivement, et on s'attend à ce que $f \rightarrow \langle \tau \rangle / (\langle \tau \rangle + \langle \hat{\tau} \rangle)$ quand $\Theta \rightarrow \infty$.

- On voit ainsi que la simple connaissance des exposants μ et $\hat{\mu}$ permet de faire des prédictions importantes sur l'efficacité du refroidissement suborbital. Peut-on aller plus loin et prédire la manière dont f tend vers sa limite quand $\Theta \rightarrow \infty$?

2.2 Moyenne temporelle et moyenne d'ensemble.

- Considérons, pour fixer les idées, le cas où $\mu = 1/2$ et $\hat{\mu} = 1/4$, qui est celui du refroidissement VSCPT à 1 dimension, avec retour dans le piège ralenti par désaccord Doppler aux grandes valeurs de p (Voir Fig. 1a et § 5.2 du cours V). On a alors :

$$\mu = 1/2 \quad \hat{\mu} = 1/4 \quad \rightarrow \quad T_N \propto N^2 \quad \hat{T}_N \propto N^4 \quad (7.5)$$

- Pour calculer la proportion f d'atomes piégés et la manière dont f tend vers 0 quand $\Theta \rightarrow \infty$, on est tenté alors de faire le raisonnement suivant. La proportion relative de temps passé dans le piège vaut

$$\frac{T_N}{T_N + \hat{T}_N} \propto \frac{N^2}{N^2 + N^4} \sim \frac{1}{N^2} \quad (7.6)$$

Par ailleurs, comme $\hat{T}_N \gg T_N$, on a $\hat{T}_N \sim \Theta$ où Θ est la durée d'interaction, et par suite $N^4 \propto \Theta$, d'où l'on tire $N \propto \Theta^{1/4}$, et par suite

$$\frac{T_N}{T_N + \hat{T}_N} \sim N^{-2} \sim \Theta^{-1/2} \quad (7.7)$$

Il est tentant alors d'identifier f à $T_N / (T_N + \hat{T}_N)$ et de conclure que f tend vers 0 comme $\Theta^{-1/2}$ quand $\Theta \rightarrow \infty$.

- En fait, le résultat précédent est inexact. f ne coïncide pas avec $T_N / (T_N + \hat{T}_N)$. Nous verrons plus loin que f tend vers 0 comme $\Theta^{-1/4}$, et non comme $\Theta^{-1/2}$, une telle prédiction étant de plus confirmée par les résultats de simulations Monte-Carlo. L'origine d'une telle erreur est la confusion entre moyennes temporelles et moyennes d'ensemble. $T_N / (T_N + \hat{T}_N)$ est la probabilité d'occupation du piège, moyennée temporellement entre 0 et Θ . Or, f est la probabilité moyenne d'occupation du piège après un temps Θ , c-à-d la probabilité d'occupation du piège à l'instant Θ , moyennée sur plusieurs réalisations différentes de l'expérience. f est donc une moyenne d'ensemble. Et moyennes temporelles et moyennes d'ensemble ne coïncident que si le système est ergodique. Or, le

refroidissement subrecoil est fondamentalement caractérisé par une absence d'ergodicité. Aussi long que soit le temps d'interaction Θ , il y a toujours des temps caractéristiques du système qui sont du même ordre que Θ : quand $p \rightarrow 0$, l'atome peut rester piégé pendant un temps variant comme p^{-2} , qui peut être aussi long que l'on veut si p est suffisamment petit.

2-3 Expression exacte de la proportion f d'atomes piégés.

- Nous devons donc exprimer f comme une moyenne d'ensemble, c'est à dire comme la probabilité moyenne de trouver, à l'instant Θ , l'atome dans le piège ($P < P_{trap}$)
- Un atome dans le piège à l'instant Θ est entré dans le piège pour la dernière fois à un instant antérieur $\Theta - \tau$ (avec $0 \leq \tau \leq \Theta$) et n'a pas quitté le piège entre $\Theta - \tau$ et τ .

Introduisons alors la probabilité $E(t)dt$ pour que l'atome entre dans le piège entre les instants t et $t+dt$. Une telle définition ne présume en rien du nombre d'entrées et de sorties que l'atome a pu faire avant l'instant t . On peut donc écrire

$$f(\Theta) = \int_0^\Theta dt E(\Theta-t) \tilde{\Psi}(\tau) \tag{7.8}$$

où $\tilde{\Psi}(\tau)$ est la probabilité pour que l'atome ne quitte pas le piège entre $\Theta - \tau$ et Θ , c.à.d. encore la probabilité pour qu'il demeure piégé un temps plus long que τ

$$\tilde{\Psi}(\tau) = \int_\tau^\infty dt' P(\tau') \tag{7.9}$$

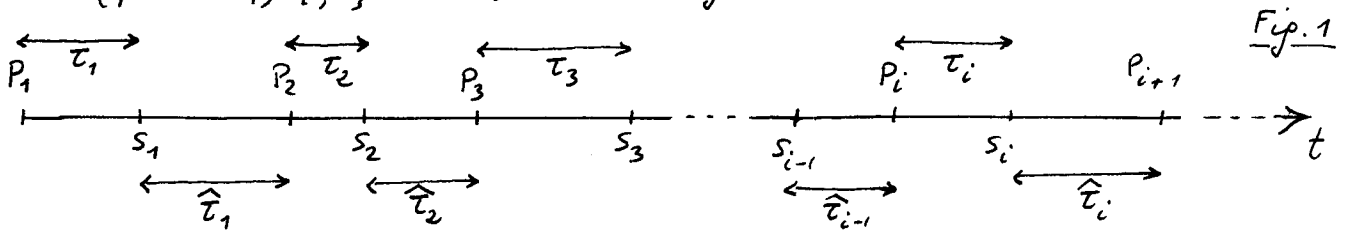
Le calcul de f nécessite donc au préalable d'évaluer E .

③ Probabilité par unité de temps d'entrer dans le piège

Le calcul de $E(t)$ est très voisin de celui de la loi d'arrosage $A(t)$ présentée à la fin du cours VI (§ 4).

3.1 Processus ponctuel associé aux distributions $P(\tau)$ et $\hat{P}(\hat{\tau})$

- Portons sur l'axe des temps les divers instants où l'atome entre dans le piège (points $P_1, P_2, P_3 \dots P_i \dots$) et les divers instants où il en sort (points $S_1, S_2, S_3 \dots S_i \dots$). Voir Fig. 1



Chaque point P_i est entre 2 points S_{i-1} et S_i . Chaque point S_i est entre 2 points P_i et P_{i+1} . L'intervalle $P_i S_i$ vaut τ_i , l'intervalle $S_i P_{i+1}$ vaut $\hat{\tau}_i$.

- Comme les τ_i et les $\hat{\tau}_i$ sont des variables aléatoires indépendantes, on obtient 2 ensembles aléatoires infinis et discrets de points $P_1, P_2, P_3 \dots S_1, S_2, S_3 \dots$ imbriqués l'un dans l'autre
- On considère plusieurs réalisations différentes de ces 2 ensembles aléatoires et on se pose la question suivante : Quelle est la probabilité moyenne $E(t)dt$ de trouver un point P , quel que soit son numéro i , dans l'intervalle $[t, t+dt]$. En d'autres termes, quelle est la densité de points P sur l'axe des t ?

- La distance $P_i P_{i+1}$ entre 2 points P consécutifs vaut simplement $\tau_i + \hat{\tau}_i$. Comme τ et $\hat{\tau}$ sont des variables aléatoires indépendantes, distribuées suivant $P(\tau)$ et $\hat{P}(\hat{\tau})$, $\tau + \hat{\tau}$ est distribué suivant une loi $\tilde{P}(\tau + \hat{\tau})$ qui est le produit de convolution de $P(\tau)$ et $\hat{P}(\hat{\tau})$, et dont la transformée de Laplace $\tilde{P}(s)$ est le produit des transformées de Laplace $\tilde{P}(s)$ et $\hat{P}(s)$ de $P(\tau)$ et $\hat{P}(\hat{\tau})$.

$$P(\tau + \hat{\tau}) = P(\tau) \otimes \hat{P}(\hat{\tau}) \quad (7.10.a) \quad \tilde{P}(s) = \tilde{P}(s) \cdot \hat{P}(s) \quad (7.10.b)$$

3.2 Cas où $\langle \tau \rangle$ et $\langle \hat{\tau} \rangle$ sont finis ($\mu > 1$ et $\hat{\mu} > 1$)

- Comme $\langle \tau \rangle$ et $\langle \hat{\tau} \rangle$ sont finis, on sait (voir Eq. (5.44)) que $\tilde{P}(s)$ et $\hat{P}(s)$ partent linéairement en s quand $s \rightarrow 0$: $\tilde{P}(s) \underset{s \rightarrow 0}{\approx} 1 - \langle \tau \rangle s$, $\hat{P}(s) \underset{s \rightarrow 0}{\approx} 1 - \langle \hat{\tau} \rangle s$, de sorte que, d'après (7.10.b), $\tilde{P}(s) \underset{s \rightarrow 0}{\approx} 1 - (\langle \tau \rangle + \langle \hat{\tau} \rangle) s$. $\tilde{P}(\tau + \hat{\tau})$ a donc un premier moment fini, égal à $\langle \tau \rangle + \langle \hat{\tau} \rangle$, résultat qui était évident a priori. On en déduit

$$E(t) = \frac{1}{\langle \tau \rangle + \langle \hat{\tau} \rangle} \quad (7.11)$$

- La densité moyenne de points P est l'inverse de la distance moyenne entre 2 points P consécutifs.

3.3 Cas où $\langle \hat{\tau} \rangle$ est fini et $\langle \tau \rangle$ infini ($\mu < 1$ et $\hat{\mu} > 1$)

- On a toujours $\hat{P}(s) \underset{s \rightarrow 0}{\approx} 1 - \langle \hat{\tau} \rangle s$. D'après l'appendice B des cours V $\tilde{P}(s) \underset{s \rightarrow 0}{\approx} 1 - \frac{B}{\mu} \Gamma(1-\mu) s^\mu$. On en déduit $\tilde{P}(s) \underset{s \rightarrow 0}{\approx} 1 - \frac{B}{\mu} \Gamma(1-\mu) s^\mu - \langle \hat{\tau} \rangle s$. Quand $s \rightarrow 0$, le terme dominant de $\tilde{P}(s)$ est $1 - \frac{B}{\mu} \Gamma(1-\mu) s^\mu$ (car $\mu < 1$), de sorte que le comportement de $\tilde{P}(\tau + \hat{\tau})$ est en $B/(\tau + \hat{\tau})^{1+\mu}$ aux temps longs.

- On peut donc utiliser le résultat (6.44) des cours VI pour obtenir la loi d'arrosage des points P de la figure 1

$$E(t) \underset{t \rightarrow \infty}{\approx} A(t) = \frac{\mu \sin \pi \mu}{\pi B} \frac{1}{t^{1-\mu}} = \frac{\sin \pi \mu}{\pi} \frac{1}{\tau_B} \left(\frac{\tau_B}{t}\right)^{1-\mu} \quad (7.12)$$

Un tel résultat revient à dire qu'aux temps longs, on peut négliger $\hat{\tau}_i$ devant τ_i .

3.4 Cas où $\langle \tau \rangle$ et $\langle \hat{\tau} \rangle$ sont infinis ($\mu < 1$ et $\hat{\mu} < 1$)

- ~~Commençons par supposer $\mu < \hat{\mu}$~~
 On a alors $\tilde{P}(s) \underset{s \rightarrow 0}{\approx} 1 - \frac{B}{\mu} \Gamma(1-\mu) s^\mu$, $\hat{P}(s) \underset{s \rightarrow 0}{\approx} 1 - \frac{\hat{B}}{\hat{\mu}} \Gamma(1-\hat{\mu}) s^{\hat{\mu}}$ et par suite $\tilde{P}(s) \underset{s \rightarrow 0}{\approx} 1 - \frac{B}{\mu} \Gamma(1-\mu) s^\mu - \frac{\hat{B}}{\hat{\mu}} \Gamma(1-\hat{\mu}) s^{\hat{\mu}}$. Comme $\mu < \hat{\mu}$, le terme dominant est $1 - \frac{B}{\mu} \Gamma(1-\mu) s^\mu$, ce qui permet à nouveau de montrer que $\tilde{P}(\tau + \hat{\tau})$ varie en $B/(\tau + \hat{\tau})^{1+\mu}$ aux temps longs et d'utiliser (6.44) qui conduit à (7.12)

En fait, un calcul plus précis de $E(t)$ est possible (voir Ref [1], chap. V, § 4.3.3.2) et fournit les premières corrections à apporter à (7.12) aux temps intermédiaires (termes "sous-dominants"). On trouve:

$$E(t) \approx \frac{\mu \sin \pi \mu}{\pi B} \frac{1}{t^{1-\mu}} \left[1 + C \frac{\hat{\tau}_B^{\hat{\mu}}}{\tau_B^\mu} \frac{1}{t^{\hat{\mu}-\mu}} \right] \quad (7.13)$$

où C est une constante sans dimension ne dépendant que de μ et $\hat{\mu}$ et où on a posé $B = \mu \tau_B^\mu$, $\hat{B} = \hat{\mu} \hat{\tau}_B^{\hat{\mu}}$. Quand $t \gg \tau_B, \hat{\tau}_B$, le terme correctif de (7.13) est très petit devant 1 et (7.13) se réduit, comme il se doit, à (7.12)

- Pour $\hat{\mu} < \mu$, il suffit dans (7.13), d'échanger μ et $\hat{\mu}$, τ_B et $\hat{\tau}_B$, B et \hat{B}

- Enfin, si $\hat{\mu} = \mu$, on a $\tilde{P}(s) \underset{s \rightarrow 0}{\approx} 1 - \frac{B}{\mu} \Gamma(1-\mu) s^\mu$, $\hat{P}(s) \underset{s \rightarrow 0}{\approx} 1 - \frac{\hat{B}}{\mu} \Gamma(1-\mu) s^\mu$, de sorte que $\tilde{P}(s) \underset{s \rightarrow 0}{\approx} 1 - \frac{(B + \hat{B})}{\mu} \Gamma(1-\mu) s^\mu$, ce qui conduit tout simplement à remplacer dans (6.44), B par $B + \hat{B}$

$$E(t) \approx \frac{\mu \sin \pi \mu}{\pi (B + \hat{B})} \frac{1}{t^{1-\mu}} \quad (7.14)$$

④ Etude quantitative de l'efficacité du refroidissement

4-1 Autres expressions équivalentes de la proportions d'atomes piégés $f(\theta)$

- Reportons (7.9) dans (7.8). On obtient pour $f(\theta)$ l'expression

$$f(\theta) = \int_0^\theta d\tau E(\theta-\tau) \int_\tau^\infty d\tau' P(\tau') \quad (7.15)$$

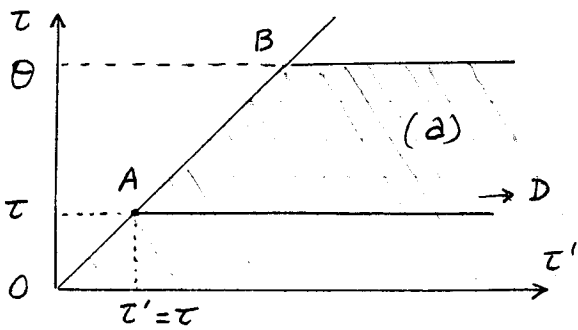
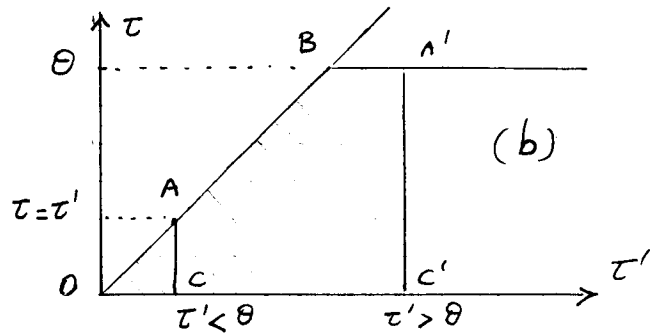


Fig. 2



- Dans (7.15), on commence, τ étant fixé par intégrer sur τ' de τ à $+\infty$, c-à-d le long de la droite AD de la figure 2a (D est à l'infini sur l'horizontale partant de A). Puis, on intègre sur τ de 0 à θ , ce qui revient, à déplacer le point A de la figure 2a de 0 à B. le domaine d'intégration sur τ et τ' est donc la zone hachurée.

On peut bien sûr inverser l'ordre des intégrations dans la même zone hachurée (Fig. 2b). τ' étant fixé, on peut d'abord intégrer sur τ , de 0 à τ' si $\tau' < \theta$ (segment CA de la figure 2b), ou de 0 à θ si $\tau' > \theta$ (segment C'A'). Ensuite on intègre sur τ' de 0 à $+\infty$. On obtient donc une autre expression équivalente de $f(\theta)$

$$f(\theta) = \int_0^\infty d\tau' P(\tau') \left[Y(\theta-\tau') \int_0^{\tau'} d\tau E(\theta-\tau) + Y(\tau'-\theta) \int_0^\theta d\tau E(\theta-\tau) \right] \quad (7.16)$$

où $Y(x)$ est la fonction saut [$Y(x) = 0$ si $x < 0$, $Y(x) = 1$ si $x > 0$].

- Jusqu'ici nous n'avons considéré que la proportion $f(\theta)$ d'atomes piégés. On pourrait aussi considérer la proportion $\hat{f}(\theta)$ d'atomes hors du piège. On a bien sûr $f + \hat{f} = 1$ puisque l'atome est, soit dans le piège, soit hors du piège. $\hat{f}(\theta)$ est donné par une expression analogue à (7.15), où $P(\tau')$ est remplacé par $\hat{P}(\hat{\tau}')$ et où $E(\theta-\tau)$ est remplacé par $\hat{E}(\theta-\tau)$, probabilité par unité de temps que l'atome sorte du piège à l'instant $\theta-\tau$. En fait, $\hat{E}(t)$ est la densité de points S sur l'axe des temps de la figure 1. Comme chaque point S est entouré de 2 points P, et réciproquement, on se convainc aisément que les densités de points P et S sont égales, de sorte que

$$E(t) = \hat{E}(t) \quad (7.17)$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} f(\theta) &= 1 - \hat{f}(\theta) = 1 - \int_0^\theta d\tau E(\theta-\tau) \int_\tau^\infty d\hat{\tau}' \hat{P}(\hat{\tau}') \\ &= 1 - \int_0^\infty d\hat{\tau}' \hat{P}(\hat{\tau}') \left[Y(\theta-\hat{\tau}') \int_0^{\hat{\tau}'} d\tau E(\theta-\tau) + Y(\hat{\tau}'-\theta) \int_0^\theta d\tau E(\theta-\tau) \right] \quad (7.18) \end{aligned}$$

Suivant les cas, il sera plus commode, pour calculer $f(\theta)$, d'utiliser (7.15), (7.16) ou (7.18).

4.2 Cas où $\langle \tau \rangle$ et $\langle \hat{\tau} \rangle$ sont finis ($\mu > 1$ et $\hat{\mu} > 1$)

- Dans ce cas, il faut utiliser l'expression (7.11) de E. Comme E est constant, les 2 intégrales de (7.16) sont élémentaires et conduisent à

$$f(\theta) = \frac{1}{\langle \tau \rangle + \langle \hat{\tau} \rangle} \left[\int_0^\theta d\tau' \tau' P(\tau') + \theta \int_\theta^\infty d\tau' P(\tau') \right] \quad (7.19)$$

- Si $\theta \gg \langle \tau \rangle$, le 2^{ème} terme du crochet de (7.19) est négligeable devant le premier qui se réduit à $\int_0^\infty d\tau' \tau' P(\tau') = \langle \tau \rangle$, de sorte que

$$f(\theta) = f = \frac{\langle \tau \rangle}{\langle \tau \rangle + \langle \hat{\tau} \rangle} \quad (7.20)$$

Un calcul analogue donnerait $\hat{f}(\theta) = \hat{f} = \langle \hat{\tau} \rangle / (\langle \tau \rangle + \langle \hat{\tau} \rangle)$.
 On démontre ainsi que, si $\langle \tau \rangle$ et $\langle \hat{\tau} \rangle$ sont finis et si $\theta \gg \langle \tau \rangle, \langle \hat{\tau} \rangle$, moyennes d'ensemble et moyennes temporelles coïncident. Les proportions d'atomes piégés et non piégés sont proportionnelles aux temps moyens passés dans le piège et hors du piège, respectivement.

4.3 Cas où $\langle \hat{\tau} \rangle$ est fini et $\langle \tau \rangle$ infini ($\mu < 1$ et $\hat{\mu} > 1$)

Calcul de f

- Bien qu'il soit plus compliqué, commençons par le calcul direct de f au moyen de l'équation (7.16), pour montrer que $f \rightarrow 1$ si $\theta \rightarrow \infty$.

- Reportons (7.12) dans (7.16). Il vient

$$f(\theta) = \frac{\sin \pi \mu}{\pi} \tau_B^{-\mu} \int_0^\infty d\tau' P(\tau') \left[\gamma(\theta - \tau') \int_0^{\tau'} \frac{d\tau}{(\theta - \tau)^{1-\mu}} + \gamma(\tau - \theta) \int_0^\theta \frac{d\tau}{(\theta - \tau)^{1-\mu}} \right] \quad (7.21)$$

Les 2 intégrales de (7.21) sont élémentaires et on obtient

$$f(\theta) = \frac{\sin \pi \mu}{\pi \mu} \tau_B^{-\mu} \left\{ \int_0^\theta d\tau' P(\tau') [\theta^\mu - (\theta - \tau')^\mu] + \int_\theta^\infty d\tau' P(\tau') \theta^\mu \right\} \quad (7.22)$$

Les termes en θ^μ de l'accolade de (7.22) se regroupent pour faire apparaître $\theta^\mu \int_0^\infty P(\tau') d\tau' = \theta^\mu$ et il vient (en remplaçant la variable muette d'intégration τ' par τ):

$$f(\theta) = \frac{\sin \pi \mu}{\pi \mu} \tau_B^{-\mu} \left[\theta^\mu - \int_0^\theta d\tau P(\tau) (\theta - \tau)^\mu \right] \quad (7.23)$$

- Pour calculer le crochet de (7.23), considérons pour fixer les idées le cas simple où $P(\tau)$ est partout donné par une loi de puissance

$$P(\tau) = \begin{cases} \mu \tau_B^\mu / \tau^{1+\mu} & \text{si } \tau > \tau_B \\ 0 & \text{si } \tau < \tau_B \end{cases} \quad (7.24)$$

On a alors, en désignant par [] le crochet de (7.23)

$$[] = \theta^\mu - \mu \tau_B^\mu \int_{\tau_B}^\infty d\tau (\tau)^{-1-\mu} (\theta - \tau)^\mu \quad (7.25)$$

Une intégration par parties du 2^{ème} terme de (7.25) donne

$$-\mu \tau_B^\mu \int_{\tau_B}^\infty d\tau (\tau)^{-1-\mu} (\theta - \tau)^\mu = -(\theta - \tau_B)^\mu + \mu \tau_B^\mu \int_{\tau_B}^\theta \tau^{-\mu} (\theta - \tau)^{\mu-1} d\tau \quad (7.26)$$

- Comme $\theta \gg \tau_B$, on peut remplacer le 1^{er} terme du 2^{ème} membre de (7.26) par $-\theta^\mu$, ce qui revient à négliger un terme de l'ordre de $\mu \tau_B / \theta^{1-\mu}$, contenant une puissance positive de θ au dénominateur. Par ailleurs, comme $\mu < 1$, la dernière intégrale de (7.26) converge à ses 2 extrêmes. Si l'on remplace la borne inférieure τ_B par 0, on néglige un terme de l'ordre de $\frac{\mu}{1-\mu} \frac{\tau}{\theta^{1-\mu}}$, contenant lui aussi une puissance positive de θ au dénominateur. A la limite $\theta \rightarrow \infty$, on peut donc écrire

$$[] \approx \theta^\mu - \theta^\mu + \mu \tau_B^\mu \int_0^\theta \tau^{-\mu} (\theta - \tau)^{\mu-1} d\tau$$

$$= \mu \tau_B^\mu \int_0^1 x^{-\mu} (1-x)^{\mu-1} dx \tag{7.27}$$

Pour passer de la 1^{ère} à la 2^{ème} ligne, on a posé $x = \tau / \theta$

- Utilisons alors la relation

$$p > 0, q > 0 \quad B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx = \frac{\Gamma(p) \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \tag{7.28}$$

On obtient, compte tenu de $\Gamma(1) = 1$

$$[] = \mu \tau_B^\mu B(1-\mu, \mu) = \mu \tau_B^\mu \Gamma(\mu) \Gamma(1-\mu) = \mu \tau_B^\mu \frac{\pi}{\sin \pi \mu} \tag{7.29}$$

On a utilisé

$$\Gamma(\mu) \Gamma(1-\mu) = \frac{\pi}{\sin \pi \mu} \tag{7.30}$$

- Finalement, en reportant (7.30) dans (7.23) on trouve que

$$f(\theta) \rightarrow 1 \quad \text{si } \theta \rightarrow \infty \tag{7.31}$$

Pour obtenir les termes correctifs montrant comment $f(\theta)$ tend vers 1 quand $\theta \rightarrow \infty$, il faudrait revenir sur les approximations effectuées pour passer de (7.25) à (7.27). Il faudrait également tenir compte des termes correctifs à apporter à l'expression (7.12) de $E(t)$. En fait, il est beaucoup plus simple de passer par $\hat{f}(\theta)$

Calcul de \hat{f}

- L'équation (7.18) montre que $\hat{f}(\theta)$ est égal à l'intégrale de la 2^{ème} ligne (avec le signe + devant $\int_0^\infty d\hat{t}'$). Comme $\langle \hat{t} \rangle$ est fini, la contribution du 2^{ème} terme du crochet de (7.18) est négligeable si $\theta \gg \langle \hat{t} \rangle$ car $\hat{P}(\hat{t}')$ est nécessairement très petit si $\hat{t}' > \theta \gg \langle \hat{t} \rangle$. On en déduit que :

$$\hat{f}(\theta) \approx \int_0^\infty d\hat{t}' \hat{P}(\hat{t}') \int_0^{\hat{t}'} d\tau E(\theta - \tau) \tag{7.32}$$

- Dans l'intégrale sur τ de (7.32), la borne supérieure \hat{t}' ne peut pas être très grande devant $\langle \hat{t} \rangle$, à cause de la présence de $\hat{P}(\hat{t}')$ qui s'annule vite si $\hat{t}' \gg \langle \hat{t} \rangle$. Or $E(\theta - \tau)$ varie très lentement avec τ quand τ varie sur un intervalle de quelques $\langle \hat{t} \rangle$ si $\theta \gg \langle \hat{t} \rangle$. On peut donc, en première approximation remplacer $E(\theta - \tau)$ par $E(\theta)$ ce qui donne

$$\int_0^{\hat{t}'} d\tau E(\theta - \tau) \approx E(\theta) \hat{t}' \tag{7.33}$$

- En reportant (7.33) dans (7.32), on obtient alors

$$\begin{aligned} \hat{f}(\theta) &\approx E(\theta) \int_0^\infty d\hat{\tau}' \hat{\tau}' \hat{P}(\hat{\tau}') = E(\theta) \langle \hat{\tau} \rangle \\ &= \frac{\langle \hat{\tau} \rangle}{\tau_B} \frac{\sin \pi \mu}{\pi} \left(\frac{\tau_B}{\theta} \right)^{1-\mu} \end{aligned} \quad (7.34)$$

et par suite

$$f(\theta) = 1 - \hat{f}(\theta) = 1 - \frac{\langle \hat{\tau} \rangle}{\tau_B} \frac{\sin \pi \mu}{\pi} \left(\frac{\tau_B}{\theta} \right)^{1-\mu} \quad (7.35)$$

Ce calcul de f est plus rapide et plus élégant que le précédent car \hat{f} est calculé à l'ordre le plus bas où \hat{f} est non nul. On trouve ainsi la loi de puissance en $1/\theta$ décrivant comment f tend vers 1 quand $\theta \rightarrow \infty$ et le préfacteur de cette loi de puissance.

4-4 Cas où $\langle \tau \rangle$ et $\langle \hat{\tau} \rangle$ sont infinis ($\mu < 1$ et $\hat{\mu} < 1$)

$\hat{\mu} < \mu$

- Il faut alors utiliser (7.13) avec μ remplacé par $\hat{\mu}$ et $B = \mu \tau_B^{\mu}$ remplacé par $\hat{\mu} \hat{\tau}_B^{\hat{\mu}}$. En ne gardant que le terme d'ordre le plus bas, on obtient

$$E(t) = \frac{\sin \pi \hat{\mu}}{\pi} \hat{\tau}^{-\hat{\mu}} \frac{1}{t^{1-\hat{\mu}}} \quad (7.36)$$

Les formules (7.21) à (7.23) demeurent valables moyennant le remplacement $\mu \rightarrow \hat{\mu}$ $\tau_B \rightarrow \hat{\tau}_B$ et on obtient

$$f(\theta) = \frac{\sin \pi \hat{\mu}}{\pi \hat{\mu}} \hat{\tau}_B^{-\hat{\mu}} \left[\theta^{\hat{\mu}} - \int_0^\theta P(\tau) (\theta - \tau)^{\hat{\mu}} \right] \quad (7.37)$$

- Comme plus haut, on peut utiliser l'expression (7.24) de $P(\tau)$, puis intégrer par parties la dernière intégrale du crochet de (7.37) pour transformer ce crochet en

$$\left[\right] = \theta^{\hat{\mu}} - (\theta - \tau_B)^{\hat{\mu}} + \hat{\mu} \tau_B^{\mu} \int_{\tau_B}^{\theta} \tau^{-\mu} (\theta - \tau)^{\hat{\mu}-1} d\tau \quad (7.38)$$

Comme plus haut, on peut enfin remplacer $(\theta - \tau_B)^{\hat{\mu}}$ par $\theta^{\hat{\mu}}$ et étendre à 0 la borne inférieure de l'intégrale de (7.38), ce qui revient à négliger des petites corrections. On obtient finalement, avec le changement de variables $x = \tau/\theta$

$$\begin{aligned} \left[\right] &\approx \hat{\mu} \tau_B^{\mu} \theta^{\hat{\mu}-\mu} \int_0^1 x^{-\mu} (1-x)^{\hat{\mu}-1} dx \\ &= \hat{\mu} \tau_B^{\mu} \theta^{\hat{\mu}-\mu} B(1-\mu, \hat{\mu}) = \hat{\mu} \tau_B^{\mu} \frac{\Gamma(1-\mu) \Gamma(\hat{\mu})}{\Gamma(1-\mu+\hat{\mu})} \theta^{\hat{\mu}-\mu} \end{aligned} \quad (7.39)$$

- Le remplacement du crochet de (7.37) par (7.39) donne alors

$$f(\theta) = \frac{\sin \pi \hat{\mu}}{\pi} \frac{\Gamma(1-\mu) \Gamma(\hat{\mu})}{\Gamma(1-\mu+\hat{\mu})} \frac{\tau_B^{\mu}}{\hat{\tau}_B^{\hat{\mu}}} \frac{1}{\theta^{\mu-\hat{\mu}}} \quad (7.40)$$

On trouve ainsi que, si $0 < \hat{\mu} < \mu < 1$, $f(\theta)$ tend vers 0 comme $1/\theta^{\mu-\hat{\mu}}$, avec un préfacteur donné par (7.40). En particulier si $\hat{\mu} = 1/4$ et $\mu = 1/2$, on trouve que $f(\theta)$ tend vers 0 comme $\theta^{-1/4}$ et non comme $\theta^{-1/2}$, ce qui est le cas de la moyenne temporelle (7.7).

- l'équation (7.40) donne le terme dominant de $f(\theta)$ à la limite $\theta \rightarrow \infty$. En tenant compte du terme correctif figurant dans le crochet de (7.13), on peut évaluer les premières corrections à (7.40) [ref [1], § 4.4.3]. On trouve que $1/f(\theta)$ est la somme d'un terme en $\theta^{\mu-\hat{\mu}}$ [inverse de (7.40)] et d'un terme plus petit, variant beaucoup plus lentement avec θ , et qui peut être assimilé à une constante.

- le cas $\mu < \hat{\mu}$ conduit à des calculs analogues. On trouve que $f(\theta)$ tend vers 1, $1-f(\theta)$ étant donné par une expression analogue à (7.40), où μ est remplacé par $\hat{\mu}$, τ_B par $\hat{\tau}_B$ et réciproquement.

$$\mu = \hat{\mu}$$

- $P(\tau)$ et $\hat{P}(\hat{\tau})$ se comportent comme $B/\tau^{1+\mu}$ et $\hat{B}/\hat{\tau}^{1+\mu}$, respectivement, quand $\theta \rightarrow \infty$. Par ailleurs, $E(t)$ est donné par (7.14).

- On trouve alors, en utilisant (7.15), que $f(\theta)$ et $\hat{f}(\theta)$ sont donnés par des expressions identiques, à un coefficient de proportionnalité près, égal à B pour f et \hat{B} pour \hat{f} . On en déduit que

$$f(\theta) \rightarrow \frac{B}{B + \hat{B}} = \frac{\tau_B^\mu}{\tau_B^\mu + \hat{\tau}_B^\mu} \quad \text{quand } \theta \rightarrow \infty \quad (7.41)$$

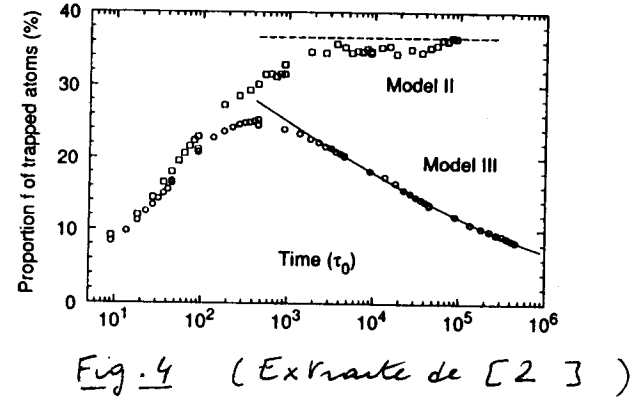
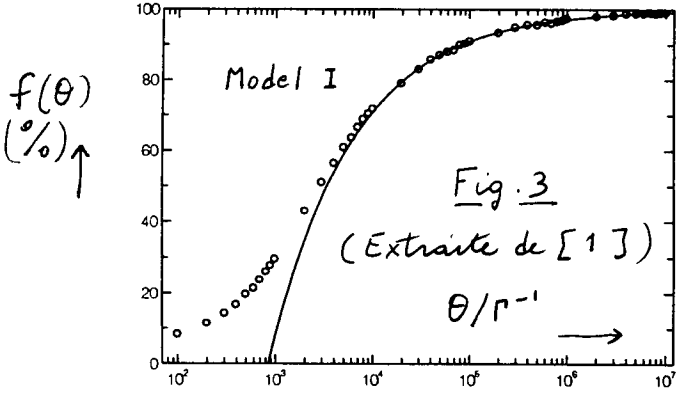
Quand $\mu = \hat{\mu}$, $f(\theta)$ tend donc vers une constante quand $\theta \rightarrow \infty$ déterminée par les préfacteurs B et \hat{B} apparaissant dans les comportements asymptotiques de $P(\tau)$ et $\hat{P}(\hat{\tau})$.

4.5 Comparaison de ces prédictions avec les résultats de simulations Monte Carlo du refroidissement VSCPT à 1 dimension

- Les prédictions précédentes peuvent être testées en les comparant aux prédictions de simulations Monte Carlo, du type de celles décrites dans le § 9.3 du cours V. Le cas du refroidissement VSCPT à 1 dimension en configuration $\sigma^+ \sigma^-$ est particulièrement simple. Les familles d'états complètes par l'hamiltonien d'interaction VACL sont alors finies et le calcul de la fonction délai se ramène à la diagonalisation d'une matrice non hermitique 3×3 . De plus, il est possible dans ce cas de relire de manière quantitative tous les paramètres des courbes donnant les variations avec p des taux d'absorption $\Gamma'(p)$ [courbes de la figure 1 du cours V] aux paramètres expérimentaux : fréquence de Rabi Ω , désaccord δ , longueur naturelle Γ . On peut ainsi calculer tous les préfacteurs B, \hat{B} apparaissant dans les distributions $P(\tau), \hat{P}(\hat{\tau})$.

- Trois modèles I, II, III ont pu ainsi être testés. Le premier modèle I fait intervenir des murs à $\pm p_{\max}$ dans l'espace des p [Fig 1 b du cours V]. Dans les simulations Monte Carlo, dès que p dépasse p_{\max} et vaut $p_{\max} + \epsilon \hbar k$, on le remplace par $-p_{\max} + \epsilon \hbar k$. Les ronds de la figure 3 représentent les résultats de telles simulations pour $f(\theta)$ (exprimé en %). Le refroidissement VSCPT à 1D implique ici $\mu = D/\alpha = 1/2$ ($D=1, \alpha=2$). Par ailleurs, à cause des

murs à $\pm p_{max}$, $\langle \hat{E} \rangle$ est fini. Il faut donc utiliser ici la formule (7.35) avec $\mu = 1/2$, qui prédit que f doit tendre vers 1 quand $\Theta \rightarrow \infty$, comme $1 - \alpha \Theta^{-1/2}$. La courbe en traits pleins de la figure 3 représente le meilleur ajustement aux résultats des simulations par une loi en $1 - \alpha \Theta^{-1/2}$. L'accord est excellent



- Le modèle II considère une diffusion en p non confinée, sans effet Doppler aux grands p [course de la Fig 1.a du cours V sans décroissance de $\Gamma'(p)$ aux grands p]. On a toujours $\mu = 1/2$, mais la diffusion hors du piège est celle d'un mouvement Brownien usuel sans effet Doppler. Il faut donc se reporter au § 5.1 du cours V qui montre que $\hat{\mu} = 1/2$ et à l'équation (5.34) qui donne le prefacteur \hat{B} . On est donc dans le cas $\mu = \hat{\mu} < 1$ et il faut par suite utiliser l'équation (7.41) qui montre que $f(\Theta)$ tend vers une constante ne dépendant que de B/\hat{B} . On peut calculer explicitement cette constante à partir des équations (5.15) et (5.34) et montrer qu'elle ne dépend que du rapport τ_k/p_0 où p_0 est la largeur du trou en $p = 0$ des courbes de la figure 1 du cours V. La droite horizontale en pointillés de la figure 4 représente cette constante (calculée sans aucun ajustement) les carrés représentent les résultats de simulations Monte Carlo calculés en prenant une très grande valeur de Γ (de manière à pouvoir négliger la décroissance Doppler de $\Gamma'(p)$). On constate qu'ils tendent bien, quand $\Theta \rightarrow \infty$, vers la constante prévue à partir de 7.41.
- Enfin, le modèle III tient compte de la décroissance Doppler de $\Gamma'(p)$. D'après le § 5.2 du cours V, on a alors $\hat{\mu} = 1/4$ [voir équation (5.40)]. On est donc ici dans le cas $\mu = 1/2$ $\hat{\mu} = 1/4$ et il faut donc utiliser l'équation (7.40) qui prédit que $f(\Theta)$ doit décroître comme $\Theta^{-1/4}$. La courbe en traits pleins de la figure représente le meilleur ajustement aux résultats de simulations Monte Carlo (ronds) d'un courbe du type $f(\Theta) = [\alpha + \beta \Theta^{1/4}]^{-1}$. Là aussi, l'accord est excellent.
- Un tel accord entre prédictions analytiques et simulations Monte Carlo donne confiance dans l'approche "vols de Lévy" qui sera appliquée, dans le cours suivant au calcul de la forme de la distribution d'impulsions.

Références

[1] F. Bardou, Thèse, Paris 1995
 [2] F. Bardou, J.P. Bouchand, O. Emile, A. Aspet, C. Cohen-Tannoudji Phys. Rev. Lett. 72, 203 (1994)
 [3] Voir aussi les prédictions sur le comportement asymptotique des solutions des équations de Bloch optiques pour le refroidissement VSCPT 1D en configuration $\sigma^+ - \sigma^-$ dans V. Alekseev, D. Krylova, JETP Lett 55, 321 (1992) et Laser Physics 2, 781 (1992)

Propriétés asymptotiques du refroidissement subrecul (suite et fin)

Le but de ce cours est de montrer comment il est possible de calculer la distribution d'impulsions $\mathcal{P}(p)$ des atomes piégés. Nous pourrions ainsi déterminer la largeur δp des structures étroites de cette distribution et voir si δp tend vers 0 quand le temps d'interaction Θ tend vers l'infini. Nous étudions également la hauteur des pics correspondants (densité en $p=0$ dans l'espace des impulsions) ainsi que la proportion d'atomes refroidis.

5) Etude quantitative de la distribution d'impulsions $\mathcal{P}(p)$ des atomes piégés

5.1 Rappel des arguments qualitatifs utilisés dans les premières descriptions du refroidissement subrecul.

Estimation de la largeur δp de $\mathcal{P}(p)$

- Le raisonnement présenté dans les premières études théoriques du refroidissement VSCPT (Ref [1]) est le suivant : Soit Θ le temps d'interaction. Les états dans lesquels l'atome peut rester piégé pendant Θ sont ceux dont l'impulsion p est suffisamment petite pour que la probabilité d'absorber un photon pendant le temps Θ soit négligeable.

$$\Gamma'(p) \cdot \Theta < 1 \quad (8.1)$$

où $\Gamma'(p) = (1/\tau_0)(p/p_0)^2$ est le taux d'absorption donné en (5.5). Introduisons la quantité p_θ définie par

$$\Gamma'(p_\theta) \cdot \Theta = 1 \quad (8.2)$$

c'est à dire encore par

$$p_\theta = p_0 \left(\frac{\tau_0}{\Theta} \right)^{1/2} \quad (8.3)$$

Les atomes demeurant piégés pendant un temps Θ sont ceux pour lesquels $p < p_\theta$. On considère alors que p_θ donne un ordre de grandeur de la largeur δp de $\mathcal{P}(p)$.

- Le raisonnement qualitatif précédent était en fait confirmé par la résolution numérique des équations de Bloch optiques décrivant le refroidissement VSCPT à 1 dimension en configuration $\sigma^+ - \sigma^-$. On trouve que la largeur des structures étroites de $\mathcal{P}(p)$ décroît avec Θ comme $1/\sqrt{\Theta}$ (voir Fig. 1a), en accord avec (8.3). On trouve également que cette largeur est proportionnelle à la fréquence de Rabi Ω_1 (voir Fig. 1b). Or, la largeur p_0 du trou Raman de $\Gamma'(p)$ et le temps d'excitation $1/\tau_0$ en dehors de ce trou, varient comme l'intensité laser, proportionnelle à Ω_1^2 , de sorte que dans (8.3) on a bien $p_0 \sqrt{\tau_0} \propto \Omega_1^2 \sqrt{1/\Omega_1^2} = \Omega_1$.

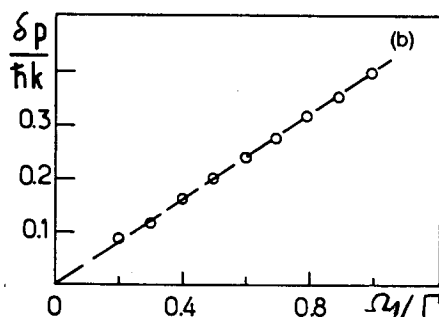
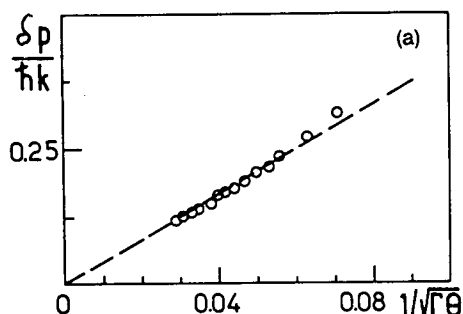


Figure 1
(Extrait de [1])

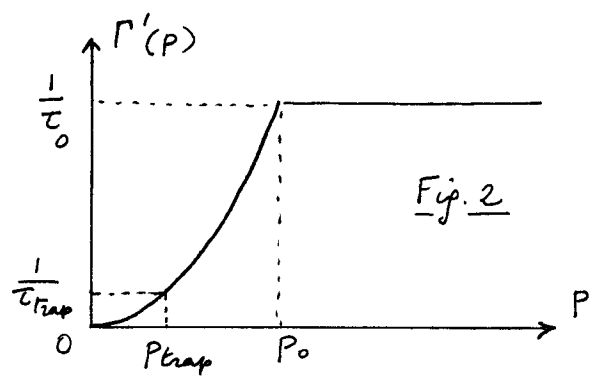
Insuffisances du raisonnement précédent

- Le raisonnement précédent met l'accent sur l'effet du "filtrage" en vitesse associé à l'interaction atome-laser. Si les atomes quittant le piège n'y reviennent jamais plus, ceux qui resteraient dans le piège au bout d'un temps Θ auraient effectivement une impulsion inférieure en module à P_0 . En fait, les atomes sortent du piège et y retournent en permanence. C'est d'ailleurs grâce à ce "recyclage" que la densité d'atomes en $p < P_0$ peut croître au cours du temps et qu'on obtient un refroidissement, et non pas seulement une sélection. En fait, à un instant donné Θ , le piège contient des atomes qui peuvent y être entrés pour la dernière fois à n'importe quel instant $\Theta - \tau$, avec $0 \leq \tau \leq \Theta$. Si $\tau \ll \Theta$, de tels atomes peuvent avoir une impulsion p très supérieure à P_0 , puisque p n'est limitée que par la condition $\Gamma'(p)\tau \leq 1$, exprimant que l'atome reste piégé pendant τ . La distribution $\mathcal{P}(\vec{p})$ des atomes piégés peut donc avoir des ailes qui s'étendent jusqu'à P_{trap} . Quelle est l'importance de ces ailes? Dans la sphère de rayon P_0 ($|\vec{p}| < P_0$) ou hors de cette sphère ($P_0 < |\vec{p}| < P_{trap}$)? Quelle est la proportion d'atomes refroidis?
- On pourrait être tenté de faire un raisonnement un peu plus élaboré, reposant sur l'idée que chaque atome d'impulsion \vec{p} passe dans le piège un temps $\tau(\vec{p})$ de l'ordre de $\tau_0 P_0^2 / p^2$. Plus $|\vec{p}|$ est petit, plus longtemps l'atome reste piégé. Comme l'arrosage du piège à l'entrée est uniforme en \vec{p} , on aurait tendance à penser que la densité en \vec{p} est proportionnelle à $\tau(\vec{p})$ et varie donc comme $1/p^2$ (la courbe étant tronquée pour $p < P_0$ puisque τ ne peut dépasser Θ). Un tel raisonnement reviendrait en fait à confondre moyenne temporelle et moyenne d'ensemble, et nous avons vu dans le cours VII qu'il n'est pas toujours correct. Une analyse plus approfondie est donc nécessaire.

5.2 Etablissement de l'expression donnant $\mathcal{P}(p)$

Hypothèses simplificatrices

- La figure 2 rappelle les variations de $\Gamma'(p)$ avec le module p de l'impulsion. Pour simplifier, on suppose que la dépendance en p^2 de $\Gamma'(p)$ demeure valable jusqu'à ce que $\Gamma'(p)$ atteigne son palier $1/\tau_0$ en $p = P_0$



$$\begin{cases} \Gamma'(p) = \frac{1}{\tau_0} \left(\frac{p}{P_0}\right)^2 & \text{si } p < P_0 \\ \Gamma'(p) = \frac{1}{\tau_0} & \text{si } p \geq P_0 \end{cases} \quad (8.4)$$

- Le piège est défini par $p < P_{trap}$, avec comme dans le cours V $P_{trap} < P_0$, tel que $\tau_0 P_0^2 = \tau_{trap} P_{trap}^2$ (8.5)

La valeur de $\Gamma'(p)$ pour $p = P_{trap}$ est notée $1/\tau_{trap}$, τ_{trap} étant le temps de piégeage le plus court. Comme les points $(1/\tau_0, P_0)$ et $(1/\tau_{trap}, P_{trap})$ sont sur la même parabole, on a

$$\tau_0 P_0^2 = \tau_{trap} P_{trap}^2 \quad (8.6)$$

- Il sera commode pour la suite de considérer des dépendances de $\Gamma'(p)$ plus générales que la dépendance parabolique donnée en (8.4) :

$$\Gamma'(p) = \frac{1}{\tau_0} \left(\frac{p}{P_0}\right)^\alpha \quad (8.7)$$

Avec ce nouvel exposant α , les équations (8.3) et (8.6) doivent être modifiées et deviennent

$$P_\theta = P_0 \left(\frac{\tau_0}{\theta} \right)^{1/\alpha} \tag{8.8}$$

$$\tau_0 P_0^\alpha = \tau_{\text{trap}} P_{\text{trap}}^\alpha \tag{8.9}$$

- Enfin, nous supposons que le lien entre l'impulsion p d'un atome piégé et le temps $\tau(p)$ pendant lequel cet atome peut rester piégé est déterministe

$$\tau(p) = \frac{1}{\Gamma'(p)} = \tau_0 \left(\frac{P_0}{p} \right)^\alpha \tag{8.10}$$

Distributions $\mathcal{P}(p)$ du module de l'impulsion

- La loi d'arrosage calculée dans le § 3 du cours VII donne la probabilité par unité de temps $E(t)$ pour qu'un atome entre dans le piège à l'instant t . Comme $P_{\text{trap}} < \hbar k$, l'arrosage du piège est uniforme (voir § 4 du cours V), et la probabilité pour que l'atome entre dans le piège avec le module de son impulsion compris entre p et $p+dp$ vaut $\Pi(p)dp$ où

$$\Pi(p) = \frac{D p^{D-1}}{P_{\text{trap}}^D} \tag{8.11}$$

D étant la dimension d'espace. On en déduit que $\Pi(p) E(t) dp dt$ est la probabilité pour qu'un atome entre dans le piège entre t et $t+dt$, avec le module de son impulsion compris entre p et $p+dp$

- Considérons alors les atomes se trouvant dans le piège à l'instant θ . Un atome d'impulsion p a pu entrer pour la dernière fois à n'importe quel instant $\theta - \tau$ pourvu que τ soit inférieur à $\tau(p)$. Si τ était supérieur à $\tau(p)$, l'atome aurait certainement quitté le piège avant l'instant θ . Deux cas sont alors à considérer suivant que $p > P_\theta$ ou $p < P_\theta$, P_θ étant défini par (8.8) qui exprime que $\tau(P_\theta) = \theta$. Si $p > P_\theta$, on a $\tau(p) < \theta$ et les atomes d'impulsion p se trouvant dans le piège à l'instant θ peuvent y être entrés pour la dernière fois à n'importe quel instant compris entre θ et $\theta - \tau(p)$. Si $p < P_\theta$, $\tau(p) > \theta$ et les atomes correspondants peuvent être entrés dans le piège pour la dernière fois à n'importe quel instant entre 0 et θ . On en déduit

$$\mathcal{P}(p, \theta) = D \frac{p^{D-1}}{P_{\text{trap}}^D} \left[Y(p - P_\theta) \int_0^{\tau(p)} E(\theta - \tau) d\tau + Y(P_\theta - p) \int_0^\theta E(\theta - \tau) d\tau \right] \tag{8.12}$$

où $Y(x)$ est la fonction saut.

Remarque

Calculons à partir de (8.12) la probabilité $\int_0^{P_{\text{trap}}} dp \mathcal{P}(p, \theta)$ pour qu'un atome se trouve dans le piège à l'instant θ avec n'importe quelle valeur de p (nécessairement comprise entre 0 et P_{trap} puisque l'atome est piégé). On a à faire une intégrale double sur τ et sur p . Dans l'intégration sur p on peut changer de variable et passer de p à $\tau'(p)$ donné par (8.10). En utilisant $\Pi(p) |dp| = P(\tau') |d\tau'|$, en utilisant (8.11) (et en permutant le nom des variables $\tau \leftrightarrow \tau'$), on tombe sur la même intégrale double que celle définissant $f(\theta)$ [Eq. 7.16 du cours VII]. On a donc bien

$$f(\theta) = \int_0^{P_{\text{trap}}} dp \mathcal{P}(p, \theta) \tag{8.13}$$

où $f(\theta)$ est la proportion d'atomes piégés. On vérifie bien ainsi que $\mathcal{P}(p, \theta)$ est correctement normalisée.

Distribution d'une composante de l'impulsion.

- Soit $\mathcal{P}(\vec{p})$ la distribution des extrémités du vecteur \vec{p} . Pour calculer, par exemple à 3 dimensions, la distribution des valeurs possibles de p_x , il faudrait intégrer $\mathcal{P}(p_x, p_y, p_z)$ sur toutes les valeurs possibles de p_y et p_z . Plutôt que d'effectuer un tel calcul, nous nous limiterons ici à étudier les variations de $\mathcal{P}(\vec{p})$ le long de l'axe x en considérant la fonction de p_x :

$$\pi(p_x) = \mathcal{P}(p_x, p_y=0, p_z=0) \tag{8.14}$$

- Pour simplifier encore les calculs, nous supposons que $\mathcal{P}(\vec{p})$ a la symétrie sphérique et ne dépend que du module p de \vec{p} . On peut alors aisément, pour $D=1, 2$ ou 3 , exprimer $\pi(p_x)$ en fonction de la distribution $\mathcal{P}(p)$ du module p de \vec{p} écrite en 8.12

Introduisons la fonction

$$\mathcal{Q}(p, \theta) = \frac{\mathcal{P}(p, \theta)}{p^{D-1}} = \frac{D}{p_{\text{trap}}^D} \left[\gamma(p-p_\theta) \int_0^{p_\theta} E(\theta-\tau) d\tau + \gamma(p_\theta-p) \int_0^p E(\theta-\tau) d\tau \right] \tag{8.15}$$

Des équations

$$D=1 \quad 2 dp_x \pi(p_x) = \mathcal{P}(p=|p_x|) dp_x \tag{8.16.a}$$

$$D=2 \quad 2\pi|p_x| dp_x \pi(p_x) = \mathcal{P}(p=|p_x|) dp_x \tag{8.16.b}$$

$$D=3 \quad 4\pi p_x^2 dp_x \pi(p_x) = \mathcal{P}(p=|p_x|) dp_x \tag{8.16.c}$$

on déduit (en se limitant à $p_x > 0$)

$$D=1 \quad \pi(p_x, \theta) = \mathcal{Q}(p_x, \theta) / 2 \tag{8.17.a}$$

$$D=2 \quad \pi(p_x, \theta) = \mathcal{Q}(p_x, \theta) / 2\pi \tag{8.17.b}$$

$$D=3 \quad \pi(p_x, \theta) = \mathcal{Q}(p_x, \theta) / 4\pi \tag{8.17.c}$$

Il suffit donc de calculer $\mathcal{Q}(p, \theta)$ pour obtenir, au moyen de 8.15 et 8.17 les expressions de $\mathcal{P}(p, \theta)$ et $\pi(p_x, \theta)$ à n'importe quelle dimension.

5.3 Etude du cas où $\langle \tau \rangle$ est infini et $\langle \hat{\tau} \rangle$ fini : $\mu < 1$ $\hat{\mu} > 1$

Calcul de $\mathcal{Q}(p, \theta)$

- Pour $\mu < 1$ et $\hat{\mu} > 1$, il faut utiliser l'expression (7.12) de $E(t)$. Le préfacteur B de $P(\tau) = B/\tau^{1+\mu}$ est égal ici à $\mu \tau_{\text{trap}}^\mu$

$$E(t) = \frac{\mu \sin \pi \mu}{\pi B} t^{\mu-1} = \frac{\sin \pi \mu}{\pi \tau_{\text{trap}}^\mu} t^{\mu-1} \tag{8.18}$$

- On en déduit

$$\int_0^\theta E(\theta-\tau) d\tau = \frac{\sin \pi \mu}{\pi \mu} \frac{\theta^\mu}{\tau_{\text{trap}}^\mu} \tag{8.19}$$

$$\int_0^{p_\theta} E(\theta-\tau) d\tau = \frac{\sin \pi \mu}{\pi \mu} \frac{1}{\tau_{\text{trap}}^\mu} \left[\theta^\mu - (\theta - \tau(p))^\mu \right] \tag{8.20}$$

ce qui, reporté dans (8.15), donne

$$\varphi(p, \theta) = D \frac{\sin \pi \mu}{\pi \mu} \frac{1}{\tau_{\text{trap}}^\mu P_{\text{trap}}^D} \left\{ Y(p-p_\theta) [\theta^\mu - (\theta - \tau(p))^\mu] + Y(p_\theta - p) \theta^\mu \right\} \quad (8.21)$$

- Rappelons que l'exposant μ de la distribution $P(\tau)$ est lié à l'exposant α de l'expression (8.7) de $P'(p)$ et à la dimension d'espace D par la relation 5.22

$$\mu = \frac{D}{\alpha} \quad (8.22)$$

Compte tenu de (8.9), on peut donc écrire

$$\tau_{\text{trap}}^\mu P_{\text{trap}}^D = [\tau_{\text{trap}}^\alpha P_{\text{trap}}^\alpha]^\mu = \tau_0^\mu P_0^D \quad (8.23)$$

- Mettons θ^μ en facteur dans l'accolade de (8.21) et utilisons $\tau(p)/\theta = (p_\theta/p)^\alpha$ qui découle de (8.8) et (8.10). Réécrivons enfin θ en fonction de p_θ grâce à (8.8)

$$\theta = \tau_0 \left(\frac{p_\theta}{p} \right)^\alpha \quad (8.24)$$

On aboutit ainsi à l'expression suivante de $\varphi(p, \theta)$

$$\varphi(p, \theta) = \frac{\sin \pi \mu}{\pi \mu} \frac{D}{P_\theta^D} \left\{ Y(p-p_\theta) \left[1 - \left(1 - \left(\frac{p_\theta}{p} \right)^\alpha \right)^\mu \right] + Y(p_\theta - p) \right\} \quad (8.25)$$

On constate que P_{trap} et τ_{trap} ont disparu des équations

Allure des variations avec p de $\varphi(p, \theta)$ et $\mathcal{P}(p, \theta)$

- Pour $p < p_\theta$, l'accolade de (8.25) se réduit à $Y(p_\theta - p) = 1$ et on a

$$\varphi(p < p_\theta, \theta) = \varphi_M = \frac{\sin \pi \mu}{\pi \mu} \frac{D}{P_\theta^D} = \frac{\sin \pi \mu}{\pi \mu} \frac{D}{P_0^D} \frac{\theta^\mu}{\tau_0^\mu} \quad (8.26)$$

- Pour $p > p_\theta$, l'accolade de (8.25) se réduit à

$$\left\{ \right\} = 1 - \left[1 - \left(\frac{p_\theta}{p} \right)^\alpha \right]^\mu \quad (8.27)$$

• Pour p voisin de p_θ , on peut écrire

$$\left(\frac{p_\theta}{p} \right)^\alpha = \left[1 + \frac{p_\theta - p}{p} \right]^\alpha \simeq 1 - \alpha \frac{p - p_\theta}{p_\theta} \quad (8.28)$$

de sorte que

$$\left\{ \right\} \simeq 1 - \alpha^\mu \left(\frac{p - p_\theta}{p_\theta} \right)^\mu \quad (8.29)$$

Comme $\mu < 1$, la courbe donnant $\varphi(p)$ décroît à partir de $p = p_\theta$ avec une tangente verticale

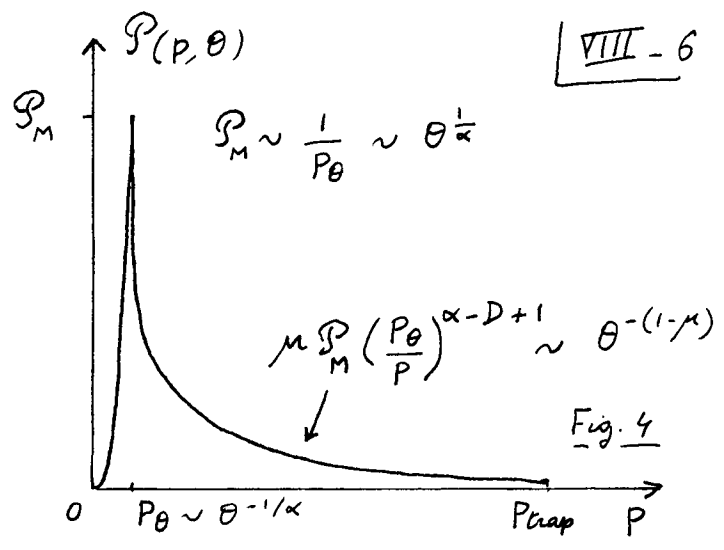
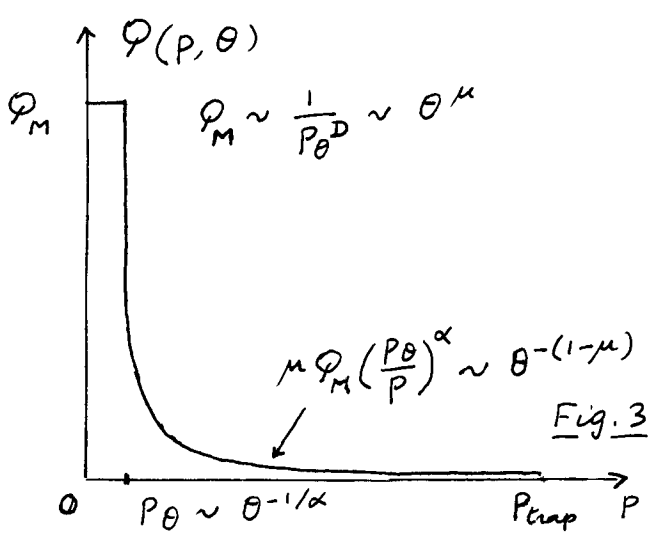
• Pour $p \gg p_\theta$, c'est à dire dans les ailes de $\varphi(p, \theta)$, on a

$$\left[1 - \left(\frac{p_\theta}{p} \right)^\alpha \right]^\mu \simeq 1 - \mu \left(\frac{p_\theta}{p} \right)^\alpha \quad (8.30)$$

de sorte que l'accolade de (8.25) se réduit à $\mu \left(\frac{p_\theta}{p} \right)^\alpha$. On a donc

$$\varphi(p \gg p_\theta, \theta) = \frac{\sin \pi \mu}{\pi \mu} \frac{D}{P_\theta^D} \mu \left(\frac{p_\theta}{p} \right)^\alpha = \mu \varphi_M \left(\frac{p_\theta}{p} \right)^\alpha \quad (8.31)$$

- Tous ces résultats sont regroupés sur la figure 3. Si l'on prenait une distribution de valeurs possibles de $\tau(p)$ pour un p donné, au lieu de la relation déterministe (8.10), les points anguleux de cette courbe seraient "arrondis".



- Nous avons aussi représenté sur la figure 4 les variations avec p de la distribution $P(p, \theta)$ du module p , qui s'obtient en multipliant $Q(p, \theta)$ par p^{D-1} . $P(p, \theta)$ croît entre 0 et p_θ , comme une loi de puissance en p^{D-1} et atteint en $p = p_\theta$ sa valeur maximale

$$P(p_\theta, \theta) = P_M = Q_M p_\theta^{D-1} = \frac{\sin \pi \mu}{\pi \mu} \frac{D}{p_\theta} = \frac{\sin \pi \mu}{\pi \mu} \frac{D}{p_0} \left(\frac{\theta}{T_0}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \quad (8.32)$$

$$P(p < p_\theta, \theta) = P_M \left(\frac{p}{p_\theta}\right)^{D-1} \quad (8.33)$$

Puis, pour $p > p_\theta$, $P(p, \theta)$ décroît en partant avec une tangente verticale, puis en variant dans les ailes comme :

$$P(p \gg p_\theta, \theta) \sim \mu P_M \left(\frac{p_\theta}{p}\right)^{\alpha-D+1} \quad (8.34)$$

Largeur de la distribution en impulsion $P(\vec{p}, \theta)$

- Les variations de $P(\vec{p}, \theta)$ lorsque \vec{p} se déplace le long de l'axe x sont données, d'après (8.17), par $Q(p_x, \theta)$ à un facteur près. On voit clairement sur la figure 3 que ces variations font apparaître un pic de largeur p_θ . Comme p_θ est donné par l'équation (8.2), on retrouve le résultat obtenu à partir des arguments qualitatifs du § 5.1 page VIII-1.

- Pour voir si p_θ caractérise effectivement la distribution en impulsion $P(\vec{p}, \theta)$ des atomes piégés, il faut maintenant calculer la proportion d'atomes ayant leur impulsion \vec{p} dans la sphère de rayon p_θ . Nous appellerons une telle proportion d'atomes refroidis $r(\theta)$. On sait déjà (voir § 4.3 du cours VII) que pour $\mu < 1$ et $\tilde{\mu} > 1$, la proportion d'atomes piégés $f(\theta)$ tend vers 1 si $\theta \rightarrow \infty$. Si $r(\theta) \approx f(\theta) \approx 1$, la contribution des ailes de $P(\vec{p}, \theta)$ [$p > p_\theta$] sera négligeable et p_θ sera une bonne caractérisation aussi bien des atomes piégés que des atomes refroidis.

Contribution des ailes - Proportion $r(\theta)$ des atomes refroidis

- Notons tout de suite que les ailes de $Q(p, \theta)$ et de $P(p, \theta)$ varient en $1/\theta^{1-\mu}$ et tendent donc vers 0 quand $\theta \rightarrow \infty$ (puisque $\mu < 1$)
- Pour calculer $r(\theta)$, il est plus commode d'utiliser $P(p, \theta)$ qui donne la distribution du module p de \vec{p} . D'après (8.33)

$$r(\theta) = \int_0^{p_\theta} P(p, \theta) dp = P_M \frac{p_\theta}{D} = \frac{\sin \pi \mu}{\pi \mu} \quad (8.35)$$

- On voit ainsi que $r(\theta)$ peut atteindre des valeurs appréciables, de l'ordre de 1 si $\pi\mu < 1$. En fait, on peut montrer que tous les atomes piégés sont dans une sphère de rayon P_m égal à quelques P_θ . En effet, comme $\mu < 1$, on a, d'après (8.22), $D < \alpha$, de sorte que les ailes de $\mathcal{P}(p, \theta)$ décroissent, d'après (8.34), plus vite que $1/p$. L'intégrale de $\mathcal{P}(p, \theta)$ converge donc, et on peut majorer la proportion d'atomes ayant une valeur de p comprise entre P_m et P_{trap} en étendant la borne supérieure de l'intégrale de P_{trap} à $+\infty$.

$$\int_{P_m}^{P_{\text{trap}}} \mathcal{P}(p, \theta) dp < \int_{P_m}^{\infty} \mathcal{P}(p, \theta) dp = \mu P_m \int_{P_m}^{\infty} \left(\frac{P_\theta}{p}\right)^{\alpha-D+1} dp$$

$$= \frac{\sin \pi\mu}{\pi\mu} \frac{D}{\alpha-D} \left(\frac{P_\theta}{P_m}\right)^{\alpha-D} \quad (8.36)$$

Preons pour fixer les idées $D=1$, $\alpha=2$ et donc $\mu=1/2$, $P_m=5P_\theta$ [de manière à pouvoir utiliser (8.34)]. L'équation (8.36) montre alors que la proportion d'atomes piégés ayant $p > 5P_\theta$ est inférieure à $2/5\pi \approx 10\%$.

- En conclusion, on peut donc dire que pour $\mu < 1$ et $\hat{\mu} > 1$, les ailes de $\mathcal{P}(\vec{p}, \theta)$ ont une contribution négligeable pour la proportion d'atomes piégés et que P_θ caractérise aussi bien les atomes piégés que les atomes refroidis.

Densité en $\vec{p}=\vec{0}$. Hauteur du pic

- La densité en $\vec{p}=\vec{0}$ dans l'espace des \vec{p} est donnée par $\mathcal{P}(\vec{p}=\vec{0}, \theta) = \pi_x(P_x=0, \theta)$. De (8.17) et (8.26), on déduit alors

$$\mathcal{P}(\vec{p}=\vec{0}, \theta) = \frac{\sin \pi\mu}{\pi\mu} \frac{1}{\lambda_D P_\theta^D} = \frac{\sin \pi\mu}{\pi\mu} \frac{1}{V_D(P_\theta)} \quad (8.37)$$

où

$$\lambda_{D=1} = 2 \quad \lambda_{D=2} = \pi \quad \lambda_{D=3} = \frac{4\pi}{3} \quad (8.38)$$

- En fait, $V_D(P_\theta) = \lambda_D P_\theta^D$ n'est autre que le volume à D dimensions d'une "sphère" de "rayon" P_θ (intervalle $-P_\theta, P_\theta$ pour $D=1$, de longueur $2P_\theta$; disque de surface πP_θ^2 pour $D=2$, sphère de rayon $4\pi P_\theta^3/3$ pour $D=3$). L'équation (8.37) exprime donc tout simplement que la densité en $\vec{p}=\vec{0}$ obtenue après un temps θ , correspond à $\sin \pi\mu / \pi\mu$ atomes dans un volume $V_D(P_\theta)$ de rayon P_θ .
- Quand θ croît, la densité en $\vec{p}=\vec{0}$, qui n'est autre à un coefficient près que la hauteur du pic de la figure 3 croît comme $1/P_\theta^D$, c'est-à-dire comme θ^μ .

Gain de densité dans l'espace des phases

- En général, les atomes auxquels on applique le refroidissement subreent ont été au préalable piégés et prérefroidis. Ils occupent dans l'espace des positions un volume de rayon de l'ordre d'une fraction de mm, et dans l'espace des impulsions un volume de rayon P_{Max} de l'ordre de 3 à 4 tek. Leur vitesse de déplacement est alors suffisamment faible pour qu'on puisse négliger les variations du volume spatial qu'ils occupent pendant le temps θ [voir Ref [2] §V, 5.4.3].
- Le gain dans l'espace des phases réalisé après un temps θ coïncide alors avec le rapport des volumes dans l'espace des \vec{p}

$$\text{Gain dans l'espace des phases après un temps } \theta = \left(\frac{P_{\text{Max}}}{P_\theta}\right)^D \quad (8.39)$$

5.4 Etude du cas où $\langle \tau \rangle$ et $\langle \hat{\tau} \rangle$ sont finis (μ et $\hat{\mu} > 1$)

VIII-8

- Nous supposons maintenant $\mu > 1$, c.-à-d. $D > \alpha$. C'est le cas par exemple de VSCT à 3 dimensions : $D=3, \alpha=2$, donc $\mu = D/\alpha = 3/2$. La distribution des temps de piègeage $P(\tau) = \mu \tau_{\text{trap}}^\mu / \tau^{1+\mu}$ a alors un 1^{er} moment fini

$$\langle \tau \rangle = \int_{\tau_{\text{trap}}}^{\infty} d\tau \tau P(\tau) = \mu \tau_{\text{trap}}^\mu \int_{\tau_{\text{trap}}}^{\infty} \tau^{-\mu} d\tau = \frac{\mu}{\mu-1} \tau_{\text{trap}} \quad (8.40)$$

- Rappelons également l'expression de $\langle \hat{\tau} \rangle$ avec une diffusion confinée par des murs à $p = p_{\text{max}}$ [cf § 5.3 du cours V].

$$\langle \hat{\tau} \rangle = \tau_0 \left(\frac{p_{\text{max}}}{p_{\text{trap}}} \right)^D \quad (8.41)$$

Calcul de $\varphi(p, \theta)$

- Il faut ici utiliser l'expression (7.11) de $E(t)$

$$E(t) = \frac{1}{\langle \tau \rangle + \langle \hat{\tau} \rangle} \quad (8.42)$$

- Reportons (8.42) dans (8.15). Les intégrales sur τ valent $\tau(p)$ et θ , respectivement. Utilisant (8.10) et (8.24), on obtient alors

$$\begin{aligned} \varphi(p, \theta) &= \frac{D}{p_{\text{trap}}^D} \frac{1}{\langle \tau \rangle + \langle \hat{\tau} \rangle} \left[Y(p-p\theta) \tau(p) + Y(p\theta-p) \theta \right] \\ &= \frac{D}{p_{\text{trap}}^D} \frac{\tau_0}{\langle \tau \rangle + \langle \hat{\tau} \rangle} \left[Y(p-p\theta) \left(\frac{p_0}{p} \right)^\alpha + Y(p\theta-p) \left(\frac{p_0}{p\theta} \right)^\alpha \right] \end{aligned} \quad (8.43)$$

- On voit apparaître au dénominateur $p_{\text{trap}}^D (\langle \tau \rangle + \langle \hat{\tau} \rangle)$ qu'on veut transformer grâce à (8.40) et (8.41)

$$\begin{aligned} p_{\text{trap}}^D (\langle \hat{\tau} \rangle + \langle \tau \rangle) &= \tau_0 p_{\text{max}}^D + \frac{\mu}{\mu-1} \underbrace{\tau_{\text{trap}} p_{\text{trap}}^\alpha}_{= \tau_0 p_0^\alpha \text{ d'après (8.9)}} p_{\text{trap}}^{D-\alpha} \\ &= \tau_0 p_{\text{max}}^D \left[1 + \frac{\mu}{\mu-1} \left(\frac{p_0}{p_{\text{max}}} \right)^\alpha \left(\frac{p_{\text{trap}}}{p_{\text{max}}} \right)^{D-\alpha} \right] \approx \tau_0 p_{\text{max}}^D \end{aligned} \quad (8.44)$$

car $p_0 < p_{\text{max}}$ et $p_{\text{trap}} < p_{\text{max}}$. Finalement

$$\varphi(p, \theta) = \frac{D p_0^\alpha}{p_{\text{max}}^D} \left[Y(p-p\theta) \frac{1}{p^\alpha} + Y(p\theta-p) \frac{1}{p\theta^\alpha} \right] \quad (8.45)$$

On constate que p_{trap} et τ_{trap} ont disparu des équations. Par contre p_{max} est apparu, ce qui n'était pas le cas précédemment pour $\mu < 1$.

Allure des variations avec p de $\varphi(p, \theta)$ et $\mathcal{P}(p, \theta)$

- La figure 5 donne les variations de $\varphi(p, \theta)$. Comme précédemment, on a un plateau pour $p < p_0$

$$\varphi(p < p_0, \theta) = \varphi_M = \frac{D}{p_{\text{max}}^D} \left(\frac{p_0}{p\theta} \right)^\alpha = \frac{D}{p_{\text{max}}^D} \frac{\theta}{\tau_0} \quad (8.46)$$

φ_M croît donc maintenant comme θ , et non plus comme θ^μ .

- Pour $p > p_0$, φ décroît comme $1/p^\alpha$, comme pour $\mu < 1$

$$\varphi(p > p_0, \theta) = \frac{D}{p_{\text{max}}^D} \left(\frac{p_0}{p} \right)^\alpha = \varphi_M \left(\frac{p_0}{p} \right)^\alpha \quad (8.47)$$

Il apparaît clairement sur la 1^{ère} égalité (8.47) que $\varphi(p, \theta)$ est indépendant de θ pour $p > p_0$. Il y a là une différence importante avec le cas $\mu < 1$. On voit en effet sur les figures 3 et 4 que les ailes de $\varphi(p, \theta)$ et $\mathcal{P}(p, \theta)$ varient en $1/\theta^{1-\mu}$. Pour $\mu < 1$, toute la courbe $\varphi(p, \theta)$

change donc quand θ croît, les ailes diminuant et le pic augmentant.
 Par contre, pour $\mu > 1$, on a une courbe fixe indépendante de θ ,
 qu'on tronque pour $p < p_\theta$ à la valeur qu'elle atteint en $p = p_\theta$.
 Quand θ change, seule change l'abscisse p_θ en dessous de laquelle
 on tronque la courbe.

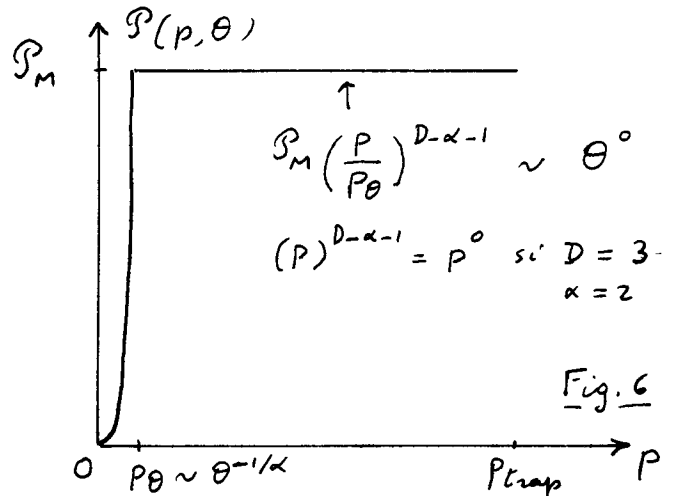
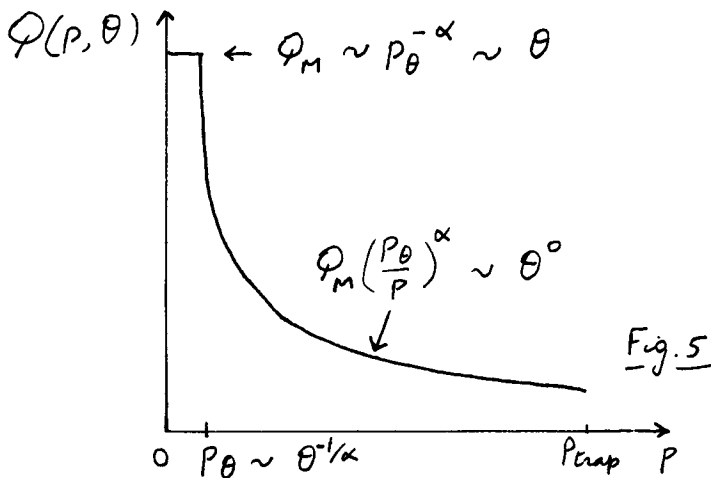
- La figure 6 donne les variations de $\mathcal{P}(p, \theta)$. Nous avons choisi
 le cas VSCPT-3D ($D=3, \alpha=2, \mu=3/2$), ce qui explique pourquoi les
 ailes, qui varient en $p^{D-\alpha-1}$ sont ici indépendantes de p .

$$\mathcal{P}(p < p_\theta, \theta) = \frac{D p^{D-1}}{P_{Max}^D} \left(\frac{p_0}{p_\theta}\right)^\alpha = \frac{D p^{D-1}}{P_{Max}^D} \frac{\theta}{\tau_0} \quad (8.48)$$

$$\mathcal{P}(p = p_\theta, \theta) = \mathcal{P}_M = \frac{D p_0^\alpha}{P_{Max}^D} p_\theta^{D-\alpha-1} \quad (8.49)$$

$$\mathcal{P}(p > p_\theta, \theta) = \frac{D p_0^\alpha}{P_{Max}^D} p^{D-\alpha-1} = \mathcal{P}_M \left(\frac{p}{p_\theta}\right)^{D-\alpha-1} \quad (8.50)$$

Comme $\varphi(p, \theta)$, $\mathcal{P}(p, \theta)$ ne dépend pas de θ pour $p > p_\theta$



Largeur de la distribution en impulsion $\mathcal{P}(\vec{p}, \theta)$

- La figure 5 montre que les variations de $\mathcal{P}(\vec{p}, \theta)$ le long d'un axe
 font apparaître un pic de largeur p_θ , avec des ailes variant en $p^{-\alpha}$

- A la différence du cas précédent ($\mu < 1$), nous allons voir cependant que ce
 pic n'est dû qu'à une faible proportion des atomes piégés.

Contribution des ailes - Proportion $r(\theta)$ des atomes refroidis.

Pour calculer le nombre d'atomes dont l'impulsion a un module
 inférieur à p_θ , utilisons (8.48)

$$r(\theta) = \int_0^{p_\theta} \mathcal{P}(p, \theta) dp = \frac{p_0^\alpha}{P_{Max}^D} p_\theta^{D-\alpha} \quad (8.51)$$

Comme $D > \alpha$, $r(\theta)$ tend vers 0 comme $p_\theta^{D-\alpha}$ quand $\theta \rightarrow \infty$, c'est à dire
 comme $1/\theta^{M-1}$. Un tel résultat apparaît d'ailleurs clairement sur la
 figure 6 correspondant au cas $D=3, \alpha=2$. \mathcal{P}_M est alors indépendant
 de p et θ et l'aire de 0 à p_θ , c.-à-d. $r(\theta)$, est négligeable devant l'aire
 de 0 à p_{trap} , c.-à-d. $f(\theta) \sim \mathcal{P}_M p_{trap}$. Si on voulait définir une largeur p_m
 caractéristique des atomes piégés, c.-à-d. telle que la moitié de ces atomes
 piégés se trouvent dans une sphère de rayon p_m , on aurait ici $p_m = p_{trap}/2$.
 Pour $\mu > 1$, la largeur p_θ ne caractérise donc que les atomes refroidis et non
 les atomes piégés.

- Comme $\mathcal{P}(\vec{p}=\vec{0}, \theta) = \Pi_x(p_x=0, \theta)$, cette densité n'est autre, à un coefficient de l'ordre de 1 près, que le maximum φ_M de la courbe de la figure 5. La densité en $\vec{p}=\vec{0}$ croît donc linéairement avec θ .
- Le fait que cette densité augmente avec θ se comprend aisément. Les atomes initialement dans le piège avec $p < p_0$ n'en sortent pas au bout d'un temps θ . Sous l'effet du recyclage, d'autres atomes tombent dans le piège dans l'intervalle $0 < p < p_0$ et y demeurent piégés. La densité en $\vec{p}=\vec{0}$ ne peut donc qu'augmenter.
- On peut dire encore que la densité d'atomes en $\vec{p}=\vec{0}$ correspond à $r(\theta)$ atomes dans un volume de l'ordre de p_0^D . En divisant (8.51) par p_0^D , on retrouve bien effectivement à un facteur près φ_M donné par (8.46). Quand $\theta \rightarrow \infty$, à la fois $r(\theta)$ et p_0^D tendent vers 0, mais $r(\theta)$ tend vers 0 moins rapidement [en $p_0^{D-\alpha}$] que p_0^D , et c'est pourquoi $r(\theta)/p_0^D$ augmente. Dans le cas $\mu < 1$ du § 5.3 précédent, $r(\theta) \rightarrow 1$ quand $\theta \rightarrow \infty$ et l'augmentation de la densité en $\vec{p}=\vec{0}$ n'est due qu'à la diminution de p_0^D .

Gain de densité dans l'espace des phases

- En supposant, comme pour $\mu < 1$, que le volume spatial occupé par les atomes change peu au cours de θ , et en utilisant le fait que le volume initial occupé par les atomes dans l'espace des \vec{p} est de l'ordre de p_{max}^D , on obtient
 Gain dans l'espace des phases après un temps $\theta \sim \frac{\varphi_M}{1/p_{max}^D} \sim \left(\frac{p_0}{p_0}\right)^\alpha$ (8.52)
- Bien que la proportion d'atomes refroidis soit faible, ce gain est appréciable. Il croît avec θ comme $(p_0)^{-\alpha}$, c-à-d comme θ . Le résultat (8.52) est important pour le refroidissement VSCPT à 3 dimensions. Il montre que, même si tous les atomes ne sont pas transférés dans le piè de largeur p_0 , la densité dans l'espace de phases augmente linéairement avec θ .

5.5 Conclusion - Importance des statistiques de Lévy

- Dans le cas $\mu > 1$ et $\hat{\mu} > 1$ où $\langle \tau \rangle$ et $\langle \hat{\tau} \rangle$ sont finis, nous avons trouvé que la distribution d'impulsion $\varphi(p, \theta)$ le long d'un axe est décrite par une courbe indépendante de θ , qui est simplement tronquée pour $p < p_0$. Pour $p > p_0$, toute la dépendance en p de $\varphi(p, \theta)$ est contenue dans $\tau(p)$ [voir la 1^{ère} ligne de (8.43)]: Chaque impulsion intervient dans $\varphi(p)$ avec un poids égal à $\tau(p)$, à un coefficient indépendant de p près. On retrouve là le résultat du raisonnement esquissé à la fin du § 5.1. Un tel raisonnement est valable ici parce que le système a atteint, au bout d'un temps θ suffisamment long, un état stationnaire: $\varphi(p, \theta)$ est indépendant de θ pour $p > p_0$; seuls les atomes $p < p_0$ continuent à évoluer quand θ croît, mais leur poids $r(\theta)$ est de plus en plus négligeable.

- La situation est radicalement différente pour $\mu < 1$ et $\hat{\mu} > 1$. Le système n'atteint jamais un état stationnaire. Toute la courbe $\varphi(p, \theta)$ continue à évoluer quel que soit θ . De plus, tous les atomes viennent s'accumuler dans une sphère de rayon P_{\max} de l'ordre de quelques P_0 , de sorte que la quasi-totalité des atomes piégés sont en train de subir des phases de piégeage de l'ordre d'une fraction non négligeable du temps total θ . Pour comprendre plus ou moins un tel résultat, revenons aux figures 3, a, b, c du cours VI (la longueur spatiale des pas étant remplacé par la durée temporelle des phases de piégeage). Imaginons un ensemble de telles simulations. Pour chacune d'elles, 3 ou 4 phases de piégeage "écrasent" toutes les autres. Si l'on se place à un instant donné, la probabilité de se trouver à cet instant dans une phase de piégeage longue est donc très voisine de 1. La moyenne d'ensemble effectuée à l'instant θ va donc donner une répartition d'atomes dont la plupart sont en train de subir une phase de piégeage longue, durant un temps de l'ordre d'une fraction importante de θ . L'impulsion de la majorité des atomes ne peut donc être très supérieure à P_0 . On voit ainsi que la possibilité de caractériser la totalité de atomes piégés par P_0 est une conséquence directe de la propriété fondamentale de sommes de Lévy d'être dominées par un petit nombre de termes, de l'ordre de la somme totale.

- Un dernier point mérite d'être noté. Pour $\mu < 1$ et $\hat{\mu} > 1$, P_{\max} n'apparaît jamais dans les prédictions concernant les atomes piégés et décrits par $f(\theta)$, $r(\theta)$, $\varphi(p, \theta)$, $P(p, \theta)$. [Si P_{\max} apparaît dans l'équation (8.39), c'est uniquement parce qu'on compare la densité en $\vec{p} = \vec{0}$ obtenue après un temps θ à la densité initiale, de l'ordre de $1/P_{\max}^3$]. Ceci montre qu'une description détaillée du refroidissement Sisyphe n'est pas essentielle dans le cas $\mu < 1$ pour comprendre les propriétés asymptotiques du refroidissement subrecoil. Pourvu que $\langle \hat{\tau} \rangle$ soit fini et petit devant θ , les détails du recyclage dans le piège importent peu. Par contre, pour $\mu > 1$ et $\hat{\mu} > 1$, $\langle \tau \rangle$ et $\langle \hat{\tau} \rangle$ sont tous les deux finis, et les résultats concernant les atomes piégés ou refroidis dépendent de $\langle \hat{\tau} \rangle$, et donc de P_{\max} .

Références

- [1] A. Aspect, E. Arimondo, R. Kaiser, N. Vansteenkiste, C. Cohen-Tannoudji, JOSA B6, 2112 (1989)
- [2] F. Bardou, Thèse (Paris 1995).

① Introduction

- L'analyse du refroidissement subrecoil en termes de lois de Lévy a permis dans les cours précédents d'établir un certain nombre de résultats quantitatifs sur les propriétés asymptotiques d'un tel refroidissement : proportion d'atomes piégés ; forme de la distribution d'impulsion ; largeur et hauteur des structures étroites apparaissant dans cette distribution ; proportion d'atomes contribuant à ces structures étroites ; densité d'atomes dans l'espace des phases ...

- Nous allons montrer maintenant comment ces résultats peuvent guider le choix des paramètres expérimentaux conduisant au meilleur refroidissement possible, compte tenu des contraintes de l'expérience. Nous allons étudier plus particulièrement l'optimisation de 2 paramètres

(i) L'exposant α apparaissant dans la dépendance en impulsion, au voisinage de $p=0$, du temps d'excitation $\Gamma'(p)$: $\Gamma'(p) = \frac{1}{\tau_0} \left(\frac{p}{p_0}\right)^\alpha$.

(ii) La largeur p_0 du "trou Raman" apparaissant dans les variations de $\Gamma'(p)$ avec p et la hauteur $1/\tau_0$ du palier de $\Gamma'(p)$ pour $p > p_0$. Dans le refroidissement VSCPT, p_0 et τ_0 sont d'ailleurs reliés tous 2 à la largeur Γ'_c de l'état fondamental (Γ'_c : largeur radiative de l'état couplé). On a en effet

$$k p_0 / M \simeq \Gamma'_c \quad (9.1.a) \quad 1/\tau_0 \simeq \Gamma'_c \quad (9.1.b)$$

de sorte que p_0 et τ_0 ne sont pas indépendants mais liés par

$$p_0 \simeq a \frac{M}{k} \frac{1}{\tau_0} \quad (9.2)$$

où a est un coefficient sans dimension, de l'ordre de quelques unités.

- En fait, seules les expériences de refroidissement Raman ont permis jusqu'ici de faire varier α . Toutes les expériences utilisant l'effet VSCPT correspondent à $\alpha = 2$. Nous allons donc, dans ce cours, insister surtout sur l'optimisation du refroidissement Raman.

② Brefs rappels sur le refroidissement Raman 1D [Refs [1],[2]]

Schéma de niveaux (Fig. 1a)

Atome avec 2 niveaux hyperfins 1 et 2, séparés par $\hbar \omega_{hfS}$, et un niveau excité e

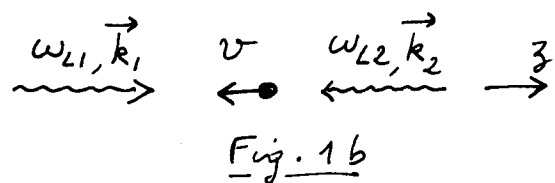
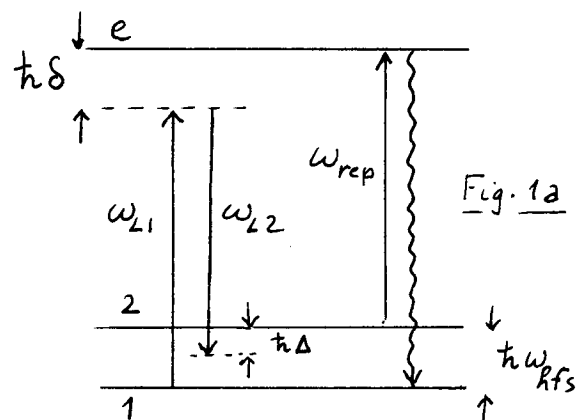
Lasers Raman (Fig. 1b)

- 2 faisceaux laser ω_{L1}, \vec{k}_1 et ω_{L2}, \vec{k}_2 se propageant dans des sens opposés et induisant des transitions Raman stimulées de 1 vers 2 et de 2 vers 1.

- Si le désaccord optique $\hbar \delta$ (voir Fig. 1a) est suffisamment grand, couplage hermitique entre 1 et 2 décrit par la fréquence de Rabi

$$\Omega = \frac{\Omega_1 \Omega_2}{2\delta} \quad (9.3)$$

où Ω_1 et Ω_2 sont les fréquences de Rabi associées à chacune des 2 ondes ω_{L1} et ω_{L2} (voir Ref [3])



Selectivité en vitesse des transitions Raman stimulées 1 → 2

- Comme \vec{k}_1 et \vec{k}_2 ont des sens opposés, les effets Doppler des 2 ondes s'ajoutent dans la transition Raman et la condition de résonance Raman s'écrit, en notant Δ le désaccord par rapport à une telle résonance (voir Fig. 1) et en posant $k = |\vec{k}_1| \approx |\vec{k}_2|$

$$\Delta = \omega_{L1} - \omega_{L2} - \omega_{hfs} = 2k v + 2\omega_R \tag{9.4}$$

Le terme en $2\omega_R$ (où $\omega_R = \hbar k^2 / 2M$) est une correction due à l'énergie de recul qui apparaît lorsqu'on résout les équations de conservation de l'énergie et de l'impulsion totales lors de la transition Raman.

- Δ étant fixé, les 2 ondes n'induisent de transitions (Raman stimulé) résonnantes que pour une valeur de v bien définie, donnée par (9.4). Comme les largeurs des niveaux fondamentaux 1 et 2 sont très faibles, la résonance Raman est très étroite et la sélectivité en vitesse qui lui est associée très grande (cf. Ref [3]).

- Si l'on choisit $\Delta - 2\omega_R < 0$, la résonance Raman se produit, d'après (9.4) pour $v < 0$ (cas représenté sur la Fig. 1). Comme le changement d'impulsion de l'atome lors de la transition Raman stimulée $1 \rightarrow 2$ est égal à $\hbar(\vec{k}_1 - \vec{k}_2)$, l'atome subit un transfert d'impulsion opposé à son impulsion initiale $M\vec{v}$. Il est donc ralenti et poussé vers $p=0$. Si les directions \vec{k}_1 et \vec{k}_2 des 2 ondes ω_{L1} et ω_{L2} sont échangées et qu'on garde une valeur négative pour $\Delta - 2\omega_R$, la transition Raman sera résonnante pour des atomes de vitesse v positive et le transfert d'impulsion $\hbar(\vec{k}_1 - \vec{k}_2)$, qui sera alors négatif, ramènera toujours les atomes vers $p=0$.

- Avec un choix approprié du désaccord Δ et des directions de propagation (opposées) des 2 ondes, on peut donc agir sur n'importe quelle classe de vitesse avec une grande sélectivité et ramener toujours les atomes vers $p=0$.

Retour de l'état 2 vers l'état 1 par transitions Raman spontanées

- Si l'excitation laser est continue, et si la condition (9.4) est satisfaite, l'atome effectue une oscillation de Rabi entre les états 1 et 2, avec une fréquence Ω donnée par (9.3)

- Imaginons maintenant que l'on fasse une "impulsion Raman stimulée π ". A la fin de l'impulsion, l'atome est passé de 1 à 2 et a gagné une impulsion $\hbar(\vec{k}_1 - \vec{k}_2)$. Pour le ramener de 2 vers 1, on lui applique une impulsion de faisceau "repompeur" résonnante sur la transition $2 \leftrightarrow e$ [voir Fig. 1a]. Une transition Raman spontanée anti-Stokes le fait alors passer de 2 à 1 (pompage optique). Au cours d'une telle transition, l'atome gagne l'impulsion $\hbar\vec{k}_{rep}$ du faisceau repompeur (on peut choisir la direction de \vec{k}_{rep} pour continuer à pousser l'atome vers $p=0$) et perd l'impulsion $\hbar\vec{k}_{spont}$ des photons émis spontanément, et dans une direction aléatoire, lors de la transition spontanée $e \rightarrow 1$.

Séquence d'impulsions

- Série d'impulsions Raman stimulées π , suivies chacune d'une impulsion de repompage, et résonnantes successivement avec des atomes de vitesse positive et négative, les directions (opposées) de \vec{k}_1 et \vec{k}_2 étant interverties d'une impulsion à l'autre pour pousser chaque fois l'atome vers $p=0$

- Les vitesses résonnantes $\pm v_{res}$ sont progressivement diminuées d'une impulsion à l'autre, et on s'arrête pour $v_{res} \neq 0$ mais suffisamment proche de 0, pour laisser autour de $v=0$ un "trou" dans le profil d'excitation, où les atomes ne sont plus excités. C'est le changement d'impulsion aléatoire dû au photons émis spontanément lors du repompage $2 \rightarrow 1$ qui permet à certains atomes de tomber dans ce "trou" où ils se retrouvent piégés et s'accumulent. Plus v_{res} se rapproche de 0, plus l'impulsion Raman stimulée doit être étroite (en fréquence) pour que ses ailes n'excitent pas les atomes se trouvant déjà dans le piège. Plus v_{res} est loin de 0, plus on peut utiliser des impulsions larges (en fréquence) de manière à "ramasser" le plus d'atomes possible et à les pousser vers 0 [voir Fig. 2, extraite de [1], et où la courbe en traits représente la distribution initiale de vitesses).

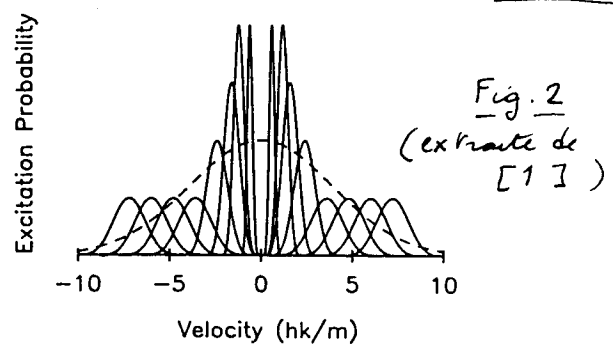


Fig. 2 (extraite de [1])

Forme des impulsions

- La figure 3, également extraite de [1], montre la probabilité de la transition Raman stimulée en fonction de l'écart à résonance Raman. Cette probabilité est mesurée expérimentalement en prenant \vec{k}_1 et \vec{k}_2 parallèles (plus de sélectivité en vitesse) et en détectant le nombre d'atomes transférés de 1 à 2 quand $\omega_L - \omega_{L2}$ varie. La courbe a est obtenue avec une impulsion "carrée" en temps. Le profil spectral correspondant montre des maxima secondaires et des zéros (fonction $\sin^2 x/x^2$). La courbe b correspond à une "impulsion de Blackman", ayant une enveloppe dont la dépendance temporelle est calculée pour minimiser la 1^{ère} bande latérale dans le profil d'excitation.

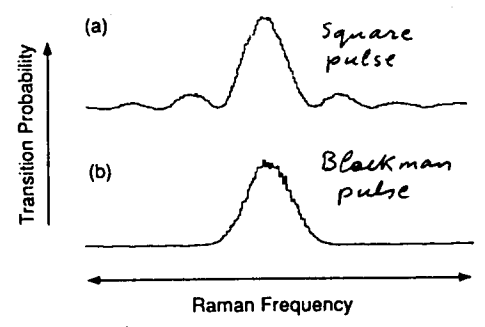


Fig. 3 (extraite de [1])

- Toutes les expériences de refroidissement Raman réalisées à ce jour, sauf celle décrite plus loin (§ 3) utilisent des impulsions de Blackman, de manière à minimiser l'excitation parasite (par les ailes des profils d'excitation des impulsions) des atomes piégés dans la zone autour de $v=0$

Recapitulations - Résultats déjà obtenus

- En résumé, comme le refroidissement VSCPT, le refroidissement Raman réalise un piège dans l'espace des impulsions, zone étroite autour de $p=0$ dans laquelle les atomes peuvent demeurer un temps très long. Les transferts d'impulsion $\hbar(\vec{k}_1, -\vec{k}_2)$ lors des transitions Raman stimulées fournissent la force ramenant les atomes vers $p=0$ (équivalent du refroidissement Sisyphus pour VSCPT). Les changements aléatoires d'impulsion dûs aux photons émis spontanément lors des processus de repompage permettent aux atomes de tomber dans le piège.

- A l'issue d'un certain nombre de cycles d'impulsions analogues à celui de la figure 2, on mesure la 1/2 largeur δp à $1/\sqrt{e}$ de la distribution finale d'impulsions. La température correspondante $k_B T/2 = \delta p^2/2M$ est comparée à la température de recul T_R définie par $k_B T_R/2 = \hbar^2 k^2/2M$

Expériences sur Na

Premières expériences à 1D [1]

$T = T_R/20 \approx 100 \text{ nK}$

Expériences suivantes à 2D [2]

$T = 0,75 T_R$

Pas de résultat subrecueil à 3D

③ Refroidissement Raman 1D avec des impulsions carrées

3-1 Pourquoi est-il intéressant de changer la forme des impulsions ?

- Revenons à l'impulsion Blackman dont le profil spectral est donné sur la figure 3b. Si ce profil est suffisamment décalé par rapport à la fréquence de résonance des atomes $\nu = 0$, la probabilité d'excitation des atomes $\nu = 0$ sera quasi-nulle et elle n'augmentera que très lentement quand ν s'écarte de la valeur 0. En fait, le but poursuivi dans les premières expériences de refroidissement Raman était de réaliser une probabilité d'excitation par unité de temps $\Gamma'(\nu) \approx \nu^\alpha$ caractérisée par un exposant α aussi grand que possible, de manière à avoir une croissance aussi lente que possible de $\Gamma'(\nu)$ autour de $\nu = 0$. En fait, on peut déterminer expérimentalement la valeur de α correspondant à une impulsion Blackman, en mesurant le nombre d'atomes excités en fonction de $\omega_{L1} - \omega_{L2}$ (\vec{k}_1 et \vec{k}_2 étant parallèles). On trouve que le meilleur ajustement à la courbe expérimentale (dans la zone entre $\nu = 0$ et la valeur correspondant à la moitié du maximum de $\Gamma'(\nu)$) est une loi en ν^4 . Donc

$$(\alpha)_{\text{Blackman}} \approx 4 \quad (9.5)$$

- On pourrait aussi bien utiliser des impulsions carrées en temps, en réglant $\omega_{L1} - \omega_{L2}$ pour que le 1^{er} zéro du profil d'excitation corresponde à la fréquence de résonance des atomes de vitesse nulle. En alternant une telle impulsion avec l'impulsion symétrique par rapport à $\nu = 0$, on réalise un profil d'excitation qui varie en ν^2 autour de $\nu = 0$

$$(\alpha)_{\text{carré}} = 2 \quad (9.6)$$

- Ainsi, le refroidissement Raman permet, en jouant sur la forme des impulsions Raman stimulées, de faire varier α . Indépendamment de la plus ou moins grande commodité de réalisation de telle ou telle forme d'impulsion, on peut alors se poser la question de la valeur optimale de α . Quelle est la valeur de α qui conduit au refroidissement le plus efficace ? C'est là que l'analyse des cours précédents en termes de lois de Lévy peut apporter des éléments de réponse quantitative.

3-2 Valeur optimale de l'exposant α

- Première remarque : Le temps moyen de retour dans le piège $\langle \hat{\tau} \rangle$ peut être considéré comme étant fini à cause des forces associées aux transferts d'impulsion dans les transitions Raman stimulées, forces qui ramènent l'atome vers $p = 0$

- Deuxième remarque : Pour que tous les atomes puissent être piégés aux temps longs, nous avons vu au cours VII qu'il faut que

$$\mu = \frac{D}{\alpha} \leq 1 \quad \longleftrightarrow \quad D \leq \alpha \quad (9.7)$$

Si $D = 1$, il faut que $\alpha \geq 1$. Un tel critère ne permet donc pas de départager les impulsions Blackman ($\alpha = 4$) et carrées ($\alpha = 2$). Toutes les deux ont $\alpha > 1$ et conduisent à $f(\theta) \rightarrow 1$ quand $\theta \rightarrow \infty$

- Comme nous l'avons vu dans le cours VIII, tous les atomes IX-5
participent alors à une structure étroite dans la distribution $P(\vec{p})$,
dont la largeur p_θ est donnée par

$$p_\theta = p_0 \left(\frac{\tau_0}{\theta} \right)^{1/\alpha} \quad (9.8)$$

où p_0, τ_0, α apparaissent dans l'expression du taux d'excitation $\Gamma'(p)$

$$\Gamma'(p) = \frac{1}{\tau_0} \left(\frac{p}{p_0} \right)^\alpha \quad (9.9)$$

Un premier point important à noter à propos de (9.8) est que la largeur p_θ des structures étroites peut être beaucoup plus petite (aux temps longs) que la largeur p_0 du trou Raman. Il n'est pas nécessaire de réaliser un trou Raman très fin pour obtenir des atomes ultrafroids. Un deuxième point qui apparaît sur (9.8) est que la décroissance de p_θ avec θ ne dépend que de l'exposant α . Elle est en $1/\theta^{1/\alpha}$. Plus α est petit, plus la largeur décroît vite avec θ . Pour $\alpha = 2$, on a une décroissance en $1/\sqrt{\theta}$ plus rapide que la décroissance en $1/\sqrt[4]{\theta}$ correspondant à $\alpha = 4$.

- Si l'on dispose d'un temps θ infini, il suffit d'attendre pour avoir tous les atomes refroidis à une température aussi basse que l'on veut. En fait, les contraintes expérimentales (chute dans le champ de pesanteur, largeur finie des faisceaux laser...) limitent θ à une valeur finie. Dans ce cas, il vaut mieux avoir α le plus petit possible, tout en respectant $\alpha \geq D$, pour avoir le maximum d'atomes dans le pic le plus fin possible.

L'analyse précédente montre donc très simplement que, à une dimension ($D=1$), les impulsions carrées sont, non seulement plus simples à réaliser que les impulsions Blackman, mais qu'elles conduisent à un refroidissement plus efficace! En fait, l'idéal serait d'avoir $\alpha = D = 1$, qui donnerait la décroissance la plus rapide de p_θ avec θ (en $1/\theta$), tout en gardant $f(\theta) = r(\theta) \approx 1$ puisque $\mu = D/\alpha = 1$.

3.3 Vérification expérimentale des idées précédentes

Des expériences ont été réalisées récemment à l'ENS pour tester les idées précédentes (Refs [5], [6]). Nous donnons une description très succincte de leur principe et des résultats obtenus. (Pour plus de détails, voir les références [5], [6]).

Expériences utilisant une seule impulsion carrée

- Une seule impulsion carrée est utilisée pour induire les transitions Raman stimulées, une fois centrée à $\nu = +4\nu_R$ (où $\nu_R = \hbar k/M$), une fois à $\nu = -4\nu_R$. Chaque impulsion Raman est suivie d'une impulsion de repompage. La durée de l'impulsion Raman, 30 μ s, est choisie pour que le 1^{er} zéro du profil spectral d'excitation corresponde à la fréquence de résonance des atomes de vitesse nulle.

- Les courbes en pointillés de la figure 4 représentent les profils d'excitation des 2 impulsions Raman centrées en $\nu = \pm 4\nu_R$. Ces profils sont mesurés expérimentalement. On voit que le trou Raman a une largeur à mi-hauteur de l'ordre de $4\nu_R$. La courbe en trait plein représente le profil de vitesse des atomes refroidis

à l'issue d'une répétition de 136 cycles (1 cycle correspond à 1 impulsion à $+4v_R$, 1 impulsion à $-4v_R$, avec bien sûr chaque fois les impulsions de repompage). On trouve que 70% des atomes se retrouvent dans ce pic, dont la $1/2$ largeur à $1/\sqrt{e}$, $\delta v \approx 0.34 v_R$ correspond à une température $T \approx T_R/10 \approx 20$ nK. Ainsi, avec une seule impulsion carrée, on obtient sur des atomes de Césium, un résultat équivalent à celui obtenu sur les mêmes atomes de Césium, par une séquence beaucoup plus complexe de 8 impulsions de Blackman à droite, puis à gauche de $v=0$, analogue à celle de la figure 2 [voir Ref [4]]. La simplification de l'expérience est considérable. On note aussi clairement sur la figure 4 que la largeur du pic d'atomes froids est nettement plus petite que la largeur du trou Raman.

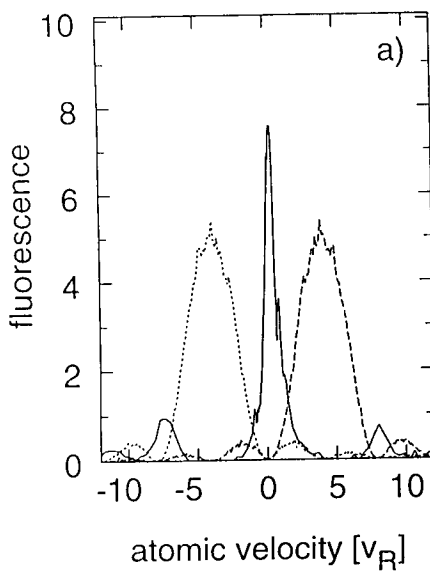


Fig. 4
(extraite de [5])

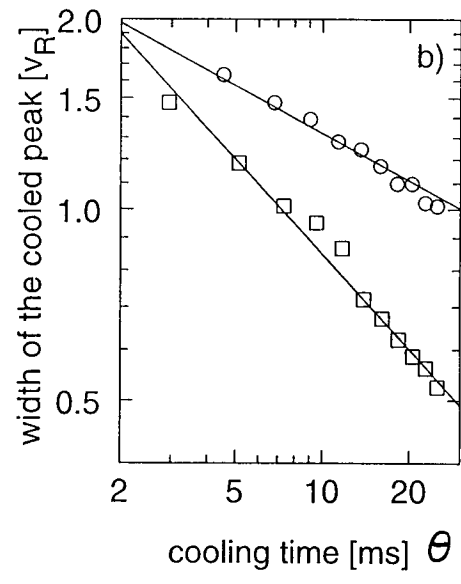


Fig. 5
(extraite de [5])

Les variations de la largeur du pic d'atomes froids avec le temps d'interaction θ ont été également mesurées (carrés de la figure 5). On trouve bien une loi en $\theta^{-1/2}$. La même expérience a été refaite avec une seule impulsion Blackman, centrée en $v=+4v_R$ puis en $v=-4v_R$, et de même largeur spectrale que l'impulsion carrée. Les résultats expérimentaux (ronds de la figure 5), confirment la variation prévue en $\theta^{-1/4}$, plus lente que celle correspondant aux impulsions carrées. Cette expérience fournit donc un test précis, pour le refroidissement Raman, de la prédiction théorique (9.8).

Expériences utilisant 2 impulsions carrées

- La formule (9.8), combinée avec l'équation (9.2) qui reste valable pour le refroidissement Raman (voir § 4.3 plus loin), montre que pour une valeur donnée de θ et pour $\alpha=2$, P_θ décroît avec P_0 comme $\sqrt{P_0}$. On a donc intérêt, pour diminuer P_θ , à réduire la largeur P_0 du trou Raman de la figure 4.
- Il est clair cependant que si l'on utilise une seule impulsion carrée de part et d'autre de $v=0$, et si le profil spectral correspondant est trop étroit, on va perdre des atomes qui échappent au refroidissement. Déjà sur la figure 4 apparaissent sur le profil de vitesse, au voisinage des autres zéros du profil d'excitation (près de $v = \pm 8 v_R$) des pics d'atome qui ne sont pas affectés par les impulsions Raman. D'où l'idée d'utiliser 2 impulsions carrées, l'une de profil spectral étroit pour créer un

trou Raman aussi étroit que possible, l'autre de profil spectral [IX-7] plus large, pour ramasser le plus grand nombre possible d'atomes et les ramener vers $v=0$. On voit de nouveau apparaître les 2 ingrédients essentiels du refroidissement subreent : filtrage et recyclage.

- Une expérience a donc été réalisée, utilisant 2 impulsions carrées de durées égales à $120 \mu\text{s}$ et $30 \mu\text{s}$, dont les profils spectraux sont centrés en $+v_R$ et $+4v_R$, respectivement, puis en $-v_R$ et $-4v_R$. La figure 6 représente les profils d'excitation associés à ces 2 impulsions. Pour plus de clarté, seules les profils à $-v_R$ et $-4v_R$ sont représentés. La figure 7 donne le profil de vitesses obtenu après 26 répétitions d'un tel cycle. On obtient un pic de largeur égale à $\delta v = 0.12 v_R$ correspondant à une température $T \approx 2.8 \text{ nK}$. 35% d'atomes contribuent au pic.

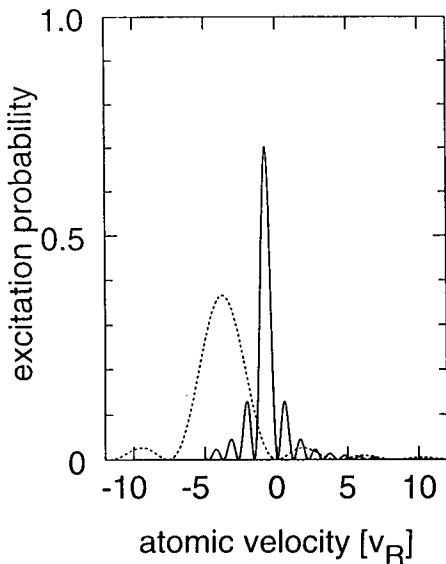


Fig. 6
(extraite de [5])

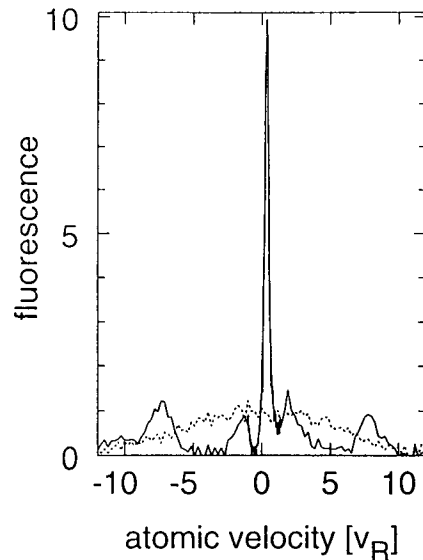


Fig. 7
(extraite de [5])

Compromis finesse - remplissage

- On pourrait être tenté de continuer à affiner le spectre des impulsions carrées. Effectivement, en utilisant des impulsions de durée égale à $400 \mu\text{s}$, des températures $T \approx 0.8 \text{ nK} = T_R/250$ ont pu être obtenues, mais l'accroissement de hauteur du pic (par rapport à la distribution non refroidie) n'est plus que de 6.8, alors qu'il est de 10 pour la figure 7.
- En effet, si l'on diminue trop la largeur p_0 du trou Raman, la durée τ_0 de l'impulsion, qui est inversement proportionnelle à p_0 , devient de plus en plus longue et le nombre d'impulsions qu'on peut réaliser pendant le temps θ diminue. Le filtrage est meilleur quand p_0 diminue, mais le recyclage devient de plus en plus mauvais.
- Il est clair donc qu'un compromis doit être réalisé entre finesse du pic étroit et remplissage de ce pic. Pour déterminer le meilleur compromis possible, il faut choisir une grandeur physique intéressante et chercher l'optimum de cette grandeur quand on fait varier p_0 . C'est ce que nous faisons dans le paragraphe suivant en utilisant les résultats quantitatifs des cours VII et VIII.

④ Optimisation du refroidissement Raman 1D (avec des impulsions carrées)

4.1 Liens entre la largeur du trou Raman et la durée de l'impulsion carrée

- Soit θ_0 la durée de l'impulsion carrée. Quand l'interaction atome-laser décrite par la fréquence de Rabi effective Ω écrite en (9.3) peut être traitée perturbativement, le profil spectral associé à l'impulsion est le carré du module de la transformée de Fourier de cette impulsion et l'écart v_0 (en vitesse) entre le maximum de ce profil et le 1^{er} zéro est donné par $2k v_0 \theta_0 = 2\pi$, c-à-d par $k v_0 = \pi / \theta_0$ (il faut prendre $2k v_0$ dans $2k v_0 \theta_0$ parce que les effets Doppler des 2 ondes s'ajoutent dans la transition Raman stimulée).
- On a intérêt en fait à réaliser des impulsions qui soient des impulsions π à résonance, pour avoir un transfert maximal de $|1\rangle$ vers $|2\rangle$. On a alors $\Omega \theta_0 = \pi$. La distance v_0 entre le maximum correspondant et le 1^{er} zéro est alors donnée par $\sqrt{4k^2 v_0^2 + \Omega^2} \theta_0 = 2\pi$, c'est à dire, compte tenu de $\Omega \theta_0 = \pi$, par $k v_0 = (\sqrt{3}/2) \pi / \theta_0$; qui ne diffère pas beaucoup de la valeur donnée plus haut.

4.2 Choix de la séquence d'impulsions

- Le paramètre θ_0 introduit plus haut est la durée de l'impulsion carrée la plus longue, celle servant au filtrage. Il faut lui ajouter des impulsions plus courtes, ayant un spectre plus large en fréquence et permettant de ramener vers $p=0$ les atomes qui ne sont pas affectés par l'impulsion de durée θ_0 .
- Si l'on dispose d'une grande réserve de puissance laser, on peut utiliser pour les impulsions de recyclage des impulsions très courtes en temps (tout en maintenant la condition d'impulsion π avec une intensité élevée) et ayant un spectre de fréquence très large. L'idée est de minimiser le coût en temps pris par le recyclage et de le rendre aussi petit que possible devant θ_0 .
- Il faut prendre garde cependant à ne pas laisser de "trou" dans le profil d'excitation pour $|v| > v_0$. L'idéal serait d'avoir un profil aussi plat que possible en dehors du trou Raman. Pour adapter au mieux le recyclage au filtrage, F. Bardou propose par exemple d'utiliser pour le recyclage une série d'impulsions carrées, de durée $\theta_0/2, \theta_0/2^2, \theta_0/2^3, \dots$, convenablement centrées pour avoir toujours leur 1^{er} zéro centré en $v=0$. Le coût en temps d'une telle série est de l'ordre de θ_0 (somme de la série géométrique) et le profil d'excitation varie peu en dehors du trou Raman. En d'autres termes, le temps total pris par le filtrage et le recyclage d'un côté de $v=0$ est de l'ordre de $2\theta_0$ (en supposant que les impulsions de recyclage ont une durée négligeable devant θ_0). Comme il faut répéter les impulsions de l'autre côté de $v=0$, on arrive à un temps total de l'ordre de $4\theta_0$ par séquence.
- En fait, il n'est pas nécessaire de couvrir tout le domaine de vitesse à droite et à gauche de $v=0$ (en dehors du trou Raman). Il suffit de s'arrêter à la largeur de la distribution initiale de vitesses des atomes. On définit ainsi la zone $[-v_{\max}, +v_{\max}]$ ou $[-p_{\max}, +p_{\max}]$ dans laquelle la diffusion en vitesse ou en impulsions des atomes est confinée.

4.3 Liens entre la largeur p_0 du trou Raman et le taux d'excitation

$1/\tau_0$ en dehors du trou Raman

- Notons tout d'abord qu'il ne faut pas confondre la probabilité d'excitation à l'issue d'une impulsion (nombre sans dimension qui peut atteindre la valeur 1 pour une impulsion π) et le taux d'excitation $\Gamma'(v)$ qui est une probabilité par unité de temps et qui dépend du nombre de fois qu'on peut répéter par seconde la séquence filtrage + recyclage.
- Si la durée totale d'une séquence est $4\theta_0$ et si les impulsions Raman sont des impulsions π en dehors du trou Raman, on a un taux d'excitation $1/\tau_0$ de l'ordre de $1/4\theta_0$. Comme $k v_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} \pi / \theta_0$, on voit que l'on peut écrire

$$\frac{1}{\tau_0} \approx \frac{1}{4\theta_0} = \frac{k v_0}{2\pi\sqrt{3}} = \frac{k p_0}{2\pi\sqrt{3} M} \quad (9.10)$$

c'est-à-dire encore

$$p_0 = a \frac{M}{k} \frac{1}{\tau_0} \quad \text{avec } a = 2\pi\sqrt{3} \quad (9.11)$$

Si les impulsions ne sont pas des impulsions π , $1/\tau_0$ est plus petit que $1/4\theta_0$ et a est plus grand que $2\pi\sqrt{3}$.

- Finalement, on voit qu'on peut généraliser au refroidissement Raman la relation (9.2) introduite plus haut à propos du refroidissement VSCPT.

4.4 Choix de la grandeur physique à optimiser

Un des objectifs essentiels du refroidissement laser est d'essayer d'augmenter au maximum la densité des atomes dans l'espace des impulsions au voisinage de $p=0$, ce qui n'est autre que la hauteur ρ_m du pic de la distribution d'impulsion en $p=0$. La hauteur de ce pic sera d'autant plus grande que la proportion $r(\theta)$ d'atomes refroidis, qui est aussi (à un facteur multiplicatif près) la proportion $f(\theta)$ d'atomes piégés puisque nous avons ici $\mu=1/2$ et donc $\mu < 1$, est plus élevé, et que la largeur p_0 du pic dans lequel les atomes sont regroupés est plus petite. Nous allons donc ici, θ étant fixé, chercher pour quelle valeur p_0 de la largeur du trou Raman, le rapport

$$h(p_0, \theta) = \frac{f(p_0, \theta)}{p_0(p_0)} \quad (9.12)$$

est maximum. Nous avons fait apparaître explicitement dans les notations la dépendance en p_0 de la proportion d'atomes piégés $f(p_0, \theta)$ et de la largeur du pic $p_0(p_0)$. Maximiser $h(p_0, \theta)$ revient à essayer de concentrer le plus possible d'atomes dans un pic aussi étroit que possible.

Remarque

Nous préférons utiliser ici l'équation (9.12), plutôt que l'équation (8.26) du cours VIII. En effet, l'équation (8.26) donne la hauteur ρ_m du pic à la limite asymptotique $\theta \rightarrow \infty$ où la proportion d'atomes piégés f a atteint sa limite (égale à 1) et ne varie plus. En

utilisant (9.12) et l'équation (7.35) du cours VII, qui décrit comment f atteint sa valeur asymptotique, on tient compte des variations de f avec p_0 et θ . Quant à la largeur $P_\theta(p_0)$, elle varie toujours avec p_0 et θ , même à la limite asymptotique.

4.5 Calcul de la valeur optimale de la largeur p_0 du trou Raman

- Si θ est suffisamment grand, la valeur optimale de p_0 est petite devant $\hbar k$ (nous le vérifierons ci-dessous). Il n'est donc pas nécessaire de distinguer P_{trap} et P_0 . Nous pouvons choisir

$$P_{\text{trap}} = P_0 \quad (9.13.a)$$

ce qui entraîne, d'après la figure 2 du cours VIII

$$\tau_{\text{trap}} = \tau_0 \quad (9.13.b)$$

- Comme nous avons ici $\langle \tau \rangle$ infini et $\langle \tau \rangle$ fini, il faut utiliser l'équation (7.35) avec $\mu = 1/2$ et $\tau_B = \tau_0$, ce qui donne

$$f(p_0, \theta) = 1 - \frac{1}{\pi} \frac{\langle \hat{\tau} \rangle}{\tau_0} \left(\frac{\tau_0}{\theta} \right)^{1/2} \quad (9.14)$$

Remplaçons $\langle \hat{\tau} \rangle$ par sa valeur donnée par l'équation (5.46)

$$\langle \hat{\tau} \rangle = \tau_0 \frac{P_{\text{max}}}{P_0} \quad (9.15)$$

Il vient

$$f(p_0, \theta) = 1 - \frac{P_{\text{max}}}{\pi P_0} \left(\frac{\tau_0}{\theta} \right)^{1/2} \quad (9.16)$$

Enfin, l'équation (9.8) donne avec $\alpha = 2$

$$P_\theta(p_0) = P_0 \left(\frac{\tau_0}{\theta} \right)^{1/2} \quad (9.17)$$

de sorte qu'on obtient pour $h(p_0, \theta)$

$$h(p_0, \theta) = \frac{1 - \frac{P_{\text{max}}}{\pi P_0} \left(\frac{\tau_0}{\theta} \right)^{1/2}}{P_0 \left(\frac{\tau_0}{\theta} \right)^{1/2}} \quad (9.18)$$

- Dans (9.18), on peut remplacer τ_0 par son expression (9.11) en fonction de p_0 ce qui donne

$$h(p_0, \theta) = \frac{1 - \alpha(\theta) p_0^{-3/2}}{\beta(\theta) p_0^{1/2}} \quad (9.19)$$

avec

$$\begin{cases} \alpha(\theta) = \frac{P_{\text{max}}}{R\theta} \left(\frac{aM}{R\theta} \right)^{1/2} \\ \beta(\theta) = \left(\frac{aM}{R\theta} \right)^{1/2} \end{cases} \quad (9.20)$$

- Il est alors facile de trouver la valeur de p_0 qui maximise $h(p_0, \theta)$ et la valeur optimale correspondante de P_θ

$$\frac{\partial h(p_0, \theta)}{\partial p_0} = 0 \quad \text{pour} \quad (p_0)_{\text{opt}} = (4\alpha)^{2/3} \quad (9.21)$$

$$\begin{cases} \left(\frac{P_0}{\hbar k} \right)_{\text{opt}} = \left(\frac{P_{\text{max}}}{\hbar k} \right)^{2/3} \left(\frac{\hbar}{E_R \theta} \right)^{1/3} 2 \left(\frac{\alpha}{\pi^2} \right)^{1/3} \\ \left(\frac{P_\theta}{\hbar k} \right)_{\text{opt}} = \left(\frac{P_{\text{max}}}{\hbar k} \right)^{1/3} \left(\frac{\hbar}{E_R \theta} \right)^{2/3} \pi \left(\frac{\alpha}{\pi^2} \right)^{2/3} \end{cases} \quad (9.22.a)$$

$$\quad (9.22.b)$$

$E_R = \hbar^2 k^2 / 2M$ est l'énergie de recul

4.6 Discussion physique

- Dans les équations (9.22), t_h/Er est le temps de recul T_R , caractéristique de l'amortissement des vitesses dans une mélasse optique et de l'ordre de quelques dizaines de microsecondes. Comme θ peut aller jusqu'à 10 ou 20 millisecondes, le rapport $t_h/Er\theta = T_R/\theta$ est en général très petit, de l'ordre de 1/300 pour $\theta = 20$ ms. Comme P_{max} ne dépasse pas en général 3 à 4 t_hk , on voit sur (9.22.a) que $(P_0)_{opt}$ est en général inférieur à t_hk , ce qui justifie le choix fait plus haut en (9.13).
- L'équation (9.22.b) montre que, si P_0 est optimisé pour chaque valeur de θ , la décroissance de P_0 avec θ n'est plus en $\theta^{-1/2}$ (comme c'est le cas avec une valeur fixée de P_0), mais en $\theta^{-2/3}$. Elle est donc plus rapide.
- La comparaison des valeurs optimales de $(P_0)_{opt}$ et $(P\theta)_{opt}$ déduites de (9.22) montre que les résultats expérimentaux décrits plus haut ne sont pas loin de l'optimum (La figure 7 correspond à $\theta = 10$ ms). Avec une puissance laser plus élevée, permettant de réaliser des impulsions π et de réduire la durée θ_0 d'une séquence, et une valeur de $\theta = 20$ ms, on pourrait espérer atteindre $T_R = 0.5$ nK.
- L'optimisation de la largeur P_0 du trou Raman est un problème qui se pose également pour le refroidissement VSCPT. Dans ce cas, filtrage et recyclage s'effectuent en permanence. Le paramètre expérimental qui fait varier P_0 et t_0 est la fréquence de Rabi Ω_1 (et le désaccord δ) associés aux faisceaux VSCPT. Le même type de calcul peut être fait. Il faut prendre garde cependant au fait que P_{max} (qui décrit l'efficacité du prérefroidissement Sisyphes) dépend également de Ω_1 et δ .
- Prolongements possibles d'un tel calcul : Recherche de l'optimum des refroidissements Raman 2D et 3D.

Références

- [1] - M. Kasevich, S. Chu Phys. Rev. Lett. 69, 1741 (1992)
- [2] - N. Davidson, H.J. Lee, M. Kasevich, S. Chu, Phys. Rev. Lett. 72, 3158 (1994)
- [3] - M. Kasevich, D.S. Weiss, E. Riis, K. Moler, S. Kasapi, S. Chu Phys. Rev. Lett. 66, 2297 (1991)
- [4] - J. Reichel, O. Morice, G.M. Tino, C. Salomon, Europhys. Lett. 28, 477 (1994)
- [5] - J. Reichel, F. Bardou, M. Ben Dahan, E. Peik, S. Rand, C. Salomon, C. Cohen-Tannoudji, Accepté pour publication à Phys. Rev. Lett.
- [6] - J. Reichel, Thèse, Paris 1996 (en cours de rédaction)

Filtrage et Recyclage : Les 2 ingrédients essentiels du refroidissement subrecoil (VSCPT et Raman)

Filtrage

- Caractérisé par l'exposant α apparaissant dans les variations avec p du temps de départ $\Gamma'(p)$

$$\Gamma'(p) \underset{p \rightarrow 0}{\simeq} \frac{1}{\tau_0} \left(\frac{p}{p_0} \right)^\alpha \quad (10.1)$$

p_0 : Largeur du trou Raman

$1/\tau_0$: Temps d'excitation en dehors du trou Raman.

- Après un temps d'interaction Θ , ne peuvent rester dans le piège que les atomes ayant une impulsion p inférieure à p_Θ où

$$p_\Theta = p_0 \left(\frac{\tau_0}{\Theta} \right)^{1/\alpha} \quad (10.2)$$

Plus α est petit, plus p_Θ décroît rapidement avec Θ

- Distribution des temps de piégeage τ

$$P(\tau) \underset{\tau \rightarrow 0}{\simeq} \frac{B}{\tau^{1+\mu}} \quad (10.3)$$

$$\mu = \frac{D}{\alpha} \quad D \text{ dimension d'espace} \quad (10.4)$$

Recyclage

- Il est essentiel d'avoir, surtout pour $D=2, 3$, une friction ramenant les atomes vers le piège en $p=0$ (effet Sisyphé - transferts d'impulsion lors de transitions Raman stimulées).

- Caractérisé par 2 paramètres (reliés entre eux)

- "Murs" en $|p| = p_{\max}$ (10.5)

- Temps moyen de premier retour dans le piège : $\langle \hat{\tau} \rangle$

$$\langle \hat{\tau} \rangle = \tau_0 \left(\frac{p_{\max}}{p_{\text{trap}}} \right)^D \quad (10.6)$$

(Si $p_0 < \hbar k$, on peut prendre $p_{\text{trap}} = p_0$)

Importance de l'exposant $\mu = D/\alpha$

$$\mu \leq 1$$

- A la limite $\Theta \rightarrow \infty$, tous les atomes se retrouvent dans l'espace des \vec{p} dans une sphère centrée en $\vec{p} = \vec{0}$ et de rayon égal à quelques p_Θ , qui tend vers 0 comme $\Theta^{-1/\alpha}$
- La distribution d'impulsion $\mathcal{P}(\vec{p})$ ne dépend, ni de p_{trap} , ni de p_{\max}
- $\mathcal{P}(\vec{p})$ ne s'arrête jamais d'évoluer quand Θ croît, aussi bien dans les ailes, qu'au sommet du pic
- Moyennes d'ensemble et moyennes temporelles diffèrent
Le système est fondamentalement non ergodique.

$\mu > 1$

- Tous les atomes ne sont pas, à la limite $\theta \rightarrow \infty$, dans la structure étroite de rayon p_θ . La proportion $r(\theta)$ d'atomes dans cette structure tend vers 0 quand $\theta \rightarrow \infty$
- La distribution d'impulsion $P(\vec{p})$ dépend de p_{max}
- $P(\vec{p})$ s'arrête d'évoluer, sauf pour la proportion de plus en plus petite d'atomes d'impulsion p inférieure à p_θ
- Moyennes d'ensemble et moyennes temporelles coïncident

Forme des distributions d'impulsion (le long d'un axe)

Largeur des pics

- Largeur égale à p_θ , quel que soit μ .
- Le meilleur compromis finesse-remplissage est réalisé pour $\alpha = D$. On a alors $\mu = 1$ (tous les atomes sont dans le pic) et la décroissance de p_θ avec θ est la plus rapide possible

Hauteur du pic (densité maximale dans l'espace des \vec{p})

La hauteur du pic croît toujours avec θ

- comme θ^μ si $\mu < 1$
- comme θ si $\mu > 1$

Ailes de la distribution d'impulsion

Pour θ fixé

- Décroissent aux grands p comme $1/p^\alpha$, quel que soit μ .
- Pour VSCPT, $\alpha = 2$. Les profils expérimentaux s'ajustent mieux avec des lorentziennes qu'avec des gaussiennes.
En toute rigueur, on ne peut définir une température. On définit une "température effective", en mesurant la 1/2 largeur à $1/\sqrt{e}$, $\delta p_{1/\sqrt{e}}$ et en posant $(\delta p_{1/\sqrt{e}})^2 / 2M = k_B T / 2$

Pour p fixé ($p > p_\theta$)

- $P(p, \theta)$ décroît avec θ comme $1/\theta^{1-\mu}$ si $\mu < 1$
- $P(p, \theta)$ est indépendant de θ pour $\mu > 1$

Problème physique

Exemples de déstabilisations de l'état noir par des mécanismes parasites

- Champ magnétique parasite B_0 introduisant un couplage entre l'état noir $|\Psi_{NC}(p=0)\rangle$ et des états couplés $|\Psi_C\rangle$
 - Couplage \propto fréquence de Larmor Ω_L associé à B_0
 - Largeur Γ'_{NC} de $|\Psi_{NC}(p=0)\rangle$ due à la "contamination" magnétique de $|\Psi_{NC}\rangle$ par $|\Psi_C\rangle$

$$\Gamma'_{NC} \approx \frac{\Omega_L^2}{\Gamma'_C} \quad \text{si } \Omega_L \ll \Gamma'_C \quad (C.1)$$

- Chute des atomes dans le champ de pesanteur.
- Lumière parasite résonnante qui peut être absorbée par les atomes piégés dans l'état $|\Psi_{NC}\rangle$.

Remarque : Nous ne considérons pas déstabilisation par la diffusion multiple due à la réabsorption par les atomes piégés dans l'état noir de la lumière émise par les atomes en train de diffuser vers l'état noir. Ce mécanisme dépend de la densité d'atomes déjà piégés et ne peut être décrit par le modèle simplifié introduit ci-dessus. Il nécessite un traitement spécial (voir thèse F. Bardou).

Modélisation

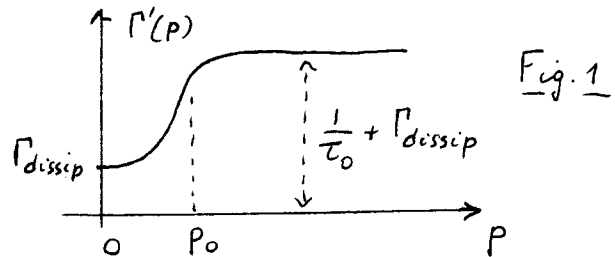
- On ajoute au taux de départ $\frac{1}{\tau_0} \left(\frac{p}{p_0}\right)^\alpha$ considéré jusqu'ici un taux de départ constant $\Gamma_{dissip.}$, indépendant de p, décrivant les processus de dissipation responsables de la déstabilisation de l'état noir

$$\Gamma'(p) = \Gamma_{dissip.} + \frac{1}{\tau_0} \left(\frac{p}{p_0}\right)^\alpha \quad (C.2)$$

On appelle $T_{dissip} = \frac{1}{\Gamma_{dissip.}}$ (C.3)

le temps de relaxation correspondant.

- Allure des variations avec p de $\Gamma'(p)$.
Elles sont données sur la figure 1



Distribution stationnaire d'impulsion (le long d'un axe).

Largeur à mi-hauteur

- Comme tous les temps de piégeage τ sont maintenant inférieurs à T_{dissip} , la valeur moyenne $\langle \tau \rangle$ de τ est finie et la distribution d'impulsion (le long d'un axe) tend vers une distribution stationnaire quand $\Theta \rightarrow \infty$.
- Comme dans le cours VIII, nous supposons qu'un atome d'impulsion p reste dans le piège pendant un temps $\tau(p)$ bien défini

$$\tau(p) = \frac{1}{\Gamma'(p)} \quad (C.4)$$

- Les résultats du § 5.4 du cours VIII s'appliquent ici. Voir en particulier la première ligne de l'équation (8.43) qui exprime que le poids d'une impulsion p donnée, dans la distribution d'impulsion $\mathcal{P}(p)$, est proportionnelle au temps $\tau(p)$ de piégeage d'un atome d'impulsion p .

On en déduit que la forme de $\mathcal{P}(p)$ est la même que celle de $\frac{1}{\Gamma'(p)}$. La hauteur du pic est proportionnelle à $\frac{1}{\Gamma_{dissip}} = T_{dissip}$. La 1/2 largeur à mi-hauteur $p_{1/2}$ est la valeur de p telle que $\Gamma'(p_{1/2}) = 2\Gamma_{dissip}$ (voir Fig. 2)

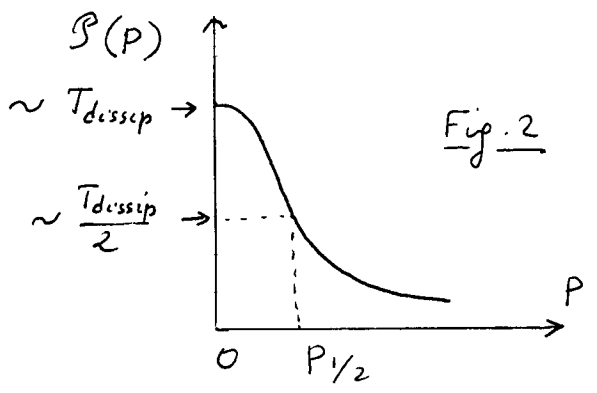


Fig. 2

L'équation (C.2) donne alors pour $p_{1/2}$

$$\frac{1}{\tau_0} \left(\frac{p_{1/2}}{p_0} \right)^\alpha = \Gamma_{dissip} = \frac{1}{T_{dissip}} \tag{C.5}$$

c'est-à-dire encore

$$p_{1/2} = p_0 \left(\frac{\tau_0}{T_{dissip}} \right)^{1/\alpha} \tag{C.6}$$

Discussion physique

- On obtient en (C.6) la même largeur à mi-hauteur que pour un processus sans dissipation ($\Gamma_{dissip} = 0$), pour lequel on aurait un temps d'interaction Θ égal à T_{dissip} .
- Les processus dissipatifs introduisent donc une coupure naturelle, à T_{dissip} , dans les temps d'interaction. Il ne sert à rien d'augmenter Θ au delà de cette valeur car les processus dissipatifs arrachent alors l'atome à l'interaction cohérente avec les champs laser.
- Dans une expérience donnée, où l'on dispose d'un temps d'interaction Θ , il faut s'efforcer de minimiser les processus de dissipation parasite pour réaliser $T_{dissip} > \Theta$

Transition entre le régime des lois de Lévy et celui de la loi normale

Modèle simple de distribution tronquée pour les temps de piégeage

- Supposons tout d'abord $\Gamma_{dissip} = 0$ et revenons à la distribution (6.26) des temps de piégeage considérée dans le cours VI (voir Fig. 3)

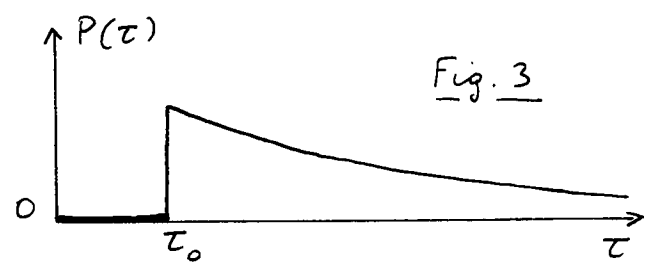


Fig. 3

$$\begin{cases} P(\tau) = 0 & \text{si } \tau < \tau_0 \\ P(\tau) = \mu \frac{\tau_0^\mu}{\tau^{1+\mu}} & \text{si } \tau \geq \tau_0 \end{cases} \tag{C.7}$$

Nous supposons ici $\mu < 1$

- Les processus dissipatifs interdisent à τ de dépasser une certaine valeur maximale. Nous modéliserons ici une telle situation en tronquant la distribution de la figure 3 au delà d'une certaine valeur τ_c .

- La distribution tronquée correspondante, notée $P_{\text{tronquée}}(\tau)$, est représentée sur la figure 4. Son expression mathématique s'écrit (en introduisant un coefficient supplémentaire ξ pour assurer la normalisation)

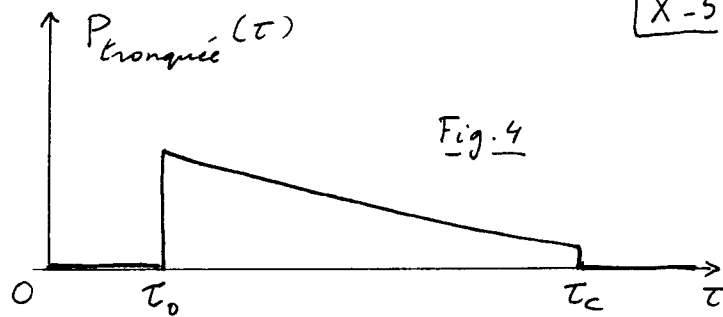


Fig. 4

$$\begin{cases} P_{\text{tronquée}}(\tau) = 0 & \text{si } \tau < \tau_0 \text{ et } \tau > \tau_c \\ P_{\text{tronquée}}(\tau) = \xi \mu \frac{\tau_0^\mu}{\tau^{1+\mu}} & \text{si } \tau_0 \leq \tau \leq \tau_c \end{cases} \quad (C.8)$$

Nous allons reprendre certains calculs simples du cours VI avec la distributions (C.8) et voir dans quelle mesure ils diffèrent de ceux obtenus avec (C.7). Pour la suite des calculs, il sera commode d'introduire, à partir de τ_c , un nombre N_c défini par

$$\frac{\tau_c}{\tau_0} = (N_c)^{1/\mu} \quad (C.9)$$

- Calcul du coefficient de normalisation ξ . Il s'obtient à partir de $\int_0^\infty P_{\text{tronquée}}(\tau) d\tau$. Posons $x = \tau/\tau_0$. On a

$$\begin{aligned} \int_0^\infty P_{\text{tronquée}}(\tau) d\tau &= \xi \int_1^{\frac{\tau_c}{\tau_0}} \frac{\mu dx}{x^{1+\mu}} = \xi [x^{-\mu}]_1^{\frac{\tau_c}{\tau_0}} \\ &= \xi \left[1 - \left(\frac{\tau_c}{\tau_0}\right)^{-\mu} \right] = \xi \left(1 - \frac{1}{N_c} \right) = 1 \end{aligned} \quad (C.10)$$

d'où l'on tire

$$\xi = \frac{1}{1 - \frac{1}{N_c}} \quad (C.11)$$

Variations avec N de la plus grande valeur de τ obtenue au cours de N tirages successifs

- Faisons N tirages successifs de τ . D'après le § 3.2 du cours VI, la valeur la plus grande $\tau_M(N)$ de τ obtenue au cours de ces N tirages a un ordre de grandeur donné par l'équation

$$\int_{\tau_M(N)}^\infty P_{\text{tronquée}}(\tau) d\tau = \int_{\tau_M(N)}^{\tau_c} P_{\text{tronquée}}(\tau) d\tau = \frac{1}{N} \quad (C.12)$$

- Le même changement de variables, $x = \tau/\tau_0$, que celui fait plus haut, permet de transformer (C.12) en

$$\xi \int_{\frac{\tau_M(N)}{\tau_0}}^{\frac{\tau_c}{\tau_0}} \frac{\mu dx}{x^{1+\mu}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{N_c}} \left[\left(\frac{\tau_M(N)}{\tau_0}\right)^{-\mu} - \left(\frac{\tau_c}{\tau_0}\right)^{-\mu} \right] = \frac{1}{N} \quad (C.13)$$

c'est à dire encore

$$\begin{aligned} \left[\frac{\tau_M(N)}{\tau_0} \right]^{-\mu} &= \left(\frac{\tau_c}{\tau_0}\right)^{-\mu} + \frac{1}{N} \left(1 - \frac{1}{N_c} \right) \\ &= \frac{1}{N_c} + \frac{1}{N} \left(1 - \frac{1}{N_c} \right) \end{aligned} \quad (C.14)$$

Supposons tout d'abord $N \ll N_c$

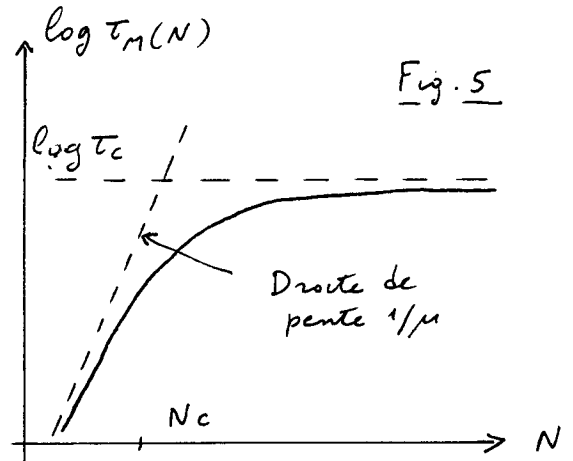
On peut alors négliger $\frac{1}{N_c}$ devant $\frac{1}{N}$ dans (C.14) qui donne

$$\tau_M(N) = \tau_0 N^{1/\mu} \quad (C.15)$$

On obtient alors le même résultat que celui des cours VI [voir équation (6.27)] correspondant à la distribution non tronquée de la Fig. 3.

Quand N se rapproche de N_c et dépasse N_c , $\tau_M(N)$ ne peut évidemment pas dépasser τ_c .

Si l'on porte donc $\log \tau_M(N)$ en fonction de N , on s'attend donc à trouver une courbe qui se rapproche d'une droite de pente $1/\mu$ pour $N \ll N_c$ et tend vers une asymptote horizontale, $\log \tau_c$, quand N se rapproche de N_c et dépasse N_c . On voit ainsi apparaître clairement le croisement ("crossover") entre le régime des lois de Lévy et celui de la loi normale (Fig. 5)



Généralisation et conclusions

- Les résultats du calcul analytique simple précédent permettent de prévoir qu'une somme $T_N = \sum_{i=1}^N \tau_i$ de N variables aléatoires indépendantes τ_i , décrites toutes par la même distribution large tronquée (C.8), se comporte, pour $N \ll N_c$ (où N_c est donné par (C.9)), comme une somme de Lévy, distribuée suivant une loi de Lévy. Le régime de la loi normale n'est atteint que pour N de l'ordre de N_c , ou supérieur à N_c .
- Alors que pour des lois étroites on atteint très vite le régime de la loi normale (pour N de l'ordre de 5 ou 10), on voit que ce n'est plus vrai pour des distributions larges tronquées, si $N_c \gg 1$. Les lois de Lévy sont alors essentielles pour comprendre le régime $N \ll N_c$.
- Revenant au problème du refroidissement subreuil, on peut dire que l'introduction d'une dissipation parante permet au système d'atteindre un régime stationnaire pour $\theta > T_{\text{damp}}$. Les lois de Lévy ne sont pas indispensables pour déterminer les propriétés de cet état stationnaire. Elles sont par contre très utiles pour étudier le régime transitoire permettant au système d'atteindre son état stationnaire, régime transitoire qui peut durer un temps très long, plus long que le temps d'observation.

Références

- Des problèmes analogues sont étudiés dans R.N. Mantegna, H.E. Stanley, Phys. Rev. Lett. 73, 2946 (1994)
- Voir aussi le "Comment" de M.F. Shlesinger dans Phys. Rev. Lett. 74, 4959 (1994)