

COLLEGE DE FRANCE

COURS DE PHYSIQUE

ATOMIQUE ET MOLECULAIRE

Claude COHEN-TANNOUDJI

ANNEE SCOLAIRE : 1993 - 1994

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Résumé du cours 1992-1993	I-1
Rappel de quelques résultats importants	I-5
- Propagateur quantique	I-5
- Chemin classique - Action classique - Impulsion - Hamiltonien	I-5
- Expression du propagateur pour des Lagrangiens quadratiques en z, \dot{z}	I-6
- Propagation de la fonction d'onde	I-6
- Déphasage quantique et trajectoire classique	I-6
- Calcul perturbatif du déphasage	I-8
Problèmes abordés dans le cours 1993-1994	I-9

DIFFRACTION D'ONDES DE DE BROGLIE ATOMIQUES PAR DES RÉSEAUX DE FENTES - APPLICATIONS

1 - Diffraction par une fente - Approche de Feynman	II-1
2 - Diffraction par un réseau de fentes	II-3
3 - 1ère application : focalisation d'atomes par une lentille de Fresnel	II-5
4 - 2ème application - Interféromètre atomique	II-6

DIFFRACTION D'ONDES DE DE BROGLIE ATOMIQUES PAR DES ONDES LASER STATIONNAIRES QUASI-RÉSONNANTES

A - Considérations générales	III-1
1 - Notations - Hypothèses	III-1
2 - Echanges d'impulsion entre atome et champ	III-2
3 - Conservation de l'énergie totale	III-2
4 - Lien avec l'interférométrie atomique	III-3
5 - Quelques bases d'états intéressantes	III-4
B - Régime de Raman-Nath	III-5
1 - Approximation effectuée	III-5
2 - Diffraction d'une onde de de Broglie incidente	III-6
3 - Mise en évidence expérimentale	III-9
C - Régime de Bragg	IV-1
1 - Condition sur le rayon focal de l'onde stationnaire	IV-1
2 - Diffraction de Bragg à l'ordre le plus bas	IV-1
3 - Exemple de diffraction de Bragg d'ordre supérieur	IV-4
4 - Etude expérimentale	IV-4
5 - Dopplérons	IV-5
D - lame séparatrice magnéto-optique	IV-6

1 - But poursuivi	IV-6
2 - Explication qualitative de l'effet proposé	IV-6
3 - Etats habillés	IV-7
4 - Calcul du spectre d'ondes diffractées	IV-9
EFFET STERN ET GERLACH OPTIQUE	V-1
1 - Situation physique envisagée dans ce cours	V-1
2 - Comment réaliser un paquet d'ondes suffisamment petit	V-2
3 - Critère de non-adiabaticité	V-3
4 - Mise en évidence expérimentale	V-5
5 - Etude expérimentale du régime adiabatique	V-7
MODÈLE SIMPLE PERMETTANT D'ÉTUDE LA TRANSITION ENTRE LE RÉGIME DIFFRACTIF ET LE RÉGIME DIFFUSIF	VI-1
1 - Introduction	VI-1
2 - Le cadre théorique	VI-1
3 - Limite des temps courts	VI-1
4 - Limite des temps longs	VI-1
5 - Temps intermédiaires	VI-1
6 - Conclusion	VI-1
EFFETS D'INTERFÉRENCE QUANTIQUES POUR UN ATOME SITUÉ À UN NOEUD D'UNE ONDE STATIONNAIRE	VII-1
1 - Introduction	VII-1
a) Rappel de résultats sur les forces radiatives	
b) Approche suivie dans ce cours	
2 - Cas simple d'un atome dans une onde plane progressive	VII-3
a) Hamiltonien - Etat initial	
b) Amplitude de probabilité de rester dans l'état initial	
c) Discussion physique	
3 - Atome au nœud d'une onde stationnaire	VII-5
a) Etat initial du système atome + champ	
b) Amplitude de probabilité de rester dans l'un des états initialement peuplés	
c) Corrélations apparues entre atome et photon	
d) Absorption du photon initial	
e) Redistribution du photon initial	
f) Calcul du coefficient de diffusion d'impulsion	
g) Récapitulation des résultats obtenus	

EFFET AHARONOV-BOHM SCALAIRE (ABS) - GÉNÉRALISATIONS À DES PARTICULES NEUTRES	VIII-1
1 - Description de l'effet ABS	VIII-1
a) Problème physique considéré	
b) Calcul du déphasage	
2 - Propriétés physiques importantes d'un tel effet	VIII-2
(i) Aucun déplacement, aucune distorsion des paquets d'ondes	
(ii) Facteur de phase global indépendant de la vitesse	
(iii) Insensibilité de l'effet d'interférence à la longueur de cohérence du paquet d'ondes	
(iv) Différence importante	
3 - Effet Aharonov-Bohm scalaire et complémentarité	VIII-3
a) Idée générale	
b) Un résultat d'électrostatique utile pour la suite	
c) Schéma de l'expérience de pensée	
4 - Généralisation de l'effet ABS à des particules neutres	VIII-6
a) Motivations de telles études	
b) Proposition de Zeilinger	
c) Réalisations expérimentales	

L'EFFET AHARONOV-BOHM VECTORIEL (ABV) ET SES EXTEN- SIONS À DES PARTICULES NEUTRES	IX-1
1 - Description de l'effet ABV	IX-1
a) Problème physique considéré	
b) Calcul du déphasage	
c) Discussion physique	
2 - Dynamique d'un moment magnétique dans un champ électrique	IX-3
a) Densité de magnétisation - Densités de courant et de charge	
b) Lagrangien L	
c) Impulsion \vec{p} - Hamiltonien H	
d) Discussion physique	
e) Equations du mouvement	
3 - Effet Aharonov-Anandan-Casher (AAC)	IX-7
a) Problème physique considéré	
b) Absence de force et de couple	
c) Calcul du déphasage	
d) Discussion physique	
e) Autre disposition possible	
f) Observations expérimentales	

Résumé du cours 1992-93

Le cours de l'année 1992-1993 est le premier d'une série de deux cours consacrés à l'interférométrie atomique. Il s'agit là d'un nouveau domaine de recherche, en développement très rapide, qui porte sur l'étude de phénomènes physiques où la nature ondulatoire des degrés de liberté de translation d'un atome neutre joue un rôle important. On peut ainsi observer des phénomènes d'interférence, analogues à ceux qui sont bien connus pour la lumière, et où les ondes lumineuses sont remplacées par les ondes de de Broglie associées au centre de masse de l'atome.

Le cours commence par une introduction générale où sont analysés les développements récents ayant permis l'éclosion d'un sujet : nouvelle maîtrise du mouvement atomique acquise grâce aux méthodes de refroidissement et de piégeage d'atomes par des faisceaux laser ; naissance d'une "optique atomique" utilisant des nouveaux dispositifs jouant vis à vis des ondes de de Broglie atomiques un rôle équivalent à celui des miroirs, lames séparatrices, lentilles... en optique traditionnelle ; meilleure compréhension théorique des méthodes de spectroscopie à haute résolution sans effet Doppler... Une comparaison est également effectuée entre l'interférométrie atomique et d'autres types d'interférométrie utilisant des photons ou des neutrons au lieu d'atomes. Enfin, quelques remarques générales sont formulées à propos des phénomènes d'interférence quantique, concernant par exemple la nature des objets qui interfèrent ou la possibilité de déterminer par quel "chemin" le système passe.

Exemple simple de lame séparatrice pour atomes

Considérons un atome à deux niveaux internes a et b (avec $E_b > E_a$), et supposons que cet atome, initialement dans l'état a , avec une impulsion \mathbf{p} , traverse une onde laser quasi-résonnante de largeur w et de vecteur d'onde \mathbf{k} . L'atome peut absorber un photon laser et passer dans l'état excité b , l'impulsion \mathbf{p} de l'atome augmentant d'une quantité $\hbar\mathbf{k}$ égale à l'impulsion du photon absorbé. La résolution de l'équation de Schrödinger associée à un tel problème montre que, à l'issue de la traversée de l'onde laser, l'atome est en général dans une superposition linéaire des états $|a, \mathbf{p}\rangle$ et $|b, \mathbf{p} + \hbar\mathbf{k}\rangle$. On obtient donc ainsi une superposition linéaire de deux ondes de de Broglie, différant non seule-

ment par leur directions de propagation, respectivement parallèles à \mathbf{p} et $\mathbf{p} + \hbar\mathbf{k}$, mais également par l'état interne, a ou b , dans lequel se trouve l'atome. Un tel dispositif peut être considéré comme une lame séparatrice pour ondes de de Broglie atomiques.

Le calcul précédent peut être aisément généralisé au cas où l'atome traverse successivement deux ondes laser de même vecteur d'onde \mathbf{k} , de même largeur w , séparées par une certaine distance L . Partant de l'état $|a, \mathbf{p}\rangle$, l'atome peut se retrouver, à l'issue de la traversée des deux ondes, dans l'état $|b, \mathbf{p} + \hbar\mathbf{k}\rangle$ en ayant suivi deux chemins différents $|a, \mathbf{p}\rangle \rightarrow |b, \mathbf{p} + \hbar\mathbf{k}\rangle$ et $|a, \mathbf{p}\rangle \rightarrow |a, \mathbf{p}\rangle \rightarrow |b, \mathbf{p} + \hbar\mathbf{k}\rangle$, chaque flèche symbolisant la traversée d'une onde. Les amplitudes associées à ces deux chemins interfèrent et on trouve que la probabilité $\mathcal{P}(a \rightarrow b)$ de changer d'état interne varie de manière sinusoidale en fonction de l'écart à résonance $\delta = \omega_L - \omega_A$ entre la fréquence des ondes laser ω_L et la fréquence atomique $\omega_A = (E_b - E_a)/\hbar$. Les oscillations correspondantes, appelées "franges de Ramsey", ont une période en δ égale à $2\pi/T$, ou T est le temps de vol de l'atome d'une onde à l'autre. Un tel résultat est valable pour une valeur donnée de la projection de la vitesse des atomes le long des ondes laser, c'est-à-dire encore pour une valeur donnée du déplacement Doppler $\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{p}/M$. On montre que la moyenne sur $\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}$, liée à la dispersion des vitesses des atomes incidents, brouille en général les franges de Ramsey. Un tel brouillage est dû au fait que le déphasage entre les deux perturbations "vues" par l'atome lors des deux traversées varie de manière importante d'un atome à l'autre. Plusieurs méthodes permettant d'éviter un tel brouillage et utilisant des ondes stationnaires ou des réseaux de fentes sont passées en revue et interprétées physiquement.

Echos de photons, franges de Ramsey et interférométrie atomique

Le cours se poursuit par l'analyse d'un certain nombre d'expériences où un atome traverse successivement plusieurs ondes laser progressives et où le signal intéressant ne s'annule pas lors de la moyenne sur les vitesses atomiques.

Un premier phénomène étudié est celui "d'écho de photons" à deux ondes progressives. Les atomes traversent deux ondes progressives parallèles séparées par une

distance L et on montre qu'une onde de densité de polarisation atomique, de même vecteur d'onde \mathbf{k} que les deux ondes laser, apparaît dans l'espace à une distance L de la deuxième onde laser.

La deuxième expérience analysée utilise deux paires d'ondes progressives se propageant en sens opposés, configuration proposée pour la première fois par Christian Bordé. Le calcul des probabilités de changement d'état interne $\mathcal{P}(a \rightarrow b)$ fait apparaître des franges de Ramsey qui ne se brouillent pas lors de la moyenne sur les vitesses atomiques.

Chacune de ces deux expériences est interprétée physiquement comme une expérience d'interférométrie atomique dans laquelle un paquet d'ondes incident est séparé en deux paquets d'ondes cohérents dont les centres suivent des trajectoires différentes et qui finissent par se recombiner à l'issue de la traversée des ondes laser. On montre ainsi qu'il existe un lien intéressant entre certaines expériences de spectroscopie laser à haute résolution sans effet Doppler et l'interférométrie atomique.

Fonctions d'onde, propagateurs et intégrales de chemin

Dans un interféromètre atomique, l'amplitude de probabilité de trouver la particule en un point donné \mathbf{r} et à un instant donné t , à la sortie de l'interféromètre, est une somme de deux amplitudes \mathcal{A}_I et \mathcal{A}_{II} correspondant aux deux chemins possibles suivis par l'atome dans l'interféromètre. Pour interpréter les signaux expérimentaux, il faut donc calculer \mathcal{A}_I et \mathcal{A}_{II} , et en particulier le déphasage entre ces deux amplitudes produit par des champs extérieurs ou inertiels. On peut en particulier se demander s'il est possible de ramener un tel calcul de fonctions d'ondes quantiques à des intégrales le long de chemins classiques.

Une démarche commode consiste alors à considérer le propagateur quantique $K(\mathbf{r}_b t_b, \mathbf{r}_a t_a)$, représentant l'amplitude de probabilité pour que la particule partant de \mathbf{r}_a à l'instant t_a arrive en \mathbf{r}_b à l'instant t_b . L'approche de Feynman, exprimant un tel propagateur comme une intégrale fonctionnelle sur tous les chemins possibles, est rappelée. Une telle approche utilise le Lagrangien et l'action et se prête particulièrement bien à l'étude de la limite classique. On montre qu'une telle formulation de la mécanique

quantique ressemble à un principe de Fresnel-Huygens dans l'espace-temps qui permet d'exprimer la fonction d'onde en $\mathbf{r}_b t_b$ sous la forme d'une superposition d'ondelettes rayonnées aux divers points \mathbf{r}_a à l'instant t_a . Le lien entre une telle approche et la formulation traditionnelle de la mécanique quantique est également explicité.

La formulation de Feynman se prête particulièrement bien aux situations où le Lagrangien est une fonction quadratique des coordonnées et des vitesses, ce qui est le cas pour un atome placé dans un champ de pesanteur ou dans un référentiel en rotation. On montre alors que :

$$K(\mathbf{r}_b t_b, \mathbf{r}_a t_a) = F(t_b, t_a) \exp \frac{i}{\hbar} S_{cl}(\mathbf{r}_b t_b, \mathbf{r}_a t_a) \quad (1)$$

où $F(t_b, t_a)$ est une fonction ne dépendant que de t_a et t_b et où $S_{cl}(\mathbf{r}_b t_b, \mathbf{r}_a t_a)$ est l'action classique évaluée le long du chemin classique réel reliant $\mathbf{r}_a t_a$ à $\mathbf{r}_b t_b$. C'est un tel résultat qui permettra par la suite de relier le déphasage à la sortie de l'interféromètre à des intégrales le long de chemins classiques.

Propagation d'une particule dans un champ de pesanteur

Un premier exemple important d'application de la formulation de Feynman est analysé en détail, celui de la détermination de la fonction d'onde d'une particule évoluant dans un champ de pesanteur. L'action classique $S_{cl}(\mathbf{r}_b t_b, \mathbf{r}_a t_a)$ est calculée à partir du Lagrangien classique. Le lien avec la formulation traditionnelle permet d'obtenir simplement la fonction $F(t_b, t_a)$ qui figure dans l'équation (1) (et qui ne dépend que de $T = t_b - t_a$). On montre également qu'il est possible de construire une transformation unitaire décrivant le passage dans un référentiel en chute libre et d'éliminer ainsi le champ de pesanteur des équations quantiques du mouvement, ce qui constitue une expression du principe d'équivalence. On montre enfin que, lorsque l'état initial de particule est, à l'instant t_a , une onde plane de vecteur d'onde \mathbf{k} , sa fonction d'onde au point \mathbf{r}_b à l'instant t_b se déduit de celle au point \mathbf{r}_a et à l'instant t_a par un simple facteur de phase, $\exp \frac{i}{\hbar} S_{cl}(\mathbf{r}_b t_b, \mathbf{r}_a t_a)$, les deux points d'espace-temps $\mathbf{r}_a t_a$ et $\mathbf{r}_b t_b$ étant reliés par une trajectoire classique réelle d'impulsion $\hbar \mathbf{k}$ en $\mathbf{r}_a t_a$ et $S_{cl}(\mathbf{r}_b t_b, \mathbf{r}_a t_a)$ étant l'action classique, en présence du champ de pesanteur, calculée le long de ce chemin. Lorsque

l'énergie potentielle Mgz de la particule de masse M dans le champ de pesanteur g est une petite perturbation. le résultat précédent peut prendre une forme encore plus simple. A l'ordre 1 en g , on peut alors se contenter d'utiliser les trajectoires classiques libres, calculées pour $g = 0$ et qui réduisent à des droites. Le déphasage supplémentaire dû au champ de gravitation se réduit alors à $\exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \oint Mgz(t)dt \right\}$ l'intégrale étant calculée le long des trajectoires classiques libres.

Les résultats précédents sont appliqués à l'interprétation de l'expérience de Colella, Overhauser et Werner qui est la première expérience d'interférence entre ondes de matière (en l'occurrence, des neutrons) mettant en évidence des effets quantiques sensibles au champ de pesanteur, c'est-à-dire dépendant à la fois de \hbar et g . Le déphasage entre les ondes de de Broglie associées au neutron et se propageant dans les deux bras d'un interféromètre situés à des hauteurs différentes est calculé en fonction de \hbar , g , M et des divers paramètres de l'expérience (surface S enfermée entre les deux bras de l'interféromètre, longueur d'onde de de Broglie λ_0 des neutrons incidents, angle φ entre la verticale et la normale au plan de l'interféromètre). L'ordre de grandeur du déphasage que l'on obtiendrait en remplaçant les neutrons par des photons est également évalué, ce qui permet de montrer à quel point les effets gravitationnels sont plus faciles à détecter sur des ondes de matière que sur des ondes lumineuses.

Une autre expérience, beaucoup plus récente, réalisée à Stanford par Kasevich et Chu est ensuite analysée. Les ondes de de Broglie qui interfèrent sont alors associées à des atomes de sodium et non à des neutrons. Cette expérience utilise des transitions Raman stimulées entre les deux niveaux hyperfins de l'atome de sodium, pour séparer un paquet d'ondes en deux composantes cohérentes entre elles, puis pour les recombinaison. Entre l'instant de séparation et l'instant de recombinaison, les centres des 2 paquets d'ondes se propagent à des hauteurs différentes, ce qui est à l'origine du déphasage gravitationnel qui apparaît entre eux. Après des rappels théoriques sur les transitions Raman stimulées et une discussion des avantages qu'elles offrent et qui sont essentiellement liés au fait que les deux niveaux internes atomiques qu'elles relient peuvent avoir une durée de vie très longue, on décrit les grandes lignes de l'expérience et on calcule

le déphasage gravitationnel entre les deux paquets d'ondes. Deux méthodes de calcul sont présentées, l'une sans aucune approximation, l'autre à l'ordre 1 en g . Les résultats obtenus sont discutés et la sensibilité de l'expérience pour des mesures de variations de g est évaluée.

Propagation d'une particule dans un référentiel tournant

Un autre exemple important d'application de l'interférométrie atomique est celui de la mesure des champs inertiels qui apparaissent dans un référentiel en mouvement de rotation par rapport à un référentiel galiléen. Il s'agit en quelque sorte de la généralisation à des ondes de matière de l'effet Sagnac bien connu pour des ondes lumineuses.

Comme l'expression du Lagrangien de la particule dans le référentiel tournant à la fréquence angulaire Ω est une fonction quadratique de la position \mathbf{r} de la particule et de sa vitesse $\dot{\mathbf{r}}$, la formulation de Feynman est particulièrement commode pour analyser un tel problème et l'expression (1) du propagateur quantique demeure valable. Comme dans le cas du champ de pesanteur, on peut montrer que, lorsque l'état initial de la particule est un état libre, on peut simplifier le résultat obtenu lorsqu'on se limite à l'ordre 1 en Ω . Le déphasage peut alors être évalué en ne considérant que les trajectoires libres, correspondant à $\Omega = 0$, et se réduit à $\exp \frac{i}{\hbar} \{ M \Omega \cdot \oint dt \mathbf{r}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t) \}$, l'intégrale étant calculée le long des trajectoires classiques libres. On peut ainsi montrer que le déphasage entre les ondes de Broglie se propageant dans les deux bras d'un interféromètre en mouvement de rotation à la vitesse angulaire Ω est donné, à l'ordre 1 en Ω , par $\delta\phi = 2M\Omega \cdot \mathbf{S}/\hbar$, \mathbf{S} étant la surface orientée comprise entre les deux bras de l'interféromètre.

Un tel résultat est appliqué à l'interprétation d'une expérience réalisée sur des neutrons par Werner, Staudenmann et Colella et qui est la première expérience sur des ondes de matière mettant en évidence des effets d'interférence sensibles à la rotation. La rotation intervenant dans cette expérience est celle de la terre, de sorte que $|\Omega|$ est très petit, de l'ordre de $7.5 \cdot 10^{-5}$ rad/sec. De plus, la surface S de l'interféromètre n'est plus que de 8.8 cm^2 . L'effet de la rotation terrestre est cependant clairement visible, ce qui montre la sensibilité des interféromètres à ondes de matière. Le calcul du déphasage dû

à la rotation dans un interféromètre à ondes lumineuses est brièvement rappelé (effet Sagnac). On trouve $\delta\phi = 8\pi\mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{S}/\lambda_0 c$ ou λ_0 est la longueur d'onde lumineuse. Le gain de sensibilité d'un interféromètre à ondes de matière par rapport à un interféromètre à ondes lumineuses est donc de l'ordre de $Mc^2/\hbar\omega_0$ où $\hbar\omega_0$ est l'énergie des photons. On comprend ainsi pourquoi Michelson et Gale ont dû, pour détecter la rotation de la terre avec des ondes lumineuses, utiliser une surface d'interféromètre de l'ordre du km^2 .

D'autres expériences plus récentes, réalisées en Allemagne, ont permis de mettre en évidence l'effet Sagnac sur des ondes de de Broglie associées à des atomes neutres. Ces expériences utilisent deux paires d'ondes progressives se propageant dans des sens opposés, c'est-à-dire la même configuration laser que celle décrite précédemment pour l'observation de franges de Ramsey optiques ne se brouillant pas lors de la moyenne sur les vitesses atomiques. Après un calcul détaillé du déphasage dû à la rotation, on présente et discute les divers résultats expérimentaux obtenus : observation du doublet de recul, suppression d'une composante du doublet de recul, sensibilité à la phase des ondes laser, déphasage produit par un déplacement lumineux, sensibilité à la rotation.

Interféromètres atomiques utilisant des doubles fentes

Le cours de cette année se termine par une analyse des expériences d'interférométrie atomique à "division de front d'ondes", c'est-à-dire utilisant le passage des atomes à travers des microstructures, comme des doubles fentes, et réalisant donc pour les ondes de de Broglie atomiques l'équivalent de l'expérience des deux fentes d'Young en optique.

Le problème de base à résoudre est celui de la propagation d'une onde de de Broglie atomique à travers une fente. Ce problème est abordé dans le cadre de l'approximation de Kirchhoff et de l'approximation paraxiale. La signification physique de ces approximations est précisée et on montre qu'elles reviennent à traiter classiquement le mouvement de la particule perpendiculairement au plan de la fente, le mouvement de la particule dans le plan de la fente étant lui traité quantiquement. Deux cas sont envisagés, suivant qu'un champ de pesanteur \mathbf{g} perpendiculaire au plan de la fente est présent ou non. Ayant ainsi ramené le problème étudié à celui de la propagation tempo-

relle d'une particule dans un espace à deux dimensions, on peut utiliser les propagateurs de Feynman, correspondant à $\mathbf{g} = \mathbf{0}$ ou $\mathbf{g} \neq \mathbf{0}$, pour calculer à tout instant la fonction d'onde de la particule. Dans la zone de diffraction lointaine, deux causes de variation transversale de la fonction d'onde apparaissent alors clairement : d'une part, le déphasage dû à la propagation libre le long des trajectoires classiques et qui n'est autre que le facteur bien connu $\exp \frac{i}{\hbar} S_{cl}$; d'autre part, le changement de direction de la vitesse de la particule lors du passage à travers la fente qui fait apparaître un terme proportionnel à la transformée de Fourier spatiale de la fente et qui peut être interprété comme l'amplitude de probabilité pour que la particule incidente, d'impulsion $\hbar \mathbf{k}$, change d'impulsion lorsqu'elle traverse une fente de largeur finie. Les résultats obtenus sont aisément généralisés au cas où la particule traverse deux fentes parallèles et une expression simple est obtenue pour l'écart entre les franges d'interférences observables après traversée des deux fentes.

Deux séries d'expérience réalisées à Constance d'une part, à Tokyo d'autre part, ont permis d'observer de telles figures d'interférence. Ces expériences sont décrites et leurs résultats analysés à la lumière des calculs précédents. L'expérience de Constance utilise des atomes d'hélium métastable d'un jet supersonique et sa géométrie est telle que l'effet du champ de pesanteur est négligeable. L'expérience de Tokyo utilise un nuage d'atomes de Néon, préalablement piégés et refroidis par laser, et qu'on laisse ensuite tomber vers un système de deux fentes. Il est alors nécessaire de tenir compte de l'effet du champ de pesanteur. Il est possible également, dans ce cas, d'appliquer un champ électrique statique qui dévie transversalement la trajectoire des atomes.

D'autres expériences d'interférométrie atomique, à "division d'amplitude", utilisent le passage des atomes à travers un ensemble de réseaux périodiques de fentes qui séparent l'onde plane incidente en plusieurs ondes planes cohérentes entre elles, puis les recombinent (expériences réalisées au M.I.T. aux U.S.A.). Au lieu de réseaux de fentes, il est possible également d'utiliser le passage des atomes à travers des ondes laser stationnaires. Ces expériences seront analysées dans un cours ultérieur.

Rappel de quelques résultats importants

Propagateur quantique

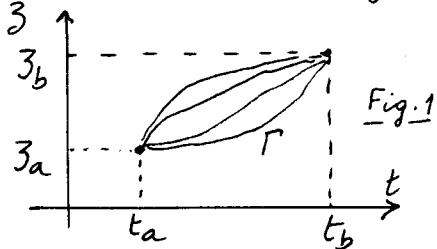
- Définition usuelle.

$$K(z_b t_b, z_a t_a) = K(b, a) = \langle z_b | U(t_b, t_a) | z_a \rangle \quad (1.1)$$

$U(t_b, t_a)$: opérateur d'évolution

Amplitude de probabilité de trouver la particule en z_b à l'instant t_b , sachant qu'elle est partie de z_a à l'instant t_a

- Approche de Feynman.



$$K(b, a) = \sum_{\Gamma} \exp\left\{ \frac{i S_{\Gamma}}{\hbar} \right\} \quad (1.2)$$

Γ : chemin quelconque d'espace-temps reliant $z_a t_a$ à $z_b t_b$, défini par $z(t)$

S_{Γ} : Action calculée le long de Γ

$$S_{\Gamma} = \int_{t_a}^{t_b} L(z(t), \dot{z}(t)) dt \quad (1.3)$$

$$L(z, \dot{z}) = \frac{1}{2} M \dot{z}^2 - V(z) \quad \text{Lagrangien} \quad (1.4)$$

- On peut montrer que les 2 approches sont équivalentes. L'approche de Feynman est bien adaptée à la limite classique.

Chemin classique - Action classique - Impulsion - Hamiltonien

- Chemin Γ_{cl} effectivement suivi par le système classique : Chemin pour lequel S_{Γ} est extrémal

Action correspondante : $S_{cl}(z_b t_b, z_a t_a)$

$$\frac{\partial}{\partial z_b} S_{cl}(z_b t_b, z_a t_a) = p_b \quad (1.5.a) \qquad \frac{\partial}{\partial z_a} S_{cl}(z_b t_b, z_a t_a) = -p_a \quad (1.5.b)$$

$$\frac{\partial}{\partial t_b} S_{cl}(z_b t_b, z_a t_a) = -H_b \quad (1.6.a) \qquad \frac{\partial}{\partial t_a} S_{cl}(z_b t_b, z_a t_a) = H_a \quad (1.6.b)$$

$p_b(p_a)$: Impulsions de la particule le long du chemin réel en $z_b t_b (z_a t_a)$

$H_b(H_a)$: Hamiltonien " " " " " "

- On en déduit
$$S_{cl} = \int_{\text{chemin } \Gamma_{cl}} (p dz - H dt) \quad (1.7)$$

- Développement de S_{cl} au voisinage de z_a

$$\begin{aligned} S_{cl}(z_b t_b, z_a + \xi t_a) &= S_{cl}(z_b t_b, z_a t_a) + \xi \frac{\partial}{\partial z_a} S_{cl} + \frac{1}{2} \xi^2 \frac{\partial^2}{\partial z_a^2} S_{cl} + \dots \\ &= S_{cl}(z_b t_b, z_a t_a) - \xi p_a - \frac{1}{2} \xi^2 \frac{\partial p_a}{\partial z_a} + \dots \end{aligned} \quad (1.8)$$

- Exemple simple : particule libre. Γ_{cl} = droite reliant $z_a t_a$ à $z_b t_b$

$$p_b = p_a = Mv = \frac{M(z_b - z_a)}{t_b - t_a} = \frac{M(z_b - z_a)}{T} \quad \text{avec } T = t_b - t_a \quad (1.9)$$

$$S_{cl} = \int_{t_a}^{t_b} \frac{1}{2} M v^2 dt = \frac{M v^2 T}{2} = \frac{M (z_b - z_a)^2}{2T} \quad (1.10)$$

$$S_{cl}(z_b t_b, z_a + \xi t_a) = M(z_b - z_a - \xi)^2 / 2T$$

$$= \underbrace{M(z_b - z_a)^2 / 2T}_{S_{cl}(z_b t_b, z_a t_a)} - \underbrace{\xi M(z_b - z_a) / T}_{P_a} + \frac{1}{2} \xi^2 \underbrace{M / T}_{-\partial P_a / \partial z_a}$$
(1.11)

On retrouve bien (1.8). Le développement s'arrête à l'ordre 2 car S est une fonction quadratique de z.

Expressions du propagateur pour des Lagrangiens quadratiques en z, ż

- Si L est quadratique en z, ż, on montre que

$$K(z_b t_b, z_a t_a) = F(t_b, t_a) \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} S_{cl}(z_b t_b, z_a t_a) \right\}$$
(1.12)

F : fonction ne dépendant que de t_b et t_a.

- Exemples importants de Lagrangiens quadratiques
 - Particule libre $L = \frac{1}{2} M \dot{z}^2$ (1.13)
 - Particule dans un champ de pesanteur $L = \frac{1}{2} M \dot{z}^2 - Mgz$ (1.14)
 - Particule dans un référentiel tournant ($\vec{\Omega}$) $L = \frac{1}{2} M \dot{\vec{r}}^2 + M \dot{\vec{r}} \cdot (\vec{\Omega} \times \vec{r}) + \frac{M}{2} (\vec{\Omega} \times \vec{r})^2$ (1.15)

- Si L est quadratique en z, ż, S_{cl} est quadratique en z_a, z_b et le développement (1.8) s'arrête à l'ordre 2. On a alors, d'après (1.12)

$$K(z_b t_b, z_a + \xi t_a) = F(t_b, t_a) \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} S_{cl}(z_b t_b, z_a t_a) \right\} \times \exp\left\{ -\frac{i P_a \xi}{\hbar} \right\} \times \exp\left\{ \frac{i C}{\hbar} \xi^2 \right\}$$
(1.16)

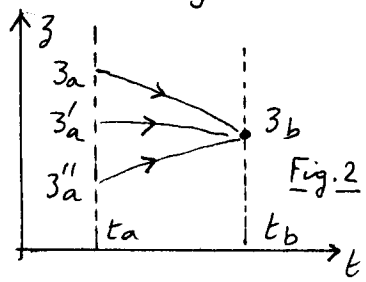
avec $C = -\frac{1}{2} \partial P_a / \partial z_a = \frac{1}{2} \partial^2 S_{cl} / \partial z_a^2 = C(t_b, t_a)$ (1.17)

C est en effet indépendant de z_b, z_a car S_{cl} est quadratique en z_a, z_b

Propagation de la fonction d'onde

- $\Psi(z_b t_b) = \langle z_b | \Psi(t_b) \rangle = \langle z_b | U(t_b, t_a) | \Psi(t_a) \rangle$ (1.18)

$$= \int dz_a \langle z_b | U(t_b, t_a) | z_a \rangle \langle z_a | \Psi(t_a) \rangle = \int dz_a K(z_b t_b, z_a t_a) \Psi(z_a t_a)$$



Analogie avec un principe de Fresnel-Huygens. L'onde en z_b t_b est la superposition de toutes les ondes "rayonnées" en z_b t_b par les divers points sources z_a, z'_a, z''_a... du plan t_a.

Déphasage quantique et trajectoire classique

- Quels sont, dans le plan t = t_a, les points z_0 de phase stationnaire, c'est à dire tels que les diverses ondes rayonnées en z_b t_b par les points au voisinage de z_0 t_a soient toutes en phase ?

- Dans tout ce qui suit, on suppose L quadratique en z, ż et on part d'une onde plane en t_a, d'impulsion p_0

$$\Psi(z_a, t_a) = \exp\{i p_0 z_a / \hbar\}$$
(1.19)

- z_b étant fixé, P_a est une fonction de z_a . Soit alors le point z_0 du plan t_a tel que $P_a = P_0$. Si l'on pose $z_a = z_0 + \xi$, il vient

$$\Psi(z_a, t_a) = \exp\{i p_0(z_0 + \xi)/\hbar\} = \Psi(z_0, t_a) \exp\{i p_0 \xi/\hbar\} \quad (1.20)$$

Par ailleurs, en remplaçant z_a par z_0 dans (1.16) et en utilisant $z_0 + \xi = z_a$, on obtient

$$K(z_b, t_b, z_a, t_a) = F(t_b, t_a) \exp\left\{\frac{i}{\hbar} S_{cl}(z_b, t_b, z_0, t_a)\right\} \times \exp\left\{-\frac{i p_0 \xi}{\hbar}\right\} \times \exp\left\{\frac{i C}{\hbar} \xi^2\right\} \quad (1.21)$$

Reportons alors (1.20) et (1.21) dans (1.18). Intégrer sur z_a revient à intégrer sur ξ . On constate alors que l'exponentielle $\exp\{i p_0 \xi/\hbar\}$ donnant la variation en ξ de $\Psi(z_a, t_a)$ est compensée par l'exponentielle $\exp\{-i p_0 \xi/\hbar\}$ de K . Le point z_0 est donc bien un point de phase stationnaire.

Reste l'intégrale du terme en ξ^2 qui donne

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{\frac{i C}{\hbar} \xi^2\right\} d\xi = \sqrt{\frac{i \pi \hbar}{C}} \quad (1.22)$$

Finalement, on obtient

$$\Psi(z_b, t_b) = F(t_b, t_a) \sqrt{\frac{i \pi \hbar}{C(t_b, t_a)}} \exp\left\{\frac{i}{\hbar} S_{cl}(z_b, t_b, z_0, t_a)\right\} \Psi(z_0, t_a) \quad (1.23)$$

- Résultat simple

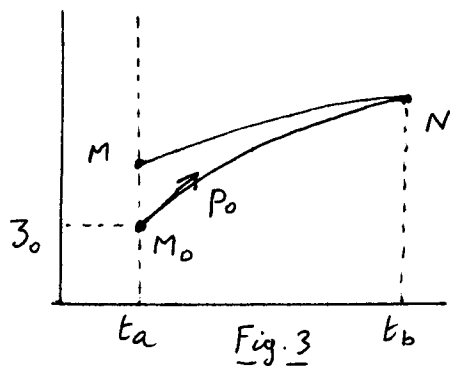


Fig. 3

Pour avoir la phase de la fonction d'onde au point $N(z_b, t_b)$, on prend la trajectoire classique arrivant en N et ayant l'impulsion P_0 à t_a . Cette trajectoire passe par le point $M_0(z_0, t_a)$.

Le déphasage quantique entre $\Psi(N)$ et $\Psi(M_0)$ est simplement $\exp\left\{\frac{i}{\hbar} S_{cl}(N, M_0)\right\}$ où $S_{cl}(N, M_0)$ est l'action classique le long de la trajectoire classique $M_0 N$.

$$\Psi(N) \sim \Psi(M_0) \exp\left\{\frac{i}{\hbar} S_{cl}(N, M_0)\right\} \quad (1.24)$$

- Soit M un point suffisamment proche de M_0 dans le plan t_a . Plus précisément $\xi_0 = |M_0 M|$ est supposé tel que

$$C \xi_0^2 / \hbar < 1 \quad (1.25)$$

Pour de tels points M , la dernière exponentielle (en ξ^2) de (1.21) est alors pratiquement égale à 1, et on peut alors considérer que les ondes rayonnées en N par M_0 et M sont exactement en phase

$$\Psi(M_0) \exp\left\{\frac{i}{\hbar} S_{cl}(N, M_0)\right\} \sim \Psi(M) \exp\left\{\frac{i}{\hbar} S_{cl}(N, M)\right\} \quad (1.26)$$

La condition (1.25) définit donc le voisinage de M_0 (en quelque sorte, une "première zone de Fresnel") tel que tous les points de ce voisinage rayonnent en phase en N .

Calcul perturbatif du déphasage

Position du problème

- Lagrangien L de la forme: $L = L_0 + \epsilon L_1$, $\epsilon \ll 1$ (1.27)
- Etat initial à t_a : onde plane p_0 (voir Eq. (1.19))
- Etat final à t_b
 - avec $\epsilon = 0$ $\Psi^{(0)}(z_b, t_b)$ (1.28.a)
 - avec $\epsilon \neq 0$ $\Psi(z_b, t_b)$ (1.28.b)
- Peut-on calculer simplement le déphasage entre $\Psi(z_b, t_b)$ et $\Psi^{(0)}(z_b, t_b)$ et exprimer ce déphasage en fonction d'une intégrale le long d'une trajectoire classique non perturbée ($\epsilon = 0$)?

Introduction de quelques chemins classiques

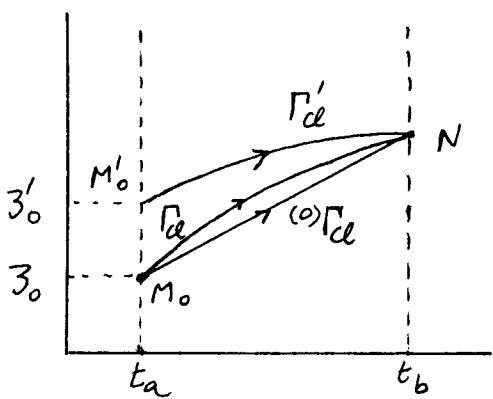


Fig. 4

- ${}^{(0)}\Gamma_{cl}$: Chemin classique (solution de équations du mouvement) non perturbé ($\epsilon = 0$) arrivant en $N(z_b, t_b)$ et d'impulsion p_0 en t_a . Part du point M_0
- Γ'_{cl} : Chemin classique perturbé ($\epsilon \neq 0$) arrivant en $N(z_b, t_b)$ et d'impulsion p_0 en t_a . Part de $M'_0 \neq M_0$.
- Γ_{cl} : Chemin classique perturbé ($\epsilon \neq 0$) reliant M_0 à N . N'a donc pas l'impulsion p_0 en t_a . Γ_{cl} et ${}^{(0)}\Gamma_{cl}$ différent à l'ordre 1 en ϵ

- D'après les résultats des paragraphes précédents (voir Eq. (1.24))

$$\Psi^{(0)}(N) \sim \Psi(M_0) \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{{}^{(0)}\Gamma_{cl}} L_0 dt \right\} \quad (1.29)$$

$$\Psi(N) \sim \Psi(M'_0) \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{\Gamma'_{cl}} L dt \right\} \quad (1.30)$$

- Si M'_0 est suffisamment proche de M_0 , dans la 1^{ère} "zone de Fresnel" autour de M_0 , on a d'après (1.26):

$$\Psi(M'_0) \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{\Gamma'_{cl}} L dt \right\} \approx \Psi(M_0) \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{\Gamma_{cl}} L dt \right\} \quad (1.31)$$

En comparant (1.30) et (1.31), on en déduit

$$\Psi(N) \sim \Psi(M_0) \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{\Gamma_{cl}} L dt \right\} \quad (1.32)$$

- Par ailleurs, Γ_{cl} et ${}^{(0)}\Gamma_{cl}$ sont 2 chemins ayant même origine et même extrémité. Comme Γ_{cl} est le chemin d'action extrême pour L et que Γ_{cl} et ${}^{(0)}\Gamma_{cl}$ diffèrent à l'ordre 1 en ϵ , on a

$$\int_{\Gamma_{cl}} L dt = \int_{{}^{(0)}\Gamma_{cl}} L dt + O(\epsilon^2) \quad (1.33)$$

En reportant (1.33) dans (1.32), puis en utilisant (1.29), on obtient à l'ordre 1 inclus en ϵ , et compte tenu de (1.27)

$$\begin{aligned} \Psi(N) &\sim \Psi(M_0) \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{{}^{(0)}\Gamma_{cl}} L dt \right\} = \underbrace{\Psi(M_0) \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{{}^{(0)}\Gamma_{cl}} L_0 dt \right\}}_{\Psi^{(0)}(N)} \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{{}^{(0)}\Gamma_{cl}} \epsilon L_1 dt \right\} \\ &\sim \Psi^{(0)}(N) \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{{}^{(0)}\Gamma_{cl}} \epsilon L_1 dt \right\} \end{aligned} \quad (1.34)$$

Récapitulation

$$\Psi(N) = \Psi^{(0)}(N) \exp(i \delta\Phi) \quad \delta\Phi = \frac{\epsilon}{\hbar} \int_{(0)P_0} L_1 dt \quad (1.35)$$

Pour calculer le déphasage $\delta\Phi$ entre $\Psi(N)$ et $\Psi^{(0)}(N)$, il suffit donc, à l'ordre 1 en ϵ , de calculer l'intégrale de la perturbation ϵL_1 le long de la trajectoire classique non perturbée arrivant en N

2 applications importantes en interférométrie atomique

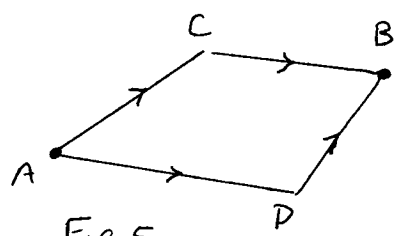


Fig. 5

En général, dans un interféromètre, on peut introduire 2 chemins classiques non-perturbés, partant tous 2 du même point A et arrivant au même point B. (Fig. 5)

- Déphasage gravitationnel $\delta\Phi_{grav}$ dû au champ de gravitation g entre les 2 amplitudes arrivant en B
 L_0 est donné par (1.13), L par (1.14). A l'ordre 1 en g on peut donc écrire, d'après (1.35)

$$\delta\Phi_{grav} = \frac{1}{\hbar} \oint_{ACBDA} (L - L_0) dt = - \frac{1}{\hbar} \oint_{ACBDA} Mgz dt \quad (1.36)$$

- Déphasage rotationnel dû à une rotation uniforme ($\vec{\Omega}$)
 L_0 est donné par (1.13), L par (1.15). A l'ordre 1 en Ω

$$\delta\Phi_{rot} = \frac{1}{\hbar} \oint_{ACBDA} M \vec{\Omega} \cdot (\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) dt = \frac{2}{\hbar} M \vec{\Omega} \cdot \vec{S} \quad (1.37)$$

où \vec{S} est la surface orientée du polygone orienté ACBDA

Problèmes abordés dans le cours 1993-94

- Diffraction d'ondes de de Broglie par des réseaux de fentes.
- Interféromètres atomiques utilisant des réseaux de fentes.
- Diffraction d'ondes de de Broglie par des ondes stationnaires quasi-résonnantes.
 - Régime de Raman - Nath.
 - Régime de Bragg.
 - Effet magnéto-optique.
- Effet Stern et Gerlach optique.
- Effet de l'émission spontanée : transition entre la diffraction et la diffusion.
- Effets d'interférence liés au spin des atomes.
- Interférométrie à ondes multiples : cavités atomiques.

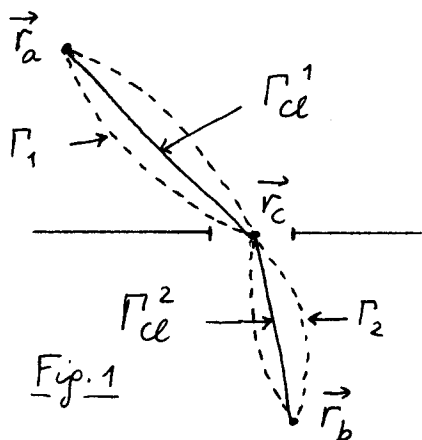
Diffraction d'ondes de de Broglie atomiques par des réseaux de fentes - Applications

Buts de ce cours

- Reprendre le problème de la diffraction d'une onde de de Broglie par une fente avec une méthode différente de celle suivie dans le cours 92-93. Au lieu de résoudre l'équation de Schrödinger, on calcule le propagateur de la particule par la méthode de Feynman.
- Analyser le fonctionnement des réseaux de transmissions pour ondes de de Broglie utilisant des réseaux de fentes et décrire des expériences récentes mettant en évidence des effets de diffraction.
- Décrire un interféromètre atomique réalisé au M.I.T. et utilisant 3 réseaux de transmissions.

① Diffraction par une fente - Approche de Feynman

Buts du calcul - Méthode suivie



- Une particule part à l'instant t_a d'un point \vec{r}_a situé d'un certain côté d'une fente. On veut calculer l'amplitude de probabilité $K(\vec{r}_b t_b, \vec{r}_a t_a)$ de la retrouver à l'instant t_b en un point \vec{r}_b de l'autre côté de la fente.
- Le Lagrangien est supposé quadratique en \vec{r} et $\dot{\vec{r}}$ (par exemple, particule libre, dans un champ de pesanteur ou dans un référentiel tournant).
- On considère tous les chemins possibles, réels ou non, passant par un point \vec{r}_c du plan de la fente à l'instant t_c et on étudie leur contribution à $K(b, a)$ dans l'intégrale de Feynman (1.2)

- On somme ensuite sur tous les instants t_c et sur tous les points \vec{r}_c possibles dans le plan de la fente.

Contributions au propagateur des chemins passant par $\vec{r}_c t_c$

- Γ_1 chemin quelconque reliant $\vec{r}_a t_a$ à $\vec{r}_c t_c$ - Action S_{Γ_1} le long de Γ_1
- Γ_2 " " " " $\vec{r}_c t_c$ à $\vec{r}_b t_b$ - " S_{Γ_2} " " " Γ_2

D'après (1.2), on a, \mathcal{N} étant une constante de normalisation :

$$K(\vec{r}_b t_b, \vec{r}_a t_a) = \mathcal{N} \int d^2 r_c \int dt_c \sum_{\Gamma_1, \Gamma_2} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} (S_{\Gamma_1} + S_{\Gamma_2}) \right\} \quad (2.1)$$

- Commençons par calculer

$$\sum_{\Gamma_1, \Gamma_2} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} (S_{\Gamma_1} + S_{\Gamma_2}) \right\} = \left(\sum_{\Gamma_1} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} S_{\Gamma_1} \right\} \right) \left(\sum_{\Gamma_2} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} S_{\Gamma_2} \right\} \right) \quad (2.2)$$

Comme le Lagrangien est supposé quadratique en $\vec{r}, \dot{\vec{r}}$, on peut utiliser (1.12) pour calculer les sommes sur Γ_1 et Γ_2 de (2.2)

$$\sum_{\Gamma_1} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} S_{\Gamma_1} \right\} \sim \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} S_{cl}(\vec{r}_c t_c, \vec{r}_a t_a) \right\} \quad \sum_{\Gamma_2} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} S_{\Gamma_2} \right\} \sim \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} S_{cl}(\vec{r}_b t_b, \vec{r}_c t_c) \right\} \quad (2.3)$$

où $S_{cl}(\vec{r}_c t_c, \vec{r}_a t_a)$ est l'action classique calculée le long du chemin réel Γ_{cl}^1 reliant $\vec{r}_a t_a$ à $\vec{r}_c t_c$ - Idem pour $S_{cl}(\vec{r}_b t_b, \vec{r}_c t_c)$ (Traits pleins de la Fig. 1)

Finalement,

$$\sum_{P_1, P_2} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} (S_{P_1} + S_{P_2}) \right\} \sim \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} [S_{cl}(\vec{r}_b t_b, \vec{r}_c t_c) + S_{cl}(\vec{r}_c t_c, \vec{r}_a t_a)] \right\} \quad (2.4)$$

Intégrale sur t_c

- D'après (1.6.a) et (1.6.b),

$$\frac{\partial}{\partial t_c} S_{cl}(\vec{r}_c t_c, \vec{r}_a t_a) = -H_c^1 \quad (2.5.a) \quad \frac{\partial}{\partial t_c} S_{cl}(\vec{r}_b t_b, \vec{r}_c t_c) = H_c^2 \quad (2.5.b)$$

où H_c^1 (H_c^2) sont les Hamiltoniens à l'extrémité \vec{r}_c de Γ_{cl}^1 (Γ_{cl}^2).

- En appelant

$$J(\vec{r}_c, t_c) = S_{cl}(\vec{r}_b t_b, \vec{r}_c t_c) + S_{cl}(\vec{r}_c t_c, \vec{r}_a t_a) \quad (2.6)$$

la somme qui apparaît dans la 2^{ème} exponentielle de (2.4), on obtient alors, compte tenu de (2.5)

$$J(\vec{r}_c, t_c + dt_c) = J(\vec{r}_c, t_c) + (H_c^2 - H_c^1) dt_c + \dots \quad (2.7)$$

- Nous supposons que les actions intervenant dans le problème sont très grandes devant \hbar . L'exponentielle $\exp \left\{ \frac{i}{\hbar} (H_c^2 - H_c^1) dt_c \right\}$ va donc osciller très vite avec dt_c et son intégrale sur dt_c va donner un résultat nul sauf si t_c est tel que

$$H_c^2 = H_c^1 \quad (2.8)$$

Ne vont donc contribuer de façon appréciable dans l'intégrale temporelle que les trajectoires classiques $\vec{r}_a t_a \rightarrow \vec{r}_c t_c \rightarrow \vec{r}_b t_b$ telles que l'énergie ne change pas quand on passe en $\vec{r}_c t_c$ de Γ_{cl}^1 à Γ_{cl}^2 . Si le mouvement est à énergie constante (L indépendant de t), l'énergie est donc constante tout au long de $\Gamma_{cl}^1 + \Gamma_{cl}^2$.

Intégrale sur \vec{r}_c

- Supposons donc t_c choisi de manière que l'égalité (2.8) soit satisfaite et prenons \vec{r}_c au milieu de la fente. D'après (1.5.a) et (1.5.b)

$$\frac{\partial}{\partial \vec{r}_c} S_{cl}(\vec{r}_c t_c, \vec{r}_a t_a) = \vec{p}_c^1 = \hbar \vec{k}_c^1 \quad (2.9.a) \quad \frac{\partial}{\partial \vec{r}_c} S_{cl}(\vec{r}_b t_b, \vec{r}_c t_c) = -\vec{p}_c^2 = -\hbar \vec{k}_c^2 \quad (2.9.b)$$

où \vec{k}_c^1 (\vec{k}_c^2) est le vecteur d'onde de la particule à l'extrémité \vec{r}_c de Γ_{cl}^1 (Γ_{cl}^2).

- On en déduit

$$J(\vec{r}_c + \vec{\xi}, t_c) = J(\vec{r}_c, t_c) + \hbar (\vec{k}_c^1 - \vec{k}_c^2) \cdot \vec{\xi} + \dots \quad (2.10)$$

En général, il n'y a aucune raison pour que \vec{k}_c^1 et \vec{k}_c^2 soient égaux, si \vec{r}_a et \vec{r}_b ne peuvent être reliés par une ligne droite passant par la fente. L'intégrale dans le plan de la fente de l'exponentielle du dernier terme de (2.10) fait apparaître la transformée de Fourier spatiale de la fente à la "fréquence" $\vec{k}_c^1 - \vec{k}_c^2$ correspondant au changement de vecteur d'onde de la particule quand elle traverse la fente le long du chemin classique $\vec{r}_a \rightarrow \vec{r}_c \rightarrow \vec{r}_b$. Finalement, on a :

$$K(\vec{r}_b t_b, \vec{r}_a t_a) \sim \underbrace{\exp \left\{ \frac{i}{\hbar} [S_{cl}(\vec{r}_b t_b, \vec{r}_c t_c) + S_{cl}(\vec{r}_c t_c, \vec{r}_a t_a)] \right\}}_{\text{avec } t_c \text{ tel que } E_c^2 = E_c^1} \times \int_{\text{fente}} e^{i(\vec{k}_c^1 - \vec{k}_c^2) \cdot \vec{\xi}} d^2 \xi \quad (2.11)$$

Le 1^{er} terme de (2.11) est le facteur de phase dû à la propagation le long du chemin classique d'énergie constante $\vec{r}_a t_a \rightarrow \vec{r}_c t_c \rightarrow \vec{r}_b t_b$. Le 2^{ème} terme de (2.11) décrit le phénomène de diffraction et peut être interprété comme l'amplitude de probabilité pour que la particule change de direction ($\vec{k}_c^1 \rightarrow \vec{k}_c^2$) quand elle traverse la fente.

Intégrale sur la fonction d'onde initiale

D'après (1.18), il faut, pour avoir la fonction d'onde $\psi(\vec{r}_b, t_b)$ calculer l'intégrale $\int d^3r_a \psi(\vec{r}_a, t_a) K(\vec{r}_b, t_b, \vec{r}_a, t_a)$. Comme dans le cours I précédent, et si l'état initial est une onde plane \vec{p}_0 , cette intégrale va privilégier les points de phase stationnaire, c-à-d tels que la trajectoire classique (à énergie constante) $\vec{r}_a, t_a \rightarrow \vec{r}_c, t_c \rightarrow \vec{r}_b, t_b$ ait l'impulsion \vec{p}_0 en \vec{r}_a, t_a .

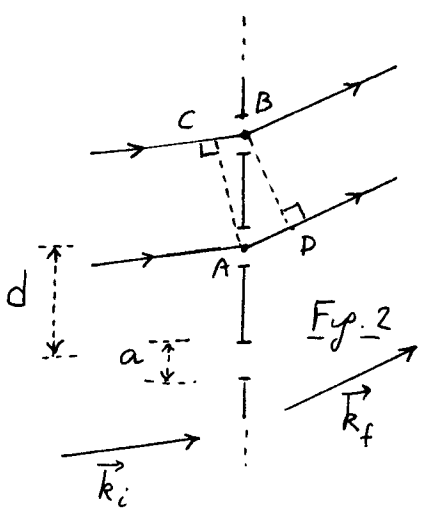
Récapitulation

Pour avoir la fonction d'onde en \vec{r}_b, t_b , il faut donc déterminer le point \vec{r}_a, t_a tel que la trajectoire classique d'énergie constante $\vec{r}_a, t_a \rightarrow \vec{r}_c, t_c \rightarrow \vec{r}_b, t_b$ ait l'impulsion \vec{p}_0 en t_a . Le déphasage entre $\psi(\vec{r}_b, t_b)$ et $\psi(\vec{r}_a, t_a)$ est alors donné par l'argument de (2.11)

Comme $S_{cl} = \int (\vec{p} \cdot d\vec{r} - E dt)$ (voir Eq. (1.7)) et que E est constant $-\int E dt$ se réduit à $E(t_b - t_a)$. La contribution au déphasage due à la propagation et provenant de l'intégrale sur \vec{r} vaut alors $\int_{\Gamma_{cl}} \frac{\vec{p} \cdot d\vec{r}}{\hbar} = \int_{\Gamma_{cl}} \frac{ds}{\lambda_{DB}}$ où ds est l'élément de longueur sur la trajectoire classique. Pour une particule libre λ_{DB} est indépendant de \vec{r} (analogue avec une propagation optique dans le vide). Pour une particule dans un potentiel, la trajectoire classique n'est plus formée de lignes droites et λ_{DB} dépend de \vec{r} (analogue avec une propagation optique dans un milieu d'indice variable).

② Diffraction par un réseau de fentes

Angles de diffraction



- Calcul très analogue à celui des réseaux optiques
Réseau périodique de fentes de largeur a séparées par une distance d (Fig. 2)

- $|\vec{k}_i| = |\vec{k}_f| = k = \frac{2\pi}{\lambda_{DB}}$ (2.12)

- Différence de marche entre 2 trajectoires passant par 2 fentes successives : $AD - BC$
 $\vec{AB} = \vec{d} \quad \vec{k}_f - \vec{k}_i = \vec{K}$ (2.13)

$AD - BC = \frac{(\vec{k}_f - \vec{k}_i) \cdot \vec{d}}{k} = \frac{\vec{K} \cdot \vec{d}}{k}$ (2.14)

- Condition d'interférence constructive
 $AD - BC = n \lambda_{DB} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$ (2.15)

$\hookrightarrow \vec{K} \cdot \vec{d} = 2n\pi \quad n = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$ (2.16)

- Pour des incidences quasi-normales et pour des angles θ_n petits entre \vec{k}_f et \vec{k}_i ($\lambda_{DB} \ll d$)
 $\vec{K} \cdot \vec{d} \approx |\vec{K}| d \approx \theta_n k d = 2\pi \theta_n d / \lambda_{DB}$ (2.17)

de sorte que (2.16) devient $\theta_n = n \lambda_{DB} / d \quad n = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$ (2.18)

L'onde plane incidente est transformée en plusieurs ondes planes cohérentes entre elles et de directions différentes ("division d'amplitude").

Discussion physique

- Avantages

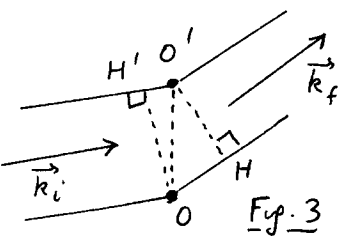
- Souplesse d'emploi. Structure qui fonctionne pour tout atome et toute molécule (ne nécessite pas l'excitation quasi-résonnante d'une raie atomique, comme la diffraction par une onde stationnaire)
- Angles de diffraction plus grands que pour la diffraction par une onde stationnaire : d peut être aussi petit que $0.1 \mu\text{m}$ (voir Ref. 2) alors que pour une onde stationnaire optique, $d \approx \lambda \approx 0.5 \mu\text{m}$.

- Inconvénients

- Perte d'atomes (coefficients de transmission ~ 0.3)
- Peu d'atomes dans le 1^{er} ordre de diffraction
- Dispersion très élevée : θ_n dépend de λ_{DB} donc de l'énergie incidente. Nécessité de jets mono-énergétiques.

Effet d'une translation du réseau

(Calcul utile pour l'analyse de l'expérience décrite plus loin - § 4)



- Le réseau est traduit perpendiculairement à la direction des fentes. Une fente donnée passe de O à O' avec

$$\vec{OO'} = \vec{p} \tag{2.19}$$

- L'onde diffractée \vec{k}_f (avec $\vec{k} = \vec{k}_f - \vec{k}_i$ satisfaisant (2.16)) prend une avance (calcul analogue à (2.14)) :

$$OH - OH' = \vec{k} \cdot \vec{p} / k \tag{2.20}$$

- Comme l'effet est le même pour toutes les fentes, l'onde diffractée dans la direction \vec{k}_f est multipliée par le facteur de phase

$$e^{-2\pi i (OH - OH') / \lambda_{DB}} = e^{-i \vec{k} \cdot \vec{p}} \tag{2.21}$$

On vérifie bien que si $\vec{p} = \vec{d}$, ce facteur de phase vaut 1, compte tenu de (2.16) : le réseau est invariant dans une translation d

Etude expérimentale : réalisée par 2 groupes, l'un au M.I.T (Refs 1, 2) sur le sodium, l'autre à Constance (Ref. 3) sur l'hélium métastable.

- Fabrication des microstructures (réseaux de fentes) par des méthodes lithographiques (voir Refs 1, 2, 3 et refs in).
Feuille d'or d'épaisseur $0.5 \mu\text{m}$ (MIT) ou $0.1 \mu\text{m}$ (Constance) avec des espacements de fentes $d = 0.2 \mu\text{m}$ ou $0.1 \mu\text{m}$ (MIT) ou $0.5 \mu\text{m}$ (Constance)

- Exemple de montage expérimental

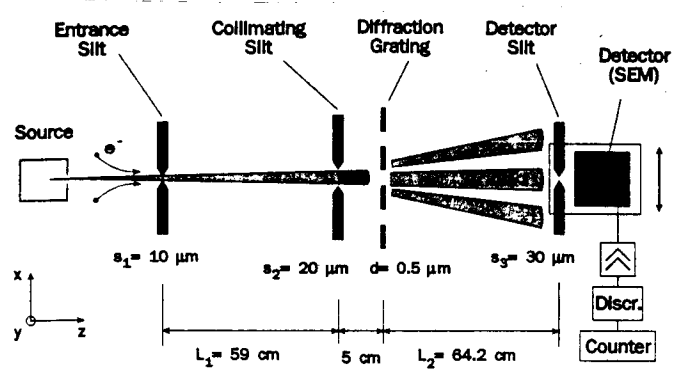
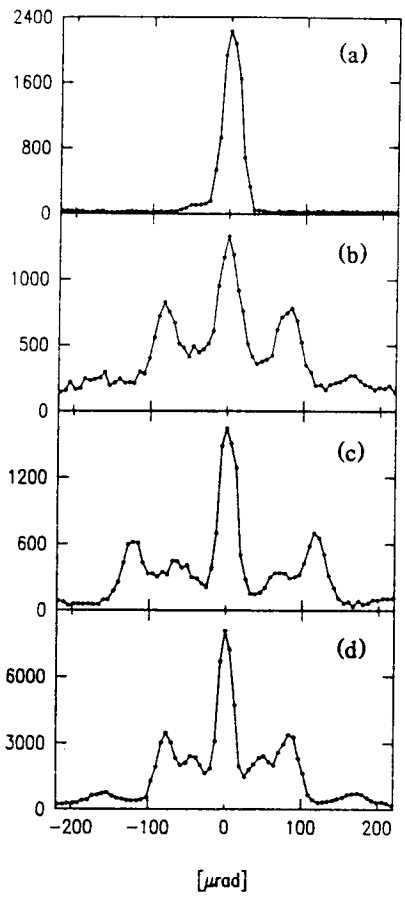
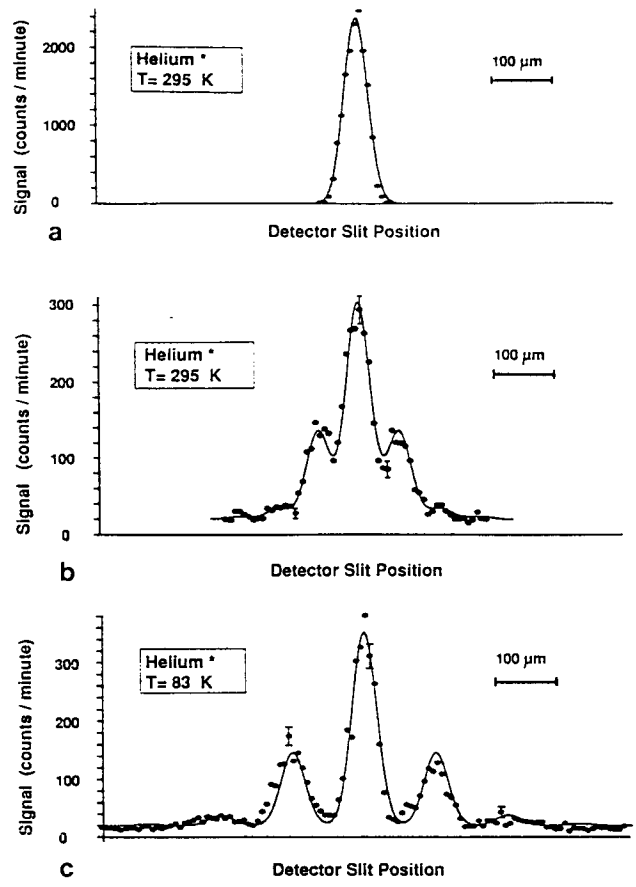


Fig. 4
(Extrait de [3])

- Exemple de résultats expérimentaux



Experimental profile of the Na beam. The y axes are the number of detected atoms; the counting time at each point is ~1 sec. The line through the points is only for visual effect. As explained in the text, (a) is the undiffracted beam, and (b)-(d) show the beam diffracted by transmission through the grating. In (c) the carrier gas is Xe, in the other cases it is Ar.



Experimental data. a Intensity distribution of the undiffracted beam in the detector plane, b diffraction pattern at a nozzle temperature $T = 295$ K ($\lambda_{dB} = 0.56$ Å), c diffraction pattern at $T = 83$ K ($\lambda_{dB} = 1.03$ Å)

Fig. 6 (extraite de [3])

Fig. 5 (extraite de [1]). Dans la courbe c, le gaz utilisé dans la détente supersonique pour entraîner Na est Xe, plus lourd que Ar, donc plus lent. La vitesse de Na est donc plus faible, donc λ_{dB} est plus grand et l'angle de diffraction θ , plus important. Les sous-structures apparaissant en (c) et (d) sont dues à des défauts du réseau.

③ 1^{ère} application : Focalisation d'atomes par une lentille de Fresnel

Principe

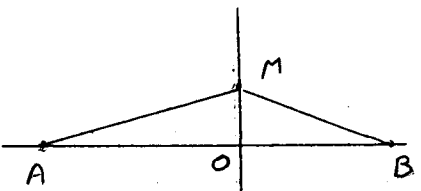


Fig. 7

- Plan \perp en O à la droite AB. (Fig. 7)
- Pour OM petit, la différence de marche entre le trajet AMB et le trajet AOB varie en z^2 , où $z = OM$
- En fonction de z , $\cos\{2\pi(AMB-AOB)/\lambda\}$ va donc varier comme $\cos Az^2$ et va avoir des signes alternativement > 0 et < 0 dans des "zones de Fresnel" de rayon croissant comme \sqrt{n}

- Si on ne laisse passer les atomes que dans les zones de Fresnel correspondant à un signe donné, l'interférence va être constructive en B. On peut montrer alors que le système se comporte comme une lentille
- Intérêt en optique atomique : λ_{dB} très petit, donc focalisation très efficace, à condition toutefois d'avoir un jet très monocinétique.

Etude expérimentale : réalisée par 2 groupes, l'un à Constance sur l'hélium métastable (Ref. 4) avec des zones de Fresnel circulaires (équivalent d'une lentille sphérique), l'autre au M.I.T. sur le sodium (Ref. 2) avec des fentes de Fresnel verticales (équivalent d'une lentille cylindrique)

- Exemple de lentille de Fresnel (Fig. 8 - extraite de [4])

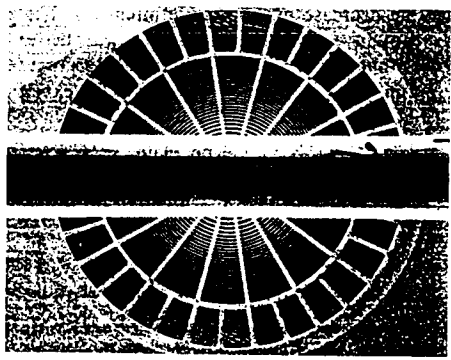


Fig. 8
100 μm
A scanning electron microscope picture of the zone plate. The wire, 50 μm in diameter, blocks out the zeroth order to increase the contrast in the center of the image plane.

- Exemple de dispositif expérimental (Fig. 9 - Extraite de [4])

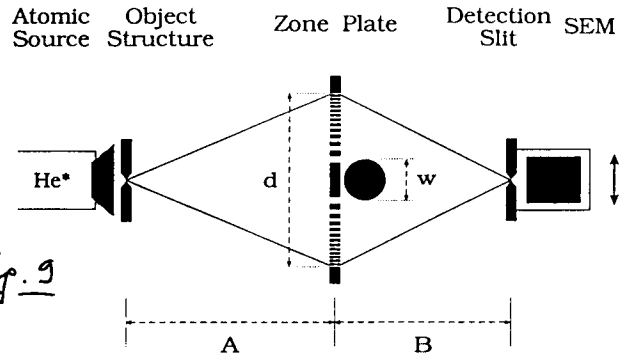


Fig. 9
A schematic of the experimental setup; the dimensions are $A=0.96$ m and $B=0.84$ m, $d=210$ μm , wire diameter $w=50$ μm .

- Exemple de résultats expérimentaux (Fig. 10 - Extraite de [4])

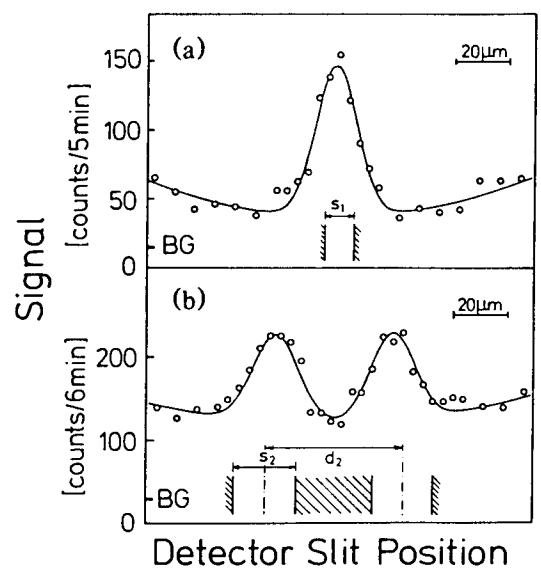


Fig. 10
Image of a single slit (a) and a double slit (b) at $T=20.5$ K. The dots represent the experimental data and the solid line is a fit through the data points. The slit dimensions, as shown in the insets, are $s_1=10$ μm for the single slit and $d_2=49$ μm and $s_2=22$ μm for the double slit. BG denotes the detector background level. The two insets give the dimensions of the corresponding object structures (to scale).

④ 2ème Application - Interféromètre atomique

Schéma de principe

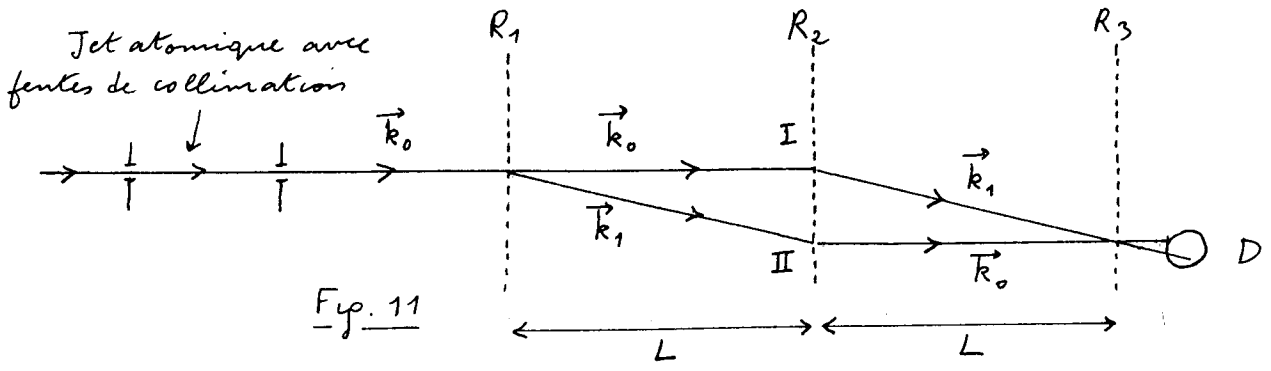


Fig. 11

- 3 réseaux équidistants R_1, R_2, R_3 , à une distance L l'un de l'autre avec des fentes de même espacement d .
- 2 chemins possibles I et II
 - I : Diffraction d'ordre 0 sur R_1 , puis d'ordre 1 sur R_2
 - II : Diffraction d'ordre 1 sur R_1 , puis d'ordre -1 sur R_2
- Les 2 ondes arrivant sur R_3 interfèrent et donnent des franges d'interférence, d'espacement d . Les atomes qui traversent R_3 sont détectés par un détecteur à fil chaud placé juste après R_3 . R_3 avec ses fentes d'espacement d sert de masque périodique pour observer le système de franges d'interfrange d .
- On translate R_2 dans son plan perpendiculairement aux fentes. Vecteur déplacement \vec{p} . D'après (2.21), les 2 ondes arrivant sur R_2 subissent des déphasages valant, respectivement, $\exp\{-i(\vec{k}_1 - \vec{k}_0) \cdot \vec{p}\}$ pour I, $\exp\{-i(\vec{k}_0 - \vec{k}_1) \cdot \vec{p}\}$ pour II. Ces déphasages étant différents, le système de franges d'interférence sur R_3 se déplace et le signal enregistré par D présente des oscillations.

Propriétés importantes

- Système achromatique. Une dispersion en énergie des atomes incidents ne brouille pas la frange centrale de l'oscillation détectée en D. Les 2 chemins I et II ont même longueur, quelle que soit l'énergie.
- Avec des valeurs suffisamment faibles de d et suffisamment grandes de L , la séparation des 2 faisceaux au niveau de R_2 peut être supérieure à la largeur des faisceaux, ce qui permet d'insérer une cloison (septum) entre les 2 faisceaux au niveau de R_2 , de manière à perturber ensuite les atomes sur l'un des 2 chemins et à détecter cette perturbation par un déplacement des franges.

Etude expérimentale

- Réalisé au M.I.T. sur le Sodium 1^{re} publication (Ref [5]) Amélioration de l'expérience [6].
- Montage expérimental Fig. 12 (extraite de [6])
- Nécessité d'avoir des réseaux parfaits sur des distances (de l'ordre de la séparation des faisceaux sur R_2) beaucoup plus grandes que pour les expériences de diffraction simple

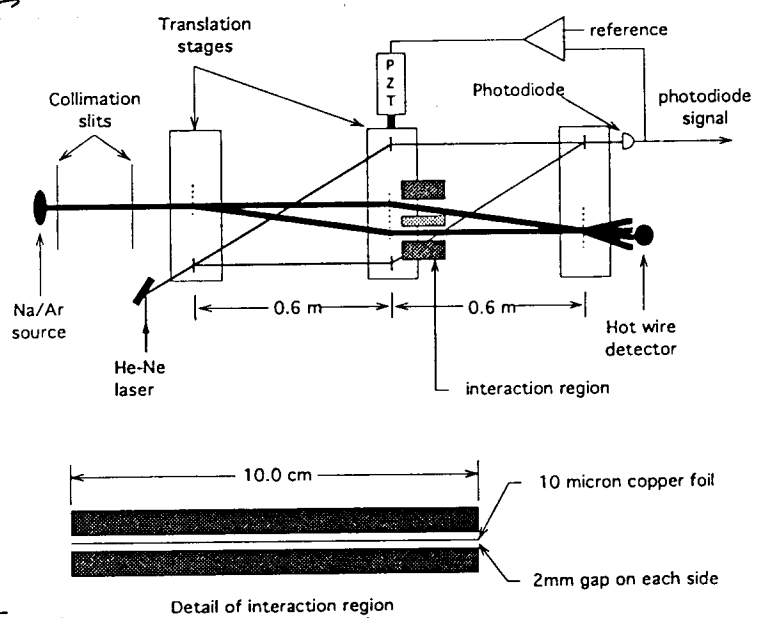


Fig. 12 (extraite de [6])

A schematic, not to scale, of our atom interferometer. The 10 μm copper foil is between the two arms of the interferometer (thick lines are atom beams). The optical interferometer (thin lines are laser beams) measures the relative position of the 200 nm period atom gratings (which are indicated by vertical dashed lines).

- Nécessité d'avoir des jointes // sur R_1, R_2, R_3 et de contrôler précisément les positions relatives de R_1, R_2, R_3 . Un interféromètre optique, construit sur les mêmes plaques que l'interféromètre atomique, permet une stabilisation active du montage.
- Dans l'expérience décrite dans [6], $d = 200$ nm, la largeur des faisceaux atomiques $20 \mu\text{m}$, la séparation entre les 2 faisceaux au niveau de R_2 $55 \mu\text{m}$, soit près de 3 fois le diamètre de chaque faisceau, ce qui permet d'insérer une cloison entre les 2 faisceaux, et de les faire donc passer dans des régions bien séparées.
- Exemple de résultats expérimentaux

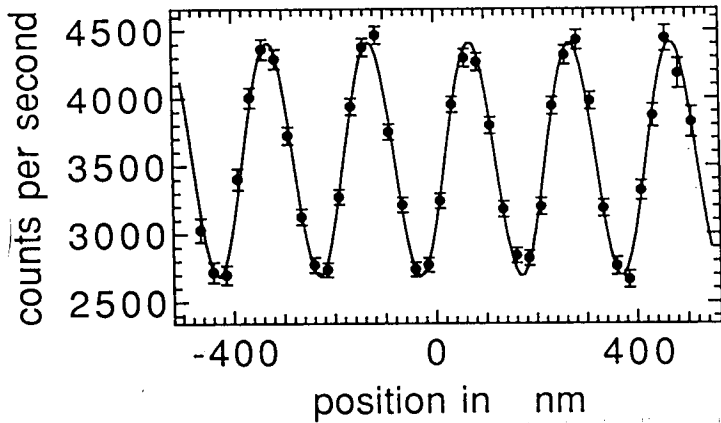


Fig. 13. (extraite de [6])

1 seconde par point

Incertitude sur la phase $17 \mu\text{rad}$

Un fond de 200 coups/sec a été soustrait

Applications

- Mesure de la polarisabilité statique de l'état fondamental de l'atome de Na obtenue en appliquant un champ électrique statique sur l'un des 2 côtés de la cloison, et en mesurant le déphasage des franges résultant de ce champ.
- Mesure de la partie réelle de l'amplitude de diffusion vers l'avant lors de collisions avec un gaz rare introduit dans l'une des 2 régions séparées par la cloison. Cette amplitude est à l'origine de l'apparition d'un déphasage sur le chemin correspondant et déplace les franges.

Références

[1] D.W. Keith, M.L. Shattensburg, Henry I. Smith, D.E. Pritchard
Phys. Rev. Lett. 61, 1580 (1988)

[2] C.R. Ekstrom, D.W. Keith, D.E. Pritchard
Appl. Phys. B54, 369 (1992)

[3] O. Carnal, A. Faulstich, J. Mlynek, Appl. Phys. B54, 88 (1991)

[4] O. Carnal, M. Sigel, T. Sleator, H. Takuma, J. Mlynek
Phys. Rev. Lett. 67, 3231 (1991)

[5] D.W. Keith, C.R. Ekstrom, P.A. Turchette, D.E. Pritchard
Phys. Rev. Lett. 66, 2693 (1991)

[6] D.E. Pritchard, in Atomic Physics 13, Proc. 13th Int. Conf. on Atomic Physics, 1992, ed. by H. Walther, T.W. Hänsch, B. Neizert (A.I.P. New York, 1993).

Diffraction d'ondes de de Broglie atomiques par des ondes laser stationnaires quasi-résonnantes

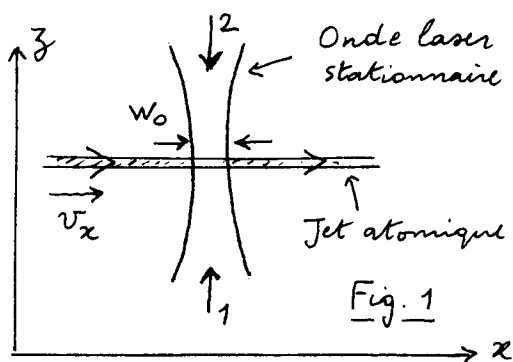
Buts de ce cours

Un atome traversant à angle droit une onde laser stationnaire quasi-résonnante subit une perturbation périodique dans l'espace. Analogie avec la traversée d'un réseau de fentes. Ce cours III et le suivant IV étudient diverses conséquences de cette interaction.

- Diffraction de l'onde de de Broglie - Calcul des angles et des amplitudes des ondes diffractées.
- Interprétation en termes de photons.
- Divers régimes possibles observables en fonction de l'épaisseur de l'onde traversée.
- Mises en évidence expérimentales de ces effets.
- Nouveaux schémas proposés récemment pour augmenter l'angle entre les ondes diffractées.

A - Considérations générales

① Notations - Hypothèses



- Jet atomique de vitesse moyenne v_x le long de Ox

$$\lambda_{DB} = \frac{h}{Mv_x} \quad (3.1)$$

- Ce jet traverse une onde laser stationnaire le long de Oz

$$2 E_0 \cos \omega_L t \cos k_L z \quad (3.2)$$

E_0 : amplitude de chacune des 2 ondes progressives 1 et 2 formant l'onde stationnaire.

- Rayon focal ("waist") de l'onde laser : w_0

$$\text{Temps de traversée} : T = \frac{w_0}{v_x} \quad (3.3)$$

- Vitesse et impulsion des atomes le long de Oz (dus à la dispersion angulaire du jet)

$$v_z = v \quad p_z = M v_z = p \quad (3.4)$$

- Atomes à 2 niveaux g et e

$$E_e - E_g = \hbar \omega_A \quad (3.5)$$

ω_A : Fréquence atomique, suffisamment proche de ω_L pour qu'on puisse faire l'approximation du champ tournant

- Hamiltonien d'interaction

$$\begin{aligned} V_{AL} &= -D E_0 \cos k_L z [e^{i\omega_L t} |g\rangle\langle e| + e^{-i\omega_L t} |e\rangle\langle g|] \\ &= \frac{\hbar \Omega_1}{2} (e^{i k_L z} + e^{-i k_L z}) [e^{i\omega_L t} |g\rangle\langle e| + e^{-i\omega_L t} |e\rangle\langle g|] \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\text{où } \Omega_1 = -D E_0 / \hbar \quad (3.7)$$

est la fréquence de Rabi associée à chaque onde (D : élément de matrice de l'opérateur moment dipolaire D entre e et g , supposé réel)

- Hamiltonien atomique.

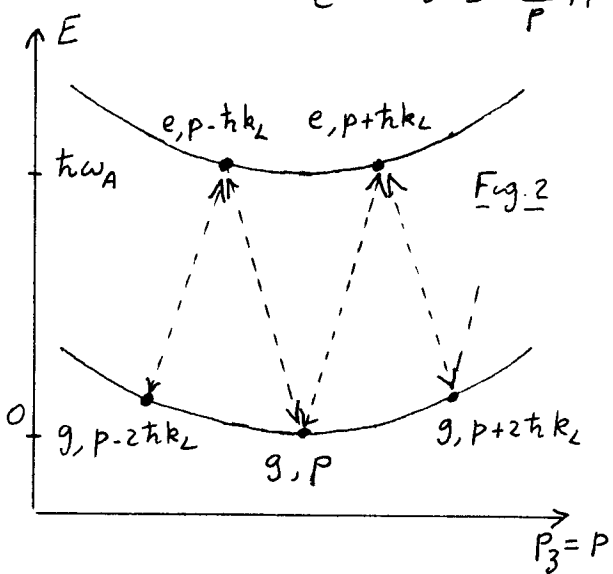
$$H_A = \hbar\omega_A |e\rangle\langle e| + \vec{P}^2/2M \quad (3.8)$$

- Dans tout ce cours III, et aussi dans le cours IV, on néglige l'émission spontanée : le temps de traversée T est suffisamment court, ou le paramètre de saturation suffisamment faible pour que la probabilité d'émettre spontanément un photon pendant T puisse être négligée.

② Echanges d'impulsions entre atome et champ.

- Comme on s'intéresse ici à la diffraction d'ondes de de Broglie, le mouvement de l'atome doit être traité quantiquement. Dans (3.6), ζ est donc un opérateur, et $e^{\pm i k_L \zeta}$ des opérateurs de translation dans l'espace des impulsions :

$$e^{\pm i k_L \zeta} = \sum_P |p \pm \hbar k_L\rangle \langle p| \quad (3.9)$$



- On voit alors que, partant de l'état $|g, p\rangle$ (atome dans g avec une impulsion $P_3 = p$), V_{AL} couple $|g, p\rangle$ à $|e, p \pm \hbar k_L\rangle$ (Voi Fig. 2 représentant les états d'énergie - impulsion de l'atome situés sur 2 paraboles $E = p^2/2M$ séparés par $\hbar\omega_A$ - Ref [1]) V_{AL} couple $|e, p \pm \hbar k_L\rangle$, non seulement à $|g, p\rangle$, mais aussi à $|g, p \pm 2\hbar k_L\rangle$, et ainsi de suite...

- L'état $|g, p\rangle$ est donc couplé à tous les états $|g, p + 2n\hbar k_L\rangle$ ($n = \pm 1, \pm 2, \dots$) Le gain d'impulsion $2n\hbar k_L$ est lié

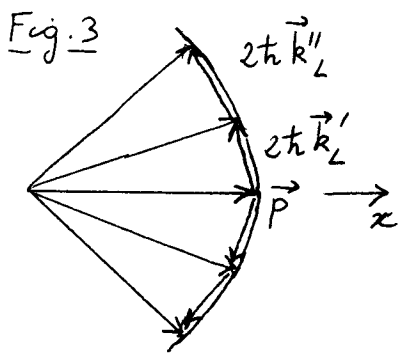
à un processus de redistribution de photons entre les 2 ondes progressives 1 et 2 formant l'onde stationnaire : si $n > 0$, n photons sont absorbés dans l'onde 1 et n photons sont émis de manière stimulée dans l'onde 2.

- Considérations analogues pour le couplage entre $|g, p\rangle$ et $|e, p + (n+1)\hbar k_L\rangle$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$)

③ Conservation de l'énergie totale (Ref [2]).

- Considérons le processus $|g, p\rangle \rightarrow |g, p + 2n\hbar k_L\rangle$, où n photons sont absorbés dans l'onde 1 et n photons sont émis de manière stimulée dans l'onde 2. Comme tous les photons ont même énergie $\hbar\omega_L$, l'énergie du champ ne change pas. Pour que l'énergie totale du système atome + champ ne change pas, et que le processus $|g, p\rangle \rightarrow |g, p + 2n\hbar k_L\rangle$ soit donc réel, l'énergie cinétique de l'atome doit donc rester inchangée, ce qui implique que \vec{p} et $\vec{p} + 2n\hbar\vec{k}_L$ aient même module.

- Si l'impulsion initiale \vec{p} est dirigée suivant Ox , et si on se limite à des impulsions de photons $\hbar\vec{k}_L$ parallèles à Oz , les extrémités de \vec{p} et $\vec{p} + 2\hbar\vec{k}_L, \vec{p} + 4\hbar\vec{k}_L \dots$ ne peuvent jamais



être situées sur un même cercle (voir Fig. 3).
 Pour qu'il en soit ainsi, il faut des impulsions de photons $2\hbar k_L'$, $2\hbar k_L''$... ayant des composantes suivant Ox

- En fait, c'est bien ce qui se passe si l'on tient compte de la valeur finie du rayon focal w_0 de l'onde stationnaire, et de la dépendance en x de cette onde, ce qui n'est pas fait dans (3.2). L'impulsions des photons des ondes 1 et 2 a en effet une dispersion suivant Ox de l'ordre de \hbar/w_0 , et

les processus de la figure 3 deviennent possibles, si w_0 est suffisamment petit. Un tel régime est appelé "régime de Raman-Nath" (il repose sur des approximations mathématiques analogues à celles utilisées par Raman et Nath dans l'étude d'un autre problème physique). Pour pouvoir étudier commodément un tel régime, on peut garder l'expression (3.2) de l'onde stationnaire, à condition de négliger l'énergie cinétique $P_z^2/2M$ de l'atome le long de Oz dans l'expression (3.8) de HA. Ceci revient à remplacer les paraboles de la figure 2 par des horizontales. La condition de validité précise de l'approximation de Raman-Nath sera analysée plus loin (§§ B1 et B2c).

- Si w_0 est très grand, l'expression (3.2) devient valable et la seule possibilité pour conserver l'énergie globale constante à prendre des vecteurs \vec{p} et $\vec{p} + 2n\hbar\vec{k}_L$ (où \vec{k}_L est parallèle à Oz) symétriques par rapport à l'axe Ox (voir Fig. 4)

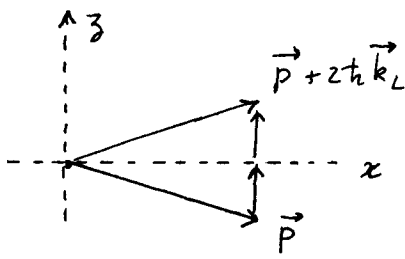


Fig. 4a

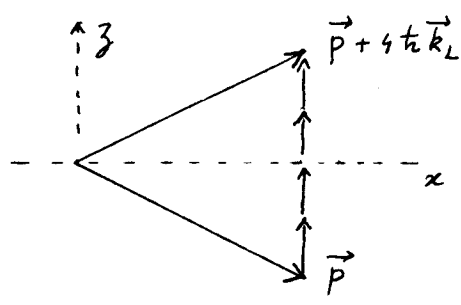


Fig. 4b

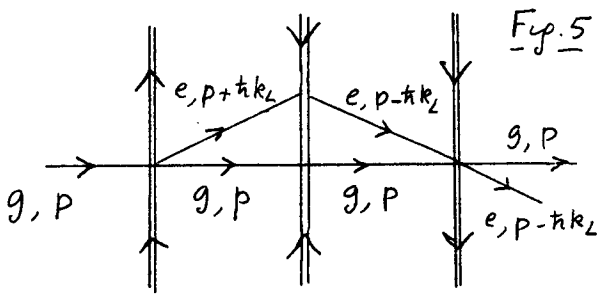
Un tel régime est appelé "régime de Bragg". La diffraction de Bragg s'effectue soit à l'ordre le plus bas ($n=1$, Fig. 4a), soit à des ordres supérieurs (par exemple $n=2$, Fig. 4b).

④ Liens avec l'interférométrie atomique

- Ce lien est évident pour le régime de Bragg. Nous verrons en effet que, dans la diffraction d'ordre le plus bas (Fig. 4a), on peut, partant de l'état $|g, \vec{p}\rangle$, aboutir après traversée de l'onde dans une superposition linéaire des états $|g, \vec{p}\rangle$ et $|g, \vec{p} + 2\hbar\vec{k}_L\rangle$, ce qui réalise l'équivalent d'une lame séparatrice pour ondes de de Broglie et est tout à fait analogue à la diffraction de Bragg utilisée dans les interféromètres à neutrons.

- Dans le régime de Raman-Nath, on peut observer plusieurs ordres de diffraction, comme dans la diffraction par un réseau de fentes étudiée dans le cours II. Il est possible alors de

reinterpréter des expériences de franges de Ramsey optiques utilisant des ondes stationnaires en termes d'interféromètres atomiques (Ref. [3]).



- Considérons par exemple l'expérience de la figure 5 utilisant une onde stationnaire centrale encadrée de part et d'autre par 2 ondes progressives situées à égale distance et se propageant dans des sens opposés. La traversée de la 1^{re} onde progressive fait passer de l'état $|g, p\rangle$ à une superposition linéaire de $|g, p\rangle$ et $|e, p + \hbar k_L\rangle$. La traversée de l'onde stationnaire peut alors faire passer

de $|e, p + \hbar k_L\rangle$ à $|e, p - \hbar k_L\rangle$ (ordre de diffraction -2 qui serait impossible à réaliser avec une onde progressive), l'état $|g, p\rangle$ demeurant inchangé. Les 2 états $|g, p\rangle$ et $|e, p - \hbar k_L\rangle$ peuvent alors être recombinés lorsqu'ils arrivent sur la troisième onde progressive (noter qu'elle doit bien se propager en sens inverse de la 1^{re} pour que $e, p - \hbar k_L$ puisse se transformer en g, p et g, p en $e, p - \hbar k_L$).

Comme dans l'expérience utilisant 2 paires d'ondes progressives se propageant dans des sens opposés, analysée dans le cours 92-93, on voit apparaître, sur la figure 5, 2 chemins qui se séparent et se recombinent, donnant naissance à un interféromètre atomique enfermant une surface nulle. Comme les états internes ne sont pas les mêmes dans les 2 chemins, le déphasage entre les 2 chemins va dépendre du désaccord $\delta = \omega_L - \omega_A$. On comprend ainsi pourquoi une telle disposition expérimentale peut donner naissance à des franges de Ramsey optiques, ne se brouillant pas lors de la moyenne sur p , et de largeur de l'ordre de \hbar/T_{vol} où T_{vol} est le temps de vol d'une onde à l'autre (on suppose bien sur ici l'émission spontanée à partir de e négligeable pendant T_{vol}).

⑤ Quelques bases d'états intéressantes

- En écrivant $\cos k_L z$ sous la forme $(e^{ik_L z} + e^{-ik_L z})/2$, comme nous l'avons fait dans (3.6), on fait apparaître les 2 ondes progressives formant l'onde stationnaire. Une telle forme de V_{AL} fait apparaître clairement les échanges d'impulsions entre atome et champ. La base d'états $\{|g, p\rangle\}$, ou plus généralement $\{|g, p, N_1, N_2\rangle\}$, où N_1 et N_2 sont les nombres de photons dans les modes $+k_L$ et $-k_L$ dans un traitement quantique du champ, est alors très commode pour étudier l'évolution de l'impulsion atomique. Nous l'utiliserons pour analyser le régime de Bragg.

- On peut également garder le mode en $\cos k_L z$ du champ correspondant à l'onde stationnaire (un photon de ce mode est une superposition linéaire d'un photon $+k_L$ et d'un photon $-k_L$). Une base intéressante est alors celle des états habillés du système atome + mode $\cos k_L z$ en interaction. Les énergies

de ces états habillés, portés en fonction de z , font alors apparaître des courbes de potentiel (plus exactement, des bi-potentiels, car il y a 2 types d'états habillés), dans lesquelles se déplace l'atome. Cette base d'états peut être beaucoup plus commode que la précédente quand on privilégie l'aspect position de l'atome : par exemple, étude du mouvement d'un petit paquet d'ondes bien localisé (effet Stern - Gerlach optique) ; étude du régime Raman - Nath, où l'atome se déplace très peu le long de l'onde stationnaire lors de la traversée de cette onde.

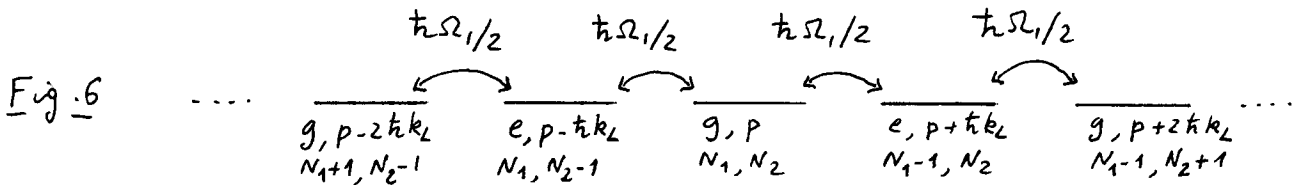
B. Régime de Raman - Nath

① Approximation effectuée

Première formulation : énergie cinétique $P_z^2/2M$ le long de l'onde stationnaire négligée.

↳ Dégénérescence entre les états d'énergie-impulsion dont les impulsions le long de Oz diffèrent d'un nombre entier de fois $\hbar k_L$.

- Exemple : cas résonnant $\omega_L = \omega_A$



Etats dégénérés couplés de proche en proche (couplage $\hbar\Omega_1/2$).

Analogie avec la propagation le long d'une chaîne en physique du solide (la position étant remplacée ici par l'impulsion).

- Condition de validité

On part de g, p, N_1, N_2 avec $p=0$. Pendant le temps T , on fait un nombre maximum n_{max} de pas $\hbar k_L$ à droite et à gauche. On atteint ainsi des états dont l'énergie cinétique diffère de celle de l'état initial par $n_{max}^2 \hbar^2 k_L^2 / 2M$. On a le droit de négliger cette différence d'énergie si elle est négligeable devant les couplages non-diagonaux entre états

$$\hbar\Omega_1 \gg n_{max}^2 \hbar^2 k_L^2 / 2M \quad (3.10)$$

On calculera plus loin (§ B 2 C) un ordre de grandeur de n_{max} .

- Dans le cas non résonnant ($\omega_L \neq \omega_A$), tous les états de la figure 6 contenant g sont dégénérés et sont décalés de tous les états contenant e (eux-mêmes dégénérés) d'une distance $\hbar\delta$ où

$$\delta = \omega_L - \omega_A \quad (3.11)$$

est le désaccord. Si on part d'un état g et si $|\delta| \gg \Omega_1$, la propagation se fait essentiellement à l'intérieur des états g

Formulation équivalente de l'approximation

- Si $P_z^2/2M$ est négligé, il n'y a plus dans l'hamiltonien total

d'opérateurs (comme P_3) ne commutant pas avec z et

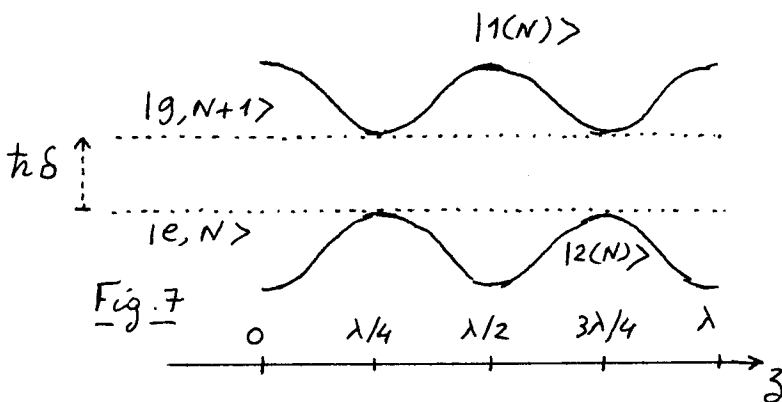
$$\frac{dz}{dt} = \frac{i}{\hbar} [z, H] = 0 \quad (3.12)$$

z ne varie donc pas et on peut négliger le déplacement de l'atome le long de l'onde laser au cours de la traversée.

- Si l'atome entre dans l'onde stationnaire dans l'état $|3_0\rangle |X_{in}\rangle$ (état localisé en z_0 , dans l'état interne initial $|X_{in}\rangle$), il sort dans l'état $|3_0\rangle |X_{fin}\rangle$, toujours localisé en z_0 , l'état interne final $|X_{fin}\rangle$ pouvant être calculé à partir d'une équation de Schrödinger contenant $V_{AL}(z_0)$. Il est alors intéressant d'utiliser la base des états habillés.

② Diffraction d'une onde de de Broglie incidente

a) Etats habillés en fonction de z



- N : nombre de photons dans le mode $\cos k_L z$

- Etats non couplés (en pointillés sur la figure 7)
 $\{|g, N+1\rangle, |e, N\rangle\}$

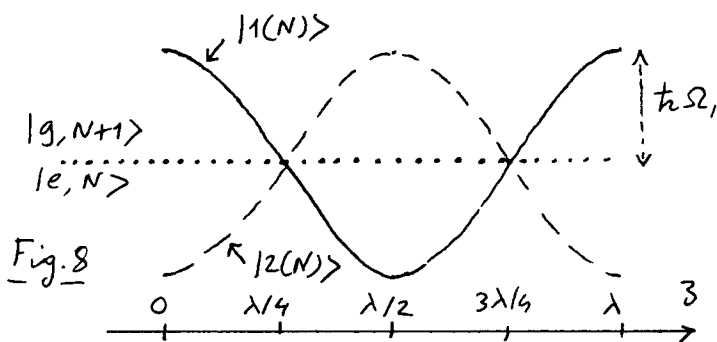
Quasi-dégénérés: Ecart $\hbar\delta$.

- Elements de matrice de V_{AL} d'après (3.6), et en faisant réapparaître $\cos k_L z$

$$\langle e, N | V_{AL} | g, N+1 \rangle = \hbar\Omega_1 \cos k_L z \quad (3.13)$$

- On en déduit que les états habillés (traits pleins de la Fig. 7) se repoussent au maximum aux ventres ($z = 0, \lambda/2, \lambda, \dots$) et coïncident avec les états non-perturbés aux nœuds ($z = \lambda/4, 3\lambda/4, \dots$).

Cas résonnant : $\delta = \omega_L - \omega_A = 0$



- Les états non couplés sont dégénérés

- Les états habillés s'écrivent

$$\begin{cases} |1(N)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|g, N+1\rangle + |e, N\rangle] \\ |2(N)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|g, N+1\rangle - |e, N\rangle] \end{cases} \quad (3.14)$$

et gardent la même forme, indépendante de x , même si l'amplitude de l'onde laser a une variation plus complexe qu'une forme en crêteau le long de x

- Les énergies de ces états valent

$$E_{1(N)} = \hbar\Omega_1 \cos k_L z$$

$$E_{2(N)} = -\hbar\Omega_1 \cos k_L z \quad (3.15)$$

Cas très non résonnant : $|\delta| \gg \Omega_1$. Supposons par exemple $\delta > 0$.

$|1(N)\rangle$ est alors très proche de $|g, N+1\rangle$ et l'expression perturbative de son énergie $E_{1(N)}$ s'écrit :

$$E_{1(N)} = \frac{\hbar^2 \Omega_1^2 \cos^2 k_L z}{\hbar\delta} = \frac{\hbar\Omega_1^2}{2\delta} (1 - \cos 2k_L z) \quad (3.16)$$

b) Calcul des amplitudes des ondes diffractées dans 2 cas simples III-7

Cas résonnant ($\delta = 0$)

- Etat externe entrant : onde plane $p=0 \rightarrow \Psi_{\text{ext}}(z)$ indépendant de z .

- Etat interne entrant

$$|g, N+1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|1(N)\rangle + |2(N)\rangle] \quad (3.17)$$

- Etat sortant au point z

$$\begin{aligned} |\Psi_{\text{fin}}(z)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} [|1(N)\rangle e^{-iE_{1(N)}T/\hbar} + |2(N)\rangle e^{-iE_{2(N)}T/\hbar}] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} [|1(N)\rangle e^{-i\Omega_1 T \cos k_L z} + |2(N)\rangle e^{i\Omega_2 T \cos k_L z}] \\ &= |g, N+1\rangle \cos[\Omega_1 T \cos k_L z] - i |e, N\rangle \sin[\Omega_1 T \cos k_L z] \end{aligned} \quad (3.18)$$

On a supposé que l'atome "voit" pendant le temps T un champ d'amplitude constante. Comme les états propres (3.14) ne dépendent pas de l'amplitude du champ lorsque $\delta = 0$, l'expression (3.18) demeure valable même si $\Omega_1(t)$ n'a pas une variation en forme de créneau. Il suffit de faire le remplacement

$$\Omega_1 T \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \Omega_1(t) dt \quad (3.19)$$

- Utilisons les identités

$$\cos(u \cos \theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n J_{2n}(u) e^{2in\theta} \quad (3.20)$$

$$\sin(u \cos \theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n J_{2n+1}(u) e^{i(2n+1)\theta} \quad (3.21)$$

$$e^{\pm iu \cos \theta} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (\pm i)^n J_n(u) e^{\mp in\theta} \quad (3.22)$$

Elles permettent de transformer (3.18) en

$$|\Psi_{\text{fin}}(z)\rangle = \sum_n (-1)^n J_{2n}(\Omega_1 T) e^{2in k_L z} |g, N+1\rangle - i \sum_n (-1)^n J_{2n+1}(\Omega_1 T) e^{i(2n+1) k_L z} |e, N\rangle \quad (3.23)$$

les J_n étant des fonctions de Bessel d'ordre n .

- L'expression (3.23) fait apparaître une infinité d'ondes diffractées ayant des impulsions le long de Oz , égales à des multiples n de $\hbar k_L$. Pour les multiples $2n$ pairs, l'atome est dans g et l'amplitude de l'onde diffractée vaut $(-1)^n J_{2n}(\Omega_1 T)$. Pour les multiples $(2n+1)$ impairs, l'atome est dans e et l'amplitude de l'onde diffractée vaut $-i(-1)^n J_{2n+1}(\Omega_1 T)$.

Cas très non résonnant ($\delta \gg \Omega_1$)

- L'atome suit adiabatiquement l'état habillé $|1(N)\rangle$ qui se raccorde à $|g, N+1\rangle$ en dehors de l'onde laser. On suppose donc ici que $\Omega_1(t)$ ne varie pas brusquement avec t et on pose :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Omega_1^2(t) dt = \overline{\Omega_1^2} T \quad (3.24)$$

où T est un temps typique de traversée et $\overline{\Omega_1^2}$ une valeur moyenne typique de $\Omega_1^2(t)$. On a donc, compte tenu de (3.16), (3.24) et (3.22):

$$\begin{aligned} |\Psi_{\text{fin}}(z)\rangle &= |g, N+1\rangle e^{-i \int_{-\infty}^{+\infty} E_{1(N)}(t) dt / \hbar} = |g, N+1\rangle e^{-i \frac{\overline{\Omega_1^2} T}{2\delta} (1 - \cos 2k_L z)} \\ &= |g, N+1\rangle e^{-i \overline{\Omega_1^2} T / 2\delta} \sum_n (i)^n J_n(\overline{\Omega_1^2} T / 2\delta) e^{-2in k_L z} \end{aligned} \quad (3.25)$$

Spectre pair d'ondes diffractées, d'amplitudes proportionnelles à $J_n(\overline{\Omega_1^2} T / 2\delta)$.

c) Discussion physique,

Interprétation corpusculaire

Déjà donné plus haut (§ A2) : redistribution de photons entre les 2 ondes progressives formant l'onde stationnaire.

Interprétation ondulatoire

- Diffraction d'une onde de de Broglie, de longueur d'onde

$$\lambda_{DB} = \frac{h}{p_x} \quad (3.26)$$

par une structure périodique de période d .

- D'après les résultats du cours II, les angles $\theta_n = p_z/p_x$ des ondes diffractées valent

$$\theta_n = \frac{p_z}{p_x} = \frac{n \lambda_{DB}}{d} = \frac{n h}{p_x d} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.27)$$

d'où l'on tire :
$$p_z = n h/d \quad (3.28)$$

- Dans le cas résonnant, la période d vaut λ (voir Fig. 8) où $\lambda = 2\pi/k_L$ est la longueur d'onde laser. On en déduit $p_z = n h k_L / 2\pi = n \hbar k_L$, en accord avec (3.23).

Dans le cas non résonnant, la période d vaut $\lambda/2$ (voir Fig. 7) et donc $p_z = 2n \hbar k_L$, en accord avec (3.25)

- En fait, dans le problème étudié ici, on n'a pas d'absorption d'atomes, comme dans le cours II. Plutôt qu'un réseau de transmission, on a donc un réseau de phase.

- Analogie avec l'effet Kapitza-Dirac (voir Ref. [4])

Reinterprétation de la condition de validité (3.10)

- Pour un u donné, la fonction de Bessel $J_n(u)$ n'est importante que si $n \leq u$.

- Dans le cas résonnant, l'argument des fonctions de Bessel apparaissant dans (3.23) est $\Omega_1 T$. On en déduit

$$n_{max} \sim \Omega_1 T \quad (3.29)$$

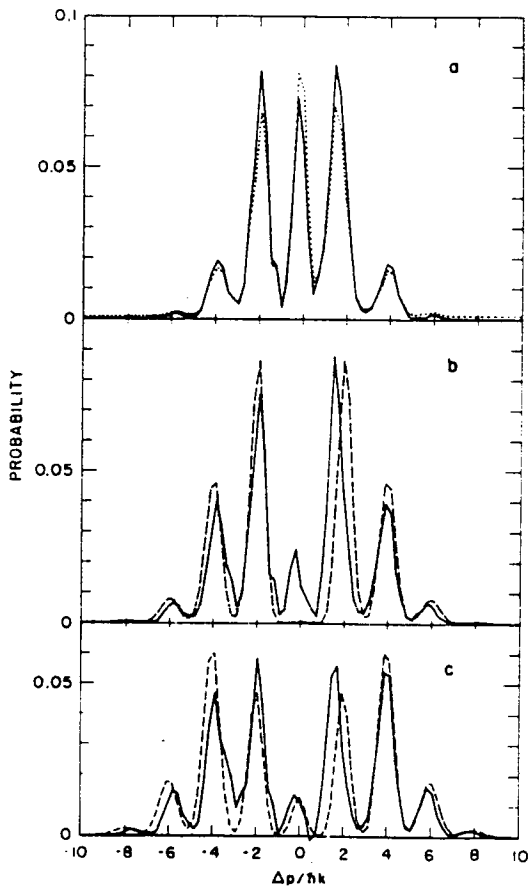
L'étalement en impulsions croît donc linéairement avec T (et non pas en \sqrt{T} comme pour un processus de diffusion).

- Si l'on reporte (3.29) dans (3.10), on peut écrire (3.10) sous la forme

$$\frac{\hbar k_L \Omega_1}{M} T^2 \ll \frac{1}{k_L} \sim \lambda \quad (3.30)$$

$\hbar k_L \Omega_1 \sim \hbar \Omega_1 / \lambda$ est de l'ordre de la force associée aux gradients des états localisés (variation de $\hbar \Omega_1$ sur une distance λ - voir Fig. 8). Cette force communique à l'atome une accélération $\gamma \sim \hbar k_L \Omega_1 / M$ et lui fait parcourir une distance le long de Oz de l'ordre de γT^2 . Le membre de gauche de (3.30) représente donc le déplacement de l'atome le long de l'onde stationnaire pendant le temps de traversée T . Ce déplacement doit donc être négligeable devant λ .

③ Mise en évidence expérimentale (Expériences réalisées III-9
 au M.I.T. 1^{re} version Ref. [5] - version améliorée Ref. [6])



Atomic diffraction patterns corresponding to the following scans (listed in Table I): (a) scan A4, (b) scan A5, (c) scan A3. In (a) the raw (dotted line) and corrected data (solid line) are compared. In (b) and (c) we display the theoretical fits (dashed line), described in the text, and the corrected data (solid line). All curves are normalized. A typical count rate is $\sim 10^6$ atoms/sec per scan.

- Jet atomique supersonique de Na avec une très bonne collimation, traversant à angle droit une onde stationnaire. Détection avec un fil chaud de la distribution en impulsions des atomes défléchis
- Rayons focaux $70 \mu\text{m}$ et $40 \mu\text{m}$ correspondant à des temps de traversée de 70 et 45 ns
- Transition utilisée (système à 2 niveaux) $3^2S_{1/2} F=2, m_F=2 \leftrightarrow 3^2P_{3/2} F=3, m_F=3$
- Corrections effectuées dans a
 Soustraction d'un fond et d'une contribution d'atomes non défléchis dans $F=1$
- Valeurs des paramètres

Scan A4	$\Omega_{1/2\pi} = 64 \text{ MHz}$	$\delta/2\pi = -399 \text{ MHz}$
Scan A5	$\Omega_{1/2\pi} = 64 \text{ MHz}$	$\delta/2\pi = -253 \text{ MHz}$
Scan A3	$\Omega_{1/2\pi} = 135 \text{ MHz}$	$\delta/2\pi = -922 \text{ MHz}$

Fig. 9 Extrait de [6]

Références

[1] C. Bordé, *Advances in Laser Spectroscopy*, ed. by F.T. Arecchi, F. Strumia, H. Walther (Plenum 1993) p.1 - et *Revue des Colloques, Ondes et Signal*, NS 83-1 (1983)

[2] P.J. Martin, B.C. Oldaker, A.H. Miklich, D.E. Pritchard *Phys. Rev. Lett.* **60**, 515 (1988)

[3] C. Bordé, *Phys. Letters*, **A140**, 10 (1989)

[4] P.L. Kapitza, P.A.M. Dirac, *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **29**, 297 (1933)
 Pour la 1^{re} suggestion d'étendre cet effet aux atomes, voir
 S. Altshuler, L. Frantz, R. BrauNSTein, *Phys. Rev. Lett.* **17**, 231 (1966)

[5] P.E. Moskowitz, P.L. Gould, S.R. Atlas, D.E. Pritchard, *Phys. Rev. Lett.* **51**, 370 (1983)

[6] P.L. Gould, G.A. Ruff, D.E. Pritchard, *Phys. Rev. Lett.* **56**, 827 (1986)

Quelques articles théoriques sur le mouvement d'un atome dans une onde stationnaire

[7] R.J. Cook, A.F. Bernhardt, *Phys. Rev.* **A18**, 2533 (1978)

[8] A.P. Kazantsev, G.I. Surdutovich, V.P. Yakovlev *Pis'ma Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **31**, 542 (1980) [*JETP Lett.* **31**, 509 (1980)]

[9] A.F. Bernhardt, B.W. Shore, *Phys. Rev.* **A23**, 1290 (1981)

[10] E. Arimondo, A. Bambini, S. Stenholm, *Phys. Rev.* **A24**, 898 (1981).

Diffraction d'ondes de de Broglie atomiques par des ondes laser stationnaires quasi-résonnantes (suite)

C - Régime de Bragg

① Conditions sur le rayon focal de l'onde stationnaire

- D'après la discussion générale des §§ A2 et A3, l'angle de déflection du faisceau incident est de l'ordre de

$$\theta \sim \frac{2\hbar k_L}{p_x} = \frac{2\lambda_{DB}}{\lambda_L} \quad (4.1)$$

où $\lambda = 1/k_L = \lambda_L/2\pi$, λ_L étant la longueur d'onde laser (voir aussi (3.1))

- La dispersion angulaire

$$\delta\theta \sim \frac{\hbar/w}{\hbar k_L} = \frac{1}{w k_L} = \frac{\lambda_L}{w} \quad (4.2)$$

des photons laser due à la valeur finie du rayon focal w doit être inférieure à θ , si l'on veut que la conservation de l'énergie empêche un processus tel que celui de la figure 1a où les directions moyennes du jet atomique et de l'onde laser sont perpendiculaires.

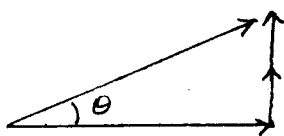


Fig. 1a

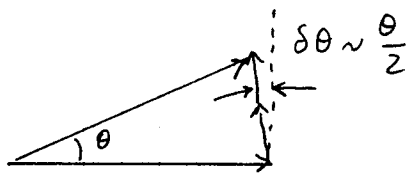


Fig. 1b

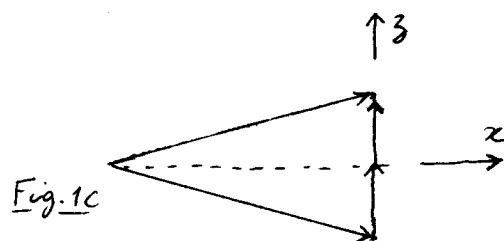


Fig. 1c

Pour que le processus de la Fig. 1b (qui peut conserver l'énergie grâce à une valeur de $\delta\theta$ de l'ordre de $\theta/2$) soit impossible, il faut donc que $\delta\theta \ll \theta/2$, c.-à.-d. compte tenu de (4.1) et (4.2)

$$\frac{\lambda_{DB}}{\lambda_L} \gg \frac{\lambda_L}{w} \quad \rightarrow \quad w \gg \frac{\lambda_L^2}{\lambda_{DB}} \quad (4.3)$$

Dans les expériences du M.I.T., $\lambda_{DB} \sim 0.2 \text{ \AA}$, $\lambda_L \sim 6000 \text{ \AA}$ et on trouve que w doit être supérieur au millimètre, c.-à.-d. beaucoup plus grand que les valeurs ($70 \mu\text{m}$ ou $40 \mu\text{m}$) correspondant aux expériences décrites dans le cours III.

- Si la condition (4.3) est réalisée, les seuls processus conservant l'énergie sont du type de celui représenté sur la figure 1c, où les vecteurs d'onde incident et diffracté sont symétriques par rapport à l'axe Ox perpendiculaire à l'axe Oz de l'onde laser (voir aussi les figures 4a et 4b du cours III).

Dans cette partie C, nous nous supposons placés dans ce régime.

② Diffraction de Bragg à l'ordre le plus bas

a) Etats couplés

- Reprenons la représentation utilisée sur la figure 2 du cours III. D'après les considérations générales du § A3 du cours III, les états d'impulsion-énergie couplés dans la diffraction de Bragg d'ordre 1 sont les états $g, p_3 = p = -\hbar k_L$ et $g, p_3 = p = +\hbar k_L$. La figure 2

représente ces 2 états importants $g, +\hbar k_L$ et $g, -\hbar k_L$ ainsi que d'autres états voisins, l'atome pouvant être dans g ou e .

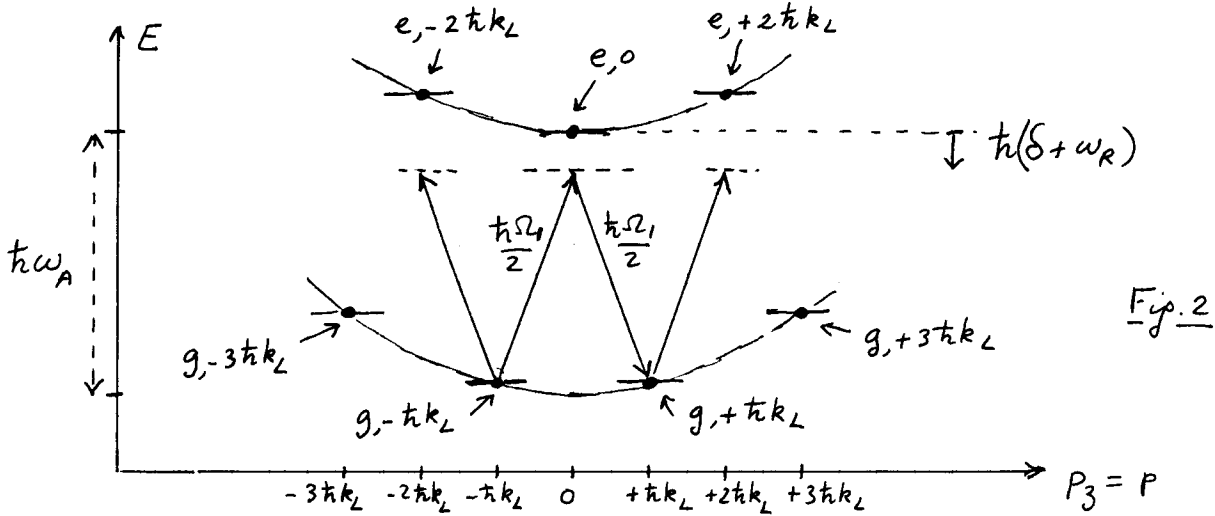


Fig. 2

- Les états $g, -\hbar k_L$ et $g, +\hbar k_L$ sont couplés indirectement via l'état $e, 0$ par un processus Raman stimulé (absorption d'un photon dans l'onde 1, avec une amplitude $\hbar\Omega_1/2$, et passage virtuel de l'atome dans l'état $e, 0$, suivis de l'émission stimulée d'un photon dans l'onde 2, avec une amplitude $\hbar\Omega_2/2$).
- Le défaut d'énergie dans l'état intermédiaire est

$$E_{g, -\hbar k_L} + \hbar\omega_L - E_{e, 0} = \hbar(\omega_L - \omega_A) + \frac{\hbar^2 k_L^2}{2M} = \hbar(\delta + \omega_R) \quad (4.4)$$

où
$$\omega_R = \frac{\hbar k_L^2}{2M} = \frac{E_R}{\hbar} \quad (4.5)$$

est l'énergie de recul en unités de pulsations. On a utilisé (3.11).

- Le couplage effectif entre les 2 états dégénérés $g, -\hbar k_L$ et $g, +\hbar k_L$ est donc décrit par la fréquence de Rabi effective

$$\frac{\hbar\Omega_1^{eff}}{2} = \frac{(\hbar\Omega_1/2)^2}{\hbar(\delta + \omega_R)} \rightarrow \Omega_1^{eff} = \frac{\Omega_1^2}{2(\delta + \omega_R)} \quad (4.6)$$

b) Oscillation de Rabi entre les 2 états couplés

- Si l'on pouvait, sur la figure 2, ignorer tous les états autres que $g, -\hbar k_L$ et $g, +\hbar k_L$, on aurait une oscillation de Rabi entre $g, -\hbar k_L$ et $g, +\hbar k_L$ à la fréquence angulaire Ω_1^{eff} .

Phénomène présentant une certaine analogie avec l'effet "Pendellösung" observé dans la diffraction de Bragg de neutrons par un cristal (Ref. [1])

- Discutons maintenant les conditions de validité d'une telle approximation à 2 niveaux (voir aussi Ref. [2])

(i) L'état $g, +\hbar k_L$ est également couplé, via $e, +2\hbar k_L$, à $g, +3\hbar k_L$ situé à une distance $(3\hbar k_L)^2/2M - (\hbar k_L)^2/2M = 8\hbar\omega_R$. De même $g, -\hbar k_L$ est couplé indirectement à $g, -3\hbar k_L$ situé à la même distance. On pourra ignorer ces 2 états $g, \pm 3\hbar k_L$ (et les autres états $g, \pm(2n+1)\hbar k_L$ avec $n=2, 3, \dots$) si leur distance $8\hbar\omega_R$ à $g, \pm\hbar k_L$ est très grande devant le couplage $\hbar\Omega_1^{eff}/2$ entre $g, -\hbar k_L$ et $g, +\hbar k_L$

$$\hbar \Omega_1^{\text{eff}} / 2 \ll 8 \hbar \omega_R$$

(4.7) IV-3

c'est à dire encore, compte tenu de (4.6), et en négligeant δ devant ω_R dans le dénominateur de (4.6)

$$\Omega_1^2 / |\delta| \ll 32 \omega_R \quad (4.8)$$

(ii) L'état $g, +\hbar k_L$ est également couplé de manière non-résonnante à l'état $e, 0$ (et aussi à l'état $e, +2\hbar k_L$). Ce couplage donne naissance à une largeur radiative $\hbar \Gamma'$ pour $g, +\hbar k_L$. Γ' peut être interprétée comme la probabilité par unité de temps de diffuser un photon à partir de $g, +\hbar k_L$ (au cours d'un cycle absorption - émission spontanée). Si Γ est la largeur naturelle de l'état excité e , on a

$$\Gamma' \sim \Gamma \frac{(\Omega_1/2)^2}{(\delta + \omega_R)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} \sim \Gamma \frac{\Omega_1^2}{4\delta^2} \quad (4.9)$$

Comme tout processus d'émission spontanée détruit la cohérence spatiale, il faut éviter tout processus de ce type pendant le temps de traversée T . On doit donc avoir

$$\Gamma' T \ll 1 \quad \rightarrow \quad \Gamma T \frac{\Omega_1^2}{4\delta^2} \ll 1 \quad (4.10)$$

La comparaison de (4.6) et (4.9) montre que

$$\frac{|\Omega_1^{\text{eff}}|}{\Gamma'} \sim 2 \frac{|\delta|}{\Gamma} \quad (4.11)$$

Si l'on prend $|\delta| \gg \Gamma$, on peut donc trouver des valeurs de T telles que $\Omega_1^{\text{eff}} T \sim 1$ (précision de Rabi appréciable entre $g, +\hbar k_L$ et $g, -\hbar k_L$), tout en ayant $\Gamma' T \ll 1$ (pas d'émission spontanée).

c) Application possible en interférométrie atomique

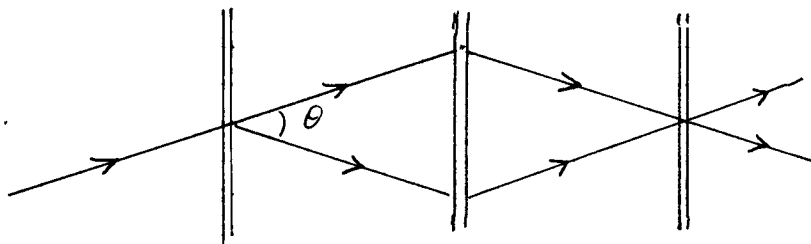


Fig. 3

- Traversée successive de 3 ondes laser stationnaires équidistantes par un faisceau atomique, l'angle du faisceau incident étant choisi pour avoir une diffraction de Bragg
- Si la fréquence de Rabi effective pour la 1^{ère} onde est réglée pour avoir une "impulsion $\pi/2$ ", équivalent d'une lame séparatrice 50%-50%. Si la fréquence de Rabi effective de la 2^{ème} onde est réglée pour avoir une "impulsion π ", équivalent de 2 miroirs qui renvoient les 2 faisceaux cohérents se recombiner sur la 3^{ème} onde
- ↳ Équivalent d'un interféromètre Mach-Zehnder
- Difficulté expérimentale : Angle θ très petit $\sim 100 \mu\text{radian}$

③ Exemple de diffraction de Bragg d'ordre supérieur

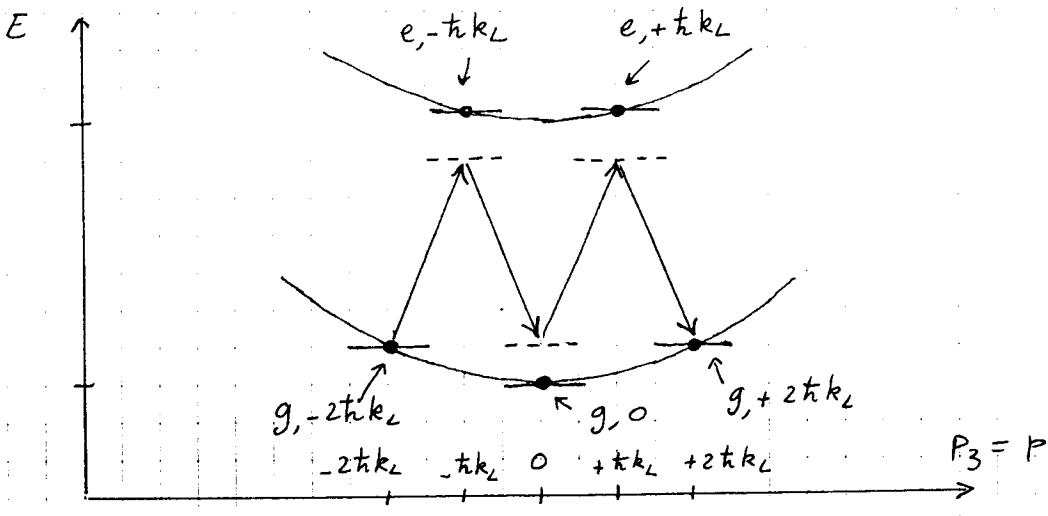


Fig. 4

Diffraction de Bragg d'ordre 2 : g_{-2hk_L} et g_{+2hk_L} ont même énergie et sont couplés indirectement par un processus à 4 photons via e_{-hk_L} , g_{0} et e_{+hk_L} . (flèches montantes et descendantes de la figure 4)

Couplage effectif de l'ordre de $\frac{(\Omega_1/2)^4}{4.8^2 \omega_R}$

④ Etude expérimentale (réalisée au M.I.T. Voir Ref. [3])

- Faisceau supersonique de Na, avec une très bonne collimation
- Onde laser rétro-réfléchi avec un rayon focal de quelques mm
- Pour la diffraction de Bragg d'ordre 1, l'angle entre le faisceau atomique et les plans focaux de l'onde stationnaire est de 30 μ rad

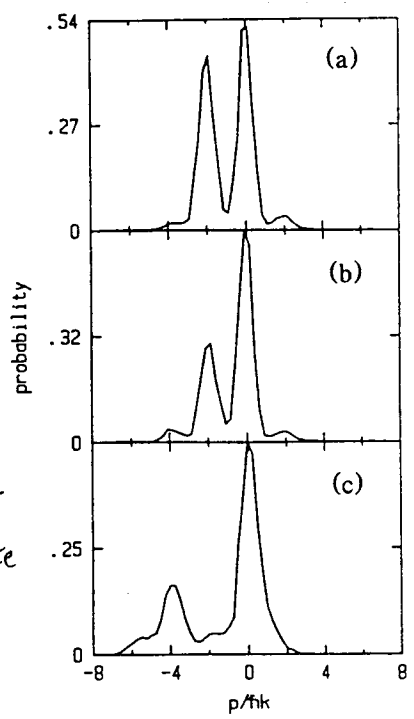
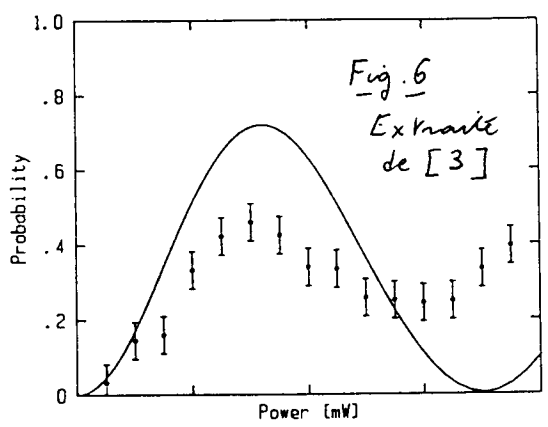


Fig. 5
Extrait de [3]

Experimental data of Bragg scattering. (a) First-order Bragg scattering: $P=6$ mW; $\Delta=800$ MHz; $\tau=6.4$ μ s ($\Delta w=3.2$ mm). (b) First-order Bragg scattering: $P=10$ mW; $\Delta=800$ MHz; $\tau=6.4$ μ s. (c) Second-order Bragg scattering: $P=4$ mW; $\Delta=500$ MHz; $\tau=3.2$ μ s ($\Delta w=1.6$ mm). The angle of the standing-light-wave nodes with respect to the atomic beam was 30 μ rad times the order, m .



Plot of probability to be in the diffracted ($n+n_0=1$) state as a function of laser power, $\Omega_1 \tau$, for first-order Bragg scattering ($n_0=-1$): $\Delta=800$ MHz and $\tau=5$ μ s ($\Delta w=2.5$ mm) for these plots. Also shown are experimental data of population in the diffracted state for various laser powers.

Pour la mise en évidence de l'oscillation de Rabi, on fait varier, non pas le temps de traversée T , mais la puissance P du laser. En effet, $\Omega_1 \tau$ est proportionnel à Ω_1^2 , donc à P .

⑤ Dopplerons (Refs [2], [4])

- Exemple d'autre processus multiphotonique entre états d'impulsion-énergie reliant, non plus 2 états g , mais un état g et un état e

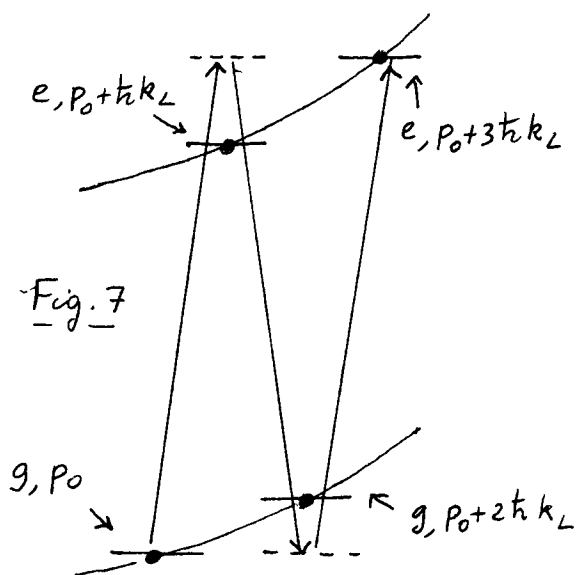


Fig. 7

- On part maintenant de g, p_0 avec $p_0 \neq 0$

- g, p_0 et $e, p_0 + 3\hbar k_L$ sont reliés par un processus à 3 photons résonnant avec 2 états intermédiaires non-résonnants $e, p_0 + \hbar k_L$ et $g, p_0 + 2\hbar k_L$

- Conditions de résonance

$$\begin{aligned} \hbar\omega_L &= E_{e, p_0 + 3\hbar k_L} - E_{g, p_0} \\ &= \hbar\omega_A + 3\hbar k_L p_0/M + 9\hbar\omega_R \end{aligned} \quad (4.12)$$

ce qui donne

$$\delta = 3k_L v_0 + 9\omega_R \quad (4.13)$$

où $v_0 = p_0/M$ est la vitesse initiale de l'atome.

- Défauts d'énergie dans les états intermédiaires

• 1^{er} état intermédiaire :

$$E_{g, p_0 + \hbar\omega_L} - E_{e, p_0 + \hbar k_L} = \hbar\omega_L - \hbar\omega_A - \hbar k_L v_0 - \hbar\omega_R = \hbar(\delta - k_L v_0 - \omega_R) \quad (4.14)$$

• 2^{ème} état intermédiaire :

$$E_{g, p_0} - E_{g, p_0 + 2\hbar k_L} = -\hbar(2k_L v_0 + 4\omega_R) \quad (4.15)$$

- Si l'on néglige ω_R devant $k_L v_0$, (4.13) donne $\delta = 3k_L v_0$ et (4.14) et (4.15) valent respectivement $+2\hbar k_L v_0$ et $-2\hbar k_L v_0$. La fréquence de Rabi effective associé au couplage indirect entre g, p_0 et $e, p_0 + 3\hbar k_L$

$$\frac{(\hbar\Omega_1/2)^3}{-4\hbar^2 k_L^2 v_0^2} \quad (4.16)$$

vaut alors

$$\Omega_1^{eff} = -\frac{\Omega_1^3}{16 k_L^2 v_0^2} \quad (4.17)$$

- Comme plus haut, on pourrait calculer la largeur radiative Γ' de l'état g, p_0 due au couplage non-résonnant avec $e, p_0 \pm \hbar k_L$. Le couplage résonnant avec $e, p_0 + 3\hbar k_L$ contribue aussi à Γ' mais à un ordre plus élevé en Ω_1 .

- Différences avec la diffraction de Bragg

(i) Changement d'impulsion au cours du processus : nombre impair de fois $\hbar k_L$

(ii) l'état atomique interne final e est instable.

① But poursuivi

- On revient dans cette partie D au régime de Raman - Nath.
- Dans la diffraction d'une onde de de Broglie par une onde laser stationnaire, on obtient une série d'ondes diffractées, dont les vecteurs d'onde transverses (parallèles à l'onde laser) sont des multiples entiers de k_L (ou $2k_L$), et dont les intensités varient comme des carrés de fonctions de Bessel $J_n^2(u)$ [voir partie B du cours III].
Si $u \gg 1$, c-à-d si l'onde est suffisamment intense, $J_n^2(u)$ est appréciable pour des grandes valeurs de n , comprises entre $\pm n_{max}$ avec $n_{max} \sim u$. On peut donc obtenir des déviations angulaires importantes $\theta \sim n_{max} \hbar k_L / p_x$, mais la sélectivité en n est très faible. Le spectre des valeurs de $J_n^2(u)$ en fonction de n est relativement plat et ne présente pas de pics étroits (voir, par exemple, Fig. 15c plus loin)
- Dans cette partie D, on décrit une proposition récente [Refs [5],[6]], utilisant un effet Zeeman et une configuration laser présentant un gradient de polarisation pour créer un réseau de phase différent de ceux étudiés dans la partie B du cours III, dans la mesure où ils conduisent à des spectres J_n^2 pour les diverses ondes diffractées n présentant des pics très étroits autour de valeurs élevées de n .

② Explication qualitative de l'effet proposé

Transition atomique

- Transition $J_g = 0 \leftrightarrow J_e = 1$
- Champ magnétique $\vec{B}_0 \parallel \vec{O}_z$ levant la dégénérescence Zeeman entre e_-, e_0, e_+ : Ecart $\hbar \omega_B$ entre e_0 et e_{\pm}
- ω_B : Fréquence de Larmor proportionnelle à B_0

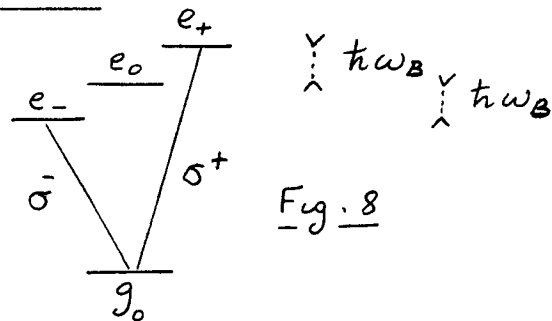


Fig. 8

Configuration laser

2 ondes de même fréquence, de même amplitude, se propageant dans des sens opposés le long de Oz , avec des polarisations linéaires $\perp \vec{e}_x$ et \vec{e}_y

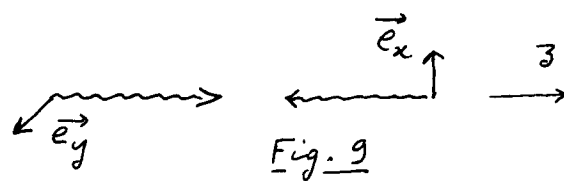


Fig. 9

Analyse des cycles absorption-émission stimulée

- Supposons que l'atome absorbe un photon dans l'onde \vec{e}_x . Dans l'état excité apparaît un "alignement", que l'on peut décrire par un ellipsoïde (cigare allongé le long de Ox).
- Cet alignement introduit une anisotropie dans les propriétés optiques. L'émission (induite ou spontanée) de lumière est plus probable avec une polarisation \parallel au grand axe de l'ellipse qu'avec une polarisation \perp .
- A cause de la précession de Larmor, l'ellipsoïde d'alignement créé dans l'état excité après absorption du photon \vec{e}_x va tourner autour de Oz avec une fréquence angulaire proportionnelle à ω_L .

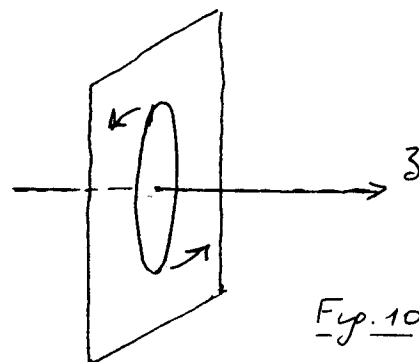


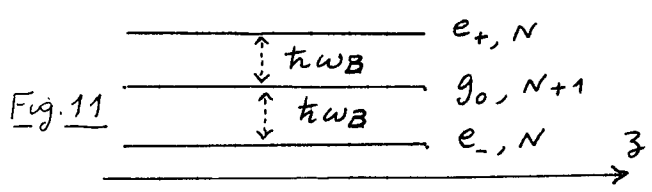
Fig. 10

- S'il n'y a pas d'émission spontanée, l'atome retourne à l'état fondamental par émission stimulée, le temps caractéristique au bout duquel se produit un tel processus étant $1/\omega_R$, où ω_R est la fréquence de Rabi.
- Si l'ellipsoïde d'alignement a tourné de $\pi/2$ avant que l'émission stimulée d'un photon ne se produise, il sera // à \vec{E}_y et l'émission stimulée sera plus facile dans l'onde \vec{E}_y que dans l'onde \vec{E}_x . On favorise ainsi les processus de redistribution de photons entre les 2 ondes.
- On conçoit ainsi que, pour une certaine valeur du rapport ω_L/ω_R , on favorise les transferts d'impulsion du champ à l'atome.
- Effet rappelant par certains côtés la "force magnéto-optique" proposé et démontré récemment [Refs [7], [8]].

③ Etats habillés

Pour une étude plus précise du problème, il est commode de considérer les états habillés du système atome + champ. On va montrer que, pour une certaine valeur de ω_B/ω_R , l'un des états habillés présente, en fonction de z , des variations de forme triangulaire, qui conduisent à des ordres de diffraction n élevés et de dispersion faible.

Etats non couplés en fonction de z



N : nombre de photons dans le mode associé à la configuration laser de la figure 9.
On obtient 3 horizontales séparées de $+h\omega_L$

Fig. 11

Effets du couplage

L'interaction atome-laser VAL couple $g_{0,N+1}$ à $e_{\pm,N}$. On peut diagonaliser exactement la matrice 3×3 représentant l'hamiltonien total et obtenir les 3 valeurs propres (voir Ref. [5]).

Il sera plus instructif ici d'étudier un certain nombre de cas limites.

Limite des champs laser faibles ($\omega_R \ll \omega_B$)

- Aux points z où la polarisation du champ total (résultant de la superposition des 2 ondes de la figure 9) est σ^+ , les états $g_{0,N+1}$ et $e_{+,N}$ sont les seuls à être couplés. Ils se repoussent donc légèrement, l'état $e_{-,N}$ n'étant pas affecté.
- Idem pour les points où la polarisation du champ total est σ^- , et où ce sont les états $g_{0,N+1}$ et $e_{-,N}$ qui se repoussent légèrement.
- On obtient ainsi un diagramme d'énergie du type de celui de la figure 14.a.

Limite des champs laser forts ($\omega_R \gg \omega_B$)

- Commençons par négliger ω_B . Les 3 états de la figure 11 sont confondus.
- En chaque point z , on peut alors introduire une combinaison linéaire Ψ_{NC} de $e_{+,N}$ et $e_{-,N}$ qui n'est pas couplée à $g_{0,N+1}$, la combinaison linéaire orthogonale Ψ_C étant couplée à $g_{0,N+1}$ avec une amplitude, indépendante de z , et de l'ordre de ω_R . Si $\omega_B = 0$, l'effet du couplage VAL n'affecte pas Ψ_{NC} , alors que les états couplés Ψ_C et $g_{0,N+1}$ donnent naissance à 2 combinaisons linéaires symétriques

et antisymétrique de ψ_c et $g_0, N+1$, dont les énergies sont situées de part et d'autre de celle de ψ_{Nc} , à une distance de l'ordre de ω_R . Pour $\omega_B = 0$, les états habillés ont donc des énergies variant avec z comme sur la figure 11 : on a 3 droites horizontales avec des espacements de l'ordre de $\hbar \omega_R$.

- Tenons compte maintenant de l'effet de ω_B perturbativement. Comme les fonctions d'onde des états habillés, calculées pour $\omega_B = 0$, dépendent de z , les couplages introduits par ω_B vont dépendre de z et vont donner naissance à de légères ondulations (Voir Fig. 14c)

Etude des états habillés au voisinage d'un point où la polarisation du champ total est σ^+ (ou σ^-)

- Au voisinage d'un tel point, la matrice 3×3 à diagonaliser se décompose en une matrice 1×1 relative à $e_{-,N}$, qui n'est pas perturbée, et une matrice 2×2 relative à $\{ |g_0, N+1\rangle, |e_{+,N}\rangle \}$ qui a la forme suivante :
 où ω_R est la fréquence de Rabi associée à chaque onde.

$$\hbar \begin{pmatrix} 0 & \omega_R/\sqrt{2} \\ \omega_R/\sqrt{2} & \omega_B \end{pmatrix} \quad (4.18)$$

- On trouve alors que si :

$$\omega_R = 2\omega_B \quad (4.19)$$

l'une des 2 valeurs propres de (4.18) va être égale à $-\hbar\omega_B$. En d'autres termes, la répulsion de $g_0, N+1$ par $e_{+,N}$ est telle que l'état habillé correspondant $|2(N)\rangle$ est dégénéré avec l'état non couplé $|e_{-,N}\rangle$ (Fig. 12)

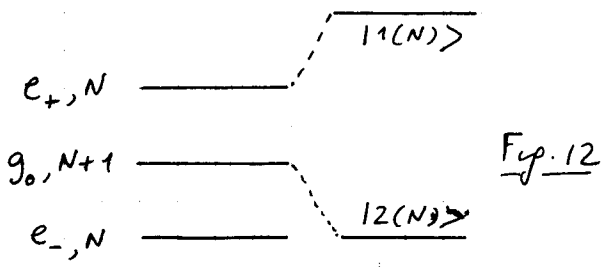


Fig. 12

- Au voisinage d'un point M_0 , de coordonnée z_0 , où la polarisation du champ total est σ^+ , l'amplitude de la composante σ^- varie linéairement en $z - z_0$. Si l'on néglige cette composante σ^- , on a 2 niveaux dégénérés $|e_{-,N}\rangle$ et $|2(N)\rangle$ dont les énergies sont indépendantes de z (droites en traits tiretés de la Fig. 13)

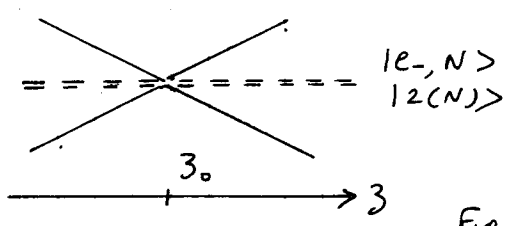


Fig. 13

La perturbation associée à la composante σ_- du champ total va coupler ces états dégénérés et lever la dégénérescence avec un écart croissant linéairement avec $z - z_0$ (traits pleins de la Fig. 13)

Pour $\omega_R = 2\omega_B$, on obtient donc 2 états habillés qui semblent se croiser en $z = z_0$, mais qui forment en fait un anti-croisement dont la distance minimale d'approche est nulle.

Idem pour les points où la polarisation du champ total est σ^- . On obtient ainsi le diagramme de niveaux habillés de la Fig. 14b, les variations avec z de l'énergie des niveaux central ayant une forme triangulaire.

- Notons que si ω_R est légèrement supérieur ou légèrement inférieur à $2\omega_B$, les états $|e_{-,N}\rangle$ et $|2(N)\rangle$ ne sont plus dégénérés, de sorte que les états habillés résultant du couplage non diagonal associé à la composante σ^- s'écartent, non plus linéairement, mais quadratiquement en $z - z_0$ pour $z - z_0$ suffisamment faible.

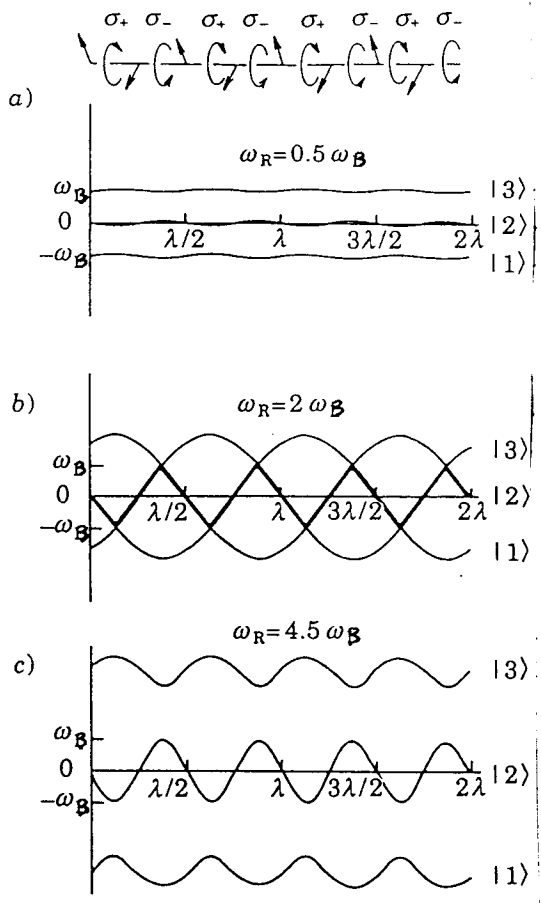


Fig. 14
[extrait de [5]]

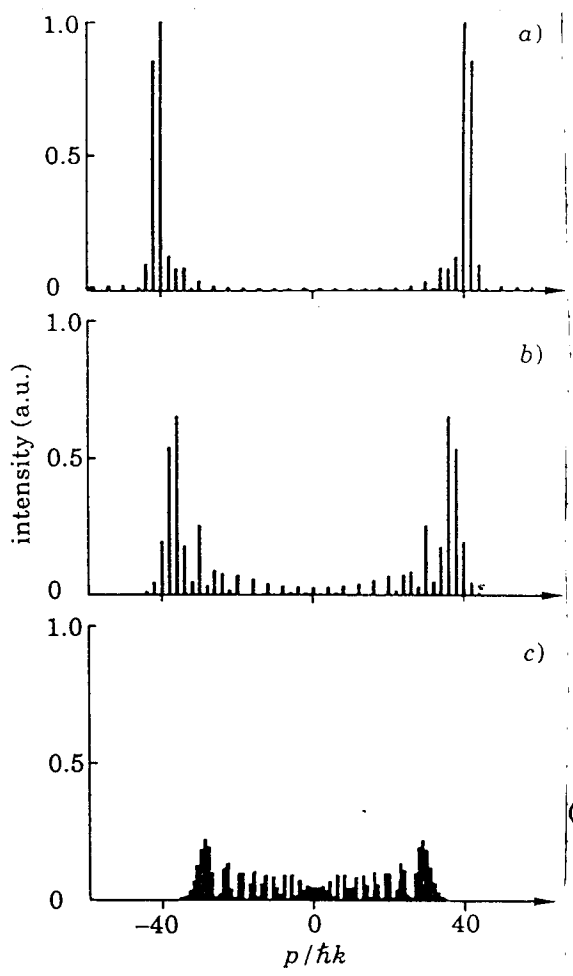


Fig. 15
(extrait de [5])

④ Calcul du spectre d'ondes diffractées

Approximation adiabatique

- En dehors du faisceau laser, l'atome est dans l'état g , donc dans l'état non couplé central $|g, N+1\rangle$ de la figure 11.

Si l'énergie des niveaux habillés a une variation temporelle suffisamment lente quand l'atome entre dans l'onde laser et "voit" donc un champ d'amplitude croissante puis décroissante, l'atome va rester adiabatiquement dans le niveau habillé qui se raccorde à $|g, N+1\rangle$ hors du laser, c-à-d dans le niveau central $|2\rangle$ des diagrammes de la figure 14.

- Soit $E_2(z, t)$ l'énergie d'un tel niveau habillé, qui dépend donc de t et du point de traversé z (rappelons que, dans le régime de Raman-Nath, z ne varie pas au cours de la traversée). D'après la partie B du cours III, l'onde de de Broglie sortante correspondant à une onde de de Broglie entrante de $p_3 = p = 0$ (donc indépendante de z) est donnée par

$$\exp\left\{-\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} E_2(z, t) dt\right\} \quad (4.20)$$

Résultats du calcul

- Comme $E_2(z, t)$ est périodique en z , on obtient un spectre périodique de valeurs de $p_3 = p$. (voir Fig. 15)

- La figure 15 a donne les intensités des diverses composantes de ce spectre lorsque $\omega_R = 2\omega_B$ et qu'on prend pour $E_2(z, t)$ un créneau carré en fonction de t (l'approximation adiabatique est alors douteuse!); On trouve alors 2 groupes de raies très bien séparés. Par comparaison, la figure 15 c donne le même spectre pour une onde stationnaire ordinaire (comme dans la partie B du cours III). le spectre est alors très étalé.

La figure 15. b donne les résultats du calcul de (4.20) quand on tient compte des variations gaussiennes de $E_2(z, t)$ avec t . La condition $w_R = 2w_B$ ne peut alors être réalisée partout et la séparation des 2 groupes de raies est un peu moins bonne que sur la figure 15. a.

Interprétation physique

- Considérons un problème purement classique, où une particule de masse M , entrant dans l'onde laser étudiée dans ce cours, subit une force proportionnelle au gradient spatial de l'énergie $E_2(z)$ des états habités $|2\rangle$ de la figure 14. Cette particule traversant l'onde au point z va donc subir une déflexion proportionnelle à la pente de $E_2(z)$ en z . Si les variations de $E_2(z)$ avec z ont une forme sinusoïdale, cette déflexion va prendre toutes les valeurs possibles comprises entre 2 valeurs opposées, et on obtient un profil de déflexion dont on peut montrer qu'il représente une bonne approximation de l'enveloppe du spectre de la figure 15. c.
- Si les variations de $E_2(z)$ avec z ont une allure triangulaire, comme sur la figure 14 b, la pente de $E_2(z)$ va très peu varier, tout en changeant de signe pour certaines valeurs de z . Suivant l'endroit où la particule traverse l'onde, elle va donc être défléchie dans un sens ou dans l'autre, la valeur absolue de la déflexion dépendant très peu de z . On comprend ainsi qualitativement pourquoi l'enveloppe du spectre de la figure 15 a a l'allure de 2 pics très étroits de part et d'autre de $p = 0$.

Etude expérimentale

Des résultats positifs ont été obtenus récemment à Constance sur un tel dispositif et sont en cours de publication

Références

- [1] C. G. Shull, Phys. Rev. Lett. 21, 1585 (1968)
- [2] D. E. Pritchard, P. L. Gould, J.O.S.A. B2, 1799 (1985)
- [3] P. J. Martin, B. G. Oldaker, A. H. M'Klich, D. E. Pritchard
Phys. Rev. Lett. 60, 515 (1988)
- [4] E. Kyröla, S. Stenholm, Optics Commun. 22, 123 (1977)
- [5] T. Pfau, C. S. Adams, J. Mlynek, Europhys. Lett. 21, 439 (1993)
- [6] C. S. Adams, T. Pfau, Ch. Kurtsiefer, J. Mlynek
Phys. Rev. A48, 2108 (1993)
- [7] R. Grimm, Yu. Orchinikov, A. I. Sidorov, V. S. Letokhov
Opt. Commun. 84, 18 (1991)
- [8] R. Grimm, V. S. Letokhov, Yu. Orchinikov, A. Sidorov
JETP Lett. 54, 615 (1991) ; J. Phys. II 2, 93 (1992)

Buts de ce cours

- Effet physique très souvent discuté à propos de l'expérience de Stern et Gerlach :

Petit paquet d'ondes associé à une particule de spin $1/2$

dont le spin a été préparé

dans l'état $|+\frac{1}{2}\rangle_x$ (état propre de S_x - Voir Fig. 1). Ce petit paquet d'ondes pénètre dans un appareil de Stern et Gerlach dont le champ magnétique \vec{B}_0 et le gradient de champ sont parallèles à Oz . Comme

$$|+\frac{1}{2}\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}} [|+\frac{1}{2}\rangle_z + |-\frac{1}{2}\rangle_z] \quad (5.1)$$

et que les 2 états de spin $| \pm \frac{1}{2} \rangle_z$ subissent des forces opposées le long de Oz , le paquet d'ondes incident va se décomposer en 2 paquets d'ondes cohérents, séparés spatialement, avec des états de spin pointant dans des directions opposées.

- Le but de ce cours est tout d'abord de montrer que des effets analogues peuvent apparaître quand le dipôle électrique d'un atome à 2 niveaux est couplé à un champ laser résonnant dont l'amplitude présente des gradients spatiaux.

Après une discussion théorique des conditions d'observation d'un tel effet, on décrit également des expériences récentes qui ont permis de le mettre en évidence pour la 1^{ère} fois.

① Situation physique envisagée dans ce cours

a) Analogies avec les cours précédents

Comme dans les cours III et IV,

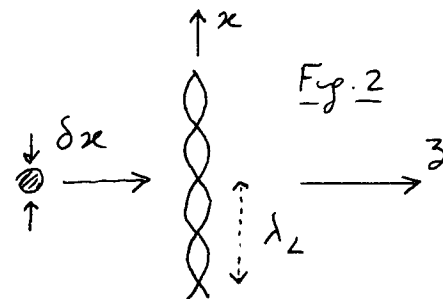
- on considère un atome traversant à angle droit une onde laser stationnaire quasi-résonnante.
- on suppose que l'émission spontanée est négligeable pendant le temps de traversée T de l'onde laser.

Comme dans le cours III,

- on néglige le déplacement de l'atome le long de l'onde laser pendant le temps de traversée : régime de Raman - Nath.

b) Différences avec les cours précédents

- Au lieu de considérer une onde plane incidente se propageant le long de Oz et d'extension spatiale le long de la direction Ox de l'onde stationnaire très grande devant λ_L (longueur d'onde laser), on considère ici un petit paquet d'ondes incident d'extension spatiale δx très petite (voir Fig. 2)



$$\delta x \ll \lambda_L \quad (5.2)$$

- Au lieu d'étudier la diffraction d'une onde plane incidente on étudie ici le mouvement du paquet d'ondes incident, pour voir en particulier dans quelles conditions il peut se scinder en deux.

② Comment réaliser un paquet d'ondes suffisamment petit.

Difficultés expérimentales

Si l'onde stationnaire est formée de 2 ondes laser progressives 1 et 2 se propageant dans des directions opposées, la période spatiale du bi-potentiel optique (états habillés) dans lequel va se propager le paquet d'ondes incident va être λ_L ou $\lambda_L/2$, suivant que l'onde est exactement résonnante ou non, c.à-d de l'ordre de $1\mu m$ à $0.5\mu m$. Il faudrait donc réaliser des paquets d'ondes d'extension Δx de l'ordre de $0.1\mu m$, ce qui n'est pas facile expérimentalement et conduit à des flux d'atomes très faibles.

Une solution possible (réalisée à Constance - Voir Ref. [1])

- Réaliser une onde stationnaire de période spatiale effective beaucoup plus grande que λ_L en faisant réfléchir à incidence quasi-rasante une onde progressive sur une surface de verre (Fig. 3)
- Dans la zone où elles se recouvrent, l'onde incidente et l'onde réfléchie interfèrent pour donner naissance à des franges.

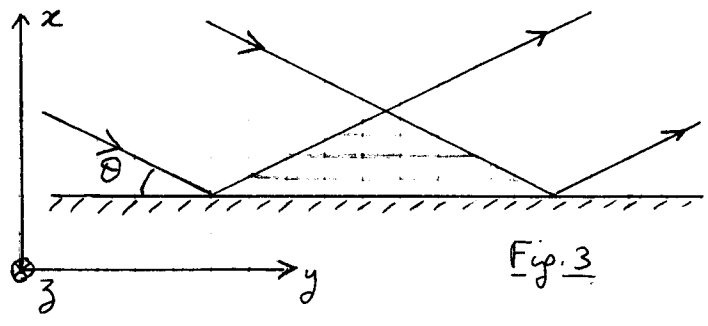


Fig. 3

↳ Onde stationnaire le long de Ox , de vecteur d'onde

$$k_x = k_L \sin \theta \tag{5.3}$$

où $k_L = 2\pi/\lambda_L$ est le vecteur d'onde incident et θ l'angle entre les rayons incidents et la surface de verre (Fig. 3).

- Le long de Oy , on a une onde progressive de vecteur d'onde

$$k_y = k_L \cos \theta \tag{5.4}$$

- Expression de l'amplitude du champ laser

$$E_0(\vec{r}) \sim E_0^{\max} \cos k_x x e^{i k_y y} e^{-z^2/w_0^2} \tag{5.5}$$

w_0 : rayon focal (waist) dans la direction Oz .

Ordres de grandeur des paramètres (correspondant à l'expérience réalisée à Constance sur He métastable)

- Distance entre noeuds le long de Ox

$$\frac{\lambda_x}{2} = \frac{\pi}{k_x} \sim 15 \mu m \tag{5.6}$$

(à comparer avec la longueur d'onde laser $\lambda_L = 1.08 \mu m$ utilisé dans l'expérience)

- Rayon focal w_0 $w_0 \sim 39 \mu m$ (5.7)

Comme la vitesse moyenne du jet, parallèle à Oz (voir Fig. 2), est $v_0 \sim 1760 \text{ m/s}$ (avec $\Delta v/v_0 \sim 1/20$), le temps de traversée T vaut

$$T \sim \frac{2w_0}{v_0} \sim 44 \text{ ns} \tag{5.8}$$

c.à-d plus court que la durée de vie radiative $\tau_R \sim 100 \text{ ns}$ de l'état excité. On peut donc négliger l'émission spontanée pendant T

- Diamètre maximum du faisceau le long de $Ox \sim 140 \mu m$

③ Critère de non-adiabaticité

Problème physique

- Comme la position de l'atome en x le long de l'onde stationnaire joue un rôle important, il est commode d'introduire la base des états habillés du système atome + mode laser.
- Le problème à résoudre est en fait un problème dépendant du temps. En effet, le champ laser "vu" par l'atome entrant à la vitesse v_0 dans l'onde stationnaire a une amplitude qui dépend du temps, obtenue en remplaçant z par $v_0 t$ dans (5.5)

$$E_0(\vec{r}, t) \sim E_0^{\max} \cos k_x x e^{i k_y y} e^{-v_0^2 t^2 / w_0^2} \quad (5.9)$$

Il faut donc déterminer si l'atome, partant de l'état fondamental g et entrant dans l'onde stationnaire, va suivre adiabatiquement l'état habillé se raccordant à g hors du laser; ou si, au contraire, des effets non-adiabatiques vont porter l'atome dans une superposition linéaire des 2 états habillés et provoquer par suite un dédoublement du paquet d'ondes puisque les forces s'exerçant sur l'atome changent de signe d'un état habillé à l'autre.

Etats habillés

- Comme dans le cours III, on introduit le désaccord atome-laser
$$\delta = \omega_L - \omega_A \quad (5.10)$$

(Noter que dans la référence [1], on utilise $\Delta = -\delta$).

- Etats non couplés. En pointillés sur la figure 4
Dégénérés si $\delta = 0$, $|e, N\rangle$ au dessus (au dessous) de $|g, N+1\rangle$ si $\delta < 0$ (> 0)

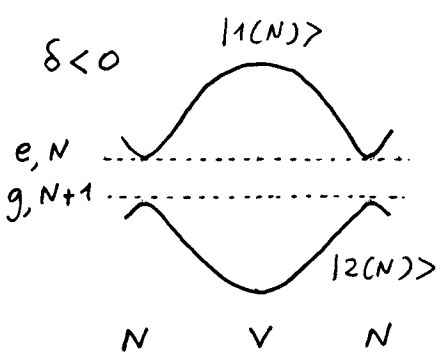


Fig. 4a

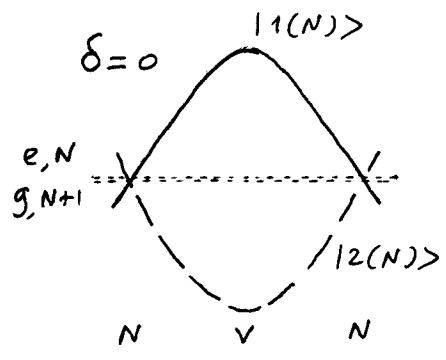


Fig. 4b

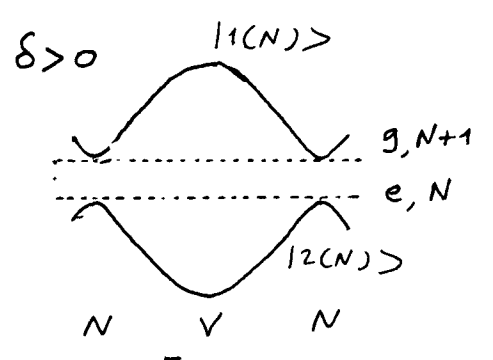


Fig. 4c

- Etats habillés. En traits pleins ou interrompus sur la figure 4
N : noeud V : ventre

Formulation du problème en termes de spin fictif 1/2

- Très commode pour discuter du critère de non-adiabaticité.
- Au système atomique à 2 niveaux $\{|e\rangle, |g\rangle\}$, on associe un spin 1/2
$$|e\rangle \rightarrow |+\rangle \quad |g\rangle \rightarrow |-\rangle \quad (5.11)$$
- Le désaccord $\hbar\delta$ entre $|g, N+1\rangle$ et $|e, N\rangle$ est équivalent à l'effet produit par un champ magnétique \vec{b}_0 , parallèle à Oz , et d'amplitude

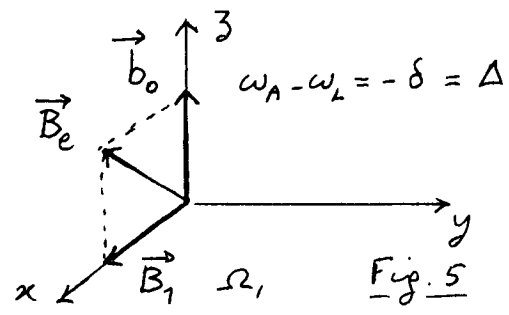
telle que la précession de Larmor autour de \vec{b}_0 s'effectue à une fréquence $\omega_A - \omega_L = -\delta$ (Fig. 5)

- Le couplage de Rabi non diagonal entre $|g, N+1\rangle$ et $|e, N\rangle$ est défini par

$$\frac{\hbar \Omega_1}{2} = \langle e, N | -D E_0 | g, N+1 \rangle \quad (5.12)$$

où E_0 est donné en (5.5)

Ce couplage est équivalent à celui du spin avec un champ \vec{B}_1 le long de Ox et d'amplitude telle que la précession de Larmor autour de \vec{B}_1 s'effectue à la fréquence de Rabi Ω_1 ,



- Les états habillés $|1(N)\rangle$ et $|2(N)\rangle$ sont associés aux états propres du spin le long du champ \vec{B}_e , somme vectorielle de \vec{b}_0 et \vec{B}_1 (voir Fig. 5). On a donc

$$E_{1(N)} - E_{2(N)} = \hbar \Omega = \hbar \sqrt{\Omega_1^2 + \delta^2} \quad (5.13)$$

Deux cas limites simples

Cas résonnant ($\delta = 0$)

- Les fonctions d'onde des états habillés sont indépendantes de Ω_1 , donc de x, y, t (sur la figure 5, \vec{B}_e est toujours aligné sur Ox si $b_0 = 0$). Ces états propres sont

$$|1(N)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|g, N+1\rangle + |e, N\rangle] \quad (5.14.a)$$

$$|2(N)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|g, N+1\rangle - |e, N\rangle] \quad (5.14.b)$$

- L'atome entrant dans l'état $|g\rangle$ est donc toujours, quelle que soit sa vitesse et son abscisse x d'entrée dans l'onde, dans l'état

$$|g, N+1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|1(N)\rangle + |2(N)\rangle] \quad (5.15)$$

c-à-d dans la superposition linéaire symétrique de $|1(N)\rangle$ et $|2(N)\rangle$. On est donc toujours dans la limite non adiabatique. Le paquet d'ondes va se scinder en 2, sous l'action de 2 forces de signes opposés

$$\pm \frac{\hbar}{2} \vec{\nabla} |\Omega_1(x, y, t)| \quad (5.16)$$

Le module de ces forces est égal au gradient spatial des énergies des niveaux habillés de la figure 4.b. Il est donc maximal aux noeuds de l'onde stationnaire.

Cas très non résonnant

- Pour δ suffisamment grand, plus précisément pour $|\delta| \gg \delta_c$ où δ_c sera déterminé plus loin, l'écart des niveaux habillés des figures 4a et 4c est si grand que l'atome suit adiabotiquement le niveau habillé qui se raccorde à $|g, N+1\rangle$ hors du laser.

- Pour $\delta < 0$ ($\omega_L < \omega_A$), il va être dans le niveau $|2(N)\rangle$, et le paquet d'ondes va être attiré vers le ventre le plus proche (Fig. 4a)

- Pour $\delta > 0$ ($\omega_L > \omega_A$), il va être dans le niveau $|1(N)\rangle$, et le paquet d'ondes va être attiré vers le noeud le plus proche (Fig. 4c)

Cas intermédiaire - Désaccord critique

V-5

- Utilisons l'image du spin fictif (Fig. 5). Quand l'atome entre dans l'onde, B_1 croît de 0 à B_1^{\max} , puis décroît de B_1^{\max} à 0. Pour que le spin reste toujours aligné sur \vec{B}_e (condition de suivi adiabatique), la vitesse de rotation de \vec{B}_e dans le plan xOz doit être beaucoup plus lente que la vitesse de précession du spin autour de \vec{B}_e .

- Fréquence de rotation maximale de \vec{B}_e : Ω_{\max} .

$$\Omega_{\max} = \frac{(d|B_1|/dt)_{\max}}{|b_0|} = \frac{(d|\Omega_1|/dt)_{\max}}{|\delta|} \quad (5.17)$$

Comme $(d|\Omega_1|/dt)_{\max} \sim \frac{|\Omega_1^{\max}|}{T}$ (5.18)

où T est le temps de traversée, on en déduit que

$$\Omega_{\max} = \frac{|\Omega_1^{\max}|}{T|\delta|} \quad (5.19)$$

- Fréquence de précession minimale autour de \vec{B}_e
Elle est obtenue pour $\Omega_1 = 0$ et vaut $|\delta|$

- La condition de suivi adiabatique s'écrit donc

$$|\delta| \gg \frac{|\Omega_1^{\max}|}{T|\delta|} \iff |\delta| \gg \sqrt{\frac{|\Omega_1^{\max}|}{T}} \quad (5.20)$$

- Si l'on définit un désaccord critique par

$$\delta_c \sim \sqrt{\frac{|\Omega_1^{\max}|}{T}} \quad (5.21)$$

on peut donc dire que :

(i) Si $|\delta| \gg \delta_c$, l'atome suit adiabatement le niveau habillé se raccordant à $|g, N+1\rangle$ hors du laser.

↳ Pas de dédoublement du paquet d'ondes.

(ii) Si $|\delta| \ll \delta_c$, il y a des transitions non adiabatiques entre le niveau habillé se raccordant à $|g, N+1\rangle$ et l'autre. Le paquet d'ondes incident se dédouble donc en 2 paquets d'ondes, l'amplitude du paquet d'ondes évoluant sur le niveau habillé se raccordant à $|g, N+1\rangle$ étant plus grande que l'autre.

Comme les gradients spatiaux des 2 niveaux habillés sont opposés, on aura à la sortie de l'onde stationnaire 2 paquets d'ondes défléchis dans des directions opposées, l'un des deux (celui qui se rapproche vers le ventre le plus proche si $\delta < 0$, vers le noeud le plus proche si $\delta > 0$) ayant une amplitude plus grande que l'autre.

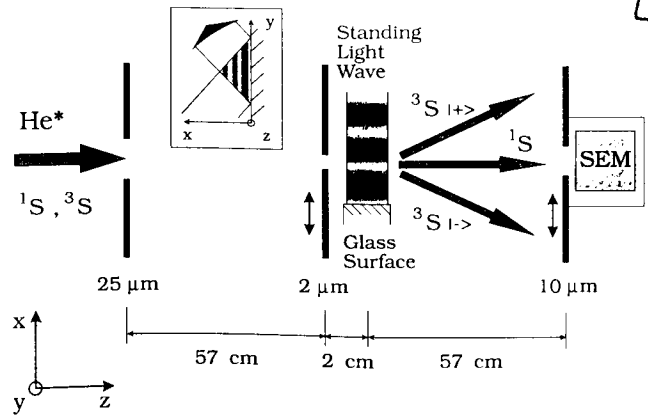
④ Mise en évidence expérimentale (voir Ref. [13])

Schéma de principe (Fig. 6)

- Fente de 2 μm sélectionnant l'endroit de l'onde stationnaire qui va être traversé par le jet atomique. On se place à un endroit où le gradient des niveaux habillés est non nul.

- 2 types d'états métastables Triplet $3S$, Singulet $1S$
Les singulets ne sont pas défléchis et donnent un pic permettant de repérer la déflexion nulle.

Fig. 6
(Extrait de [1])



Schematic diagram of the experimental setup as viewed from above. By the interaction with the standing light wave the atoms in the triplet state $3S$ are split into the two eigenstates $|+\rangle$ and $|-\rangle$. Inset: View along the atomic beam axis of the optical standing wave.

Résultats expérimentaux

- Pour $\delta = 0$ (Fig. 7b), on observe 2 pics de même intensité, symétriques par rapport à l'angle de déflexion nulle. L'impulsion transverse correspondant à la déflexion de chaque pic est de l'ordre de $4\hbar k_z$.
- Pour $\delta \neq 0$ (Figs 7a et 7c), on observe toujours 2 pics avec des angles de déflexion opposés, mais il y a une asymétrie entre les intensités des 2 pics, asymétrie qui change de signe avec le signe de δ .

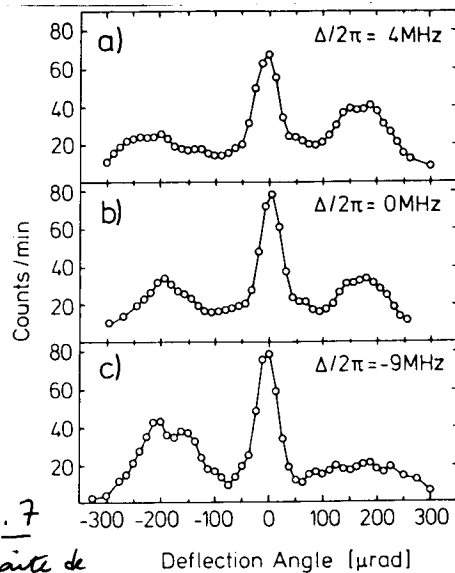
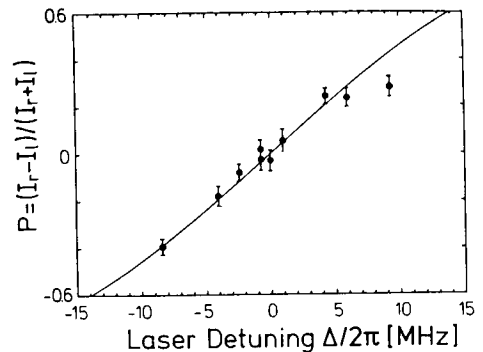


Fig. 7
(extrait de [1]) Optical Stern-Gerlach effect. Atomic intensity profile for values of the laser detuning close to zero. $\Delta/2\pi = +4$ MHz (a), 0 MHz (b), and -9 MHz (c). The laser power was about 8 mW. The central peak at position zero is due to the undeflected singlet-state atoms.

- La figure 8 montre une étude des variations de l'asymétrie entre les 2 pics avec le désaccord $\Delta = -\delta$
Les résultats expérimentaux sont en bon accord avec les prévisions d'un calcul basé sur une intégration des équations de Bloch

Fig. 8
(extrait de [1])



Normalized difference in peak intensities $(I_r - I_l)/(I_r + I_l)$ vs laser detuning $\Delta/2\pi$. The solid line shows the result of a simulation based on integration of the Bloch equations.

Effet de l'émission spontanée après la traversée de l'onde laser

- Supposons nous placés à résonance. Juste après la sortie de l'onde laser, l'état de l'atome est

$$|\psi\rangle = \varphi_+(\vec{r}) \left[\frac{1}{\sqrt{2}} |g, N+1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |e, N\rangle \right] + \varphi_-(\vec{r}) \left[\frac{1}{\sqrt{2}} |g, N+1\rangle - |e, N\rangle \right] \quad (5.22)$$

où $\varphi_+(\vec{r})$ et $\varphi_-(\vec{r})$ sont 2 paquets d'ondes s'éloignant dans des directions opposées le long de Ox

- Avant que l'atome ne parvienne au détecteur, l'émission spontanée d'un photon à partir des composantes de (5.22) contenant l'état excité e a le temps de se produire et l'état (5.22) devient

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \varphi_+(\vec{r}, t) |g, N+1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} \varphi_-(\vec{r}, t) |g, N+1\rangle + \text{Etats contenant 1 photon de fluorescence} \quad (5.23)$$

La 1^{ère} ligne de (5.23) représente une superposition cohérente de 2 paquets d'ondes, l'atome étant dans g. La 2^{ème} ligne de (5.23) représente un état où la cohérence spatiale a été considérablement réduite à cause de l'émission spontanée

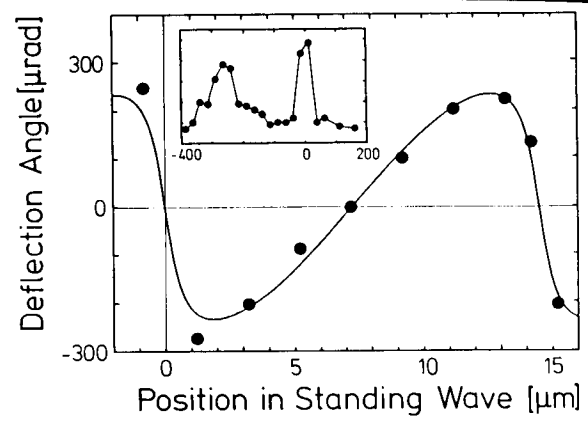
Il serait possible de recombines les 2 paquets d'onde de la 1^{ère} ligne de (5.23) et de réaliser ainsi un interféromètre atomique. Par contre, ceci est impossible avec les états de la 2^{ème} ligne qui vont donner un fond incohérent.

⑤ Etude expérimentale du régime adiabatique

Pour un désaccord suffisamment grand ($|\delta| \gg \delta_c$), on est dans le régime adiabatique. Il n'y a plus de dédoublement du paquet d'ondes. Des effets intéressants peuvent cependant être observés

a - Détermination expérimentale du potentiel optique

En déplaçant le long de Ox la fente d'entrée qui sélectionne l'abscisse du point où le paquet d'ondes incident traverse l'onde stationnaire, et en étudiant la déflexion du paquet d'ondes en fonction de x, on construit point par point la courbe donnant la dérivée spatiale des potentiels optiques des figures 4a et 4c



Deflection of an atomic beam by a standing wave as a function of the position of the atomic beam in the standing wave. The detuning from resonance was $\Delta/2\pi = 160$ MHz. The laser power was about 24 mW. The solid line is a theoretical fit to the data. Position 0 on the horizontal scale was arbitrarily chosen to be at a node. Inset: Atomic intensity profile at the detector for the atomic beam at a position of $-11 \mu\text{m}$ in the standing wave. The peak at zero angle is due to the undeflected singlet-state atoms.

Fig. 9
(extraite de [1])

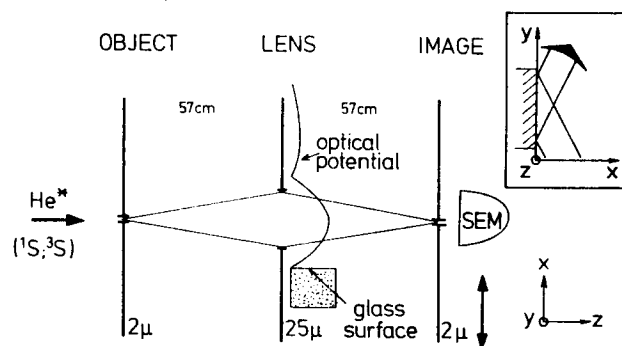


Fig. 10
(extraite de [2])

Schematic diagram of the experimental setup as viewed from above. The optical potential of the standing light wave is indicated. Inset: View along the atomic beam axis of the optical standing wave

Jusqu'ici nous n'avons considéré que le gradient spatial des niveaux habités.

Si la largeur en x de la portion d'onde stationnaire explorée par les atomes est un peu plus grande, il faut également tenir compte de la courbure de niveaux d'énergie.

Par exemple, au voisinage d'un ventre, le potentiel est parabolique, et des effets de focalisation du faisceau atomique peuvent se produire. Voir par exemple la figure 10, extraite de la référence [2] et donnant le principe d'une lentille cylindrique pour onde de de Broglie atomiques.

La référence [2] présente une étude du fonctionnement d'une telle lentille et donne des exemples d'images obtenues avec elle.

Références

- [1] T. Sleator, T. Pfau, V. Balykin, O. Carnal, J. Mlynek
Phys. Rev. Lett. 68, 1996 (1992)
- [2] T. Sleator, T. Pfau, V. Balykin, J. Mlynek
Appl. Phys. B54, 375 (1992)

Références théoriques sur l'effet Stern et Gerlach optique

- [3] A.P. Kazantsev, Zh. Eksp. Teor. Fiz. 67, 1660 (1975)
(Sov. Phys. JETP 40, 825 (1975))
- [4] A.P. Kazantsev, Usp. Fiz. Nauk. 124, 113 (1978)
(Sov. Phys. Usp. 21, 58 (1978))
- [5] R.J. Cook, Phys. Rev. Lett. 41, 1788 (1978)

Modèle simple permettant d'étudier la transition
entre le régime diffractif et le régime diffusif

① Introduction

- Modèle physique et hypothèses (Transparents T1-T2)
- Buts de ce cours (T3)

② Le cadre théorique

- Opérateur densité atomique - Diverses représentations (T4-T5)
- Champ laser (T5)
- Equations de Bloch optiques généralisées (T6-T8)
- Simplifications des équations (T9)
- Filtre linéaire reliant l'état entrant à l'état sortant (T10-T11)
- Différents états initiaux possibles (T12-T13)

③ Limite des temps courts ($T \ll T_R$)

- Structure du filtre linéaire et du propagateur pour une onde progressive et une onde stationnaire (T14-T16)
- Effet Kapitza-Dirac résonnant (T17)
- Effet Stern et Gerlach optique (T18)

④ Limite des temps longs ($T \gg T_R$)

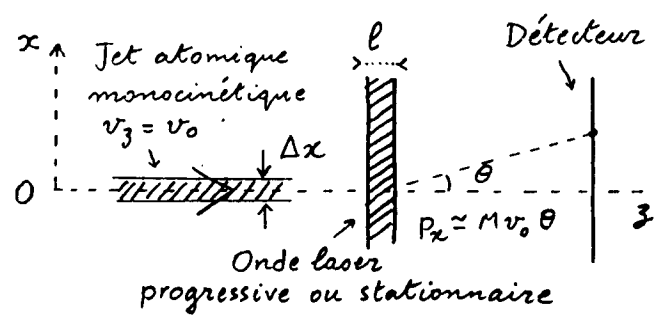
- Rappels sur les fonctions caractéristiques d'une loi de probabilité et sur les cumulants (T19-T20)
- Structure du filtre linéaire aux temps longs (T21)
- Limite gaussienne du propagateur de la fonction de Wigner (T22)
- Destruction des cohérences spatiales (T23)
- Profils de déflexion (T24)

⑤ Temps intermédiaires ($T \sim T_R$)

- Distribution d'impulsion après traversée d'une onde progressive (T25-T26).
- Lien avec la statistique du nombre de photons de fluorescence émis pendant un temps donné (T27).
- Distribution d'impulsion après traversée d'une onde stationnaire (T28-T29).

⑥ Conclusion (T30)

Déflexion d'un jet atomique (1) par une onde laser



Extension transverse Δx du faisceau atomique grande ou petite devant λ
Paramètres physiques importants

- $T = \frac{l}{v_0}$ = Temps de traversée de l'onde
- $\tau_R = \Gamma^{-1}$ Durée de vie radiative de e
- Γ = Largeur naturelle de e
- $E_{rec} = \hbar^2 k^2 / 2M$ Energie de recul
- $P = P_x$ Impulsion typique atomique le long de l'onde laser
- $k v = k \frac{P}{M}$ Effet Doppler correspondant

Hypothèses à la base des calculs (2)

- (i) $k v \ll \Gamma$
Effet Doppler négligeable sur Ox
- (ii) $k v \ll T^{-1} \iff v T \ll \lambda$
Distance parcourue le long de Ox pendant T \ll Longueur d'onde du laser
Régime de Raman-Nath
Autre formulation équivalente $P_x^2 / 2M$ négligé dans H

Par contre, aucune hypothèse restrictive sur T / τ_R

- On veut étudier les 2 régimes
- $T \ll \tau_R$: Pas d'émission spontanée pendant le temps de traversée T (cf cours III, IV, V)
- $\tau_R \ll T \ll (k v)^{-1}$ Plusieurs émissions spontanées pendant T

Buts de ce cours

Essayer de présenter un traitement synthétique des divers effets physiques pouvant être observés dans le domaine $0 < T \ll k v^{-1}$, et qui sont en général décrits par des formalismes différents suivant que $T \ll \tau_R$ ou $T \gg \tau_R$ (Refs [1], [2])

- En particulier, essayer de comprendre
- (i) La transition progressive entre
 - Le régime diffusif ($T \ll \tau_R$) (habituellement décrit par une équation de Schrödinger)
 - Le régime diffusif ($T \gg \tau_R$) (équation de Fokker-Planck)
- (ii) La destruction progressive des cohérences spatiales due à l'émission spontanée
 Importance pour l'interférométrie atomique

Opérateur densité atomique σ_A (4)

Représentation position

$$\langle a, \vec{r}' | \sigma_A | b, \vec{r}'' \rangle \quad a, b = e \text{ ou } g$$

$$\begin{cases} \vec{r} = (\vec{r}' + \vec{r}'') / 2 \\ \vec{u} = \vec{r}' - \vec{r}'' \end{cases} \quad \begin{cases} \vec{r}' = \vec{r} + \frac{\vec{u}}{2} \\ \vec{r}'' = \vec{r} - \frac{\vec{u}}{2} \end{cases}$$

$$\langle a, \vec{r} + \frac{\vec{u}}{2} | \sigma_A | b, \vec{r} - \frac{\vec{u}}{2} \rangle = \sigma_{ab}(\vec{r}, \vec{u})$$

$\vec{u} \neq \vec{0} \rightarrow$ Cohérences spatiales

Représentation impulsion

$$\langle a, \vec{p}' | \sigma_A | b, \vec{p}'' \rangle$$

$$\vec{p}' = \vec{p} + \frac{\vec{v}}{2} \quad \vec{p}'' = \vec{p} - \frac{\vec{v}}{2}$$

$$\langle a, \vec{p} + \frac{\vec{v}}{2} | \sigma_A | b, \vec{p} - \frac{\vec{v}}{2} \rangle = \sigma_{ab}(\vec{p}, \vec{v})$$

$\vec{v} \neq \vec{0} \rightarrow$ Cohérences en impulsion

Lien entre les 2 représentations

$$\langle \vec{r} | \vec{p} \rangle = \hbar^{-3/2} e^{i \vec{p} \cdot \vec{r} / \hbar}$$

$$\sigma_{ab}(\vec{r}, \vec{u}) = \hbar^{-3} \int d^3 p d^3 v \sigma_{ab}(\vec{p}, \vec{v}) \times \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} (\vec{p} \cdot \vec{u} + \vec{r} \cdot \vec{v}) \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{p} \leftrightarrow \vec{u} \\ \vec{r} \leftrightarrow \vec{v} \end{array} \right\} \text{ Variables conjuguées}$$

Représentation de Wigner

$$W_{ab}(\vec{r}, \vec{p}) = \hbar^{-3} \int d^3u \sigma_{ab}(\vec{r}, \vec{u}) e^{-i\vec{p}\cdot\vec{u}/\hbar}$$

$$= \hbar^{-3} \int d^3v \sigma_{ab}(\vec{p}, \vec{v}) e^{i\vec{r}\cdot\vec{v}/\hbar}$$

$$W(\vec{r}, \vec{p}) = W_{aa}(\vec{r}, \vec{p}) + W_{bb}(\vec{r}, \vec{p})$$

Quasi-probabilité de trouver l'atome au point \vec{r} avec une impulsion \vec{p} (Réelle, normalisée, mais peut être < 0)

$$\mathcal{R}(\vec{r}) = \int d^3p W(\vec{r}, \vec{p}) \quad \mathcal{P}(\vec{p}) = \int d^3r W(\vec{r}, \vec{p})$$

Vraies densités de probabilité de \vec{r}, \vec{p}

Champ laser

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E} E_0(\vec{r}) \cos[\omega t + \phi(\vec{r})]$$

$$= \vec{E} E^+(\vec{r}) e^{-i\omega t} + \vec{E} E^-(\vec{r}) e^{i\omega t}$$

$$E^\pm(\vec{r}) = \frac{1}{2} E_0(\vec{r}) e^{\mp i\phi(\vec{r})}$$

$$K(\vec{r}) = -d E_0(\vec{r}) / \hbar \quad d = \vec{E} \cdot \vec{d} \quad \text{Fréquence de Rabi}$$

Onde progressive

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E} E_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})$$

Onde stationnaire

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E} E_0 \cos \vec{k} \cdot \vec{r} \cos \omega t$$

Equations de Bloch optiques généralisées

Contribution de $\vec{p}^2/2M$ (E.B.O.G.)

Très simple en représentation \vec{p}

$$\langle a, \vec{p}' | \hat{O}_A | b, \vec{p}'' \rangle = \frac{1}{i\hbar} \langle a, \vec{p}' | \frac{\vec{p}^2}{2M} \sigma_A - \sigma_A \frac{\vec{p}^2}{2M} | b, \vec{p}'' \rangle$$

$$= \frac{1}{i\hbar} \frac{\vec{p}'^2 - \vec{p}''^2}{2M} \sigma_{Ap}(\vec{p}', \vec{p}'') = \frac{1}{i\hbar M} \vec{p} \cdot \vec{v} \sigma_{ab}(\vec{p}, \vec{v})$$

Comme \vec{p} et \vec{v} sont conjugués de \vec{u} et \vec{r}

$$\dot{\sigma}_{ab}(\vec{r}, \vec{u}) = + \frac{i\hbar}{M} \frac{\partial^2}{\partial \vec{r} \partial \vec{u}} \sigma_{ab}(\vec{r}, \vec{u})$$

Contribution de l'interaction atome-laser

Approximation du champ tournant

$$V_{AL} = -d |e\rangle \langle g| E^+(\vec{r}) - d |g\rangle \langle e| E^-(\vec{r})$$

Dans V_{AL} , \hat{r} est un opérateur

↳ Intérêt de la représentation \vec{r}

Exemple

$$\dot{\sigma}_{ee}(\vec{r}, \vec{r}'') = \frac{1}{i\hbar} \langle e, \vec{r}' | V_{AL} \sigma - \sigma V_{AL} | e, \vec{r}'' \rangle$$

$$= - \frac{d}{i\hbar} [E^+(\vec{r}') \sigma_{ge}(\vec{r}', \vec{r}'') - E^-(\vec{r}'') \sigma_{eg}(\vec{r}', \vec{r}'')]$$

$$\dot{\sigma}_{ee}(\vec{r}, \vec{u}) = \frac{id}{\hbar} [E^+(\vec{r} + \frac{\vec{u}}{2}) \sigma_{ge}(\vec{r}, \vec{u}) - E^-(\vec{r} - \frac{\vec{u}}{2}) \sigma_{eg}(\vec{r}, \vec{u})]$$

\vec{u} apparait dans $E^+(\vec{r} + \frac{\vec{u}}{2})$ et $E^-(\vec{r} - \frac{\vec{u}}{2})$

Contribution de l'émission spontanée

Γ = Largeur naturelle de $e = 1/\tau_R$
 τ_R = Durée de vie radiative de e

$$\dot{\sigma}_{ee}(\vec{r}, \vec{u}) = -\Gamma \sigma_{ee}(\vec{r}, \vec{u})$$

$$\dot{\sigma}_{eg}(\vec{r}, \vec{u}) = -\frac{\Gamma}{2} \sigma_{eg}(\vec{r}, \vec{u})$$

Pour le transfert de e à g , la représentation \vec{p} est plus commode

$$\dot{\sigma}_{gg}(\vec{p}', \vec{p}'') = \Gamma \int d^3k \phi(\vec{k}) \sigma_{ee}(\vec{p}' + \frac{\omega_0}{c} \vec{k}, \vec{p}'' + \frac{\omega_0}{c} \vec{k})$$

$\phi(\vec{k})$: Diagramme angulaire de la pbté d'émission spontanée dans la direction $\vec{k} = \frac{\hbar}{\hbar} \vec{k}$

$$\omega_0 = (E_e - E_g) / \hbar = \text{Fréquence atomique}$$

$$\dot{\sigma}_{gg}(\vec{p}, \vec{v}) = \Gamma \int d^3k \phi(\vec{k}) \sigma_{ee}(\vec{p} + \frac{\omega_0}{c} \vec{k}, \vec{v})$$

$$\dot{\sigma}_{gg}(\vec{r}, \vec{u}) = \Gamma \chi(\vec{u}) \sigma_{ee}(\vec{r}, \vec{u})$$

$$\chi(\vec{u}) = \int d^3k \phi(\vec{k}) e^{-i \frac{\omega_0}{c} \vec{k} \cdot \vec{u}}$$

$$\int d^3k \phi(\vec{k}) = 1 \implies \chi(\vec{0}) = 1$$

\vec{u} apparait dans $\chi(\vec{u})$

Récapitulation : E.B.O.G.

dans la représentation \vec{r}, \vec{u}

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{i\hbar}{M} \frac{\partial^2}{\partial \vec{r} \partial \vec{u}} \right) \sigma_{ee}(\vec{r}, \vec{u}) = -\Gamma \sigma_{ee}(\vec{r}, \vec{u}) + \frac{id}{\hbar} [E^+(\vec{r} + \frac{\vec{u}}{2}) \sigma_{ge}(\vec{r}, \vec{u}) - E^-(\vec{r} - \frac{\vec{u}}{2}) \sigma_{eg}(\vec{r}, \vec{u})]$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{i\hbar}{M} \frac{\partial^2}{\partial \vec{r} \partial \vec{u}} \right) \sigma_{gg}(\vec{r}, \vec{u}) = +\Gamma \chi(\vec{u}) \sigma_{ee}(\vec{r}, \vec{u}) + \frac{id}{\hbar} [E^+(\vec{r} + \frac{\vec{u}}{2}) \sigma_{eg}(\vec{r}, \vec{u}) - E^-(\vec{r} - \frac{\vec{u}}{2}) \sigma_{ge}(\vec{r}, \vec{u})]$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{i\hbar}{M} \frac{\partial^2}{\partial \vec{r} \partial \vec{u}} \right) \sigma_{eg}(\vec{r}, \vec{u}) = [i(\omega - \omega_0) - \frac{\Gamma}{2}] \sigma_{eg}(\vec{r}, \vec{u}) + \frac{id}{\hbar} [E^+(\vec{r} + \frac{\vec{u}}{2}) \sigma_{gg}(\vec{r}, \vec{u}) - E^-(\vec{r} - \frac{\vec{u}}{2}) \sigma_{ee}(\vec{r}, \vec{u})]$$

Equation analogue pour $\sigma_{ge}(\vec{r}, \vec{u})$

Origine des coefficients contenant \vec{u}

- Vol libre : $\frac{i\hbar}{M} \frac{\partial^2}{\partial \vec{r} \partial \vec{u}}$

- Champ laser E^\pm évalué en $\vec{r} + \frac{\vec{u}}{2}$ ou $\vec{r} - \frac{\vec{u}}{2}$

Dépendance périodique en \vec{u}

- Emission spontanée : $\chi(\vec{u})$

Non périodique en \vec{u}

Simplifications

(9)

- On néglige $P_x^2/2M$
- Régime de Raman - Nath
- Mouvement \perp à l'onde traité classiquement $\rightarrow z = v_0 t$
- On ne garde pas $P_z^2/2M$ et $\vec{P}_y^2/2M$
- \hookrightarrow Tous les termes en $-\frac{i\hbar}{M} \frac{\partial^2}{\partial \vec{r} \partial \vec{u}}$ négligés
- Variation en créneau du champ "vu" par l'atome traversant l'onde
- \hookrightarrow Les E.B.O.G. deviennent des équations locales en \vec{r} et \vec{u}
- Pour chaque \vec{r} et chaque \vec{u} , on a un système différentiel linéaire avec des coefficients constants pour $0 \leq t \leq T$ qui devient un système algébrique linéaire par transformation de Laplace
- Pour $\vec{u} = \vec{0}$, $E^\pm(\vec{r} \pm \frac{\vec{u}}{2}) \rightarrow E^\pm(\vec{r})$ et $\chi(\vec{u}) \rightarrow \chi(\vec{0}) = 1$. Les E.B.O.G. se réduisent aux E.B.O. ordinaires pour un atome localisé en \vec{r}

Etat externe après la traversée (10)
en représentation x, u

Caractérisation de l'état externe

$F(x, u) = \sigma_{ee}(x, u) + \sigma_{gg}(x, u)$

Etat avant traversée : $F_{in}(x, u)$

Seul $\sigma_{gg}(x, u) \neq 0$ pour $t < 0$

Etat après traversée : $F_{out}(x, u)$

E.B.O.G. linéaires et locales en x, u

$F_{out}(x, u) = L(x, u, T) F_{in}(x, u)$

$L(x, u, T)$: "Filtre" linéaire

Transformation de Laplace des E.B.O.G.

Si l'on pose

$\tilde{L}(x, u, s) = \int_0^\infty dt e^{-st} L(x, u, t)$

on obtient

$\tilde{L}(x, u, s) = \frac{P_3(x, u, s)}{P_4(x, u, s)}$

P_3 (P_4) : Polynômes de degré 3 (4)

en s - Rapport de 2 déterminants

Voir expression de P_3 et P_4 dans [1]

$\chi(u)$ n'apparaît que dans P_4

Etat externe après la traversée
en représentation de Wigner (11)

$W_{out}^{in}(x, p) = \frac{1}{\hbar} \int du F_{out}^{in}(x, u) e^{-ipu/\hbar}$

Par transformée de Fourier / u

$F_{out}(x, u) = L(x, u, T) F_{in}(x, u)$

devient un produit de convolution

$W_{out}(x, p) = \int dq G(x, q, T) W_{in}(x, p-q)$

où $G(x, q, T) = \frac{1}{\hbar} \int du L(x, u, T) e^{-iqu/\hbar}$

A partir des E.B.O.G., on peut montrer que $G(x, q, T)$ est réel, que $\int dq G(x, q, T) = 1$

Par contre $G(x, q, T)$ peut être < 0 .

Interprétation physique de $G(x, q, T)$

Densité de "quasi-probabilité" de transfert d'une impulsion $\hbar q$ à l'atome au point x après un temps T

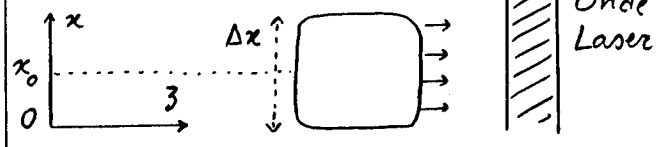
$G(x, q, T)$: Propagateur de $W(x, p)$

Problème central étudié dans ce cours

Comment $G(x, q, T)$ évolue-t-il quand T croît de $T \ll \tau_R$ à $T \gg \tau_R$?

Etat initial

(12)



Paquet d'ondes gaussien en x

$\hookrightarrow W_{in}(x, p) = R_{in}(x) P_{in}(p)$

Paquet minimal : $\Delta x \Delta p \sim \hbar$

$W_{out}(x, p) = R_{in}(x) \int dq G(x, q, T) P_{in}(p-q)$

1^{er} Type d'état initial

Quasi-onde plane

$\Delta x \gg \lambda \quad \Delta p \ll \hbar k$

$P_{in}(p-q)$ très étroit autour de $p-q=0$

\hookrightarrow On peut remplacer $G(x, q, T)$ par $G(x, p, T)$

$\hookrightarrow W_{out}(x, p) = R_{in}(x) G(x, p, T) \int dq P_{in}(p-q) = 1$

Distribution finale d'impulsion

$P_{out}(p) = \int dx W_{out}(x, p) = \int dx R_{in}(x) G(x, p, T)$

2ème type d'état initial

$\Delta x \ll \lambda \quad \Delta p \gg \hbar k$

Petit paquet d'ondes centré en x_0
 $R_{in}(x)$ est très étroit autour de $x = x_0$

↳ On peut remplacer $G(x, q, T)$ par $G(x_0, q, T)$

$W_{out}(x, p) = R_{in}(x) \int dq G(x_0, q, T) P_{in}(p-q)$

Distribution finale d'impulsion

Comme $\int dx R_{in}(x) = 1$

$P_{out}(p) = \int dx W_{out}(x, p)$
 $= \int dq G(x_0, q, T) P_{in}(p-q)$

Simplification En représentation x, u

$F_{out}(x, u) = L(x, u, T) F_{in}(x, u)$

Comme $\Delta p \gg \hbar k$, la largeur en u de $F_{in}(x, u)$ est très petite devant $1/\hbar$

Pour ce type d'état initial, on peut utiliser $ku \ll 1$ pour simplifier l'expression de $L(x, u, T)$

(13) Limite des temps courts ($T \ll \tau_R$) (14)

Expression de $\tilde{L}(x, u, s)$

On peut prendre $\Gamma = 0$ ($\Gamma T \ll 1$)
 Pas d'émission spontanée pendant $T \ll \tau_R$

$X(u)$ qui est multiplié par Γ disparaît. La dépendance en u de \tilde{L} ne peut provenir que de $E^\pm(x \pm \frac{u}{2})$

Etude de 2 cas simples pour $\delta = \omega_2 - \omega_0 = 0$

(i) Onde progressive résonnante

$E^\pm(x) = \frac{E_0}{2} e^{\pm i k x}$ On trouve [1]

$\tilde{L}(x, u, s) = \frac{s^3 + s \omega_1^2 (1 + e^{i k u}) / 2}{s^2 (s^2 + \omega_1^2)}$

Fonction harmonique de u
 $\omega_1 = -d E_0 / \hbar$: Fréquence de Rabi

(ii) Onde stationnaire résonnante

$E^\pm(x) = \frac{E_0}{2} \cos k x$ On trouve [1]

$\tilde{L}(x, u, s) = \frac{s}{s^2 + \omega_1^2 \sin^2 k x \sin^2 \frac{k u}{2}}$

Fonction périodique de u
 $\omega_1 = -d E_0 / \hbar$

Structure de $G(x, q, T)$ pour une onde progressive résonnante (15)

$\tilde{L}(x, u, s) = \frac{s^3 + s \omega_1^2 (1 + e^{i k u}) / 2}{s^2 (s^2 + \omega_1^2)} =$

$= \frac{1 + e^{i k u}}{2s} + \frac{1 - e^{i k u}}{4(s + i \omega_1)} + \frac{1 - e^{i k u}}{4(s - i \omega_1)}$

Par transformée de Laplace inverse

$L(x, u, T) = \frac{1 + e^{i k u}}{2} + \frac{1 - e^{i k u}}{2} \cos \omega_1 T$

Par transformée de Fourier sur u

$G(x, q, T) = \cos^2 \frac{\omega_1 T}{2} \delta(q) + \sin^2 \frac{\omega_1 T}{2} \delta(q - \hbar k)$

Interpretation

L'atome, dans l'état g , traversant l'onde a une probabilité $\cos^2 \frac{\omega_1 T}{2}$ de rester dans g , auquel cas il ne gagne aucune impulsion, et une probabilité $\sin^2 \frac{\omega_1 T}{2}$ de passer dans e en absorbant un photon laser qui lui cède une impulsion $\hbar k$

Structure de $G(x, q, T)$ pour une onde stationnaire résonnante (16)

$\tilde{L}(x, u, s) = \frac{s}{s^2 + \omega_1^2 \sin^2 k x \sin^2 \frac{k u}{2}} =$

$\frac{1}{2} \left[\frac{1}{s + i \omega_1 \sin k x \sin \frac{k u}{2}} + \frac{1}{s - i \omega_1 \sin k x \sin \frac{k u}{2}} \right]$

Par transformée de Laplace inverse

$L(x, u, T) = \cos \left[\omega_1 T \sin k x \sin \frac{k u}{2} \right]$

Par transformée de Fourier sur u

$G(x, q, T) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} J_{2m}(\omega_1 T \sin k x) \delta(q - m \hbar k)$

J_{2m} : Fonction de Bessel d'ordre $2m$

Interpretation

Le caractère périodique de $L(x, u, T)$ donne, par transformation de Fourier, un "peigne" de fonctions δ

Transfert d'impulsion $m \hbar k$ à l'atome dû à une redistribution de photons entre les 2 ondes

Effet Kapitza-Dirac résonnant (17)

Etat initial : onde plane
D'après T12, la distribution finale d'impulsion est donnée par

$$P_{out}(p) = \int dx R_{in}(x) G(x, p, T)$$

Comme $R_{in}(x)$ varie très peu sur une longueur d'onde, on a

$$P_{out}(p) = \sum_m \delta(p - m\hbar k) \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda dx J_{2m}(\omega_1 T \sin kx)$$

En utilisant

$$\int_0^\pi \cos \mu x J_{2\nu}(2a \sin x) dx = \pi \cos(\mu\pi) J_{\nu-\mu}(a) J_{\nu+\mu}(a) \quad (Re \nu > -\frac{1}{2})$$

(voir Gradshteyn, Ryzhik, Table of integrals, formule 6.681.9), on obtient

$$P_{out}(p) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} J_m^2\left(\frac{\omega_1 T}{2}\right) \delta(p - m\hbar k)$$

En accord avec les résultats du cours III (où $\Omega_1 = \frac{\omega_1}{2}$ est la fréquence de Rabi associé à chaque onde progressive)

Effet Stern et Gerlach optique (18)

Petit paquet d'ondes $\Delta x \ll \lambda$ localisé en x_0 . D'après T13, on a

$$P_{out}(p) = \int dq G(x_0, q, T) P_{in}(p-q)$$

et on peut utiliser $k\Delta x \ll 1$ dans l'expression de $L(x_0, u, T)$ qui devient

$$L(x_0, u, T) \sim \cos\left[\omega_1 T \sin kx_0 \frac{\hbar u}{2}\right] = \cos(u \delta k)$$

avec $\delta k = \frac{1}{2} \omega_1 \hbar \sin kx_0 T$

On en déduit, par TF/u

$$G(x_0, q, T) = \frac{1}{2} [\delta(q - \hbar \delta k) - \delta(q + \hbar \delta k)]$$

et par suite

$$P_{out}(p) = \frac{1}{2} P_{in}(p - \hbar \delta k) + \frac{1}{2} P_{in}(p + \hbar \delta k)$$

Interprétation : Séparation du paquet d'ondes incident en 2 paquets ayant reçu un transfert d'impulsion $\pm \hbar \delta k$ correspondant à l'action, pendant T, d'une force $\pm \frac{d}{dx} \frac{\hbar \omega_1 \cos kx}{2} |_{x=x_0}$ égale aux gradients des niveaux habillés en x_0 .

Fonctions caractéristiques (19)
d'une loi de probabilité (rappels)

X : variable aléatoire

$p(x) = Pr(X=x)$: Loi de probabilité

1^{ère} Fonction caractéristique : $\varphi(u)$

$$\varphi(u) = \overline{e^{iuX}} = \int dx e^{iuX} p(x)$$

$$e^{iuX} = 1 + iuX + \frac{i^2}{2} u^2 X^2 + \dots$$

$$\varphi(u) = 1 + iu \bar{x} + \frac{i^2}{2} u^2 \overline{x^2} + \dots$$

Moments $\overline{x^n} = \frac{1}{i^n} \frac{d^n}{du^n} \varphi(u) |_{u=0}$

2^{ème} Fonction caractéristique : $\psi(u)$

$$\psi(u) = \text{Log } \varphi(u) \quad (\text{Log népérien})$$

$$\psi(u) = \text{Log} \left[1 + iu \bar{x} + \frac{i^2}{2} u^2 \overline{x^2} + \dots \right] =$$

$$= iu \bar{x} + \frac{i^2}{2} u^2 (\overline{x^2} - \bar{x}^2) + \dots$$

$$= iu \kappa_1 + \frac{i^2}{2} u^2 \kappa_2 + \dots$$

Cumulants $\kappa_n = \frac{1}{i^n} \frac{d^n}{du^n} \psi(u) |_{u=0}$

$\kappa_1 = \bar{x}$ Valeur moyenne

$\kappa_2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2$ Ecart quadratique

Variables aléatoires indépendantes X_i (20)

$$Y = \sum_{i=1}^n X_i \quad \text{Somme des } X_i$$

1^{ère} Fonction caractéristique de Y

$$\Phi(u) = \overline{e^{iuY}} = \overline{e^{iuX_1} e^{iuX_2} \dots e^{iuX_n}} = \overline{e^{iuX_1}} \overline{e^{iuX_2}} \dots \overline{e^{iuX_n}} \quad (\text{indépendance des } X_i)$$

$$\hookrightarrow \Phi(u) = \varphi_1(u) \varphi_2(u) \dots \varphi_n(u)$$

Φ = Produit des φ_i

2^{ème} Fonction caractéristique de Y

$$\Psi(u) = \text{Log } \Phi(u) = \psi_1(u) + \psi_2(u) + \dots + \psi_n(u)$$

Ψ = Somme des ψ_i

$$\kappa_1(Y) = \sum_i \kappa_1(X_i) \quad \kappa_2(Y) = \sum_i \kappa_2(X_i) \quad \dots$$

Les cumulants de variables aléatoires indépendantes s'ajoutent

Théorème de la limite centrale

Si $n \rightarrow \infty$, la loi de probabilité de Y tend vers une gaussienne définie entièrement par $\kappa_1(Y)$ et $\kappa_2(Y)$

Limite des temps longs ($T \gg \tau_R$) (21)

Expression asymptotique de $L(x, u, T)$

Décomposition en fractions rationnelles

$$\tilde{L}(x, u, s) = \frac{P_3(s)}{P_4(s)} = \sum_{i=1}^4 \frac{a_i(x, u)}{s - s_i(x, u)}$$

$$\hookrightarrow L(x, u, T) = - \sum_{i=1}^4 a_i(x, u) e^{s_i(x, u) T}$$

Les parties réelles des $s_i(x, u)$ sont < 0 (Amortissement dû à $\Gamma \neq 0$)

Soit $s_1(x, u)$ la racine donnant le plus faible amortissement

$$L(x, u, T) \underset{T \gg \tau_R}{\sim} - a_1(x, u) e^{s_1(x, u) T}$$

$L(x, u, T)$ = Transformée de Fourier de la quasi-probabilité $G(x, q, T)$

= 1^{ère} Fonction caractéristique de $G(x, q, T)$

2^{ème} Fonction caractéristique de $G(x, q, T)$

$$\Psi(x, u, T) = \text{Log } L(x, u, T) \underset{T \gg \tau_R}{\simeq} T s_1(x, u)$$

\hookrightarrow Tous les cumulants de q sont proportionnels à T pour $T \gg \tau_R$

Limite gaussienne de $G(x, q, T)$ (22)

Partageons T en n intervalles T/n avec $T/n \sim \tau_R \sim$ Temps de corrélation des forces radiatives

Le fait que les cumulants de q croissent linéairement avec T indique que les impulsions transférées pendant ces divers intervalles sont des variables aléatoires indépendantes

$\hookrightarrow G(x, q, T)$ doit donc tendre pour $T \gg \tau_R$ vers une gaussienne entièrement caractérisée par κ_1 et κ_2

$$G(x, q, T) \simeq \frac{1}{(2\pi\kappa_2)^{1/2}} \exp\left\{-\frac{(q - \kappa_1)^2}{2\kappa_2}\right\}$$

$$\kappa_1(x) = F(x) T \quad \kappa_2(x) = 2D(x) T$$

$F(x)$ = Force moyenne en x

$D(x)$ = Coef. de diffusion de l'impulsion

Les résultats obtenus pour $F(x)$ et $D(x)$ à partir de $L(x, u, T)$ sont en accord avec ceux fournis par les théories habituelles des forces radiatives

Destruction des cohérences spatiales (23)

$G(x, q, T)$ = gaussienne dont le carré de la largeur en q croît comme T

$\hookrightarrow L(x, u, T)$ = gaussienne dont le carré de la largeur en u décroît comme $1/T$

$$\text{Or, } F_{\text{out}}(x, u) = L(x, u, T) F_{\text{in}}(x, u)$$

Les cohérences spatiales de l'état entrant sont filtrées par $L(x, u, T)$ et ont une portée qui décroît de plus en plus (en $1/\sqrt{T}$) quand T croît

Une onde plane entrante devient un mélange statistique de paquets d'ondes de plus en plus localisés

Différence importante avec la limite $T \ll \tau_R$ où $L(x, u, T)$ est périodique en u et a une portée infinie en u

Une onde plane entrante devient alors une superposition linéaire d'ondes planes de vecteurs d'onde différents (diffraction)

Profils de déflexion (24)

(pour une onde plane entrante : $\Delta x \gg \lambda$)
D'après T12

$$P_{\text{out}}(p) = \int dx G(x, p, T) R_{\text{in}}(x)$$

Pour une onde stationnaire, $G(x, p, T)$ a une périodicité $\lambda/2$ (comme $F(x), D(x)$)
Comme $R_{\text{in}}(x)$ dépend très peu de x

$$P_{\text{out}}(p) = \frac{2}{\lambda} \int_{-\lambda/4}^{+\lambda/4} dx G(x, p, T)$$

Superposition de gaussiennes correspondant aux diverses abscisses x d'entrée

- centrées en $\bar{p}(x) = F(x) T$
- de largeur $\sqrt{2D(x) T}$

Somme incohérentes de contributions d'atomes croisant l'onde laser en tous les points x possibles

Prediction de nouvelles structures

et d'effets "arc en ciel" dans les profils de déflexion pour $\delta \neq 0$

Voir Ref. [3]

Temps intermédiaires (T ~ τ_R) (25)

Onde plane progressive

Structure de $\tilde{L}(x, u, s)$

$$\tilde{L}(x, u, s) = \frac{P_3}{P_4} = \frac{a + a' e^{i k u}}{b [1 - c \chi(u) e^{i k u}]}$$

a, a', b, c Fonctions de s (voir [1])
 $e^{i k u} \leftrightarrow$ Laser $\chi(u) \leftrightarrow$ ém. spontanée

$$\tilde{L}(x, u, s) = \frac{a + a' e^{i k u}}{b} \sum_{m=0}^{\infty} c^m [\chi(u)]^m e^{i m k u}$$

Structure de $\tilde{G}(x, u, s)$ TF/u

$$\tilde{G}(x, q, s) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a c^m}{b} \delta(q - m \hbar k) \otimes \phi^{(m)}(q) + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a' c^m}{b} \delta[q - (m+1) \hbar k] \otimes \phi^{(m)}(q)$$

\otimes = Produit de convolution

$$\phi^{(m)}(q) = \underbrace{\phi(q) \otimes \phi(q) \otimes \dots \otimes \phi(q)}_{m \text{ fois}}$$

Autoconvolution de $\phi(q)$ m fois avec lui-même

$\phi(q)$ = Transformée de Fourier de $\chi(u)$

Interprétation physique (26)

$\phi^{(m)}(q)$ = Distribution de l'impulsion de recul due à m photons spontanés
 $a c^m / b$ = Transformée de Laplace de $\pi(q, N-m, T / g, N)$ = Pblé pour que l'atome, partant de g avec N photons laser, arrive après un temps T dans g avec N-m photons laser et m photons émis spontanément.

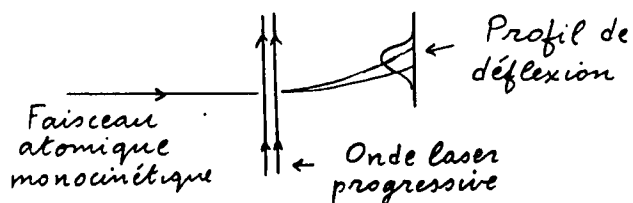
Il a alors gagné une impulsion $m \hbar k$ et les m photons spontanés lui ont communiqué un recul $\phi^{(m)}(q)$

$$\hookrightarrow \delta(q - m \hbar k) \otimes \phi^{(m)}(q)$$

De même, $a' c^m / b$ = Transformée de Laplace de la pblé $\pi(e, N-m-1, T / g, N)$ d'avoir, après un temps T, m+1 photons laser absorbés et m photons spontanés, l'atome arrivant dans e

$$\hookrightarrow \delta[q - (m+1) \hbar k] \otimes \phi^{(m)}(q)$$

Statistique du nombre de photons de fluorescence émis pendant T (27)



Après déconvolution de la contribution au profil des photons émis spontanément [$\phi^{(m)}(q)$], l'étude du profil de déflexion permet de mesurer la distribution statistique $a c^m / b$ de m (effets sub-poissoniens... Refs [7-10])

Intérêt d'une telle méthode

Chaque photon absorbé ou émis laisse une trace sur la trajectoire alors qu'un P.M. ne détecte pas tous les photons émis

L'étude de la fonction $L(x, u, T)$ donne accès à $a c^m / b$

Onde laser stationnaire (28)

Structure de $\tilde{L}(x, u, s)$

$$\tilde{L}(x, u, s) = \frac{P_3}{P_4} = \frac{a}{b [1 - c \chi(u)]}$$

a, b, c Fonctions de x, u, s, périodiques en u (voir Ref. [1])

$$\tilde{L}(x, u, s) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a c^m}{b} [\chi(u)]^m$$

Structure de $\tilde{G}(x, q, s)$ TF/u

$$\tilde{G}(x, q, s) = \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{R}_m(x, q, s) \otimes \phi^{(m)}(q)$$

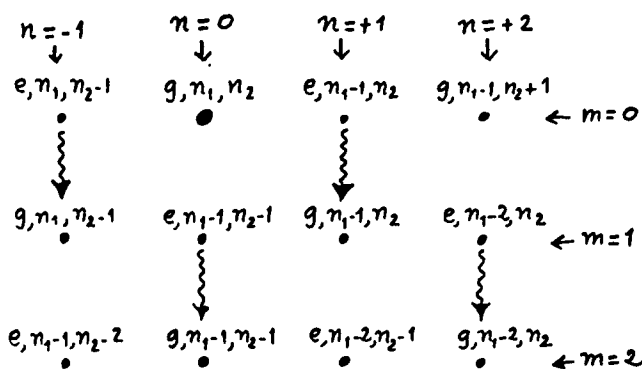
$\tilde{R}_m(x, q, s)$ = T.F. d'une fonction périodique → "Peigne" de fonctions δ

$$\tilde{R}_m(x, q, s) = \sum_n \tilde{\pi}_m^n(x, s) \delta(q - n \hbar k)$$

La transformée de Laplace inverse de $\tilde{\pi}_m^n(x, s)$ décrit la redistribution de photons entre les 2 ondes progressives formant l'onde stationnaire (après m émissions spontanées), conduisant à un transfert d'impulsion $n \hbar k$ à l'atome

Atome habillé avec 2 types de photons

Etat initial : $g, n_1, n_2 =$ Atome dans g (29)
avec n_1 photons $+k$, n_2 photons $-k$



Chaque état est repéré par n, m
 $\tilde{\pi}_m^n(x, s) =$ Transformée de Laplace de la p.bte' de transition $m=0, n=0 \rightarrow m, n$
 Redistribution \rightarrow Gain d'impulsion $n\hbar k$
 Recul dû à l'émission spontanée $\Phi^{(m)}(q)$
 \hookrightarrow Transfert d'impulsion dans une telle transition $m=0, n=0 \rightarrow m, n$
 $\delta(q - n\hbar k) \otimes \Phi^{(m)}(q)$

Conclusion

La fonction filtre $L(x, u, T)$, introduite dans ce cours permet, moyennant certaines approximations (Raman-Nath) d'obtenir une description synthétique de plusieurs effets physiques

- Effet Kapitza-Dirac résonnant (diffraction d'une onde de de Broglie)
- Effet Stern et Gerlach optique
- Transition du régime diffractif au régime diffusif et destruction progressive des cohérences spatiales
- Force moyenne et coefficient de diffusion de l'impulsion dans le régime diffusif
- Statistique du nombre de photons de fluorescence émis pendant un temps donné T

Références

[1] C. Tanguy, S. Reynaud, C. Cohen-Tannoudji J.Phys. B17, 4623 (1984)
 [2] C. Tanguy, Thèse de 3^{ème} cycle, Paris 1983
 [3] C. Tanguy, S. Reynaud, M. Matsuoka, C. Cohen-Tannoudji Opt. Commun. 44, 249 (1983)

Une résolution numérique plus approfondie des équations de la référence [1] est présentée dans [4] et comparée aux résultats expérimentaux de [5]. Pour une étude numérique des effets de l'émission spontanée sur la diffraction de Bragg et le Dopplerons, voir [6]

[4] S.M. Tan, D.F. Walls, Appl. Phys. B54, 434 (1992)
 [5] P.L. Gould, P.J. Martin, G.A. Ruff, R.E. Stoner, J.L. Picqué, D.E. Pritchard Phys. Rev. A43, 585 (1991)
 [6] E. Schumaker, M. Wilkens, P. Meystre, S. Glasgow Appl. Phys. B54, 451 (1992)

Statistique des photons de fluorescence

[7] L. Mandel, J. Opt. 10, 51 (1979)
 [8] R.J. Cook, Opt. Commun. 35, 347 (1980) et Phys. Rev. A23, 1243 (1981)
 [9] S. Stenholm, Phys. Rev. A27, 2513 (1983)
 [10] S. Reynaud, Ann. Phys. Paris, 8, 315 (1983)

Effets d'interférence quantiques pour un atome
 situé à un noeud d'une onde stationnaire

Buts de ce cours

Un atome situé à un noeud d'une onde stationnaire ne "voit" pratiquement pas de lumière et émet donc très peu de photons de fluorescence. La théorie standard des forces radiatives prédit cependant un coefficient de diffusion de l'impulsion de l'atome aussi important aux noeuds qu'aux ventres. Un tel résultat, étrange à 1^{ère} vue, est interprété ici en termes d'interférences quantiques entre amplitudes de diffusion et met en évidence un nouveau type de redistribution de photons entre 2 ondes progressives.

 ① Introduction

 a) Rappel de résultats sur les forces radiatives.

On considère dans tout ce cours un atome placé dans une onde stationnaire quasi-résonnante et on se limite au domaine des faibles paramètres de saturation.

Paramètre de saturation

- Onde stationnaire $E_0 \sin k_L x \cos \omega_L t$ (7.1)

avec un noeud en $x = 0$

- Fréquence de Rabi en x

$$\Omega_1(x) = \Omega_1^{\max} \sin k_L x \quad (7.2)$$

Ω_1^{\max} : Fréquence de Rabi maximale, obtenue aux ventres

- Paramètre de saturation $s(x)$ en x .

$$s(x) = \frac{[\Omega_1(x)]^2 / 2}{\delta^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} = s_{\max} \sin^2 k_L x \quad (7.3)$$

$$s_{\max} = \frac{[\Omega_1^{\max}]^2 / 2}{\delta^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} \quad (7.4.a) \quad \delta = \omega_L - \omega_A \quad (7.4.b)$$

Γ : largeur naturelle de l'état excité e situé à une distance $\hbar\omega_A$ au dessus de l'état fondamental g .

- On suppose dans ce cours

$$s(x) \ll 1 \quad (7.5)$$

car le traitement présenté plus loin repose sur une étude perturbative des amplitudes de diffusion.

Largeur radiative $\hbar\Gamma'(x)$ et déplacement lumineux $\hbar\delta'(x)$ de l'état fondamental g d'un atome situé en x .

$$\Gamma'(x) = \Gamma \frac{s(x)}{2} \quad (7.6.a)$$

$$\delta'(x) = \delta \frac{s(x)}{2} \quad (7.6.b)$$

$\Gamma'(x)$ peut également être interprété comme la probabilité par unité de temps d'absorption (plus exactement, de diffusion) d'un photon par l'atome.

$\Gamma'(x)$ varie avec δ comme $\frac{\Gamma}{\Gamma^2 + \delta^2}$: courbe d'absorption de Lorentz.

$\Gamma'(x)$ décrit donc des processus dissipatifs

$\delta'(x)$ varie avec δ comme $\frac{\delta}{\Gamma^2 + \frac{\delta^2}{4}}$: courbe de dispersion. $\delta'(x)$ décrit donc des processus réactifs

A partir des équations de Bloch optiques, on trouve (voir, par exemple, [1] [2]) pour la vitesse de variation moyenne de l'impulsion atomique, c'est à dire encore pour la force moyenne agissant sur un atome :

$$\frac{d}{dt} \langle P \rangle = \mathcal{F}(x) = -\frac{d}{dx} \hbar \delta'(x) = -\hbar \delta \frac{s_{\max}}{2} \frac{d}{dx} \sin^2 k_L x = -\hbar k_L \delta s_{\max} \sin k_L x \cos k_L x \quad (7.7)$$

Interprétation : à la limite $s(x) \ll 1$, l'atome est essentiellement dans g et le déplacement lumineux $\hbar \delta'(x)$ de g apparaît comme un potentiel dépendant de x dans lequel l'atome est plongé, et donnant naissance à une force égale (au signe près) au gradient spatial de ce potentiel.

Coefficient de diffusion de l'impulsion : D

$$\frac{d}{dt} (\langle P^2 \rangle - \langle P \rangle^2) = 2D \quad (7.8)$$

$2D$ est la vitesse de variation de l'écart quadratique de l'impulsion. On peut relier D à des fonctions de corrélation de l'opérateur force et calculer ces fonctions de corrélation à partir des équations de Bloch optiques et du théorème de régression quantique (voir [1] et [2], § 5). On trouve

$$D = D_{\text{fluo}} + D_{\text{laser}} \quad (7.9)$$

avec

$$D_{\text{fluo}} = \frac{1}{4} \hbar^2 k_L^2 \Gamma s_{\max} \sin^2 k_L x \quad (7.10)$$

$$D_{\text{laser}} = \frac{1}{4} \hbar^2 k_L^2 \Gamma s_{\max} \cos^2 k_L x \quad (7.11)$$

Interprétation de D_{fluo}

D_{fluo} provient des fluctuations d'impulsion dues au recul communiqué à l'atome par les photons de fluorescence émis dans des directions aléatoires.

D_{fluo} est nul aux noeuds, ce qui est compréhensible car il n'y a pratiquement pas de photons de fluorescence émis aux noeuds.

Difficultés d'interprétation de D_{laser}

D_{laser} est dû aux fluctuations des échanges d'impulsion entre atomes et photons laser, lors de processus d'absorption ou de redistributions. On trouve en (7.11) que D_{laser} est maximal aux noeuds et nul aux ventres. Ce résultat est, à première vue, difficile à comprendre.

(i) Aux noeuds, il n'y a pas d'absorption de photon.

(ii) Considérons maintenant les processus de redistribution, responsables des forces dipolaires. Si l'on se place à grand désaccord, pour pouvoir effectuer l'approximation séculaire et utiliser les images physiques de l'atome habillé, on trouve que la pente des niveaux habillés est nulle aux noeuds (voir Fig. 7 du cours III). L'image habituelle des fluctuations des forces dipolaires, dues à des changements de signe aléatoires de la force de gradient instantanée quand l'atome habillé saute par émission spontanée d'un niveau habillé de type 1 à un niveau habillé de type 2, ou vice versa (voir Ref [3]), conduirait ici à $D_{\text{laser}} = 0$ aux noeuds puisque cette force de gradient est toujours nulle aux noeuds. En fait, on peut montrer que l'approximation séculaire n'est plus suffisante pour calculer D_{laser} aux noeuds, même si δ est grand. Apparaissent alors des couplages non séculaires entre populations des niveaux habillés et cohérences entre niveaux habillés qui rendent difficile la recherche d'images physiques simples pour interpréter la non nullité de D_{laser} aux noeuds (et sa nullité aux ventres !)

b) Approche suivie dans ce cours (Ref. [2], § 6)

- (i) Pour l'état initial du champ laser, nous prendrons des états à 1 seul photon. Les motivations d'un tel choix sont les suivantes
- De tels états satisfont clairement la condition (7.5).
 - S'il est possible d'interpréter physiquement le résultat (7.11) avec de tels états, cela montrera que la non-nullité de D_{laser} aux noeuds n'est pas due à des processus multiphotoniques.
 - Il sera possible d'utiliser la théorie de la diffusion résonnante (matrice S) et de voir si le résultat (7.11) n'est pas dû à une interférence quantique entre amplitudes de diffusion.

- (ii) Au lieu de tracer sur l'état du champ de rayonnement pour étudier l'évolution de la matrice densité atomique réduite, nous garderons ici le vecteur d'état du système global $A+R$ (atome + champ de rayonnement) et nous étudierons son évolution au cours du temps
- Nous pourrions ainsi suivre l'évolution du photon initial et voir s'il est absorbé (disparition du photon incident et apparition d'un photon de fluorescence dans un mode initialement vide du champ) ou s'il est redistribué (transport du photon d'un mode initialement excité vers un autre mode initialement excité).
 - Puisque nous gardons l'état du système global $A+R$, il sera plus facile d'étudier les corrélations apparaissant entre A et R et de voir si elle jouent un rôle important dans le problème étudié.

- (iii) Avant d'étudier le cas d'un atome dans une onde stationnaire, nous commencerons par celui plus simple d'un atome dans une onde progressive, de manière à mettre en place le formalisme et à donner un premier exemple simple d'interférences quantiques entre amplitudes de diffusion.

② Cas simple d'un atome dans une onde plane progressive

a. Hamiltonien - Etat initial

$$H = H_A + H_R + V_{AR} \quad (7.12)$$

$$H_A = \frac{\vec{p}^2}{2M} + \hbar\omega_A |e\rangle\langle e| \quad H_R = \sum_{\vec{k}\epsilon} \left(a_{\vec{k}\epsilon}^\dagger a_{\vec{k}\epsilon} + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega \quad (7.13)$$

$$V_{AR} = -i\vec{d} \cdot \sum_{\vec{k}\epsilon} \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 L^3}} \vec{\epsilon} a_{\vec{k}\epsilon} e^{i\vec{k}\cdot\vec{R}} + \text{h.c.} \quad (7.14)$$

Les $a_{\vec{k}\epsilon}^\dagger$ et $a_{\vec{k}\epsilon}$ sont les opérateurs de création et d'annihilation d'un photon $\vec{k}\epsilon$. Ici, aussi bien le champ du vide que le champ incident sont traités quantiquement.

- A $t=0$, l'état de $A+R$ est :

$$|\Psi(t=0)\rangle = |\Psi_A\rangle \otimes |\Psi_R\rangle = |g, \vec{p}; \vec{k}_L \vec{\epsilon}_L\rangle \quad (7.15)$$

Atome dans l'état g , avec une impulsion \vec{p} , en présence d'un photon de vecteur d'onde \vec{k}_L et de polarisation $\vec{\epsilon}_L$.

b. Amplitude de probabilité de rester dans l'état initial

- A l'instant $t=T$, l'état de $A+R$ est devenu (en représentation d'interaction par rapport à H_A+H_R):

$$|\Psi(T)\rangle = c(T) |g, p; \vec{k}_L \vec{\epsilon}_L\rangle + |\Psi_\perp(t)\rangle \quad (7.16)$$

où $|\Psi_T(t)\rangle$ représente la projection de $|\Psi(T)\rangle$ dans le sous-espace orthogonal à $|g, \vec{p}; \vec{k}_L \vec{E}_L\rangle$. On s'intéresse ici à l'amplitude de probabilité

$$c(T) = \langle g, \vec{p}; \vec{k}_L \vec{E}_L | U(T) | g, \vec{p}; \vec{k}_L \vec{E}_L \rangle \quad (7.17)$$

pour que le système A+R n'ait pas quitté l'état initial.

- Comme VAR décrit des processus d'absorption et d'émission à 1 photon, 2 amplitudes seulement contribuent à (7.17) à l'ordre 2 inclus en VAR, et sont représentées par les diagrammes des figures 1a et 1b. Ou rien ne se passe (ordre 0 - Fig. 1a), ou le photon incident est absorbé puis réémis (Ordre 2 - Fig. 1b)

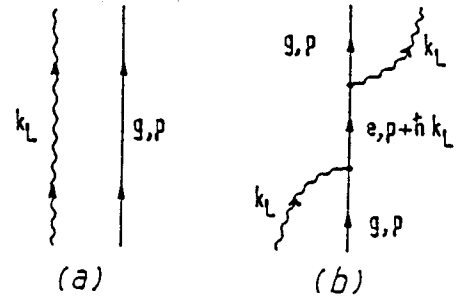


Fig. 1 (extrait de [2])

- Utilisant la théorie de la diffusion (voir par exemple [4], complément A_I), on obtient

$$c^{(0)}(T) = 1 \quad (7.18)$$

$$c^{(2)}(T) = -2\pi i \delta^{(T)}(E_{fin} - E_{in}) \frac{|\langle e, \vec{p} + \hbar \vec{k}_L; 0 | VAR | g, \vec{p}; \vec{k}_L \vec{E}_L \rangle|^2}{E_{g, \vec{p}; \vec{k}_L} - [E_{e, \vec{p} + \hbar \vec{k}_L; 0} - i\hbar \frac{\Gamma}{2}]} \quad (7.19)$$

Dans (7.19), $\delta^{(T)}$ est une fonction de diffusion

$$\delta^{(T)}(E) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_0^T d\tau e^{-iE\tau/\hbar} = e^{-iET/2\hbar} \frac{\sin(ET/2\hbar)}{\pi E} \quad (7.20)$$

exprimant la conservation de l'énergie (à \hbar/T près) entre l'état initial et l'état final. Comme ici $E_{fin} = E_{in}$, on obtient en faisant tendre E vers 0 dans (7.20)

$$\delta^{(T)}(0) = \frac{T}{2\pi\hbar} \quad (7.21)$$

- Pour le numérateur de la fraction de (7.19), on obtient, compte tenu de (7.14)

$$|\langle e, \vec{p} + \hbar \vec{k}_L; 0 | VAR | g, \vec{p}; \vec{k}_L \vec{E}_L \rangle|^2 = d^2 \frac{\hbar \omega}{2\epsilon_0 L^3} = d^2 E_\omega^2 = \hbar^2 \Omega_1^2 / 4 \quad (7.22)$$

d est l'élément de matrice entre e et g de la projection $\vec{E}_L \cdot \vec{d}$ du dipôle \vec{d} sur \vec{E}_L . E_ω^2 peut être considéré comme le carré du champ électrique associé à 1 seul photon $\vec{k}_L \vec{E}_L$, Ω_1 la fréquence de Rabi correspondante.

Le dénominateur D de la fraction de (7.19) s'écrit :

$$D = E_g + \hbar \omega_L + \frac{\vec{p}^2}{2M} - (E_e - i\hbar \frac{\Gamma}{2}) - \frac{(\vec{p} + \hbar \vec{k}_L)^2}{2M} \\ = \hbar(\delta + i\frac{\Gamma}{2}) - \hbar \frac{\vec{k}_L \cdot \vec{p}}{M} - \frac{\hbar^2 k_L^2}{2M} \quad (7.23)$$

On a rajouté $-i\hbar \Gamma/2$ à l'énergie de l'état e pour tenir compte de l'instabilité radiative de cet état (voir par exemple [4], complément B_{III}).

Nous supposons que l'effet Doppler $\hbar \vec{k}_L \cdot \vec{p} / M$ et l'énergie de recul $\hbar^2 k_L^2 / 2M$ sont négligeables devant $\hbar \Gamma$, de sorte que

$$D \approx \hbar(\delta + i\frac{\Gamma}{2}) \quad (7.24)$$

- En utilisant (7.21), (7.22) et (7.24), on obtient finalement :

$$c(T) = c^{(0)}(T) + c^{(2)}(T) = 1 - iT \frac{\Omega_1^2 / 4}{\delta + i\frac{\Gamma}{2}} = 1 - \frac{\Gamma'}{2} T - i\delta' T \quad (7.25)$$

avec

$$\Gamma' = \Gamma \frac{\Omega_1^2 / 4}{\delta^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} = \Gamma \frac{S_0}{2} \quad (7.26.a) \quad \delta' = \delta \frac{\Omega_1^2 / 4}{\delta^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} = \delta \frac{S_0}{2} \quad (7.26.b)$$

$S_0 = (\Omega_1^2 / 4) / [\delta^2 + (\Gamma^2 / 4)]$ étant le paramètre de saturation associé à 1 photon.

c. Discussion physique

- les équations (7.26) sont très analogues aux équations (7.6), de sorte que $\hbar\Gamma'$ et $\hbar\delta'$ peuvent être interprétés comme étant la largeur radiative et le déplacement lumineux de l'état fondamental g dans le champ d'un seul photon $\vec{k}_L \vec{E}_L$. D'ailleurs, (7.25) peut être considéré comme le début du développement de

$$c(T) \approx e^{-i(\delta' - i\frac{\Gamma'}{2})T} \tag{7.27}$$

- le calcul du paragraphe b précédent montre également que Γ' est associé à une interférence entre le champ incident et la partie imaginaire de l'amplitude de diffusion vers l'avant (coefficient de $-2\pi i \delta(E_{fin} - E_{in})$ dans (7.19)), alors que δ' fait intervenir une interférence entre le champ incident et la partie réelle de l'amplitude de diffusion vers l'avant.

③ Atome au noeud d'une onde stationnaire.

a) Etat initial du système atome + champ

Etat initial du champ

- Excitation élémentaire du mode $\sin k_L x$ contenant 1 seul photon. Développons cet état sur les états $|\vec{E}_L, +\vec{k}_L\rangle$ et $|\vec{E}_L, -\vec{k}_L\rangle$, que nous écrivons plus simplement $| \pm k_L \rangle$.

- Pour cela introduisons tout d'abord les opérateurs :

$$b_{k_L} = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_{k_L} - a_{-k_L}) \quad c_{k_L} = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_{k_L} + a_{-k_L}) \tag{7.28}$$

et leurs adjoints. Il est facile de vérifier que

$$b_{k_L} |0\rangle = 0 \quad [b_{k_L}, b_{k_L}^\dagger] = 1 \tag{7.29}$$

ce qui montre que $b_{k_L}^\dagger$ et b_{k_L} sont des opérateurs de création et d'annihilation d'un photon. Il en est de même de c_{k_L} et $c_{k_L}^\dagger$ qui, de plus, commutent avec b_{k_L} et $b_{k_L}^\dagger$.

- Par ailleurs, si, à partir du développement du champ $E(\vec{r})$ en ondes planes

$$E(\vec{r}) \sim i \sum_k E_{\omega} (a_k e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} - a_k^\dagger e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}) \tag{7.30}$$

on regroupe les contributions des modes k_L et $-k_L$, on trouve

$$E(\vec{r}) \sim -i\sqrt{2} E_{\omega_L} b_{k_L} \sin k_L x + \text{Termes en } c_{k_L} \cos k_L x + \text{Contribution des autres modes} + h.c. \tag{7.31}$$

ce qui montre que $b_{k_L}^\dagger$ et b_{k_L} sont les opérateurs de création et d'annihilation d'un photon du mode $\sin k_L x$. Comme, d'après (7.28)

$$b_{k_L}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_{k_L}^\dagger - a_{-k_L}^\dagger) \tag{7.32}$$

on en déduit que l'état à 1 photon dans le mode $\sin k_L x$ s'écrit :

$$|\Psi_R\rangle = b_{k_L}^\dagger |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_{k_L}^\dagger - a_{-k_L}^\dagger) |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|+k_L\rangle - |-k_L\rangle) \tag{7.33}$$

Superposition linéaire antisymétrique de 2 photons se propageant en sens opposés.

Etat initial de l'atome

- Etat interne : g . Etat externe : paquet d'ondes décrit par une fonction d'onde $\psi(x)$, réelle, paire en x , de transformée de Fourier c_p .

$$|\Psi_A\rangle = \sum_p c_p |g, p\rangle \tag{7.34}$$

c_p , fonction réelle de p , paire en p , centrée en $p=0$

- On suppose le paquet d'ondes très localisé au voisinage de $x=0$

$$\Delta x \ll \lambda_L \iff \Delta p \gg \hbar k_L \quad (7.35)$$

- En regroupant (7.33) et (7.34), on obtient pour l'état initial de A+R :

$$|\Psi_{in}\rangle = |\Psi(t=0)\rangle = |\Psi_A\rangle \otimes |\Psi_R\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_p c_p [|g,p; +k_L\rangle - |g,p; -k_L\rangle] \quad (7.36)$$

b) Amplitude de probabilité de rester dans l'un des états initialement peuplés

Définition de \mathcal{P}_p^\pm

A $t=0$, seuls les modes $+k_L$ et $-k_L$ sont, d'après (7.36), peuplés. Après un temps T , l'excitation des modes $+k_L$ et $-k_L$ aura changé, et d'autres modes, initialement vides, vont commencer à se peupler. On s'intéresse ici à l'évolution des modes initialement peuplés. Pour cela, on introduit les amplitudes

$$\mathcal{P}_p^\pm = \langle g,p;\pm k_L | U(T) | \Psi_{in} \rangle \quad (7.37)$$

de trouver, à l'instant T , le système dans l'état $|g,p; +k_L\rangle$ ou $|g,p; -k_L\rangle$.

Représentation diagrammatique des processus contribuant à \mathcal{P}_p^+

- A l'ordre 2 en VAR, 3 processus contribuent à \mathcal{P}_p^\pm et sont représentés par les 3 diagrammes a, b, c de la figure 2.

(a) : rien ne se passe

(b) : le photon k_L est absorbé puis réémis.

(c) : le photon $-k_L$ est absorbé par l'atome dans l'état $g, p+2\hbar k_L$, qui passe alors dans l'état intermédiaire $e, p+\hbar k_L$, puis émet le photon k_L .

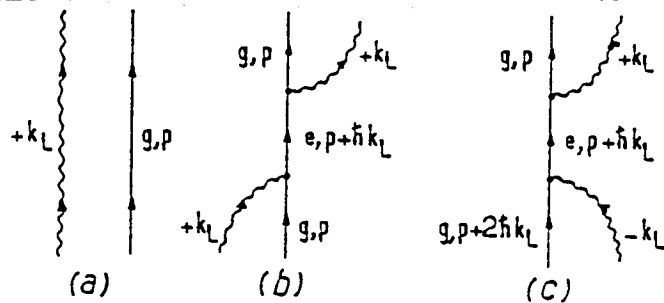


Fig. 2 (extrait de [2])

- La conservation de l'impulsion totale apparaît à chaque vertex de ces diagrammes. Les diagrammes (a) et (b) doivent être multipliés par $c_p/\sqrt{2}$, amplitude de probabilité d'avoir initialement l'atome dans l'état $|g,p; +k_L\rangle$; alors que le diagramme (c) doit être multiplié par

$-c_{p+2\hbar k_L}/\sqrt{2}$, amplitude d'être initialement dans $|g,p+2\hbar k_L; -k_L\rangle$.

Les 3 diagrammes (a), (b), (c), aboutissent au même état final, mais partent d'états initiaux différents. C'est uniquement parce que $|\Psi_{in}\rangle$ est une superposition linéaire de $|g,p; k_L\rangle$ et $|g,p+2\hbar k_L; -k_L\rangle$ que (c) peut interférer avec (a) et (b).

Problème de la conservation de l'énergie

- Pour (a) et (b), les états initial et final coïncident, de sorte que $E_{fin} - E_{in} = 0$ et on peut utiliser (7.21).

- Par contre, pour (c), on a

$$E_{fin} - E_{in} = \frac{p^2}{2m} - \frac{(p+2\hbar k_L)^2}{2m} = -\frac{2\hbar k_L p}{m} - \frac{2\hbar^2 k_L^2}{m} \approx -\frac{2\hbar k_L \Delta p}{m} \quad (7.38)$$

puisque $p \sim \Delta p \gg \hbar k_L$ d'après (7.35). La fonction $\delta^{(T)}(E_{fin} - E_{in})$ apparaissant dans l'amplitude associé à (c) a une largeur de l'ordre de \hbar/T . Si

$$E_{fin} - E_{in} \approx \frac{\hbar k_L \Delta p}{m} \ll \frac{\hbar}{T} \quad (7.39)$$

on peut remplacer $E_{fin} - E_{in}$ par 0 et utiliser de nouveau (7.21).

- Pour interpréter physiquement (7.39), réécrivons cette équation sous la forme :

$$\frac{\Delta p}{M} T \ll \frac{1}{k_L} = \lambda_L$$

(7.40)

VII-7

Il faut que T soit suffisamment court pour que l'étalement du paquet d'ondes pendant T , $\Delta p T / M$, reste petit devant la longueur d'onde. Autrement, il ne serait plus possible de considérer que l'atome reste localisé au voisinage d'un noyau pendant le temps T .

Calcul de \mathcal{A}_p^+

- Même type de calculs que pour le § 2. Mêmes éléments de matrice, même dénominateur d'énergie. Comme on est intéressé ici par le coefficient de diffusion D qui ne dépend que de Γ' (voir (7.10) et (7.11)), on suppose pour simplifier $\delta = 0 \rightarrow \delta' = 0$

(7.41)

- On obtient alors

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_p^+ &= \frac{1}{\sqrt{2}} c_p - \frac{1}{\sqrt{2}} c_p \frac{\Gamma' T}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} c_{p+2\hbar k_L} \frac{\Gamma' T}{2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[c_p - \frac{\Gamma' T}{2} (c_p - c_{p+2\hbar k_L}) \right] \end{aligned} \quad (7.42)$$

où les 3 termes de la 1^{ère} ligne de (7.42) sont respectivement associés aux 3 diagrammes (a) (b) (c) de la figure 2.

- A la limite $\Delta p \rightarrow \infty$, $c_p - c_{p+2\hbar k_L} \rightarrow 0$ et \mathcal{A}_p^+ ne dépend plus de T . L'interférence entre (b) et (c) est alors parfaitement destructive et supprime toute absorption. En fait, Δp ne peut pas être infini (car $|\Psi_A\rangle$ serait alors de norme infinie). Un développement de $c_p - c_{p+2\hbar k_L}$ en puissances de

$$\epsilon = \frac{\hbar k_L}{\Delta p} \sim \frac{\Delta x}{\lambda} \quad (7.43)$$

permet de transformer (7.42) en

$$\mathcal{A}_p^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} c_p \left[1 + \Gamma' T \left(\hbar k_L \frac{c'_p}{c_p} + \hbar^2 k_L^2 \frac{c''_p}{c_p} + \dots \right) \right] \quad (7.44)$$

Calcul de \mathcal{A}_p^-

- Des calculs analogues peuvent être faits pour les 3 diagrammes (a), (b), (c), de la figure 3 qui contribuent à l'amplitude \mathcal{A}_p^- .

- L'équation correspondant à (7.42) et (7.44) s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_p^- &= -\frac{1}{\sqrt{2}} c_p + \frac{1}{\sqrt{2}} c_p \frac{\Gamma' T}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} c_{p-2\hbar k_L} \frac{\Gamma' T}{2} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}} c_p \left[1 - \Gamma' T \left(\hbar k_L \frac{c'_p}{c_p} - \hbar^2 k_L^2 \frac{c''_p}{c_p} + \dots \right) \right] \end{aligned} \quad (7.45)$$

Récapitulation

En regroupant (7.44) et (7.45), on obtient finalement pour l'état du système $A+R$ à l'instant $t=T$, à l'ordre 2 inclus en V_{AR} et ϵ

$$\begin{aligned} |\Psi(T)\rangle &= \sum_p c_p |g, p\rangle \otimes \\ &\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 + \Gamma' T \hbar k_L \frac{c'_p}{c_p} + \Gamma' T \hbar^2 k_L^2 \frac{c''_p}{c_p} \right) |+\hbar k_L\rangle - \right. \\ &\left. - \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 - \Gamma' T \hbar k_L \frac{c'_p}{c_p} + \Gamma' T \hbar^2 k_L^2 \frac{c''_p}{c_p} \right) |-\hbar k_L\rangle \right\} + \\ &+ \text{Etats faisant intervenir des modes autres que } \pm k_L \end{aligned} \quad (7.46)$$

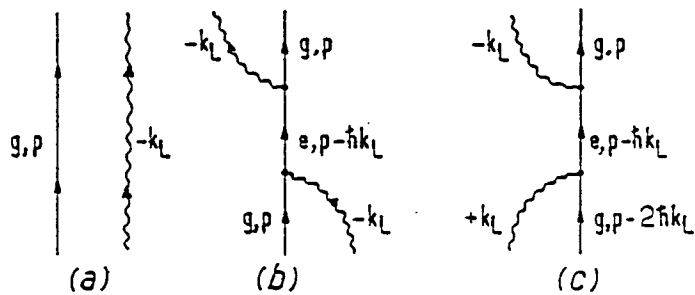


Fig. 3 (extraite de [2])

c) Corrélations apparues entre atome et photon

- A l'instant T, chaque état atomique $|g, p\rangle$ se retrouve multiplié tensoriellement par un état de photon $|\Psi_R(p, T)\rangle$, qui dépend de p, et qui est donné par l'expression entre crochets de (7.46).
- A cause de la dépendance en p de $|\Psi_R(p, T)\rangle$ (via c'_p/c_p et c''_p/c), la projection de $|\Psi(T)\rangle$ dans le sous-espace des états initialement peuplés $\{|g, p; \pm k_L\rangle\}$ (3 premières lignes de (7.46)), n'est plus un produit tensoriel d'un état de A par un état de R, comme c'était le cas pour l'état initial (7.36). Des corrélations quantiques sont donc apparues entre l'atome et le photon par suite de leur interaction.

d) Absorption du photon initial

- La probabilité de trouver un photon dans l'un des 2 modes $+k_L$ et $-k_L$ est égale à 1 dans l'état initial (7.36). A l'instant T, cette probabilité s'obtient en prenant la trace par rapport aux variables de A et R de la matrice densité associée aux 3 premières lignes de (7.46). On obtient, à l'ordre 2 inclus en ϵ et V_{AR}

$$\int dp c_p^2 \langle \Psi_R(p, T) | \Psi_R(p, T) \rangle = 1 + 2\Gamma'T \hbar^2 k_L^2 \int dp c_p c_p'' = 1 - 2\Gamma'T \hbar^2 k_L^2 \int dp c_p'^2 \tag{7.47}$$

Une intégration par parties a été effectuée pour passer de la 1^{ère} à la 2^{ème} ligne.

- Le 2^{ème} terme de la 2^{ème} ligne de (7.47) est négatif et décrit la disparition du photon initial. Comme $c_p \sim c_p / \Delta p$ et que $\int dp c_p^2 = 1$, cette absorption du photon initial est en $(\hbar k_L / \Delta p)^2 = \epsilon^2 = (\Delta x / \lambda_L)^2$.

Interprétation: A cause de son extension spatiale finie Δx , le paquet d'ondes explore l'onde stationnaire au voisinage du noeud sur une distance de l'ordre de Δx , et "voit" donc une intensité non nulle, variant en $\sin^2 k_L \Delta x \sim k_L^2 \Delta x^2 = (\Delta x / \lambda_L)^2 \sim \epsilon^2$, qui provoque donc une absorption proportionnelle à ϵ^2 .

e) Redistribution du photon initial

- Si on se limite à l'ordre 1 en ϵ , $|\Psi_R(p, T)\rangle$ s'écrit

$$|\Psi_R(p, T)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (1 + \Gamma'T \hbar k_L \frac{c'_p}{c_p}) | +k_L \rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} (1 - \Gamma'T \hbar k_L \frac{c'_p}{c_p}) | -k_L \rangle \tag{7.48}$$

et garde une norme constante égale à 1 quand T croît.

- Le fait qu'aucune absorption n'apparaisse à l'ordre 1 en ϵ ne signifie pas cependant que rien n'arrive au photon initial qui était dans l'état (7.33). Il apparaît clairement sur (7.33) et (7.48) que la probabilité P_+ (resp. P_-) d'avoir ce photon dans le mode $+k_L$ (resp. $-k_L$) change au cours du temps de $P_{\pm}(0)$ à $P_{\pm}(T)$

$$P_{\pm}(0) = \frac{1}{2} \rightarrow P_{\pm}(T) = \frac{1}{2} \pm \Gamma'T \hbar k_L \frac{c'_p}{c_p} \tag{7.49}$$

La probabilité d'occupation de l'un des 2 modes $+k_L$ ou $-k_L$ croît alors que la probabilité d'occupation ^(de l'autre mode) décroît de la même quantité. Un tel phénomène correspond à une redistribution du photon incident entre les 2 modes initialement peuplés $\pm k_L$ et produit un changement δp_R de l'impulsion du rayonnement égale à

$$\delta p_R = 2 \hbar k_L (\Gamma'T \hbar k_L \frac{c'_p}{c_p}) = 2 \Gamma'T \hbar^2 k_L^2 \frac{c'_p}{c_p} \tag{7.50}$$

La conservation de l'impulsion totale entraîne un changement opposé de l'impulsion atomique

$$\delta p_A = -\delta p_R = -2\Gamma' T \hbar^2 k_L^2 \frac{c'_p}{c_p} \quad (7.51)$$

- Une caractéristique importante de la redistribution décrite par (7.49) est qu'elle dépend (via c'_p/c_p) de l'impulsion atomique p

Montrons maintenant comment une telle "redistribution corrélée" peut expliquer la diffusion d'impulsion aux noeuds. La figure 3 représente les variations avec p de c_p^2 (qui ressemblent à celles de c_p qui est réel).

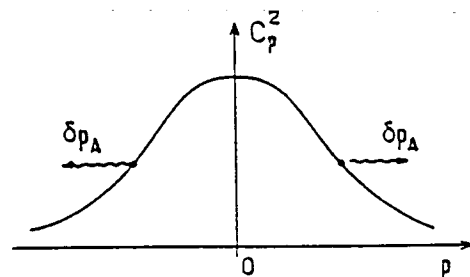


Fig 3 (extraite de [2])

Prenons une valeur positive de p où $c'_p/c_p < 0$

L'équation (7.51) montre que, pour une telle valeur de p , la redistribution corrélée produit une variation positive, δp_A , de p (flèche orientée vers la droite de la figure 3). De même, on trouverait à partir de (7.51) une variation négative δp_A de p , pour $p < 0$ (flèche orientée vers la gauche)

Comme δp_A est, comme c'_p/c_p , une fonction impaire de p , on en déduit que la redistribution corrélée, décrite par (7.49), produit un élargissement de la distribution d'impulsion atomique (donc une diffusion d'impulsion), sans aucun déplacement global.

f) Calcul du coefficient de diffusion d'impulsion

- Le raisonnement précédent peut être rendu plus quantitatif.

Pour un atome d'impulsion $p_A = p$, la variation δp_A de p_A produit une variation de p_A^2 donnée par

$$\delta(p_A^2) = 2p_A \delta p_A = 2p \delta p_A = -4\Gamma' T \hbar^2 k_L^2 p \frac{c'_p}{c_p} \quad (7.52)$$

- Pour moyenner (7.52) sur $p_A = p$, il faut multiplier (7.52) par la probabilité $c_p^2 dp$ d'avoir p_A compris entre p et $p+dp$, puis intégrer sur p , ce qui donne

$$\overline{\delta p_A^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta p_A^2 c_p^2 dp = -4\Gamma' T \hbar^2 k_L^2 \int_{-\infty}^{+\infty} p c_p c'_p dp \quad (7.53)$$

Une intégration par parties et le fait que $\int c_p^2 dp = 1$ donnent finalement

$$\overline{\delta p_A^2} = 2DT \quad (7.54)$$

$$\text{avec } D = \hbar^2 k_L^2 \Gamma' = \hbar^2 k_L^2 \Gamma \frac{s_0}{2} = \hbar^2 k_L^2 \Gamma \frac{s_{\max}}{4} \quad (7.55)$$

On a utilisé (7.26.a) où s_0 est le paramètre de saturation associé à 1 photon + k_L (ou $-k_L$) et le fait que dans l'état à 1 seul photon (7.33) du mode $\sin k_L x$, $S(x) = 2s_0 \sin^2 k_L x$ de sorte que $\overline{S(x)} = s_0$ et $s_{\max} = 2s_0$. On retrouve exactement la valeur de (7.11) à un noeud.

g) Récapitulation des résultats obtenus

(i) A un noeud d'une onde stationnaire apparaît une redistribution de photons entre les 2 modes $+k_L$ et $-k_L$ qui est plus importante que l'absorption puisqu'elle apparaît dès l'ordre 1 en $\epsilon = \Delta x / \lambda_L$ (au lieu de 2)

- (ii) Cette redistribution est proportionnelle à \bar{P}' et non à \bar{S}' . Elle est donc liée à la réponse dissipative de l'atome.
- (iii) Globalement, cette redistribution change $\overline{P_A^2}$ et non $\overline{P_A}$. Elle produit une diffusion d'impulsions, mais pas de force.
- (iv) Cette redistribution est corrélée avec l'impulsion atomique. C'est cette corrélation qui explique pourquoi la vitesse d'accroissement de p_A^2 ne s'annule pas à la limite $\Delta x \sim \hbar/\Delta p \rightarrow 0$. Dans l'équation (7.52) donnant $\delta P_A^2 = 2 P_A \delta P_A$, le fait que P_A augmente proportionnellement à Δp quand Δp croît compense la décroissance de δP_A qui varie, d'après (7.51) comme $C_p/c_p \sim 1/\Delta p$. C'est cette compensation qui conduit à un coefficient de diffusion D indépendant de Δp .

Notons enfin l'importance des corrélations A-R apparaissant dans l'expression (7.46) de l'état de A+R à l'instant T. Ceci ne veut pas dire que les traitements habituels, basés sur l'équation pilote décrivant l'évolution de la matrice densité atomique réduite, négligent ces corrélations. On en tient compte dans la dérivation de l'équation pilote. Le fait qu'elles apparaissent ici explicitement dans (7.46) (et non implicitement) explique pourquoi le traitement présenté dans ce cours permet d'identifier plus aisément les effets physiques à l'origine de la valeur non nulle de D_{class} à un noeud.

Remarque : Il est possible de généraliser le traitement présenté ici à un atome placé en un point quelconque d'une onde stationnaire et éventuellement animé d'une vitesse initiale non nulle (voir Ref. [2]). On peut alors rendre compte de plusieurs effets physiques

- Force moyenne s'exerçant sur l'atome quand $\delta \neq 0$, et qui apparaît comme étant associée à une redistribution de photons entre $+k_L$ et $-k_L$, non corrélée avec l'impulsion atomique, et proportionnelle à \bar{S}' et non plus à \bar{P}' (effet réactif)
- Valeur nulle de D_{class} à un ventre.
- Possibilité d'ajouter indépendamment les pressions de radiation des ondes $+k_L$ et $-k_L$ quand l'atome, animé d'une vitesse initiale v_0 , parcourt plusieurs λ_L pendant T et qu'on s'intéresse uniquement à la moyenne spatiale de la force qui agit sur lui.

Références

- [1] J.P. Gordon, A. Ashkin, Phys. Rev. A21, 1606 (1980)
- [2] C. Cohen-Tannoudji, in Les Houches, Session LIII, 1990, Fundamental systems in Quantum Optics, ed. by J. Dalibard, J.M. Raimond, J. Zinn Justin (Elsevier, 1992)
- [3] J. Dalibard, C. Cohen-Tannoudji, J.O.S.A. B2, 1707 (1985)
- [4] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, G. Grynberg, Procédes d'interaction entre photons et atome (Inter Editions et Editions du CNRS, Paris 1988). Traduction anglaise : Atom-Photon Interactions (Wiley, 1992).

Buts de ce cours

- Introduire l'effet Aharonov-Bohm scalaire (relatif à des particules chargées interagissant avec un potentiel scalaire), et dégager ses propriétés physiques essentielles.
- Montrer que l'effet Aharonov-Bohm scalaire (ABS) est essentiel pour préserver la cohérence interne de la mécanique quantique. En effet, sans le déphasage associé à l'effet ABS, on pourrait imaginer des dispositifs expérimentaux permettant, dans une expérience d'interférométrie sur des particules chargées, de déterminer par quel chemin la particule passe sans perturber le système de franges.
- Décrire des expériences récentes réalisées sur des systèmes neutres possédant un moment magnétique (neutrons, atomes), où l'on retrouve certaines des propriétés importantes de l'effet ABS.

① Description de l'effet ABS (Refs [1], [2])

a) Problème physique considéré

- Paquet d'ondes de de Broglie arrivant sur une plaque P percée de 2 fentes S' et S'' et associé à une particule incidente de charge e .
- Après les 2 fentes, 2 paquets d'ondes légèrement divergents (diffraction) et qui vont finir par se recouvrir et donner naissance à un système de franges d'interférence sur un écran E placé suffisamment loin à droite.

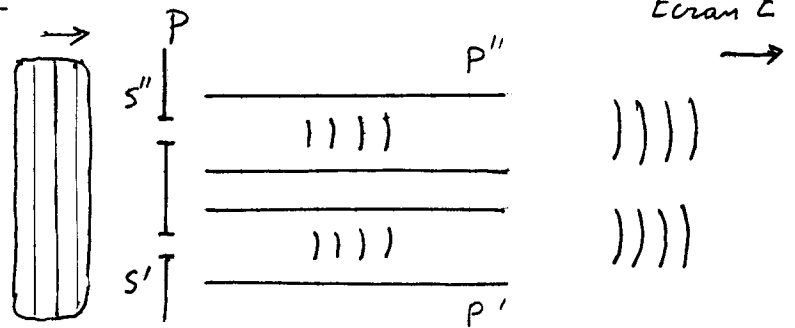


Fig. 1 (utilisant les notations de la référence [2])

- Juste après les 2 fentes, on place 2 cylindres conducteurs P'' et P' , à l'intérieur desquels passent les 2 paquets d'ondes issus de S'' et S' . On suppose les cylindres suffisamment longs pour que, pendant un certain intervalle de temps, les 2 paquets d'ondes issus de S' et S'' soient bien localisés au milieu de P' et P'' et bien éloignés des bords.
- Quand les paquets d'ondes entrent dans P' et P'' et quittent P' et P'' , P' et P'' et la plaque P sont tous au même potentiel, de sorte que la particule ne "voit" aucun champ électrique et aucune différence de potentiel.
- Quand les 2 paquets d'ondes sont arrivés bien au milieu de P' et P'' , on applique pendant un temps T une différence de potentiel entre P' et P'' . Par exemple P' est au potentiel 0, P'' au potentiel V . T est suffisamment court pour que les 2 paquets d'ondes restent éloignés des bords pendant T .
- Questions : Y a-t-il des modifications du système de franges observé sur E ? Comment ces modifications dépendent-elles de V et T ?

b) Calcul du déphasage

- A l'intérieur des cylindres, le potentiel est constant et le champ électrique est strictement nul. Aucune force n'agit donc sur les paquets d'ondes, aussi bien dans P' que P'' , pourvu que V soit appliqué au moment où les paquets d'ondes sont au milieu de P' et P'' . Donc l'impulsion \vec{p} de la particule ne change pas et $\int \vec{p} \cdot d\vec{r}$ garde la même valeur le long des 2 chemins, que V soit nul ou non.
- Par contre, il faut, pour le chemin passant par P'' , ajouter à l'hamiltonien H l'énergie électrostatique eV , ce qui fait apparaître pour ce chemin un déphasage qui n'existe pas pour le chemin passant par P' et qui vaut

$$\Phi_{ABS} = -\frac{1}{\hbar} \int H dt = -\frac{1}{\hbar} eVT \quad (8.1)$$

Le système de franges observé sur l'écran E doit donc se déplacer d'un nombre de franges égal à $\Phi_{ABS} / 2\pi$.

② Propriétés physiques importantes d'un tel effet

(i) Aucun déplacement, aucune distorsion des paquets d'ondes.

Aussi bien dans P' que dans P'' , la particule ne "voit" aucun champ électrique et ne ressent aucune force pendant le temps T d'application de V .

(ii) Facteur de phase global acquis par le paquet d'ondes soumis à V , indépendant de la vitesse.

- Les différents vecteurs d'onde du paquet d'ondes acquièrent le même facteur de phase (on suppose bien sûr que la vitesse est suffisamment faible pour que le paquet d'ondes reste au voisinage du milieu de P'' pendant T).

- Nature topologique de l'effet.

- Pour mettre en évidence un tel facteur de phase global, il faut nécessairement une expérience d'interférence, où l'on compare la phase globale du paquet d'ondes passant par P'' avec celle de l'autre paquet d'ondes qui n'a pas subi l'effet de V .

(iii) Insensibilité de l'effet d'interférence à la longueur de cohérence du paquet d'ondes.

- Comme le potentiel V appliqué pendant le temps T ne produit aucun déplacement et aucune distorsion du paquet d'ondes passant par P'' , le recouvrement avec l'autre paquet d'ondes parti par P' sera toujours parfait quand les 2 paquets d'ondes se rejoignent. L'état d'interférence sera déterminé uniquement par le facteur de phase global acquis par le paquet d'ondes parti par P'' .

- En particulier, Φ_{ABS} peut être beaucoup plus élevé que le déphasage maximal pouvant être observé dans une expérience ordinaire d'interférence, où l'on décale un paquet d'ondes par

rapport à l'autre et où les franges disparaissent dès que le déplacement d'un paquet d'ondes par rapport à l'autre devient supérieur à la longueur de cohérence (l'intégrale de recouvrement est alors nulle).

(iv) Différence importante entre l'expérience décrite ici et celle qui utiliserait un potentiel V constant appliqué en permanence à P'' . Le paquet d'ondes arrivant dans P'' "verrait" alors une barrière ou un puits de potentiel, et serait retardé ou avancé par rapport à l'autre paquet d'ondes passant dans P' . Les franges d'interférence observables sur E se déplaceraient bien alors quand V augmente, mais leur contraste diminuerait également et elles disparaîtraient dès que V a atteint une valeur telle que le décalage entre les 2 paquets d'ondes est supérieur à leur longueur de cohérence. Par contre, pour l'effet ABS, le contraste des franges demeure le même quel que soit V .

En résumé, l'effet ABS se caractérise par le fait qu'il n'est pas dispersif et qu'il donne naissance à des effets d'interférence insensibles à la longueur de cohérence. Les mêmes remarques peuvent être faites pour l'effet Aharonov-Bohm vectoriel ABV (sensible au potentiel vecteur), qui sera étudié dans le cours IX.

③ Effet Aharonov-Bohm scalaire et complémentarité (Ref. [2])

a) Idee générale

Le schéma expérimental de la figure 1 suggère une expérience de pensée où l'on essaierait de mettre en évidence simultanément les aspects ondulatoire et corpusculaire de la particule incidente.

Au lieu d'appliquer pendant un temps T un voltage V à P'' , pourrait-on essayer d'utiliser les charges induites par les paquets d'ondes au milieu d'un cylindre ou de l'autre pour essayer de déterminer dans quel cylindre la particule se trouve? Si l'on pense que les potentiels sont simplement des intermédiaires de calcul et que seuls les champs sont physiques, la particule ne devrait pas être perturbée par le dispositif mesurant la charge qu'elle induit puisque la particule ne "voit" aucun champ dans les cylindres. Ne pourrait-on pas alors savoir par quel cylindre la particule passe sans perturber le système de franges d'interférence sur E .

En fait, on va voir qu'un tel raisonnement est incorrect. Le dispositif permettant de mesurer la charge induite par la particule et de savoir par quel cylindre elle passe introduit une différence de potentiel V entre les 2 cylindres dont les fluctuations ΔV sont telles que les fluctuations correspondantes $\Delta \Phi_{ABS}$ des déphasage Φ_{ABS} brouillent complètement le système de franges. En

d'autres termes, les potentiels jouent un rôle prépondérant important en mécanique quantique et le déphasage ϕ_{ABS} associé au potentiel scalaire est essentiel pour assurer la cohérence interne de la théorie.

b) Un résultat d'électrostatique utile pour la suite

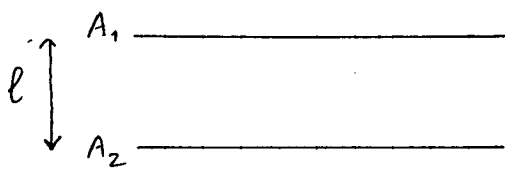


Fig. 2a

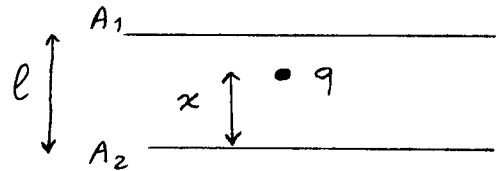


Fig. 2b

Condensateur, de capacité C , formé de 2 armatures A_1 et A_2 (suffisamment grandes), séparées par une distance l . Aucune charge sur A_1 et sur A_2 , différence de potentiel nulle (Fig. 2a)

Une charge q est introduite entre A_1 et A_2 , à une distance x de A_2 (Fig. 2b). La présence de cette charge fait apparaître une différence de potentiel entre A_1 et A_2 . On trouve (voir Appendice) :

$$V_1 - V_2 = \frac{q}{C} \left(\frac{x}{l} - \frac{1}{2} \right) \tag{8.2}$$

$V_1 - V_2$ est nulle quand q est à égale distance de A_1 et A_2 ($x = l/2$)

c) Schéma de l'expérience de pensée

- On revient au schéma de la figure 1, mais on relie maintenant les 2 cylindres P' et P'' aux 2 armatures A_1 et A_2 du condensateur de la figure 2. (Fig. 3)

- Supposons tout d'abord qu'il n'y a pas de charge test q entre A_1 et A_2 .

Si la particule incidente, de charge e , passe dans P' , elle va, lorsqu'elle se trouve au milieu de P' , induire une charge $-e$ à l'intérieur de P' . Comme l'ensemble $P' + A_1$ est isolé et initialement non chargé, une charge $+e$ va apparaître sur A_1 . Quant à P'' , il ne subit aucune influence et la charge de A_2 est nulle. Il va donc apparaître entre A_1 et A_2 une différence de potentiel

$$V_1 - V_2 = \frac{e}{2C} \tag{8.3}$$

(Superposition de 2 états d'équilibre : état (1) avec des charges $e/2$ sur A_1 et A_2 conduisant à $V_1 - V_2 = 0$ + état (2) avec une charge $e/2$ sur A_1 , $-e/2$ sur A_2 conduisant à (8.3), les charges dans l'état (1)+(2) sont $e/2 + e/2 = e$ sur A_1 , $e/2 - e/2 = 0$ sur A_2)

les mêmes raisonnements montrent que, si la particule passe

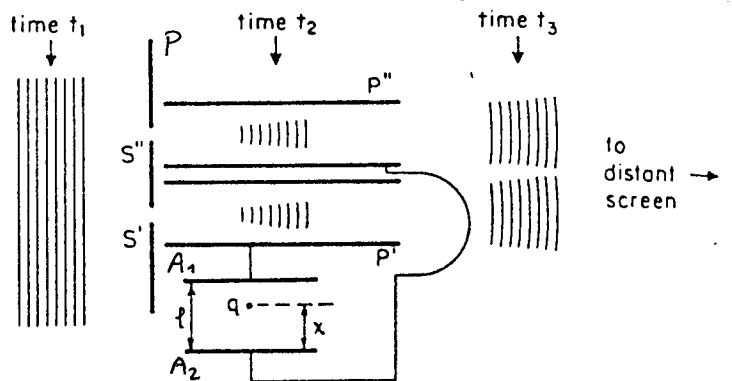


Fig. 3 (extrait de [2])

Dans P'' , il apparaît

$$V_1 - V_2 = -\frac{e}{2\ell C} \quad (8.4)$$

Finalement, il apparaît entre A_1 et A_2 un champ électrique

$$E = \pm \frac{e}{2\ell C} \quad (8.5)$$

qui n'a pas le même signe suivant que la particule incidente passe dans P' ou dans P'' .

- Mettons maintenant une charge test q entre A_1 et A_2 . Fixons-la au milieu de A_1, A_2 ($x = \ell/2$) quand la particule incidente entre dans les cylindres ou en sort, de manière à n'introduire aucune différence de potentiel entre P' et P'' quand la particule incidente entre ou sort.

Par contre, on lâche la charge test q pendant un temps T quand les paquets d'ondes sont au milieu de P' et P'' . En regardant dans quel sens elle va bouger, on saura si la particule est dans P' ou P'' .

- Pendant le temps T , la charge test q soumise au champ E donné en (8.5) va subir un changement d'impulsion $q|E|T$. Si l'on veut pouvoir détecter ce changement d'impulsion, il faut qu'il soit supérieur à l'incertitude Δp sur l'impulsion de la particule test

$$q|E|T > \Delta p \quad (8.6)$$

c'est à dire encore, compte tenu de (8.5)

$$\frac{qeT}{2\ell C} > \Delta p \quad (8.7)$$

- Or, la particule test obéit aux lois de la mécanique quantique. Elle a une incertitude Δx en position, telle que $\Delta x \Delta p > \hbar/2$, et par suite, d'après (8.2), la différence de potentiel qu'elle crée entre A_1 et A_2 a une incertitude ΔV donnée par

$$\Delta V = \frac{q}{\ell C} \Delta x \quad (8.8)$$

Multiplions alors, membre à membre, les 2 équations (8.7) et (8.8) et simplifions par $q/\ell C$. Il vient

$$\frac{eT\Delta V}{2} > \Delta x \Delta p > \frac{\hbar}{2} \quad (8.9)$$

c'est à dire encore, compte tenu de (8.1)

$$\frac{eT\Delta V}{\hbar} = |\Delta \phi_{ABS}| > 1 \quad (8.10)$$

Conclusion : Si l'on veut savoir si la particule incidente passe par P' ou P'' , il faut un Δp suffisamment petit. Mais alors Δx est grand et les fluctuations de la différence de potentiel induite par la charge test entre P' et P'' sont si

grandes que les fluctuations correspondantes du désphasage associé à l'effet ABS sont grandes devant 1, brouillant complètement le système de franges sur E. L'effet ABS empêche donc bien d'observer simultanément les aspects corpusculaire et ondulatoire de la particule incidente.

4) Généralisation de l'effet ABS à des particules neutres

a) Motivations de telles études

- L'effet ABS, tel qu'il est proposé dans [1] n'a pas été encore observé. Expérience très difficile : séparation très faible des faisceaux électromagnétiques qui interfèrent ; vitesses très élevées des électrons ; difficultés de réaliser des micro-cylindres et d'appliquer des tensions variables à des fréquences très élevées, de l'ordre du GHz.
- Par contre, l'effet Aharonov-Bohm vectoriel (voir cours IX) a été observé. Mais les longueurs de cohérence des paquets d'ondes sont si grandes devant λ_{DB} qu'il n'a pas été possible de tester une propriété importante des effets AB : leur caractère non-dispersif.
- Récemment, de nouvelles expériences, généralisant l'effet ABS à des particules neutres ont été proposées et réalisées. Elles diffèrent de l'effet ABS dans la mesure où la particule se propage dans des régions où les champs sont non nuls (et non seulement les potentiels). Par contre, elles partagent avec l'effet ABS un certain nombre de propriétés : absence de force agissant sur le centre de masse, caractère non-dispersif, insensibilité des effets d'interférence à la longueur de cohérence. Il est donc intéressant de réaliser ces expériences pour essayer de tester ces propriétés importantes.

b) Proposition de Zeilinger (Ref. [3])

- Une des caractéristiques importantes de l'effet ABS est qu'on ajoute à l'hamiltonien de la particule, sur l'un des 2 chemins qui interfèrent, une énergie potentielle dépendant du temps et non de \vec{r}

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{r}, t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2M} \Delta + V(t) \right] \psi(\vec{r}, t) \quad (8.11)$$

de sorte que la phase du paquet d'ondes passant par ce chemin est globalement affectée par un facteur

$$\phi = -\frac{1}{\hbar} \int dt V(t) \quad (8.12)$$

toutes les autres observables de la particule (en particulier, son impulsion \vec{p}) demeurant inchangées.

- Zeilinger propose, dans un interféromètre à neutrons, de faire passer l'un des 2 faisceaux dans un solénoïde (Fig. 4). Le solénoïde n'est pas alimenté et le champ magnétique \vec{B} à l'intérieur est nul quand le paquet d'ondes entre dans le solénoïde et en sort. On applique \vec{B} seulement pendant un intervalle de temps T au cours duquel le paquet d'ondes reste bien localisé au milieu du solénoïde. Si le neutron incident est polarisé et a son moment magnétique $\vec{\mu}$ parallèle à \vec{B} , il va apparaître, pendant l'intervalle T, une énergie potentielle supplémentaire $-\mu B(t)$, et par suite,

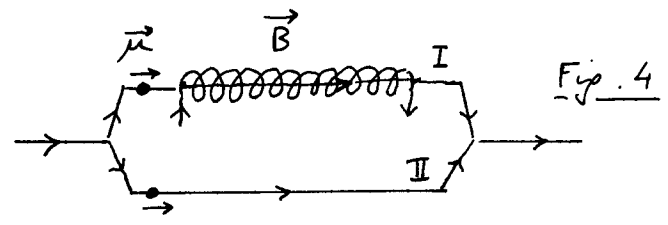
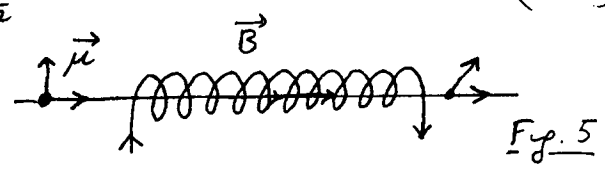


Fig. 4

un facteur de phase ϕ affectant seulement le chemin I, et donné par

$$\phi = -\frac{1}{\hbar} \int -\mu B(t) dt \sim \mu \frac{BT}{\hbar} \tag{8.13}$$

- On peut aussi imaginer une expérience d'interférence de polarisations utilisant un seul faisceau, mais avec des neutrons polarisés dans une direction \perp à celle de \vec{B} (Fig. 5)



Là aussi, on applique \vec{B} uniquement quand le paquet d'ondes est bien localisé à l'intérieur du solénoïde. Les déphasages différents sur les états de spin parallèle et anti-parallèle à \vec{B} suivant lesquels on peut décomposer l'état de spin incident se traduisent par une rotation de la polarisation du neutron, proportionnelle à (8.13)

- Dans ces expériences, le neutron "voit" un champ magnétique (indépendant de \vec{r}) pendant un certain temps. Son spin subit même un couple dans l'expérience de la figure 5. (voir, par exemple, Ref. [4]), ce qui constitue une différence importante avec l'effet ABS où les champs sont toujours nuls

Notons cependant que le centre de masse ne subit aucune force. Comme \vec{B} est uniforme sur l'étendue du paquet d'ondes, \vec{B} ne dépend pas de \vec{r} et $d\vec{p}/dt = [\vec{p}, H]/i\hbar = \vec{0}$. Il n'y a donc aucun déplacement, ni aucune distorsion du paquet d'ondes sous l'effet de \vec{B} , et ϕ est un facteur de phase global, non dispersif.

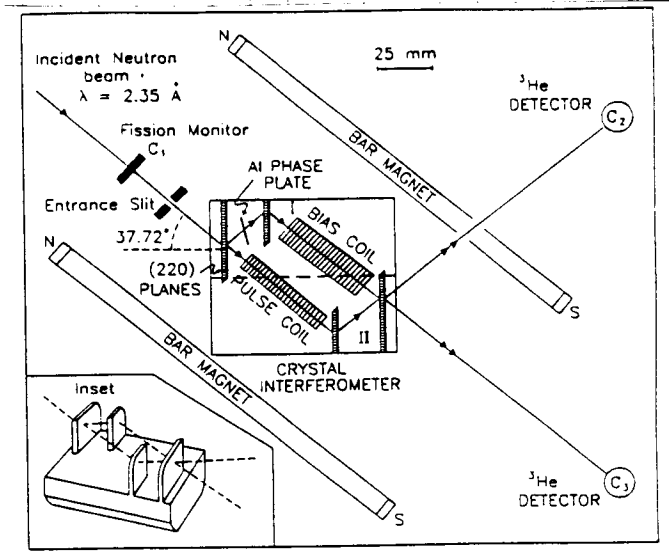
c) Réalisations expérimentales

(i) Première série d'expériences réalisées sur des neutrons (Refs [5], [6])

- Interféromètre à neutrons avec 2 bras comme sur la figure 4. Voir le schéma expérimental sur la Fig. 6 extraite de [5]
- Le déphasage observé sur les franges à la sortie de l'interféromètre est en bon accord avec (8.13).

Cependant, la diffraction de Bragg utilisée pour séparer en 2 le faisceau incident, puis pour recombiner les 2 faisceaux ainsi obtenus, nécessite une grande monochromaticité du faisceau incident, ce qui conduit à des longueurs de cohérence relativement grandes (de l'ordre de plusieurs λ_{DB})

Par ailleurs, les neutrons sont rapides, de sorte que T ne peut pas être très grand. Comme le moment magnétique des neutrons est faible et que les champs B en impulsions ne peuvent pas être très élevés, il n'est pas possible de réaliser des déphasages ϕ supérieurs à celui correspondant à la longueur de cohérence. Il n'est donc pas possible de tester ici le caractère non dispersif du déphasage.



Layout of AB experiment using a skew-symmetric single-Si-crystal neutron interferometer. Inset: An isometric view of the interferometer crystal.

Fig. 6 (extraite de [5])

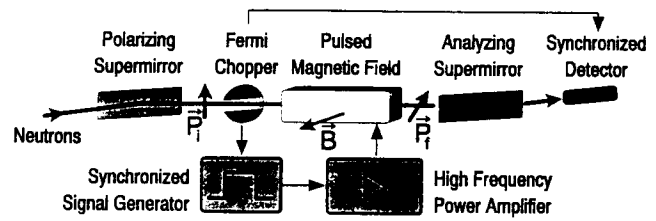
Principe de l'expérience

- Expérience du type de celle de la figure 5, utilisant un seul faisceau (voir Fig. 7 extraite de [7])
- Utilise des neutrons très froids, avec des vitesses très faibles, de l'ordre de 40 m/s.

La monochromaticité des neutrons n'est pas essentielle comme dans l'expérience précédente, et la dispersion en énergie est assez élevée, conduisant à une longueur de cohérence très faible de l'ordre de 3.3 Å.

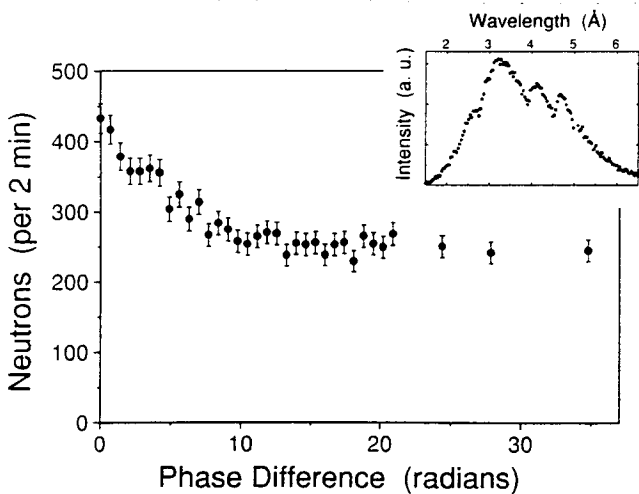
- Il est alors possible, avec des champs \vec{B} relativement faibles, de réaliser, grâce aux valeurs élevées de T , des déphasages ϕ bien supérieurs à ceux correspondant à la longueur de cohérence.

Expérience où le champ B est branché en permanence (voir Fig. 8 extraite de [7])



Sketch of the experimental setup: A rotating Fermi chopper imposes a time structure on the neutrons polarized through reflection from a supermirror. The subsequent magnetic field oriented in a direction orthogonal to the neutron polarization may either be constant in time or switched on and off while the neutrons are inside the field region. The detector then measures the intensity of the neutrons reflected by the analyzing supermirror.

Fig. 7 (extraite de [7])

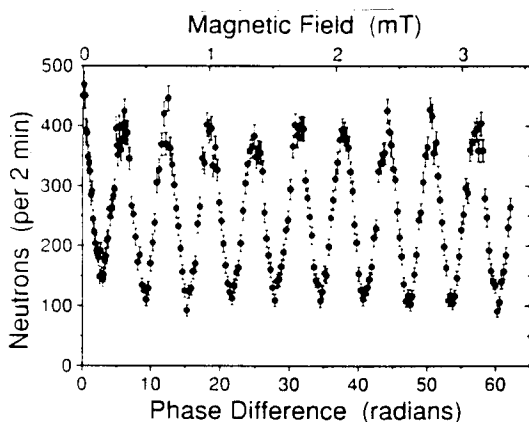


Neutrons counted after the second supermirror while a static magnetic field is on in the region between polarizer and analyzer. The horizontal axis displays the phase difference between the spin eigenstates as introduced by the magnetic field. The intensity decreases rapidly to a median value because the phase difference is accompanied by a relative displacement of the two eigenstates which exceeds the coherence length. The inset shows the neutron spectrum measured after transmission through the whole apparatus; the modulation is caused by the neutron guide tube leading to the experiment.

Fig. 8 (extraite de [7])

Les 2 paquets d'ondes, de spins opposés, suivant lesquels on peut se composer le paquet d'ondes incident, "voient" des potentiels opposés à l'entrée et à la sortie du solénoïde. Ils se décalent l'un par rapport à l'autre, d'une quantité qui dépasse très vite la longueur de cohérence de sorte qu'on ne voit même plus 1 seule frange d'interférence.

Expérience où le champ B n'est branché que pendant un temps T (durant lequel le neutron est à l'intérieur de la région où B est appliqué)



As in Fig. 8 but now with the magnetic field switched on and off while the neutrons are inside the magnetic field region. The oscillations observed signify the fact that the relative phase shift between the two spin eigenstates in this case is not accompanied by a displacement of the wave packets. Note that the horizontal axis covers phase differences about twice as large as those of Fig. 8.

Fig. 9 (extraite de [7])

On voit alors apparaître des franges d'interférence dont le contraste ne diminue pas quand on augmente le déphasage. Pour obtenir le même déphasage maximal (≈ 60 radians) avec un déplacement des paquets d'ondes, il faudrait les déplacer de 40 \AA , soit d'une quantité plus de 10 fois supérieure à la longueur de cohérence ! On vérifie donc bien que cette longueur de cohérence ne joue aucun rôle dans le phénomène d'interférence étudié ici, ce qui démontre bien le caractère non dispersif de (8.13).

(iii) Expériences réalisées sur des atomes d'hydrogène (Ref. [8])

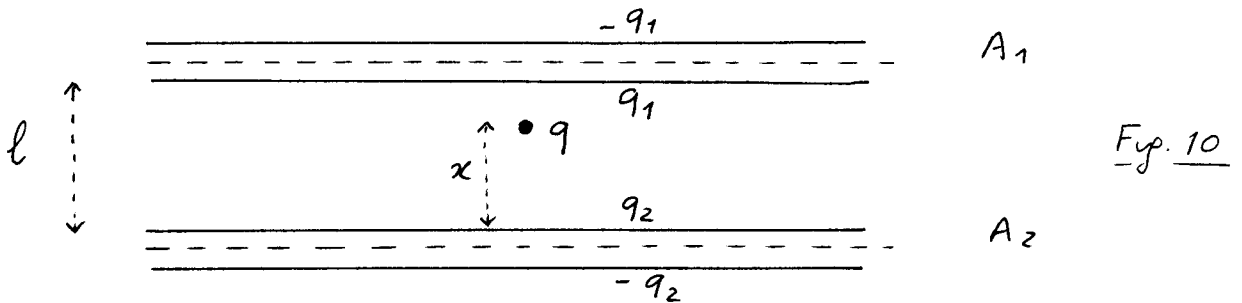
Des expériences, très analogues à celles de la référence [7] ont été réalisées très récemment sur des atomes d'hydrogène dans l'état métastable $2S_{1/2}$. Elles ont permis de montrer que le contraste des franges d'interférence était, comme pour la figure 9, indépendant de la vitesse de l'atome.

Références

[1] Y. Aharonov, D. Bohm, Phys. Rev. 115, 485 (1959)
 [2] W.H. Furry, N.F. Ramsey, Phys. Rev. 118, 623 (1960)
 [3] A. Zeilinger, J. Physique (Paris), Colloq. 45, C3-213 (1984)
 [4] M. Peschkin, Phys. Rev. Lett. 69, 2017 (1992)
 [5] B.E. Allman, A. Cimmino, A.G. Klein, G.I. Opat, H. Kaiser, S.A. Werner Phys. Rev. Lett. 68, 2409 (1992)
 [6] Mêmes auteurs que pour [5], Phys. Rev. A 48, 1799 (1993)
 [7] G. Badurek, H. Weinfurter, R. Gähler, A. Kollmar, S. Wehinger, A. Zeilinger Phys. Rev. Lett. 71, 307 (1993)
 [8] S. Nic Chormaic, Ch. Miniatura, O. Gorcic, B. Viciaris de Lesegno, J. Robert, S. Feron, V. Lorent, J. Reinhardt, J. Baudon, K. Rubin Preprint, 1993. A paraitre (Phys. Rev. Lett. 72, 1 (1994)).

Appendice : Démonstrations de l'équation (8.2)

- Condensateurs avec 2 armatures A_1, A_2 , initialement isolées et non chargées (dont on a représenté l'épaisseur sur la figure 10. Distance entre les 2 faces internes : l . On place une charge q entre A_1 et A_2 à une distance x au dessus de l'armature interne de A_2



- q induit une charge q_1 sur la face interne de A_1 , q_2 sur la face interne de A_2 . L'application du théorème de Gauss sur une surface, délimitée par les 2 plans passant dans les armatures et représentés en traits tiretés, donne (comme le champ est nul sur ces 2 surfaces) :

$$q = -q_1 - q_2 \tag{A.1}$$

Nous allons montrer tout d'abord que $q_1 = q_2 = -q/2$.

- A_1 et A_2 étant initialement non chargées, il apparaît une charge $-q_1$ ($-q_2$) sur la face externe de A_1 (A_2)

Or, le champ créé à l'extérieur de la surface enfermée par les 2 plans en traits tiretés de la figure 10 et produit par les charges à l'intérieur de ce volume est nul. Donc les charges $-q_1$ et $-q_2$ sur les surfaces externes de A_1 et A_2 sont libres et se répartissent uniformément sur ces surfaces. Si q_1 et q_2 étaient différents, ces répartitions uniformes de charge créeraient un champ non nul à l'intérieur des conducteurs, ce qui est impossible. On a donc nécessairement

$$q_1 = q_2 = -q/2 \tag{A.2}$$

- Soit V le volume délimité par la surface S des armatures internes de A_1 et A_2 . Le théorème de Green (voir Jackson, Classical Electrodynamics, p.15) donne, pour 2 champs scalaires ψ et ϕ quelconques

$$\int_V (\phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi) d^3x = \oint_S [\phi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \phi}{\partial n}] da \tag{A.3}$$

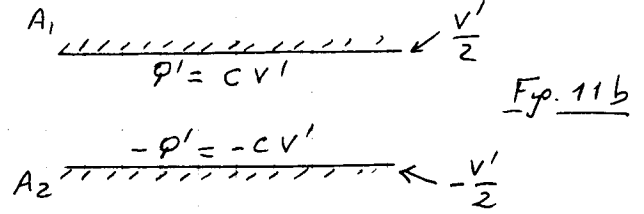
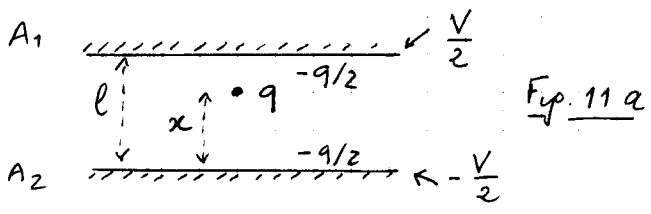
où $\partial \psi / \partial n$ est la dérivée normale de ψ sur la surface S , d'élément de surface da .

Preons maintenant $\phi = V$, $\psi = V'$, V et V' étant les potentiels électrostatiques créés par 2 distributions de charge quelconques caractérisées par les distributions de charges volumiques et surfaciques ρ et σ pour la 1^{ère}, ρ' et σ' pour la 2^{ème}. On obtient alors, en utilisant l'équation de Poisson reliant $\nabla^2 V$ et $\nabla^2 V'$ à ρ et ρ' et le théorème de Gauss reliant $\partial V / \partial n$ et $\partial V' / \partial n$ à σ et σ' .

$$\int_V \rho V' d^3x + \int_S \sigma V' da = \int_V \rho' V d^3x + \int_S \sigma' V da \tag{A.4}$$

qui est le théorème de réciprocité de Green en électrostatique

- Appliquons alors un tel théorème aux 2 distributions suivantes, la 2^{ème} ne contenant pas de charge interne entre A_1 et A_2



On obtient :

$$q V'(x) + (-\frac{q}{2}) \frac{V'}{2} + (-\frac{q}{2}) (-\frac{V'}{2}) = \rho' \frac{V}{2} + (-\rho') (-\frac{V}{2}) = \rho' V = CV V' \tag{A.5}$$

où $V'(x)$ est le potentiel créé par la distribution de la Fig. 11 b au point où se trouve la charge q de la Fig. 11 a.

$$V'(x) = -\frac{V'}{2} + V' \frac{x}{l} = V' (\frac{x}{l} - \frac{1}{2}) \tag{A.6}$$

En reportant (A.6) dans (A.5) et en simplifiant par V' , on obtient

$$q (\frac{x}{l} - \frac{1}{2}) = CV \tag{A.7}$$

qui n'est autre que (8.2)

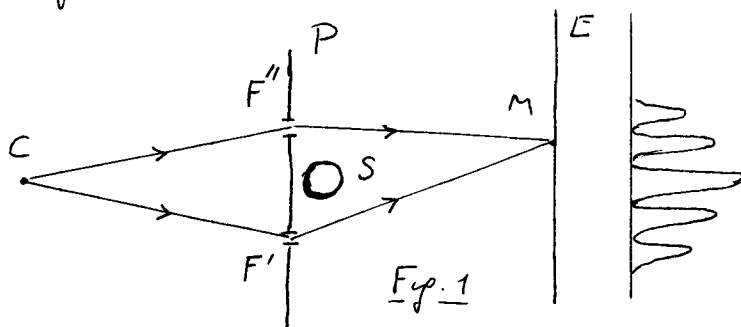
Buts de ce cours

- Introduire l'effet Aharonov-Bohm vectoriel (relatif à des particules chargées interagissant avec un potentiel vecteur) et dégager ses propriétés physiques essentielles (§1)
- Introduire l'effet Aharonov-Anandan-Casher (relatif à des particules neutres possédant un moment magnétique et interagissant avec un champ électrique). Montrer que l'on retrouve certaines des propriétés de l'effet ABV (§3)
- Auparavant, établir un certain nombre de résultats relatifs à la dynamique d'un moment magnétique dans un champ électrique (§2)

① Description de l'effet ABV (Refs. [1], [2], [3])

a. Problème physique considéré

- Canon à électrons C émettant des électrons qui passent à travers 2 fentes F' et F'' percées dans une plaque P et arrivent sur un écran E (Fig. 1)



- Les ondes de de Broglie associées interfèrent et on observe sur E un système de franges brillantes et noires.

- Un solénoïde S très long, perpendiculaire au plan de la figure est placé, juste après P, entre F' et F'' . Lorsqu'il est alimenté par un courant, le champ magnétique \vec{B} créé par S est entièrement confiné à l'intérieur de S et est nul à l'extérieur. On pourrait également utiliser un solénoïde refermé sur lui-même pour former un tore, ou des filaments ferromagnétiques très fins ("whisker").

- Le solénoïde S est suffisamment petit et suffisamment proche de P pour que les ondes diffractées par F' et F'' ne puissent pas pénétrer en S. Les électrons passant par F' et F'' ne "voient" donc aucun champ magnétique et ne sont soumis à aucune force.

- Question: Les franges observées sur E se déplacent-elles quand le solénoïde S est alimenté ?

b. Calcul du déphasage

- Si le champ \vec{B} est nul à l'extérieur de S, il n'en est pas de même du potentiel vecteur \vec{A} dont dérive \vec{B}

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad (9.1)$$

- Le Lagrangien d'une particule de masse m , de charge q , de position \vec{r} , de vitesse \vec{v} , plongée dans un champ électromagnétique décrit par les potentiels vecteur \vec{A} et scalaire ϕ , s'écrit :

$$L = \frac{1}{2} m \vec{v}^2 + q \vec{v} \cdot \vec{A}(\vec{r}) - q \phi(\vec{r}) \quad (9.2)$$

On suppose ici $\phi = 0$, de sorte que L se réduit à

$$L = \frac{1}{2} m \vec{v}^2 + q \vec{v} \cdot \vec{A}(\vec{r}) \quad (9.3)$$

- Comme la trajectoire classique n'est ici pas modifiée par \vec{A} ,

la variation $\delta\Phi$ du déphasage quantique entre les 2 chemins $CF''M$ et $CF'M$ due à la présence de A s'écrit (voir cours I) :

$$\delta\Phi = \Phi(\vec{A} \neq \vec{0}) - \Phi(\vec{A} = \vec{0}) = \frac{\delta S}{\hbar} = \frac{1}{\hbar} \oint_{CF''MF'C} \delta L dt \quad (9.4)$$

où δS est la variation d'action correspondant à la variation δL du Lagrangien due à la présence de A .

$$\delta L = L(\vec{A} \neq \vec{0}) - L(\vec{A} = \vec{0}) = q \vec{v} \cdot \vec{A}(\vec{r}) \quad (9.5)$$

- Utilisant $\vec{v} = d\vec{r}/dt$ et reportant (9.5) dans (9.4), on obtient alors

$$\delta\Phi = \frac{q}{\hbar} \oint_{\substack{\text{chemin} \\ \text{fermé} \\ CF''MF'C}} \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \frac{q}{\hbar} \int_{\substack{\text{Surface} \\ CF''MF'C}} \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}) \cdot d^2a = \frac{q}{\hbar} \int_{\substack{\text{Surface} \\ CF''MF'C}} \vec{B}(\vec{r}) \cdot d^2a = \frac{q}{\hbar} F \quad (9.6)$$

où F est le flux du champ \vec{B} à travers la surface $CF''MF'C$ enfermée entre les 2 chemins $CF''M$ et $CF'M$.

C - Discussion physique

- Quand le solénoïde S est alimenté, les franges observées sur E doivent se déplacer, car F , et par suite $\delta\Phi$, deviennent non nuls.

Bien que la particule ne subisse aucune force et évolue toujours dans un champ magnétique nul, le potentiel vecteur \vec{A} produit un effet physique. Ceci montre l'importance des potentiels en mécanique quantique.

- le déphasage $\delta\Phi$ ne dépend pas de la vitesse de la particule et reste le même, quel que soit le point M de E (pourvu que S reste à l'intérieur de $CF''MF'C$).

↳ Le système de franges est déplacé en bloc.

L'effet ABV est non dissipatif et de nature topologique.

- L'arbitrairie de jauge opérant sur \vec{A}

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} \chi \quad (9.7)$$

où χ est un champ scalaire quelconque, ne modifie pas les conclusions précédentes. En effet

$$\oint_{CF''MF'C} \vec{A}'(\vec{r}) \cdot d\vec{r} - \oint_{CF''MF'C} \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \oint_{CF''MF'C} \vec{\nabla} \chi(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = 0 \quad (9.8)$$

puisque la circulation d'un gradient le long d'une courbe fermée est nulle. Le déphasage $\delta\Phi$ est donc invariant de jauge.

- Effet ABV et complémentarité (Ref. [2])

Dans la référence [2], on décrit une expérience de pensée utilisant une boucle entourée autour d'un petit cylindre vertical (placé, comme S , après P entre F'' et F') de matériau à haute perméabilité magnétique, la boucle étant reliée aux 2 plaques d'un condensateur C . Suivant que l'électron passe par F'' ou F' , le courant correspondant crée dans la boucle un flux positif ou négatif, ce qui fait apparaître une charge q positive ou négative aux bornes de C . Comme la charge q du condensateur et le flux F passant dans la boucle sont des variables

conjuguées, et que $\delta\phi$ doit être suffisamment petit pour qu'on puisse déterminer le signe de ϕ , on trouve que δF est si grand que les fluctuations correspondantes du déphasage $\delta\phi$ dû à l'effet ABV brouillent complètement le système de franges. En d'autres termes, l'effet ABV empêche en l'occurrence d'observer simultanément les aspects corpusculaire et ondulatoire de la particule.

- Observation expérimentale : voir Ref. [4] et Refs in.

② Dynamique d'un moment magnétique dans un champ électrique

a - Densité de magnétisation - Densités de courant et de charge

- Particule neutre, de moment magnétique $\vec{\mu}$ (Refs [5], [6])
- Densité de magnétisation $\vec{M}(\vec{u})$ associée à $\vec{\mu}$

$$\int d^3u \vec{M}(\vec{u}) = \vec{\mu} \tag{9.9}$$

- On considère la particule dans son référentiel au repos R_0 . A la densité de magnétisation $\vec{M}(\vec{u})$ sont associées une densité de charge et de courant données par

$$\left\{ \begin{aligned} \vec{j}_0(\vec{u}) &= \vec{\nabla} \times \vec{M}(\vec{u}) & (9.10.a) \\ \rho_0(\vec{u}) &= 0 & (9.10.b) \end{aligned} \right.$$

- Plaçons nous maintenant dans le référentiel R où la particule est animée d'une vitesse \vec{v} et soient \vec{j} et ρ les densités de courant et de charge dans R . Comme \vec{j} et ρ sont les 4 composantes d'un quadri-vecteur, on en déduit que $\rho(u)$ est non nul dans R et est donné par (à l'ordre $1/c^2$ inclus)

$$\rho(\vec{u}) = \frac{1}{c^2} \vec{v} \cdot \vec{j}_0(\vec{u}) = \frac{1}{c^2} \vec{v} \cdot [\vec{\nabla} \times \vec{M}(\vec{u})] \tag{9.11}$$

b - Lagrangien L

- On suppose que, dans R , la particule, de vitesse \vec{v} , n'est soumise qu'à un champ électrique statique

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \phi \tag{9.12}$$

où ϕ est le potentiel scalaire dont dérive \vec{E} . On peut prendre $\vec{A} = \vec{0}$.

- La généralisation de (9.2), quand les densités de charge et de courant ne sont pas ponctuelles, s'écrit

$$L = \frac{1}{2} m \vec{v}^2 + \int d^3u [\vec{j}(\vec{u}) \cdot \vec{A}(\vec{u}) - \rho(\vec{u}) \cdot \phi(\vec{u})] \tag{9.13}$$

En prenant ici $\vec{A}(\vec{u}) = \vec{0}$, on obtient, compte tenu de (9.11)

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} m \vec{v}^2 - \frac{1}{c^2} \int \phi(\vec{u}) \vec{v} \cdot [\vec{\nabla} \times \vec{M}(\vec{u})] d^3u \\ &= \frac{1}{2} m \vec{v}^2 - \frac{1}{c^2} \sum_{\substack{i,j,k \\ =x,y,z}} v_i \epsilon_{ijk} \int \phi(u) \partial_j M_k(u) d^3u \end{aligned} \tag{9.14}$$

ϵ_{ijk} étant le tenseur complètement antisymétrique. En effectuant une intégration par parties et en utilisant le théorème de la divergence, on peut écrire

$$\sum_{i,j,k} v_i \epsilon_{ijk} \int \phi(\vec{u}) \partial_j M_k(\vec{u}) d^3u = - \sum_{i,j,k} v_i \epsilon_{ijk} \int M_k(\vec{u}) \partial_j \phi(\vec{u}) d^3u \quad (9.15)$$

$M_k(u)$ est très localisé autour de la position \vec{r} de la particule et varie beaucoup plus vite que $\phi(\vec{u})$. On a donc

$$\begin{aligned} \int M_k(\vec{u}) \partial_j \phi(\vec{u}) d^3u &\simeq (\partial_j \phi(\vec{r})) \int d^3u M_k(\vec{u}) \\ &= -\mu_k E_j(\vec{r}) \end{aligned} \quad (9.16)$$

On a utilisé (9.9) et (9.12). Finalement, on obtient

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} m \vec{v}^2 - \frac{1}{c^2} \sum_{i,j,k} \epsilon_{ijk} v_i E_j(\vec{r}) \mu_k \\ &= \frac{1}{2} m \vec{v}^2 - \frac{1}{c^2} \vec{v} \cdot [\vec{E}(\vec{r}) \times \vec{\mu}] \end{aligned} \quad (9.17)$$

c. Impulsion \vec{p} - Hamiltonien H

- Comme L contient un terme linéaire en \vec{v} , l'impulsion \vec{p} ne coïncide pas avec la quantité de mouvement $m\vec{v}$

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = m \vec{v} - \frac{1}{c^2} \vec{E}(\vec{r}) \times \vec{\mu} \quad (9.18)$$

Nous reviendrons plus loin sur la signification physique du dernier terme de (9.18)

- On en déduit, à l'ordre $1/c^2$ inclus, c'est à dire en négligeant des termes en $1/c^4$:

$$\begin{aligned} H &= \vec{p} \cdot \vec{v} - L \\ &= \frac{\vec{p}^2}{m} + \frac{\vec{p}}{mc^2} \cdot \vec{E} \times \vec{\mu} - \frac{m}{2} \left[\frac{\vec{p}}{m} + \frac{1}{mc^2} \vec{E} \times \vec{\mu} \right]^2 + \vec{\mu} \cdot \frac{1}{c^2} \left[\left(\frac{\vec{p}}{m} + \frac{1}{mc^2} \vec{E} \times \vec{\mu} \right) \times \vec{E} \right] \\ &\simeq \frac{\vec{p}^2}{2m} + \frac{1}{mc^2} \vec{\mu} \cdot (\vec{p} \times \vec{E}) \end{aligned} \quad (9.19)$$

d. Discussion physique

(i) Interpretation de H

A des termes en $1/c^4$ près, on peut réécrire le dernier terme de (9.19) sous la forme

$$\frac{1}{mc^2} \vec{\mu} \cdot (\vec{p} \times \vec{E}) = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}_{mot} \quad (9.20)$$

où

$$\vec{B}_{mot} = -\frac{1}{c^2} \frac{\vec{p}}{m} \times \vec{E} \simeq -\frac{1}{c^2} \vec{v} \times \vec{E} \quad (9.21)$$

est le champ magnétique motional "vu" dans son référentiel au repos par la particule se déplaçant à la vitesse \vec{v} dans le champ électrique \vec{E} .

Le dernier terme de (9.19) représente donc le couplage magnétique entre le moment magnétique $\vec{\mu}$ et le champ magnétique motional \vec{B}_{mot} . Grande analogie avec le couplage spin-orbite V_{so} dans les atomes.

(ii) Absence de précession de Thomas

- Par rapport au couplage spin-orbite habituel, il manque un facteur $1/2$ dans le dernier terme de (9.13). Cette différence est due à l'absence de précession de Thomas pour une particule neutre.
- Pour une particule chargée, comme un électron de vitesse \vec{v} non parallèle à \vec{E} , la force électrique $\vec{F} = q\vec{E}$ fait tourner la vitesse. On peut montrer alors (voir Ref [7], § 11.5) que le passage dans le référentiel au repos de l'électron s'accompagne d'une rotation du système d'axes, faisant apparaître un champ magnétique fictif, qui se retranche du champ nucléaire, et est à l'origine du facteur $1/2$. Pour une particule neutre, se déplaçant dans un champ électrique \vec{E} , il n'y a pas, à l'ordre 0 en $1/c$, de force s'exerçant sur la particule, pouvant faire changer la direction de \vec{v} et faire apparaître par suite la rotation du système d'axes.

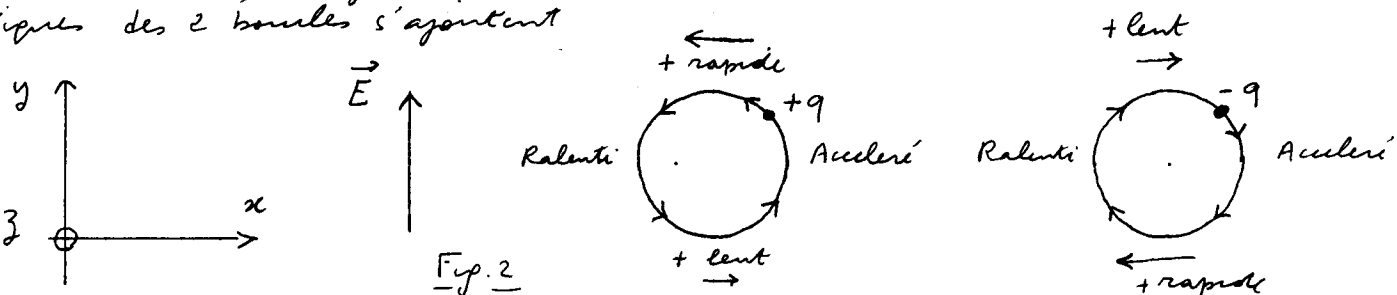
(iii) Différence entre impulsion et quantité de mouvement

- La différence

$$\vec{p} - m\vec{v} = -\frac{1}{c^2} \vec{E}(\vec{r}) \times \vec{\mu} \quad (9.22)$$

entre impulsion \vec{p} et quantité de mouvement $m\vec{v}$, apparaissant dans (9.18), est parfois appelée impulsion "cachée" (voir Ref. [6]). Elle s'exprime en fonction du champ \vec{E} et on peut en donner une interprétation qualitative.

- Supposons par exemple (voir Fig. 2) le champ électrique \vec{E} aligné suivant Oy , et le moment magnétique $\vec{\mu}$ suivant Oz . On peut prendre un modèle simple pour rendre compte de $\vec{\mu}$: une charge $+q$ tournant, dans le plan xOy , dans le sens direct, plus une charge $-q$ tournant dans le sens inverse. Globalement, le système est neutre, mais les 2 moments magnétiques des 2 boucles s'ajoutent.



- Le champ E accélère la charge $+q$ dans la partie droite du cercle, la ralentit dans la partie gauche, de sorte que le mouvement est plus rapide vers la gauche dans la partie supérieure, plus lent vers la droite dans la partie inférieure. Les conclusions sont inversées pour la charge $-q$, qui a un mouvement plus lent vers la droite dans la partie supérieure, plus rapide vers la gauche dans la partie inférieure.
- Il apparaît donc globalement une quantité de mouvement dirigée vers la gauche, ce qui a bien la direction de $-\vec{E} \times \vec{\mu} \sim -\vec{e}_y \times \vec{e}_z = -\vec{e}_x$.

- En toute rigueur, il y a également une variation de la densité de présence de la particule, qui devient plus élevée dans les parties où le mouvement est ralenti, plus faible dans les parties où le mouvement est accéléré, et cet effet compense exactement le précédent. Cependant, la compensation ne se produit plus quand on tient compte des effets relativistes (par exemple, augmentation de la masse avec la vitesse), et le résultat précédent redevient valable. (voir aussi Ref. [8]).

e. Equations du mouvement

- La 1^{ère} équation de Hamilton-Jacobi $d\vec{r}/dt = \vec{v} = \partial H / \partial \vec{p}$ redonne (9.18). La 2^{ème} équation donne

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{p}}{dt} &= - \frac{\partial H}{\partial \vec{r}} = - \frac{1}{c^2} \vec{\nabla} \left[\vec{\mu} \cdot \left(\frac{\vec{p}}{m} \times \vec{E}(\vec{r}) \right) \right] \\ &= \frac{1}{c^2} \vec{\nabla} \left[\vec{E}(\vec{r}) \cdot \left(\frac{\vec{p}}{m} \times \vec{\mu} \right) \right] \end{aligned} \quad (9.23)$$

- Pour calculer $d\vec{p}/dt$, à partir de (9.18), utilisons

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \approx \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\vec{p}}{m} \cdot \vec{\nabla} \quad (9.24)$$

et le fait que \vec{E} ne dépend pas explicitement de t . Il vient :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{a} - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\vec{p}}{m} \cdot \vec{\nabla} \right) \left[\vec{E}(\vec{r}) \times \vec{\mu} \right] \quad (9.25)$$

où l'on a introduit l'accélération

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (9.26)$$

(Notons que les termes en $1/c^2$ négligés dans (9.24) lors du remplacement de \vec{v} par \vec{p}/m , auraient donné des termes en $1/c^4$ dans le dernier terme de (9.25), ce qui justifie (9.24)).

- En égalant (9.23) et (9.25), on obtient l'équation de la dynamique

$$m\vec{a} = \frac{1}{c^2} \left\{ \left(\frac{\vec{p}}{m} \cdot \vec{\nabla} \right) \left[\vec{E}(\vec{r}) \times \vec{\mu} \right] + \vec{\nabla} \left[\vec{E}(\vec{r}) \cdot \left(\frac{\vec{p}}{m} \times \vec{\mu} \right) \right] \right\} \quad (9.27)$$

Des identités vectorielles simples et le fait que $\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}) = \vec{0}$ et $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = 0$ permettent de montrer (voir Appendice B) que

$$\left(\frac{\vec{p}}{m} \cdot \vec{\nabla} \right) \left[\vec{E}(\vec{r}) \times \vec{\mu} \right] + \vec{\nabla} \left[\vec{E}(\vec{r}) \cdot \left(\frac{\vec{p}}{m} \times \vec{\mu} \right) \right] = -(\vec{\mu} \cdot \vec{\nabla}) \left[\frac{\vec{p}}{m} \times \vec{E}(\vec{r}) \right] \quad (9.28)$$

de sorte que l'on obtient finalement

$$m\vec{a} = - \frac{1}{c^2} (\vec{\mu} \cdot \vec{\nabla}) \left[\frac{\vec{p}}{m} \times \vec{E}(\vec{r}) \right] \quad (9.29)$$

Si $\vec{\mu}$ reste constant en direction, et si $\vec{E}(\vec{r})$ ne varie pas le long de cette direction, l'équation (9.29) prédit que $\vec{a} = \vec{0}$ c'est à dire qu'il n'y a pas de force s'exerçant sur le centre de masse de la particule. Nous verrons plus loin des exemples de telles situations. C'est le fait d'avoir confondu $d\vec{p}/dt$ et $m\vec{a}$ qui a conduit certains auteurs à d'autres conclusions erronées (voir Ref. [9])

③ Effet Aharonov - Anandan - Casher (AAC) - Voir Refs [5], [10]

a - Problème physique considéré

- Fil très long le long de Oz portant une densité de charge uniforme Λ par unité de longueur. (Fig. 3)

- Particule incidente neutre ayant un moment magnétique $\vec{\mu}$ initialement parallèle à Oz

- Au moyen de "lames séparatrices" appropriées, le paquet d'ondes incident est séparé en 2 paquets d'ondes cohérents qui se propagent de part et d'autre du fil dans un plan \perp à Oz, puis sont ensuite recombinés.

- Question : l'état d'interférence dépend-il de Λ ?

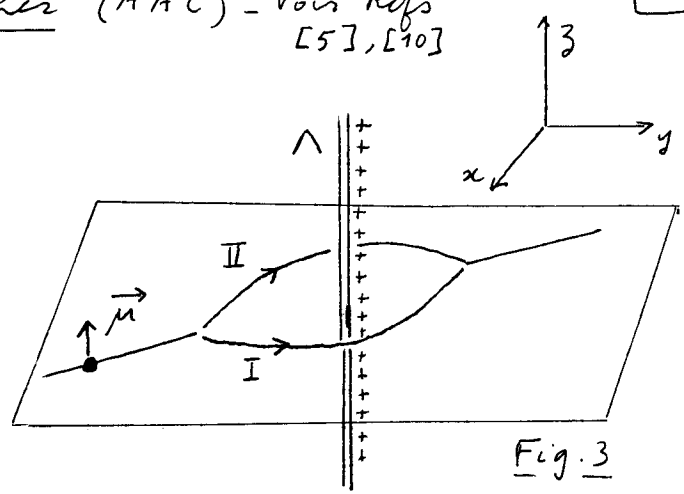


Fig. 3

b - Absence de force et de couple (Pour la controverse à ce sujet, voir Refs [9], [6] et [11])

- Supposons d'abord $\Lambda = 0$. Les chemins I et II sont dans un plan \perp à Oz. Le moment magnétique $\vec{\mu}$ n'est soumis à aucun couple et reste parallèle à Oz tout au long des trajectoires.

- Si $\Lambda \neq 0$, un champ électrique radial \vec{E} apparaît. Si l'on utilise des coordonnées cylindriques r, φ, z (l'axe z étant pris le long du fil), on obtient à partir du théorème de Gauss

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\Lambda}{r} \vec{e}_r \tag{9.30}$$

\vec{e}_r étant le vecteur unitaire radial au point r, φ, z . \vec{E} ne dépend pas de z .

- Supposons pour l'instant que $\vec{\mu}$ reste aligné sur Oz en présence de \vec{E} . Dans l'équation (9.29), $\vec{\mu} \cdot \vec{v}$ se réduit à $\mu \frac{dz}{dt}$, μ étant le module de $\vec{\mu}$. Comme \vec{E} ne dépend pas de z , d'après (9.30), le second membre de (9.29) se réduit à zéro et l'on obtient

$$M \vec{a} = \vec{0} \tag{9.31}$$

Il n'y a pas de force nouvelle s'exerçant sur la particule et due à la présence du fil chargé. Les trajectoires I et II ne sont pas modifiées.

- On vérifie alors que, \vec{v} restant perpendiculaire à Oz, $\frac{1}{c^2} \frac{\vec{p}}{m} \times \vec{E}$, qui ne diffère de $\frac{1}{c^2} \vec{v} \times \vec{E}$ que par des termes en $1/c^4$, reste toujours parallèle à Oz. Le champ magnétique motionnel n'exerce donc aucun couple sur le moment magnétique $\vec{\mu}$. Il était donc correct de supposer que $\vec{\mu}$, initialement parallèle à Oz, reste aligné sur Oz.

- En conclusion, la présence du fil chargé ne donne naissance à aucune force et aucun couple sur la particule incidente et son moment magnétique. Les trajectoires I et II sont donc les mêmes que Λ soit nul ou non.

c - Calcul du déphasage

- En utilisant (9.18), on obtient pour la différence $\phi_I - \phi_{II}$ entre les déphasages accumulés sur les chemins I et II

$$\begin{aligned} \Phi_I - \Phi_{II} &= \int_{I-II} \frac{\vec{p} \cdot d\vec{r}}{\hbar} \\ &= \int_{I-II} \frac{m\vec{v} \cdot d\vec{r}}{\hbar} - \frac{1}{\hbar c^2} \int_{I-II} [\vec{E}(\vec{r}) \times \vec{\mu}] \cdot d\vec{r} \end{aligned} \quad (9.32)$$

Le 1^{er} terme de la 2^{ème} ligne de (9.32) est le même que Λ soit nul ou non, puisque \vec{v} reste inchangé d'après (9.31). Le 2^{ème} terme de la 2^{ème} ligne de (9.32) représente donc la variation $\delta\Phi$ de $\Phi_I - \Phi_{II}$ due à Λ

$$\delta\Phi = - \frac{1}{\hbar c^2} \int_{I-II} [\vec{E}(\vec{r}) \times \vec{\mu}] \cdot d\vec{r} \quad (9.33)$$

- l'utilisation de coordonnées cylindriques r, φ, z et des vecteurs unitaires associés $\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z$ donne :

$$d\vec{r} = dr \vec{e}_r + r d\varphi \vec{e}_\varphi + dz \vec{e}_z \quad (9.34.a) \quad \vec{\mu} = \mu \vec{e}_z \quad (9.34.b)$$

En reportant (9.30) et (9.34) dans (9.33), on obtient alors

$$\begin{aligned} \delta\Phi &= - \frac{1}{\hbar c^2} \frac{\Lambda \mu}{2\pi \epsilon_0} \int_{I-II} \frac{1}{r} (\vec{e}_r \times \vec{e}_z) \cdot d\vec{r} \\ &= \frac{\Lambda \mu}{2\pi \epsilon_0 \hbar c^2} \int_{I-II} d\varphi = \frac{\Lambda \mu}{\epsilon_0 \hbar c^2} \end{aligned} \quad (9.35)$$

puisque l'intégrale de $d\varphi$ le long du contour fermé I-II entourant le fil donne 2π

d - Discussion physique

- Le déphasage $\delta\Phi$ ne dépend pas de la vitesse initiale de la particule.
- Il ne dépend pas de la forme exacte des chemins I et II, pourvu que ces 2 chemins entourent complètement le fil.
- La trajectoire de la particule incidente et son moment magnétique ne sont pas perturbés par la présence du fil.
- Beaucoup de points communs donc avec l'effet ABV. Cependant, la particule se propage ici dans une région où les champs (et non pas seulement les potentiels) sont non nuls.

e - Autre disposition possible (voir aussi Refs. [12], [14])

- Condensateur C très allongé suivant Oz avec des plaques \perp à Oy (Fig. 4)
- Particule neutre arrivant le long de Ox , avec son moment magnétique $\vec{\mu}$ parallèle à Oz .
- On peut découper les densités de charges + et - sur les 2 plaques de C en rubans très fins parallèles à Oz et analogues aux fils de la figure 3. Le même raisonnement que celui fait plus haut montre alors que la particule incidente ne subit aucune force et aucun couple. Elle passe donc entre les 2 plaques du condensateur, sans modification, ni de la trajectoire, ni de $\vec{\mu}$ qui reste \parallel à Oz .

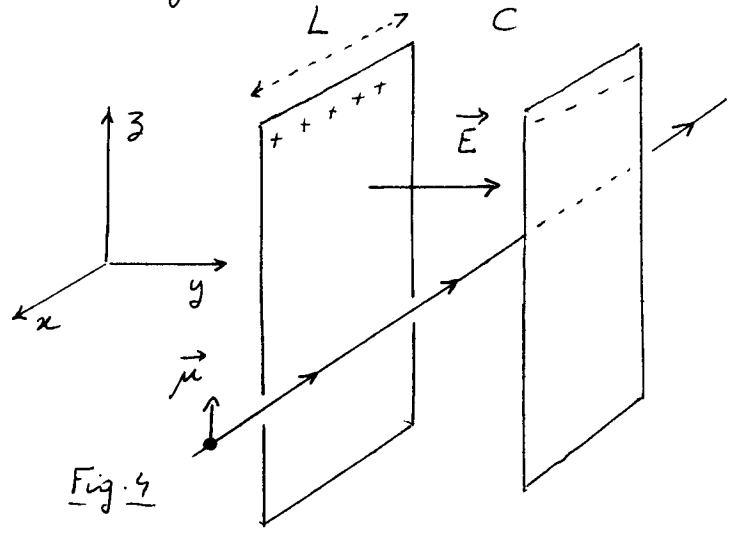


Fig. 4

- Le déphasage supplémentaire dû au champ \vec{E} qui règne entre [IX-9] les 2 armatures de C, quand la particule traverse cette zone, vaut donc

$$\delta\phi = -\frac{1}{\hbar c^2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \vec{e}_x \cdot [\vec{E} \times \vec{\mu}] \approx -\frac{E\mu}{\hbar c^2} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dx \vec{e}_x \cdot [\vec{e}_y \times \vec{e}_z] = \frac{E\mu L}{\hbar c^2} \quad (9.36)$$

où L est la largeur des plaques de C le long de Ox .

- On peut voir clairement sur cette disposition pourquoi $\delta\phi$ ne dépend pas de v . Dans son référentiel au repos, la particule "voit" un champ motional $\vec{B}_{mot} = -\frac{1}{c^2} \vec{v} \times \vec{E}$ parallèle à Oz et proportionnel à v et acquiert de ce fait une énergie potentielle $U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}_{mot} = +\frac{1}{c^2} \vec{\mu} \cdot (\vec{v} \times \vec{E})$ proportionnelle à v . Le déphasage correspondant est $\frac{1}{\hbar} \int U dt \approx \frac{1}{\hbar} U \frac{L}{v}$. Le facteur v qui apparaît dans U est compensé par le facteur $\frac{1}{v}$ qui apparaît dans le temps d'interaction L/v .

f- Observations expérimentales

(i) Expérience sur les neutrons (voir Ref. [13])

- Les 2 bras d'un interféromètre à neutrons passent à travers 2 condensateurs où règnent des champs \vec{E}_I et \vec{E}_{II} tels que $\vec{v}_I \times \vec{E}_I = -\vec{v}_{II} \times \vec{E}_{II}$

Les déphasages $\delta\phi_I$ et $\delta\phi_{II}$ correspondants sont donc opposés et ont des modules donnés par (9.36)

- L'expérience est difficile, nécessite plusieurs mois d'intégration pour observer un déphasage de 2.19 ± 0.52 mrad, à comparer avec la valeur prévue théoriquement de 1.50 mrad.

(ii) Expérience plus récente sur des molécules TlF (Ref [14])

- On utilise un seul faisceau moléculaire (disposition analogue à celle de la figure 4), mais une impulsion de radiofréquence prépare les spins $1/2$ entrants dans une superposition linéaire des états $|1 \pm \rangle_3$. Ces 2 états subissent des déphasages opposés, dont le module est donné par (9.36). Le déphasage est mesuré sur les franges de Ramsey obtenues par application d'une 2^{ème} impulsion de radiofréquence à la sortie.

- Les résultats suivants ont pu ainsi être obtenus

- Test de l'indépendance de $\delta\phi$ vis à vis de la vitesse v
- Test de la proportionnalité de $\delta\phi$ au champ électrique E
- Test de l'expression de $\delta\phi$ à 4% près.

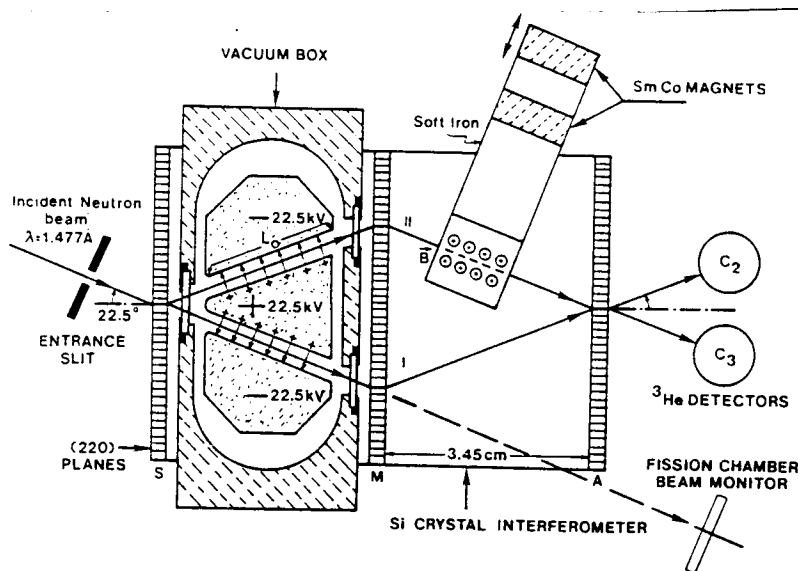


Fig. 5 (extrait de [13])

Références

- [1] Y. Aharonov, D. Bohm, Phys. Rev. 115, 485 (1959)
 [2] W. H. Furry, N. F. Ramsey, Phys. Rev. 118, 623 (1960)
 Les considérations présentées dans cet article sur le lien entre les effets

ABS et ABV et la complémentarité ont été étendues récemment à l'effet AAC ; voir N.F. Ramsey, Phys. Rev. A48, 80 (1993).

[3] R.P. Feynman, R. B. Leighton, M. Sands, The Feynman lectures on Physics, tome II, § 15-5, (Addison Wesley, 1965).

[4] A. Tonomura, N. Osakabe, T. Matsuda, T. Kawasaki, J. Endo, S. Yano, H. Yamada, Phys. Rev. Lett. 56, 792 (1986)

[5] Y. Aharonov, A. Casher, Phys. Rev. Lett. 53, 319 (1984)

[6] Y. Aharonov, P. Pearle, L. Vaidman, Phys. Rev. A37, 4052 (1988)

[7] J.D. Jackson, Classical Electrodynamics (Wiley, 1962)

[8] S. Coleman, J.H. Van Vleck, Phys. Rev. 171, 1370 (1968)

[9] T.H. Boyer, Phys. Rev. A36, 5083 (1987)

[10] J. Anandan, Phys. Rev. Lett. 48, 1660 (1982)

[11] A.S. Goldhaber, Phys. Rev. Lett. 62, 482 (1989)

[12] R.C. Casella, Phys. Rev. Lett. 65, 2217 (1990)

[13] A. Cimmino, G.I. Opat, A.G. Klein, H. Kaiser, S.A. Werner, M. Arif, R. Clothier, Phys. Rev. Lett. 63, 380 (1989)

[14] K. Sangster, E.A. Hinds, S. Barnett, E. Riis
Preprint 1993, à paraître (Phys. Rev. Lett. 71, 3641 (1993)).

Appendice B : Démonstration de l'équation (9.28)

- On utilise les 2 formules donnant le gradient d'un produit scalaire et le rotationnel d'un produit vectoriel

$$\vec{\nabla}(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \times (\vec{\nabla} \times \vec{b}) + \vec{b} \times (\vec{\nabla} \times \vec{a}) + (\vec{a} \cdot \vec{\nabla}) \vec{b} + (\vec{b} \cdot \vec{\nabla}) \vec{a} \quad (B.1)$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a} (\vec{\nabla} \cdot \vec{b}) - \vec{b} (\vec{\nabla} \cdot \vec{a}) + (\vec{b} \cdot \vec{\nabla}) \vec{a} - (\vec{a} \cdot \vec{\nabla}) \vec{b} \quad (B.2)$$

- En utilisant (B.1) et le fait que, des 3 vecteurs, $\vec{p}/m, \vec{\mu}$ et \vec{E} seul \vec{E} dépend de \vec{r} , on obtient, compte tenu de $\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0}$

$$\vec{\nabla} [(\frac{\vec{p}}{m} \times \vec{\mu}) \cdot \vec{E}] = (\frac{\vec{p}}{m} \times \vec{\mu}) \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) + [(\frac{\vec{p}}{m} \times \vec{\mu}) \cdot \vec{\nabla}] \vec{E} = [(\frac{\vec{p}}{m} \times \vec{\mu}) \cdot \vec{\nabla}] \vec{E} \quad (B.3)$$

- On obtient également, compte tenu de (B.2) et de $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$

$$\vec{\nabla} [(\vec{\mu} \times \vec{E}) \cdot \frac{\vec{p}}{m}] = \frac{\vec{p}}{m} \times [\vec{\nabla} \times (\vec{\mu} \times \vec{E})] + (\frac{\vec{p}}{m} \cdot \vec{\nabla}) (\vec{\mu} \times \vec{E}) \quad (B.4)$$
$$= \vec{\mu} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - (\vec{\mu} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E} = -(\vec{\mu} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E}$$

- Or, $(\frac{\vec{p}}{m} \times \vec{\mu}) \cdot \vec{E} = (\vec{\mu} \times \vec{E}) \cdot \frac{\vec{p}}{m}$. On en déduit, par soustraction de (B.4) de (B.3)

$$[(\frac{\vec{p}}{m} \times \vec{\mu}) \cdot \vec{\nabla}] \vec{E} = -(\vec{\mu} \cdot \vec{\nabla}) (\frac{\vec{p}}{m} \times \vec{E}) + (\frac{\vec{p}}{m} \cdot \vec{\nabla}) (\vec{\mu} \times \vec{E}) \quad (B.5)$$

En remplaçant, compte tenu de (B.3) le membre de gauche de (B.5) par $\vec{\nabla} [(\frac{\vec{p}}{m} \times \vec{\mu}) \cdot \vec{E}] = \vec{\nabla} [\vec{E} \cdot (\frac{\vec{p}}{m} \times \vec{\mu})]$, et en réarrangeant les termes, on obtient alors (9.28).