

COLLEGE DE FRANCE

COURS DE PHYSIQUE

ATOMIQUE ET MOLECULAIRE

Claude COHEN-TANNOUDJI

ANNEE SCOLAIRE : 1992 - 1993

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Résumé du cours 1991-1992	I-1
Introduction au cours 1992-1993	I-5
1 - Thème choisi	I-5
2 - Développements récents ayant permis l'éclosion d'un tel sujet	I-5
3 - Comparaison avec d'autres types d'optique ou d'interférométrie	I-7
4 - Quelques remarques générales à propos des phénomènes d'interférence	I-8

LAME SÉPARATRICE POUR ATOME ASSOCIÉE A UNE ONDE LASER PLANE PROGRESSIVE

1 - Modèle choisi - Notations	II-1
2 - Effet sur l'atome de la traversée de l'onde laser	II-2
3 - Effet sur l'atome de la traversée successive de 2 lames	II-6
4 - Franges de Ramsey à 2 ondes	II-7

ÉCHOS DE PHOTONS, FRANGES DE RAMSEY ET INTERFÉROMÉTRIE ATOMIQUE

1 - Echos de photons à 2 ondes progressives	III-1
a) Etude qualitative	III-1
b) Comment apparaît le phénomène d'écho	III-3
2 - Franges de Ramsey à 4 ondes progressives	III-5
a) Problème physique étudié	III-5
b) Effets d'interférence pouvant donner des franges de Ramsey	III-6
c) Calcul de la probabilité de changer d'état interne après traversée des 4 ondes	III-6
d) Discussion physique	III-7
3 - Lien avec l'interférométrie atomique	III-8
a) Autre représentation possible de l'état atomique externe	III-8
b) Autre interprétation possible du brouillage des signaux par moyenne sur v	III-8
c) Comment éliminer le brouillage des effets d'interférence	III-10

FONCTION D'ONDE, PROPAGATEURS ET INTÉGRALES DE CHEMIN

1 - Rappels classiques	IV-1
a) Chemins possibles et chemins effectivement suivi, ou réel	IV-1
b) Principe de moindre action	IV-1

c) Variations de l'action entre 2 mouvements réels très voisins	IV-2
2 - Propagateur quantique - Formulation de Feynman	IV-3
a) Définition	IV-3
b) Expression de Feynman pour le propagateur	IV-3
c) Limite classique	IV-4
d) Sommation sur les états intermédiaires	IV-4
e) Fonction d'onde et propagateur	IV-5
f) Lien avec la formulation traditionnelle	IV-6
3 - Cas simple des Lagrangiens quadratiques	IV-6
a) Hypothèses	IV-6
b) Forme simple du propagateur - Dépendance en z_a et z_b	IV-6
c) Propagation de la fonction d'onde	IV-8
d) Propagation en présence d'ondes laser progressives	IV-10

PROPAGATION D'UNE PARTICULE DANS UN CHAMP DE PESAN- TEUR

1 - Calcul du propagateur - Approche de Feynman	V-1
a) Lagrangien - Impulsion - Hamiltonien	V-1
b) Action	V-1
c) Expression du propagateur	V-2
2 - Approche quantique traditionnelle	V-2
a) Idée générale	V-2
b) Détermination de la transformation unitaire $T(t)$	V-3
c) Nouvel hamiltonien	V-3
d) Expression de l'opérateur d'évolution de l'ancienne représentation	V-4
e) Propagation de la fonction d'onde	V-4
3 - Cas où le champ de pesanteur est une petite perturbation	V-5
a) Buts de ce paragraphe	V-5
b) Lien entre les fonctions d'ondes	V-6
c) Application au calcul du déphasage	V-7
4 - Expérience de Colella, Overhauser, Werner	V-7
a) Principe de l'expérience	V-7
b) Schématisation - Calcul du déphasage gravitationnel	V-8
c) Discussion - Ordres de grandeur	V-9
d) Exemple de résultats expérimentaux	V-10

EXPÉRIENCE DE KASEVICH ET CHU

1 - Transitions Raman stimulées	VI-1
a) Diagramme d'énergie et ondes laser	VI-1
b) Famille d'états d'impulsion-énergie couplés	VI-2
c) Equation de Schödinger	VI-2
d) Elimination adiabatique de l'état excité	VI-3
e) Discussion physique	VI-4
2 - Principe de l'expérience d'interférométrie	VI-5
a) Séquence d'impulsions	VI-5
b) Analogie avec une expérience d'échos de photons	VI-6
c) Représentation des chemins classiques dans l'espace-temps	VI-6
3 - Calcul du déphasage gravitationnel	VI-7
a) Déphasage dû à la propagation dans le champ gravitationnel	VI-7
b) Déphasage dû aux interactions avec les ondes laser	VI-8
4 - Discussion physique	VI-9
5 - Exemples de résultats expérimentaux	VI-10

PROPAGATION D'UNE PARTICULE DANS UN RÉFÉRENTIEL TOURNANT

1 - Lagrangien, Hamiltonien et Action	VII-1
a) Référentiel galiléen et référentiel tournant	VII-1
b) Lagrangien - Equations de Lagrange	VII-1
c) Impulsion	VII-2
d) Hamiltonien	VII-2
e) Solution des équations du mouvement	VII-2
f) Action	VII-3
2 - Propagateur - Déphasage dû à la rotation	VII-4
a) Expression du propagateur	VII-4
b) Propagation de la fonction d'onde	VII-4
c) Calcul traditionnel	VII-4
d) Déphasage dû à la rotation	VII-4
e) Déphasage dans un interféromètre	VII-6
3 - Expérience de Werner, Staudenmann et Colella	VII-6
a) Principe de l'expérience	VII-6
b) Ordres de grandeur	VII-7
c) Résultats	VII-7

4 - Interféromètres optiques sensibles à la rotation	VII-8
a) Effet Sagnac	VII-8
b) Comparaison avec les neutrons	VII-10

INTERFÉROMÈTRES ATOMIQUES SENSIBLES À LA ROTATION

1 - Principe des expériences	VIII-1
2 - Calcul du déphasage entre les 2 bras des interféromètres	VIII-2
a) Méthode utilisant les trajectoires non perturbées	VIII-2
b) Méthode utilisant les trajectoires perturbées	VIII-4
3 - Etude expérimentale en l'absence de rotation ($\Omega = 0$)	VIII-5
a) Observation du doublet de recul	VIII-5
b) Suppression d'une composante du doublet de recul	VIII-6
c) Sensibilité à la phase des ondes laser	VIII-6
d) Déphasage produit par un déplacement lumineux	VIII-7
4 - Etude expérimentale de la sensibilité à la rotation	VIII-8
a) Résultats expérimentaux	VIII-8
b) Discussion physique	VIII-9

PROPAGATION D'UNE PARTICULE À TRAVERS UNE OU PLUSIEURS FENTES

1 - Problème de base à résoudre	IX-1
a) Hypothèses - Notations	IX-1
b) Formulation mathématique	IX-2
c) Approximation de Kirchhoff	IX-2
2 - Approximation paraxiale	IX-2
a) Définition	IX-2
b) Transformation de l'équation aux valeurs propres pour $g = 0$	IX-3
c) Transformation de l'équation aux valeurs propres pour $g \neq 0$	IX-3
3 - Diffraction par une fente	IX-5
a) Nouvelle formulation du problème	IX-5
b) Transformation de l'intégrale dans le plan de la fente	IX-7
c) Diffraction proche et lointaine - Nombre de Fresnel	IX-7
d) Discussion physique - Les 2 causes de variation transversale de la fonction d'onde IX-8	
e) Cohérence spatiale transverse	IX-9
4 - Passage à travers 2 fentes - Interférences	IX-10

a) Problème physique	IX-10
b) Calcul du déphasage et de l'interfrange	IX-10

INTERFÉROMÈTRES ATOMIQUES UTILISANT DES DOUBLES FENTES

1 - Expérience de O. Carnal et J. Mlynek à Constance	X-1
a) Principe de l'expérience	X-1
b) Résultats	X-2
c) Discussion	X-3
d) Amélioration de la monochromaticité du jet	X-3
2 - Expérience de F. Shimizu, K. Shimizu et H. Takuma à Tokyo	X-5
a) Principe de l'expérience	X-5
b) Résultats	X-7
c) Effet d'un champ électrique statique	X-8

Résumé du cours 1991-92

Le cours de l'année 1991-1992 a poursuivi l'étude, commencée lors du cours précédent, des nouveaux mécanismes de refroidissement laser qui ont été mis en évidence au cours des quatre dernières années. Ont été étudiés plus particulièrement les mécanismes de refroidissement qui font intervenir des effets d'interférence entre plusieurs amplitudes de transition conduisant le système atome + photon d'un même état initial à un même état final. Ces effets d'interférence sont en fait très généraux et se manifestent dans plusieurs autres phénomènes physiques qui ont été décrits et interprétés.

Le cours commence par un bref rappel des résultats essentiels établis lors du cours précédent : existence de plusieurs temps caractéristiques associés à l'évolution du système (durée de vie de l'état excité de l'atome, temps de pompage optique d'un sous-niveau Zeeman à l'autre, temps d'amortissement de la vitesse atomique...); équations d'évolution décrivant la dynamique atomique (équations de Bloch optiques, simples ou généralisées, équations réduites pour la matrice densité de l'état fondamental, obtenues après élimination adiabatique des variables de l'état excité à la limite des faibles intensités et des faibles vitesses, ...); déplacements lumineux des sous-niveaux Zeeman de l'état fondamental et taux de pompage optique d'un sous-niveau à l'autre; séparation de la force moyenne totale agissant sur l'atome en une composante réactive et une composante dissipative; refroidissement « Sisyphe » où, par suite d'une corrélation importante entre les modulations spatiales des déplacements lumineux et des taux de pompage optique, l'atome en mouvement gravit plus souvent des collines de potentiel qu'il n'en descend.

Refroidissement laser $\sigma^+ - \sigma^-$

Le premier mécanisme analysé dans le cours de cette année est celui associé au refroidissement laser $\sigma^+ - \sigma^-$. Une telle dénomination est due à l'utilisation de deux ondes laser, de même amplitude et de même fréquence, se propageant dans des sens opposés le long de l'axe Oz, et de polarisations circulaires respectivement droite (σ^+) et gauche (σ^-).

Le champ laser résultant de la superposition de ces deux ondes σ^+ et σ^- a une amplitude indépendante de z , et une polarisation linéaire qui tourne lorsqu'on se déplace le long de Oz , pour former une hélice de pas égal à la longueur d'onde λ des ondes laser. On en déduit que les déplacements lumineux des sous-niveaux Zeeman de l'état fondamental g sont indépendants de z (il n'y a donc plus de collines de potentiel comme pour l'effet Sisyphé), et que la dégénérescence Zeeman dans g n'est levée que si le moment cinétique J_g de g est supérieur ou égal à 1. C'est la raison pour laquelle on ne considère dans la suite que des transitions optiques partant d'un niveau $J_g = 1$.

L'expression générale de la force moyenne permet de montrer que la force réactive est due à la variation spatiale des fonctions d'onde des sous-niveaux Zeeman de g ayant un déplacement lumineux bien défini, alors que la force dissipative est due à un déséquilibre entre les forces de pression de radiation exercées par les ondes σ^+ et σ^- , ce déséquilibre étant lui-même proportionnel à la différence $\Pi_+ - \Pi_-$ entre les populations des sous-niveaux g_+ et g_- de g , de nombre quantique magnétique $M = +1$ et $M = -1$.

On commence par calculer l'état interne d'un atome au repos en un point z . On détermine pour cela les fonctions d'onde, les énergies et les populations des sous-niveaux de g ayant un déplacement lumineux bien défini. Deux combinaisons linéaires orthogonales des états g_+ et g_- apparaissent alors très naturellement, celles qui sont respectivement couplée et non couplée au sous-niveau e_0 de l'état excité e (de nombre quantique magnétique $M = 0$) par l'hamiltonien d'interaction atome-laser V_{AL}

$$\langle e_0 | V_{AL} | \psi_C \rangle \neq 0 \quad \langle e_0 | V_{AL} | \psi_{NC} \rangle = 0$$

Dans l'état non couplé $|\psi_{NC}\rangle$, les deux amplitudes de transition de g_- vers e_0 , par absorption d'un photon σ^+ , et de g_+ vers e_0 , par absorption d'un photon σ^- , interfèrent destructivement alors que cette interférence est constructive pour l'état $|\psi_C\rangle$.

Pour étudier l'état interne d'un atome en mouvement à la vitesse v le long de Oz , il est commode d'introduire un référentiel $OXYZ$ en mouvement et tournant autour de Oz (qui coïncide avec OZ) et tel que, dans ce référentiel, l'atome soit au repos et soumis à un champ laser de polarisation linéaire fixe. Dans ce nouveau référentiel, le moment cinétique atomique \mathbf{J} est soumis à un couple, dû à la rotation, dont l'effet est identique à celui que produirait un champ magnétique (fictif), parallèle à Oz , et d'amplitude proportionnelle à v , l'hamiltonien d'interaction correspondant s'écrivant $V_{rot} = kvJ_z$ (où k est le module du vecteur d'onde des ondes laser).

La prise en compte de l'effet de V_{rot} permet alors de comprendre l'origine physique de la force totale agissant sur l'atome dans le cas où les ondes laser excitent une transition $J_g = 1 \longleftrightarrow J_e = 2$ (J_e étant le moment cinétique de l'état excité e). La force dissipative se trouve alors être 5 fois plus grande que la force réactive et représente donc l'effet prépondérant. Les seuls éléments de matrice non nuls de V_{rot} relient les états couplé et non couplé $|\psi_C\rangle$ et $|\psi_{\text{NC}}\rangle$

$$\langle \psi_C | V_{\text{rot}} | \psi_{\text{NC}} \rangle = \hbar k v$$

Ces deux états sont séparés par un intervalle d'énergie de l'ordre du déplacement lumineux $\hbar \delta'$. A la limite $k|v| \ll |\delta'|$, l'effet de V_{rot} est de « contaminer » l'état $|\psi_C\rangle$ par l'état $|\psi_{\text{NC}}\rangle$, et réciproquement. Alors que les états $|\psi_C\rangle$ et $|\psi_{\text{NC}}\rangle$ contiennent des proportions égales de g_+ et g_- , il n'en est plus de même des états contaminés. On comprend ainsi comment peut apparaître une différence de populations entre g_+ et g_- , à l'origine d'un déséquilibre entre les forces de pression de radiation exercées par les ondes σ^+ et σ^- . Cette différence de population est en $k v / \delta'$, et est beaucoup plus grande, à basse intensité, que celle associée aux déplacements Doppler opposés des deux ondes σ^+ et σ^- , et qui varie en $k v / \Gamma$, où Γ est la largeur naturelle de l'état excité e (δ' est en effet proportionnel à l'intensité laser I_L et tend vers zéro quand $I_L \rightarrow 0$, alors que Γ est indépendant de I_L).

Configuration Λ - Piégeage cohérent de populations

L'analyse précédente, développée pour une transition $J_g = 1 \longleftrightarrow J_e = 2$, peut être appliquée également à une transition $J_g = 1 \longleftrightarrow J_e = 1$. On trouve alors que, pour un atome immobile en z , toute la population atomique se retrouve, en régime stationnaire dans l'état $|\psi_{\text{NC}}\rangle$, de sorte que la fluorescence s'arrête. L'interprétation d'un tel résultat est que l'état $|\psi_{\text{NC}}\rangle$, qui n'est pas, par construction même, couplé à e_0 , ne peut être couplé à aucun autre sous-niveau Zeeman de l'état excité e , puisqu'il n'y a plus, comme c'était le cas pour la transition $J_g = 1 \longleftrightarrow J_e = 2$, de sous-niveau e_{+2} (ou e_{-2}) qui puisse être atteint à partir de g_+ (ou g_-) par absorption d'un photon σ^+ (ou σ^-). Un atome dans l'état $|\psi_{\text{NC}}\rangle$ ne peut plus absorber de photon. Un tel état est un état piège. Une fois que tous les atomes ont été pompés optiquement dans l'état $|\psi_{\text{NC}}\rangle$, la fluorescence s'arrête.

L'effet du mouvement atomique est alors spectaculaire. La perturbation correspondante V_{rot} contamine l'état $|\psi_{\text{NC}}\rangle$ par l'état $|\psi_C\rangle$ qui, lui, est couplé à e_0 . L'état ainsi contaminé devient donc lui aussi couplé à e_0 , de sorte que pour un atome en mouvement, la fluorescence réapparaît, et ce d'autant plus que la vitesse est plus élevée.

Un tel effet est un cas particulier d'un phénomène plus général, appelé « piégeage cohérent de populations », et apparaissant lorsqu'un système atomi-

que en configuration Λ (c'est-à-dire avec un niveau excité e_0 et deux sous-niveaux inférieurs g_1 et g_2 , non nécessairement dégénérés) est soumis à deux ondes laser de fréquences ω_{L1} et ω_{L2} respectivement proches des fréquences atomiques ω_{e1} et ω_{e2} des transitions $g_1 \longleftrightarrow e$ et $g_2 \longleftrightarrow e$. Comme plus haut, on peut introduire une combinaison linéaire $|\psi_{NC}\rangle$ des états $|g_1\rangle$ et $|g_2\rangle$, plus précisément des états $|g_1, N_1 + 1, N_2\rangle$ et $|g_2, N_1, N_2 + 1\rangle$, où N_1 et N_2 désignent les nombres de photons laser ω_{L1} et ω_{L2} , qui n'est pas couplée à l'état $|e_0\rangle$, plus précisément $|e_0, N_1, N_2\rangle$. Quand la condition de résonance Raman :

$$\omega_{e1} - \omega_{e2} = \omega_{L1} - \omega_{L2}$$

est satisfaite, les deux états $|g_1, N_1 + 1, N_2\rangle$ et $|g_2, N_1, N_2 + 1\rangle$ ont même énergie, de sorte que l'état non couplé $|\psi_{NC}\rangle$ est également un état stationnaire. Une fois que tous les atomes ont été pompés optiquement dans l'état $|\psi_{NC}\rangle$, ils y restent indéfiniment et la fluorescence s'arrête. Par contre, dès que les états $|g_1, N_1 + 1, N_2\rangle$ et $|g_2, N_1, N_2 + 1\rangle$ n'ont plus la même énergie, soit à cause d'un effet Doppler différent sur les ondes ω_{L1} et ω_{L2} , soit à cause d'un balayage des fréquences atomiques ω_{e1} et ω_{e2} , ou laser ω_{L1} et ω_{L2} , l'état $|\psi_{NC}\rangle$ n'est plus un état stationnaire. Un atome, initialement dans l'état $|\psi_{NC}\rangle$, va osciller entre les états $|\psi_{NC}\rangle$ et $|\psi_C\rangle$, et pourra donc absorber de la lumière, dès qu'il a une composante non nulle sur l'état $|\psi_C\rangle$.

Refroidissement au-dessous de l'énergie de recul

Le cours se poursuit par l'étude d'un mécanisme de refroidissement permettant d'abaisser la température des atomes au-dessous de celle correspondant à l'énergie de recul $\hbar^2 k^2 / 2M$ communiquée à l'atome, de masse M , par l'absorption ou l'émission d'un seul photon.

Ce mécanisme repose sur la combinaison de deux effets. Tout d'abord, une sélection des atomes de vitesse très faible. L'excitation d'une transition $J_g = 1 \longleftrightarrow J_e = 1$ par une configuration laser $\sigma^+ - \sigma^-$ fournit un exemple d'un tel effet, puisque les atomes peuvent absorber d'autant moins facilement la lumière que leur vitesse est plus proche de zéro. Les atomes de vitesse très faible sont ainsi sélectionnés. Pour refroidir un ensemble d'atomes, il ne suffit pas cependant de sélectionner une classe de vitesses δv autour de $v = 0$. Il faut également augmenter la densité d'atomes dans cette classe de vitesses. Le deuxième effet utilisé est le changement de vitesse aléatoire que subit un atome après un cycle absorption-émission spontanée. Un atome de vitesse $v > \delta v$ peut à l'issue d'un tel cycle se retrouver avec une vitesse $v < \delta v$. Une telle « marche au hasard » dans l'espace des vitesses (diffusion d'impulsion) peut être considérée comme un pompage optique dans l'espace des vitesses qui transfère les atomes des classes de vitesses absorbantes ($v > \delta v$) vers les classes de vitesses non absorbantes ($v < \delta v$) où ils se retrouvent piégés et s'accumulent.

Si $\delta\nu$ devient plus petit que la vitesse de recul $\hbar k/M$, la longueur d'onde de de Broglie des atomes devient supérieure à la longueur d'onde laser, et un traitement semi-classique des degrés de liberté de translation n'est plus valable. Il faut alors deux nombres quantiques pour préciser l'état de l'atome. Par exemple, l'état $|e_0, p\rangle$ représente un atome dans l'état interne e_0 , avec une impulsion p le long de l'axe Oz . Les grandes lignes d'un traitement entièrement quantique du problème sont esquissées. On montre que les états atomiques se regroupent en famille $F(p)$ de trois états :

$$F(p) = \{|e_0, p\rangle, |g_+, p + \hbar k\rangle, |g_-, p - \hbar k\rangle\}$$

couplés entre eux par absorption et émission induite. Comme dans le traitement semi-classique, on peut introduire une combinaison linéaire $|\psi_{\text{NC}}(p)\rangle$ des états $|g_+, p + \hbar k\rangle$ et $|g_-, p - \hbar k\rangle$ qui n'est pas couplée à l'état excité $|e_0, p\rangle$, alors que la combinaison linéaire orthogonale $|\psi_{\text{C}}(p)\rangle$ l'est. De plus, $|\psi_{\text{NC}}(p)\rangle$ se rapproche d'autant plus d'un état stationnaire que p est plus proche de zéro puisque les énergies cinétiques $(p \pm \hbar k)^2/2M$ des deux états $|g_{\pm}, p \pm \hbar k\rangle$ diffèrent de $2\hbar kp/M$, qui tend vers zéro quand $p \rightarrow 0$. Seul, l'état $|\psi_{\text{NC}}(p=0)\rangle$ est un piège parfait. L'émission spontanée, par les changements aléatoires d'impulsion qu'elle provoque, introduit une redistribution entre les familles $F(p)$ qui permet aux atomes de s'accumuler dans les états $|\psi_{\text{NC}}(p)\rangle$ avec p d'autant plus proche de zéro que le temps d'interaction Θ est plus long. Les résultats de l'intégration numérique des équations de Bloch optiques généralisées sont présentés et interprétés physiquement. Certaines formules analytiques sont établies, comme celle montrant que la température d'équilibre varie en $1/\Theta$, et n'est donc pas bornée inférieurement.

On présente enfin une autre approche du problème, consistant à suivre l'évolution temporelle d'un seul atome, plutôt que de raisonner sur un ensemble statistique d'atomes. On peut montrer en effet que l'évolution temporelle de l'atome est constituée par une suite de périodes d'évolution cohérente séparées par des sauts quantiques se produisant à des instants aléatoires. Il est possible ainsi d'analyser les propriétés statistiques de la suite temporelle formée par les instants où l'atome émet spontanément un photon, et de déterminer en particulier la distribution des intervalles de temps séparant deux émissions spontanées successives. Le principe de la méthode est analysé en détail et des résultats de simulation Monte-Carlo sont présentés, qui permettent de comprendre comment la fluorescence peut s'arrêter pendant un temps très long et comment l'atome arrive dans les états pièges.

Transfert adiabatique de population par utilisation d'états non couplés

On considère de nouveau un système atomique en configuration Λ , avec deux sous-niveaux inférieurs g_1 et g_2 et un sous-niveau excité e_0 , et on suppose maintenant que les amplitudes des deux champs laser de fréquences ω_{L1} et ω_{L2}

qui excitent les transitions $g_1 \longleftrightarrow e_0$ et $g_2 \longleftrightarrow e_0$ varient dans le temps. Soient $\Omega_1(t)$ et $\Omega_2(t)$ les fréquences de Rabi correspondantes, qui sont donc des fonctions du temps. Il s'agit de montrer que, pour des formes appropriées des impulsions $\Omega_1(t)$ et $\Omega_2(t)$, l'atome, initialement dans g_1 , peut passer intégralement dans g_2 à la fin des deux impulsions.

A un instant donné t , il existe un état non couplé à e_0 qui s'écrit :

$$|\psi_{\text{NC}}(t)\rangle = \frac{\Omega_2(t)|g_1\rangle - \Omega_1(t)|g_2\rangle}{\sqrt{\Omega_1^2(t) + \Omega_2^2(t)}}$$

Supposons que les deux impulsions laser $\Omega_1(t)$ et $\Omega_2(t)$ se recouvrent et soient décalées l'une par rapport à l'autre, l'impulsion $\Omega_2(t)$ arrivant sur l'atome avant l'impulsion $\Omega_1(t)$. Au moment où la première impulsion arrive, $\Omega_2 \gg \Omega_1$ et $|\psi_{\text{NC}}(t)\rangle$ se réduit à $|g_1\rangle$. Au moment où la deuxième impulsion quitte l'atome, $\Omega_1 \gg \Omega_2$ et $|\psi_{\text{NC}}(t)\rangle$ se réduit à $|g_2\rangle$. L'état non couplé passe donc continuellement de g_1 à g_2 quand t croit de $-\infty$ à $+\infty$. Cet état non couplé est séparé des autres états (couplés) du système qui sont déplacés en énergie par l'interaction atome-lasers. Si $\Omega_1(t)$ et $\Omega_2(t)$ varient suffisamment lentement, le système atomique peut suivre adiabatiquement l'état non couplé et rester dans cet état, passant ainsi de g_1 à g_2 .

L'équation de Schrödinger qui décrit l'évolution du système est explicitée et les conditions de suivi adiabatique sont précisées. Des résultats expérimentaux récents sont également présentés. Enfin, on montre que cet effet de transfert adiabatique pourrait être utilisé pour faire varier l'impulsion de l'atome de $2n\hbar k$, où n est un entier.

Modèle simple de système amplificateur sans inversion de population

Un tel modèle est lui aussi basé sur le système à trois niveaux g_1, g_2, e_0 considéré plus haut et excité par deux champs laser de fréquences ω_{L1} et ω_{L2} . Des calculs récents, utilisant les équations de Bloch optiques, ont montré que le champ ω_{L1} pouvait être amplifié par un tel système même si, en l'absence du champ ω_{L1} , le sous-niveau g_1 contient plus de la moitié de la population atomique totale. Deux séances ont été consacrées à l'étude d'un tel problème et à l'identification des effets d'interférence quantique responsables d'une telle amplification sans inversion de population.

La méthode utilisée dans le cours consiste à suivre l'évolution temporelle d'un seul atome et à étudier, comme plus haut, les propriétés statistiques de la suite aléatoire de sauts quantiques effectués par un tel atome. Les processus dissipatifs à l'origine de ces sauts quantiques sont, d'une part l'émission spontanée, qui fait passer l'atome de e_0 vers g_i avec un taux Γ_i ($i = 1, 2$) ; d'autre part, l'absorption et l'émission induite d'un rayonnement incohérent à

large bande spectrale, qui font passer l'atome de g_i vers e_0 , ou de e_0 vers g_i , avec un taux R_i ($i = 1, 2$).

Les niveaux d'énergie du système atome + photons laser se groupent en multiplicités $\mathcal{E}(N_1, N_2)$ de dimension 3 (Rappelons que N_1 et N_2 sont les nombres de photons ω_{L1} et ω_{L2}) :

$$\mathcal{E}(N_1, N_2) = \{|0\rangle = |e_0, N_1, N_2\rangle, |1\rangle = |g_1, N_1 + 1, N_2\rangle, |2\rangle = |g_2, N_1, N_2 + 1\rangle\}$$

Le système entre dans $\mathcal{E}(N_1, N_2)$ à partir d'une multiplicité voisine, ou quitte $\mathcal{E}(N_1, N_2)$ vers une multiplicité voisine, par un saut quantique. Entre le saut quantique d'entrée et le saut quantique de sortie, le système évolue de manière cohérente dans $\mathcal{E}(N_1, N_2)$. L'hamiltonien effectif décrivant une telle évolution cohérente, de même que les probabilités des sauts quantiques d'entrée et de sortie sont précisés. On montre que chaque période d'évolution cohérente (i, j), définie par l'état d'entrée i et l'état de sortie j (avec $i, j = 0, 1, 2$), correspond à des variations bien définies ΔN_1 et ΔN_2 des nombres de photons ω_{L1} et ω_{L2} . Une telle étude permet ainsi d'identifier les processus physiques responsables de l'amplification du champ ω_{L1} : effet Raman stimulé $g_2 \rightarrow g_1$ et émission induite $e_0 \rightarrow g_1$; et les processus de perte : effet Raman stimulé $g_1 \rightarrow g_2$ et absorption $g_1 \rightarrow e_0$.

Les propriétés statistiques des périodes (i, j), en particulier leurs probabilités $\mathcal{P}(i, j)$, sont calculées de manière très générale. Des formules analytiques sont établies à la limite des champs faibles :

$$\Omega_1, \Omega_2 \ll \Gamma_1 + \Gamma_2$$

où Ω_1 et Ω_2 sont les fréquences de Rabi associées aux champs ω_{L1} et ω_{L2} , et à la limite où le champ ω_{L1} est considéré comme un champ sonde, dont l'amplitude tend vers zéro :

$$\Omega_1 \ll \Omega_2, \Gamma_1, \Gamma_2, R_1, R_2$$

Les résultats obtenus pour l'amplification du champ ω_{L1} sont en parfait accord avec ceux déduits des équations de Bloch optiques. La méthode suivie ici apporte cependant un éclairage physique nouveau sur les processus faisant varier N_1 .

Tout d'abord, on trouve que la compétition entre les gains et les pertes par effet Raman stimulé ne dépend que des rapports entre les taux d'entrée et de sortie dans les états $|1\rangle$ et $|2\rangle$, ce qui permet de comprendre pourquoi les gains l'emportent sur les pertes si :

$$\Gamma_2 R_1 > \Gamma_1 R_2$$

L'autre résultat intéressant qui apparait est la dissymétrie, due à des effets d'interférence quantique, entre les processus d'absorption se produisant à partir de g_1 et g_2 . A la limite $\Omega_1 \ll \Omega_2$ considérée ici, ces effets d'interférence

ne modifient pas le taux d'absorption à partir de g_2 , ce qui explique pourquoi g_2 peut être vidé par absorption de photons ω_{L2} . Par contre, l'état g_1 est très proche de l'état non couplé, et l'absorption de photons ω_{L1} à partir de l'état g_1 est considérablement réduite. On comprend ainsi comment l'atome peut passer la plus grande partie de son temps dans l'état g_1 , qui devient ainsi plus peuplé que les deux autres états, sans introduire de pertes par absorption qui risqueraient de l'emporter sur l'amplification due aux processus Raman stimulés $g_2 \rightarrow g_1$.

Piégeage cohérent de population et profils de Fano

Le cours se termine par la présentation d'un autre point de vue permettant d'interpréter physiquement le phénomène de réduction du taux d'absorption à partir de l'état g_1 . Ce point de vue consiste à étudier l'amplitude de diffusion d'un photon par l'atome à trois niveaux e_0 , g_1 , g_2 interagissant avec les photons ω_{L2} .

L'amplitude de diffusion est calculée de manière générale à partir de la résolvante de l'hamiltonien. On montre qu'elle est égale à la somme de deux termes, correspondant à des chemins différents pouvant être suivis par le système atome + photons. Le premier chemin correspond à l'absorption simple d'un photon ω_{L1} l'atome passant de g_1 à e_0 . Le deuxième chemin passe intermédiairement par l'état g_2 après un processus Raman stimulé qui fait passer l'atome de g_1 à g_2 . L'absorption d'un photon ω_{L2} porte alors l'atome de g_2 à e_0 .

C'est une interférence destructive entre les amplitudes associées à ces deux chemins qui explique pourquoi le passage de g_1 à e_0 est inhibé quand la condition de résonance Raman entre les niveaux g_1 et g_2 non perturbés est satisfaite. On trouve par contre que la section efficace de diffusion passe par un maximum quand la condition de résonance Raman entre niveaux déplacés par la lumière est satisfaite. La courbe donnant les variations avec ω_{L1} de la section efficace de diffusion présente une allure dissymétrique dont on montre l'analogie étroite avec un profil de Fano. Si l'état e_0 est considéré comme un « continuum » de largeur $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$, il peut en effet être atteint à partir de g_1 , soit directement, soit indirectement via l'état discret g_2 . Une telle situation correspond bien aux conditions d'apparition d'un profil de Fano.

① Thème choisi

"Interférométrie atomique"

- Plus généralement, étude de phénomènes physiques où la nature ondulatoire des degrés de liberté de translation d'un atome neutre joue un rôle important.

Nécessité d'un traitement quantique du mouvement de l'atome.

- Etude de phénomènes d'interférence, analogues à ceux observés sur la lumière, et où les ondes lumineuses sont remplacées par des ondes de de Broglie associées au centre de masse de l'atome.

② Développements récents ayant permis l'éclosion d'un tel sujetUne nouvelle maîtrise du mouvement atomique.

- Au cours de la dernière décennie, développement spectaculaire de nouvelles méthodes permettant de contrôler aux moyens de faisceaux laser la vitesse et la position d'un atome.

"Manipulation" d'atomes par des faisceaux laser.

- Contrôle de la vitesse \vec{v}

- Direction de \vec{v} : Déflexion de jets atomiques.
- Module $|\vec{v}|$ de \vec{v} : Ralentissement de jets atomiques.
- Dispersion Δv de $|\vec{v}|$: Refroidissement laser.

Découverte de nouveaux mécanismes de refroidissement permettant de franchir la limite Doppler $k_B T_D \approx \hbar \Gamma$ (où Γ est la largeur naturelle du niveau atomique excité e), et même la limite de recul $k_B T_R = E_R = \hbar^2 k^2 / 2m$ (où E_R est l'énergie cinétique de recul de l'atome associée à l'émission ou à l'absorption d'un seul photon).

Obtention de températures de l'ordre du microkelvin.

Espoir d'atteindre des températures de l'ordre de quelques nanokelvins.

- Contrôle de la position \vec{r}

Développement de divers types de pièges permettant de confiner le mouvement de l'atome dans un petit volume spatial.

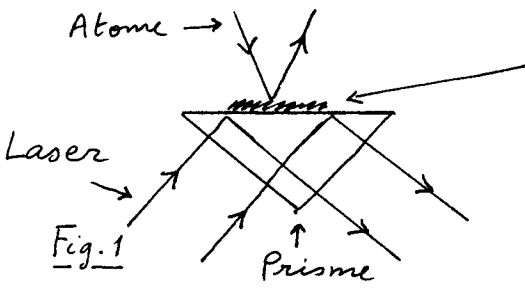
Pièges fonctionnant aussi bien sur des atomes arrêtés à partir d'un jet que sur des atomes dans une cellule.

Développement d'une "optique atomique"

- Invention et mise au point de dispositifs jouant vis à vis des ondes de de Broglie atomiques un rôle équivalent à celui des miroirs, lames séparatrices, lentilles... utilisés pour des ondes lumineuses.

- Exemple de miroirs pour atomes neutres utilisant des ondes évanescentes (avec une fréquence laser ω_L supérieure à la

fréquence atomique (ω_A)

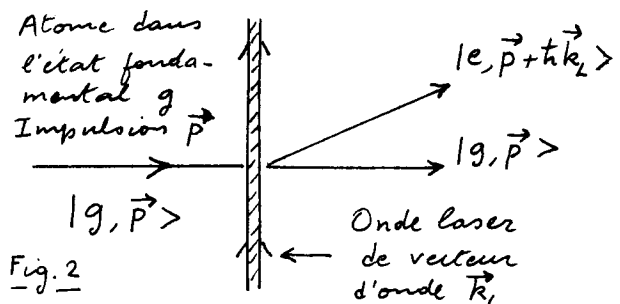


Onde évanescente obtenue par réflexion totale et créant un potentiel (dû aux forces dipolaires) répulsif pour les atomes.

Exaltation possible de l'intensité de l'onde évanescente par utilisation de plasmions.

Espoir de réaliser des "cavités gravitationnelles" pour atomes neutre en utilisant des miroirs paraboliques ayant leur face concave tournée vers le haut.

- Exemple de "lame séparatrice" utilisant les échanges d'impulsion lors de l'absorption d'un photon par l'atome



Après traversée de l'onde laser, l'état de l'atome est une superposition linéaire de l'état $|g, \vec{p}\rangle$ et de l'état $|e, \vec{p} + \hbar \vec{k}_L\rangle$, ou e est l'état excité atomique.

Autres exemples de "lames séparatrices" pour atomes : Diffraction de Bragg d'une onde de de Broglie atomique par le potentiel effectif périodique associé à une onde laser stationnaire - Effet Stern et Gerlach optique

Problème : comment augmenter au maximum la séparation angulaire entre les 2 ondes sortant de la lame ?

- Possibilité d'une "optique dissipative"

Bien qu'étant encore fort peu développée par rapport à l'optique traditionnelle, l'optique atomique a l'avantage de pouvoir combiner des forces conservatives (dérivant d'un potentiel) et des forces dissipatives.

↳ D'où la possibilité de focaliser un jet atomique, tout en diminuant, par refroidissement laser transversal, son ouverture angulaire - Non conservation de l'étendue du faisceau.

- Exemple des "entonnoirs à atomes" ("funnels") utilisant des pièges magneto-optiques transversaux créant des forces de rappel et des forces de friction transversales.

- Exemple de la compression des vitesses longitudinales d'un jet atomique autour de la vitesse moyenne \bar{v} .

La longueur d'onde de de Broglie des atomes du jet est $\lambda_{DB} = \hbar / M \bar{v}$. La "longueur de cohérence" est $\xi = \hbar / M \Delta v$ où Δv est la dispersion des vitesses autour de \bar{v} .

Intérêt d'augmenter au maximum $\bar{v} / \Delta v$, sans perdre des atomes (ce qui serait le cas si l'on utilisait une simple sélection de vitesses pour diminuer Δv). Pas d'aberrations chromatiques.

Développement des techniques de fabrication de microstructures

Fentes très étroites (largeurs de l'ordre du micron) séparées par des distances de l'ordre de quelques microns.
↳ Réalisation de fentes d'Young, de zones de Fresnel, de réseaux pour ondes atomiques.

Meilleure compréhension des méthodes de spectroscopie à haute résolution sans effet Doppler (C. Bordé, Phys. Lett. A 140, 10 (1989))

Il a été réalisé récemment que certaines méthodes de spectroscopie à haute résolution sans effet Doppler reviennent en fait à réaliser un interféromètre atomique : séparation d'un faisceau atomique en 2 faisceaux cohérents, puis recombinaison de ces 2 faisceaux.

↳ D'où l'idée d'utiliser de telles méthodes pour détecter des champs inertiels (liés à la gravité ou à la rotation).

Le fait que l'état interne soit différent dans les deux bras de l'interféromètre et la possibilité d'utiliser une détection des atomes sensible à l'état interne permet d'observer des phénomènes d'interférence même si les paquets d'onde circulant dans les 2 bras de l'interféromètre ne se séparent pas spatialement.

③ Comparaison avec d'autres types d'optique ou d'interférométrie.

Comparaison avec les photons

- Les atomes circulent dans l'interféromètre beaucoup plus lentement que les photons.

Les temps d'interaction sont donc beaucoup plus longs et la sensibilité beaucoup plus élevée, par exemple aux effets inertiels (accélération, rotation, gravitation)

Par contre, la surface enfermée par les bras de l'interféromètre est actuellement beaucoup plus faible pour les interféromètres atomiques que pour les interféromètres optiques (qui peuvent de plus utiliser des fibres optiques formant plusieurs tours).

- Pour les atomes, possibilités de contrôle de l'état interne et de détection sensible à l'état interne. Plus grande variété d'états internes (sous-niveaux Zeeman, hyperfins, excités, métrastables...), alors que pour les photons il n'y a que 2 états de polarisation transverses.

- Dans un interféromètre atomique, il faut éviter tout processus d'émission spontané ou toute collision susceptible de détruire la cohérence spatiale de l'atome. Plus grande fragilité des atomes

- Les flux de photons dans une onde laser sont beaucoup plus élevés que les flux d'atomes dans un jet

Comparaison avec les neutrons

Les interféromètres à neutrons sont les seuls autres interféromètres utilisant des particules neutres, de masse non nulle. Ils ont déjà à leur actif de nombreux résultats fondamentaux.

- Les interféromètres à atomes sont moins coûteux (pas de réacteur à neutrons!) et plus compacts. Les possibilités d'agir sur les atomes (par des forces radiatives) sont plus nombreuses et

La brillance des sources atomiques peut être plus élevée.

- Par contre, les neutrons peuvent pénétrer dans la matière. De plus, par diffraction de Bragg sur des monocristaux, on peut réaliser des écarts angulaires importants entre les 2 bras de l'interféromètre et obtenir ainsi des paquets d'ondes cohérents, séparés spatialement de plusieurs centimètres.

Comparaison avec les électrons

- Dans la perspective de réaliser des microscopes ou des sondes, la longueur d'onde de de Broglie des atomes peut être beaucoup plus petite que celle des électrons, à même énergie (M eV beaucoup plus grand).

Il doit donc être possible de focaliser des faisceaux atomiques avec des rayons focaux très petits (quelques Å), sans endommager l'échantillon avec une énergie de bombardement trop élevée.

Exemple : un atome d'Helium de vitesse $v = 1000 \text{ m/s}$ a une longueur d'onde de de Broglie de 1 \AA et une énergie cinétique de 20 meV , à comparer avec la centaine de keV d'un électron de même longueur d'onde.

- Possibilité d'utiliser des faisceaux atomiques polarisés, mitatables...

④ Quelques remarques générales à propos des phénomènes d'interférence.

Quels sont les objets qui interfèrent ?

- Schéma général d'un phénomène d'interférence quantique

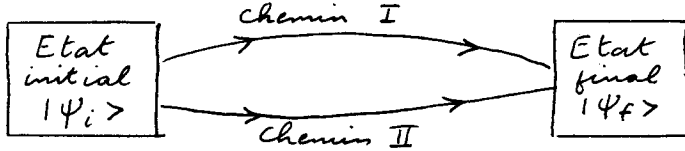


Fig. 3

2 chemins différents I et II conduisent le système quantique d'un même état initial $|\Psi_i\rangle$ à un même état final $|\Psi_f\rangle$. Soient A_I et A_{II} les amplitudes de probabilité correspondantes. La probabilité de transition $|\Psi_i\rangle \rightarrow |\Psi_f\rangle$ est égale à $|A_I + A_{II}|^2 = |A_I|^2 + |A_{II}|^2 + 2 \text{Re } A_I A_{II}^*$

- Très souvent, on interprète un phénomène d'interférence en considérant que les ondes de Maxwell (associées au photon) ou les ondes de de Broglie (associées à une particule) interfèrent.

La notion d'interférence quantique est en fait plus générale. Ce sont les amplitudes de transition de $|\Psi_i\rangle$ à $|\Psi_f\rangle$, c'est à dire les éléments de matrice de l'opérateur d'évolution entre $|\Psi_i\rangle$ et $|\Psi_f\rangle$, qui interfèrent. Et ces amplitudes de transition peuvent faire intervenir plusieurs photons ou plusieurs particules.

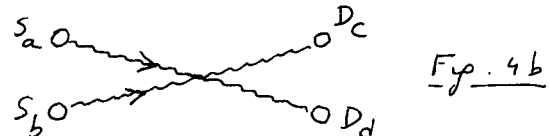
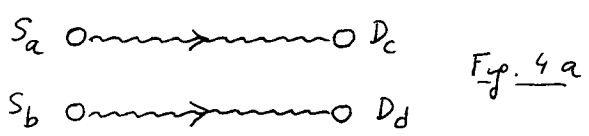
- Exemple d'interférence entre 2 amplitudes de transition faisant intervenir chacune plusieurs photons.

2 atomes sources S_a et S_b émettent chacun un photon. Les 2 photons sont détectés par 2 atomes détecteurs D_c et D_d .

Etat initial : S_a et S_b dans l'état excité e ; D_c et D_d dans l'état fondamental g
 $|\Psi_i\rangle$

Etat final : S_a et S_b dans l'état g ; D_c et D_d dans l'état e
 $|\Psi_f\rangle$

2 chemins permettent de passer de $|\psi_i\rangle$ à $|\psi_f\rangle$ (voir Figs. 4a et 4b)
Le photon émis par S_a peut être réabsorbé par D_c ou D_d , l'autre photon émis par S_b étant réabsorbé par D_d ou D_c .



Les interférences entre les amplitudes de transition associées aux processus des Figures 4a et 4b entraînent que les photodétections enregistrées par D_c au point \vec{r}_c à l'instant t_c et par D_d au point \vec{r}_d à l'instant t_d ne sont pas des événements indépendants. Il y a des corrélations entre ces 2 événements qui sont à l'origine de l'effet Hombury-Brown et Twiss.

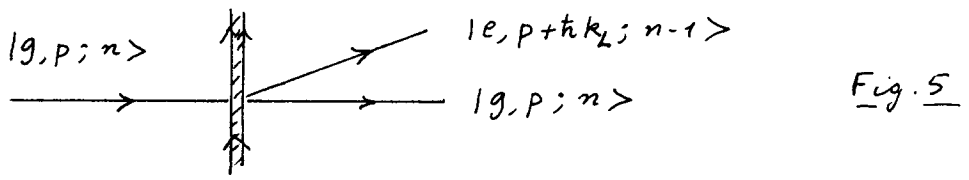
On peut espérer observer un jour sur des atomes (identiques) des effets d'interférence à 2 atomes de ce type.

Peut-on savoir par quel chemin le système passe ?

- Toute tentative de déterminer le chemin I ou II suivi par le système quantique dans un phénomène d'interférence fait disparaître les effets d'interférence.
- Revenons à la figure 2 et supposons que les 2 états $|g, p\rangle$ et $|e, p+\hbar k_L\rangle$ obtenus à la sortie de la lame séparatrice soient ensuite transformés de manière à pouvoir donner un même état atomique final. Des interférences entre les 2 chemins commençant respectivement par les états $|g, p\rangle$ et $|e, p+\hbar k_L\rangle$ peuvent alors apparaître.

Jusqu'ici nous avons traité le champ laser (dans la lame séparatrice) comme un champ extérieur. Que se passe-t-il si l'on traite ce champ comme un système dynamique, susceptible d'évoluer lors de l'interaction avec l'atome ? Pourrait-on utiliser les variations de l'état du champ pour savoir dans quel chemin l'atome s'engage ?

- Supposons par exemple que l'état initial du champ laser soit un état de Fock $|n\rangle$, avec un nombre bien défini n de photons laser. Avant traversée de la lame par l'atome, l'état du système global atome + photons laser est l'état $|g, p; n\rangle$. Les 2 états possibles après traversée de la lame sont alors $|g, p; n\rangle$ et $|e, p+\hbar k_L; n-1\rangle$, puisqu'un photon laser est nécessairement absorbé par l'atome pour passer de g à e .



En mesurant le nombre final, n ou $n-1$, de photons laser, on pourrait donc savoir dans quel chemin le système s'est engagé. Mais les 2 chemins correspondent alors à des états finals orthogonaux du champ, et les 2 amplitudes de transition associées ne peuvent plus interférer.

- En fait, le champ laser est dans un état initial qui est beaucoup plus voisin d'un état cohérent $|\alpha\rangle$ que d'un état de Fock $|n\rangle$. Rappelons que

$$\text{ou } |\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \quad (1.1)$$

$$|\alpha|^2 = \langle n \rangle \quad (1.2)$$

est en général très grand devant 1. On a également

$$\alpha(t) = \sqrt{\langle n \rangle} e^{-i(\omega_L t + \varphi)} \quad (1.3)$$

où φ est la phase du champ laser moyen. Comme la dispersion des valeurs de n autour de $\langle n \rangle$ est de l'ordre de $\sqrt{\langle n \rangle} \gg 1$, la variation de n de -1 quand l'atome passe de g à e modifie très peu l'état du champ. On peut montrer (voir Appendice) que les 2 états finals du champ correspondant à l'atome dans l'état $|g, p\rangle$ ou $|e, p + \hbar k_L\rangle$ sont très voisins l'un de l'autre et ne diffèrent que par un facteur de phase. Les 2 amplitudes de transition correspondantes peuvent donc interférer puisque les états finals du champ ne sont pas orthogonaux, mais il n'est plus possible alors, par observation ultérieure de l'état du champ, de déterminer le chemin suivi.

Référence générale récente sur l'interférométrie atomique

Special issue of Applied Physics B : Optics and Interferometry with Atoms - Volume B54, May 1992, J. Mlynek, V. Balcykin and P. Meystre eds.

Appendice

- Effet de l'interaction atome-laser si l'état initial du champ est $|n\rangle$

$$|g, p; n\rangle \rightarrow \lambda |g, p; n\rangle + \mu |e, p + \hbar k_L; n-1\rangle \quad (1.4)$$

λ et μ : fonctions lentement variables de n .

- Etat initial du champ : état cohérent $|\alpha\rangle$. On suppose que l'interaction dure un intervalle de temps très court 2ε autour de t_0

$$|\psi(t_0 - \varepsilon)\rangle = |g, p\rangle \otimes |\alpha(t_0)\rangle = |g, p\rangle \otimes e^{-\langle n \rangle / 2} \sum_n \frac{(\alpha(t_0))^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \quad (1.5)$$

Après interaction, on a, compte tenu de (1.4)

$$|\psi(t_0 + \varepsilon)\rangle = \lambda |g, p\rangle \otimes |\alpha(t_0)\rangle + \mu |e, p + \hbar k_L\rangle \otimes |\varphi_L(t_0)\rangle \quad (1.6)$$

où l'état final du champ $|\varphi_L(t_0)\rangle$ s'écrit

$$|\varphi_L(t_0)\rangle = e^{-\langle n \rangle / 2} \sum_n \frac{(\alpha(t_0))^n}{\sqrt{n!}} |n-1\rangle \quad (1.7)$$

On a négligé les variations de λ et μ avec n quand n varie de $\pm \sqrt{\langle n \rangle}$ autour de $\langle n \rangle$

- Dans (1.7), on peut écrire

$$\sqrt{n!} = \sqrt{(n-1)!} \sqrt{n} \simeq \sqrt{(n-1)!} \sqrt{\langle n \rangle} \quad (1.8)$$

En utilisant (1.3), on obtient alors

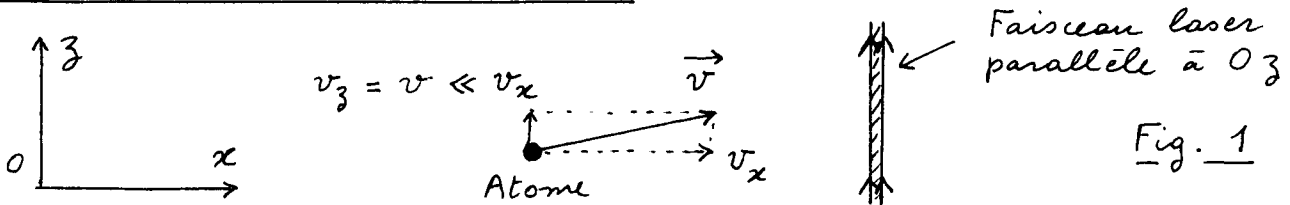
$$|\varphi_L(t_0)\rangle \simeq \frac{\alpha(t_0)}{\sqrt{\langle n \rangle}} e^{-\langle n \rangle / 2} \sum_n \frac{(\alpha(t_0))^{n-1}}{\sqrt{(n-1)!}} |n-1\rangle = e^{-i(\omega_L t_0 + \varphi)} |\alpha(t_0)\rangle \quad (1.9)$$

ce qui montre que les 2 états finals du champ dans (1.6), $|\alpha(t_0)\rangle$ et $|\varphi_L(t_0)\rangle$, diffèrent par le facteur de phase $e^{-i(\omega_L t_0 + \varphi)}$.

Buts de ce cours

- Calculer l'effet sur l'état d'un atome de la traversée d'une onde laser plane progressive (Fig. 2 du cours I). Expression de l'état après traversée en fonction de l'état avant.
 - Généraliser le calcul précédent au cas où l'atome traverse successivement 2 ondes laser progressives séparées par une certaine distance.
 - Montrer que, pour un atome de vitesse donnée v le long des ondes laser, des franges de Ramsey apparaissent sur les signaux atomiques avec une largeur inversement proportionnelle au temps séparant les 2 traversées successives.
 - Montrer que la moyenne sur v fait disparaître les franges de Ramsey et passer en revue quelques méthodes utilisant des ondes stationnaires ou des réseaux de fentes pour faire réapparaître ces franges.
- Les méthodes utilisant 2 paires d'ondes progressives se propageant en sens opposés et le lien entre les méthodes de spectroscopie à haute résolution sans effet Doppler et l'interférométrie atomique seront abordés dans le cours suivant.

① Modèle choisi - Notations



Atome

- Appartient à un jet de direction moyenne parallèle à Ox
- Degrés de liberté internes

• b $\xrightarrow{E_b = \hbar \omega_A}$ $\omega_A =$ Fréquence atomique
 a $\xleftarrow{E_a = 0}$ $E_b - E_a = \hbar \omega_A$ (2.1)

• Opérateur moment dipolaire électrique \vec{D}
 $\vec{D} = \underbrace{\vec{D} |b\rangle\langle a|}_{\vec{D}^+} + \underbrace{\vec{D} |a\rangle\langle b|}_{\vec{D}^-}$ (2.2)

$\vec{D} = \langle b | \vec{D} | a \rangle = \langle a | \vec{D} | b \rangle$, supposé réel (2.3)

- On néglige toute émission spontanée pendant le temps de traversée de l'onde laser par l'atome

- Degrés de liberté externes : Atome de masse M

Etat de l'atome : mélange statistique d'états $|\vec{p}\rangle$ avec

$\vec{p} = M \vec{v}$ $v_z = v \ll v_x$ (2.4)

Jet atomique avec une bonne collimation autour de Ox .

- Hamiltonien atomique H_A \vec{P} : Opérateur impulsion du centre de masse.

$H_A = \hbar \omega_A |b\rangle\langle b| + \vec{P}^2 / 2M$ (2.5)

Onde laser progressive - Direction moyenne parallèle à Oz

- Le jet atomique traverse l'onde laser au voisinage du plan focal. On néglige la courbure des surfaces d'onde qui sont assimilées à des plans perpendiculaires à Oz .

Le champ laser "vu" par l'atome peut donc s'écrire

$$\vec{E}_L(x, z, t) = \underbrace{\frac{1}{2} \vec{E} E_0(x) e^{i(k_L z - \omega_L t - \varphi)}}_{\vec{E}_L^+(x, z, t)} + \underbrace{c.c.}_{\vec{E}_L^-(x, z, t)} \quad (2.6)$$

\vec{E} : polarisation, ω_L : fréquence, k_L : vecteur d'onde, φ : phase

$E_0(x)$: amplitude, réelle, dépendant de x sur une distance de l'ordre du rayon focal.

Interaction atome - laser

- Hamiltonien d'interaction V_{AL} (Approximation du "champ tournant")

$$V_{AL} = - \vec{d}^+ \cdot \vec{E}_L^+(\vec{R}, t) - \vec{d}^- \cdot \vec{E}_L^-(\vec{R}, t) \quad (2.7)$$

\vec{R} : Opérateur position du centre de masse. En utilisant (2.2), (2.3) et (2.6), on obtient

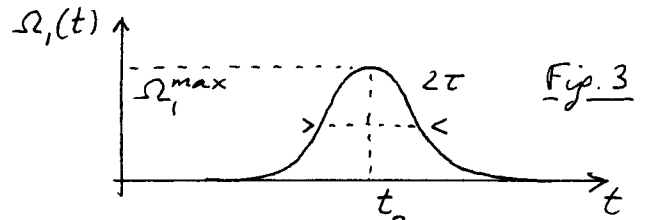
$$V_{AL} = \frac{\hbar \Omega_1(x)}{2} [|b\rangle \langle a| e^{i(k_L Z - \omega_L t - \varphi)} + |a\rangle \langle b| e^{-i(k_L Z - \omega_L t - \varphi)}] \quad (2.8)$$

où $\hbar \Omega_1(x) = - \vec{E} \cdot \vec{d} E_0(x)$ (2.9)

est une "fréquence de Rabi".

- Approximation: On néglige l'effet de V_{AL} sur le mouvement le long de Ox et on traite ce mouvement classiquement, remplaçant dans (2.8) et (2.9) l'opérateur X par la grandeur classique $x = v_x t$. Par contre, le mouvement le long de Oz est traité quantiquement (Z reste un opérateur).

$\Omega_1(x = v_x t)$ apparaît alors comme une fonction de t , $\Omega_1(t)$, représentée sur la Figure 3



t_0 : Instant où l'atome arrive au centre de l'onde laser

2τ : temps de traversée de l'onde laser

② Effet sur l'atome de la traversée de l'onde laser

Equation de Schrödinger

- Etats de base de l'atome

Partons de l'état $|a, p\rangle$: atome dans l'état a , avec une impulsion le long de Oz égale à $p_3 = M v_3 = p$. Comme l'opérateur $e^{i k_L Z}$ (ou $e^{-i k_L Z}$) figurant dans (2.8) est un opérateur de translation de l'impulsion

$$e^{\pm i k_L Z} |p\rangle = |p \pm \hbar k_L\rangle, \quad (2.10)$$

V_{AL} ne couple $|a, p\rangle$ qu'à $|b, p + \hbar k_L\rangle$, et réciproquement.

Nous écrivons donc l'état de l'atome à l'instant t sous la forme

$$|\psi(t)\rangle = c_a(t) |a, p\rangle + c_b(t) |b, p + \hbar k_L\rangle \quad (2.11)$$

- Représentation d'interaction par rapport à H_A

$$\{ H_A |a, p\rangle = \hbar \omega_{a,p} |a, p\rangle = \frac{p^2}{2M} |a, p\rangle \quad (2.12.a)$$

$$\{ H_A |b, p+\hbar k_L\rangle = \hbar \omega_{b,p+\hbar k_L} |b, p+\hbar k_L\rangle = \left(\hbar \omega_A + \frac{(p+\hbar k_L)^2}{2M} \right) |b, p+\hbar k_L\rangle \quad (2.12.b)$$

Réécrivons (2.11) sous la forme

$$|\Psi(t)\rangle = \gamma_a(t) e^{-i\omega_{a,p}t} |a, p\rangle + \gamma_b(t) e^{-i\omega_{b,p+\hbar k_L}t} |b, p+\hbar k_L\rangle \quad (2.13)$$

et portons (2.13) dans l'équation de Schrödinger

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\Psi(t)\rangle = (H_A + V_{AL}) |\Psi(t)\rangle \quad (2.14)$$

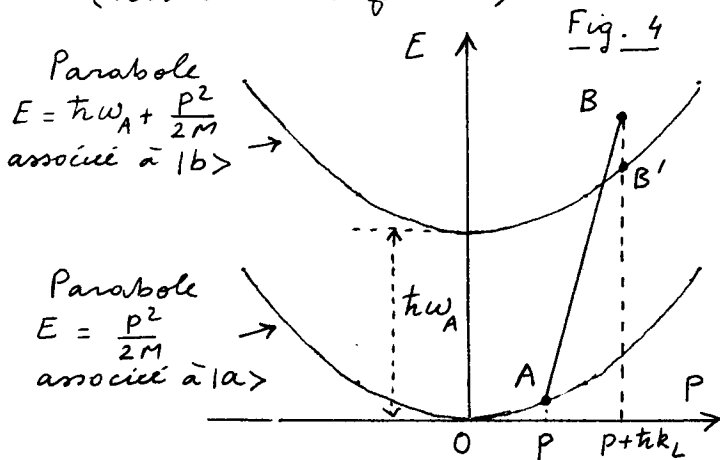
On obtient pour γ_a et γ_b les équations

$$\begin{cases} \dot{\gamma}_a(t) = -i \frac{\Omega_L(t)}{2} e^{i(\Delta t + \varphi)} \gamma_b(t) \end{cases} \quad (2.15.a)$$

$$\begin{cases} \dot{\gamma}_b(t) = -i \frac{\Omega_L(t)}{2} e^{-i(\Delta t + \varphi)} \gamma_a(t) \end{cases} \quad (2.15.b)$$

où
$$\Delta = \omega_{a,p} + \omega_L - \omega_{b,p+\hbar k_L} \quad (2.16)$$

- Interprétation de Δ à partir des états d'impulsion-énergie (voir aussi Refs. 1-4)



• Etat initial A : $P_A = p, E_A = \frac{p^2}{2M}$

• AB droite de pente c , partant de A et telle que

$$P_B - P_A = \hbar k_L$$

$$E_B - E_A = \hbar c k_L = \hbar \omega_L$$

• B n'est en général pas sur la parabole associée à b . Soit B' le point de cette parabole ayant même abscisse que B

$$\hbar \Delta = E_B - E_{B'}$$

$\hbar \Delta$ est donc le désaccord entre l'énergie de l'état $|a, p\rangle$ augmentée de $\hbar \omega_L$, et l'énergie de l'état $|b, p+\hbar k_L\rangle$ auquel $|a, p\rangle$ est couplé par V_{AL} .

En utilisant (2.12.a) et (2.12.b), on obtient

$$\Delta = \delta - \omega_D - \omega_R \quad (2.17)$$

avec

$$\delta = \omega_L - \omega_A \quad (2.18.a)$$

$$\omega_D = \frac{k_L p}{M} = k_L v \quad (2.18.b)$$

$$\omega_R = \frac{\hbar k_L^2}{2M} \quad (2.18.c)$$

δ est le désaccord entre la fréquence laser et la fréquence atomique. ω_D et ω_R sont les déplacements de fréquence respectivement associés à l'effet Doppler et à l'énergie de recul.

- Obtention d'équations indépendantes de la phase φ de l'onde laser et de l'instant t_0 de traversée.

Dans les équations (2.15), φ apparaît et Ω_L dépend de $t-t_0$. (voir Fig. 3). Posons

$$\begin{cases} \tilde{\gamma}_a(t) = \gamma_a(t) \end{cases} \quad (2.19.a)$$

$$\begin{cases} \tilde{\gamma}_b(t) = \gamma_b(t) e^{i(\Delta t_0 + \varphi)} \end{cases} \quad (2.19.b)$$

On obtient

$$\frac{d}{dt} \tilde{\gamma}_a(t) = -i \frac{\Omega_1(t)}{2} e^{i\Delta(t-t_0)} \tilde{\gamma}_b(t) \quad (2.20.a)$$

$$\frac{d}{dt} \tilde{\gamma}_b(t) = -i \frac{\Omega_1(t)}{2} e^{-i\Delta(t-t_0)} \tilde{\gamma}_a(t) \quad (2.20.b)$$

Dans les équations (2.20), φ n'apparaît plus et Ω_1 ne dépend que de $t-t_0$ (voir Fig. 3), comme les exponentielles $e^{\pm i\Delta(t-t_0)}$. La solution de ces équations ne dépend donc que de $t-t_0$.

Solution de l'équation de Schrödinger

- Pour $|t-t_0| \gg \tau$, où τ est la durée de traversée (voir Fig. 3), $\tilde{\gamma}_a(t)$ et $\tilde{\gamma}_b(t)$ ne varient plus avec t puisque $\Omega_1(t)$ est alors nul
- Soient t_+ et t_- des instants suffisamment loins dans le futur et le passé de t_0 .

$$t_+ - t_0 \gg \tau \quad t_0 - t_- \gg \tau \quad (2.21)$$

Le passage de $\{\tilde{\gamma}_a(t_-), \tilde{\gamma}_b(t_-)\}$ à $\{\tilde{\gamma}_a(t_+), \tilde{\gamma}_b(t_+)\}$ est réalisé par une matrice S (éléments de matrice de l'opérateur d'évolution $U(t_+, t_-)$, qui ne dépendent plus de t_+ et t_- si les conditions (2.21) sont remplies).

$$\begin{cases} \tilde{\gamma}_a(t_+) = S_{aa} \tilde{\gamma}_a(t_-) + S_{ab} \tilde{\gamma}_b(t_-) \\ \tilde{\gamma}_b(t_+) = S_{ba} \tilde{\gamma}_a(t_-) + S_{bb} \tilde{\gamma}_b(t_-) \end{cases} \quad (2.22)$$

La matrice S
$$(S) = \begin{pmatrix} S_{aa} & S_{ab} \\ S_{ba} & S_{bb} \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

est unitaire
$$S S^\dagger = S^\dagger S = \mathbb{1} \quad (2.24)$$

si les processus dissipatifs (émission spontanée, collisions...) ont un effet négligeable entre t_- et t_+ .

- Solution perturbative : $\Omega_1^{\max} \tau \ll 1$

Supposons que le système soit initialement dans l'état $|a, p\rangle$: $\tilde{\gamma}_a(t_-) = 1, \tilde{\gamma}_b(t_-) = 0$. Pour avoir $\tilde{\gamma}_b(t_+)$ à l'ordre 1 en Ω_1 , on peut remplacer $\tilde{\gamma}_a(t)$ par 1 dans (2.20.b), ce qui donne

$$\tilde{\gamma}_b(t_+) \approx \int_{t_-}^{t_+} dt \frac{-i\Omega_1(t)}{2} e^{-i\Delta(t-t_0)} \approx -\frac{i}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \Omega_1(t) e^{-i\Delta t} dt \quad (2.25)$$

L'amplitude de transition de $|a, p\rangle$ vers $|b, p+\hbar k_L\rangle$ est proportionnelle à la transformée de Fourier de $\Omega_1(t)$ à la fréquence Δ .

- Cas limite $\Delta\tau \ll 1$. On peut alors remplacer $e^{\pm i\Delta(t-t_0)}$ par 1 dans les équations (2.20) qui peuvent ensuite s'intégrer aisément (les fonctions propres du système différentiel sont $\tilde{\gamma}_a(t) \pm \tilde{\gamma}_b(t)$).

On obtient
$$\begin{pmatrix} S_{aa} & S_{ab} \\ S_{ba} & S_{bb} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & -i \sin \frac{\theta}{2} \\ -i \sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \quad (2.26)$$

où
$$\theta = \int_{-\infty}^{+\infty} \Omega_1(t) dt \quad (2.27)$$

Par exemple si $\theta = \pi/2$, le passage de la lame est équivalent à celui d'une impulsion $\pi/2$: si l'atome entre dans l'état $|a, p\rangle$, il sort dans l'état $\frac{1}{\sqrt{2}} |a, p\rangle - \frac{i}{\sqrt{2}} |b, p+\hbar k_L\rangle$

Retour à $c_a(t)$ et $c_b(t)$

A partir de (2.11), (2.13) et (2.19), on peut exprimer $c_a(t)$ et $c_b(t)$ en fonction de $\tilde{\gamma}_a(t)$ et $\tilde{\gamma}_b(t)$

$$\begin{cases} c_a(t) = \tilde{\gamma}_a(t) e^{-i\omega_{a,p}t} & (2.28.a) \\ c_b(t) = \tilde{\gamma}_b(t) e^{-i\omega_{a,p}t_0} e^{-i(\omega_L t_0 + \varphi)} e^{-i\omega_{b,p+\hbar k_L}(t-t_0)} & (2.28.b) \end{cases}$$

En utilisant les équations (2.22), on peut alors exprimer $c_a(t_+)$ et $c_b(t_+)$ en fonction de $c_a(t_-)$ et $c_b(t_-)$. On obtient ainsi

$$\begin{aligned} c_a(t_+) &= S_{aa} e^{-i\omega_{a,p}(t_+-t_-)} c_a(t_-) \\ &+ S_{ab} e^{-i\omega_{a,p}(t_+-t_0)} e^{i(\omega_L t_0 + \varphi)} e^{-i\omega_{b,p+\hbar k_L}(t_0-t_-)} \end{aligned} \quad (2.29)$$

qu'on peut réécrire sous la forme

$$\begin{aligned} c_a(t_+) &= [e^{-i\omega_{a,p}(t_+-t_0)}] [S_{aa}] [e^{-i\omega_{a,p}(t_0-t_-)}] c_a(t_-) \\ &+ [e^{-i\omega_{a,p}(t_+-t_0)}] [S_{ab} e^{i(\omega_L t_0 + \varphi)}] [e^{-i\omega_{b,p+\hbar k_L}(t_0-t_-)}] c_b(t_-) \end{aligned} \quad (2.30)$$

On trouve de même

$$\begin{aligned} c_b(t_+) &= [e^{-i\omega_{b,p+\hbar k_L}(t_+-t_0)}] [S_{ba} e^{-i(\omega_L t_0 + \varphi)}] [e^{-i\omega_{a,p}(t_0-t_-)}] c_a(t_-) \\ &+ [e^{-i\omega_{b,p+\hbar k_L}(t_+-t_0)}] [S_{bb}] [e^{-i\omega_{b,p+\hbar k_L}(t_0-t_-)}] c_b(t_-) \end{aligned} \quad (2.31)$$

- On en déduit la règle de calcul suivante pour exprimer l'état sortant à t_+ en fonction de l'état entrant à t_-

- On part de $c_a(t_-)$ et $c_b(t_-)$
- On laisse évoluer librement le système de t_- à t_0 , ce qui fait apparaître des exponentielles d'évolution libre
 - $e^{-i\omega_{a,p}(t_0-t_-)}$ pour $|a, p\rangle$
 - $e^{-i\omega_{b,p+\hbar k_L}(t_0-t_-)}$ pour $|b, p+\hbar k_L\rangle$
- On multiplie l'amplitude
 - par S_{aa} (ou S_{bb}) pour une traversée de la lame sans changement d'état dans l'état $|a, p\rangle$ (ou $|b, p+\hbar k_L\rangle$)
 - par $S_{ab} e^{i(\omega_L t_0 + \varphi)}$ pour une traversée de la lame avec changement de $|b, p+\hbar k_L\rangle$ vers $|a, p\rangle$ (et émission d'un photon)
 - par $S_{ba} e^{-i(\omega_L t_0 + \varphi)}$ pour une traversée de la lame avec changement de $|a, p\rangle$ vers $|b, p+\hbar k_L\rangle$ (et absorption d'un photon)
- On laisse évoluer librement le système de t_0 à t_+ , ce qui fait apparaître des exponentielles d'évolution libre
 - $e^{-i\omega_{a,p}(t_+-t_0)}$ pour $|a, p\rangle$
 - $e^{-i\omega_{b,p+\hbar k_L}(t_+-t_0)}$ pour $|b, p+\hbar k_L\rangle$

Notons qu'une telle règle ne permettrait pas de calculer $c_a(t)$ et $c_b(t)$ au voisinage de t_0 , où l'évolution du système n'est certainement pas libre. La règle précédente n'est qu'une représentation commode des équations exactes (2.30) et (2.31) reliant l'état entrant à l'état sortant.

③ Effet sur l'atome de la traversée successive de 2 lames II-6

Problème étudié

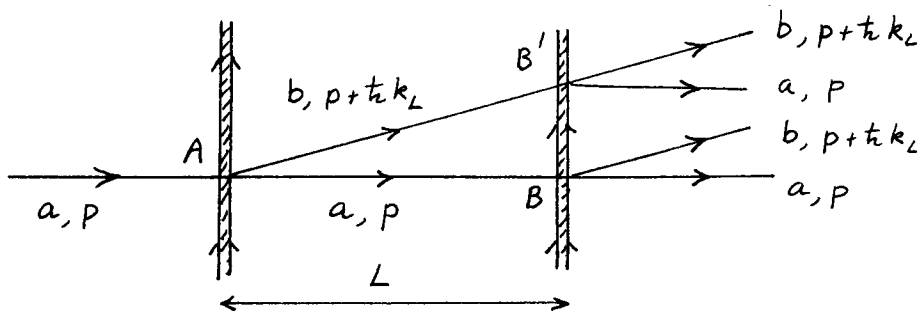


Fig. 5

- L'atome traverse successivement 2 ondes progressives parallèles, séparées par une distance L .
 t_1 (t_2) : instant où il arrive au centre de la 1^{ère} onde (2^{ème} onde)
 φ_1, φ_2 phases des 2 ondes

$$T = t_2 - t_1 = \frac{L}{v_x} \quad (2.32)$$
 T : temps de vol d'une onde à l'autre
- L'atome part de l'état $|a, p\rangle$. On veut calculer les probabilités P_b et P_a de le trouver dans $|b, p + \hbar k_L\rangle$ et $|a, p\rangle$ après la traversée des 2 ondes
- On néglige pour simplifier tout processus dissipatif, non seulement pendant la traversée de chaque onde, mais aussi pendant le temps de vol T d'une onde à l'autre. Les matrices $S^{(1)}$ et $S^{(2)}$ décrivant l'effet de la traversée de chaque onde sont donc unitaires.

Calcul des amplitudes de transition

- Soient t_1^- un instant antérieur à t_1 ($t_1 - t_1^- \gg \tau$) et t_2^+ un instant postérieur à t_2 ($t_2^+ - t_2 \gg \tau$). On veut calculer $c_a(t_2^+)$ et $c_b(t_2^+)$ en fonction de $c_a(t_1^-) = 1$, $c_b(t_1^-) = 0$. Pour cela, il suffit d'utiliser la règle de calcul établie à la fin du § 2.
- Calculons par exemple $c_b(t_2^+)$. Il apparaît clairement sur la figure 5 que 2 chemins permettent d'arriver dans l'état $b, p + \hbar k_L$, celui passant par AB, et celui passant par AB'. On obtient alors, en omettant les facteurs de phase communs à chaque chemin (propagation libre dans a, p entre t_1^- et t_1 et dans $b, p + \hbar k_L$ entre t_2 et t_2^+)

Chemin AB

$$c_b(t_2^+) = [S_{ba}^{(2)} e^{-i(\omega_L t_2 + \varphi_2)}] [e^{-i\omega_{a,p}(t_2 - t_1)}] [S_{aa}^{(1)}] \quad (2.33)$$

Chemin AB'

$$c_b(t_2^+) = [S_{bb}^{(2)}] [e^{-i\omega_{b,p+\hbar k_L}(t_2 - t_1)}] [S_{ba}^{(1)} e^{-i(\omega_L t_1 + \varphi_1)}] \quad (2.34)$$

Calcul des probabilités de transition

- On obtient P_b en prenant le carré du module de la somme des amplitudes (2.33) et (2.34)

$$P_b = \left| S_{ba}^{(2)} S_{aa}^{(1)} + S_{bb}^{(2)} S_{ba}^{(1)} e^{i\Delta(t_2-t_1)} e^{i(\varphi_2-\varphi_1)} \right|^2 \quad (2.35)$$

où Δ est donné en (2.16)

- Dans l'équation (2.35) apparaissent des termes carrés

$$|S_{ba}^{(2)}|^2 |S_{aa}^{(1)}|^2 + |S_{bb}^{(2)}|^2 |S_{ba}^{(1)}|^2 \quad (2.36)$$

et des termes d'interférence

$$S_{aa}^{(1)*} S_{ba}^{(1)} S_{ba}^{(2)*} S_{bb}^{(2)} e^{i\Delta(t_2-t_1)} e^{i(\varphi_2-\varphi_1)} + c.c. \quad (2.37)$$

- Un calcul analogue peut être fait pour P_a . On peut vérifier que l'unitarité de $S^{(1)}$ et $S^{(2)}$ entraîne que

$$P_a = 1 - P_b \quad (2.38)$$

④ Franges de Ramsey à 2 ondes

Variations de P_b avec la fréquence ω_L des ondes laser

- D'après (2.17) et (2.18.a), faire varier ω_L revient à faire varier Δ .
- les termes carrés (2.36) et le coefficient de l'exponentielle dans (2.37) varient lentement avec ω_L , sur un intervalle de l'ordre de l'inverse $1/T$ du temps de traversée de chaque onde. Pour le voir, il suffit de se reporter à (2.25), qui exprime que $S_{ba}^{(1)}$ est, à faible intensité, la transformée de Fourier de la courbe de la figure 3, de largeur de l'ordre de T . (A plus forte intensité, doit apparaître un élargissement radiatif de S_{ba})
- l'exponentielle de (2.37) fait apparaître des oscillations de fréquence $(t_2-t_1) = T$, donc de période $2\pi/T$ en ω_L beaucoup plus petite que la largeur (en $1/T$) du facteur multiplicatif. La figure 6 donne l'allure des variations de P_b avec ω_L qui font apparaître des franges d'interférence (Franges de Ramsey) superposées à un fond beaucoup plus large de diffraction

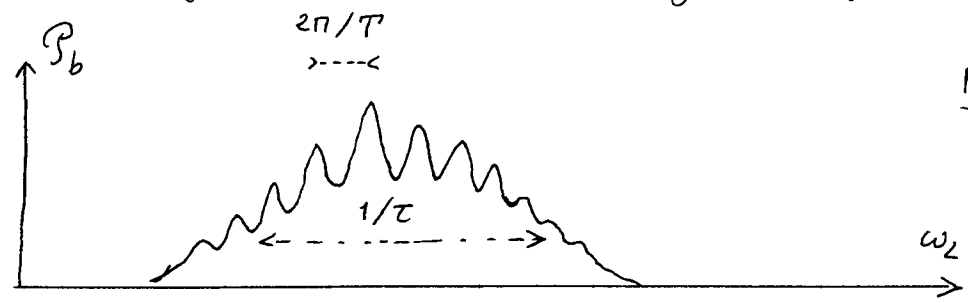


Fig. 6

Moyenne sur les vitesses atomiques

- L'état initial externe de l'atome est un mélange statistique d'états $|\vec{p}\rangle$. Il faut donc moyenner l'expression (2.35) de P_b sur les vitesses. Moyennons sur $v_z = v$, v_x étant fixé. Compte tenu de (2.17) et (2.18), l'exponentielle de (2.35) et (2.37) s'écrit :

$$e^{i\Delta(t_2-t_1)} = e^{i(\omega_L - \omega_A - \omega_R)(t_2-t_1)} e^{-ik_L v(t_2-t_1)} \quad (2.39)$$

- Soit δv la dispersion des valeurs de v autour de $\bar{v} = 0$.
 La moyenne de $e^{-ik_L v(t_2-t_1)} = e^{-ik_L v T}$ sera nulle si

$$k_L \delta v T \gg 1 \quad (2.40)$$

c'est à dire encore si

$$\delta v T \gg \lambda_L \quad (2.41)$$

où λ_L est la longueur d'onde du laser. Compte tenu de (2.32), on peut encore dire que les franges de Ramsey ne se brouilleront pas par moyenne sur v , seulement si

$$\frac{\delta v}{v_x} \ll \frac{\lambda_L}{L} \quad (2.42)$$

c'est à dire si la collimation du jet atomique autour de Ox est meilleure que λ_L/L .

Prenons par exemple $\lambda_L = 1 \mu m$, $L = 1 cm$. Il faut une collimation meilleure que 10^{-4} , ce qui montre la difficulté d'observer des franges de Ramsey en optique.

Description usuelle semiclassique

- Dans les descriptions usuelles semiclassiques, on ne tient pas compte des changements de $v_z = v$ après traversée de chaque onde

- Considérons donc des atomes volant en ligne droite d'une onde à l'autre. La 1^{ère} traversée met en mouvement le dipôle atomique, qui oscille librement entre les 2 ondes, puis interagit avec la 2^{ème} onde cohérente avec la 1^{ère}.

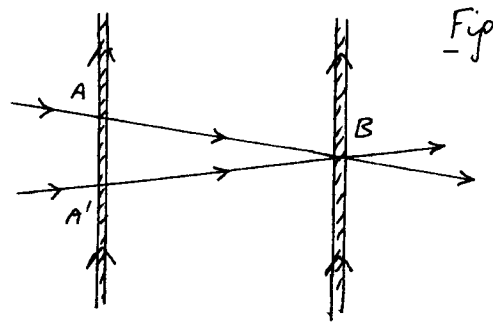


Fig. 7

Le déphasage entre les 2 perturbations "vues" par l'atome dépend des points de traversée. Considérons 2 atomes arrivant à un même point B de la 2^{ème} onde et traversant la 1^{ère} onde en 2 points différents A et A' séparés par une distance non négligeable devant λ (Fig. 7)

Ces 2 atomes vont donner des franges de Ramsey décalées de plus d'une interfrange, ce qui montre que les franges de Ramsey vont se brouiller.

Cas de 2 ondes laser stationnaires

- Dans une onde laser stationnaire, la phase est la même partout, mais le champ change de signe tous les $\lambda_L/2$ (Fig. 8)

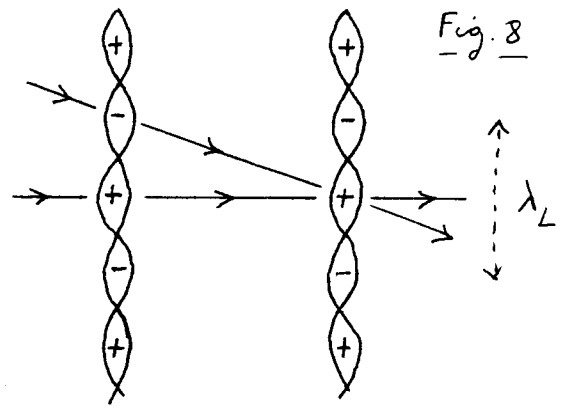


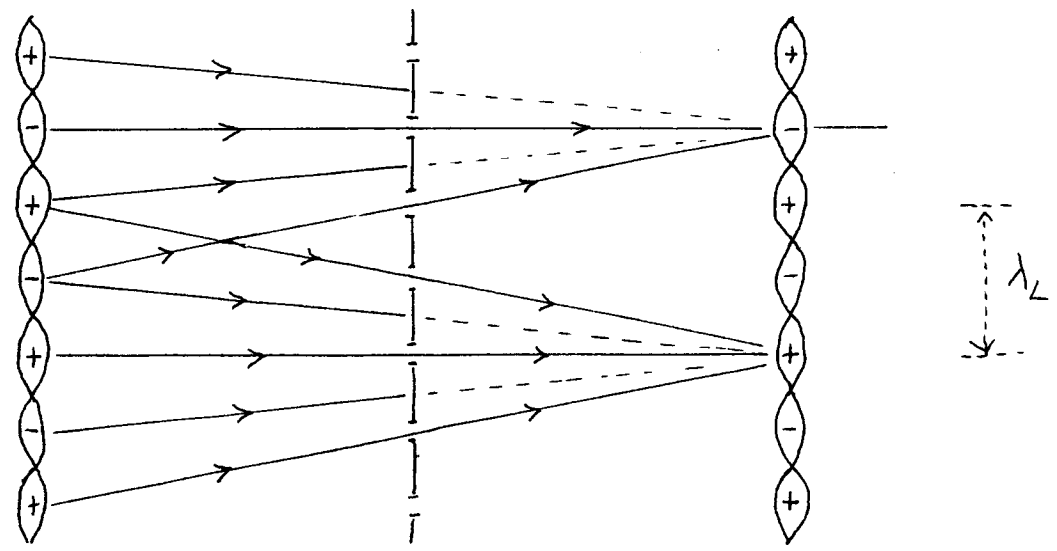
Fig. 8

- Deux trajectoires atomiques traversant la 2^{ème} onde en un ventre + et ayant traversé la 1^{ère} onde en un ventre + ou - vont avoir de déphasages différents (de π). Les franges de Ramsey correspondantes seront en opposition de phase et se brouilleront donc.

Première méthode possible pour faire réapparaître les franges de Ramsey avec 2 ondes laser stationnaires (Ref. 5)

- Il faut privilégier les trajectoires traversant les 2 ondes stationnaires en 2 ventres de même signe par rapport à celle traversant les 2 ondes en 2 ventres de signes opposés
- On peut pour cela interposer entre les ondes, à mi-chemin entre les 2 ondes, un réseau de fentes de périodicité spatiale $\lambda_L/2$ (Fig. 9). On voit sur la figure 9 qu'on peut ainsi bloquer les trajectoires $- \rightarrow +$ ou $+ \rightarrow -$ et laisser passer les trajectoires $+ \rightarrow +$ ou $- \rightarrow -$

Fig. 9



Une telle méthode a été mise en œuvre avec succès sur la transition à $3,39 \mu\text{m}$ du méthane (Ref. 5)

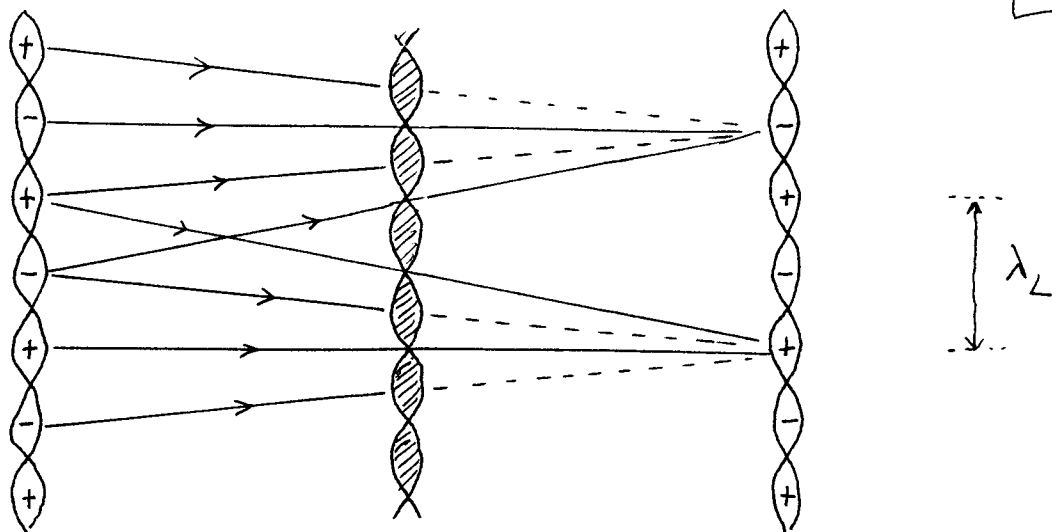
- On peut se convaincre aisément que la même méthode demeure valable si l'on remplace les 2 ondes stationnaires de la figure 9 par 2 ondes progressives se propageant en sens opposés. Les trajectoires passant par les fentes relient alors des points qui ont la même phase sur les 2 ondes.

Autre méthode possible (Ref. 6)

- En fait, la méthode précédente n'a pas été la première à être proposée et utilisée pour faire réapparaître les franges de Ramsey à 2 ondes stationnaires. La première méthode proposée utilise une 3^{ème} onde laser stationnaire intense, située à égale distance des 2 autres (à la place de l'écran percé de fentes de la figure 9) - Voir Ref. 6

Les atomes passant par les noeuds de cette 3^{ème} onde stationnaire ne "voient" pas la perturbation associée à cette onde. Par contre, ceux qui passent à un ventre sont "saturés" et leur moment dipolaire électrique est réduit. Les noeuds et les ventres de cette 3^{ème} onde stationnaire jouent donc le rôle des fentes et des parties pleines du réseau de la figure 9 (voir Fig. 10)

Fig. 10



Notons que la perturbation associée aux effets non linéaires dus à la 3^{ème} onde stationnaire dépend de l'intensité de cette onde et a donc une période spatiale égale à $\lambda_L/2$ comme le réseau de fentes de la figure 9.

- Une telle méthode a permis d'observer expérimentalement des franges de Ramsey à 2 ondes stationnaires sur plusieurs atomes (voir, par exemple, Ref. 7). Là encore, la méthode demeure valable si l'on remplace la 1^{ère} et la 3^{ème} onde stationnaire de la figure 10 par 2 ondes progressives se propageant dans des sens opposés.

Références

- 1 - C. Salomon, Thèse Paris XIII, 1984, Chap. 1
- 2 - C. J. Bordé, C. Salomon, S. Avrillier, A. Van Lerberghe, C. Briant, D. Barri, S. Scoles, Phys. Rev. A30, 1836 (1984)
- 3 - C. Bordé, Advances in Laser Spectroscopy, ed. by F.T. Arecchi, F. Strumia, H. Walther (Plenum, 1983), p. 1
- 4 - C. Bordé, Revue du Cethedec, Ondes et Signal NS83-1 (1983)
- 5 - G. Kramer, J.O.S.A. 68, 1634 (1978)
- 6 - Y.V. Baklanov, B.Y. Dubetsky, V.P. Chebotayev Appl. Phys. 9, 171 (1976)
- 7 - J.C. Bergquist, S.A. Lee, J.L. Hall, Phys. Rev. Lett. 38, 159 (1977)

Remarque

Dans un cours ultérieur, nous généraliserons les calculs de ce cours (relatifs à la traversée d'une onde progressive) à des situations où 2 ondes laser de directions opposées induisent des transitions Raman stimulées sélectives en vitesse entre 2 sous-niveaux fondamentaux g_1 et g_2 de très longue durée de vie. La traversée de la lame place alors l'atome dans une superposition linéaire de g_1 et g_2 avec des impulsions différentes (généralisation de (2.11)).

Buts de cours

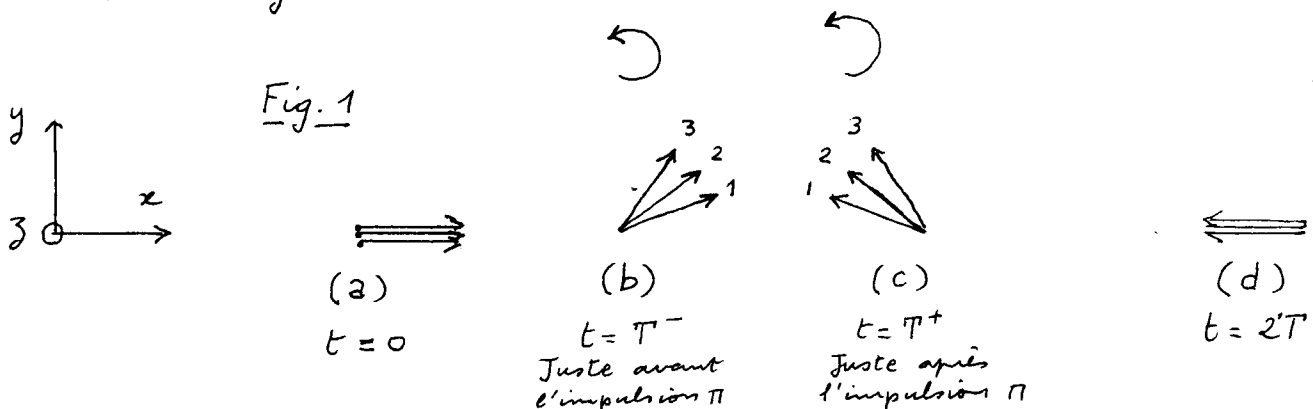
- Passer en revue un certain nombre d'expériences où un atome traverse successivement plusieurs ondes laser progressives et où le signal intéressant ne s'annule pas après moyenne sur les vitesses atomiques.
- Montrer que chacune de ces expériences peut être interprétée comme une expérience d'interférométrie atomique dans laquelle un paquet d'ondes atomique incident est séparé en 2 paquets d'ondes cohérents, ces 2 paquets d'ondes étant ensuite recombinés. Il existe donc un lien intéressant entre certaines expériences de spectroscopie laser à haute résolution sans effet Doppler et l'interférométrie atomique.

① Echos de photons à 2 ondes progressives.

a. Etude qualitative

- Rappel du principe des échos de photons en RMN (Réf. 1)

Des spins, placés dans un champ magnétique inhomogène ont des fréquences de Larmor autour de Oz variant d'un spin à l'autre. A $t=0$, ils pointent tous le long de la direction positive de Oz . Une impulsion $\pi/2$ très brève de radiofréquence les bascule tous le long de Ox (Fig. 1a). Les spins précessent alors librement autour de Oz , les plus rapides prenant une certaine avance sur les plus lents (Fig. 1b). A l'instant $t=T$, on applique une impulsion π très brève de radiofréquence autour de Oy , ce qui revient à placer chaque spin dans l'état symétrique par rapport à Oy (Fig. 1c). Les spins continuent alors à précesser dans le même sens autour de Oz , mais l'effet de l'impulsion π a été de replacer les plus rapides après les plus lents (comparer les figures 1.b et 1.c). Les plus rapides vont donc rattraper les plus lents, et à l'instant $t=2T$, les spins vont tous se retrouver en phase (Fig. 1d).



- Traversée de 2 ondes laser progressives parallèles produisant des impulsions $\pi/2$ et π . (Pour les échos de photons optiques, voir Réfs 2 et 3)
 - Revenons aux expériences discutées dans le cours II. Un atome

traverse 2 ondes laser progressives parallèles, la 1^{ère} produisant une impulsion $\pi/2$, la 2^{ème} une impulsion π (Fig. 2)

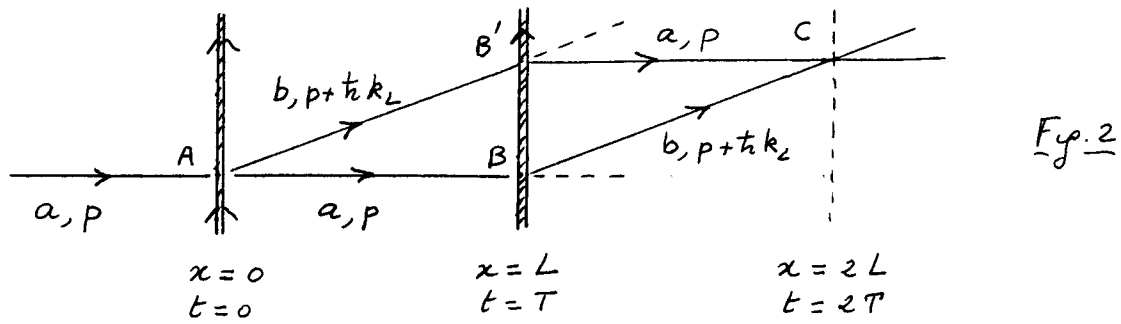


Fig. 2

Comme sur la figure 5 du cours II, l'atome arrive dans l'état $|a, p\rangle$. L'impulsion $\pi/2$ associée à la traversée de la 1^{ère} onde laser en $x=0$ (et $t=0$), transforme son état en une superposition linéaire de $|a, p\rangle$ et $|b, p + \hbar k_L\rangle$ avec des coefficients de même module ($1/\sqrt{2}$). 2 chemins différents AB et AB' peuvent alors être suivis par le système. L'impulsion π associée à la traversée de la 2^{ème} onde laser transforme l'état $|a, p\rangle$ du chemin AB en $|b, p + \hbar k_L\rangle$, et l'état $|b, p + \hbar k_L\rangle$ du chemin AB' en $|a, p\rangle$

- Sur la figure 2, les segments de droite AB, AB', BC, B'C... sont des représentations diagrammatiques des vecteurs d'onde associés aux ondes de de Broglie planes de l'atome. Ce ne sont donc pas des trajectoires classiques. Plus loin, dans le § 3, nous reviendrons sur la possibilité d'associer à ces segments de droite des trajectoires suivies par le centre d'un paquet d'ondes atomique.

Il apparaît clairement sur la figure 2 que les segments de droite représentant les états possibles du système après traversée de la 2^{ème} onde se recoupent en un point C, d'abscisse $x=2L$ et correspondant donc à un temps $t=2T$. Est-il possible d'associer à ce point d'intersection C un phénomène d'écho analogue à celui de la figure 1 ?

- Avant d'associer au point C un phénomène de recombinaison entre 2 paquets d'ondes cohérents obtenus après traversée de la 1^{ère} lame (voir § 3), nous allons étudier ici le déphasage dû à l'évolution libre le long du chemin ABC et le long du chemin AB'C et montrer que les termes dépendant de $v = p/M$ se compensent pour $t=2T$

Considérons donc un instant $t > T$ postérieur à l'instant de traversée de la 2^{ème} lame, et calculons les exponentielles d'évolution libre le long des 2 chemins entre $t=0$ et t .

Chemin ABC : $e^{-i\omega_{a,p}T} e^{-i\omega_{b,p+\hbar k_L}(t-T)}$ (3.1.a)

Chemin AB'C : $e^{-i\omega_{b,p+\hbar k_L}T} e^{-i\omega_{a,p}(t-T)}$ (3.1.b)

En utilisant les expressions (2.12.a) et (2.12.b) de $\omega_{a,p}$ et $\omega_{b,p+\hbar k_L}$, on obtient, pour les termes dépendant de $v = p/M$, dans les exponentielles d'évolution libre le long des 2 chemins

Chemin ABC : $e^{-ik_L v (t-T)}$ (3.2.a)

Chemin AB'C : $e^{-ik_L v T}$ (3.2.b)

Le déphasage dû à v entre les 2 amplitudes associées aux 2 chemins ABC et AB'C est donc égal à la différence entre les phases des 2 exponentielles (3.2.a) et (3.2.b)

$$\Phi = -k_L v (t - 2T) \quad (3.3)$$

On voit qu'il s'annule pour $t = 2T$. La moyenne sur les vitesses transverses v des atomes, ne fera donc plus disparaître les effets d'interférence entre les 2 chemins possibles du système, pour $t = 2T$. L'atome accumule un certain déphasage Doppler entre $t=0$ et $t=T$. L'impulsion π change le signe du déphasage Doppler et le nouveau déphasage accumulé entre $t=T$ et $t=2T$ compense le premier.

- Insensibilité au désaccord $\delta = \omega_L - \omega_A$
 Entre $t=0$ et $t=T$, l'état a est associé au chemin inférieur AB, alors que l'état b est associé au chemin supérieur AB'. Les amplitudes des 2 chemins diffèrent donc à l'instant $t=T$ par un facteur de phase $e^{i(\delta - \omega_R)T}$ où δ et ω_R sont donnés en (2.18). Comme les états internes associés aux 2 chemins sont interchangés après l'impulsion π , le nouveau facteur de phase qui apparaît entre $t=T$ et $t=2T$ est $e^{-i(\delta - \omega_R)T}$. Il compense donc le premier, de sorte que le déphasage entre les 2 amplitudes en $t=2T$ ne dépend ni de v , ni du désaccord δ .

b - Comment apparaît le phénomène d'écho

Les 2 segments de droite qui se croisent en C correspondent à des états internes différents. Le phénomène résonnant apparaissant autour de $t=2T$ doit donc se manifester sur le moment dipolaire électrique \vec{d} qui est sensible aux cohérences entre a et b (de même qu'en RMN le phénomène d'écho se manifeste sur l'aimantation transversale, sensible aux cohérences entre les états $|\uparrow\rangle$ et $|\downarrow\rangle$ du spin). Par ailleurs, les 2 segments de droite qui se croisent en C correspondent à des impulsions différentes p et $p + \hbar k_L$ le long de la direction Oz des ondes laser. Les grandeurs atomiques sensibles aux interférences entre les 2 chemins doivent donc présenter une modulation spatiale le long de Oz (conséquence d'une cohérence entre 2 états d'impulsions différentes). Ces 2 remarques nous conduisent donc à étudier comment varie, après $t=T$, la densité spatiale de polarisation associée à l'atome.

- Densité de polarisation $\vec{d}(z)$

Introduisons l'opérateur

$$\vec{d}(z) = \vec{d} |3\rangle\langle 3| \quad (3.4)$$

produit de l'opérateur interne \vec{d} par l'opérateur externe $|3\rangle\langle 3|$ qui représente la densité atomique en z (et dont la valeur moyenne est la densité de présence de l'atome en z). Nous allons calculer la valeur moyenne de $\vec{d}(z)$ dans l'état $|\psi(t)\rangle$ de l'atome après traversée des 2 ondes et voir si un phénomène résonnant apparaît sur cette valeur moyenne

Calcul de l'état $|\Psi(t)\rangle$ de l'atome après traversée des 2 lames

- Nous suivons la même méthode que dans le § 3 du cours II. A un instant t postérieur à la traversée de la 2^{ème} lame ($t > T$), nous pouvons écrire

$$|\Psi(t)\rangle = c_a(t) |a, p\rangle + c_b(t) |b, p + \hbar k_L\rangle \quad (3.5)$$

où

$$\begin{cases} c_a(t) = [e^{-i\omega_{a,p}(t-T)}] [S_{ab}^{(2)} e^{i(\omega_L T + \varphi_2)}] [e^{-i\omega_{b,p+\hbar k_L} T}] [S_{ba}^{(1)} e^{-i(\omega_L \times 0 + \varphi_1)}] \\ c_b(t) = [e^{-i\omega_{b,p+\hbar k_L}(t-T)}] [S_{ba}^{(2)} e^{-i(\omega_L T + \varphi_2)}] [e^{-i\omega_{a,p} T}] [S_{aa}^{(1)}] \end{cases} \quad (3.6)$$

- Pour des impulsions $\frac{\pi}{2}$ et π , on a, compte tenu de (2.26)

$$\begin{cases} S_{aa}^{(1)} = S_{bb}^{(1)} = 1/\sqrt{2} & S_{ab}^{(1)} = S_{ba}^{(1)} = -i/\sqrt{2} \\ S_{aa}^{(2)} = S_{bb}^{(2)} = 0 & S_{ab}^{(2)} = S_{ba}^{(2)} = -i \end{cases} \quad (3.7)$$

Pour simplifier, nous supposons que les 2 ondes ont même phase

$$\varphi_1 = \varphi_2 = 0 \quad (3.8)$$

On en déduit

$$c_a(t) = -\frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\Delta T} e^{-i\omega_{a,p} t} \quad c_b(t) = -\frac{i}{\sqrt{2}} e^{-i\Delta T} e^{-i\omega_{b,p+\hbar k_L} t} \quad (3.9)$$

où Δ est défini en (2.16)

Calcul de la valeur moyenne de la densité de polarisation $\vec{d}(z)$

$$\begin{aligned} \langle \Psi(t) | \vec{d}(z) | \Psi(t) \rangle &= c_a(t) c_b^*(t) \langle b, p + \hbar k_L | (\vec{d} | 3 \rangle \langle 3 |) | a, p \rangle + c.c. \\ &= \frac{1}{2\pi\hbar} \vec{D} e^{-ik_L z} c_a(t) c_b^*(t) + c.c \end{aligned} \quad (3.10)$$

On a utilisé (2.3) et le fait que $\langle 3 | p \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{ipz/\hbar}$. Si l'on reporte (3.9) dans (3.10) et qu'on multiplie par $e^{i\omega_L t} e^{-i\omega_L t}$, on obtient

$$\langle \Psi(t) | \vec{d}(z) | \Psi(t) \rangle = \vec{A} e^{i(\omega_L t - k_L z)} + c.c. \quad (3.11)$$

où

$$\vec{A} = -\frac{i}{4\pi\hbar} \vec{D} e^{-i\Delta(t-2T)} = -\frac{i}{4\pi\hbar} \vec{D} e^{-i(\delta - \omega_R - k_L v)(t-2T)} \quad (3.12)$$

compte tenu de (2.17).

Discussion physique

- Pour chaque valeur de v , il apparaît une onde de densité de polarisation de même vecteur d'onde k_L que les ondes laser.
- La moyenne sur v de \vec{A} est en général nulle. Ceci signifie que les ondes de polarisation associées aux divers atomes de vitesses différentes v se brouillent.

Ce brouillage ne se produit plus sur un intervalle de temps Δt très étroit autour de $t = 2T$, valeur de t pour laquelle l'argument de l'exponentielle de (3.12) s'annule. La largeur de cet intervalle de temps Δt est de l'ordre de l'inverse de la largeur Doppler $k_L \delta v$, δv étant la dispersion des valeurs de v autour de $\bar{v} = 0$. Après cette moyenne sur v , le facteur de phase qui subsiste dans (3.12), $\exp[-i(\delta - \omega_R)(t-2T)]$, est égal à 1

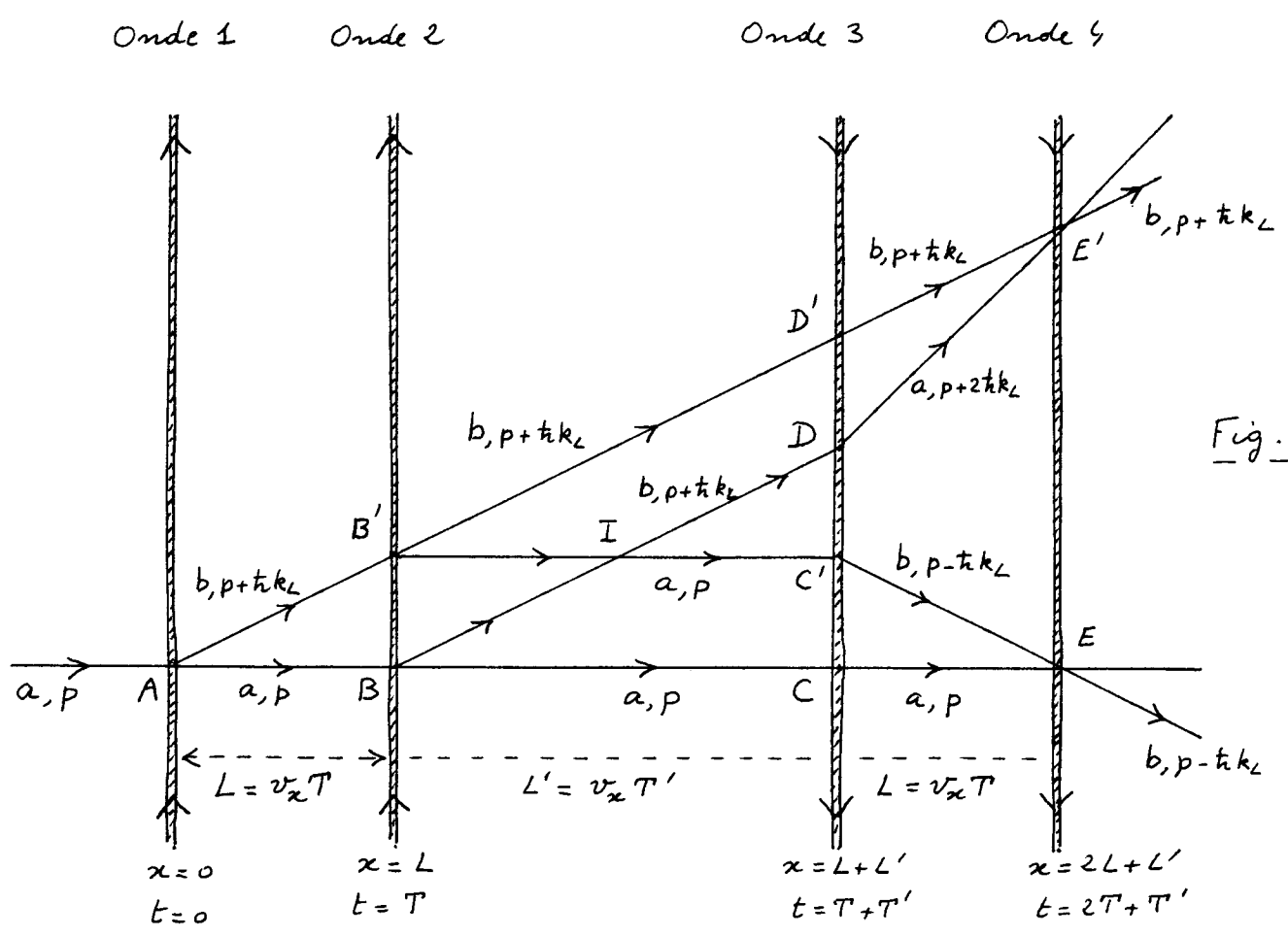
pour $t = 2T$ et ne dépend plus alors de δ . Pour $|t - 2T| \ll 1/k_L \delta v$, ce facteur de phase reste pratiquement égal à 1 tant que $\delta - \omega_R$ reste inférieur à $k_L \delta v$.

L'apparition transitoire de cette densité de polarisation moyenne en $e^{i(\omega_L t - k_L z)}$ autour de $t = 2T$ (c.-à-d. encore autour de $x = 2L$) entraîne que le milieu atomique peut émettre autour de $t = 2T$ une impulsion lumineuse dans la même direction que les 2 ondes laser. C'est le phénomène d'écho recherché.

• On pourrait également appliquer une 3^{ème} onde laser progressive, parallèle aux 2 autres, en $x = 2L$, et étudier comment cette onde échange de l'énergie avec la densité de polarisation qui apparaît à son emplacement. On trouverait qu'il apparaît, sur la probabilité $P_b(P_a)$ de trouver l'atome dans l'état $b(a)$ après traversée de la 3^{ème} onde, des effets d'interférence qui ne s'annulent pas après moyenne sur v et qui ne dépendent que très peu de δ .

② Franges de Ramsey à 4 ondes progressives (Réfs. 4, 5)

a) - Problème physique étudié



L'atome traverse 2 paires d'ondes progressives se propageant dans des sens opposés (Voir Fig. 3). Il entre dans l'état $|a, p\rangle$ et on cherche la probabilité de le trouver dans l'état b après traversée des 4 ondes.

b) Effets d'interférence pouvant donner des franges de Ramsey

- La figure 3 représente quelques "chemins" possible du système. Comme les photons associés aux ondes 3 et 4 ont des impulsions $- \hbar k_L$, le passage de a à b (avec absorption d'un photon) au point C' ou au point E' diminue p de $\hbar k_L$, alors que le passage de b à a (avec émission d'un photon) en D augmente p de $\hbar k_L$.
- Effets d'interférence ne s'annulant pas après moyenne sur v.

Le même raisonnement que celui fait dans le § 1 plus haut montre que les chemins qui interfèrent doivent se croiser si l'on veut que la moyenne sur v des termes d'interférence ne s'annule pas. Les déphasages Doppler sur les 2 chemins doivent en effet être les mêmes et il ne peut en être ainsi qu'au voisinage d'un point de croisement

Considérons par exemple les 2 chemins AB'D'E' et ABDE' qui conduisent tous les deux à l'état b, p + $\hbar k_L$. Entre t=0 et t=T, le déphasage Doppler est $-k_L v T$ sur le chemin du haut, 0 sur le chemin du bas. Entre t=T et t=T+T' les déphasages Doppler sont les mêmes. Enfin, entre t=T+T' et t=2T+T', le déphasage Doppler est $-k_L v T$ sur le chemin du haut, $-2k_L v T$ sur le chemin du bas. Le retard pris par le chemin du haut entre t=0 et t=T est donc rattrapé entre t=T+T' et t=2T+T'. Le même raisonnement est valable pour les 2 chemins AB'C'E' et ABCE qui conduisent tous les deux à b, p - $\hbar k_L$ et se croisent en E.

- Effets d'interférence sensibles au déphasage

Revenons aux 2 chemins AB'D'E' et ABDE'. Dans la partie centrale (B'D' et BD), l'état interne est le même dans les 2 chemins. Il n'en est pas de même dans les 2 parties extrêmes (AB' et AB, D'E' et DE'). Mais l'état interne b est toujours dans le chemin du haut alors que l'état interne a est toujours dans le chemin du bas. Les déphasages liés au désaccord $\delta = \omega_L - \omega_A$ entre AB' et AB d'une part, D'E' et DE' d'autre part, s'ajoutent donc. L'interférence entre les 2 chemins fait donc apparaître un facteur de phase relatif en $\exp(2i\delta T)$ et doit donc pouvoir donner naissance à des franges de Ramsey. Le même raisonnement est valable pour les 2 chemins AB'C'E' et ABCE

- On peut vérifier qu'il n'existe pas d'autres paires de chemins, autres que les 2 paires représentées sur la figure 3, qui, à la fois se croisent et sont sensibles au désaccord δ . Par exemple, on voit sur la figure 3 un croisement I qui correspond à l'échec de photons étudié au § 2, mais qui ne donne pas de franges de Ramsey.

c) Calcul de la probabilité de changer d'état interne après traversée des 4 ondes.

- Hypothèses simplificatrices. - On néglige tout processus dissipatif

Toutes les phases sont supposées égales : $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \varphi_4 = 0$

Chaque traversée est équivalente à une impulsion $\pi/2$. Toutes les matrices S sont égales à
$$(S) = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -i/\sqrt{2} \\ -i/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

- Termes carrés

A chaque traversée d'onde, chaque chemin se sépare en 2, de sorte qu'après traversée de la 4^{ème} onde, il y a $2^4 = 16$ chemins, 8 correspondant à l'état interne b, et 8 à l'état a (la figure 3 ne représente que 8 de ces 16 chemins possibles, qui sont au nombre de 4 avant traversée de la 4^{ème} onde)

Par symétrie, les probabilités de ces 16 chemins sont égales au carré du module d'un produit de 4 éléments de matrice S, c'est à dire d'après (3.13) à $(1/2)^4 = 1/16$ (les exponentielles d'évolution libre et les exponentielles associées à l'absorption ou à l'émission d'un photon ont un module égal à 1 - Voir fin du § 2 du cours II)

La contribution des termes carrés à la probabilité $\mathcal{P}(b)$ d'émerger dans l'état b après traversée des 4 ondes est donc égale à

$$\text{Contribution des termes carrés à } \mathcal{P}(b) = 8 \times \frac{1}{16} = \frac{1}{2} \quad (3.14)$$

- Interférences entre les 2 chemins AB'D'E' et ABDE'

• Amplitude associée à AB'D'E'

En appliquant la règle donnée à la fin du § 2 du cours II, on trouve

$$\mathcal{A}_1 = \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \right] \left[e^{-i\omega_{b,p+\hbar k_L} T} \right] \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \right] \left[e^{-i\omega_{b,p+\hbar k_L} T'} \right] \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \right] \left[e^{-i\omega_{b,p+\hbar k_L} T} \right] \left[\frac{-i}{\sqrt{2}} \right] \quad (3.15.a)$$

• Amplitude associée à ABDE'

$$\mathcal{A}_2 = \left[\frac{-i}{\sqrt{2}} e^{-i\omega_L(2T+T')} \right] \left[e^{-i\omega_{a,p+\hbar k_L} T} \right] \left[\frac{-i}{\sqrt{2}} e^{i\omega_L(T+T')} \right] \left[e^{-i\omega_{b,p+\hbar k_L} T'} \right] \left[\frac{-i}{\sqrt{2}} e^{-i\omega_L T} \right] \left[e^{-i\omega_{a,p} T} \right] \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \right] \quad (3.15.b)$$

• En utilisant les définitions de $\omega_{a,p}$, $\omega_{a,p+\hbar k_L}$, $\omega_{b,p+\hbar k_L}$ (voir Eqs. 2.12), de même que les définitions (2.18) de δ , ω_D , ω_R , on obtient

$$\mathcal{A}_1 \mathcal{A}_2^* + \mathcal{A}_1^* \mathcal{A}_2 = -\frac{1}{8} \cos 2(\omega_L - \omega_A + \omega_R) T \quad (3.16)$$

On vérifie bien sur (3.16) que les termes d'interférence entre AB'D'E' et ABDE' sont indépendants de $\omega_D = \hbar k_L p / M = \hbar k_L v$, mais dépendent par contre de $\delta = \omega_L - \omega_A$.

- Interférences entre les 2 chemins AB'C'E' et ABCE

Si \mathcal{B}_1 et \mathcal{B}_2 sont les amplitudes associées à ces 2 chemins, un calcul analogue au précédent donne

$$\mathcal{B}_1 \mathcal{B}_2^* + \mathcal{B}_1^* \mathcal{B}_2 = -\frac{1}{8} \cos 2(\omega_L - \omega_A - \omega_R) T \quad (3.17)$$

- Récapitulation. En regroupant tous les résultats précédents, on trouve, pour la probabilité $\mathcal{P}(b)$

$$\mathcal{P}(b) = \frac{1}{2} - \frac{1}{8} \left[\cos 2(\omega_L - \omega_A + \omega_R) T + \cos 2(\omega_L - \omega_A - \omega_R) T \right] \quad (3.18)$$

Si l'énergie de recul peut être négligée, l'expression précédente se simplifie pour donner

$$\mathcal{P}(b) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \cos 2(\omega_L - \omega_A) T \quad (3.19)$$

d) Discussion physique

- L'expression (3.18) montre qu'il apparaît sur $\mathcal{P}(b)$ 2 systèmes de franges de Ramsey centrés en $\omega_L = \omega_A + \omega_R$ et $\omega_L = \omega_A - \omega_R$. S'il existe une dispersion de vitesses δv_x sur la vitesse des atomes v_x perpendiculaire aux ondes laser (voir Fig. 1 du cours II), ceci entraîne une dispersion δT et $\delta T'$ des temps d'interaction T et T' . La moyenne

de (3.16) et (3.17) sur T atteinte beaucoup les franges autres que la frange centrale. L'allure de $P(b)$ est alors celle d'un doublet de 2 raies étroites (de largeur $1/\bar{T}$), centrées en $\omega_L = \omega_A \pm \omega_R$ (doublet de recul).

- On voit sur la figure 3 que, dans la région centrale (entre les ondes 2 et 3), l'état interne est le même sur les 2 chemins se croisant en E (état a), et différent de l'état interne correspondant aux 2 chemins se croisant en E' (état b). Si les durées de vie τ_a et τ_b des états a et b satisfont $\tau_a \gg T + 2T$, $T' \gg \tau_b \gg T$, la contribution des 2 chemins se croisant en E' est éliminée, et $P(b)$ se réduit à (3.17).

- Des franges de Ramsey à 4 ondes progressives ont été observées sur des molécules SF_6 (Voi Réfs 4, 5 qui donnent également une interprétation des franges en termes de spin jectif et une représentation diagrammatique de calculs faits sur la matrice densité - Voi aussi Réfs. 6 et 7)

③ Liens avec l'interférométrie atomique (Voi Réfs 8 et 9)

a - Autre représentation possible de l'état atomique externe.

- Représentation utilisée jusqu'ici - Représentation 1

Mélange statistique d'états $|p\rangle$. Chaque état $|p\rangle$ du mélange correspond à une onde plane $e^{ipz/\hbar}$.

Dispersion $\delta p = M \delta v$ des valeurs possibles de p

- Autre représentation possible - Représentation 2

Un même opérateur densité peut être associé à plusieurs mélanges statistiques différents.

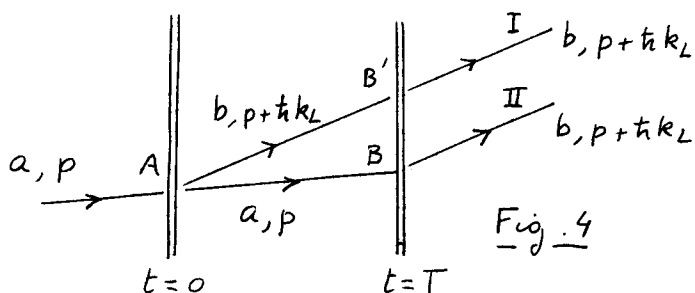
Un mélange statistique d'états $|p\rangle$ est équivalent à un mélange statistique de paquets d'ondes

La largeur Δz en z de chaque paquet d'ondes est supérieure ou égale à la longueur de cohérence ξ le long de l'axe z .

$$\xi = \frac{\hbar}{\delta p} = \frac{\hbar}{M \delta v} \quad (3.20)$$

b - Autre interprétation possible du brouillage des signaux par moyenne sur v .

- Retour aux franges de Ramsey à 2 ondes progressives.



2 chemins possibles pour passer de l'état interne a à l'état interne b . Le photon peut être absorbé, soit dans la 1^{ère} onde (chemin I: AB') soit dans la 2^{ème} (chemin II: AB)

• La figure 4 est dessinée en prenant des états externes d'impulsion bien définie. Chaque segment de droite correspond à une onde plane, p ou $p + \hbar k_L$.

• Si l'état entrant externe est un état quelconque $|\psi\rangle$, décrit par le paquet d'ondes $\Psi(z)$ (juste avant $t=0$), on peut suivre l'évolution

de l'état externe le long de chaque chemin. L'absorption d'un photon est décrite par l'action de l'opérateur $e^{ik_L Z}$ (opérateur de translation de l'impulsion, d'une quantité $\hbar k_L$ correspondant à l'impulsion du photon absorbé); l'évolution libre pendant un intervalle de temps T est décrite par l'action de l'opérateur $e^{-iP^2 T / 2M\hbar}$ où P est l'opérateur impulsion. On en déduit que les états externes $|\Psi_I\rangle$ et $|\Psi_{II}\rangle$ correspondant aux 2 chemins I et II sont donnés (juste après $t=T$) par les expressions

$$\begin{cases} |\Psi_I(t+T)\rangle = e^{-i\frac{P^2 T}{2M\hbar}} e^{ik_L Z} |\Psi\rangle & (3.21.a) \\ |\Psi_{II}(t+T)\rangle = e^{ik_L Z} e^{-i\frac{P^2 T}{2M\hbar}} |\Psi\rangle & (3.21.b) \end{cases}$$

- Dans la représentation z , les segments de droite de la figure 4 peuvent être interprétés comme étant les trajectoires suivies par le centre du paquet d'ondes incident. p doit être alors compris comme l'impulsion moyenne du paquet d'ondes incident. BB' représente l'écart spatial entre les centres des 2 paquets d'ondes obtenus après traversée de la première lame. On a

$$BB' = \frac{\hbar k_L}{M} T = v_{rec} T \quad (3.22)$$

où $v_{rec} = \hbar k_L / M$

est la vitesse de recul associée à l'absorption d'un seul photon. Notons que BB' est indépendant de p .

- Intégrale de recouvrement des 2 paquets d'ondes sortants

- C'est le produit scalaire \mathcal{R} des 2 états externes sortants

$$\mathcal{R} = \langle \Psi_{II}(t+T) | \Psi_I(t+T) \rangle \quad (3.23)$$

Notons que ce produit scalaire n'évolue plus après $t=T$, car une évolution unitaire ne change pas le produit scalaire

- Pour calculer \mathcal{R} , nous utiliserons

$$e^{-ik_L Z} P e^{ik_L Z} = P + \hbar k_L \quad (3.24)$$

qui découle de $[P, Z] = -i\hbar$. On obtient alors

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &= \langle \Psi_{II}(t+T) | \Psi_I(t+T) \rangle = \langle \Psi | e^{i\frac{P^2 T}{2M\hbar}} e^{-ik_L Z} e^{-i\frac{P^2 T}{2M\hbar}} e^{ik_L Z} | \Psi \rangle \\ &= \langle \Psi | e^{i\frac{P^2 T}{2M\hbar}} e^{-i\frac{(P+\hbar k_L)^2 T}{2M\hbar}} | \Psi \rangle = e^{-i\frac{\hbar k_L^2 T}{2M}} \langle \Psi | e^{-i v_{rec} T P / \hbar} | \Psi \rangle \quad (3.25) \end{aligned}$$

- Calcul de $\langle \Psi | e^{-i v_{rec} T P / \hbar} | \Psi \rangle$ en représentation position

En utilisant le fait que $e^{iaP/\hbar}$ est un opérateur de translation de la position

$$e^{iaP/\hbar} |z\rangle = |z-a\rangle \quad (3.26)$$

on obtient pour \mathcal{R} , compte tenu de $\omega_R = \hbar k_L^2 / 2M$

$$\mathcal{R} = e^{-i\omega_R T} \int dz \Psi^*(z + v_{rec} T) \Psi(z) \quad (3.27)$$

L'intégrale de (3.27) est l'intégrale de recouvrement de 2 paquets d'ondes identiques au paquet d'ondes incident et décalés l'un par rapport à l'autre de $v_{rec} T = BB'$ (voir 3.22). Cette intégrale peut être encore considérée comme la cohérence spatiale globale du paquet d'ondes incident à une distance donnée $v_{rec} T$ (somme des cohérences spatiales entre tous les couples de points z et z' séparés par une distance donnée $z-z' = v_{rec} T$)

• Calcul de $\langle \Psi | e^{-i v_{rec} T} P / \hbar | \Psi \rangle$ en représentation impulsion
 En introduisant la base $\{|p\rangle\}$ des états propres de P et la fonction d'onde $\langle p | \Psi \rangle = \tilde{\Psi}(p)$ en représentation p , on obtient

$$\mathcal{R} = e^{-i \omega_R T} \int dp |\tilde{\Psi}(p)|^2 e^{-i v_{rec} T p / \hbar} = e^{-i \omega_R T} \mathcal{F}(u = v_{rec} T) \quad (3.28)$$

où
$$\mathcal{F}(u) = \int dp \mathcal{P}(p) e^{-i u p / \hbar} \quad (3.29)$$

est la transformée de Fourier de la distribution d'impulsion $\mathcal{P}(p) = |\tilde{\Psi}(p)|^2$.

- Conclusion : Comme la largeur de $\mathcal{P}(p)$ est $\delta p = M \delta v$, la largeur de $\mathcal{F}(u)$ n'est autre que la longueur de cohérence ξ donnée en (3.20). Les états extrêmes sortants seront orthogonaux et ne pourront donc plus interférer si leur séparation $v_{rec} T$ est très grande devant la longueur de cohérence ξ .

$$\text{Brouillage des interférences} \iff \text{Séparation } v_{rec} T \text{ des centres des 2 paquets d'ondes} \gg \text{Longueur de cohérence } \xi \text{ du paquet incident} \quad (3.30)$$

L'analyse précédente donne ainsi une nouvelle interprétation de la condition de brouillage Doppler $k_L \delta v T \gg 1$ du cours II qui est équivalente à $\hbar k_L T / M \gg \hbar / M \delta v$, c-à-d à $v_{rec} T \gg \xi$.

- Notons que le produit scalaire des 2 paquets d'ondes peut être nul même s'ils se recouvrent, c-à-d même si $\Delta z > v_{rec} T$ où Δz est la largeur spatiale. Ne pas confondre largeur spatiale Δz et longueur de cohérence ξ qui peut être très inférieure à Δz .

C- Comment éliminer le brouillage des effets d'interférence.

Les centres des 2 paquets d'ondes sortants doivent être ramenés l'un vers l'autre, à une distance inférieure à ξ , pour que leur produit scalaire redevienne de l'ordre de 1.

On reinterprète ainsi les figures 2 et 3 comme représentant les trajectoires des centres de 2 paquets d'ondes cohérents qui sont formés à partir du même paquet d'onde incident après traversée de la 1^{ère} onde et qui sont ensuite recombinés. Une telle situation correspond effectivement à un interféromètre atomique.

Références

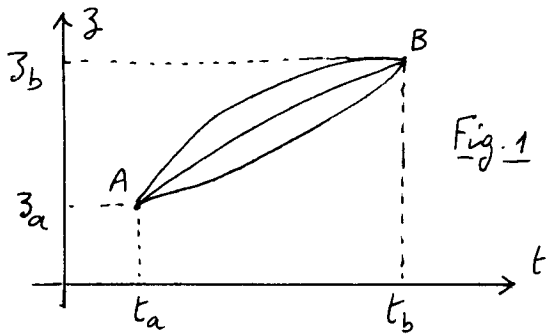
- (1) A. Abragam, The Principles of Nuclear Magnetism, Oxford 1961
- (2) T.W. Mossberg, R. Kachru, S.R. Hartmann, A.M. Flusberg, Phys. Rev. A20, 1976 (1979)
- (3) T.W. Mossberg, S.R. Hartmann, Phys. Rev. A23, 1271 (1981)
- (4) C. Salomon, Thèse Paris 1984.
- (5) C.J. Bordé, C. Salomon, S. Avrillier, A. Van Leberghie, C. Bréant, D. Banni, S. Scolès, Phys. Rev. A30, 1836 (1984)
- (6) C. Bordé, Advances in Laser Spectroscopy, ed. by F.T. Arecchi, F. Strumia, H. Walther (Plenum, 1983) p. 1
- (7) C. Bordé, Revue du Cethedec, Ondes et Signal NS83-1 (1983)
- (8) C. Bordé, Physics Letters A140, 10 (1989)
- (9) C. Bordé, in Laser Spectroscopy X, ed. by M. Ducloux, E. Giacobino, G. Comy, World Scientific 1992, p. 239.

Buts de ce cours

- Dans un interféromètre atomique, l'amplitude de probabilité de trouver la particule, en un point donné et à un instant donné à la sortie de l'interféromètre, est une somme de 2 amplitudes A_I et A_{II} correspondant aux 2 chemins possibles dans l'interféromètre. Comment calculer simplement A_I et A_{II} et, en particulier, le déphasage entre A_I et A_{II} dû à des champs extérieurs, inertiels ? Peut-on ramener ce calcul à des intégrales le long du chemin classique ?
- L'approche de Feynman, exprimant le propagateur quantique comme une intégrale fonctionnelle sur tous les chemins possibles, est très commode, car elle utilise le Lagrangien et l'action et se prête très bien à l'étude de la limite classique. Des résultats très simples peuvent être également obtenus à partir de cette approche pour des Lagrangiens quadratiques vis à vis des coordonnées et des vitesses, ce qui est le cas pour une particule dans un champ de pesanteur ou dans un référentiel en rotation. Nous utiliserons donc ici une telle approche, tout en nous appuyant, pour certains calculs, sur l'approche traditionnelle utilisant un Hamiltonien et un opérateur d'évolution.

① Rappels classiques (Ref. 1)

a) - Chemins possibles et chemin effectivement suivi, ou réel



Particule classique, partant de z_a à t_a et arrivant en z_b à t_b .
 Infinité de chemins possibles joignant les points A et B dans l'espace-temps (Fig. 1)
 Comment caractériser le chemin réel, effectivement suivi par le système ?

b) - Principe de moindre action

Le chemin réel est celui pour lequel une certaine quantité, fonction du chemin et appelé action, est extrémale.

Lagrangien L. Action S

- Le Lagrangien L est une certaine fonction des coordonnées z et des vitesses \dot{z} de la particule. Pour une particule de masse M , dans un potentiel $V(z)$, on a

$$L(z, \dot{z}) = \frac{1}{2} M \dot{z}^2 - V(z) \tag{4.1}$$

- L'action S correspondant à un chemin donné, c-à-d à une fonction $z(t)$ telle que $z(t_a) = z_a$ $z(t_b) = z_b$ est l'intégrale de L le long de ce chemin

$$S = \int_{t_a}^{t_b} L(z(t), \dot{z}(t)) dt \tag{4.2}$$

Equations de Lagrange

Le chemin réel $z(t)$ rend S extrême. Pour toute variation du chemin par rapport au chemin réel, définie par $\delta z(t)$ avec

$$\delta z(t_a) = 0 \quad \delta z(t_b) = 0 \quad (4.3)$$

S ne doit pas varier, au premier ordre en δz . Calculons δL et δS

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial z} \delta z + \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \delta \dot{z} \quad (4.4)$$

$$\delta S = \int_{t_a}^{t_b} \left[\frac{\partial L}{\partial z} \delta z(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \delta \dot{z}(t) \right] dt \quad (4.5)$$

En utilisant $\delta \dot{z}(t) = \frac{d}{dt} \delta z(t)$ et en effectuant une intégration par parties, on obtient

$$\delta S = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \delta z(t) \Big|_{t_a}^{t_b} + \int_{t_a}^{t_b} \left[\frac{\partial L}{\partial z} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \right] \delta z(t) dt \quad (4.6)$$

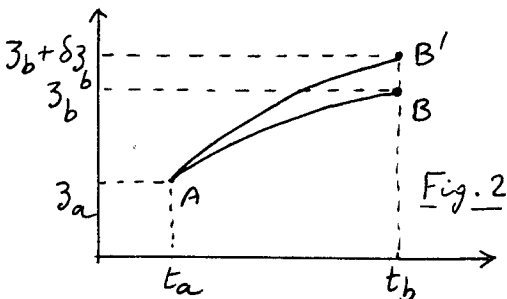
Le terme tout intégré est nul à cause de (4.3). En écrivant que le 2^{ème} est nul, quel que soit $\delta z(t)$, on obtient

$$\frac{\partial L}{\partial z} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = 0 \quad (4.7)$$

qui sont les équations de Lagrange décrivant la dynamique du système

C) - Variations de l'action entre 2 mouvements réels très voisins

Variations δz_a et δz_b de z_a et z_b - Impulsions



• 2 chemins réels reliant l'état z_a, t_a à 2 états finals z_b, t_b et $z_b + \delta z_b, t_b$. Comment varie l'action quand on passe du chemin réel AB au chemin réel AB' ? (Fig. 2)

• On repart des équations (4.4), (4.5), (4.6). Mais maintenant, on a

$$\delta z(t_a) = 0 \quad \delta z(t_b) = \delta z_b \quad (4.8)$$

au lieu de (4.3). Par ailleurs, comme les chemins sont réels, l'équation (4.7) est satisfaite, de sorte que le 2^{ème} terme de (4.6) est nul. On a alors

$$\delta S = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \delta z_b \quad (4.9)$$

Si l'on introduit l'impulsion p par l'équation

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \quad (4.10)$$

on obtient

$$\delta S = p_b \delta z_b \quad (4.11)$$

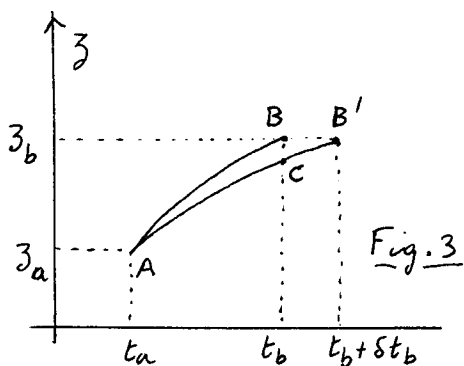
où p_b désigne l'impulsion en B correspondant au chemin réel AB

• La formule précédente se généralise aisément au cas où z_a et z_b sont tous les 2 variés $z_a \rightarrow z_a + \delta z_a, z_b \rightarrow z_b + \delta z_b$.

$$\delta S = p_b \delta z_b - p_a \delta z_a \quad (4.12)$$

Variations δt_a et δt_b de t_a et t_b - Hamiltonien

• On considère maintenant 2 chemins réels reliant l'état z_a, t_a à 2 états finals z_b, t_b et $z_b, t_b + \delta t_b$ (Fig. 3)



- Soit C le point du chemin réel AB' ayant même abscisse que B . On a
$$\overline{BC} = -\dot{z}_B \delta t_b \approx -\dot{z}_B \delta t_b = -\dot{z}_B \delta t_b \quad (4.13)$$

- D'après le paragraphe précédent
$$S_{AC} - S_{AB} = p_b \cdot \overline{BC} = -p_b \dot{z}_B \delta t_b \quad (4.14)$$

- Par ailleurs
$$S_{AB'} = S_{AC} + S_{CB'} \approx S_{AC} + L_b \delta t_b \quad (4.15)$$

où L_b est la valeur du Lagrangien au point B du chemin réel AB .

- On en déduit, compte tenu de (4.14)

$$\delta S = S_{AB'} - S_{AB} = -(p_b \dot{z}_B - L_b) \delta t_b \quad (4.16)$$

Si l'on introduit l'hamiltonien H par l'équation

$$H = p \dot{z} - L \quad (4.17)$$

on obtient

$$\delta S = -H_b \delta t_b \quad (4.18)$$

et, de manière plus générale, lorsque t_a et t_b sont tous 2 variés

$$\delta S = -H_b \delta t_b + H_a \delta t_a \quad (4.19)$$

Variations de l'action le long d'un chemin réel

- Considérons tous les chemins réels partant d'un point fixe $A (z_a, t_a)$ et aboutissant en un point $M (z, t)$ quelconque. L'action le long du chemin réel AM est une certaine fonction $S(z, t)$ des coordonnées du point final. D'après les paragraphes précédents

$$dS = \frac{\partial S}{\partial z} dz + \frac{\partial S}{\partial t} dt = p dz - H dt \quad (4.20)$$

où p et H sont l'impulsion et l'Hamiltonien en M . On en déduit

$$p = \frac{\partial S}{\partial z} \quad (4.21.a) \quad H = -\frac{\partial S}{\partial t} \quad (4.21.b)$$

- L'action au point $M (z, t)$ peut donc être exprimée comme l'intégrale le long du chemin AM de $p dz - H dt$

$$S = \int_{AM} (p dz - H dt) \quad (4.22)$$

② Propagateur quantique - Formulation de Feynman (Refs 2-4)

a) Définition

Une particule quantique est, à un certain instant t_a , au point z_a . A un certain instant ultérieur t_b , elle a une certaine amplitude de probabilité d'être au point z_b . Cette amplitude est notée $K(z_b t_b, z_a t_a)$, ou encore plus simplement $K(b, a)$. C'est le propagateur quantique de la particule.

b) Expression de Feynman pour le propagateur

- Il y a une infinité de chemins possibles reliant les points $z_a t_a$ et $z_b t_b$ (voir Fig. 1). Dans la formulation de Feynman, $K(z_b t_b, z_a t_a)$ est exprimée comme une somme de contributions associées à chacun

des chemins possibles reliant $z_a t_a$ à $z_b t_b$.

- Soit Γ un tel chemin. Le module de la contribution de Γ est indépendant de \hbar . Par contre, la phase de cette contribution dépend de \hbar . Plus précisément, Feynman postule qu'elle est égale à S_Γ / \hbar , où S_Γ est l'action correspondant au chemin Γ . On peut donc écrire

$$K(b, a) = \sum_{\text{tous les chemins } \Gamma} e^{i S_\Gamma / \hbar} \quad (4.23)$$

- La somme sur tous les chemins possibles Γ est une intégrale dans l'espace des chemins $z(t)$, pour laquelle il faudrait définir une "mesure" $\mathcal{D}z(t)$

$$K(b, a) = \int_a^b e^{i S_\Gamma / \hbar} \mathcal{D}z(t) \quad (4.24)$$

$K(b, a)$ est donné par une intégrale fonctionnelle, ou encore intégrale de chemins. Nous n'aborderons pas ici le calcul de telles intégrales (Voir exemples simples de tels calculs dans les Refs. 2-4)

Nous nous contenterons de discuter toutes les propriétés simples que l'on peut déduire de la forme (4.23), notamment lorsque L est une fonction quadratique de \dot{z} et z (voir § 3), revenant à la formulation traditionnelle de la mécanique quantique lorsqu'un calcul précis de constante de normalisation est nécessaire.

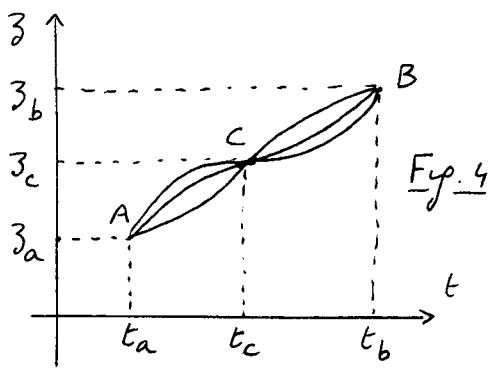
c) Limite classique

- Les situations classiques sont celles pour lesquelles l'action S_Γ est très grande devant \hbar . Dans ce cas, la variation ΔS_Γ de S entre 2 chemins différents voisins, même si elle est très petite en valeur relative ($\Delta S_\Gamma / S_\Gamma \ll 1$), est en général beaucoup plus grande que \hbar . La phase de $e^{i S_\Gamma / \hbar}$ varie alors très rapidement d'un chemin à l'autre et les contributions à $K(b, a)$ de la plupart des chemins Γ se détruisent par interférence.

- Considérons maintenant le chemin Γ_0 pour lequel l'action est extrémale (S ne varie pas, au 1^{er} ordre, quand on passe du chemin Γ_0 à un chemin infiniment voisin). Γ_0 est le chemin réel classique, correspondant à la solution des équations classiques. L'amplitude $e^{i S_{\Gamma_0} / \hbar}$ associé à Γ_0 dans (4.23) interfère alors constructivement avec celle des chemins voisins de Γ_0 , puisque cette fois leurs phases restent pratiquement égales. Pour calculer $K(b, a)$, on peut donc ignorer tous les chemins sauf Γ_0 et les chemins infiniment voisins. L'expression (4.23) redonne ainsi le chemin réel classique à la limite $\hbar \rightarrow 0$ (ou plus précisément $S_\Gamma \gg \hbar$).

d) Sommation sur les états intermédiaires

- Considérons un instant t_c intermédiaire entre t_a et t_b . Tout chemin possible reliant $z_a t_a$ à $z_b t_b$ passe nécessairement par un point z_c à l'instant t_c . Considérons alors l'ensemble de tous les chemins possibles passant par un point donné z_c à t_c (voir Fig. 4).



La somme sur tous les chemins possibles ACB de $\exp(iS/\hbar)$ où $S = S_{ACB} = S_{AC} + S_{CB}$ donne

$$K(z_b t_b, z_c t_c) K(z_c t_c, z_a t_a) = K(b, c) K(c, a) \quad (4.25)$$

(On rappelle que L ne dépend que de z et \dot{z} , et non de dérivées d'ordre supérieur

comme $\ddot{z}, \dddot{z} \dots$, de sorte que l'équation $S_{ACB} = S_{AC} + S_{CB}$ demeure valable même si \dot{z} est discontinu en C le long du chemin ACB)

En sommant (4.25) sur toutes les valeurs possibles de z_c , on obtient la somme de $\exp(iS/\hbar)$ sur tous les chemins possibles reliant $z_a t_a$ à $z_b t_b$. On peut donc écrire

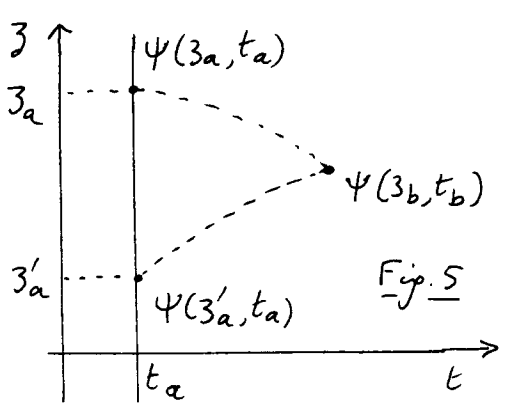
$$K(z_b t_b, z_a t_a) = \int dz_c K(z_b t_b, z_c t_c) K(z_c t_c, z_a t_a) \quad (4.26.b)$$

ou encore
$$K(b, a) = \int dz_c K(b, c) K(c, a) \quad (4.26.b)$$

qui est la règle bien connue de composition des amplitudes en mécanique quantique: ce sont les amplitudes relatives aux différents états intermédiaires possibles qu'il faut sommer et non les probabilités.

e. Fonction d'onde et propagateur

- L'état quantique de la particule à l'instant t_a est connu si l'on connaît toutes les amplitudes de probabilité $\psi(z_a, t_a)$ de trouver cette particule aux différents points z_a . La fonction $\psi(z_a, t_a)$ est la fonction d'onde de la particule



Si la particule est en $z_a t_a$, avec une amplitude $\psi(z_a, t_a)$, l'amplitude de probabilité de la trouver en z_b à un instant ultérieur est le produit de l'amplitude $\psi(z_a, t_a)$ par le propagateur $K(z_b t_b, z_a t_a)$ (Voir Fig. 5)

Pour avoir l'amplitude de probabilité $\psi(z_b, t_b)$ de trouver la particule

en z_b à t_b , quelle que soit sa position à t_a , il faut sommer $K(z_b t_b, z_a t_a) \psi(z_a, t_a)$ sur toutes les positions possibles $z_a, z_a' \dots$ de la particule à t_a , ce qui donne

$$\psi(z_b, t_b) = \int dz_a K(z_b t_b, z_a t_a) \psi(z_a, t_a) \quad (4.27)$$

- L'équation (4.27) ressemble à un "principe de Huygens-Fresnel" dans l'espace-temps qui permettrait d'obtenir l'onde en $z_b t_b$ comme résultant de la superposition d'ondelettes rayonnées par les différents points z_a de la surface d'onde à l'instant t_a .

f Lien avec la formulation traditionnelle

- Soit $U(t_b, t_a)$ l'opérateur d'évolution entre t_a et t_b , qui est tout simplement égal à $\exp\{-iH(t_b-t_a)/\hbar\}$ si l'hamiltonien H est indépendant du temps. L'amplitude de trouver la particule en z_b à t_b si elle est partie de z_a à t_a est tout simplement

$$K(z_b, t_b, z_a, t_a) = \langle z_b | U(t_b, t_a) | z_a \rangle \quad (4.28)$$

- L'opérateur d'évolution satisfait à la propriété importante

$$U(t_b, t_a) = U(t_b, t_c) U(t_c, t_a) \quad (4.29)$$

En insérant entre les 2 opérateurs U du membre de droite de (4.29) la relation de fermeture $\int dz_c |z_c\rangle \langle z_c| = \mathbb{1}$ relative à l'opérateur position et prenant les éléments de matrice des 2 membres de (4.29) entre $\langle z_b |$ et $|z_a\rangle$, on obtient

$$\langle z_b | U(t_b, t_a) | z_a \rangle = \int dz_c \langle z_b | U(t_b, t_c) | z_c \rangle \langle z_c | U(t_c, t_a) | z_a \rangle \quad (4.30)$$

qui n'est autre que (4.26), compte tenu de (4.28).

- Par définition même de $U(t_b, t_a)$

$$|\psi(t_b)\rangle = U(t_b, t_a) |\psi(t_a)\rangle \quad (4.31)$$

En insérant la relation de fermeture $\int dz_a |z_a\rangle \langle z_a| = \mathbb{1}$ entre $U(t_b, t_a)$ et $|\psi(t_a)\rangle$ et en projetant les 2 membres de (4.31) sur $\langle z_b |$, on obtient (4.27), compte tenu de (4.28) et de $\langle z_b | \psi(t_b)\rangle = \psi(z_b, t_b)$, $\langle z_a | \psi(t_a)\rangle = \psi(z_a, t_a)$.

③ Cas simple des Lagrangiens quadratiques (Ref. 3).

a) Hypothèses

- On suppose que le Lagrangien est une fonction quadratique de z et \dot{z}

$$L = a(t) \dot{z}^2 + b(t) \dot{z} z + c(t) z^2 + d(t) \dot{z} + e(t) z + f(t) \quad (4.32)$$

- Un premier exemple d'une telle situation est le Lagrangien d'une particule libre

$$L = \frac{1}{2} M \dot{z}^2 \quad (4.33)$$

ou celui d'une particule dans un champ de pesanteur dérivant du potentiel $V(z) = Mg z$

$$L = \frac{1}{2} M \dot{z}^2 - Mg z \quad (4.34)$$

- Un autre exemple est celui d'une particule dans un référentiel tournant à la vitesse angulaire $\vec{\Omega}$ par rapport à un référentiel galiléen. Nous montrerons dans un cours ultérieur que

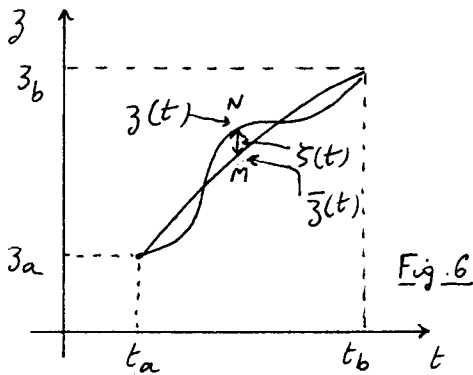
$$L = \frac{1}{2} M \dot{\vec{r}}^2 + M \dot{\vec{r}} \cdot (\vec{\Omega} \times \vec{r}) + \frac{M}{2} (\vec{\Omega} \times \vec{r})^2 \quad (4.35)$$

b) Forme simple du propagateur - Dépendance en z_a et z_b

- Pour calculer l'intégrale de chemin (4.24), nous allons repérer le chemin possible le plus général passant en z_a à t_a et en z_b à t_b , non pas par rapport à l'axe $z=0$, mais par rapport au chemin classique réel passant par les mêmes points

- Appelons donc $\bar{z}(t)$ la solution des équations de Lagrange correspondant à $\bar{z}(t_a) = z_a$ et $\bar{z}(t_b) = z_b$ et posons

$$z(t) - \bar{z}(t) = \xi(t) \quad (4.36)$$



$\xi(t)$ représente l'écart entre l'ordonnée du point N d'un chemin quelconque reliant $z_a t_a$ à $z_b t_b$ et l'ordonnée du point M de même abscisse t que N situé sur le chemin réel (d'action extrême) reliant $z_a t_a$ à $z_b t_b$.

Il revient au même de varier $z(t)$ ou de varier $\xi(t)$. On peut donc écrire

$$\begin{aligned} K(z_b t_b, z_a t_a) &= \int_a^b \exp\left\{\frac{i}{\hbar} S[z(t)]\right\} \mathcal{D}z(t) \\ &= \int_0^1 \exp\left\{\frac{i}{\hbar} S[\bar{z}(t) + \xi(t)]\right\} \mathcal{D}\xi(t) \end{aligned} \quad (4.37)$$

Les conditions aux limites en t_a et t_b sont bien sûr différentes pour $z(t)$ et $\xi(t)$. Au lieu d'avoir

$$z(t_a) = \bar{z}(t_a) = z_a \quad z(t_b) = \bar{z}(t_b) = z_b \quad (4.38)$$

on a $\xi(t_a) = 0 \quad \xi(t_b) = 0 \quad (4.39)$

- Reportons $z(t) = \bar{z}(t) + \xi(t)$ dans l'expression (4.32) de L . Il vient

$$L = a(t) \left(\dot{\bar{z}}^2 + 2\dot{\bar{z}}\dot{\xi} + \dot{\xi}^2 \right) + \dots \quad (4.40)$$

de sorte que

$$S[\bar{z}(t) + \xi(t)] = \int_{t_a}^{t_b} [a(t) (\dot{\bar{z}}^2 + 2\dot{\bar{z}}\dot{\xi} + \dot{\xi}^2) + \dots] dt \quad (4.41)$$

• Considérons tous les termes indépendants de ξ et $\dot{\xi}$ dans l'intégrand de (4.41). Leur contribution à (4.41) n'est autre que $S[\bar{z}(t)]$, c'est à dire l'action classique $S_{cl}(z_b t_b, z_a t_a)$ correspondant au chemin réel classique reliant $z_a t_a$ à $z_b t_b$.

• Considérons maintenant tous les termes linéaires en ξ ou en $\dot{\xi}$. Leur contribution à (4.41) n'est autre que la variation de l'action quand on passe du chemin $\bar{z}(t)$ au chemin $\bar{z}(t) + \xi(t)$, cette variation étant calculée au 1^{er} ordre en $\xi(t)$ et en $\dot{\xi}(t)$. Comme $\bar{z}(t)$ est par définition le chemin d'action extrême, cette variation est identiquement nulle.

• Restent les termes quadratiques en ξ et $\dot{\xi}$ de (4.40) qui s'écrivent $a(t)\dot{\xi}^2 + b(t)\dot{\xi}\xi + c(t)\xi^2$ et dont la contribution à (4.41) est égale à $\int_{t_a}^{t_b} [a(t)\dot{\xi}^2 + b(t)\dot{\xi}\xi + c(t)\xi^2] dt$.

• On a donc finalement

$$S[\bar{z}(t) + \xi(t)] = S_{cl}(z_b t_b, z_a t_a) + \int_{t_a}^{t_b} [a(t)\dot{\xi}^2 + b(t)\dot{\xi}\xi + c(t)\xi^2] dt \quad (4.42)$$

et par suite, compte tenu de (4.37) :

$$K(b, a) = \exp\left\{\frac{i}{\hbar} S_{cl}(b, a)\right\} \int_0^1 \exp\left\{\frac{i}{\hbar} \int_{t_a}^{t_b} [a(t)\dot{\xi}^2 + b(t)\dot{\xi}\xi + c(t)\xi^2] dt\right\} \mathcal{D}\xi(t) \quad (4.43)$$

Conclusion

IV-8

Comme tous les chemins $\zeta(t)$ partent de $\zeta(t_a) = 0$ et aboutissent en $\zeta(t_b) = 0$ (voir Eqs. (4.39)), l'intégrale de chemins figurant dans (4.43) ne dépend que de t_a et t_b , et non de z_a et z_b . Nous noterons une telle intégrale de chemins $F(t_b, t_a)$, ce qui donne pour $K(b, a)$

$$K(z_b t_b, z_a t_a) = \exp\left\{\frac{i}{\hbar} S_{cl}(z_b t_b, z_a t_a)\right\} F(t_b, t_a) \quad (4.44)$$

Lorsque le Lagrangien est une fonction quadratique de z et \dot{z} , toute la dépendance en z_a et z_b du propagateur $K(z_b t_b, z_a t_a)$ est donc contenue dans le facteur $\exp\left\{\frac{i}{\hbar} S_{cl}(z_b t_b, z_a t_a)\right\}$. Pour calculer cette dépendance en z_a et z_b , il suffit donc de calculer l'action le long du chemin classique réel reliant $z_a t_a$ à $z_b t_b$.

c - Propagation de la fonction d'onde

Problème physique

- Reportons (4.44) dans (4.27). Il vient

$$\Psi(z_b, t_b) = F(t_b, t_a) \int_{-\infty}^{+\infty} dz_a \exp\left\{\frac{i}{\hbar} S_{cl}(z_b t_b, z_a t_a)\right\} \Psi(z_a, t_a) \quad (4.45)$$

Comme on connaît maintenant la dépendance en z_a du propagateur (4.44), on peut se demander si, dans l'intégrale sur z_a de (4.45), certaines valeurs de z_a vont contribuer de manière prédominante. En effet, selon que $\Psi(z_a, t_a)$ et $\exp\left\{\frac{i}{\hbar} S_{cl}(z_b t_b, z_a t_a)\right\}$ oscillent en fonction de z_a au voisinage de $z_a = z_0$ avec des périodes spatiales très voisines ou très différentes, l'intégrale sur z_a du produit de ces 2 fonctions va donner un résultat important ou négligeable, ce qui veut dire que les ondes arrivant en $z_b t_b$ et provenant du voisinage de $z_0 t_a$ vont interférer de manière constructive ou destructive.

- Pour déterminer les valeurs de z_a qui contribuent le plus à l'intégrale de (4.45), il faut au préalable préciser la dépendance spatiale en z_a du propagateur et de la fonction d'onde.

Dépendance spatiale en z_a du propagateur

- Au point $z_b t_b$ arrivent une infinité de chemins réels classiques qui diffèrent les uns des autres par la valeur z_a de $z(t)$ en $t = t_a$. Au lieu de paramétrer ces chemins réels par z_a et z_b (valeurs de $z(t)$ en $t = t_a$ et $t = t_b$), on peut utiliser la valeur de l'impulsion $p(t)$ en $t = t_a$, $p(t_a) = p_a$, et celle de la position en $t = t_b$, $z(t_b) = z_b$. Parmi tous les chemins réels passant par $z_b t_b$, il y en a en général un seul pour lequel $p(t_a) = p_a$.

- Considérons alors le chemin réel reliant $(p' t_a)$ à $(z_b t_b)$ et soit z' la valeur de $z(t_a)$ pour un tel chemin

$$p(t_a) = p' \quad z(t_b) = z_b \quad z(t_a) = z' \quad (4.46)$$

Quand z varie de dz au voisinage de z' , on a, d'après (4.12)

$$dS_{cl}(z_b t_b, z' t_a) = -p' dz \quad (4.47)$$

de sorte que
$$\frac{\partial S_{cl}(z_b t_b, z' t_a)}{\partial z'} = -p' \quad (4.48)$$

- Pour tous les Lagrangiens quadratiques en z et \dot{z} que nous aurons à utiliser dans la suite du cours, l'action $S_{cl}(z_b t_b, z_a t_a)$

est aussi une fonction quadratique de z_a et z_b . Au voisinage de z' , le développement de $S_{cl}(z_b, z_a)$ en fonction de $z_a - z'$ s'arrête donc au 2^{ème} ordre et s'écrit, compte tenu de (4.48)

$$S_{cl}(z_b, z_a) = S_{cl}(z_b, z') - p'(z_a - z') + C(t_b, t_a)(z_a - z')^2 \quad (4.49)$$

où

$$C(t_b, t_a) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial z'^2} S_{cl}(z_b, z') = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial z_a^2} S_{cl}(z_b, z_a) \quad (4.50)$$

ne peut dépendre que de t_b et t_a puisque S_{cl} est une fonction quadratique des positions des 2 extrémités du chemin

Cas d'une onde plane incidente

- Supposons qu'à l'instant $t = t_a$, l'état de la particule soit une onde plane d'impulsion p_0

$$\Psi(z_a, t_a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{i p_0 z_a / \hbar} \quad (4.51)$$

- Revenons alors à (4.49). Dans cette expression, p' et par suite z' sont quelconques. Choisissons $p' = p_0$. En d'autres termes, parmi tous les chemins réels passant par z_b, t_b , considérons celui pour lequel $p(t_a) = p_0$ et soit z_0 la valeur correspondante de $z(t_a)$:

$$p(t_a) = p_0 \quad z(t_b) = z_b \quad z(t_a) = z_0 \quad (4.52)$$

En remplaçant p' et z' par p_0 et z_0 dans (4.49), et en reportant l'expression ainsi obtenue de $S_{cl}(z_b, z_a)$ dans (4.44), on obtient

$$\exp\left\{\frac{i}{\hbar} S_{cl}(z_b, z_a)\right\} = \exp\left\{\frac{i}{\hbar} S_{cl}(z_b, z_0, t_a)\right\} \exp\left\{\frac{i}{\hbar} \left[-p_0(z_a - z_0) + C(t_b, t_a)(z_a - z_0)^2\right]\right\} \quad (4.53)$$

La comparaison de (4.51) et (4.53) montre que, au voisinage du point z_0 défini par (4.52), les termes linéaires en z_a dans la phase des 2 fonctions de z_a qui figurent dans (4.53) se compensent, de sorte que la contribution du voisinage de z_0 va être prédominante dans l'intégrale de (4.45).

- Plus précisément, reportons (4.51) et (4.53) dans (4.45) et utilisons ^(la relation)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i u^2} du = \sqrt{i\pi} \quad (4.54)$$

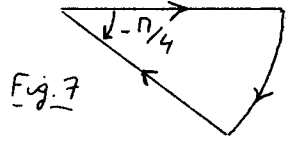


Fig. 7

qui peut être démontrée par intégration dans le plan complexe de la fonction e^{-z^2} le long du contour de la figure 7. On obtient:

$$\Psi(z_b, t_b) = F(t_b, t_a) \sqrt{\frac{i\pi\hbar}{C(t_b, t_a)}} \underbrace{\frac{e^{i p_0 z_0 / \hbar}}{\sqrt{2\pi\hbar}}}_{\Psi(z_0, t_a)} \exp\left\{\frac{i}{\hbar} S_{cl}(z_b, z_0, t_a)\right\} \quad (4.55)$$

Conclusion

Pour obtenir la fonction d'onde au point z_b à l'instant t_b , sachant qu'on est parti d'une onde plane d'impulsion p_0 à l'instant t_a , on commence par déterminer la position z_0 à l'instant $t = t_a$ du chemin réel classique passant par z_b, t_b et ayant une impulsion égale à p_0 pour $t = t_a$. A une fonction de t_a et t_b près, on obtient alors $\Psi(z_b, t_b)$ en multipliant $\Psi(z_0, t_a)$ par l'exponentielle de i/\hbar fois l'action classique calculée le long du chemin réel reliant z_0, t_a à z_b, t_b

Dans des cours ultérieurs, nous verrons que le résultat obtenu en (4.55) peut être utilisé pour calculer simplement le déphasage dans un interféromètre atomique, même si l'état de l'atome incident n'est pas une simple onde plane comme en (4.51)

Remarque . L'expression (4.53) permet de calculer l'étendue du voisinage de z_0 contribuant de manière significative à l'intégrale sur z_a de (4.45). En effet, le choix même de z_0 entraîne que les termes linéaires en z_a dans les exponentielles de (4.51) et (4.53) se compensent. Reste le terme quadratique en $(z_a - z_0)^2$ de (4.53) qui oscille très vite avec $z_a - z_0$ dès que $C(t_b, t_a) (z_a - z_0)^2 / \hbar$ devient plus grand que 1. On en conclut que seuls les points situés à une distance de z_0 inférieure à δz où

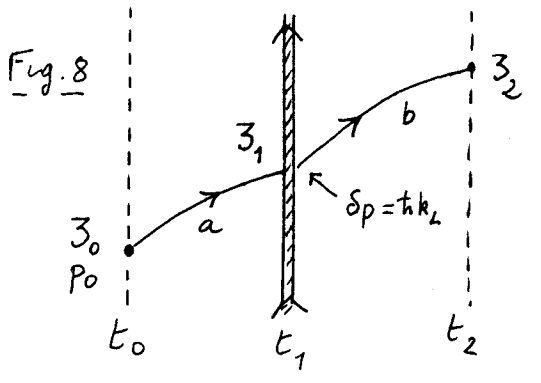
$$\delta z \approx \sqrt{\frac{\hbar}{K(t_b, t_a)}} \tag{4.56}$$

vont contribuer de manière importante. On peut dire encore que si $|z'_0 - z_0| \ll \delta z$

$$e^{i p_0 z_0 / \hbar} \exp\left\{\frac{i}{\hbar} S_d(z_b t_b, z_0 t_a)\right\} \approx e^{i p_0 z'_0 / \hbar} \exp\left\{\frac{i}{\hbar} S_d(z_b t_b, z'_0 t_a)\right\} \tag{4.57}$$

d - Propagation en présence d'ondes laser progressives.

- Nous généralisons maintenant la formule (4.54) au cas où la particule, dont le mouvement est toujours supposé décrit par un Lagrangien quadratique, traverse une (ou plusieurs) onde laser progressive.
- Comme plus haut, l'état de la particule à l'instant initial t_0 est une onde plane d'impulsion p_0 (Fig. 8)



Considérons la trajectoire classique associée au chemin réel partant de z_0 à t_0 avec l'impulsion p_0 (Fig. 8). Cette trajectoire traverse à l'instant t_1 une onde laser, de fréquence ω_L , de vecteur d'onde k_L et de phase φ , la traversée se faisant au point z_1 . On suppose que l'atome, initialement dans l'état interne a

absorbe un photon et passe dans l'état b , ce qui augmente en z_1 son impulsion de $\Delta p = \hbar k_L$. La trajectoire classique arrive enfin en z_2 à l'instant t_2 . Comment relier $\Psi_b(z_2, t_2)$ à $\Psi_a(z_0, t_0)$?

- La largeur de l'onde laser est supposée suffisamment faible pour qu'on puisse négliger l'effet des champs extérieurs ou inertiels pendant la durée τ de la traversée. Pour passer de l'état de la particule à l'instant $t_1^- < t_1$ à son état à $t_1^+ > t_1$, avec $t_1 - t_1^- \gg \tau$ et $t_1^+ - t_1 \gg \tau$ ($t_1^+ - t_1^-$ étant cependant suffisamment faible pour qu'on puisse négliger l'effet des champs extérieurs et inertiels pendant $t_1^+ - t_1^-$), on peut appliquer les résultats du cours II. Si l'état de la particule avant traversée est un état d'impulsion p , son état après traversée est un état d'impulsion $p + \hbar k_L$, multiplié par

$S_{ba} e^{-i(\omega_L t_1 + \varphi)}$. Au voisinage du point z_1, t_1 , de la figure 8, la fonction d'onde après traversée s'obtient à partir de la fonction d'onde avant traversée par multiplication par le facteur $\exp i[k_L z_1 - \omega_L t_1 - \varphi]$

- Dans tous les cas que nous étudierons par la suite, nous verrons que si l'état initial de la particule a une impulsion bien définie p_0 , il reste ensuite état propre de P à tout instant ultérieur. L'état de la particule, avant et après traversée de l'onde laser, est donc toujours une onde plane, et on peut donc également appliquer le résultat (4.55) pour relier $\Psi_b(z_2, t_2)$ à $\Psi_b(z_1, t_1^+)$. Nous remplacerons également les évolutions libres entre t_1^- et t_1 et entre t_1 et t_1^+ (voir cours II) par les évolutions en présence des champs extérieurs et virtuels. Finalement, l'équation reliant $\Psi_b(z_2, t_2)$ à $\Psi_a(z_1, t_1)$ s'écrit

$$\Psi_b(z_2, t_2) = [G(t_2, t_1) \exp \frac{i}{\hbar} S_d(z_2, t_2, z_1, t_1)] \times e^{-iE_b(t_2 - t_1)/\hbar} \times [S_{ba} \exp i[k_L z_1 - \omega_L t_1 - \varphi]] \times e^{-iE_a(t_1 - t_0)/\hbar} \times [G(t_1, t_0) \exp \frac{i}{\hbar} S_d(z_1, t_1, z_0, t_0)] \Psi_a(z_0, t_0) \tag{4.58}$$

où nous avons posé, pour simplifier l'écriture

$$G(t_2, t_1) = F(t_2, t_1) \sqrt{\frac{i\pi\hbar}{C(t_2, t_1)}} \tag{4.59}$$

Si la particule traverse l'onde laser sans changer d'état a (ou b), il faut remplacer la 2^{ème} ligne de (4.58) par S_{aa} (ou S_{bb}). Si elle émet un photon et passe de b à a , il faut remplacer cette 2^{ème} ligne par $S_{ab} \exp \{-i[k_L z_1 - \omega_L t_1 - \varphi]\}$.

- La formule (4.58) généralise donc celles utilisées jusqu'ici et basées sur la règle établie dans le cours II. Elle repose sur la forme simple du propagateur quantique pour des lagrangiens quadratiques, qui fait intervenir l'action calculée le long de la trajectoire classique du chemin réel. Son utilité apparaîtra dans les cours suivants.

- Tout le formalisme développé dans ce § 3 peut être étendu à des potentiels non quadratiques, mais variant suffisamment lentement avec z pour que les termes d'ordre supérieur à 2 dans le développement de $V(z)$ aient un effet très petit. On peut ainsi retrouver les principaux résultats de l'approximation W.K.B.

Références

- (1) L. Landau et E. Lifschitz, Mécanique, 3^{ème} édition, Editions Mir, Moscou (1969).
- (2) R.P. Feynman, Rev. Mod. Phys. 20, 367 (1948)
- (3) R.P. Feynman and A.R. Hibbs, Quantum Mechanics and Path Integrals, Mc Graw Hill, New York (1965)
- (4) C. Cohen-Tannoudji, Cours de 2^{ème} année de 3^{ème} cycle Polycopié (Paris, 1966). Notes de cours rédigées par S. Harsche.

Buts de ce cours

- Appliquer les résultats du cours IV au cas d'une particule se propageant dans un champ de pesanteur.
- Calculer le déphasage entre les ondes de de Broglie (associées à un neutron) se propageant dans les 2 bras d'un interféromètre situés à des hauteurs différentes et interpréter les résultats de la 1^{ère} expérience d'interférence entre ondes de matière mettant en évidence des effets sensibles au champ de pesanteur (effets sensibles à la fois à \hbar et à g).

① Calcul du propagateur - Approche de Feynman
a) - Lagrangien - Impulsion - Hamiltonien

- Energie potentielle associée à un champ de pesanteur parallèle à Oz et dirigé vers les $z < 0$ (g : accélération de la pesanteur)

$$V(z) = Mgz \quad (5.1)$$

- Lagrangien: $L(z, \dot{z}) = \frac{1}{2} M \dot{z}^2 - Mgz$ (5.2)

- Equation de Lagrange: $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = \frac{\partial L}{\partial z}$

$$M\ddot{z} = -Mg \quad (5.3)$$

- Solution de l'équation de Lagrange correspondant à $z(t_a) = z_a$, $\dot{z}(t_a) = v(t_a) = v_a$:

$$\begin{cases} v(t) = v_a - g(t-t_a) \end{cases} \quad (5.4.a)$$

$$\begin{cases} z(t) = z_a + v_a(t-t_a) - \frac{1}{2}g(t-t_a)^2 \end{cases} \quad (5.4.b)$$

- Position ^{et vitesse} de la particule à $t = t_b$: $z(t_b) = z_b$, $v(t_b) = v_b$

$$\begin{cases} z_b = z_a + v_a(t_b-t_a) - \frac{1}{2}g(t_b-t_a)^2 \end{cases} \quad (5.5.a)$$

$$\begin{cases} v_b = v_a - g(t_b-t_a) \end{cases} \quad (5.5.b)$$

Expression de v_a en fonction de z_a, t_a, z_b, t_b :

$$v_a = \frac{z_b - z_a}{t_b - t_a} + \frac{1}{2}g(t_b - t_a) \quad (5.6)$$

- Impulsion: $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = M\dot{z} = Mv$ (5.7)

- Hamiltonien: $H = p\dot{z} - L = M\dot{z}^2 - L = \frac{1}{2}M\dot{z}^2 + Mgz = \frac{p^2}{2m} + Mgz$ (5.8)

- b - Action $S_{cl}(z_b, t_b, z_a, t_a)$ correspondant au chemin réel:

$$S_{cl}(z_b, t_b, z_a, t_a) = \int_{t_a}^{t_b} \left[\frac{1}{2} M v^2(t) - Mgz(t) \right] dt \quad (5.9)$$

où $v(t)$ et $z(t)$ sont donnés par les équations (5.4). En effectuant l'intégrale et en utilisant (5.5), et (5.6) pour réexprimer v_a en fonction de z_a, t_a, z_b, t_b , on trouve:

$$S_{cl}(z_b, t_b, z_a, t_a) = \frac{M}{2} \frac{(z_b - z_a)^2}{T} - \frac{Mg}{2} (z_b + z_a)T - \frac{Mg^2}{24} T^3 \quad (5.10)$$

où l'on a posé: $T = t_b - t_a$ (5.11)

- On constate que $S_d(3_b t_b, 3_a t_a)$ est une fonction quadratique de 3_a et 3_b , ce qui permettra d'appliquer les résultats du § 3C du cours IV.
- Nous aurons besoin pour la suite du coefficient $C(t_b, t_a)$ introduit en (4.50).

$$C(t_b, t_a) = C(T) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial 3_a^2} S_d(3_b t_b, 3_a t_a) = \frac{M}{2T} \tag{5.12}$$

c - Expression du propagateur

- L'utilisation de (4.44) et (5.10) donne :

$$K(3_b t_b, 3_a t_a) = F(T) \exp \frac{i}{\hbar} \left\{ \frac{M}{2} \frac{(3_b - 3_a)^2}{T} - \frac{Mg}{2} (3_b + 3_a) T - \frac{Mg^2}{24} T^3 \right\} \tag{5.13}$$

La notation $F(T)$ pour $F(t_b, t_a)$ s'explique par l'invariance par translation dans le temps.

- Toute la dépendance en 3_a et 3_b de K est contenue dans l'exponentielle de (5.13). La détermination de la fonction $F(T)$ sera effectuée plus loin par comparaison avec les résultats de l'approche traditionnelle.

② Approche quantique traditionnelle.

a) Idee générale.

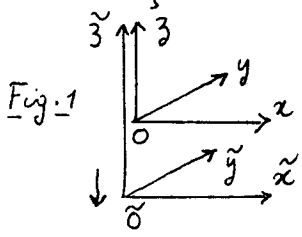
- Le but est de calculer l'opérateur d'évolution :

$$U(t) = e^{-iHt/\hbar} \tag{5.14}$$

où
$$H = \frac{P^2}{2M} + MgZ \tag{5.15}$$

est l'hamiltonien quantique correspondant à l'expression classique (5.8)

- Plaçons nous dans le référentiel $\tilde{O}\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$ tombant vers le bas avec l'accélération g par rapport à $Oxyz$ (voir Fig. 1), c'est à dire tel que



$$\tilde{z} = z + \frac{1}{2} g t^2 \tag{5.16}$$

Dans le référentiel $\tilde{O}\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$, la particule ne sera soumise à aucune force et pourra donc être considérée comme libre.

- Soit $T(t)$ la transformation unitaire associé au changement de référentiel de la figure 1, et qui sera calculée plus loin. On s'attend à ce que, dans la nouvelle représentation, l'évolution du nouveau vecteur d'état

$$|\tilde{\Psi}(t)\rangle = T(t)|\Psi(t)\rangle \tag{5.17}$$

soit gouvernée par l'hamiltonien $P^2/2M$ d'une particule libre, l'opérateur d'évolution correspondant étant $e^{-iP^2t/2M\hbar}$. En appliquant la transformation inverse $T^+(t)$, on doit être alors capable d'exprimer l'opérateur d'évolution (5.14) en fonction de $T(t)$ et $e^{-iP^2t/2M\hbar}$.

- Notons que la possibilité d'éliminer un champ de gravitation par passage dans un référentiel accéléré avec une accélération g indépendante de la masse M , est une expression du principe d'équivalence.

b) Détermination de la transformation unitaire T(t)

- Cherchons d'abord comment se transforment, dans le changement de référentiel décrit par (5.16), les observables fondamentales Z et P.
 • Soit $\tilde{\Psi}(\tilde{z}, t)$ la nouvelle fonction d'onde décrivant, dans le nouveau référentiel, l'état de la particule, décrit par $\Psi(z, t)$ dans l'ancien. On a:

$$\tilde{\Psi}(\tilde{z}, t) = \Psi(z, t) \tag{5.18}$$

où \tilde{z} et z sont reliés par (5.16). En utilisant (5.16), on obtient

$$\tilde{\Psi}(z + \frac{1}{2}gt^2, t) = \langle z + \frac{1}{2}gt^2 | \tilde{\Psi}(t) \rangle = \langle z + \frac{1}{2}gt^2 | T(t) | \Psi(t) \rangle = \langle z | \Psi(t) \rangle$$

d'où l'on déduit

$$T^+(t) |z + \frac{1}{2}gt^2\rangle = |z\rangle \tag{5.19}$$

c'est à dire encore

$$T^+(t) |z\rangle = |z - \frac{1}{2}gt^2\rangle \quad T(t) |z\rangle = |z + \frac{1}{2}gt^2\rangle \tag{5.20}$$

Faisons alors agir $T(t) Z T^+(t)$ sur $|z\rangle$. Il vient, compte tenu de (5.20)

$$\begin{aligned} T(t) Z T^+(t) |z\rangle &= T(t) Z |z - \frac{1}{2}gt^2\rangle = (z - \frac{1}{2}gt^2) T(t) |z - \frac{1}{2}gt^2\rangle \\ &= (z - \frac{1}{2}gt^2) |z\rangle = (Z - \frac{1}{2}gt^2) |z\rangle \end{aligned} \tag{5.21}$$

ce qui montre que

$$T(t) Z T^+(t) = Z - \frac{1}{2}gt^2 \tag{5.22}$$

• Passons maintenant à l'opérateur P. L'équivalent de (5.16) pour les vitesses est

$$\tilde{v} = v + gt \tag{5.23}$$

Si l'on admet momentanément, ce qui sera démontré plus loin, que \tilde{p} est égal à $m\tilde{z} = m\tilde{v}$ dans le nouveau référentiel, on a

$$\tilde{p} = p + Mgt \tag{5.24}$$

Une démonstration analogue à la précédente donne alors pour les opérateurs P et $T(t) P T^+(t)$

$$T(t) P T^+(t) = P - Mgt \tag{5.25}$$

- Les équations (5.22) et (5.25) montrent que T(t) effectue une translation, à la fois sur P et sur Z. En utilisant

$$e^{-i\lambda Z/\hbar} P e^{i\lambda Z/\hbar} = P + \lambda \quad e^{-i\mu P/\hbar} Z e^{i\mu P/\hbar} = Z - \mu \tag{5.26}$$

on voit qu'on peut choisir pour T(t), l'expression suivante

$$T(t) = e^{i\alpha(t)} e^{-igt^2/2\hbar} P e^{iMgt/\hbar} Z \tag{5.27}$$

où $\alpha(t)$ est une fonction quelconque de t, qui sera choisie plus loin pour simplifier au maximum l'expression du nouvel hamiltonien. Les équations (5.22) et (5.23) sont alors satisfaites

c) Nouvel hamiltonien

- Comme T(t) dépend explicitement du temps, l'équation de Schrödinger pour $|\tilde{\Psi}(t)\rangle = T(t) |\Psi(t)\rangle$ s'écrit:

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\tilde{\Psi}(t)\rangle = H'(t) |\tilde{\Psi}(t)\rangle \tag{5.28}$$

où

$$H'(t) = T(t) H T^+(t) + i\hbar \left(\frac{dT(t)}{dt} \right) T^+(t) \tag{5.29}$$

H étant l'hamiltonien (5.15) de l'ancienne représentation.

- En utilisant (5.22) et (5.25), on obtient alors

V-4

$$T(t) H T^\dagger(t) = \frac{1}{2M} (P - Mgt)^2 + Mg(Z - \frac{1}{2}Mgt^2) \quad (5.30)$$

Par ailleurs, d'après (5.27)

$$i\hbar \left(\frac{dT(t)}{dt} \right) T^\dagger(t) = -\hbar \dot{\alpha}(t) + gtP - Mg \underbrace{T(t) Z T^\dagger(t)}_{Z - \frac{1}{2}gt^2} \quad (5.31)$$

de sorte que, d'après (5.29)

$$H'(t) = \frac{P^2}{2M} + \frac{1}{2}Mg^2t^2 - \hbar \dot{\alpha}(t) \quad (5.32)$$

Il suffit alors de choisir

$$\alpha(t) = \frac{Mg^2t^3}{6\hbar} \quad (5.33)$$

et par suite

$$T(t) = e^{i\frac{Mg^2t^3}{6\hbar}} e^{-i\frac{gt^2}{2\hbar}P} e^{i\frac{Mgt}{\hbar}Z} \quad (5.34)$$

pour avoir

$$H' = \frac{P^2}{2M} \quad (5.35)$$

Vérifions en passant que dans la nouvelle représentation, et dans le point de vue de Heisenberg

$$\frac{dZ(t)}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [Z(t), H'] = \frac{P(t)}{M} \quad (5.36)$$

ce qui montre bien que l'impulsion p coïncide avec la quantité de mouvement mv .

Nous avons bien montré ainsi que le passage dans un référentiel accéléré supprimait le champ de pesanteur dans les équations quantiques du mouvement.

d) Expression de l'opérateur d'évolution de l'ancienne représentation

- Dans la nouvelle représentation, on a, compte tenu de (5.28) et (5.35)

$$|\tilde{\psi}(t)\rangle = e^{-i\frac{P^2}{2M}\frac{t}{\hbar}} |\tilde{\psi}(0)\rangle = e^{-i\frac{P^2}{2M}\frac{t}{\hbar}} |\psi(0)\rangle \quad (5.37)$$

puisque les 2 représentations coïncident à $t=0$. Par ailleurs,

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &= U(t) |\psi(0)\rangle \\ &= T^\dagger(t) |\tilde{\psi}(t)\rangle = T^\dagger(t) e^{-i\frac{P^2}{2M}\frac{t}{\hbar}} |\psi(0)\rangle \end{aligned} \quad (5.38)$$

La comparaison de la 1^{ère} et 2^{ème} lignes de (5.38) donne alors

$$U(t) = T^\dagger(t) e^{-i\frac{P^2}{2M}\frac{t}{\hbar}} = e^{-i\frac{Mg^2t^3}{6\hbar}} e^{-i\frac{Mgt}{\hbar}Z} e^{i\frac{gt^2}{2\hbar}P} e^{-i\frac{P^2}{2M}\frac{t}{\hbar}} \quad (5.39)$$

- L'opérateur d'évolution de l'ancienne représentation peut être ainsi réexprimé en fonction d'exponentielles dont l'argument ne contient que Z , P ou P^2 à la fois, et non pas à la fois Z et P^2 , ce qui est le cas quand on reporte (5.15) dans (5.14).

e) Propagation de la fonction d'onde.

- Supposons qu'à $t=t_a$, l'état de la particule soit un état propre $|p_a\rangle$ de P . Quelle est la valeur de la fonction d'onde en z_b à un instant ultérieur $t_b = t_a + T$?

$$\begin{aligned} \psi(z_b, t_b) &= \langle z_b | U(T) | p_a \rangle = e^{-i\frac{Mg^2T^3}{6\hbar}} \langle z_b | e^{-i\frac{MgT}{\hbar}Z} e^{i\frac{gT^2}{2\hbar}P} e^{-i\frac{P^2T}{2M\hbar}} | p_a \rangle \\ &= \frac{e^{ip_a z_b / \hbar}}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-i\frac{Mg^2T^3}{6\hbar}} e^{-i\frac{MgT}{\hbar}z_b} e^{i\frac{gT^2}{2\hbar}p_a} e^{-i\frac{p_a^2 T}{2M\hbar}} \end{aligned} \quad (5.40)$$

- En utilisant (5.6) pour réexprimer $P_a = M v_a$ en fonction de $z_a, z_b, T = t_b - t_a$ et en utilisant (5.5.a) pour transformer la 1^{ère} exponentielle de (5.40), on peut réécrire (5.40) sous la forme :

$$\Psi(z_b, t_b) = \frac{e^{i P_a z_a / \hbar}}{\sqrt{2\pi \hbar}} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} S_{cl}(z_b t_b, z_a t_a) \right\} \quad (5.41)$$

$\Psi(z_a, t_a)$

où $S_{cl}(z_b t_b, z_a t_a)$ est l'action classique écrite en (5.10)

A partir de l'approche traditionnelle, il est ainsi possible d'obtenir le résultat simple exprimé par l'équation (4.55) du cours IV.

- Reportons dans l'équation (4.55) du cours IV l'expression (5.12) de $C(T)$. Cette formule peut être réécrite (après remplacement de z_0 et P_0 par z_a et P_a) :

$$\Psi(z_b, t_b) = F(T) \sqrt{\frac{2i\pi \hbar T}{M}} \frac{e^{i P_a z_a / \hbar}}{\sqrt{2\pi \hbar}} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} S_{cl}(z_b t_b, z_a t_a) \right\} \quad (5.42)$$

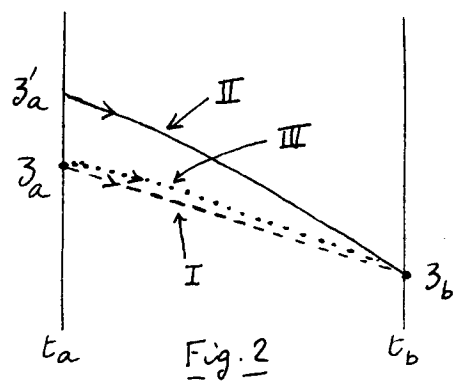
La comparaison de (5.41) et (5.42) donne alors l'expression de la fonction $F(T)$, que nous n'avons pas essayé de calculer par des intégrales de chemins :

$$F(T) = \sqrt{\frac{M}{2i\pi \hbar T}} \quad (5.43)$$

③ Cas où le champ de pesanteur est une petite perturbation

a) Buts de ce paragraphe

- Comme plus haut, on suppose que l'état initial de la particule à t_a est une onde plane P_0 et on considère plusieurs chemins réels arrivant en z_b à t_b (voir Fig. 2), avec $t_b - t_a = T$.



- Le premier chemin, noté I et représenté en traits tiretés sur la figure 2 est celui d'une particule libre, pour laquelle $g = 0$. Il part de z_a à t_a , z_a étant déterminé par le fait que $p(t_a) = P_0$.

- Le deuxième chemin, noté II, est dessiné en traits pleins, est celui d'une particule se déplaçant dans le champ de pesanteur (on a $g \neq 0$), arrivant en z_b à t_b et partant de z'_a à t_a , z'_a étant déterminé

par le fait que, comme pour le chemin I, $p(t_a) = P_0$. Les 2 courbes I et II de la figure partent donc avec la même tangente en t_a . Comme la courbe I est une ligne droite, et la courbe II une parabole, on a

$$z'_a - z_a = \frac{1}{2} g T^2 \quad (5.44)$$

- D'après (5.41),
$$\Psi(z_b, t_b) = \Psi(z'_a, t_a) e^{i S_{II} / \hbar} \quad (5.45)$$

où S_{II} est l'action classique correspondant au chemin II.

- Nous désirons montrer dans ce paragraphe que $\Psi(z_b, t_b)$ peut être aussi approximativement exprimé comme le produit de $\Psi(z_a, t_a)$ par une intégrale effectuée le long du chemin I correspondant à $g = 0$

- Pour établir un tel résultat, il sera commode d'introduire un 3^{ème} chemin, noté III et représenté en pointillés sur la figure 2. Ce chemin est celui d'une particule se déplaçant dans le potentiel de gravitation ($g \neq 0$), qui part de 3_a à t_a pour arriver en 3_b à t_b . Pour ce chemin, on a donc nécessairement $p(t_a) \neq p_a$.

b) Lien entre les fonctions d'ondes $\Psi(3_b, t_b)$ et $\Psi^{(0)}(3_b, t_b)$ correspondant à $g \neq 0$ et à $g = 0$

- Revenons au cours IV et en particulier à l'équation (4.57). Cette relation exprime que, si $|3_a - 3'_a|$ est suffisamment petit (voir plus loin), on peut écrire :

$$\Psi(3_b, t_b) = \Psi(3'_a, t_a) e^{iS_{II}/\hbar} \simeq \Psi(3_a, t_a) e^{iS_{III}/\hbar} \quad (5.46)$$

où S_{II} et S_{III} sont les actions classiques correspondant respectivement aux chemins II et III (avec $g \neq 0$).

- La condition de validité de (5.46) a été donnée. Elle s'exprime par $|3'_a - 3_a| \ll \delta_3$, où δ_3 est donné en (4.56). En utilisant l'expression (5.12) de C établie plus haut, on obtient, compte tenu de (5.44)

$$\frac{1}{2} g T^2 \ll \zeta_0 \quad (5.47)$$

où
$$\zeta_0 = \left(\frac{\hbar^2}{M^2 g} \right)^{1/3} \quad (5.48)$$

est la seule quantité ayant les dimensions d'une longueur que l'on peut former à partir de \hbar , g et M .

Nous supposons dans la suite la condition (5.47) remplie.

- Considérons maintenant les chemins I et III qui ont les mêmes extrémités $3_a t_a$ et $3_b t_b$.

Quand g est non nul, III est par définition le chemin réel, alors que I est un chemin possible différent du chemin réel III par des termes d'ordre 1 en g (I n'est un chemin réel que pour $g = 0$). D'après le principe de moindre action, comme III est le chemin réel, on a :

$$S_{III} = S_I + O(g^2) \quad (5.49)$$

où S_I est l'action calculée le long du chemin possible I (avec le Lagrangien correspondant à $g \neq 0$).

L'équation (5.46) peut donc être réécrite, à l'ordre 1 inclus en g :

$$\Psi(3_b, t_b) \simeq \Psi(3_a, t_a) e^{iS_I/\hbar} \quad (5.50)$$

Le résultat énoncé plus haut, au § a, est donc bien démontré.

- Supposons maintenant la particule libre ($g = 0$) et affectons d'un indice 0 toutes les quantités relatives à une telle particule. $\Psi^{(0)}(3_b, t_b)$ est la fonction d'onde en $3_b t_b$ de la particule libre ayant l'impulsion p_0 à $t = t_a$; S_I^0 est l'action calculée le long du chemin I, qui est réel pour $g = 0$, avec le Lagrangien correspondant à $g = 0$. En appliquant l'équation (5.41) avec $g = 0$, on a :

$$\Psi^{(0)}(3_b, t_b) = \Psi(3_a, t_a) e^{iS_I^0/\hbar} \quad (5.51)$$

L'état initial $\Psi(3_a, t_a)$ est le même pour $g = 0$ et $g \neq 0$

- Comparons enfin (5.50) et (5.51). Il vient :

$$\Psi(z_b, t_b) = \Psi^0(z_b, t_b) e^{i(S_I - S_I^0)/\hbar} \tag{5.52}$$

Par ailleurs, d'après (5.2),

$$L(z, \dot{z}, g \neq 0) - L(z, \dot{z}, g = 0) = -Mgz = -V(z) \tag{5.53}$$

de sorte que :

$$S_I - S_I^0 = - \int_{t_a}^{t_b} V(z(t)) dt = -Mg \int_{t_a}^{t_b} z(t) dt \tag{5.54}$$

où $z(t)$ correspond au chemin I, c'est à dire est donné par :

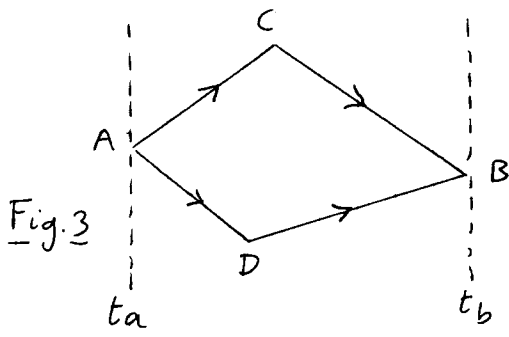
$$z(t) = z_a + \frac{z_b - z_a}{t_b - t_a} (t - t_a) \tag{5.55}$$

En reportant (5.54) dans (5.52), on obtient finalement :

$$\Psi(z_b, t_b) = \Psi^0(z_b, t_b) \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} Mg \int_{t_a}^{t_b} z(t) dt \right\} \tag{5.56}$$

c) Application au calcul du déphasage dû au champ de pesanteur dans un interféromètre atomique.

- Considérons tout d'abord une particule libre ($g=0$) pouvant



suivre 2 chemins ACB ou ADB pour aller de A en B (Voir Fig. 3)

Soit Φ_0 le déphasage entre les 2 fonctions d'onde en B associées à ces 2 chemins.

- Si g n'est plus nul, les fonctions d'onde en B sont perturbées et le déphasage devient $\Phi = \Phi_0 + \delta\Phi$.

D'après les résultats du paragraphe précédent,

$$\delta\Phi = -\frac{i}{\hbar} \int_{ACB} Mg z(t) dt + \frac{i}{\hbar} \int_{ADB} Mg z(t) dt = -\frac{i}{\hbar} \oint Mg z(t) dt \tag{5.57}$$

où \oint désigne l'intégrale le long du contour fermé ACBDA.

④ Expérience de Colella, Overhauser, Werner (Refs 1-4).

a) - Principe de l'expérience

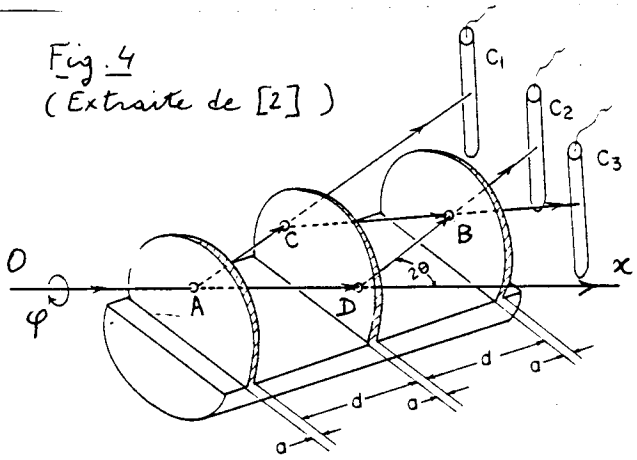


Fig. 4
(Extrait de [2])

- Interféromètre à neutrons formé de 3 lames parallèles découpées dans un monocristal de Silicium (Fig. 4)

- Faisceau de neutrons incident parallèle à Ox.

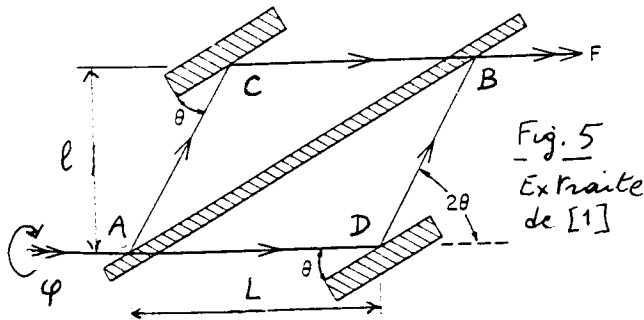
- Diffractions de Bragg en A, B, C, D
↳ Interféromètre avec 2 bras ACB et ADB, les neutrons émergent de B sont détectés par des compteurs ^3He , C_2 et C_3 .

- On tourne l'interféromètre par rapport à l'axe Ox horizontal. Le plan ABCD initialement horizontal, tourne d'un angle φ par rapport à Ox.

- Dans le plan ABCD, la gravité effective est $g \sin \varphi$. Les trajets ACB et ADB s'effectuant à des hauteurs différentes, acquièrent des déphasages gravitationnels différents et les signaux d'interférence mesurés par C_2 et C_3 changent. On mesure la variation de ces signaux en fonction de φ .

b) Schématisation - Calcul du déphasage gravitationnel

- Une étude détaillée de la propagation des neutrons dans le monocristal sort du cadre de ce cours. Nous nous contenterons ici d'utiliser les résultats d'une telle étude qui sont essentiels pour la compréhension de l'expérience C.O.W.



Tout se passe comme si la face de chaque lame cristalline sur laquelle arrive le faisceau de neutrons avec un angle θ se comportait comme une lame semi-réfléchissante (Voir Fig. 5).

- Avant d'aller plus loin, il convient également de souligner que le phénomène de diffraction de Bragg est très sensible à l'énergie et à la direction des neutrons incidents.

Seuls, les neutrons ayant la bonne énergie pour avoir une longueur d'onde de de Broglie satisfaisant la condition de Bragg sont réfléchis partiellement en A, B, C, D. Les autres traversent l'appareil sans être réfléchis et ne participent pas au signal d'interférence. Il se produit donc naturellement une sélection très étroite en vitesses, qui permet de considérer le faisceau incident comme étant monochromatique.

Il en est de même pour l'angle θ d'incidence qui doit être très bien défini pour que la réflexion se produise.

Si le temps de passage des neutrons dans l'interféromètre est suffisamment court, la variation d'énergie cinétique et la variation de l'angle θ dues à la gravité restent suffisamment petites pour que la diffraction de Bragg continue à se produire.

- Pour calculer le déphasage gravitationnel $\delta\Phi$ entre les 2 bras ACB et ADB, nous utilisons le résultat du § 3c précédent et calculons l'intégrale $\int z(t) dt$ le long des chemins ACB et ADB correspondant à $\bar{g} = 0$ et représentés sur la figure 5.

Les contributions du segment AC sur le 1^{er} chemin ACB, et celle du DB sur le 2^{ème} chemin ADB, sont égales et se compensent. Les valeurs de z restent constantes le long des segments CB et AB et diffèrent l'une de l'autre de $z_C - z_A = l \sin \varphi$ où l est la distance entre AD et CB (voir Fig. 5) et φ l'angle du plan ABCD avec le plan horizontal. Par ailleurs, le neutron arrivant à la vitesse v_0 , met un temps $t_B - t_C = CB/v_0 = L/v_0$ pour aller de C à B, ou encore de A à D. L'équation (5.57) donne alors :

$$\delta\Phi = -\frac{1}{\hbar} M g (z_C - z_A) (t_B - t_C) = -\frac{1}{\hbar} M g l \sin \varphi \frac{L}{v_0} \quad (5.58)$$

qu'on peut encore écrire :

$$\delta\Phi = - \frac{MgS}{\hbar v_0} \sin \varphi \tag{5.59}$$

où $S = L\ell$ (5.60)

est la surface enfermée par les 2 bras de l'interféromètre. On peut encore introduire la longueur d'onde de de Broglie λ_0 du neutron :

$$\lambda_0 = \frac{h}{Mv_0} \tag{5.61}$$

ce qui donne pour $\delta\Phi$: $\delta\Phi = - 2\pi \frac{M^2 g S \lambda_0}{\hbar^2} \sin \varphi$ (5.62)

De (5.62), on peut enfin déduire le nombre de franges ΔN qui défilent quand on fait varier φ de $+\pi/2$ à $-\pi/2$:

$$\Delta N = \frac{2|\delta\Phi|}{2\pi} = 2 \frac{M^2 g S \lambda_0}{\hbar^2} \tag{5.63}$$

C) Discussion - Ordres de grandeur

- Les caractéristiques de l'interféromètre n'interviennent que par la surface S et la longueur d'onde de de Broglie λ_0 du neutron. Si l'on prend $S = 6 \text{ cm}^2$, $\lambda_0 = 1.4 \text{ \AA}$, on obtient (avec $g = 10 \text{ m/s}^2$, $M = 1.67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$, $\hbar = 6.6 \cdot 10^{-34} \text{ Joule}\cdot\text{sec}$), $\Delta N \approx 10$, ce qui est tout à fait appréciable.

On peut encore écrire Φ donné en (5.58) sous forme d'un rapport entre 2 énergies

$$\Phi = - \frac{Mg\ell \sin \phi}{\hbar/T} \tag{5.64}$$

Le numérateur de (5.64) est la différence d'énergie potentielle de gravitation entre les bras CB et AD, le dénominateur est l'incertitude d'énergie associée au temps de traversée de l'appareil :

$$T = \frac{L}{v_0} \tag{5.65}$$

- Revenons à la condition de validité (5.47) des calculs du § 3 qui conduisent à (5.57).

Pour des neutrons, la longueur élémentaire ξ_0 donnée en (5.48) est de l'ordre de $7 \mu\text{m} = 7 \cdot 10^{-6} \text{ m}$. Pour $\lambda_0 \approx 1.4 \text{ \AA}$, la vitesse v_0 déduite de (5.61) est de l'ordre de $3 \cdot 10^3 \text{ m/s}$, ce qui donne pour le temps de traversée T écrit en (5.65) avec $L \approx 3 \text{ cm}$, un temps T de l'ordre de 10^{-5} sec . Pendant un tel temps, le neutron tombe de $\frac{1}{2}gT^2$, c'est à dire de l'ordre de $5 \text{ \AA} = 5 \cdot 10^{-10} \text{ m}$, ce qui est tout à fait négligeable devant ξ_0 .

De même, la variation de vitesse verticale, $\delta v = gT$ est de l'ordre de 10^{-4} m/s , ce qui conduit à des variations angulaires $\delta\theta \approx \delta v/v_0$, de l'ordre de $3 \cdot 10^{-8}$, suffisamment faibles pour que la diffraction de Bragg ne soit pas bloquée.

- Evaluons un ordre de grandeur du déphasage que l'on obtient en remplaçant les neutrons par des photons.

La fréquence d'un photon change très légèrement quand il change d'altitude dans un champ de pesanteur. Pour $\varphi = \pi/2$, la variation de fréquence quand on passe du bras CB au bras AD

est de l'ordre de $\delta\omega/\omega = g\ell/c^2$. On en déduit que le déphasage $\delta\Phi_{\text{photon}}$ pour un photon se propageant dans les 2 bras de l'interféromètre de la figure 5 est de l'ordre de

$$\delta\Phi_{\text{photon}} \approx \delta\omega \frac{L}{c} = \frac{g\ell}{c^2} \omega \frac{L}{c} = \frac{gSL\omega}{c^3} \quad (5.66)$$

En comparant $\delta\Phi_{\text{photon}}$ à $\delta\Phi_{\text{neutron}}$ donné en (5.58), on obtient

$$\frac{\Phi_{\text{photon}}}{\Phi_{\text{neutron}}} \approx \frac{\hbar\omega}{Mc^2} \frac{v_0}{c} \ll 1 \quad (5.67)$$

les photons sont beaucoup moins sensibles que les neutrons aux effets gravitationnels.

La propriété précédente est d'ailleurs mise à profit pour déterminer, au moyen d'interférences observées sur des rayons X, les variations très faibles de longueur qui résultent des contraintes mécaniques apparaissant lorsqu'on tourne l'interféromètre.

d) Exemple de résultats expérimentaux

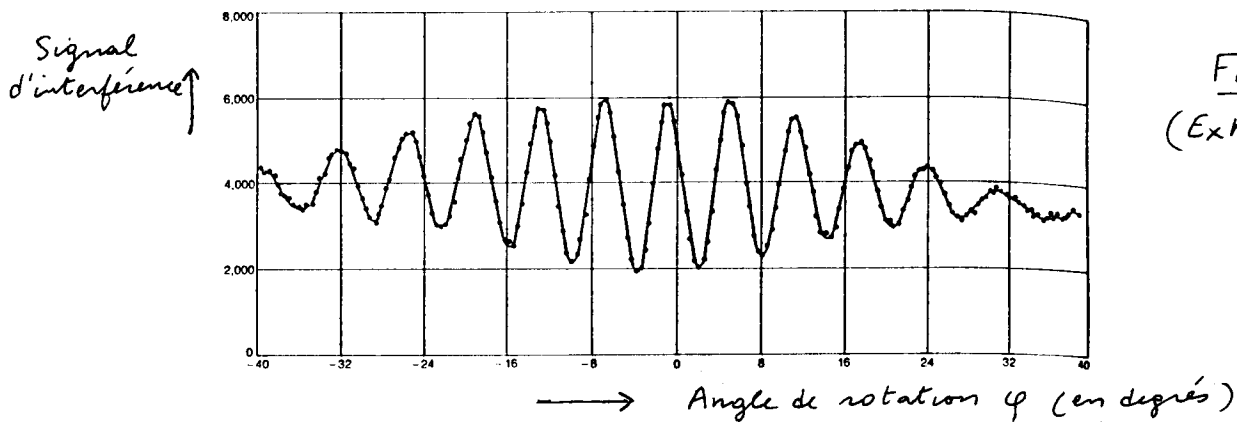


Fig. 6
(Extrait de [4])

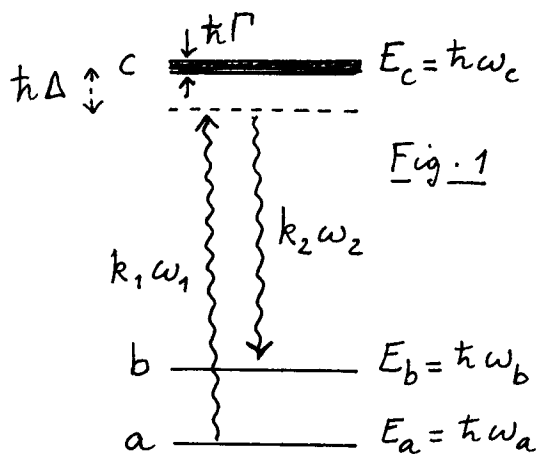
La diminution de contraste des franges quand φ augmente est interprétée par les auteurs de l'expérience comme étant due à un gauchissement de l'interféromètre dû aux contraintes mécaniques apparaissant quand on tourne l'appareil.

Références

- (1) A.W. Overhauser and R. Colella, Phys. Rev. Lett. 33, 1237 (1974)
- (2) R. Colella, A.W. Overhauser and S.A. Werner, Phys. Rev. Lett. 34, 1472 (1975)
- (3) J.L. Standenmann, S.A. Werner, R. Colella and A.W. Overhauser Phys. Rev. A21, 1419 (1980)
- (4) D.M. Greenberger and A.W. Overhauser Scientific American, 242, 54 (1980)

Buts de ce cours

- Décrire une expérience très récente d'interférométrie atomique (utilisant des atomes de Sodium, et non des neutrons comme l'expérience de Colella, Overhauser, Werner), mettant en évidence des effets d'interférence quantique sensibles au champ de pesanteur.
- Cette expérience utilise des transitions Raman stimulées entre les 2 niveaux hyperfins de l'état fondamental de l'atome de Sodium, pour séparer un paquet d'ondes en 2 composantes cohérentes, puis pour les recombiner. Nous commencerons donc par montrer que les résultats du cours II relatifs à des transitions à 1 photon peuvent être généralisés à des transitions Raman stimulées à 2 photons.

① Transitions Raman stimulées.a) - Diagramme d'énergie et ondes laser.

- 2 sous-niveaux stables a et b (en fait, 2 niveaux hyperfins)

$$E_b - E_a = \hbar(\omega_b - \omega_a) = \hbar\omega_{ba} \quad (6.1)$$

- 1 niveau excité c, de largeur naturelle Γ . Les fréquences

$$\omega_{ca} = \omega_c - \omega_a \quad \omega_{cb} = \omega_c - \omega_b \quad (6.2)$$

sont les fréquences des 2 raies optiques $a \leftrightarrow c$ et $b \leftrightarrow c$.

- 2 ondes laser de fréquences ω_1 et ω_2 se propagent le long de Oz, k_1 et k_2 étant les valeurs algébriques des vecteurs d'onde le long de Oz. L'onde $k_1\omega_1$ excite la transition $a \leftrightarrow c$, l'onde $k_2\omega_2$ la transition $b \leftrightarrow c$.

- Les fréquences ω_1 et ω_2 sont réglées au voisinage de la résonance Raman : $\omega_1 - \omega_2$ est très proche de ω_{ba} .

Par contre, ω_1 est suffisamment éloigné de ω_{ca} (et donc ω_2 de ω_{cb}) pour que l'excitation réelle des transitions $a \leftrightarrow c$ et $b \leftrightarrow c$ puisse être négligée :

$$\omega_1 - \omega_2 \simeq \omega_{ba} \quad (6.3)$$

$$|\omega_1 - \omega_{ca}| = \Delta \simeq |\omega_2 - \omega_{cb}| \gg \Gamma \quad (6.4)$$

- Buts de ce § 1

- Montrer qu'on peut éliminer l'état c des équations du mouvement et se ramener à un problème à 2 niveaux a et b couplés par un hamiltonien effectif.
- Montrer que les équations obtenues sont tout à fait

analogues aux équations (2.15) du cours II décrivant l'évolution de 2 états a et b couplés par un champ laser excitant la transition $\bar{a} \rightarrow 1$ photon $a \leftrightarrow b$.

- A partir des champs laser ω_1, k_1 et ω_2, k_2 , déterminer le champ laser fictif équivalent pilotant la transition $a \leftrightarrow b$.

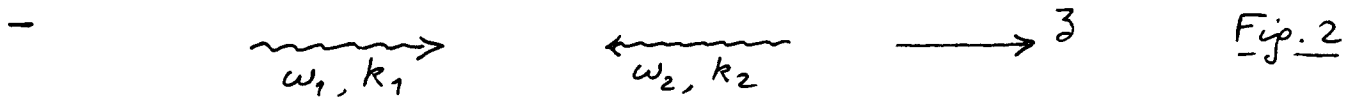
b) Famille d'états d'impulsion-énergie couplés.

- Partons de l'état $|a, p\rangle$: atome dans l'état a avec une impulsion p le long de Oz . L'interaction avec le laser ω_1, k_1 couple cet état à l'état $|c, p + \hbar k_1\rangle$, dont l'impulsion augmente d'une quantité correspondant à l'impulsion $\hbar k_1$ du photon absorbé. L'état $|c, p + \hbar k_1\rangle$ est couplé, non seulement à l'état $|a, p\rangle$, mais également, par interaction avec l'onde ω_2, k_2 , à l'état $|b, p + \hbar k_1 - \hbar k_2\rangle$. L'état $|b, p + \hbar(k_1 - k_2)\rangle$ n'est couplé qu'à l'état $|c, p + \hbar k_1\rangle$.

- Tant que l'émission spontanée peut être négligée, l'état du système évolue donc à l'intérieur du sous-espace $\mathcal{F}(p)$, de dimension 3, sous-tendu par les 3 états précédents :

$$\mathcal{F}(p) = \{ |a, p\rangle, |c, p + \hbar k_1\rangle, |b, p + \hbar(k_1 - k_2)\rangle \} \quad (6.5)$$

- Les 2 états $|a, p\rangle$ et $|b, p + \hbar(k_1 - k_2)\rangle$, qui sont indirectement couplés via $|c, p + \hbar k_1\rangle$, appartiennent à la multiplicité $\{a, b\}$ des sous-niveaux de l'état fondamental, et ont des impulsions qui diffèrent de $\hbar(k_1 - k_2)$.



Si les ondes ω_1, k_1 et ω_2, k_2 se propagent dans des sens opposés le long de Oz (voir Fig. 2), k_1 et k_2 sont de signes opposés, et $|k_1 - k_2|$ est de l'ordre de $2k$, où $k \approx |k_1| \approx |k_2|$.

La transition Raman stimulée $|a, p\rangle \rightarrow |c, p + \hbar(k_1 - k_2)\rangle$ s'accompagne donc d'un transfert d'impulsion $\hbar(k_1 - k_2)$, de l'ordre de 2 fois l'impulsion d'un photon optique.

C'est là l'avantage essentiel des transitions Raman stimulées, par rapport aux transitions micro-ondes directes entre a et b , qui ne communiqueraient à l'atome que l'impulsion d'un photon micro-onde, tout à fait négligeable.

c) Equation de Schrödinger

- A $t=0$, l'atome est supposé être dans l'état $|a, p\rangle$. Il est soumis à 2 impulsions laser ω_1, k_1 et ω_2, k_2 . Si le désaccord Δ (voir Fig. 1) est suffisamment grand, et si la durée τ des impulsions laser est suffisamment courte, les processus d'émission spontanée auront un poids très faible, et le vecteur d'état du système global atome + photons de fluorescence sera très peu différent de sa projection dans le sous-espace $\mathcal{F}(p)$, correspondant à 0 photon de fluorescence :

$$\Pi_p |\Psi(t)\rangle = c_a(t) |a, p\rangle + c_c(t) |c, p + \hbar k_1\rangle + c_b(t) |b, p + \hbar(k_1 - k_2)\rangle \quad (6.6)$$

où Π_p est le projecteur sur $\mathcal{F}(p)$.

- De manière plus précise, l'évolution de $\Pi_p |\psi(t)\rangle$ est décrite par un hamiltonien effectif, comprenant les couplages atome-lasers et les énergies des 3 états de $\mathcal{F}(p)$, une partie imaginaire $-i\hbar\Gamma/2$ étant ajoutée à l'énergie de l'état c pour décrire son instabilité radiative (voir Ref. 4).

Si l'on pose, comme dans le cours II :

$$c_a(t) = \gamma_a(t) e^{-i\omega_{a,p}t}, \quad c_c(t) = \gamma_c(t) e^{-i\omega_{c,p+\hbar k_1}t}, \quad c_b(t) = \gamma_b(t) e^{-i\omega_{b,p+\hbar(k_1-k_2)}t} \quad (6.7)$$

$$\text{où } \omega_{a,p} = \omega_a + \frac{p^2}{2M\hbar}, \quad \omega_{b,p+\hbar k_1} = \omega_b + \frac{(p+\hbar k_1)^2}{2M\hbar}, \quad \omega_{c,p+\hbar(k_1-k_2)} = \omega_c + \frac{[p+\hbar(k_1-k_2)]^2}{2M\hbar} \quad (6.8)$$

on obtient les équations suivantes pour $\gamma_a(t), \gamma_b(t), \gamma_c(t)$ qui généralisent les équations (2.15) du cours II :

$$\begin{cases} \dot{\gamma}_a(t) = -i \frac{\Omega_1(t)}{2} e^{i(\Delta_1 t + \varphi_1)} \gamma_c(t) & (6.9.a) \\ \dot{\gamma}_b(t) = -i \frac{\Omega_2(t)}{2} e^{i(\Delta_2 t + \varphi_2)} \gamma_c(t) & (6.9.b) \\ \dot{\gamma}_c(t) = -\frac{\Gamma}{2} \gamma_c(t) - i \frac{\Omega_1(t)}{2} e^{-i(\Delta_1 t + \varphi_1)} \gamma_a(t) - i \frac{\Omega_2(t)}{2} e^{-i(\Delta_2 t + \varphi_2)} \gamma_b(t) & (6.9.c) \end{cases}$$

Dans les équations (6.9), $\Omega_1(t)$ et $\Omega_2(t)$ sont les fréquences de Rabi associées aux champs $\omega_1 k_1$ et $\omega_2 k_2$, φ_1 et φ_2 les phases de ces champs, Δ_1 et Δ_2 étant définis par les équations

$$\Delta_1 = \omega_{a,p} + \omega_1 - \omega_{c,p+\hbar k_1}, \quad \Delta_2 = \omega_{b,p+\hbar(k_1-k_2)} + \omega_2 - \omega_{c,p+\hbar k_1} \quad (6.10)$$

qui généralisent (2.16).

d) Elimination adiabatique de l'état excité

- Pour des intensités laser suffisamment faibles et des désaccords suffisamment grands, $\gamma_a(t)$ et $\gamma_b(t)$ évoluent beaucoup plus lentement que $\gamma_c(t)$: les temps de pompage optique entre a et b sont beaucoup plus longs que la durée de vie radiative $1/\Gamma$ de c. Dans l'équation (6.9.c), on peut donc considérer que $\gamma_a(t)$ et $\gamma_b(t)$ restent constants pendant le temps de réponse $2/\Gamma$ de $\gamma_c(t)$. Il suffit alors de calculer la solution forcée de (6.9.c), qui donne, à chaque instant t, $\gamma_c(t)$ en fonction de $\gamma_a(t)$ et $\gamma_b(t)$

$$\gamma_c(t) = \frac{\Omega_1(t)/2}{\Delta_1 + i\frac{\Gamma}{2}} \gamma_a(t) e^{-i(\Delta_1 t + \varphi_1)} + \frac{\Omega_2(t)/2}{\Delta_2 + i\frac{\Gamma}{2}} \gamma_b(t) e^{-i(\Delta_2 t + \varphi_2)} \quad (6.11)$$

puis de reporter une telle solution dans les équations (6.9.a) et (6.9.b) qui deviennent ainsi un système fermé de 2 équations pour γ_a et γ_b

$$\begin{cases} \dot{\gamma}_a(t) = -i \frac{[\Omega_1(t)/2]^2}{\Delta_1 + i\frac{\Gamma}{2}} \gamma_a(t) - \frac{i}{2} \frac{\Omega_1(t)\Omega_2(t)/2}{\Delta_2 + i\frac{\Gamma}{2}} e^{i[(\Delta_1 - \Delta_2)t + \varphi_1 - \varphi_2]} \gamma_b(t) & (6.12.a) \\ \dot{\gamma}_b(t) = -i \frac{[\Omega_2(t)/2]^2}{\Delta_2 + i\frac{\Gamma}{2}} \gamma_b(t) - \frac{i}{2} \frac{\Omega_1(t)\Omega_2(t)/2}{\Delta_1 + i\frac{\Gamma}{2}} e^{-i[(\Delta_1 - \Delta_2)t + \varphi_1 - \varphi_2]} \gamma_a(t) & (6.12.b) \end{cases}$$

- Des équations (6.10) on déduit :

$$\Delta_1 - \Delta_2 = \omega_1 - \omega_2 - [\omega_{ba} + (k_1 - k_2)v + \hbar(k_1 - k_2)^2/2M] \quad (6.13)$$

où

$$v = p/M \quad (6.14)$$

e) Discussion physique

- Les équations (6.12) permettent de considérer que $\gamma_a(t)$ et $\gamma_b(t)$ évoluent sous l'effet d'un hamiltonien effectif non hermitique

- Durées de vie et déplacements lumineux des états a et b

Dans l'équation (6.12.a), le coefficient de $\gamma_a(t)$ peut être écrit $-\frac{\Gamma'_a}{2} - i\delta'_a$ où :

$$\delta'_a = \frac{[\Omega_1(t)/2]^2}{\Delta_1^2 + \Gamma^2/4} \Delta_1, \quad \Gamma'_a = \frac{[\Omega_1(t)/2]^2}{\Delta_1^2 + \Gamma^2/4} \Gamma \quad (6.15)$$

$\hbar\delta'_a$ est le déplacement lumineux de l'état a. En \hat{z} à l'excitation de la transition $a \leftrightarrow c$ par l'onde ω_1, k_1 , Γ'_a le taux de départ de cet état par absorption d'un photon ω_1, k_1 . A partir du coefficient de $\gamma_b(t)$ dans (6.12.b), on peut introduire des quantités analogues δ'_b et Γ'_b pour b.

Comme nous avons supposé $|\Delta_1|, |\Delta_2| \gg \Gamma$ (voir Eq. (6.4)), Γ'_a est très petit devant δ'_a . Nous supposons ici de plus que la durée τ des impulsions laser est suffisamment courte pour en on puisse négliger les probabilités de départ $\Gamma'_a \tau$ et $\Gamma'_b \tau$ des états a et b par absorption réelle d'un photon.

Si les désaccords Δ_1 et $\Delta_2 \approx \Delta_1$ sont très grands devant la structure hyperfine des niveaux fondamental et excité, on peut montrer (voir Ref. 5) que l'effet des déplacements lumineux dans l'état fondamental est équivalent à celui d'un champ magnétique fictif. Si les niveaux a et b sont des sous-niveaux Zeeman relatifs à une transition hyperfine indépendante du champ magnétique (par exemple, transition $m_F=0 \rightarrow m_F=0$), la fréquence ω_{ba} de la transition hyperfine n'est pas modifiée par les déplacements lumineux. Dans ce cas, on peut ignorer, non seulement Γ'_a et Γ'_b , mais aussi δ'_a et $\delta'_b = \delta'_a$, de sorte que seuls subsistent dans les équations (6.12) les couplages non diagonaux. Une telle situation sera supposée être réalisée dans la suite.

- Couplage effectif entre les niveaux a et b

Si on ne conserve que les couplages non-diagonaux dans les équations (6.12), elles prennent une forme tout à fait analogue à celle des équations (2.15) du cours II. Tout se passe comme si les 2 états $|a, p\rangle$ et $|b, p+\hbar(k_1-k_2)\rangle$ étaient directement couplés, la fréquence de Rabi effective Ω_{eff} étant donnée par

$$\Omega_{eff}(t) = \frac{\Omega_1(t)\Omega_2(t)}{2\Delta} \quad (6.16)$$

Nous avons négligé $i\Gamma/2$ devant Δ_1 et Δ_2 et remplacé $\Delta_1 \approx \Delta_2$ par $\Delta = \omega_1 - \omega_{ca} \approx \omega_2 - \omega_{ba}$.

Le paramètre Δ des équations (2.15) est remplacé ici par $\Delta_1 - \Delta_2$, donné en (6.13) et représentant l'écart à résonance de la transition Raman, incluant l'effet Doppler $(k_1 - k_2)v$ et l'effet de recul $\hbar(k_1 - k_2)^2/2M$. La phase φ du champ effectif, de fréquence $\omega_1 - \omega_2$ et de vecteur d'onde $k_1 - k_2$ couplant directement $|a, p\rangle$ et $|b, p+\hbar(k_1-k_2)\rangle$, est $\varphi_1 - \varphi_2$.

Il est donc finalement possible d'appliquer tous les résultats du cours II concernant l'effet d'une impulsion laser, en remplaçant Ω_1 par Ω_{eff} , ω_2 par $\omega_1 - \omega_2$, k_2 par $k_1 - k_2$, φ par $\varphi_1 - \varphi_2$. En particulier, on peut définir des transitions Raman stimulées $\pi/2, \pi$.

- Sélectivité en vitesse

Les niveaux a et b sont stables et la largeur de la résonance Raman n'est limitée que par le temps de transit des atomes dans les ondes laser, qui peut être très long si l'on utilise des atomes lents. Notons également que les fréquences ω_1 et ω_2 sont générées à partir de la même onde laser (et un cristal électrooptique), de sorte que la différence $\omega_1 - \omega_2$ n'est pas sensible aux fluctuations de fréquence ("jitter") du laser. Si k_1 et k_2 ont des signes opposés, le lien entre la largeur Δv de la raie Raman et la dispersion Δv de vitesses qui donnerait la même largeur par effet Doppler est

$$\frac{\Delta v}{c} = \frac{\Delta v}{v_1 + v_2} \tag{6.17}$$

où $v_1 = \omega_1 / 2\pi$, $v_2 = \omega_2 / 2\pi$. Si l'on prend une largeur Δv , de l'ordre de 1 KHz (incluant l'élargissement radiatif dû à Γ_{eff}) aisément réalisable, on obtient Δv de l'ordre de 0.3 mm/sec (pour l'atome de Sodium). La sélectivité en vitesse d'une telle méthode est donc extrêmement élevée (voir Ref. 1).

② Principe de l'expérience d'interférométrie (Refs. 2 et 3)

a- Séquence d'impulsions

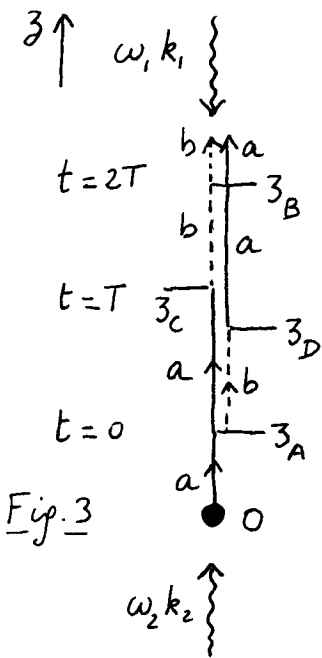


Fig. 3

- On part d'un nuage d'atomes piégés dans un piège magnétooptique (point 0 de la Fig. 3) (et refroidis)
- On coupe le piège et on lance les atomes vers le haut (au moyen d'une mélasse en mouvement) avec une vitesse $v = p / M$, après les avoir pompés optiquement dans l'état a.
- A un instant ultérieur t, pris pour origine des temps, la vitesse et la position du paquet d'ondes étant égales à v_0 et z_A , on applique une impulsion Raman stimulée $\pi/2$ au moyen des 2 ondes laser k_1, ω_1 et k_2, ω_2 (flèches ondulées). Le paquet d'ondes se sépare en 2 composantes correspondant aux 2 états internes a (traits pleins) et b (traits tiretés). Les impulsions correspondantes sont p pour l'état a, $p + \hbar(k_1 - k_2)$ pour l'état b. Comme k_1 est négatif (voir Fig. 3) et que $|k_1| > |k_2|$, l'impulsion associée à b est plus faible que celle associée à a. Le paquet d'ondes associé à a va plus vite que celui associé à b et prend de l'avance sur ce dernier.
- A l'instant $t = T$, les positions des 2 paquets d'ondes étant égales à z_C et z_D , on applique une impulsion Raman stimulée π qui échange les impulsions et les états internes des 2 paquets d'ondes. Le paquet d'ondes qui était en retard va alors devenir le plus rapide des 2 et rattraper progressivement l'autre.
- A l'instant $t = 2T$, quand les 2 paquets d'ondes se sont rejoints au point z_B , on applique de nouveau une impulsion Raman stimulée $\pi/2$ qui va remélanger de manière cohérente les 2 paquets d'ondes.
- On détecte ensuite l'atome dans l'état b en excitant au

moyens d'une impulsion résonnante, l'atome de b à c , puis en ionisant l'atome à partir de l'état c , grâce à une autre impulsion laser, ce qui donne naissance à des ions que l'on détecte.

b - Analogie avec une expérience d'échos de photons.

- La séquence des 3 impulsions $\pi/2 - \pi - \pi/2$ est très analogue à celle correspondant à l'expérience d'écho analysée dans le cours III.
- Les 2 chemins partant de a et arrivant à b qui interfèrent sont les chemins $a \rightarrow a \rightarrow b \rightarrow b$ (chemin de gauche de la figure 3) et $a \rightarrow b \rightarrow a \rightarrow b$ (partie de droite).
- Comme le paquet d'ondes associé au chemin de gauche est toujours en dephasage de celui associé au chemin de droite, son énergie gravitationnelle va être plus élevée et on s'attend à ce qu'il y ait un déphasage d'origine gravitationnelle entre les 2 paquets d'ondes. Ce déphasage sera calculé dans le § 3 ci-dessous. Auparavant, nous donnons une représentation des 2 chemins classiques dans l'espace-temps

c - Représentation des chemins classiques dans l'espace-temps

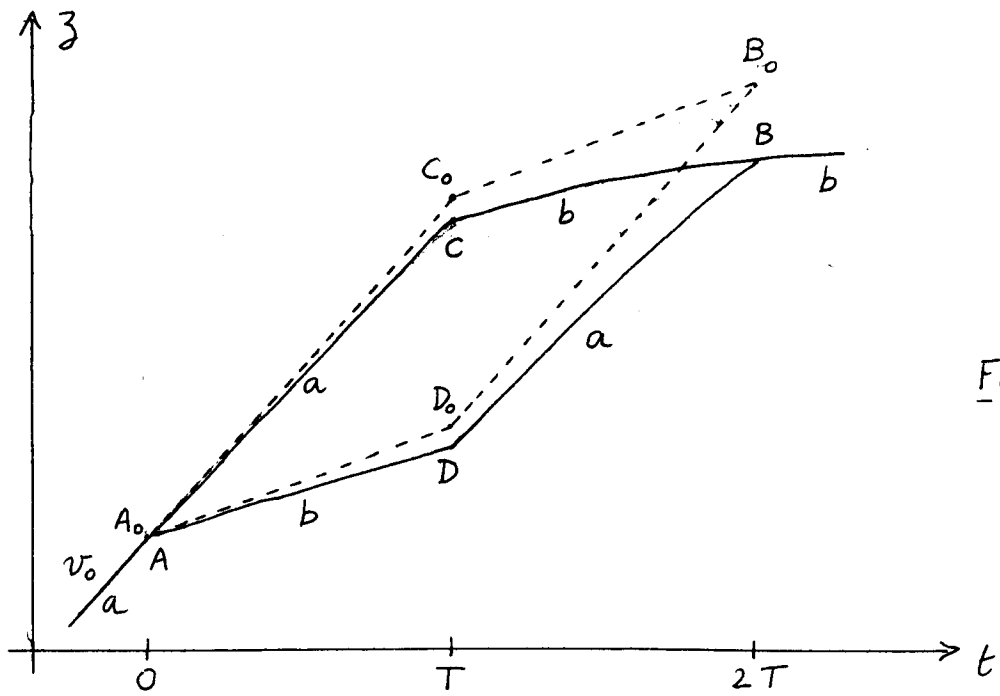


Fig. 4

- Au point $A_0 = A$, d'abscisse $t=0$ et d'ordonnée $z_A = z_{A_0}$ arrive une trajectoire de vitesse v_0 (pente de la droite arrivant en A)
- Les droites en traits tirés représentent les trajectoires en l'absence de gravitation ($g=0$). A $t=0$, on voit apparaître une nouvelle droite, de pente $[p_0 + \hbar(k_1 - k_2)]/M$, associée à b . On en déduit qu'à $t=T$

$$C_0 D_0 = z_{D_0} - z_{C_0} = \frac{\hbar(k_1 - k_2)T}{M} \quad (6.18)$$

Puis les pentes des 2 droites s'échangent après $t=T$, et les 2 droites se recoupent en B_0 pour $t=2T$. Le quadrilatère $A_0 C_0 B_0 D_0 A_0$ est un parallélogramme.

- Les courbes en traits pleins de la figure 4 représentent les trajectoires en présence de pesanteur ($g \neq 0$).

A chaque instant t , la différence d'ordonnée entre la courbe en traits pleins et la droite en traits tirés associée est égale à $\frac{1}{2}gt^2$. On en déduit que les courbes en traits pleins se recoupent (comme les droites en traits tirés) en $t = 2T$ au point B et que

$$z_C - z_{C_0} = z_D - z_{D_0} = -\frac{1}{2}gT^2 \tag{6.19}$$

$$z_B - z_{B_0} = -\frac{1}{2}g(2T)^2 = -2gT^2 \tag{6.20}$$

③ Calcul du déphasage gravitationnel

- Nous allons utiliser les résultats du cours IV et du cours V pour calculer la fonction d'onde à la sortie de l'interféromètre (juste après le point B de la figure 4) en fonction de la fonction d'onde à l'entrée, évaluée juste avant le point A par lequel passent les chemins classiques réels aboutissant à B

- Nous supposons que l'état entrant est un mélange statistique d'ondes planes. Nous commençons donc par faire le calcul pour une onde plane entrante $p_0 = Mv_0$, puis moyennons sur la vitesse v_0 les probabilités $P_{a \rightarrow b}$ de sortir dans b si l'on est entré dans a.

- D'après la fin du cours IV, le déphasage le long de chaque chemin ACB ou ADB est une somme de 3 contributions.

(i) Propagation dans le champ de pesanteur entre 2 impulsions laser, faisant intervenir les actions classiques $S_{cl}(AC)$, $S_{cl}(CB)$, $S_{cl}(AD)$, $S_{cl}(DB)$ calculées pour les chemins réels AC, CB, AD, DB

(ii) Facteurs de phase et éléments de matrice S associés aux interactions avec les ondes laser en A à $t=0$, en C et D à $t=T$, en B à $t=2T$.

(iii) Facteurs de phase dus à l'évolution de l'état interne. Ils sont égaux respectivement à $e^{-iE_a T/\hbar} e^{-iE_b T/\hbar}$ pour le chemin ACB et à $e^{-iE_b T/\hbar} e^{-iE_a T/\hbar}$ pour le chemin ADB. Ils sont donc égaux pour les 2 chemins et ne contribuent pas au déphasage $\delta\phi$ à la sortie de l'interféromètre.

a) Déphasage dû à la propagation dans le champ gravitationnel.

- Rappelons tout d'abord que l'action classique $S_{cl}(z_b t_b, z_a t_a)$ pour un chemin réel reliant $z_a t_a$ à $z_b t_b$ s'écrit (voir Eq. (5.10)).

$$S_{cl}(z_b t_b, z_a t_a) = \frac{M}{2} \frac{(z_b - z_a)^2}{t_b - t_a} - \frac{Mg}{2} (z_b + z_a)(t_b - t_a) - \frac{Mg^2}{24} (t_b - t_a)^3 \tag{6.21}$$

Le dernier terme donne la même contribution pour $S_{cl}(AC)$ et $S_{cl}(AD)$, de même que pour $S_{cl}(CB)$ et $S_{cl}(DB)$. Il ne contribue donc pas à $\delta\phi$

- Calculons tout d'abord $S_{cl}(AC) - S_{cl}(AD)$. D'après (6.21)

$$\begin{aligned} S_{cl}(AC) - S_{cl}(AD) &= \frac{M}{2T} \left\{ (z_C - z_A)^2 - (z_D - z_A)^2 - gT^2 [(z_C + z_A) - (z_D + z_A)] \right\} \\ &= \frac{M}{2T} (z_C - z_D) [z_C + z_D - 2z_A - gT^2] \end{aligned} \tag{6.22}$$

- Un calcul analogue donne

$$\begin{aligned} S_{cl}(CB) - S_{cl}(DB) &= \frac{M}{2T} \left\{ (z_B - z_C)^2 - (z_B - z_D)^2 - gT^2 [(z_C + z_B) - (z_D + z_B)] \right\} \\ &= \frac{M}{2T} (z_C - z_D) [z_C + z_D - 2z_B - gT^2] \end{aligned} \quad (6.23)$$

- Ajoutons (6.23) à (6.22) et réexprimons dans le crochet z_A, z_B, z_C, z_D en fonction de $z_{A_0}, z_{B_0}, z_{C_0}, z_{D_0}$ et gT^2 grâce aux équations (6.19) et (6.20). Il vient

$$\begin{aligned} S_{cl}(ACB) - S_{cl}(ADB) &= \frac{M}{T} (z_C - z_D) [z_C + z_D - z_A - z_B - gT^2] \\ &= \frac{M}{T} (z_C - z_D) [z_{C_0} + z_{D_0} - z_{A_0} - z_{B_0}] = 0 \end{aligned} \quad (6.24)$$

En effet, le quadrilatère $A_0 C_0 B_0 D_0 A_0$ étant un parallélogramme, on a $z_{A_0} + z_{B_0} = z_{C_0} + z_{D_0}$

- Conclusion : le déphasage, dû à la propagation, entre les 2 chemins ACB et ADB est nul. Un tel résultat diffère de celui trouvé au cours V pour l'expérience C.O.W. Une telle différence est due au fait que les changements d'impulsion en A, C, D, B s'accompagnent ici d'un changement d'énergie cinétique, alors qu'ils correspondraient à une réflexion élastique dans le cours IV. L'intégrale de $MV(t)^2/2$ le long du contour fermé ACBDA n'est pas nulle et compense l'intégrale de $-Mgz(t)$

b) Déphasage dû aux interactions avec les ondes laser

Le long du chemin ACB

- Pour simplifier les notations, nous posons

$$k = k_1 - k_2 \quad \omega = \omega_1 - \omega_2 \quad \varphi = \varphi_1 - \varphi_2 \quad (6.25)$$

et notons $\varphi_I, \varphi_{II}, \varphi_{III}$ les valeurs de φ en $t=0, t=T, t=2T$

- On obtient alors

$$- \left[S_{aa}^{(1)} \right] \left[S_{ba}^{(2)} e^{+i \left[k(z_{C_0} - \frac{1}{2} gT^2) - \omega T - \varphi_{II} \right]} \right] \left[S_{bb}^{(3)} \right] \quad (6.26)$$

On a utilisé (6.19) pour remplacer z_C par $z_{C_0} - \frac{1}{2} gT^2$

Le long du chemin ADB

Un calcul analogue donne

$$\begin{aligned} & \left[S_{ba}^{(1)} e^{+i \left[k z_{A_0} - \omega \times 0 - \varphi_I \right]} \right] \left[S_{ab}^{(2)} e^{-i \left[k(z_{D_0} - \frac{1}{2} gT^2) - \omega T - \varphi_{II} \right]} \right] \times \\ & \times \left[S_{ba}^{(3)} e^{+i \left[k(z_{B_0} - 2gT^2) - 2\omega T - \varphi_{III} \right]} \right] \end{aligned} \quad (6.27)$$

Conclusion

Pour des impulsions $\pi/2, \pi, \pi/2$ le produit des modules des éléments de matrice S est le même pour (6.26) et (6.27).

En utilisant $z_{C_0} + z_{D_0} = z_{A_0} + z_{B_0}$, on obtient pour le déphasage $\delta\phi$ entre (6.26) et (6.27)

$$\delta\phi = -|k_1 - k_2| gT^2 + (\varphi_I - 2\varphi_{II} + \varphi_{III}) \quad (6.28)$$

$\delta\phi$ est aussi le déphasage global entre les 2 chemins ACB et ADB puisque la contribution de la propagation dans le champ de gravitation est nulle.

4) Discussion physique

- Le déphasage $\delta\phi$ est indépendant de la vitesse initiale v_0 . Il demeure donc inchangé après moyenne sur v_0 .
On peut également utiliser un tel déphasage pour étudier l'évolution d'un paquet d'ondes (superposition linéaire et non mélange statistique d'ondes planes), puisque chaque onde plane du paquet d'ondes donne 2 ondes ayant toujours le même déphasage.
- Le calcul précédent est exact. Aucune approximation n'est introduite pour étudier l'effet de la propagation. La seule approximation a été de négliger l'effet du champ de pesanteur pendant la durée des impulsions lasers.
- Comme pour l'expérience d'échos de spin (voir cours III), le déphasage $\delta\phi$ trouvé en (6.28) ne dépend pas du désaccord entre la fréquence des lasers et les fréquences atomiques.
- Comme $|CD| = |C_0 D_0| = \frac{\hbar |k_1 - k_2| T}{m}$ (voir Eq. (6.18)) et que l'aire S de la surface à l'intérieur du contour ACBDA vaut $|CD| \times T$, on voit que les termes dépendant de g dans $\delta\phi$ sont de la forme $-MgS/\hbar$. On peut donc écrire (6.28) sous la forme équivalente

$$\begin{aligned} \delta\phi &= -\frac{Mg}{\hbar} \oint_{ACBDA} z(t) dt + (\varphi_I - 2\varphi_{II} + \varphi_{III}) \\ &= -\frac{Mg}{\hbar} \oint_{A_0 C_0 B_0 D_0 A_0} z(t) dt + (\varphi_I - 2\varphi_{II} + \varphi_{III}) \end{aligned} \quad (6.29)$$

On retrouve donc, pour un interféromètre utilisant des ondes lasers comme lames séparatrices, un résultat identique (et, de plus, exact) au résultat (5.57) trouvé dans le cours V pour des interféromètres utilisant des lames semi-réfléchissantes.

- Dans un interféromètre utilisant des atomes lents, comme celui considéré ici, T est suffisamment grand pour que l'effet Doppler sur la transition Raman, associé à la variation de vitesse entre 0 et T , et T et $2T$, soit très important. On a intérêt alors à changer $\omega = \omega_1 - \omega_2$ d'une impulsion à l'autre, prenant $\omega = \omega$ à $t=0$, $\omega = \omega + \omega_m$ à $t=T$, $\omega = \omega + 2\omega_m$ à $t=2T$, ω_m étant choisi pour rattraper le décalage Doppler.

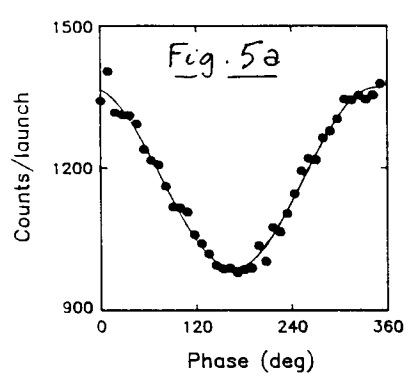
$$\omega_m = |k_1 - k_2| g T \quad (6.30)$$

On peut par contre négliger la variation de $|k_1 - k_2|$ quand on passe de ω à $\omega + \omega_m$ puis $\omega + 2\omega_m$. En remplaçant ω par $\omega + \omega_m$ dans les 2^{ème} crochets de (6.26) et (6.27), puis ω par $\omega + 2\omega_m$ dans le 3^{ème} crochet de (6.27), on obtient

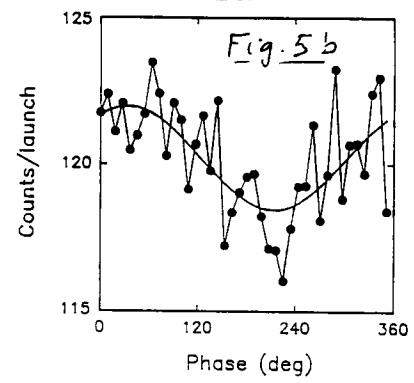
$$\delta\phi = -|k_1 - k_2| g T^2 + 2\omega_m T - (\varphi_I - 2\varphi_{II} + \varphi_{III}) \quad (6.31)$$

⑤ Exemples de résultats expérimentaux

- Pour une description détaillée des expériences et des méthodes utilisées pour générer les fréquences $\omega_1 - \omega_2$, ω_m , $2\omega_m$, voir Refs. 2 et surtout 3.
- Il n'est pas possible ici de faire varier g , comme dans l'expérience C.O.W. sur les neutrons, en inclinant un plan, car la trajectoire des atomes dans l'espace réel est une droite verticale (voir Fig. 3). De même, $\delta\phi$ n'est pas sensible au désaccord entre les fréquences laser et les fréquences atomiques. La seule possibilité est de faire varier les phases ϕ_I , ϕ_{II} ou ϕ_{III} et de vérifier que l'état d'interférence varie sinusoidalement, par exemple avec ϕ_{III} .



$T = 50 \text{ ms}$
 Chaque point =
 moyenne sur
 251 lancers
 Séparation
 maximum
 des paquets
 d'ondes = 3 mm



$T = 100 \text{ ms}$
 Chaque point =
 moyenne sur
 22 lancers
 Séparation
 maximum
 des paquets
 d'ondes = 6 mm

La figure 5 extraite de la Ref. 3 donne un exemple des résultats expérimentaux les plus récemment publiés.

- Sensibilité : Des courbes de la Fig. 5, on ne peut pas extraire une mesure absolue de g . Par contre, si l'on se place en un point où la pente est maximale, et si g varie, on peut détecter une telle variation de g par une variation du signal.

D'après (6.31), la variation δg de g déplaçant les franges de la figure 5 a d'une interférence est

$$\delta g = \frac{2\pi}{|k_1 - k_2| T^2} \approx \frac{\lambda_0}{2T^2} \tag{6.32}$$

où λ_0 est la longueur d'onde optique. Pour le Sodium, $\delta g/g$ est de l'ordre de 10^{-5} . Avec le rapport signal / bruit de la figure 5 a, on peut espérer détecter des variations de phase de l'ordre de quelques 10^{-3} , de sorte que les auteurs de l'expérience estiment leur sensibilité de mesure de $\Delta g/g$, de l'ordre de $3 \cdot 10^{-8}$.

Références

- (1) M. Kasevich, D. S. Weiss, E. Riis, K. Moler, S. Kasapi, S. Chu Phys. Rev. Lett. 66, 2297 (1991)
- (2) M. Kasevich, S. Chu, Phys. Rev. Lett. 67, 181 (1991)
- (3) M. Kasevich, S. Chu, Appl. Physics B54, 321 (1992)
- (4) C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, G. Grynberg, Processus d'interactions entre photons et atomes, chap. III, InterEditions et Editions du CNRS (Paris 1988)
- (5) C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc Phys. Rev. A3, 968 (1972).

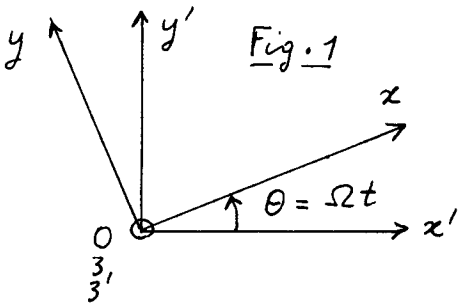
Propagation d'une particule dans un référentiel tournant

Buts de ce cours

- Appliquer les résultats du cours IV au cas d'une particule se propageant dans un référentiel tournant.
- Calculer le déphasage qui apparait entre les 2 bras d'un interféromètre lorsqu'on communique à cet interféromètre un mouvement de rotation par rapport à un référentiel galiléen.
- Décrire une expérience d'interférométrie effectuée sur des neutrons et mettant en évidence la rotation de la terre.
- Comparer la sensibilité à la rotation des interféromètres à ondes de matière et des interféromètres optiques (effet Sagnac).

① Lagrangien, Hamiltoniens et Actions. (Ref. 1)

a) - Référentiel galiléen et référentiel tournant.



- $Ox'y'z'$: Référentiel galiléen R'
 - $Oxyz$: Référentiel R tournant par rapport au précédent autour de $Oz = O_3z'$ à la vitesse angulaire constante Ω
 $\theta = \Omega t$ (7.1)

- Lois de transformation des coordonnées

$$\begin{cases} x' = x \cos \Omega t - y \sin \Omega t \\ y' = x \sin \Omega t + y \cos \Omega t \end{cases} \quad (7.2)$$

$$\begin{cases} x = x' \cos \Omega t + y' \sin \Omega t \\ y = -x' \sin \Omega t + y' \cos \Omega t \end{cases} \quad (7.3)$$

- Loi de transformation des vitesses. Posons $\vec{\Omega} = \Omega \vec{e}_z$. Il vient:
 $\vec{v}' = \vec{v} + \vec{\Omega} \times \vec{r}$ (7.4)

Vitesse dans R' = Vitesse dans R + Vitesse d'entraînement R/R'

b) - Lagrangien - Equations de Lagrange

- Dans R' , la particule est libre. Son lagrangien L' vaut donc:

$$L' = \frac{1}{2} M \vec{v}'^2 \quad (7.5)$$

- En reportant (7.4) dans (7.5), on obtient pour le Lagrangien L dans R :

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} M (\vec{v} + \vec{\Omega} \times \vec{r})^2 \\ &= \frac{1}{2} M \vec{v}^2 + M \vec{\Omega} \cdot (\vec{r} \times \vec{v}) + \frac{1}{2} M (\vec{\Omega} \times \vec{r})^2 \end{aligned} \quad (7.6)$$

L est bien une fonction quadratique de \vec{r} et \vec{v} .

- Equations de Lagrange : $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \frac{\partial L}{\partial \vec{r}}$

$$M \frac{d\vec{v}}{dt} = \underbrace{2M(\vec{v} \times \vec{\Omega})}_{\text{Force de Coriolis}} + \underbrace{M \vec{\Omega} \times (\vec{r} \times \vec{\Omega})}_{\text{Force centrifuge}} \quad (7.7)$$

Force de Coriolis
 Force centrifuge

c) - Impulsion

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = M \vec{v} + M \vec{\Omega} \times \vec{r} \quad (7.8)$$

- Dans R' , l'impulsion \vec{p}' vaut :

$$\vec{p}' = \frac{\partial L'}{\partial \vec{v}'} = M \vec{v}' \quad (7.9)$$

Elle coïncide avec la quantité de mouvement de la particule, contrairement à ce qui se passe dans R , où $\vec{p} \neq M \vec{v}$

- En utilisant (7.4), on voit que

$$\vec{p}' = \vec{p} \quad (7.10)$$

Un même mouvement est donc décrit par la même impulsion, \vec{p} ou \vec{p}' .

- L'équation (7.8) entraîne que

$$\frac{\vec{p}^2}{2M} = \frac{1}{2} M \vec{v}^2 + \frac{M}{2} (\vec{\Omega} \times \vec{r})^2 + M \vec{v} \cdot (\vec{\Omega} \times \vec{r}) \quad (7.11)$$

La comparaison de (7.6) et (7.11) montre que

$$L = \frac{\vec{p}^2}{2M} \quad (7.12)$$

d) Hamiltonien

De (7.8), on déduit que

$$\vec{v} = \frac{\vec{p}}{M} - \vec{\Omega} \times \vec{r} \quad (7.13)$$

de sorte que, compte tenu de (7.12), on obtient

$$H = \vec{p} \cdot \vec{v} - L = \frac{\vec{p}^2}{2M} - \vec{\Omega} \cdot (\vec{r} \times \vec{p}) \quad (7.14)$$

qu'on peut encore écrire

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2M} - \vec{\Omega} \cdot \vec{L} = \frac{\vec{p}^2}{2M} - \Omega L_3 \quad (7.15)$$

où

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \quad (7.16)$$

est le moment cinétique de la particule.

e) Solution des équations du mouvement

- Solution plus simple à partir des équations de Hamilton-Jacobi

$$\dot{\vec{r}} = \frac{\partial H}{\partial \vec{p}} = \frac{\vec{p}}{M} - \vec{\Omega} \times \vec{r} \quad (7.17.a) \quad \dot{\vec{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \vec{r}} = -\vec{\Omega} \times \vec{p} \quad (7.17.b)$$

- Calcul de $\vec{p}(t)$ L'équation (7.17.b) donne

$$\dot{p}_x = \Omega p_y \quad \dot{p}_y = -\Omega p_x \quad (7.18)$$

qu'on peut encore écrire

$$\dot{p}_+(t) = -i\Omega p_+(t) \quad (7.19)$$

si l'on pose

$$p_+ = p_x + i p_y \quad (7.20)$$

On en déduit

$$p_x(t) + i p_y(t) = [p_x(0) + i p_y(0)] [\cos \Omega t - i \sin \Omega t] \quad (7.21)$$

c'est à dire encore

$$\begin{cases} p_x(t) = p_x(0) \cos \Omega t + p_y(0) \sin \Omega t \\ p_y(t) = -p_x(0) \sin \Omega t + p_y(0) \cos \Omega t \end{cases} \quad (7.22)$$

- On trouve ainsi que $\vec{p}(t)$ s'obtient à partir de $\vec{p}(0)$ par une rotation d'angle $-\Omega t$ autour de Oz . L'interprétation d'un tel résultat est la suivante. Dans R' , la particule est libre, et donc $\vec{p}'(t)$ reste constant. Or, d'après (7.10), $\vec{p}(t) = \vec{p}'(t)$. $\vec{p}(t)$ reste donc égal à un vecteur qui est fixe dans R' . Dans R , $\vec{p}(t)$ tourne donc à la vitesse angulaire $-\Omega$.

- Le raisonnement précédent et l'équation (7.12) montrent également que

$$\vec{p}^2(t) = \vec{p}^2(0) \tag{7.23}$$

$$L(t) = L(0) \tag{7.24}$$

- Calcul de $\vec{r}(t)$. L'équation (7.17.a) donne

$$\dot{x} = \frac{p_x}{m} + \Omega y \quad \dot{y} = \frac{p_y}{m} - \Omega x \tag{7.25}$$

c'est à dire encore, si l'on pose

$$r_+ = x + iy \tag{7.26}$$

$$\dot{r}_+(t) + i\Omega r_+(t) = \frac{p_+(t)}{m} = \frac{p_+(0)}{m} e^{-i\Omega t} \tag{7.27}$$

La solution de l'équation (7.27) s'écrit

$$r_+(t) = r_+(0) e^{-i\Omega t} + \frac{p_+(0)}{m} t e^{-i\Omega t} \tag{7.28}$$

ce qui donne pour $x(t)$ et $y(t)$

$$\begin{cases} x(t) = [x(0) + \frac{p_x(0)}{m} t] \cos \Omega t + [y(0) + \frac{p_y(0)}{m} t] \sin \Omega t \\ y(t) = -[x(0) + \frac{p_x(0)}{m} t] \sin \Omega t + [y(0) + \frac{p_y(0)}{m} t] \cos \Omega t \end{cases} \tag{7.29}$$

Interprétation : Dans R' , la particule, libre, part de $\vec{r}(0)$ avec la vitesse $\vec{p}(0)/m$ et arrive à l'instant t au point $\vec{r}'(t) = \vec{r}(0) + \frac{\vec{p}(0)}{m} t$. $\vec{r}(t)$ s'obtient à partir de $\vec{r}'(t)$ par une rotation d'angle $-\Omega t$ autour de Oz

f) - Action

- A partir de maintenant, nous allons nous limiter à des vitesses de rotation Ω et à des intervalles de temps t suffisamment faibles pour que

$$\Omega t \ll 1 \tag{7.30}$$

- Si la particule est en x_a, y_a à $t_a = 0$, avec une impulsion p_{xa}, p_{ya} , elle se trouve en x_b, y_b à $t_b = T$. L'inversion des équations (7.29) donne alors, à l'ordre 1 en ΩT :

$$x_a + \frac{p_{xa}}{m} T = x_b - y_b \Omega T \quad y_a + \frac{p_{ya}}{m} T = x_b \Omega T + y_b \tag{7.31}$$

d'où l'on déduit :

$$p_{xa} T / m = x_b - x_a - y_b \Omega T \quad p_{ya} T / m = y_b - y_a + x_b \Omega T \tag{7.32}$$

- A partir des équations (7.32) on obtient, compte tenu de (7.12) et (7.23)

$$\frac{\vec{p}^2(t)}{2m} = \frac{\vec{p}^2(0)}{2m} = \frac{p_{xa}^2 + p_{ya}^2}{2m} = \frac{m}{2T^2} [(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2 + 2\Omega T (x_a y_b - x_b y_a)] \tag{7.33}$$

$$\begin{aligned} S_{cl}(x_b y_b T, x_a y_a 0) &= \int_0^T dt L(t) = \int_0^T dt \frac{\vec{p}^2(0)}{2m} = \frac{T}{2m} \vec{p}^2(0) \\ &= \frac{m}{2T} [(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2] + m\Omega (x_a y_b - y_a x_b) \end{aligned} \tag{7.34}$$

S_d est bien une fonction quadratique de x_a, y_a, x_b, y_b
 - On déduit également de (7.34) que

$$C = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 S_d}{\partial x_a^2} = \frac{M}{2T} \tag{7.35}$$

② Propagateur - Déphasage dû à la rotation

a) - Expression du propagateur

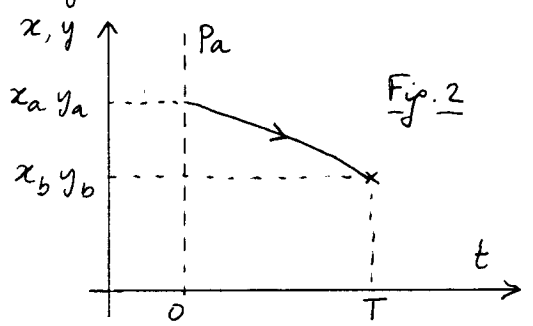
Comme L est quadratique en \vec{r} et \vec{v} , on a, d'après les résultats du cours IV

$$K(x_b, y_b, T, x_a, y_a, 0) = F(T) \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} S_d(x_b, y_b, T, x_a, y_a, 0) \right\} \tag{7.36}$$

où $S_d(x_b, y_b, T, x_a, y_a, 0)$ est donné en (7.34).

b) - Propagation de la fonction d'onde

À $t=0$, on a une onde plane d'impulsion P_a . Quelle est la fonction d'onde en x_b, y_b à l'instant T ?



Considérons la trajectoire classique arrivant en x_b, y_b à l'instant T et ayant l'impulsion P_a à $t=0$. Soient x_a et y_a les coordonnées du point par lequel passe cette trajectoire à $t=0$. D'après les résultats du cours IV

$$\Psi(x_b, y_b, T) = G(T) \Psi(x_a, y_a, 0) \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} S_d(x_b, y_b, T, x_a, y_a, 0) \right\} \tag{7.37}$$

où
$$G(T) = F(T) \sqrt{\frac{i\pi\hbar}{C(T)}} = F(T) \sqrt{\frac{2i\pi\hbar T}{M}} \tag{7.38}$$

c) - Calcul traditionnel

- L'hamiltonien quantique associé à (7.15) s'écrit :

$$H = \frac{P^2}{2M} - \Omega L_3 \tag{7.39}$$

L'opérateur $P^2/2M$, invariant par rotation, commute avec L_3 , de sorte que l'opérateur d'évolution $U(T)$ peut s'écrire :

$$U(T) = e^{-iHT/\hbar} = e^{+i\Omega L_3 T/\hbar} e^{-iP^2 T/2M\hbar} \tag{7.40}$$

- Le calcul du propagateur ne pose alors aucun problème. En particulier, on obtient pour la fonction d'onde en x_b, y_b à l'instant T , sachant qu'on est parti d'une onde plane P_a à $t=0$

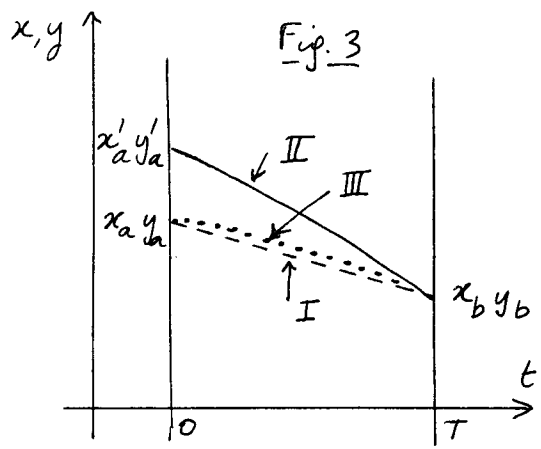
$$\begin{aligned} \Psi(x_b, y_b, T) &= \langle x_b, y_b | e^{-i\Omega L_3 T/\hbar} e^{-iP^2 T/2M\hbar} | P_a \rangle \\ &= \langle \tilde{x}_b, \tilde{y}_b | P_a \rangle e^{-iP_a^2 T/2M\hbar} \end{aligned} \tag{7.41}$$

où $|\tilde{x}_b, \tilde{y}_b\rangle$ se déduit de $|x_b, y_b\rangle$ par rotation. On trouve alors le même résultat qu'en (7.37) et on obtient la valeur de $G(T)$ qui vaut :

$$G(T) = 1 \tag{7.42}$$

d) - Déphasage dû à la rotation

- On suppose toujours qu'on a une onde plane P_a à $t=0$
- Comme dans le cours V, on considère 3 chemins (Fig. 3)



- Chemin I (en traits tiretés)
Réel pour $\Omega = 0$
Passe par x_b, y_b à T et a l'impulsion p_a en $t=0$. Passe par x_a, y_a à $t=0$
- Chemin II (en traits pleins)
Réel pour $\Omega \neq 0$
Passe par x_b, y_b à T et a l'impulsion p_a en $t=0$. Passe par x'_a, y'_a à $t=0$
- Chemin III (en pointillés)
Réel pour $\Omega \neq 0$
Passe par x_b, y_b à T et x_a, y_a à $t=0$

- D'après (7.28)
$$|\vec{r}_a - \vec{r}'_a| \sim \frac{p_a}{M} T \Omega T = \frac{p_a}{M} \Omega T^2 \quad (7.43)$$

- D'après les résultats du cours IV (voir Eq. (4.57)), si
$$|\vec{r}_a - \vec{r}'_a| \ll \sqrt{\frac{\hbar}{c(T)}} \sim \sqrt{\frac{\hbar T}{M}} \quad (7.44)$$

c'est à dire, compte tenu de (7.43), si

$$\frac{p_a}{M} \Omega T^2 \ll \sqrt{\frac{\hbar T}{M}} \quad (7.45)$$

on peut écrire

$$\begin{aligned} \Psi(x_b, y_b, T) &= \Psi(x'_a, y'_a, 0) \exp \frac{i}{\hbar} S_{II} \\ &\simeq \Psi(x_a, y_a, 0) \exp \frac{i}{\hbar} S_{III} \end{aligned} \quad (7.46)$$

où S_{II} et S_{III} sont les actions classiques (avec $\Omega \neq 0$) calculées le long des chemins II et III.

- Par ailleurs, comme les chemins I et III diffèrent par des termes d'ordre 1 en Ω , le principe de moindre action entraîne que, à l'ordre 1 inclus en Ω

$$S_I \simeq S_{III} \quad (7.47)$$

où S_I est l'action classique (avec $\Omega \neq 0$) calculée le long du chemin I

- Si Ω était nul, la fonction d'onde en x_b, y_b à l'instant T , $\Psi^{(0)}(x_b, y_b, T)$ vaudrait

$$\Psi^{(0)}(x_b, y_b, T) = \Psi(x_a, y_a, 0) \exp \frac{i}{\hbar} S_I^{(0)} \quad (7.48)$$

où $S_I^{(0)}$ est l'action classique (avec $\Omega = 0$) calculée le long du chemin I.

- Par définition de l'action, et à l'ordre 1 en Ω , on a, compte tenu de (7.6)

$$S_I = \int_0^T dt \left[\frac{1}{2} M \vec{v}(t)^2 + M \vec{\Omega} \cdot (\vec{r}(t) \times \vec{v}(t)) \right] \quad (7.49)$$

$$S_I^{(0)} = \int_0^T dt \left[\frac{1}{2} M \vec{v}(t)^2 \right] \quad (7.50)$$

- La comparaison de (7.48) avec la 2^{ème} ligne de (7.46) et l'utilisation de (7.49) et (7.50) donnent alors

$$\begin{aligned} \Psi(x_b, y_b, T) &\simeq \Psi^{(0)}(x_b, y_b, T) \exp \frac{i}{\hbar} (S_I - S_I^{(0)}) \\ &\simeq \Psi^{(0)}(x_b, y_b, T) \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} M \vec{\Omega} \cdot \int_0^T dt \vec{r}(t) \times \vec{v}(t) \right\} \end{aligned} \quad (7.51)$$

L'équation (7.51) montre que l'effet de la rotation en de fait apparaître un déphasage sur la fonction d'onde de la particule en $x_b y_b T$.

- Notons bien que, dans (7.49), (7.50) et (7.51), $\vec{r}(t)$ et $\vec{v}(t)$ correspondent au chemin I , rectiligne entre $x_a y_a$ et $x_b y_b$ et parcouru avec une vitesse uniforme. Comme $\vec{v}(t) = d\vec{r}(t)/dt$ l'intégrale de (7.51) s'écrit $\int_0^T \vec{r}(t) \times d\vec{r}(t)$. On reconnaît

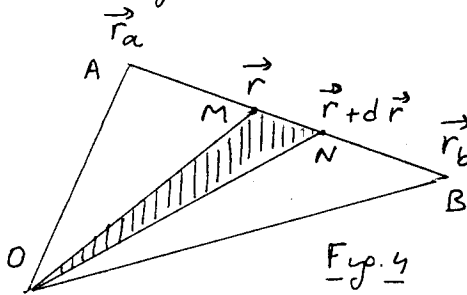


Fig. 4

en $\vec{r}(t) \times d\vec{r}(t)$ 2 fois l'aire du triangle OMN où M est le point \vec{r} et N le point $\vec{r} + d\vec{r}$ (Fig. 4). L'intégrale de (7.51) est donc égale à 2 fois l'aire du triangle OAB, A et B étant les points associés à \vec{r}_a et \vec{r}_b .

e) Déphasage dans un interféromètre (Fig. 5)

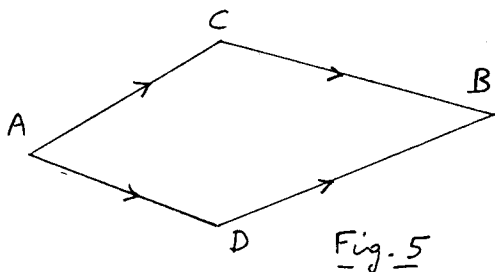


Fig. 5

- En l'absence de rotation ($\Omega = 0$), les 2 bras de l'interféromètre ACB et ADB sont constitués de segments de lignes droites, et sont supposés situés dans un même plan. Soit ϕ_0 le déphasage entre ces 2 bras.

- En présence de rotation, définie par le vecteur $\vec{\Omega}$, le déphasage

devient $\phi = \phi_0 + \delta\phi$. D'après les résultats du paragraphe précédent,

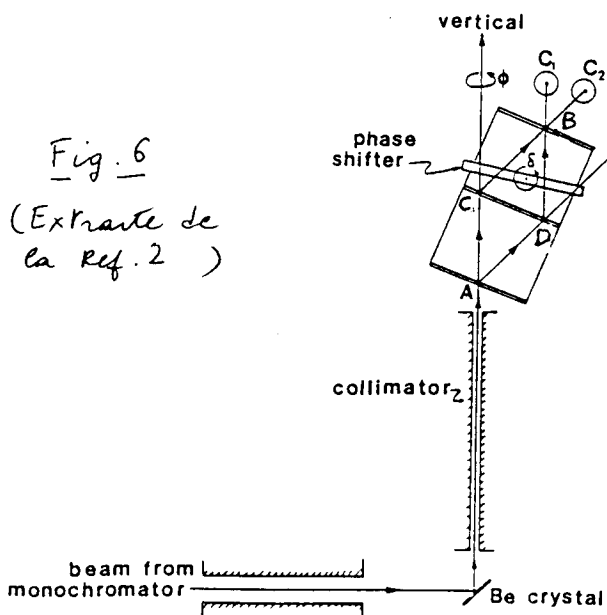
$$\delta\phi = \frac{2M}{\hbar} \vec{\Omega} \cdot \vec{S} \quad (7.52)$$

où \vec{S} est l'aire orientée du polygone ACBDA.

③ Expérience de Werner, Standenmann et Colella (Ref. 2)

a) Principe de l'expérience (Fig. 6)

Fig. 6
(Extrait de la Ref. 2)



- Interféromètre à neutrons analogue à celui décrit dans le cours V.

- On tourne maintenant d'un angle φ l'interféromètre autour d'un axe qui est vertical, au lieu d'être horizontal.

Le déphasage dû au champ de pesanteur ne change pas au cours d'une telle rotation.

Les variations avec φ du déphasage entre ACB et ADB ne sont pas sensibles à g

- Par contre, l'angle entre la normale au quadrilatère ABCD et le vecteur $\vec{\Omega}$ associé à la rotation de la terre change quand l'angle φ varie.

Le module de $\vec{\Omega} \cdot \vec{S}$ est maximal quand le plan ABCD est perpendiculaire au plan du méridien passant par le lieu de l'expérience. Il vaut alors $|\sin \theta_L|$, où θ_L est la "colatitude" du lieu de l'expérience (latitude mesurée par rapport au pôle Nord). Le module de $\vec{\Omega} \cdot \vec{S}$ est nul quand le plan ABCD coïncide avec le plan du méridien.

Les signaux mesurés par les détecteurs C_1 et C_2 doivent donc osciller, en opposition de phase, quand φ varie.

b) Ordres de grandeur

$S = 8,8 \text{ cm}^2$ $\theta_L = 51^\circ$ $M = 1.67 \cdot 10^{-27} \text{ Kg}$ $\hbar \approx 10^{-34} \text{ Joule} \cdot \text{sec}$
 $\Omega = 2\pi/24 \text{ h} = 7.3 \cdot 10^{-5} \text{ rad./sec}$

On obtient pour $|\delta\Phi_{\text{max}}| = 2 M \Omega S \sin \theta_L / \hbar \approx 91^\circ \approx \pi/2 \text{ rad}$
 ce qui correspond environs à 1/4 d'interfrange

- L'effet dû à la rotation est donc près de 40 fois plus petit que celui dû au champ de pesanteur (qui correspondait environs à 10⁻interfranges - voir Cours V)

- En prenant les mêmes valeurs que dans le cours V pour $P_a/M \approx 3 \cdot 10^3 \text{ m/s}$, $T \approx 10^{-5} \text{ sec}$, on trouve

$P_a \Omega T^2 / M \approx 2 \cdot 10^{-11} \text{ m}$ $\sqrt{\hbar T / M} \approx 0.7 \cdot 10^{-6} \text{ m}$

ce qui montre que la condition (7.45) est très largement vérifiée.

c) - Résultats

Pour avoir plus de précision, pour une valeur donnée de φ , on tourne d'un angle δ la lame cristalline de la figure 6, ce qui revient à faire varier le déphasage entre les 2 bras et donne les oscillations de la figure 7 sur les temps de comptage. On recommence la même expérience pour 2 valeurs différentes de φ . Le déphasage entre les 2 oscillations est dû à la rotation de la terre.

La figure 8 montre comment ce déphasage $\delta\Phi$ varie avec φ et donne des résultats en très bon accord avec les prévisions théoriques déduites de (7.52)

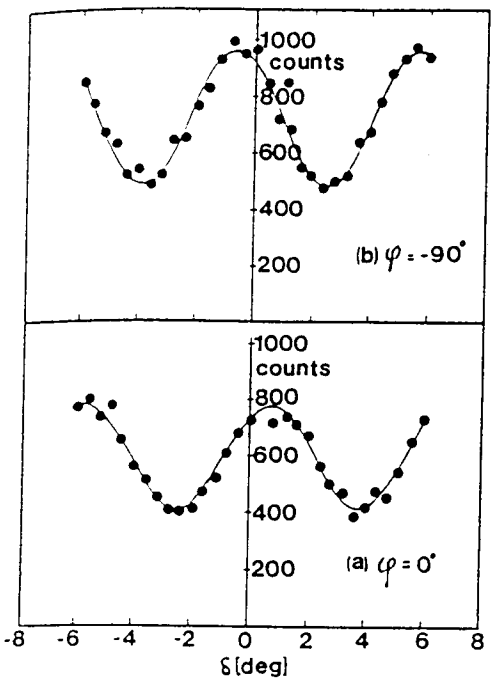


Fig. 7
(Extrait de 2)

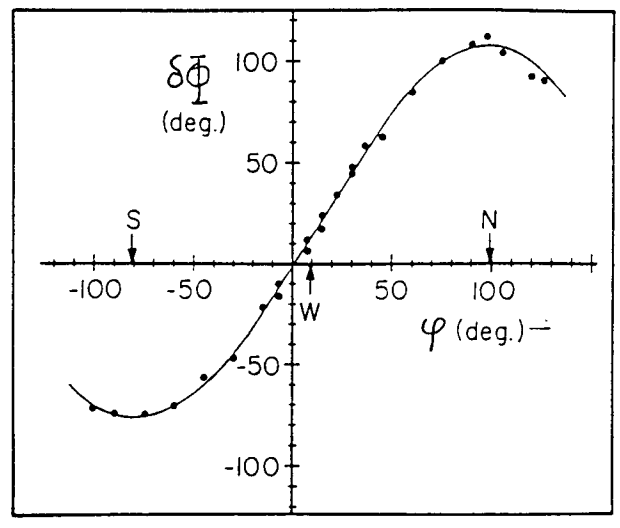


Fig. 8
(Extrait de 2)

④ Interféromètres optiques sensibles à la rotation.

a) - Effet Sagnac (Références 3 à 7)

Calcul élémentaire du déplacement des franges

- Dès 1913, Sagnac a montré qu'un interféromètre optique est sensible à la rotation, par rapport à un système galiléen, du référentiel dans lequel l'interféromètre est au repos (Ref. 3).

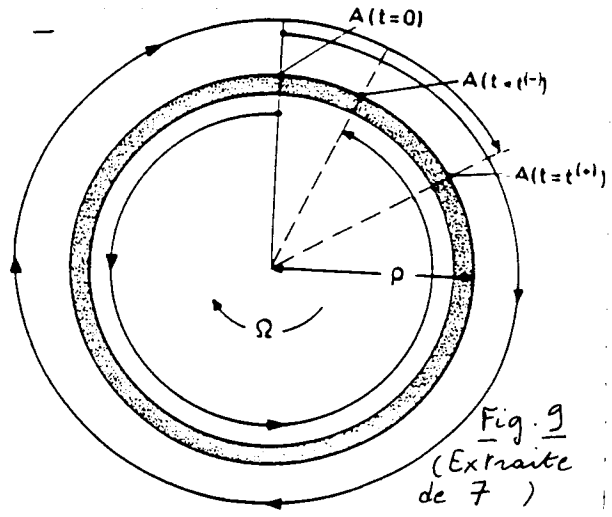


Fig. 9
(Extrait de 7)

Situation idéale d'un interféromètre circulaire (Fig. 9), de rayon ρ .

Analyse de l'expérience faite par un observateur G dans un référentiel galiléen par rapport auquel l'interféromètre tourne à la vitesse angulaire Ω .

- La lumière entre au point A et est séparée en 2 faisceaux cohérents tournant dans le sens direct et le sens inverse.

- Cas $\Omega = 0$. Les 2 faisceaux issus de A se recombinent au même point A après avoir fait chacun un tour qui dure un temps

$$t = \frac{2\pi\rho}{c} \quad (7.53)$$

- Cas $\Omega \neq 0$. Pour l'observateur G , la lumière va toujours à la vitesse c dans les 2 sens. Pour lui, le faisceau se propageant dans le même sens que le mouvement de rotation doit parcourir une distance plus grande pour retrouver le point A . Il doit donc mettre un temps plus long, t^+ , pour rattraper ce point. Ce temps t^+ est donné par l'équation

$$ct^+ = 2\pi\rho + \rho\Omega t^+ \quad (7.54)$$

Au contraire, l'autre faisceau met un temps plus court, t^- , pour rattraper le point A qui tourne en sens opposé et va à sa rencontre

$$ct^- = 2\pi\rho - \rho\Omega t^- \quad (7.55)$$

On en déduit

$$\Delta t = t^+ - t^- = \frac{2\pi\rho}{c} \left[\frac{1}{1 - \frac{\rho\Omega}{c}} - \frac{1}{1 + \frac{\rho\Omega}{c}} \right] \approx \frac{2\pi\rho}{c} \left[\frac{2\rho\Omega}{c} \right] = \frac{4\Omega S}{c^2} \quad (7.56)$$

où $S = \pi\rho^2 \quad (7.57)$

est la surface de l'interféromètre.

- Pour calculer le déphasage $\delta\phi$ associé à Δt , il est plus simple de passer dans le référentiel tournant \mathcal{C} où tous les composants optiques de l'interféromètre sont fixes et où, par suite il n'y a aucun effet Doppler.

Comme le calcul conduisant à (7.56) est d'ordre 1 en $\Omega\rho/c$, l'expression (7.56) de Δt , établie dans \mathcal{G} , demeure valable dans \mathcal{C} [On ignore ici les corrections relativistes en $(\Omega\rho/c)^2$]. Si ω_0 est la fréquence de l'onde lumineuse dans \mathcal{C} , on en déduit que le déphasage $\delta\phi$ entre les 2 faisceaux qui se rencontrent en A est

$$\delta\phi = \omega_0 \Delta t = \frac{4S\Omega\omega_0}{c^2} \tag{7.58}$$

Le déplacement δN des franges d'interférence est donc

$$\delta N = \frac{\delta\phi}{2\pi} = \frac{4S\Omega}{\lambda_0 c} \tag{7.59}$$

où $\lambda_0 = 2\pi c/\omega_0$ est la longueur d'onde de la lumière

Calcul direct du déphasage dans le référentiel tournant [Ref. 4]

- Comme on se limite au 1^{er} ordre en $\Omega\rho/c$, on peut utiliser la transformation suivante simple pour passer de $\mathcal{G}(x', y', z', t')$ à $\mathcal{C}(x, y, z, t)$

$$x' = x \cos \Omega t - y \sin \Omega t \quad y' = x \sin \Omega t + y \cos \Omega t \quad z' = z \quad t' = t \tag{7.60}$$

- L'invariant fondamental

$$ds^2 = c^2 dt'^2 - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2 \tag{7.61}$$

s'écrit donc dans \mathcal{C} (à l'ordre 1 en Ω)

$$ds^2 = c^2 dt^2 - 2\Omega(x dy - y dx) dt - dl^2 \tag{7.62}$$

$$\text{où} \quad dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \tag{7.63}$$

- La propagation de la lumière est caractérisé par $ds^2 = 0$, c'est à dire par

$$c^2 dt^2 - 4\Omega dS dt - dl^2 \tag{7.64}$$

$$\text{où} \quad dS = \frac{1}{2}(x dy - y dx) \tag{7.65}$$

est la surface du triangle OMN, où $M = \{x, y, z\}$, $N = \{x+dx, y+dy, z\}$

- A l'ordre 1 en Ω , la solution de (7.64) est

$$dt = \frac{dl}{c} + \frac{2\Omega}{c^2} dS \tag{7.66}$$

Par intégration le long d'un contour fermé, on obtient

$$t_1 = \frac{l}{c} + \frac{2\Omega}{c^2} S \tag{7.67}$$

où S est l'aire du contour projeté sur un plan normal à $\vec{\Omega}$ et l le périmètre du contour. Pour le faisceau se propageant dans l'autre sens, on obtient

$$t_2 = \frac{l}{c} - \frac{2\Omega}{c^2} S \tag{7.68}$$

En soustrayant (7.68) de (7.67), on retrouve bien (7.56)

- L'avantage de la méthode précédente est tout d'abord de donner un résultat valable quel que soit la forme du contour. De plus,

on voit que la différence entre t_1 et t_2 dans \mathcal{C} est due au fait VII-10
que la rotation change le tenseur métrique $g_{\mu\nu}$: l'équation (7.62)
montre que g_{01} et g_{02} sont changés à l'ordre 1 en Ω .

Ordres de grandeur

- Dans l'expérience initiale de Sagnac, $S \approx 866 \text{ cm}^2$, $\Omega = 2 \text{ rad/sec}$
 $\lambda_0 = 486 \text{ nm}$, de sorte que $\delta N \approx 0,07$ interférences.
- Quelques années plus tard, Michelson et Gale ont détecté par
effet Sagnac la rotation de la Terre ($\Omega = 7.3 \cdot 10^{-5} \text{ rad/sec}$), au
moyen d'un interféromètre rectangulaire ayant des côtés égaux
à 640 m et 320 m ! (Voir réf. 6).
- Depuis l'apparition des lasers, on peut réaliser des lasers en
anneau oscillant avec des fréquences différentes suivant les 2
sens de rotation, à cause de l'effet Sagnac. La mesure de la fréquence
de battement des 2 lasers, proportionnelle à Ω , est à la base
du fonctionnement des gyromètres laser. (voir réf. 7)

b) - Comparaison avec les neutrons

- La comparaison de (7.52) et (7.58) montre que

$$\frac{(\delta\Phi)_{\text{neutrons}}}{(\delta\Phi)_{\text{photons}}} \sim \frac{Mc^2}{\hbar\omega_0} \gg 1 \quad (7.69)$$

- Le même résultat demeure valable pour des atomes neutres.
 M est encore plus grand ! On peut prévoir ainsi des gains
de sensibilité de l'ordre de 10^{10} (voir Ref. 8).

Il ne faut pas oublier cependant que la surface de
l'interféromètre peut être considérablement augmentée dans un
interféromètre optique par l'utilisation de fibres optiques. De
plus, les flux de photons sont considérablement plus élevés dans
un gyromètre laser, que dans un interféromètre à atomes neutres
(Bien meilleur rapport signal/bruit)

Références

- 1 - L. Landau et L. Lifschitz, Mécanique, 3^{ème} édition, Editions Mir, Moscou (1969)
- 2 - S.A. Werner, J.L. Standenmann, R. Colella
Phys. Rev. Lett. 42, 1103 (1979)
- 3 - G. Sagnac, Compt. Rend. Acad. Sci. 157, 708 et 1410 (1913)
- 4 - P. Langevin, Compt. Rend. Acad. Sci. 173, 831 (1921)
- 5 - E.J. Post, Rev. Mod. Phys. 39, 475 (1967)
- 6 - A.A. Michelson and H.G. Gale, Nature 115, 566 (1925)
et Astrophys. J. 61, 137 (1925)
- 7 - W.W. Chow, J. Gea-Banavero, L.M. Pedrotti, V.E. Sanders,
W. Schleich, M.O. Scully, Rev. Mod. Phys. 57, 61 (1985)
- 8 - J.F. Clauser, Physica B151, 262 (1988)

Interféromètres atomiques sensibles à la rotation

Buts de ce cours

- Décrire des expériences d'interférométrie atomique utilisant des dispositifs analogues à ceux décrits dans le cours III pour l'observation des franges de Ramsey optiques.
- Montrer que ces dispositifs sont sensibles à la rotation du référentiel dans lequel l'interféromètre est au repos.

① Principe des expériences

- 2 expériences d'interférométrie ont été réalisées : l'une au P.T.B. à Braunschweig (Refs 1 et 2), l'autre à Bonn (Ref. 3).
- Les 2 expériences utilisent 2 paires d'ondes progressives se propageant dans des sens opposés, comme dans le cours III.

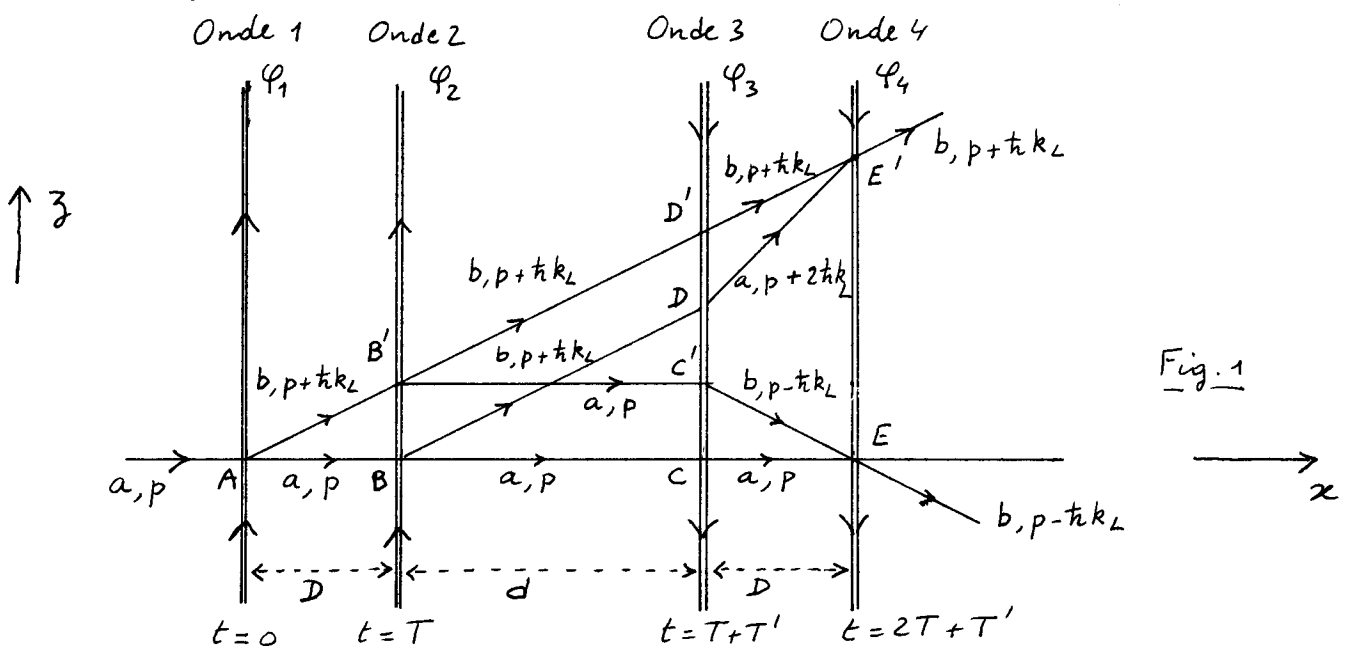


Fig. 1

Les échanges d'impulsions entre atomes et photons font apparaître 2 figures fermées (trapèzes) pour les trajectoires des centres des paquets d'ondes, auxquelles correspondent 2 interféromètres atomiques, donnant naissance à 2 systèmes de franges de Ramsey, respectivement centrés en $\omega_L = \omega_A + \omega_R$ (trapèze $AB'C'E'CB A$) et $\omega_L = \omega_A - \omega_R$ (trapèze $AB'D'E'DB A$).

- Dispositif expérimental.

Les 4 ondes sont formées à partir d'une onde incidente et de 2 systèmes de lentilles et de miroirs placés dans les plans focaux ("yeux de chat"). Voir la figure 2 relative à l'expérience du P.T.B. (Montage analogue à Bonn)

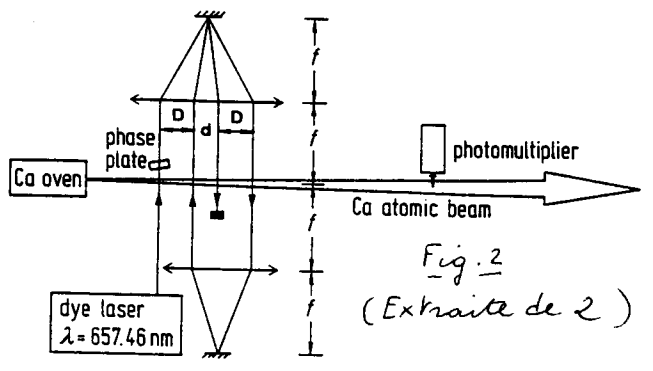
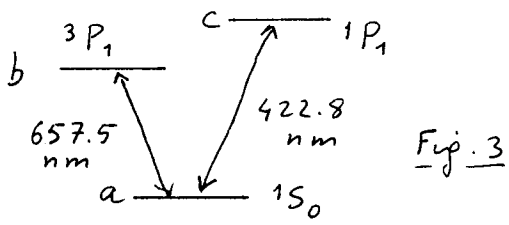


Fig. 2 (Extrait de 2)

- Transition étudiée à Braunschweig



Transition d'intercombinaison
 $3P_1 \leftrightarrow 1S_0$ de l'atome de Calcium
 $\lambda = 657.5 \text{ nm}$.

L'état $b = 3P_1$ a une longue durée de vie $\tau \approx 0.4 \text{ ms}$
 Sur cette transition, $v_{\text{rec}} = \frac{\hbar k}{m} = 1.5 \text{ cm/s}$

Le fait que τ soit long est important, pour que la destruction de cohérences spatiales par émission spontanée puisse être négligée.

- Transition étudiée à Bonn. Schéma de niveaux analogue à celui de la figure 3, mais pour l'atome de Magnésium

Transition $a = 1S_0 \leftrightarrow b = 3P_1$ $\lambda = 457 \text{ nm}$.

Transition $a = 1S_0 \leftrightarrow c = 1P_1$ $\lambda = 285 \text{ nm}$.

Durée de vie de $b = 3P_1$: $\tau = 4.6 \text{ ms}$

- Dans les 2 cas, la transition intense $1S_0 \leftrightarrow 1P_1$ est utilisée pour perturber le niveau inférieur a , ou pour refroidir les atomes.

- Les 2 bras des interféromètres atomiques associés aux 2 trapèzes de la figure 1 enferment une surface non nulle. L'état d'interférence en E ou E' doit donc être modifié par une rotation d'ensemble du dispositif. Le principe de l'expérience consiste à observer les franges de Ramsey sur la population du niveau b à la sortie de l'appareil (population détectée par la fluorescence émise par le jet - voir Fig. 2), et à voir si ces franges se déplacent quand on fait tourner l'interféromètre à la vitesse angulaire Ω .

② - Calcul du déphasage entre les 2 bras des interféromètres

a) - Méthode utilisant les trajectoires non perturbées

- On calcule de proche en proche l'évolution de la fonction d'onde atomique le long des trajectoires non perturbées (correspondant à $\Omega = 0$). L'effet de la rotation se traduit par l'apparition d'un déphasage supplémentaire égal à l'intégrale de $\frac{m}{\hbar} \vec{\Omega} \cdot (\vec{r}(t) \times \vec{v}(t))$ le long de cette trajectoire non perturbée (voir l'équation (7.51)).

- 3 contributions sont à prendre en compte, dues respectivement à l'évolution des degrés de liberté externes, l'évolution des degrés de liberté internes, l'interaction avec les lasers. Calculons à titre d'exemple le déphasage $\delta\Phi$ entre les 2 bras $AB'C'E$ et $ABCE$ du trapèze inférieur de la figure 1, déphasage qui intervient dans le calcul de $P(a, p \rightarrow b, p - \hbar k_L)$.

- Contribution de l'évolution des degrés de liberté externes

• Intégrales d'action non perturbées (calculées avec $\Omega = 0$)

$$S_{cl}^{(0)}(AB') - S_{cl}^{(0)}(AB) = \left[\frac{(p + \hbar k_L)^2}{2M} - \frac{p^2}{2M} \right] T = \hbar(\omega_D + \omega_R) T \quad (8.1)$$

où ω_D et ω_R sont donnés en (2.18.b) et (2.18.c).

$$S_{cl}^{(0)}(B'C') - S_{cl}^{(0)}(BC) = 0 \quad (8.2)$$

$$S_{cl}^{(0)}(C'E) - S_{cl}^{(0)}(CE) = \left[\frac{(p - \hbar k_L)^2}{2M} - \frac{p^2}{2M} \right] T = \hbar(-\omega_D + \omega_R) T \quad (8.3)$$

Contribution globale à $\delta\Phi = \frac{1}{\hbar} \times$ Somme de (8.1), (8.2), (8.3)

$$\delta\Phi_{\text{ext}}^{(0)} = 2\omega_R T \quad (8.4)$$

- Effet de la rotation : la correction d'ordre 1 en Ω à l'effet de la propagation non perturbée, donné en (8.4), est égale à l'intégrale de $\frac{M}{\hbar} \vec{\Omega} \cdot (\vec{r}(t) \times \vec{v}(t))$ le long du trapèze $AB'C'ECBA$, qui n'est autre que $\frac{2M}{\hbar} \vec{\Omega} \cdot \vec{S}$ où \vec{S} est l'aire orientée de ce trapèze (cette aire est négative, car le trapèze est parcouru dans le sens inverse).

$$\delta\Phi_{\text{ext}}^{(1)} = -\frac{2M}{\hbar} \Omega |BB'| \times (D+d) \quad (8.5)$$

$$\text{Or } |BB'| = \frac{\hbar k_L}{M} T = \frac{\hbar k_L}{M v_x} D \quad (8.6)$$

où v_x est la vitesse des atomes incidents le long de Ox (D et d sont représentés sur la figure 1)

$$\begin{aligned} \delta\Phi_{\text{ext}}^{(1)} &= -2k_L \Omega D(D+d) / v_x \\ &= -2k_L v_x \Omega T(T+T') \end{aligned} \quad (8.7)$$

- Contribution de l'évolution des degrés de liberté internes.

- Le long de $AB'C'E$: $e^{-i[\omega_b T + \omega_a T' + \omega_b T]}$
- Le long de $ABCE$: $e^{-i[\omega_a T + \omega_a T' + \omega_a T]}$

$$\text{soit en tout } \delta\Phi_{\text{int}} = -(\omega_b - \omega_a) 2T = -2\omega_A T \quad (8.8)$$

où ω_A est la fréquence atomique.

- Interaction avec les lasers dont les phases sont $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$

- Le long de $AB'C'E$

$$\begin{aligned} & [S_{ba}^{(1)} e^{i(k_L z_A - \omega_L t - \varphi_1)}] [S_{ab}^{(2)} e^{-i(k_L z_{B'} - \omega_L T - \varphi_2)}] \times \\ & \times [S_{ba}^{(3)} e^{i(-k_L z_{C'} - \omega_L(T+T') - \varphi_3)}] [S_{bb}^{(4)}] \end{aligned} \quad (8.9)$$

- Le long de $ABCE$

$$[S_{aa}^{(1)}] [S_{aa}^{(2)}] [S_{aa}^{(3)}] [S_{ba}^{(4)} e^{i(-k_L z_E - \omega_L(2T+T') - \varphi_4)}] \quad (8.10)$$

d'où l'on déduit

$$\delta\Phi_{\text{laser}} = k_L (z_A - z_{B'} - z_{C'} + z_E) + 2\omega_L T - \varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_3 + \varphi_4 \quad (8.11)$$

$$\text{Or } z_A - z_{B'} = -\frac{p + \hbar k_L}{M} T, \quad z_E - z_{C'} = \frac{p - \hbar k_L}{M} T \quad (8.12)$$

$$\text{de sorte que } z_A - z_{B'} - z_{C'} + z_E = -\frac{2\hbar k_L}{M} T$$

$$\text{Finalement } \delta\Phi_{\text{laser}} = -4\omega_R T + 2\omega_L T + \varphi_2 - \varphi_1 + \varphi_4 - \varphi_3 \quad (8.13)$$

- Récapitulation pour l'interféromètre associé à $AB'C'ECBA$
En ajoutant (8.4), (8.7), (8.8) et (8.13), on obtient

$$\delta \Phi_{\text{total}} = 2T [(\omega_L - \omega_A - \omega_R) - \Omega k_L v_x (T+T')] + \varphi_2 - \varphi_1 + \varphi_4 - \varphi_3 \quad (8.14)$$

Un calcul analogue pour l'interféromètre associé à $AB'D'E'DBA$ donne un résultat identique à (8.14) au remplacement près de $-\omega_R$ par $+\omega_R$

$$\delta \Phi_{\text{total}} = 2T [(\omega_L - \omega_A + \omega_R) - \Omega k_L v_x (T+T')] + \varphi_2 - \varphi_1 + \varphi_4 - \varphi_3 \quad (8.15)$$

- Comme dans le cours III, on trouve que :

- $\delta \Phi_{\text{total}}$ ne dépend pas du déplacement Doppler $\omega_D = k_L p/M$ et n'est donc pas affecté par la moyenne sur les vitesses $v = p/M$ le long de la direction Oz des ondes laser.
- $\delta \Phi_{\text{total}}$ dépend du désaccord $\omega_L - \omega_A$ corrigé de $+\omega_R$ ou $-\omega_R$ suivant le trapèze considéré, le temps multipliant $(\omega_L - \omega_A \pm \omega_R)$ étant égal à $2T$. C'est le 1^{er} terme de (8.14) et (8.15) qui donne des franges de Ramsey avec un interfrange $\delta\omega = 2\pi/2T$.

- Par rapport au cours III où l'on avait pris $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \varphi_4 = 0$, on obtient dans (8.14) et (8.15) l'effet des phases des ondes laser, qui apparaît via $\varphi_2 - \varphi_1 + \varphi_4 - \varphi_3$.

- Enfin, si Ω n'est pas nul, on voit apparaître un terme supplémentaire dans $\delta \Phi_{\text{total}}$, proportionnel à Ω . Ce terme supplémentaire peut être compensé par une variation du désaccord $\omega_L - \omega_A$. On en conclut que l'effet de la rotation est de déplacer en bloc le système des franges de Ramsey.

b) Méthode utilisant les trajectoires perturbées

- Les calculs peuvent être plus précis, mais ils sont plus longs et nous en donnons ici seulement le principe.
- Les trajectoires perturbées par Ω sont données par les équations (7.29) qui on peut simplifier en ne gardant que les termes en ΩT . Il faut noter aussi que \vec{p} ne reste pas constant entre 2 interactions successives avec les ondes laser (voir équations (7.22)). Par contre, \vec{p}^2 reste constant entre 2 telles interactions, de sorte que l'action correspondant à un segment de trajectoire perturbée entre 2 interactions à t_i et t_{i+1} est égale à $\frac{\vec{p}^2}{2M} (t_{i+1} - t_i)$
- 2 points importants sont à noter dans le calcul de la contribution à $\delta \Phi$ de l'évolution des degrés de liberté internes.
- (i) A la différence de ce qui se passe dans l'expérience de Kasevich et Chu (voir cours VI), on n'utilise pas ici des impulsions laser temporelles, produites à des instants fixés. C'est l'atome qui, en se déplaçant, "voit" des impulsions laser à certains

instants correspondant aux instants de traversée des ondes laser.

Comme les trajectoires atomiques sont courbées, les temps séparant 2 impulsions successives vues par l'atome ne sont plus égaux à T et T' (voir Fig. 1), mais sont corrigés par des termes en Ω, Ω^2, \dots . Il faut calculer ces corrections qui vont modifier $S_{cl}(AB')$, $S_{cl}(B'C')$...

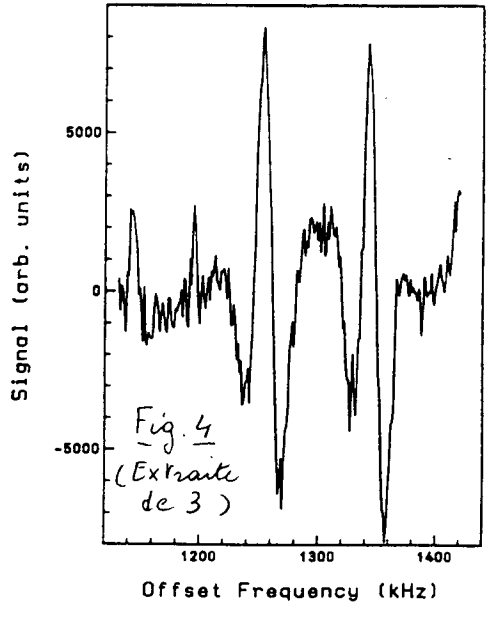
(ii) \vec{p}^2 reste constant entre 2 impulsions laser "vues" par l'atome en mouvement, mais comme \vec{p} tourne entre 2 interactions et change de $\pm \hbar \vec{k}_L$ après chaque interaction, la variation de \vec{p}^2 après chaque interaction contient des corrections en Ω, Ω^2, \dots . Il faut tenir compte de ces corrections dans le calcul de $S_{cl}(AB')$, $S_{cl}(B'C')$...

- Quand on tient compte de tous ces effets, on trouve que la contribution des intégrales d'action le long des trajectoires perturbées n'est pas globalement modifiée en Ω . Situation analogue à celle trouvée dans le § 3a du cours VI.
- Par contre, comme les trajectoires sont modifiées par Ω , les ordonnées des points d'intersection avec les lasers sont modifiées, et $\delta\Phi_{laser}$ est changé par rapport à sa valeur (8.13), calculée pour $\Omega = 0$, d'une manière telle qu'on retrouve pour $\delta\Phi_{total}$ le même résultat qu'en (8.14) et (8.15)

③ Etude expérimentale en l'absence de rotation ($\Omega = 0$)

a - Observation du doublet de recul

- La moyenne sur les vitesses v_x des atomes du jet le long de Ox brouille les franges de Ramsey sauf la frange centrale. Les 2 systèmes de franges associés aux 2 trapèzes de la figure 1 se réduisent donc à 2 raies centrées en $\omega_L = \omega_A \pm \omega_R$, dans la courbe donnant $P_{a \rightarrow b}$ en fonction de ω_L (doublet de recul).



La figure 4 donne un exemple de doublet de recul observé sur Mg à Bonn

Valeurs des paramètres

$$\frac{2\omega_R}{2\pi} \approx 80 \text{ KHz}$$

$$D = 12 \text{ mm, donnant une largeur de raie de l'ordre de } 12 \text{ KHz}$$

- Résultats analogues au P.T.B sur Ca

$$\frac{2\omega_R}{2\pi} \approx 23.1 \text{ KHz}$$

$$2D = 26 \text{ mm} \quad d = 33 \text{ mm}$$

$$\bar{v}_x = 700 \text{ m/s}$$

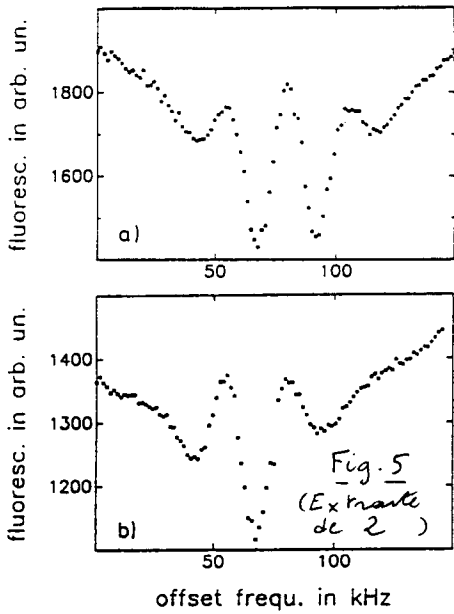
$$\lambda_{DB} = 1.4 \cdot 10^{-11} \text{ m}$$

b - Suppression d'une composante du doublet de recul.

Intérêts d'une telle suppression.

- Forme de raie plus simple.
- Eviter des asymétries éventuelles dues au fait que l'état interne dans la zone intermédiaire est l'état excité b pour le trapèze supérieur de la figure 1, de sorte que la raie à $\omega_L = \omega_A - \omega_R$ associée à ce trapèze peut avoir une amplitude plus faible que l'autre si la durée de vie τ de l'état b n'est pas assez longue devant le temps de traversée.

Méthode utilisée pour une telle suppression



- Par exemple, au P.T.B., la composante supérieure du doublet de recul (Fig. 5a), à $\omega_L = \omega_A + \omega_R$, associée au trapèze inférieur de la figure 1, est supprimée (voir Fig. 5b), si l'état interne a dans la zone intermédiaire est excité par un laser accordé sur la transition $^1S_0 \leftrightarrow ^1P_1$, à 422.8 nm (Fig. 3)

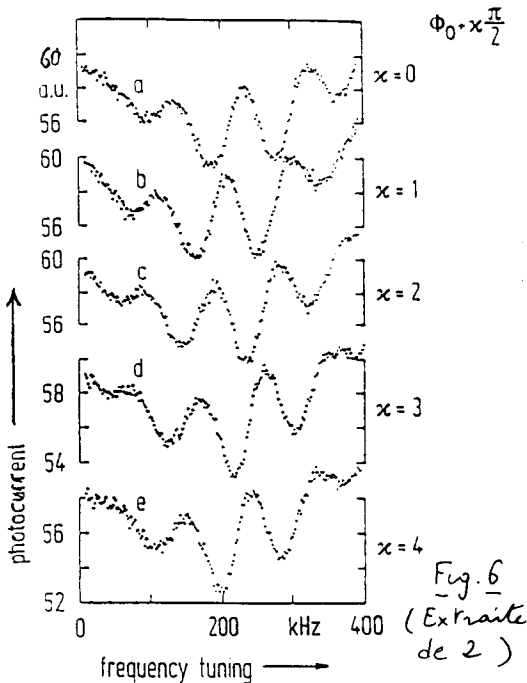
Il suffit d'un cycle de fluorescence pour détruire la cohérence spatiale entre les 2 chemins de ce trapèze inférieur et faire disparaître la raie à $\omega_A + \omega_R$

- La raie à $\omega_L = \omega_A - \omega_R$ peut être également supprimée par excitation de l'état interne $b = ^3P_1$ dans la zone intermédiaire du

trapèze supérieur de la figure 1 par un laser à $\lambda = 612.4$ nm excitant la transition $^3P_1 \leftrightarrow ^3S_1$

- Expériences analogues à Bonn utilisant l'excitation de la transition $^1S_0 \leftrightarrow ^1P_1$, à 285 nm

c - Sensibilité à la phase des ondes laser



Les équations (8.14) et (8.15) montrent que le déphasage total $\delta\Phi$ contient un terme $\Phi_0 = \phi_2 - \phi_1 + \phi_4 - \phi_3$ dépendant des phases des 4 ondes laser.

Dans l'expérience du PTB, une lame de verre, servant de lame de phase est insérée sur le trajet des faisceaux laser après la 1^{ère} interaction (voir Fig. 1).

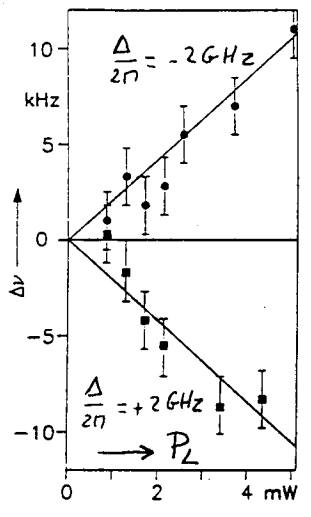
En faisant tourner cette lame, on fait varier ϕ_2, ϕ_3, ϕ_4 par rapport à ϕ_1 , et on fait donc varier Φ_0 . On vérifie bien expérimentalement que les franges de Ramsey se déplacent quand la lame est tournée de façon à faire varier Φ_0 . (Voir Fig. 6)

d - Déphasage produit par un déplacement lumineux

Principe

Entre la 1^{ère} onde laser et la 2^{ème}, on entre la 3^{ème} et la 4^{ème}, les états internes sont différents dans les 2 bras des interféromètre associés à chacun des 2 trapèzes de la figure 1. Une irradiation lumineuse appropriée peut alors déplacer de manière différente les états a et b et modifier $\delta\Phi_{total}$ via $\delta\Phi_{interne}$, ce qui se traduit par un déplacement des franges de Ramsey

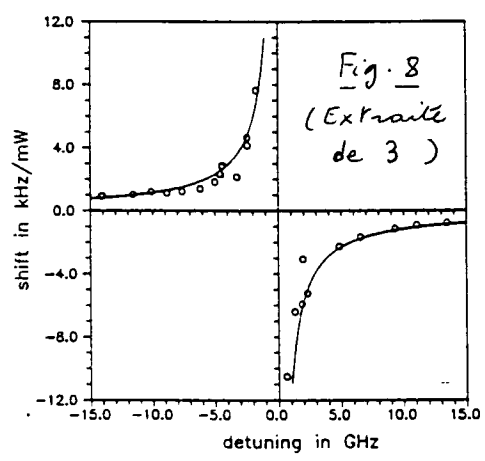
Expériences faites au P.T.B.



- L'état $a = ^1S_0$ est déplacé par une excitation de la transition $^1S_0 \leftrightarrow ^1P_1$ à 422.8 nm. Le désaccord à résonance Δ est suffisamment grand (~ 2 GHz) pour qu'il n'y ait pas d'excitation réelle de la transition (fluorescence négligeable, et donc pas de destruction de cohérences spatiales) et pour que l'atome puisse suivre adiabatiquement le niveau habillé se raccordant à l'état fondamental quand l'atome entre et sort de l'onde laser perturbatrice.

- Vérification du fait que le déplacement des franges de Ramsey change de signe quand le désaccord Δ change de signe et varie linéairement avec la puissance P_L du laser perturbateur.

Expériences faites à Bonn



- Expériences analogues faites sur Mg et utilisant une excitation de la transition $^1S_0 - ^1P_1$ à 285 nm entre la 3^{ème} et la 4^{ème} onde laser

- Etude de la variation du déplacement des franges de Ramsey avec le désaccord Δ du laser perturbateur (Voir Fig. 8)

Remarque

Un faisceau non résonnant, agissant sélectivement sur l'un des 2 bras d'un interféromètre atomique, joue ainsi le rôle d'une lame de retard ou d'avance que l'on introduirait dans ce bras et qui changerait le déphasage $\delta\Phi$.

La très grande sensibilité des interféromètres atomiques permet d'envisager d'utiliser un tel effet (ou des effets analogues) pour mesurer, de manière non destructive, le nombre de photons contenus dans une cavité de très grande finesse (voir Ref. 4).

④ - Etude expérimentale de la sensibilité à la rotation

Les expériences correspondantes ont été faites au PTB.

a - Résultats expérimentaux

- Le déphasage supplémentaire qui apparaît lorsqu'on fait tourner l'interféromètre à la vitesse angulaire Ω est décrit par le terme en Ω de (8.14) et (8.15). Expérimentalement il apparaît par un déplacement global du système de franges de Ramsey

$$\delta \nu = \frac{\delta \omega}{2\pi} = \Omega \frac{k_L}{2\pi} v_x (T+T') = \frac{\Omega (D+d)}{\lambda_L} \quad (8.16)$$

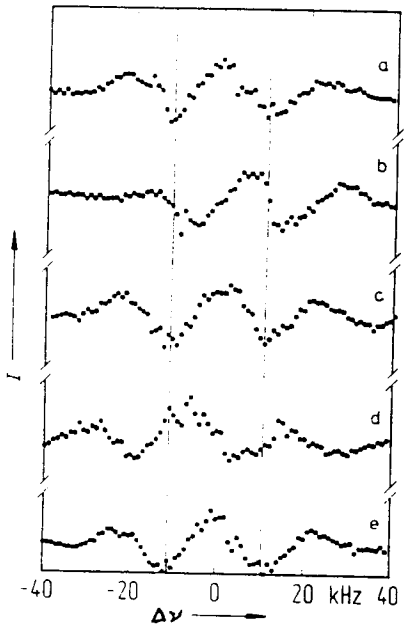


Fig. 9 (Extrait de 1)

- La figure 9 représente les franges de Ramsey obtenues pour diverses valeurs de Ω
 Les courbes a, c, e correspondent à $\Omega = 0$
 La courbe b à $\Omega = -0,09 \text{ s}^{-1}$
 La courbe d à $\Omega = +0,09 \text{ s}^{-1}$
- On constate bien que le doublet de recul se déplace quand on fait tourner l'interféromètre et que le déplacement change de signe quand Ω change de signe.
- Les valeurs de D et d sont
 $D = 13 \text{ mm}$, $d = 33 \text{ mm}$
 ce qui donne, avec $\lambda_L = 657,5 \text{ nm}$ et $\Omega = 0,09 \text{ s}^{-1}$, $\Delta \nu = 6,3 \text{ KHz}$, en bon accord avec le résultat observé.

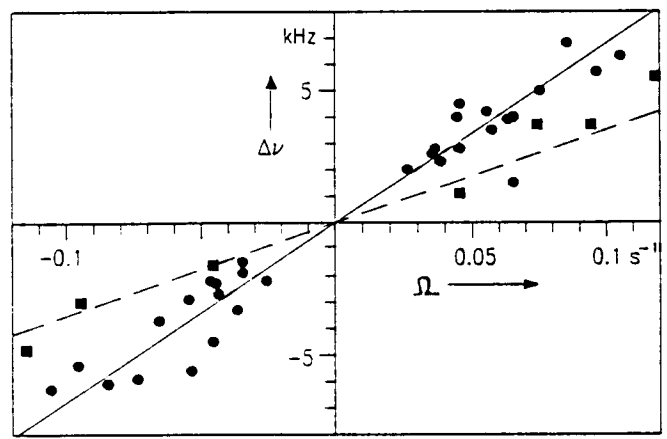


Fig. 10 (Extrait de 1)

La figure 10 donne la variation avec Ω du déplacement $\Delta \nu$ du doublet de recul pour 2 valeurs des paramètres

- $d+D = 45 \text{ mm}$
- $d+D = 24 \text{ mm}$

Les lignes droites sont les prédictions théoriques déduites de (8.16)

b - Discussion physique

- L'expérience précédente montre qu'il est possible d'observer l'équivalent d'un effet Sagnac sur des interféromètres utilisant des atomes neutres.
- Cette expérience prouve également que le dispositif à 4 ondes progressives utilisé pour observer des franges de Ramsey en optique fait intervenir un interféromètre dont les bras enferment une surface non nulle

$$S = \frac{\hbar k_L}{M v_x} D(D+d) \quad (8.17)$$

- Avec les valeurs des paramètres $D = 13 \text{ mm}$, $d = 33 \text{ mm}$, $\hbar k_L / M = 1.5 \text{ cm/sec}$, $v_x = 700 \text{ m/s}$ on trouve $S = 1.28 \cdot 10^{-2} \text{ mm}^2$, qui est beaucoup plus petite que la surface d'un interféromètre à neutrons, de l'ordre de 10 cm^2 , ou celle d'un interféromètre optique, qui peut atteindre des valeurs de plusieurs m^2 , si l'on utilise des fibres optiques enroulées sur plusieurs tours

Malgré cette très faible surface, l'interféromètre du PTB peut détecter des rotations très faibles, de l'ordre de $0.05 / \text{sec}$. On conçoit donc tout l'intérêt qu'il y aurait à augmenter cette surface, par exemple en diminuant v_x par utilisation d'atomes ralentis par laser

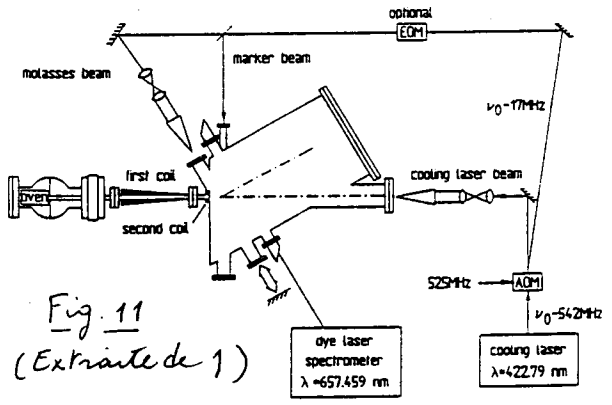


Fig. 11
(Extrait de 1)

Des expériences sont en cours au PTB pour réaliser un tel objectif. Voir schéma du dispositif expérimental sur la figure 11.

- Notons enfin que si l'atome de Calcium était utilisé comme standard de fréquence, il serait très important de contrôler le déplacement de fréquence dû à la rotation de la terre et qui varie d'un point à l'autre du globe terrestre.

Références

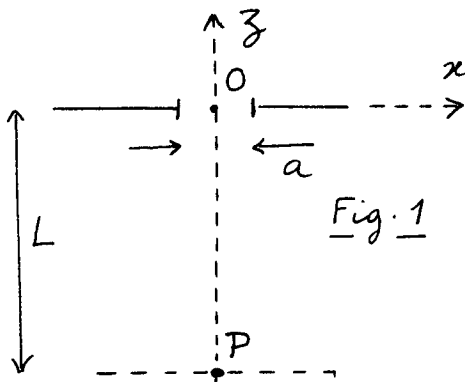
- 1 - F. Riehle, Th. Kisters, A. Witte, J. Helmcke, C. J. Borde' Phys. Rev. Lett. 67, 177 (1991)
- 2 - F. Riehle, A. Witte, Th. Kisters, J. Helmcke Appl. Phys. B54, 333 (1992)
- 3 - U. Sterz, K. Sengstock, J. H. Müller, D. Bettermann, W. Ertmer Appl. Phys. B54, 341 (1992)
- 4 - S. Haroche, M. Brune, J. M. Raimond Appl. Phys. B54, 355 (1992)

Buts de ce cours

- Mettre en place les éléments nécessaires à la compréhension des expériences d'interférométrie atomique utilisant le passage des atomes à travers des microstructures, comme des fentes d'Young ou des réseaux de fentes.
- Justifier à partir de l'équation de Schrödinger et des propagateurs de Feynman l'analogie avec l'optique.

① Problème de base à résoudre

a) - Hypothèses - Notations



- Commençons par étudier le passage des atomes à travers une fente de largeur a , parallèle à Oy dans le plan xOy , centrée à l'origine O (Fig. 1)
- On considère un paquet d'ondes quasimonochromatique, d'extension très grande devant toutes les dimensions du problème, arrivant de $z = +\infty$, avec une vitesse moyenne \vec{V} , de direction proche de Oz et dirigée vers le bas :

$$V_z < 0 \quad |V_x| \ll |V_z| \quad (9.1)$$

Pour simplifier, on suppose

$$V_y = 0 \quad (9.2)$$

- On s'intéresse à la fonction d'onde de l'atome dans un plan perpendiculaire à Oz , passant par le point P de coordonnées $x=y=0$, $z=-L$.
- 2 cas seront envisagés (correspondant à des expériences effectivement réalisées)
 - (i) Pas de champ de pesanteur (ou plus précisément, champ de pesanteur d'effet négligeable)
 - (ii) Champ de pesanteur vertical, dirigé vers le bas, produisant une accélération \vec{g} , de coordonnées $0, 0, -g$.
- En général, l'état initial de l'atome n'est pas un état pur, mais un mélange statistique de paquets d'ondes. A la fin du calcul, il faudra donc moyenner sur V_z et V_x les probabilités de présence et les cohérences spatiales.
- Nous poserons

$$M V_z = \hbar k_z \quad M V_x = \hbar k_x \quad (9.3)$$

$$k_z^2 + k_x^2 = k_0^2 \quad (9.4)$$

b) - Formulation mathématique

IX-2

- Comme la perturbation introduite par la fente est indépendante du temps, l'atome possède des états stationnaires, d'énergie

$$E_0 = \hbar^2 k_0^2 / 2M \quad (9.5)$$

Solutions de l'équation aux valeurs propres

$$-\frac{\hbar^2}{2M} \Delta \psi(x, y, z) = \frac{\hbar^2 k_0^2}{2M} \psi(x, y, z) \quad \text{pour } g=0 \quad (9.6)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2M} \Delta \psi(x, y, z) + Mgz \psi(x, y, z) = \frac{\hbar^2 k_0^2}{2M} \psi(x, y, z) \quad \text{pour } g \neq 0 \quad (9.7)$$

- Il faut résoudre cette équation aux dérivées partielles dans le 1/2 espace $z < 0$, avec des conditions aux limites appropriées sur les parois de la fente et à l'infini (pour $z \rightarrow +\infty$, on a un état entrant, de la forme $e^{i(k_x x + k_z z)}$).

c) - Approximation de Kirchhoff

- Le problème précédent est difficile à traiter en toute rigueur, notamment quand il faut tenir compte en plus de perturbations, comme le potentiel de gravitation Mgz de (9.7), ou d'autres perturbations éventuelles, produites par des champs extérieurs, comme des champs électriques. C'est pourquoi nous utiliserons des approximations, justifiées par la petitesse de la longueur d'onde de de Broglie $\lambda_z = 1/k_z$ suivant Oz : une approximation du type de celle de Kirchhoff en optique (*) pour les conditions aux limites, et l'approximation paraxiale (voir § 2).
- L'approximation analogue à celle de Kirchhoff en optique consiste à prendre, dans le plan $z=0$, $\psi=0$ sur les parois de la fente et à garder pour ψ et $\partial\psi/\partial z$ à l'intérieur de la fente les mêmes valeurs que s'il n'y avait pas de fente.

$$\begin{cases} \psi(x, y, z=0) = 0 & \text{pour } |x| > a/2 \\ \psi(x, y, z=0) = e^{ik_x x} & \text{pour } -a/2 \leq x \leq +a/2 \\ \partial\psi(x, y, z)/\partial z|_{z=0} = ik_z e^{ik_x x} & \text{pour } -a/2 \leq x \leq +a/2, 0 \text{ ailleurs} \end{cases} \quad (9.8)$$

② Approximation paraxiale

a) Définition

- Comme $\lambda_z = 1/k_z$ est très petit devant toutes des dimensions transversales caractéristiques ($a, \lambda_x = 1/k_x \dots$), on peut essayer de séparer la partie rapidement variable de $\psi(x, y, z)$ en posant, pour $g=0$ (Pour $g \neq 0$, voir § 2 c plus loin)

$$\psi(x, y, z) = e^{-ik_0 z} u(x, y, z) \quad (9.9)$$

On s'attend alors à ce que $u(x, y, z)$ varie lentement et qu'il soit légitime de négliger certains termes (comme $\partial^2 u / \partial z^2$) dans l'équation obtenue en reportant (9.9) dans (9.6). Nous verrons alors plus loin que l'équation ainsi obtenue est tout à fait analogue à celle d'une équation de Schrödinger dépendant du temps dans un espace à 2 dimensions x, y , très facile à résoudre avec les méthodes du cours IV.

(*) J.D. Jackson, Classical Electrodynamics, Wiley (1962) p. 282
M. Born, E. Wolf, Principles of Optics, Pergamon (1980), 6^e édition, p 379

b) Transformation de l'équation aux valeurs propres pour $g=0$ - Calculons $\partial^2 \psi / \partial z^2$

$$\partial \psi / \partial z = (-ik_0 u + \partial u / \partial z) e^{-ik_0 z} \quad (9.10.a)$$

$$\partial^2 \psi / \partial z^2 = (-k_0^2 u - 2ik_0 \partial u / \partial z + \partial^2 u / \partial z^2) e^{-ik_0 z} \quad (9.10.b)$$

- Nous négligerons le terme en $\partial^2 u / \partial z^2$ qui est très petit devant les 2 autres (qui contiennent k_0), et également devant $\partial^2 u / \partial x^2$ et $\partial^2 u / \partial y^2$.

L'équation (9.6) devient alors

$$i \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{2k_0} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u \quad (9.11)$$

qui ressemble à une équation de Schrödinger dépendant du temps si l'on considère z comme un temps.

- En fait, on peut associer un temps τ à z , celui que mettrait une particule classique, partant de $z=0$ à $\tau=0$ avec une vitesse $-V_0 = -\hbar k_0 / M$ pour arriver en z à l'instant τ

$$z = -V_0 \tau = -\frac{\hbar k_0}{M} \tau \quad (9.12)$$

Si l'on passe de la variable z à la variable τ , et qu'on utilise $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{d\tau}{dz} = -\frac{M}{\hbar k_0} \frac{\partial}{\partial \tau}$, l'équation (9.11) devient :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial \tau} u(x, y, \tau) = -\frac{\hbar^2}{2M} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u(x, y, \tau) \quad (9.13)$$

qui est bien une équation de Schrödinger

- Finalement, l'approximation paraxiale faite plus haut revient à traiter classiquement le mouvement suivant Oz (mouvement uniforme à la vitesse V_0), tout en traitant quantiquement le mouvement transversal ;

- Donnons enfin la condition aux limites équivalente à (9.8) pour $u(x, y, z)$ (et qui demeure valable également pour $g \neq 0$).

$$u(x, y, z=0) = u(x, y, \tau=0) = \begin{cases} e^{ik_x x} & \text{pour } -\frac{a}{2} \leq x \leq +\frac{a}{2} \\ 0 & \text{pour } |x| > \frac{a}{2} \end{cases} \quad (9.14)$$

c) Transformation de l'équation aux valeurs propres pour $g \neq 0$

- Essayons tout d'abord de généraliser (9.9). Introduisons le vecteur d'onde $k(z)$ dépendant de z , suivant

$$\frac{\hbar^2 k^2(z)}{2M} + Mg z = \frac{\hbar^2 k_0^2}{2M} \quad (9.15)$$

et posons

$$\Psi(x, y, z) = u(x, y, z) e^{i \int_0^z k(z') dz'} \quad (9.16)$$

- Calculons $\partial^2 \psi / \partial z^2$

$$\partial \psi / \partial z = [i k(z) u + \partial u / \partial z] e^{i \int_0^z k(z') dz'} \quad (9.17.a)$$

$$\partial^2 \psi / \partial z^2 = \left[-k^2(z) u + 2i k(z) \partial u / \partial z + i \frac{dk}{dz} u + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] e^{i \int_0^z k(z') dz'} \quad (9.17.b)$$

- Comme plus haut, nous négligeons $\partial^2 u / \partial z^2$. Nous négligeons également $i (dk/dz) u$ devant $-k^2 u$, puisque

$$\frac{dk/dz}{k^2} = \left(\frac{1}{k} \frac{dk}{dz} \right) \times \lambda \ll 1 \quad (9.18)$$

La variation relative de $k(z)$ sur une distance de l'ordre de la longueur d'onde de de Broglie suivant Oz étant très faible.

Enfin, nous utilisons l'équation (9.15) pour transformer le 1^{er} terme du crochet de (9.17.b)

L'équation (9.7) devient alors

$$i \frac{\partial u}{\partial z} = - \frac{1}{2k(z)} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u \quad (9.19)$$

qui ressemble beaucoup à (9.11), à part que k_z est remplacé par $k(z)$.

- Effectuons le changement de variable

$$\tau(z) = \int_0^z \frac{M}{\hbar k(z')} dz' \quad (9.20)$$

$\tau(z)$ est le temps que met une particule, tombant dans le champ de pesanteur et partant de $z=0$ à $\tau=0$ avec la vitesse $-V_0 = -\hbar k_0 / M$, pour arriver en z . En utilisant

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{d\tau}{dz} = \frac{M}{\hbar k(z)} \frac{\partial}{\partial \tau} \quad (9.21)$$

on obtient, à partir de (9.19)

$$i \hbar \frac{\partial}{\partial \tau} u(x, y, \tau) = - \frac{\hbar^2}{2M} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u(x, y, \tau) \quad (9.22)$$

Comme plus haut, on est ramené au problème d'une particule quantique libre à 2 dimensions, l'approximation paraxiale revenant à traiter classiquement le mouvement de chute libre le long de Oz.

- Pour la suite, nous aurons besoin de l'expression du temps $\tau(z)$ défini en (9.20). Il est plus simple de le calculer à partir de l'équation du mouvement classique

$$z(\tau) = -V_0 \tau - \frac{1}{2} g \tau^2 \quad (9.23)$$

Prenez par exemple $z = -L$ (voir Fig. 1) et appelons T la valeur correspondante de τ , valeur du temps auquel

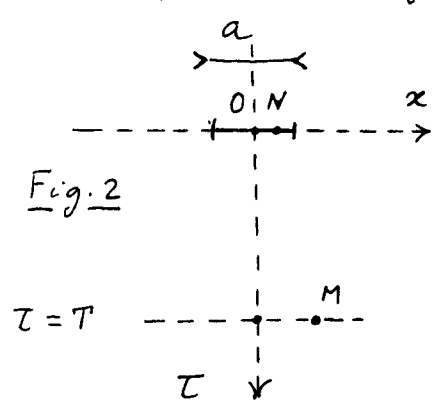
la particule arrivée dans le plan passant par O_3 et perpendiculaire à P . L'équation (9.23) n'a alors qu'une seule valeur positive

$$T = -\frac{V_0}{g} + \frac{V}{g} \sqrt{1 + \frac{2Lg}{V_0^2}} = \frac{V_0}{g} (\sqrt{1 + \alpha} - 1) \quad (9.24)$$

o u $\alpha = 2Lg/V_0^2$ (9.25)

3) Diffraction par une fente

a) - Nouvelle formulation du problème



- Le problème posée dans le   1 a plus haut peut être maintenant reformulé en termes de propagation temporelle d'une particule dans un espace à 2 dimensions x, y (voir Fig. 2, où l'axe Oy est perpendiculaire au plan de la figure)
- A l'instant $\tau = 0$, cette particule est décrite par la fonction d'onde (9.14) dont le support correspond à la fente (bande de largeur a centrée sur Oy dans xOy)

- Cette particule se propage librement, que g soit nul ou non (voir Eqs 9.13 et 9.22). On veut calculer la fonction d'onde $u(x, y, \tau = T)$   un instant ultérieur $\tau = T$, T correspondant au temps d'arrivée au point P de la figure 1 d'une particule classique partant de O   $t = 0$ avec la vitesse $-V_0$. C'est là que le fait que g soit nul ou non intervient : T depend de g et est donné par (9.24) qui se réduit à

$$T = \frac{L}{V_0} \quad (9.26)$$

si $g = 0$ (Il suffit pour le voir de faire un développement limité de $\sqrt{1 + \alpha}$ quand $g \rightarrow 0$, ou plus simplement de revenir à (9.12)).

- Pour étudier la propagation libre de $u(x, y, \tau)$ avec la condition initiale (9.14), on peut alors utiliser les résultats du cours IV.

Soit M un point du plan $\tau = T$ dans l'espace-temps de la figure 2, de coordonnées $x, y, \tau = T$. Comme le problème est invariant par translation le long de Oy à cause du champ $V_y = 0$ (voir Eq. (9.2)), nous prendrons $y = 0$

$$M : x, y = 0, \tau = T \quad (9.27.a)$$

Soit N un point situé dans la fente à l'instant $\tau = 0$, de coordonnées ξ, η

$$N : \xi, \eta, \tau = 0 \quad (9.27.b)$$

D'après la formule (4.27) du cours IV, on a :

$$u(x, 0, \tau = T) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\eta \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} d\xi K(x, 0, \tau = T; \xi, \eta, \tau = 0) u(\xi, \eta, \tau = 0) \quad (9.28)$$

où K est le propagateur de Feynman donné par

$$K(x, 0, \tau = T; \xi, \eta, \tau = 0) = F(T) \exp\left\{\frac{i}{\hbar} S_{cl}(x, 0, \tau = T; \xi, \eta, \tau = 0)\right\} \quad (9.29)$$

S_{cl} étant l'action classique le long du chemin réel passant par les points $\xi, \eta, \tau = 0$ et $x, 0, \tau = T$. Comme la particule est libre, on a (voir, par exemple, Eq. (5.10) avec $g = 0$).

$$S_{cl}(x, 0, \tau = T; \xi, \eta, \tau = 0) = \frac{M}{2T} [(x - \xi)^2 + \eta^2] \quad (9.30)$$

Tout le problème consiste à effectuer l'intégrale (9.28) et à étudier comment $u(x, 0, T)$ varie avec x pour diverses valeurs de T .

Remarques.

(i) Il importe de bien voir la différence avec les cours précédents où l'état initial était en général une onde plane d'extension infinie (ce qui revient à prendre $a = \infty$ dans (9.28)). L'intégrale spatiale à $\tau = 0$, privilégie alors un seul point, celui par lequel passe la trajectoire classique ayant l'impulsion de l'onde plane initiale et arrivant au point auquel on s'intéresse à l'instant final. Ici, l'intégrale sur ξ de (9.28) est bornée et la simplification précédente ne se produit plus. C'est ce qui permet à $u(x, 0, \tau = T)$ d'être non nul même s'il n'existe aucune trajectoire classique arrivant en $x, 0, T$ et passant à travers la fente avec une impulsion MV_x, MV_y . Ce sont précisément les effets de diffraction que nous désirons étudier ici.

(ii) Une fois les approximations paraxiales faites et l'équation (9.13) (ou (9.22)) obtenue, la résolution de cette équation ne nécessite aucune autre approximation car les équations (9.28), (9.29) et (9.30) sont exactes.

(iii) Nous avons supposé ici que le champ de gravitation était vertical (jet atomique arrivant sur la fente, verticalement). On pourrait supposer aussi \vec{g} parallèle à Ox (cas d'un jet atomique horizontal arrivant sur une fente horizontale dans un plan perpendiculaire au jet). Dans un tel cas, l'axe Ox de la figure 1 est vertical et l'axe Oz horizontal. On peut toujours faire l'approximation paraxiale pour le mouvement suivant la direction d'arrivée Oz des atomes. On obtient alors des équations analogues à (9.13) (ou (9.22)), la seule différence étant l'apparition d'un terme supplémentaire Mgx $u(x, y, \tau)$ décrivant l'effet du potentiel de gravitation le long de Ox . Les formules (9.28) et (9.29) demeurent alors valables à condition de remplacer l'action (9.30) par l'action en présence d'un champ de gravitation (voir cours V). Les mêmes idées peuvent se généraliser à d'autres champs extérieurs (par exemple électriques) perturbant le mouvement transversal des atomes.

b) - Transformation de l'intégrale dans le plan de la fente

- Réécrivons l'action (9.30) sous la forme

$$S_{cl}(x, 0, \tau=T; \xi, \eta, \tau=0) = \frac{M}{2T} x^2 - \frac{Mx}{T} \xi + \frac{M}{2T} (\xi^2 + \eta^2) \quad (9.31)$$

qu'on peut considérer comme un développement en fonction des coordonnées ξ et η du point de départ autour du point 0, développement qui s'arrête à l'ordre 2 car l'action est quadratique.

- Le terme d'ordre 0 en ξ, η est l'action de la trajectoire classique reliant 0 à M. Nous la noterons $S_0(x)$

$$S_{cl}(x, 0, \tau=T; 0, 0, \tau=0) = \frac{M}{2T} x^2 = S_0(x) \quad (9.32)$$

D'après l'équation (4.12) du cours IV, le coefficient du terme linéaire en ξ est égal, au signe - près, à la composante x de l'impulsion en 0 de la trajectoire classique reliant les points 0 et M. Effectivement, comme le mouvement est libre, la vitesse v_x de la trajectoire classique reliant 0 à M est $(x_M - x_0)/(t_M - t_0) = x/T$, de sorte que

$$- \frac{Mx}{T} = - M v_x \quad (9.33)$$

Il ne faut bien sûr pas confondre l'impulsion Mv_x de la trajectoire classique reliant 0 à M avec l'impulsion $Mv_x = \hbar k_x$ du paquet d'ondes initial, qui apparaît dans la condition initiale (9.14). Enfin, on reconnaît dans le coefficient $M/2T$ des termes quadratiques, le terme $C(T) = \frac{1}{2} \partial^2 S / \partial x_a^2$ utilisé à plusieurs reprises dans les cours antérieurs (voir Eq. (5.12)). Finalement, nous réécrivons S_{cl} sous la forme

$$S_{cl}(x, 0, \tau=T; \xi, \eta, \tau=0) = S_0(x) - M v_x \xi + \frac{M}{2T} (\xi^2 + \eta^2) \quad (9.34)$$

- Une fois (9.34) reporté dans (9.29), puis (9.30), l'intégrale sur η peut être faite, et donne, compte tenu de (4.54), $\sqrt{2i\pi\hbar T/M}$. Utilisant (9.14), et remplaçant k_x par Mv_x/\hbar , on obtient alors

$$u(x, 0, \tau=T) = F(T) \sqrt{\frac{2i\pi\hbar T}{M}} e^{i \frac{S_0(x)}{\hbar}} \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} d\xi e^{i \frac{M}{\hbar} (v_x - v_x) \xi} e^{i \frac{M \xi^2}{2T\hbar}} \quad (9.35)$$

c) - Diffraction proche et lointaine - Nombre de Fresnel

- La fonction $e^{iM\xi^2/2T\hbar}$ qui apparaît dans (9.35) est une fonction de ξ qui oscille de plus en vite avec ξ quand ξ devient plus grand que

$$\Delta \xi = \sqrt{\frac{2\hbar T}{M}} \quad (9.36)$$

C'est cette fonction qui permet d'introduire les zones de Fresnel.

- Si $\Delta\xi$ est grand devant la largeur de la fente, on pourra ignorer les oscillations de $e^{iM\xi^2/2T\hbar}$ et remplacer cette fonction par 1. Si au contraire $\Delta\xi \ll a$, il faudra, bien sûr, venir compte de ces oscillations. Comme $\Delta\xi$ augmente avec T , et donc avec la distance L du plan d'observation à la fente, la condition $\Delta\xi \gg a$ définit la zone de diffraction lointaine, la condition $\Delta\xi \ll a$ la zone de diffraction proche.

- Calculons le rapport $a^2/\Delta\xi^2$ dans le cas où la particule est libre le long de Oz ($g=0$), auquel cas T est donné par (9.15)

$$\frac{a^2}{\Delta\xi^2} \sim \frac{a^2 M}{\hbar T} \sim \frac{a^2 M V_0}{L \hbar} \sim \frac{a^2}{\lambda_0 L} \tag{9.37}$$

où $\lambda_0 = \hbar/MV_0$ est la longueur d'onde de de Broglie des atomes incidents. On reconnaît en (9.37) le nombre de Fresnel associé à la fente de largeur a observée à partir d'une distance L . Ce nombre représente physiquement le nombre de zones de Fresnel transversales à considérer dans la fente lorsqu'on l'observe à une distance L .

- Nous nous supposons placés dans ce qui suit dans la zone de diffraction lointaine

$$\Delta\xi \gg a \tag{9.38}$$

auquel cas on peut remplacer $e^{iM\xi^2/2T\hbar}$ par 1 dans (9.35) l'intégrale sur ξ est alors élémentaire et l'on obtient

$$u(x, 0, \tau=T) = F(T) \sqrt{\frac{2i\pi\hbar T}{M}} e^{iS_0(x)/\hbar} F(v_x - V_x) \tag{9.39}$$

où $F(v_x - V_x)$ est une fonction de diffraction

$$F(v_x - V_x) = \frac{\sin \frac{M(v_x - V_x)a}{2\hbar}}{\frac{M(v_x - V_x)a}{2\hbar}} \tag{9.40}$$

dont la largeur en $M(v_x - V_x)$ est de l'ordre de $2\pi\hbar/a$.

d) - Discussion physique - Les 2 causes de variation transversale de la fonction d'onde

- Comme v_x est relié à x par (9.33), $u(x, 0, \tau=T)$ dépend de x par l'intermédiaire des 2 fonctions $e^{iS_0(x)/\hbar}$ et $F(v_x - V_x)$ apparaissant dans (9.39).

- La 1^{ère} fonction, $e^{iS_0(x)/\hbar}$, introduit un déphasage lié à la propagation entre le point O et le point M de la figure 2. Rappelons que $S_0(x)$ est l'action le long de la trajectoire classique reliant O à M , v_x étant la composante le long de Ox de la vitesse au point O de cette trajectoire.

- En fait, la particule incidente n'a pas la vitesse v_x le long de Ox , mais la vitesse V_x . Cependant, le passage de

l'atome à travers la fente tronque la fonction d'onde sur un intervalle de largeur a et communique à l'atome une dispersion de vitesses le long de Ox , de l'ordre de \hbar/Ma . La 2^{ème} fonction, $F(v_x - v_x)$, apparaissant dans (9.39), représente l'amplitude de probabilité pour que la particule incidente, de vitesse v_x , acquière après le passage par la fente une vitesse v_x lui permettant de s'adapter à la trajectoire classique partant de O et arrivant à M . Si $|v_x - v_x| \lesssim \hbar/Ma$, cette amplitude est importante. Par contre, si $|v_x - v_x| \gg \hbar/Ma$, elle est négligeable.

- L'équation (9.39) sépare donc clairement l'effet de la diffraction et le déphasage lié à la propagation.

Remarque

- L'action $S_0(x)$ donnée en (9.32) peut encore s'écrire

$$S_0(x) = \int_0^x P_x(x') dx' \tag{9.41}$$

où $P_x(x') = Mx'/T$ est l'impulsion au point x' de la trajectoire classique reliant O à M (voir Eq. (9.33)).

- Par ailleurs, si l'on revient de la fonction d'onde u à la fonction d'onde Ψ grâce à l'équation (9.9), ou plus généralement (9.16), on voit que $\Psi(x, y=0, z)$ contient un facteur de phase

$$e^{i \int_0^x P_x(x') dx'} e^{i \int_0^z P_z(z') dz'} \tag{9.42}$$

où $P_z(z') = \hbar k(z')$, facteur de phase que l'on peut encore écrire

$$e^{i \int_0^M \vec{p}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}} \tag{9.43}$$

On voit apparaître la partie spatiale $\int_0^M \vec{p}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$ de l'action calculée le long de la trajectoire à 3 dimensions.

e) - Cohérence spatiale transverse

- Considérons 2 points M_1 et M_2 dans le plan $\tau = T$ de la figure 2, d'abscisses x_1 et x_2 . La cohérence spatiale entre les 2 points peut être caractérisée par $u(x_1)u(x_2)^*$ qui contient, en plus du terme $\exp\{i[S_0(x_1) - S_0(x_2)]/\hbar\}$ lié à la propagation, le produit $F(v_{x_1} - v_x)F^*(v_{x_2} - v_x)$ des 2 amplitudes liées à la diffraction.

- Si les 2 points M_1 et M_2 sont suffisamment éloignés, plus précisément si

$$|v_{x_1} - v_{x_2}| = \frac{|x_1 - x_2|}{T} \gg \frac{\hbar}{Ma} \tag{9.44}$$

les 2 fonctions $F(v_{x_1} - v_x)$ et $F(v_{x_2} - v_x)$ ne pourront être jamais simultanément importantes, même si l'on moyenne sur les vitesses v_x associés à un mélange statistique décrivant l'état initial. Si l'on prend v_x voisin de v_{x_1} , $F(v_{x_1} - v_x)$ sera important, mais $F(v_{x_2} - v_x)$ sera alors négligeable et vice versa. Dans un tel cas, $u(x_1)u(x_2)^*$

sera très faible, alors que $|u(x_1)|^2$ et $|u(x_2)|^2$ auront des valeurs appréciables, obtenues respectivement à partir des états du mélange tels que $v_x \approx v_{x_1}$ et $v_x \approx v_{x_2}$.

- On en déduit que la longueur de cohérence transverse ξ_{tr} , dans le plan $z = -L$, est donnée par :

$$\xi_{tr} \sim \frac{\hbar T}{M a} \tag{9.45}$$

Exprimons T en fonction de L au moyen de (9.24) et (9.25). Il vient

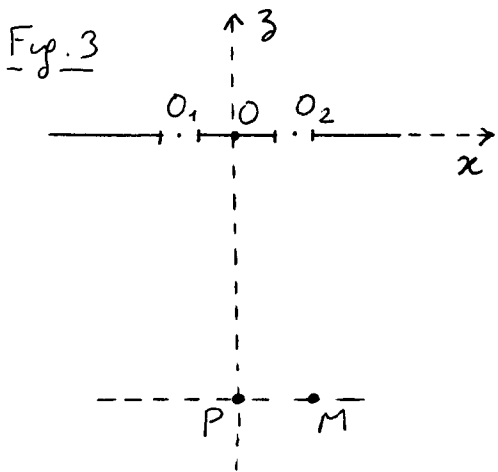
$$\xi_{tr} \sim \frac{\hbar v_0}{M g a} (\sqrt{1+\alpha} - 1) \sim \frac{\hbar}{M v_0} \frac{L}{a} \frac{\sqrt{1+\alpha} - 1}{\alpha} \sim L \frac{\lambda_0}{a} \frac{\sqrt{1+\alpha} - 1}{\sqrt{\alpha}} \tag{9.46}$$

Pour $g \rightarrow 0$, c'est à dire pour $\alpha \rightarrow 0$, on retrouve le résultat bien connu $\xi_{tr} \sim L \frac{\lambda_0}{a}$ (9.47)

correspondant à la longueur du segment du plan $z = -L$ "vu" à partir de 0 sous un angle λ/a (angle de diffraction). Dans ce cas, ξ_{tr} croît linéairement avec L . Par contre si $\alpha = 2Lg/v_0^2 \gg 1$ (cas possible avec des atomes lents), ξ_{tr} croît comme $L/\sqrt{\alpha}$, c'est à dire seulement comme \sqrt{L} .

④ Passage à travers 2 fentes - Interférences.

a) Problème physique



- 2 fentes de largeur a , parallèles à Oy dans le plan xOy , et centrées en O_1 et O_2 tels que $OO_1 = -d/2 = -OO_2$ (9.48)
- On se place dans le plan de côté $z = -L$, correspondant au temps de transit $\tau = T$, et on observe la superposition des 2 ondes venant des fentes F_1 et F_2 . On s'intéresse en particulier au déphasage entre ces 2 ondes au point M d'abscisse x (Fig. 3)

b) Calcul du déphasage et de l'interfrange.

- Il faut superposer 2 fonctions d'ondes analogues à (9.39), x étant remplacé par $x + \frac{d}{2}$ (abscisse de M par rapport à O_1) dans la 1^{ère}, par $x - \frac{d}{2}$ dans la 2^{ème}.
- Considérons les 2 trajectoires reliant O_1 à M et O_2 à M . Soit v_{x_1} la vitesse le long de Ox de la 1^{ère} trajectoire en O_1 , v_{x_2} la quantité analogue pour la 2^{ème} en O_2 . Nous supposons que L est suffisamment grand, et a et d suffisamment

petits pour que $|v_{x_1} - v_{x_2}| \ll \hbar / Ma$. On peut alors ignorer les variations des amplitudes de diffraction F d'une trajectoire à l'autre et calculer le déphasage entre les 2 ondes arrivant en M en ne tenant compte que des termes de propagation $\exp\{iS_0(x+\frac{d}{2})/\hbar\}$ et $\exp\{iS_0(x-\frac{d}{2})/\hbar\}$.

On obtient alors pour le déphasage $\delta\Phi$, compte tenu de (9.32) :

$$\delta\Phi = \frac{S_0(x+\frac{d}{2}) - S_0(x-\frac{d}{2})}{\hbar} = \frac{M}{2\hbar T} [(x+\frac{d}{2})^2 - (x-\frac{d}{2})^2] = \frac{Mxd}{\hbar T} \quad (9.49)$$

- L'interfrange δx est la quantité dont il faut se déplacer le long de Ox pour faire varier $\delta\Phi$ de 2π . On déduit de (9.49)

$$\delta x = \frac{2\pi\hbar T}{Md} = \frac{\hbar T}{Md} \quad (9.50)$$

Utilisons (9.24) et (9.25) pour repasser de T à L . Il vient

$$\delta x = \frac{2\lambda_0 L}{d} \frac{\sqrt{1+\alpha} - 1}{\alpha} \quad (9.51)$$

Pour $g \rightarrow 0$ ($\alpha \rightarrow 0$), on retrouve le résultat bien connu

$$\delta x = \frac{\lambda_0 L}{d} \quad (9.52)$$

montrant que l'interfrange croît linéairement avec L .

Par contre pour $\alpha \gg 1$, il faut diviser (9.52) par $\sqrt{\alpha}$ et δx ne croît que comme \sqrt{L} .

Remarque

Dans le cas où des perturbations transverses sont appliquées aux atomes, l'étude précédente montre qu'on peut calculer le déphasage entre les 2 ondes arrivant au point M de la figure 3 de la façon suivante.

On considère les 2 trajectoires classiques, tenant compte des perturbations transverses, et reliant O_1 à M d'une part, O_2 à M de l'autre. On calcule ensuite

$$\delta\Phi = \int_{O_1}^M \frac{\vec{P}_1 \cdot d\vec{r}_1}{\hbar} - \int_{O_2}^M \frac{\vec{P}_2 \cdot d\vec{r}_2}{\hbar} \quad (9.53)$$

le long de ces 2 trajectoires (voir remarque à la fin du § 3 d plus haut). Il faut également calculer les corrections dues à la diffraction, $F(v_{x_1} - v_x)$ et $F(v_{x_2} - v_x)$ et s'assurer qu'elles ne varient pas trop d'une trajectoire à l'autre.

Références

Les références aux expériences d'interférence atomique utilisant des microstructures (expériences réalisées à Constance, Tokyo, MIT) seront données dans le cours suivant.

Interféromètres atomiques utilisant des doubles fentes

Buts de ce cours

- Appliquer les résultats du cours précédent à l'interprétation de 2 expériences d'interférométrie atomique à "division de front d'ondes", réalisées, l'une à Constance, l'autre à Tokyo. Ces expériences constituent l'équivalent, pour les ondes de de Broglie atomiques, de l'expérience des 2 fentes d'Young en optique.
- D'autres expériences d'interférométrie atomique (à "division d'amplitude") utilisent le passage des atomes à travers un ensemble de réseaux périodiques de fentes, qui séparent l'onde plane incidente en plusieurs ondes planes cohérentes entre elles, puis les recombinaient (expériences de M.I.T). Elle seront analysées dans des cours ultérieurs, en parallèle avec d'autres expériences utilisant la diffraction d'une onde atomique par passage à travers une onde laser stationnaire (expérience également réalisée à M.I.T.)

① Expérience de O. Carnal et J. Mlynek à Constance (Ref. 1)

a. Principe de l'expérience

Schéma du montage

expérimental (Fig. 1)

- N : Réservoir de gas et buse.
- EE Excitation électronique.
- A Fente d'entrée.
- B Fentes d'Young.
- C Fente d'analyse.
- SEM Multiplicateur d'électrons.

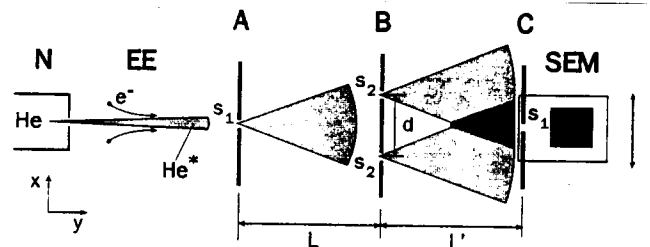


Fig. 1 (Extrait de [1])

Jet atomique

- Jet supersonique d'atomes d'Helium excités dans l'état métastable 2^3S_1 par excitation par un faisceau d'électrons parallèle au jet.
- Motivations d'un tel choix
 - L'atome d'Helium est inerte chimiquement et moins corrosif que les alcalins.
 - Faible masse $M = 4$ u.a., et donc grande longueur d'onde de de Broglie.
 - Atomes dans l'état métastable, facile à détecter un par un.
- Température du réservoir et de la buse : 2 valeurs correspondant à la température ambiante et à la température de l'azote liquide et conduisant à 2 valeurs différentes pour la longueur d'onde de de Broglie λ_{DB} associée à la vitesse moyenne v_0 .

$$T = 295 \text{ K} \rightarrow \lambda_{DB} = 0.56 \text{ \AA} \quad T = 83 \text{ K} \rightarrow \lambda_{DB} = 1.03 \text{ \AA} \quad (10.1)$$
- "Monochromaticité" du jet

$$v_0 / \Delta v \approx 15 \text{ à } 20 \quad (10.2)$$

Δv : dispersion des vitesses autour de la vitesse moyenne.
Possibilité d'augmenter $v_0 / \Delta v$ par refroidissement laser longitudinal du jet (voir § d plus loin)
- Pression résiduelle : $5 \cdot 10^{-7}$ mbar

Fentes

- Microstructures réalisées sur des feuilles d'or par des techniques photolithographiques (voir Ref. 1).
- Fente d'entrée A et Fente d'analyse C
 Largeur $s_1 = 2 \mu\text{m}$ Hauteur = 4 mm (10.3)

- Fentes d'Young B
 2 Fentes analogues aux précédentes
 Largeur $s_2 = 1 \mu\text{m}$ Séparation $d = 8 \mu\text{m}$ (10.4)

- Cohérence spatiale transverse (voir § 3e du cours IX)
 Après traversée de la fente A, apparaît un angle de diffraction $\theta = \lambda_{DB} / s_1$. Le segment du plan de B, situé à une distance $L = 64 \text{ cm}$ de A, vu à partir de A sous l'angle θ , a une longueur ξ_{trans} . (longueur de cohérence transverse)

$$\xi_{\text{trans}} \approx L \theta = L \frac{\lambda_{DB}}{s_1} \approx 0.64 \frac{10^{-10}}{2 \cdot 10^{-6}} \approx 32 \mu\text{m} \quad (10.5)$$

Cette longueur ξ_{trans} est ~~beaucoup~~ plus grande que l'écart d entre les 2 fentes. Les 2 fentes sont donc "éclairées" de manière cohérente par les ondes de de Broglie arrivant de A

- Nombre de Fresnel pour les fentes B vue à une distance L' (voir § 3C du cours IX).

$$N = \frac{s_2^2}{L' \lambda_{DB}} = \frac{(10^{-6})^2}{0.64 \cdot 10^{-10}} \approx 1.5 \cdot 10^{-2} \ll 1 \quad (10.6)$$

L'écran C est donc dans la zone de diffraction lointaine des fentes B.

Détection

- Les atomes métastables passant à travers la fente d'analyse sont détectés par un multiplicateur d'électrons secondaires pouvant être translaté parallèlement à Ox.
- Les impulsions sont amplifiées, discriminées, et comptées.

b - Résultats

Utilisation d'une fente d'analyse unique (Fig. 2)

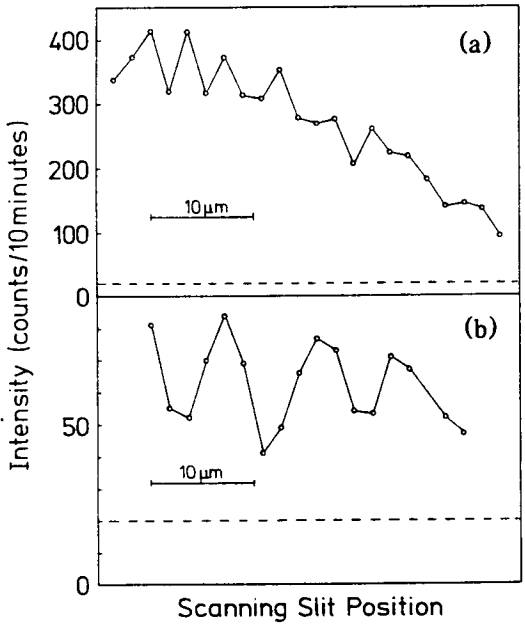


Fig. 2 (Extrait de [1])

- Figure 2a
 Résultats obtenus avec $\lambda_{DB} = 0.56 \text{ \AA}$
 ($T = 295 \text{ K}$)

Valeur prévue pour l'interfrange

$$\delta x = \frac{\lambda_{DB} L'}{d} = \frac{0.56 \cdot 10^{-10} \times 0.64}{8 \cdot 10^{-6}} \quad (10.7)$$

$$\approx 4.5 \cdot 10^{-6} \text{ m} = 4.5 \mu\text{m}$$

Assez bon accord avec la valeur observée.
 Résolution faible car la largeur de la fente d'analyse ($\approx 2 \mu\text{m}$) n'est que 2 fois plus faible que l'interfrange.

- Figure 2b : $\lambda_{DB} = 1.03 \text{ \AA}$ ($T = 83 \text{ K}$)

$$\delta x = 8.2 \mu\text{m} \quad (10.8)$$

Assez bon accord - Meilleure visibilité.

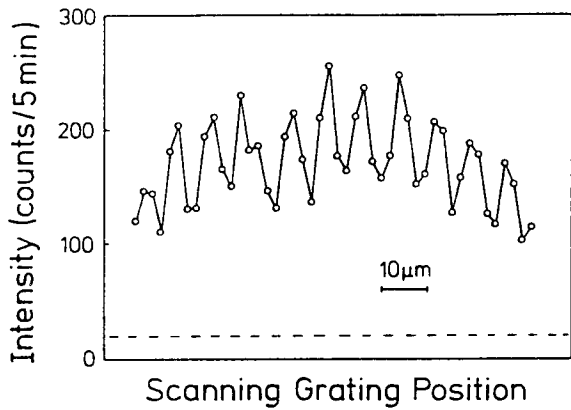


Fig. 3 (Extrait de [1])

- Si la période spatiale du réseau coïncide avec la période spatiale de la figure d'interférence, on doit observer des modulations du taux de comptage quand on déplace le réseau de fentes

Signal beaucoup plus grand car on détecte beaucoup plus d'atomes

- La figure 3 représente le résultat obtenu avec un réseau de fentes de largeur $4 \mu\text{m}$, espacés de $8 \mu\text{m}$. La température du réservoir est 83 K correspondant à $\lambda_{DB} = 1.03 \text{ \AA}$ et donc à un interférange $8.2 \mu\text{m}$, voisin de l'espacement des fentes. L'existence des franges d'interférence est très claire.

c) Discussion

- On voit sur la figure 3 que le nombre moyen \bar{n} d'atomes détectés est de l'ordre de quelques centaines. Comme les fluctuations de \bar{n} sont de l'ordre de $\sqrt{\bar{n}}$, le rapport signal sur bruit est meilleur que 10. Les auteurs en déduisent que la sensibilité est de l'ordre de $\delta\phi \sim 1/3 \text{ rad}$ en moins de 10 minutes.

- Imaginons que les 2 fentes B soient horizontales dans un plan vertical. Les 2 trajectoires passant par les 2 fentes ne seraient pas alors à la même hauteur et le déphasage $\delta\phi$ entre les 2 bras deviendrait sensible au champ de pesanteur. D'après les résultats du cours V (voir Eq.(5.62)), on aurait un déplacement δN des franges donné par

$$\delta N = \frac{1}{2} \frac{M^2}{h^2} g L' d \lambda_{DB} \quad (10.9)$$

qui, pour $\lambda_{DB} \approx 1 \text{ \AA}$, vaudrait $1/4$ d'interfrange. Encore faudrait-il pour détecter un tel décalage, repérer la position de franges pour $g = 0$.

d) Amélioration de la monochromaticité du jet (Ref. 2)

Motivations

- Augmenter $v_0/\Delta v$ revient à augmenter la longueur de cohérence

$$L_{coh} = \lambda_{DB} \frac{v_0}{\Delta v} \quad (10.10)$$

des ondes de de Broglie incidentes et donc le nombre de franges d'interférence observables (à l'intérieur bien sûr des vaches de diffraction des fentes d'Young)

- Réduction des aberrations chromatiques en optique atomique.

Description de l'expérience

- L'expérience a été réalisée, non pas sur l'Helium, mais sur l'Argon, qui possède de nombreuses transitions aisément excitable par laser et permettant de contrôler les degrés de liberté de translation de l'atome (refroidissement laser). Voir diagramme d'énergie de la figure 4.

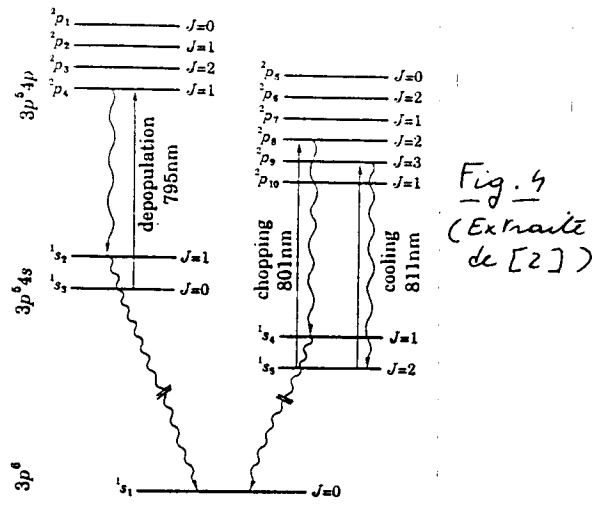


Fig. 4
(Extrait de [2])

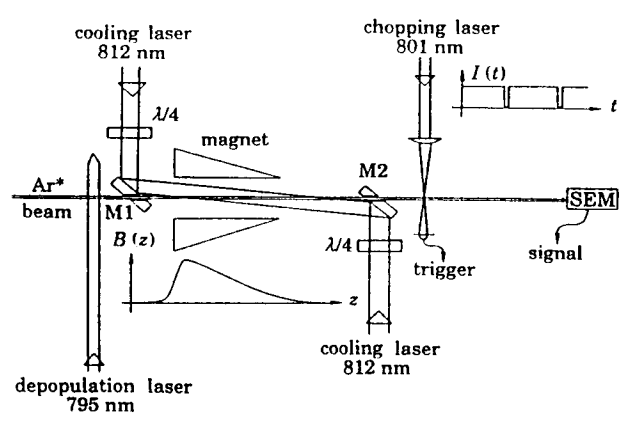


Fig. 5 (Extrait de [2])

- On part d'un jet d'atomes d'Argon métastables (voir Fig. 5). Jet supersonique avec $(v_0/\Delta v)$ initial ~ 12 . $v_0 \approx 580$ m/sec
 Contient des atomes dans les 2 états métastables $1s_5$ et $1s_3$.
 L'état $1s_3$ est dépeuplé par excitation de $1s_3 - 2p_4$ à 795 nm, suivi par une retombsée des atomes dans l'état fondamental via $1s_2$ (voir Fig. 4)
 - Le jet est éclairé, le long de sa direction de propagation par 2 faisceaux se propageant en sens inverse, ayant des fréquences proches de la fréquence de la transition (fermée) $1s_5 (J=2) \rightarrow 2p_3 (J=3)$ à 811 nm (Fig. 4) les fréquences des 2 faisceaux sont telles que, dans le référentiel en mouvement à la vitesse moyenne v_0 des atomes, les fréquences apparaissent égales à l'atome, et décalés vers le rouge de 3 MHz (moitié de la largeur naturelle $\Gamma/2\pi \approx 6.15$ MHz de l'état $2p_3$). On a alors une mélasse en mouvement, qui produit un refroidissement des atomes autour de v_0 .
 En fait comme $(v_0/\Delta v)$ initial ≈ 12 et que l'effet Doppler correspondant à v_0 est de l'ordre de 720 MHz, la largeur Doppler correspondant à Δv est de l'ordre de $720/12 = 60$ MHz, bien plus grande que l'intervalle de capture de la mélasse Doppler, de l'ordre de $\Gamma/2\pi = 6.15$ MHz. C'est la raison pour laquelle on ajoute un gradient de champ magnétique, produit par un solénoïde de pas variable, permettant de refroidir les atomes de vitesses différentes en divers points de l'espace.

- Une fois les atomes ainsi refroidis autour de v_0 , on mesure la nouvelle dispersion des vitesses (Δv) fin par une méthode de temps de vol
 La population du jet est haché par excitation des atomes de $1s_5$ vers $2p_3$ à 801 nm, puis retombsée vers l'état fondamental et on mesure l'intervalle de temps au bout duquel cette perturbation apparaît sur le multiplicateur d'électron SEM

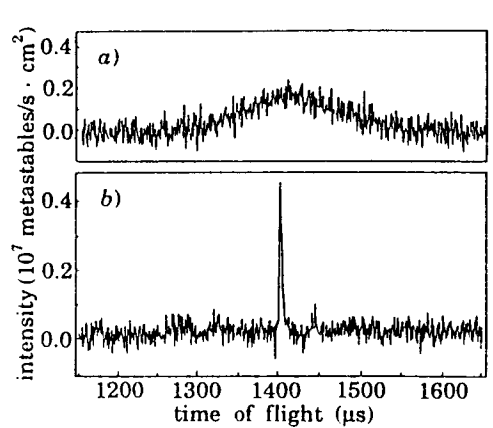


Fig. 6 (Extrait de [2])

- La figure 6 montre les résultats obtenus. Ils correspondent à

$$\left(\frac{v_0}{\Delta v}\right)_{\text{final}} = 890^{+105}_{-75}$$

Dispersion des vitesses du jet mesuré par temps de vol
 a - En l'absence de refroidissement laser
 b - En présence de refroidissement laser

② Expérience de F. Shimizu, K. Shimizu et H. Takuma à Tokyo
(Refs 3 et 4)

a. Principe de l'expérience

Différence essentielle avec l'expérience précédente

Utilisation, au lieu d'une fente source, d'une source quasi ponctuelle d'atomes refroidis par laser, avec tous les avantages liés à des vitesses plus faibles :

- Longueurs d'onde de de Broglie plus grandes, et donc moins de contraintes pour les microstructures utilisées.
- Temps d'interaction plus longs (temps de propagation de atomes dans l'interféromètre ~ 0.2 sec) et donc plus grande sensibilité aux champs extérieurs.

Niveaux d'énergie - Schéma du montage

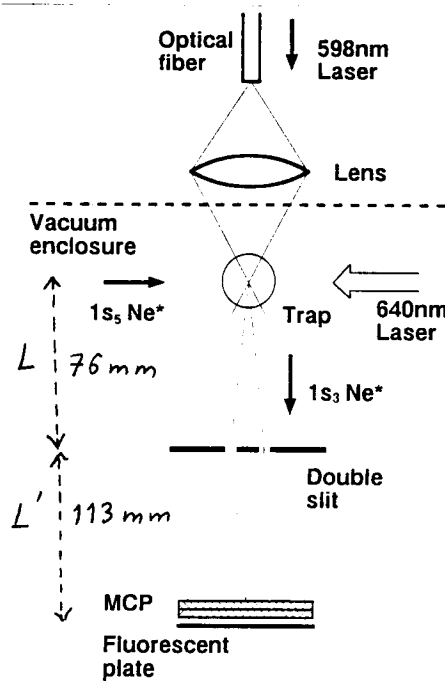
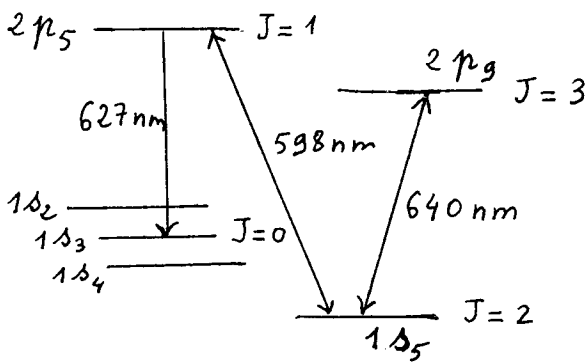


Fig. 8
(Extrait de [3])

Etat fondamental

Fig. 7 Quelques niveaux d'énergie de l'atome de Neon utilisé dans ces expériences.

Source atomique

- Atomes de Neon excités dans l'état métastable $1s_5, J=2$. Piégés et refroidis sur la transition fermée $1s_5, J=2 \leftrightarrow 2p_3, J=3$ à 640 nm.
- Les atomes sont transférés de l'état métastable $1s_5, J=2$ vers l'autre état métastable $1s_3, J=0$, par excitation vers le niveau $2p_5, J=1$, sur la transition $1s_5 \leftrightarrow 2p_5$ à 598 nm, puis par retombée des atomes (environ la moitié) de $2p_5, J=1$ vers $1s_3, J=0$. L'autre moitié des atomes retourne à l'état fondamental via les autres états $1s$ non métastables, avec émission de photons UV à 75 nm.
- L'état $1s_3, J=0$ n'est pas perturbé par le laser de refroidissement à 640 nm, qui est trop loin de résonance. Comme c'est un état $J=0$, il n'est pas sensible au champ magnétique utilisé pour le piège magnéto-optique. Les atomes ainsi portés dans le niveau métastable $1s_3, J=0$ quittent donc le piège et tombent dans le champ de pesanteur avec la vitesse initiale qu'ils ont acquise après le cycle $1s_5 \rightarrow 2p_3 \rightarrow 1s_3$.
Variation de vitesse au cours d'un tel cycle : $\delta v_0 \sim 5$ cm/sec

- Dimensions de la source atomique
 Diamètre D du piège ~ 1 mm
 Rayon focal ("waist") w du laser de transfert $\bar{\lambda} = 598$ nm ~ 30 μ m
 On a donc une source atomique dont le diamètre est de l'ordre de quelques dizaines de microns.

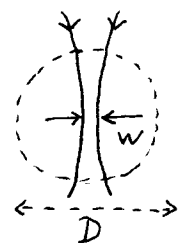


Fig. 9

- Vitesse initiale des atomes : déterminée par la température du piège. Comprise entre -26 cm/sec et $+42$ cm/sec.

Fentes d'Young

- Situées à une distance $L = 76$ mm au dessous.
- 2 fentes de 2μ m de largeur, séparées par une distance $d \approx 6 \mu$ m. Vérifions qu'elles sont "éclairées" de manière cohérente
 Soit T le temps que mettent les atomes, partant de la source de la figure 9 avec une vitesse V_i le long de OZ pour arriver dans le plan des fentes situé à une distance L en dessous avec une vitesse V_f . On a

$$V_f - V_i = gT \quad \frac{1}{2} M V_f^2 - \frac{1}{2} M V_i^2 = M g L \quad (10.11)$$

D'après l'équation (9.45), la longueur de cohérence transverse ξ_{trans} dans le plan des fentes est

$$\xi_{trans} \sim \frac{\hbar T}{M w} \quad (10.12)$$

De (10.11) et (10.12) on déduit

$$\xi_{trans} \sim \frac{\hbar (V_f - V_i)}{M g w} = \frac{\hbar (V_f - V_i) L}{M g L w} = \frac{2 \hbar}{M (V_f + V_i)} \frac{L}{w} \quad (10.13)$$

Compte tenu des valeurs données plus haut pour V_i et du fait que $V_f \approx 1.2$ m/sec si $V_i = 0$, on peut majorer $V_f + V_i$ par $2V_f$.
 On a donc

$$\xi_{trans} \sim \frac{\lambda_{DB}^f}{w} L \quad (10.14)$$

Or, la longueur d'onde de de Broglie d'un atome de Neon pour une vitesse $V_f = 1$ m/sec est de $2 \cdot 10^{-8}$ m = 200 \AA . On en déduit que $\xi_{trans} \approx 76 \frac{2 \cdot 10^{-2}}{30}$ mm $\approx 0,05$ mm, qui est plus grand que la distance d entre les 2 fentes.

Détection

- Les atomes dans l'état métastable $1S_3$ arrivent sur un analyseur multicanaux situés à une distance $L' = 113$ mm en dessous du plan des fentes. Les images des impacts sont amplifiées et détectées par une caméra CCD
- Détection résolue dans le temps
 A cause de la dispersion des vitesses initiales dans la source, les temps T' mis par les atomes pour aller du plan des fentes au détecteur sont dispersés, de même que les interférences des franges d'interférence. Il faut donc réaliser de manière impulsionnelle le transfert $1S_5 \rightarrow 1S_3$ et observer les franges à divers instants successifs après cette préparation initiale.

b) Résultats



Fig. 10
(Extrait de [3])

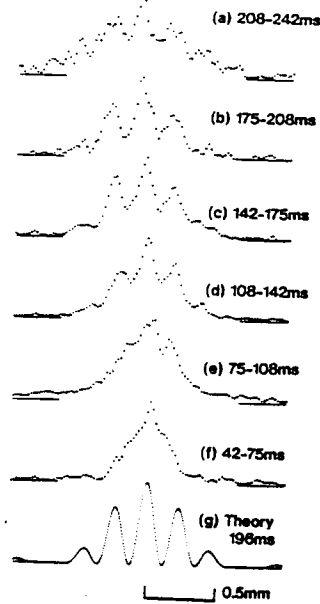


Fig. 11
(Extrait de [3])

- La figure 10 donne un exemple de franges observées sur l'analyseur et correspondant à une vitesse initiale à peu près nulle dans la source.
- La figure 11 montre le profil transversal des franges observées dans diverses fenêtres temporelles après l'instant initial correspondant au transfert $1S_2 \rightarrow 1S_3$. La courbe théorique correspond à la fenêtre temporelle dans laquelle sont observées les atomes partant de la source avec une vitesse initiale nulle.
- L'interfrange peut être calculé au moyen de l'équation (9.51) qui s'écrit ici

$$\delta x = \frac{2 \lambda_{DB}^F L'}{d} \frac{\sqrt{1+\alpha} - 1}{\alpha} \quad (10.15)$$

où $\lambda_{DB}^F = h/MV_f$ est la longueur d'onde de de Broglie des atomes dans le plan des 2 fentes où ils ont la vitesse V_f et où $\alpha = 2L'g/V_f^2$. Soit T' le temps mis par les atomes pour aller du plan des fentes au détecteur. Le temps de transit total des atomes dans l'appareil est $T_{tot} = T + T'$, où T a été défini plus haut (voir (10.11)). C'est ce temps total qui repère les diverses courbes de la figure 11.

La figure 12 représente la variation de l'interfrange mesuré en fonction du temps de transit total. La courbe en traits pleins représente les prédictions théoriques déduites de (10.15) et des expressions théoriques de T et T' .

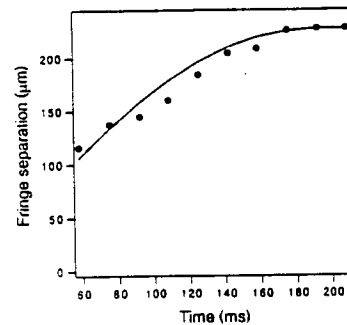


Fig. 12
(Extrait de [3])

- Compte tenu de sa sensibilité très grande, liée aux longs temps de transit, cet interféromètre peut être utilisé pour détecter des déphasages produits par des champs extérieurs (voir § C suivant).

C) - Effet d'un champ électrique statique (Ref. 4)

Schéma de principe

- Par rapport à l'expérience précédente, l'élément nouveau est l'application d'un champ électrique statique produit par un fil de 0.7 mm de diamètre (noté "deflector" sur la figure 13), placé tout près des fentes, parallèlement à elles, à 2 mm au dessus et 1.5 mm à gauche.

- L'atome dans l'état $1s_3, J=0$ subit un déplacement Stark quadratique, de signe négatif, proportionnel à E^2 . L'atome est donc attiré vers les régions de E^2 grand, donc vers le fil.

La zone où se produit cette attraction est très proche des fentes et on peut négliger la variation de vitesse due à la gravité dans cette zone.

- Pour calculer le déplacement des franges dû à ce champ extérieur, on peut suivre 2 approches équivalentes, utilisant, soit les trajectoires perturbées, soit les trajectoires non perturbées.

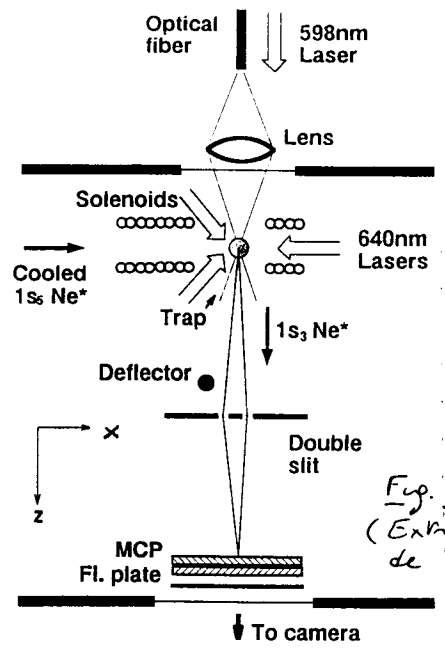


Fig. 13
(Extrait de [4])

Première approche, utilisant les trajectoires perturbées

- Soit v_0 la vitesse initiale des atomes au voisinage des fentes. Cette vitesse est verticale. Sous l'effet du potentiel $U(x, z)$ produit par le fil, l'atome est attiré par le fil et acquiert une composante non nulle de vitesse le long de Ox, donnée par

$$\Delta v_x = - \frac{1}{m} \int \frac{\partial U}{\partial x} dt \approx - \frac{1}{m v_0} \int \frac{\partial U}{\partial x} dz \quad (10.16)$$

puisque, dans la zone d'action de U, $dz = v_0 dt$

- L'atome arrive donc sur les fentes avec une certaine inclinaison par rapport à la verticale. En dessous des fentes, le potentiel U n'agit plus, v_x reste constant et égal à Δv_x donné en (10.16). Le centre des franges sera donc déplacé de

$$\Delta x = \Delta v_x T' \quad (10.17)$$

où $T' = \frac{v_0}{g} [\sqrt{1+\alpha} - 1]$ avec $\alpha = \frac{2gL'}{v_0^2}$ (10.18)

est le temps mis par l'atome, partant d'une vitesse verticale v_0 dans le plan des fentes, pour arriver sur le détecteur situé à une distance L' en dessous. En reportant (10.18) dans (10.17) et (10.16), on obtient :

$$\Delta x = - \frac{1}{mg} [\sqrt{1+\alpha} - 1] \int \frac{\partial U}{\partial x} dz \quad (10.19)$$

Deuxième approche, utilisant les trajectoires non perturbées

- On considère les trajectoires non perturbées (représentées sur la figure 13) et on calcule l'intégrale le long de ces trajectoires de $-\frac{1}{\hbar} U(x, z) dt$, puisque le lagrangien perturbé contient, par rapport au lagrangien non perturbé, un terme supplémentaire, $-U(x, z)$, dont l'effet est sensible au voisinage des fentes.

- Le déphasage supplémentaire, d'ordre 1 en U et donc noté $\delta\phi^{(1)}$, entre la trajectoire de gauche et la trajectoire de droite située à une distance d plus à droite, est donc égal à

$$\delta\phi^{(1)} = -\frac{1}{\hbar} \int [U(x, z) - U(x+d, z)] dz = +\frac{d}{\hbar} \int \frac{\partial U}{\partial x} dz$$

$$\approx +\frac{d}{\hbar v_0} \int \frac{\partial U}{\partial x} dz \quad (10.20)$$

- Or, d'après (9.43), quand on se déplace de Δx dans le plan du détecteur, le déphasage d'ordre 0 en U , $\delta\phi^{(0)}$, entre les 2 trajectoires varie de

$$\delta\phi^{(0)} = \frac{M d}{\hbar T'} \Delta x \quad (10.21)$$

- Le nouveau centre des franges correspond à la valeur de Δx telle que $\delta\phi^{(0)} + \delta\phi^{(1)} = 0$. On déduit alors de (10.20) et (10.21) que

$$\Delta x = -\frac{T'}{M v_0} \int \frac{\partial U}{\partial x} dz = -\frac{1}{m g} [\sqrt{1+\alpha} - 1] \int \frac{\partial U}{\partial x} dz \quad (10.22)$$

qui coïncide bien avec (10.19)

Résultats de l'expérience

- La figure 14 montre le déplacement des franges quand on augmente le voltage V appliqué au déflecteur.
- La figure 15 ^{montre} la proportionnalité du déplacement au carré du champ électrique, donc du voltage V , pour diverses valeurs de la vitesse v_0 . Les lignes droites sont les prédictions théoriques.

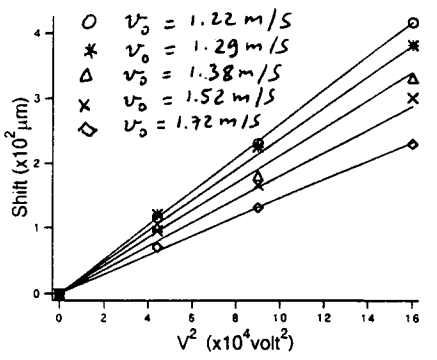


Fig. 15
(Extrait de [4])

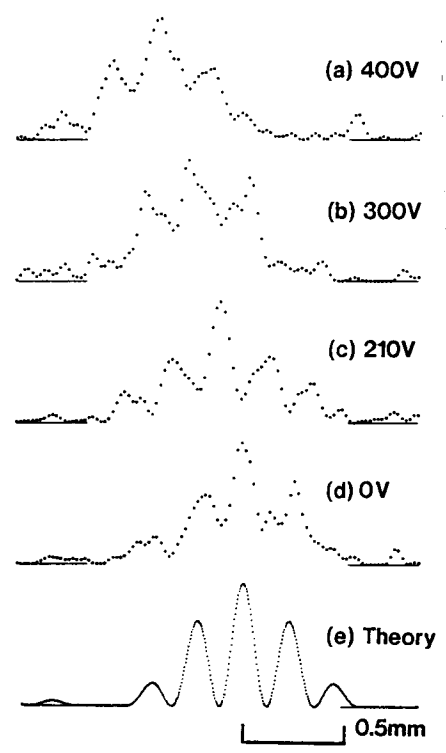


Fig. 14
(Extrait de [4])

Références

- (1) - O. Carnal, J. Mlynek, Phys. Rev. Lett. 66, 2689 (1991)
- (2) - A. Faulstich, A. Schmetz, M. Sigel, T. Sleator, O. Carnal, V. Balykin, H. Takuma, J. Mlynek, Europhys. Lett. 17, 393 (1992)
- (3) - F. Shimizu, K. Shimizu, H. Takuma, Phys. Rev. A46, R17 (1992)
- (4) - F. Shimizu, K. Shimizu, H. Takuma, Jpn. J. Appl. Phys 31, L436 (1992)

Voir également l'article de revue: A. Zeilinger, R. Gähler, C.G. Skull, W. Treimer, W. Mauge, Rev. Mod. Phys. 60, 1067 (1988) pour une revue des expériences de diffraction à 1 et 2 fentes faites sur des neutrons.