

**COLLEGE DE FRANCE**

**COURS DE PHYSIQUE**

**ATOMIQUE ET MOLECULAIRE**

**Claude COHEN-TANNOUDJI**

**ANNEE SCOLAIRE : 1991 - 1992**

## TABLE DES MATIÈRES

### INTRODUCTION GÉNÉRALE

Résumé du cours 1990-1991 . . . . .	I-1
Rappel de quelques résultats importants . . . . .	I-4
1 - Pourquoi est-il intéressant d'avoir plusieurs sous-niveaux fondamentaux ? . . . .	I-4
2 - Quelques paramètres physiques importants . . . . .	I-5
3 - Evolution de l'atome dans l'état inférieur à la limite $s \ll 1$ . . . . .	I-6
4 - Force radiative moyenne à la limite semiclassique . . . . .	I-8

### REFROIDISSEMENT LASER $\sigma^+ - \sigma^-$

1 - Le modèle étudié . . . . .	II-1
2 - Les paramètres physiques . . . . .	II-2
3 - Expression de la force moyenne . . . . .	II-4
4 - Etat interne d'un atome au repos en $z$ . . . . .	II-6
5 - Etat interne d'un atome en mouvement à la vitesse $v$ . . . . .	III-1
6 - Force moyenne pour une transition $1 \longleftrightarrow 2$ . . . . .	III-4
7 - Piégeage cohérent de population sélectif en vitesse pour une transition $J_g = 1 \longleftrightarrow J_e = 1$ . . . . .	III-9

### ÉTUDE GÉNÉRALE DE LA CONFIGURATION A

1 - Le modèle étudié . . . . .	IV-1
2 - Les équations de base . . . . .	IV-2
3 - La force moyenne . . . . .	IV-5
4 - Piégeage cohérent de populations - Résonances noires . . . . .	IV-6
5 - Refroidissement sub-Doppler . . . . .	IV-9

### REFROIDISSEMENT LASER AU-DESSOUS DE L'ÉNERGIE DE REcul

1 - Discussion qualitative . . . . .	V-1
2 - Principes d'un traitement quantique . . . . .	V-2
3 - Résultats du calcul quantique . . . . .	VI-1

4 - Une autre approche du problème basée sur une simulation Monte-Carlo de l'évolution du système . . . . .	VI-4
5 - Extension à 2 et 3 dimensions . . . . .	VI-7

**TRANSFERT ADIABATIQUE DE POPULATION PAR UTILISATION D'ÉTATS NON COUPLÉS**

1 - Introduction - Problème physique . . . . .	VII-1
2 - Diagramme d'énergie adiabatique . . . . .	VII-3
3 - Evolution temporelle du système . . . . .	VII-5
4 - Application à la réalisation de miroirs pour atomes neutres . . . . .	VII-8

**MODÈLE SIMPLE DE SYSTÈME AMPLIFICATEUR SANS INVERSION DE POPULATION**

1 - Introduction . . . . .	VIII-1
2 - Principe de la méthode suivie dans ce cours . . . . .	VIII-2
3 - Propriétés statistiques des périodes $[j, i]$ entre 2 sauts successifs . . . . .	VIII-8
4 - Situation limite envisagée dans ce cours . . . . .	IX-1
5 - Evolution du système en l'absence de champ $\omega_{L1} (\Omega_1 = 0)$ . . . . .	IX-3
6 - Processus augmentant ou diminuant le nombre $N_1$ de photons $\omega_{L1}$ . . . . .	IX-6
7 - Récapitulation . . . . .	IX-10

**CONFIGURATION A - INTERFÉRENCES ENTRE AMPLITUDES DE DIFFUSION**

1 - Hypothèses - Buts du calcul . . . . .	X-1
2 - Calcul de l'amplitude de diffusion . . . . .	X-3
3 - Limite perturbative - Discussion physique . . . . .	X-6

\*\*\*\*\*

# Introduction générale

## Résumé du cours 1990-91

Le cours de l'année 1990-1991 est le premier d'une série de deux cours consacrés à l'étude de nouveaux mécanismes de refroidissement laser. Au cours des trois dernières années, les températures obtenues dans les expériences de refroidissement laser d'atomes neutres ont été abaissées par plusieurs ordres de grandeur. Un certain nombre d'explications ont été proposées pour rendre compte de ces percées. L'objet du cours a été de passer en revue les développements récents dans ce domaine, d'analyser les mécanismes physiques nouveaux qui ont été mis en évidence et de préciser les nouvelles limites qui sont associées à ces mécanismes.

### *Les divers temps caractéristiques*

Le cours commence par un bref rappel des divers temps caractéristiques qui apparaissent dans l'évolution de l'atome couplé, d'une part au champ laser, d'autre part au champ quantique du vide. Une distinction est faite entre les temps internes, qui concernent l'évolution des degrés de liberté internes de l'atome dans le système du centre de masse (par exemple, les populations des divers sous-niveaux atomiques dans l'état excité et l'état fondamental, ou les cohérences entre ces sous-niveaux), et les temps externes qui caractérisent la vitesse de variation des degrés de liberté de translation.

Le temps interne le plus évident est la durée de vie radiative  $\tau_R = 1/\Gamma$  de l'état excité  $e$ ,  $\Gamma$  étant la largeur naturelle de  $e$ . Les premières théories du refroidissement laser n'ont considéré que ce temps interne  $\tau_R$ , qui se trouve être beaucoup plus court que le temps externe typique  $T_{\text{ext}} = \hbar/E_R$  où  $E_R = \hbar^2 k^2/2M$  est l'énergie de recul de l'atome de masse  $M$ , émettant ou absorbant un photon d'impulsion  $\hbar k$ .

On montre alors que, lorsque l'atome a plusieurs sous-niveaux Zeeman  $g_m$ ,  $g_{m'}$ , ... dans l'état fondamental, de nouveaux temps internes apparaissent, qui

sont les temps de pompage optique  $\tau_p$  d'un sous-niveau  $g_m$  à l'autre  $g_{m'}$ , par des cycles comportant l'absorption d'un photon laser suivie de l'émission d'un photon de fluorescence. Le point important est que ces temps internes dépendent de l'intensité laser  $I_L$ . A faible intensité,  $\tau_p$  est d'autant plus long que  $I_L$  est faible. Le fait que des temps internes puissent devenir comparables ou même plus longs que les temps externes joue un rôle crucial dans les

nouveaux mécanismes de refroidissement laser. Il permet en effet de comprendre pourquoi l'état interne d'un atome en mouvement peut ne plus suivre adiabatiquement les variations du champ laser « vu » par l'atome en mouvement, ce qui donne naissance à des forces de friction importantes.

### *Description de la dynamique atomique*

Pour préciser l'idée précédente, la première étape consiste à reprendre les équations de base décrivant la dynamique de l'atome dans l'onde laser en les généralisant au cas où l'atome possède plusieurs sous-niveaux dans l'état fondamental.

Plusieurs types d'équations peuvent être envisagées suivant que l'on s'intéresse à un traitement semi-classique, où seuls les degrés de liberté internes sont quantifiés, le mouvement du centre de masse étant traité classiquement, ou à un traitement entièrement quantique, où tous les degrés de liberté sont quantifiés. Les équations d'évolution correspondantes pour la matrice densité atomique, « équations de Bloch optiques » dans le premier cas, « équations de Bloch optiques généralisées » dans le second, sont rappelées. Les termes nouveaux, liés à la dégénérescence Zeeman dans l'état fondamental, sont précisés et analysés.

Les équations ainsi obtenues sont plus complexes que celles correspondant au cas simple où l'atome n'a qu'un seul sous-niveau dans l'état fondamental. Il est possible néanmoins d'introduire de nouvelles approximations adaptées aux nouveaux mécanismes de refroidissement laser et de retrouver ainsi des équations simples et des images physiques claires.

Ainsi, pour obtenir des temps d'évolution interne longs, comme les temps de pompage optique, il convient d'utiliser des intensités lumineuses faibles. On peut alors, dans les équations du mouvement, éliminer adiabatiquement tous les éléments de matrice densité faisant intervenir l'état excité et obtenir ainsi des équations réduites qui ne concernent plus que la matrice densité dans l'état fondamental. Par ailleurs, aux très faibles vitesses  $v$  auxquelles conduisent les nouveaux mécanismes de refroidissement, le déplacement Doppler  $kv$  des raies atomiques devient négligeable devant la largeur naturelle  $\Gamma$  de l'état excité, de sorte qu'il devient légitime de restreindre les calculs à l'ordre 0 en  $kv/\Gamma$ .

## *Déplacements lumineux et pompage optique*

Les équations simplifiées ainsi obtenues à la limite des faibles intensités et des faibles vitesses sont analysées et interprétées en détail. Elles montrent que l'évolution de la matrice densité atomique dans l'état fondamental est régie par deux types de termes : des termes « réactifs » décrivant une évolution hamiltonienne et des termes « dissipatifs » analogues à ceux associés à un processus de relaxation.

L'effet des termes réactifs peut être analysé en termes de « déplacements lumineux » des sous-niveaux de l'état fondamental  $g$ . Ces déplacements lumineux dépendent de la polarisation et de l'intensité de l'onde laser. Ils varient en général d'un sous-niveau de  $g$  à l'autre. Si la polarisation ou l'intensité de l'onde laser varient dans l'espace, on obtient ainsi une série de surfaces de potentiel auxquelles sont associées des forces agissant sur l'atome et dépendant de l'état interne dans  $g$ .

Les termes dissipatifs des équations d'évolution de la matrice densité atomique décrivent les transferts entre sous-niveaux de l'état fondamental induits par l'excitation lumineuse (pompage optique). Ils comportent des termes de départ, décrivant comment l'atome quitte l'état fondamental par absorption de photons, et des termes de retour décrivant comment l'atome retourne dans l'état fondamental par émission spontanée de photons de fluorescence.

Les paramètres  $\delta'$  et  $\Gamma'$  qui décrivent respectivement l'importance des processus réactifs et dissipatifs n'ont pas la même dépendance vis-à-vis du désaccord  $\delta = \omega_L - \omega_A$  entre la fréquence laser  $\omega_L$  et la fréquence atomique  $\omega_A$ . A grand désaccord ( $|\delta| \gg \Gamma$ ), ce sont les processus réactifs qui prédominent : les déplacements lumineux  $\delta'$  sont plus grands que les taux de pompage optique  $\Gamma'$ , la situation inverse ( $|\delta'| \ll \Gamma'$ ) étant réalisée à faible désaccord.

## *Force réactive et force dissipative*

La force radiative moyenne  $\vec{\mathcal{F}}$  exercée sur l'atome par l'onde laser dépend des cohérences optiques, c'est-à-dire des éléments non diagonaux de la matrice densité entre l'état fondamental et l'état excité de l'atome. A la limite des faibles intensités et des faibles vitesses, il est possible, à partir des équations de Bloch optiques, d'éliminer adiabatiquement les cohérences optiques et de réexprimer  $\vec{\mathcal{F}}$  en fonction de la seule matrice densité dans l'état fondamental. On montre que l'expression ainsi obtenue pour  $\vec{\mathcal{F}}$  comporte deux types de termes, respectivement proportionnels aux paramètres  $\delta'$  et  $\Gamma'$  introduits précédemment.

La partie de  $\vec{\mathcal{F}}$  proportionnelle à  $\delta'$  est la force réactive  $\vec{\mathcal{F}}_{\text{react}}$ . Elle est égale, au signe près, à la valeur moyenne du gradient spatial de l'hamiltonien

effectif  $H_{\text{eff}}$  décrivant les déplacements lumineux des sous-niveaux de l'état fondamental  $g$ . Deux contributions apparaissent donc dans  $\vec{\mathcal{F}}_{\text{react}}$  : celle associée aux gradients des valeurs propres de  $H_{\text{eff}}$  (déplacements lumineux) ; celle associée aux gradients des fonctions propres de  $H_{\text{eff}}$ . En développant l'onde laser en ondes planes, on montre que les processus physiques à l'origine de  $\vec{\mathcal{F}}_{\text{react}}$  sont des processus de redistribution de photons entre les différentes ondes planes  $\mu, \nu \dots$  formant l'onde laser. Ainsi, l'onde  $\mu$  peut être absorbée par la partie réactive du moment dipolaire induit par l'onde  $\nu$ , alors que l'onde  $\nu$  est amplifiée par la partie réactive du moment dipolaire induit par l'onde  $\mu$ . De tels processus correspondent à un transfert de photon de l'onde  $\mu$  à l'onde  $\nu$ . Comme l'impulsion associée n'est pas la même dans les deux ondes, il s'ensuit que l'impulsion du champ varie de  $\hbar(\vec{k}_\nu - \vec{k}_\mu)$ , et par suite celle de l'atome de la quantité opposée, ce qui permet de comprendre l'origine de la force subie par l'atome.

La partie de  $\vec{\mathcal{F}}$  proportionnelle à  $\Gamma'$  est la force dissipative  $\vec{\mathcal{F}}_{\text{dissip}}$ . L'expression de  $\vec{\mathcal{F}}_{\text{dissip}}$  comporte des termes « carrés », ne faisant intervenir qu'une seule onde  $\mu$ , et décrivant la pression de radiation due à l'impulsion des photons qui sont absorbés par unité de temps dans l'onde  $\mu$ . Apparaissent aussi des termes « rectangles », faisant intervenir deux ondes  $\mu$  et  $\nu$  et associés à l'absorption d'une onde par la partie dissipative du moment dipolaire induit par l'onde  $\nu$ . Contrairement à ce qui se passe pour  $\vec{\mathcal{F}}_{\text{react}}$ , ces effets d'interférence entre une paire d'ondes  $\mu$  et  $\nu$  ne correspondent pas à une redistribution de photons : si l'onde  $\mu$  est davantage absorbée à cause de la présence de l'onde  $\nu$ , l'onde  $\nu$  est également davantage absorbée (et non amplifiée) à cause de la présence de l'onde  $\mu$ . On montre enfin que, pour une configuration laser formée de deux ondes planes se propageant dans des directions opposées (« mélasse optique » à une dimension), les termes d'interférence entre les deux ondes planes se compensent exactement, de sorte que  $\vec{\mathcal{F}}_{\text{dissip}}$  se réduit à la somme des deux pressions de radiation exercées séparément par les deux ondes.

### *Le refroidissement « Sisyphe »*

Le cours de cette année se termine par la présentation, sur un modèle très simple, de l'un des nouveaux mécanismes les plus importants de refroidissement laser, appelé refroidissement « Sisyphe » parce que l'atome en mouvement monte plus de côtes de potentiel qu'il n'en descend.

On commence par présenter le modèle utilisé qui est un modèle très simple de « mélasse optique » à une dimension. Les deux ondes laser se propageant en sens inverse le long de l'axe Oz ont des polarisations linéaires orthogonales, de sorte que la polarisation de l'onde résultante varie spatialement le long de Oz sur des distances de l'ordre de la longueur d'onde  $\lambda$  des ondes

laser, variant tous les  $\lambda/8$  d'une polarisation linéaire à une polarisation circulaire (droite ou gauche) ou vice versa. Par ailleurs, la transition atomique étudiée relie un niveau fondamental  $g$  de moment cinétique  $J_g = 1/2$  à un niveau excité  $e$  de moment cinétique  $J_e = 3/2$ , de sorte que l'état fondamental ne comporte que deux sous-niveaux Zeeman  $g_{+1/2}$  et  $g_{-1/2}$ .

L'hamiltonien effectif décrivant les déplacements lumineux apparaissant dans l'état fondamental  $J_g = 1/2$  est particulièrement simple. Ses états propres sont indépendants de  $z$  et coïncident avec les états propres  $g_{+1/2}$  et  $g_{-1/2}$  de la composante suivant  $Oz$  du moment cinétique atomique. Quant à ses valeurs propres, elles oscillent en opposition de phase pour les deux états  $g_{+1/2}$  et  $g_{-1/2}$  avec une amplitude  $U_0$  qui apparaît comme étant la profondeur des puits de potentiel associés aux déplacements lumineux. On montre également que la symétrie de l'excitation est telle que les deux pressions de radiation exercées séparément par les deux ondes laser s'équilibrent exactement, de sorte que la force dissipative s'annule exactement. La seule force qui subsiste est donc la force réactive et elle est due uniquement aux gradients spatiaux des déplacements lumineux.

Les taux de pompage optique entre les deux sous-niveaux  $g_{+1/2}$  et  $g_{-1/2}$  sont également calculés. Le résultat important qui ressort d'une telle étude est la corrélation très forte qui existe entre les variations spatiales des déplacements lumineux de chaque sous-niveau et le taux de pompage optique à partir de ce sous-niveau. On trouve que, pour un désaccord  $\delta$  négatif ( $\omega_L < \omega_A$ ), le pompage optique s'effectue préférentiellement du sous-niveau le plus élevé vers le sous-niveau le moins élevé. Au sommet des collines de chaque courbe de potentiel, le taux de pompage optique vers l'autre sous-niveau, qui se trouve alors au fond d'une vallée de potentiel, est maximum, alors que le taux de pompage optique du fond d'une vallée vers le sommet d'une colline est nul.

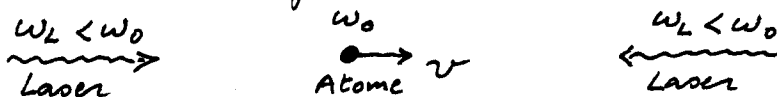
La propriété précédente permet alors de comprendre très simplement le mécanisme de refroidissement « Sisyphé ». Par suite du temps fini  $\tau_p$  requis par le pompage optique, l'atome en mouvement a le temps de gravir la colline de potentiel correspondant à un sous-niveau Zeeman donné et d'atteindre le sommet de cette colline où il a alors une probabilité maximum d'être transféré par pompage optique au fond de la vallée de potentiel correspondant à l'autre sous-niveau Zeeman. A partir de ce point, il doit de nouveau gravir une colline de potentiel avant de pouvoir subir un nouveau cycle de pompage optique. A chaque montée, l'énergie cinétique de l'atome est diminuée au profit de son énergie potentielle, l'accroissement d'énergie potentielle étant ensuite dissipé lors du cycle de pompage optique par le photon de fluorescence émis spontanément qui emporte une énergie supérieure à celle du photon laser absorbé (processus Raman anti-Stokes).



L'image simple précédente est confirmée par une étude quantitative du processus de refroidissement. Plusieurs paramètres importants sont calculés : valeur minimale de  $U_0$  pour laquelle le refroidissement Sisyphe l'emporte sur l'échauffement associé au recul suivant l'émission spontanée des photons de fluorescence, coefficient de friction à faible vitesse qui se trouve être indépendant de l'intensité lumineuse, coefficient de diffusion de l'impulsion, température  $T$  à l'état d'équilibre qui se trouve être telle que  $k_B T \sim U_0$ . Tous ces résultats sont établis dans la limite où les temps internes (temps de pompage optique  $\tau_p$ ) restent courts devant les temps externes (période d'oscillation  $\Omega_{osc}^{-1}$  de l'atome au fond des puits de potentiel associés aux déplacements lumineux). Quelques indications sont données sur la manière de traiter l'autre cas extrême ( $\Omega_{osc} \tau_p \gg 1$ ) où l'atome a le temps d'effectuer plusieurs oscillations dans un puits de potentiel correspondant à un sous-niveau avant d'être pompé optiquement vers l'autre sous-niveau.

## ① - Pourquoi est-il intéressant d'avoir plusieurs sous-niveaux fondamentaux?

- Le mécanisme de refroidissement le plus simple : l'effet Doppler



Par effet Doppler, l'atome se rapproche de résonance pour l'onde laser se propageant en sens opposé de sa vitesse, s'éloigne de résonance pour l'autre onde  $\rightarrow$  Déséquilibre entre les pressions de radiation exercées par les 2 ondes  $\rightarrow$  force de friction opposée à la vitesse  $v$

- Limite théorique de la température obtenue pour un atome à 2 niveaux  $g, e$

$$k_B T \sim \hbar \Gamma = \frac{\hbar}{\tau_R} \quad (1.1)$$

$\Gamma$  : largeur naturelle de  $e$                        $\tau_R = \frac{1}{\Gamma}$  = durée de vie radiative de  $e$

Compétitions entre le refroidissement laser et l'échauffement dû aux fluctuations des échanges d'impulsions entre atomes et photons.

- Paramètre sans dimension caractérisant le refroidissement Doppler.

$$\epsilon = \frac{k v}{\Gamma} = \frac{\text{effet Doppler}}{\text{largeur naturelle}} \quad (1.2)$$

$$\epsilon = 2\pi \frac{v \tau_R}{\lambda} = 2\pi \frac{\text{Distance parcourue pendant le temps "interne" } \tau_R}{\text{Longueur caractérisant les variations du champ laser}} \quad (1.3)$$

La 2<sup>ème</sup> écriture (1.3) de  $\epsilon$  fait apparaître  $\epsilon$  comme un paramètre de "non-adiabaticité", caractérisant la facilité avec laquelle l'atome, avec son temps interne  $\tau_R$ , peut réagir aux variations du champ laser liées à son mouvement.

- Comment allonger les temps internes et comment augmenter ainsi les effets de retard et de non adiabaticité responsables en fin de compte de la friction ?

Si l'atome a plusieurs sous-niveaux fondamentaux, de nouveaux temps internes apparaissent qui sont les temps de pompage optique  $\tau_p$  d'un sous-niveau à l'autre, par des cycles absorption - émission spontanée. A faible intensité,  $\tau_p$  est inversement proportionnel à l'intensité laser  $I_L$  et devient donc de plus en plus long quand  $I_L$  diminue.

Autre effet important de l'excitation lumineuse : déplacements lumineux des sous-niveaux de  $g$ , qui dépendent de la polarisation de la lumière au point où se trouve l'atome, qui varient en général d'un sous-niveau à l'autre, et qui sont proportionnels à  $I_L$ .

- Exemple simple de mécanisme de refroidissement laser basé sur le pompage optique et les déplacements lumineux et étudié en détail dans le cours 1990-91 : l'effet "Sisyphes".

Utilisation d'une configuration laser conduisant à des gradients spatiaux importants de la polarisation du champ laser. Les déplacements lumineux des sous-niveaux varient alors rapidement dans l'espace et de manière différente d'un sous-niveau à l'autre.

De même, les temps de pompage optique d'un sous niveau à l'autre varient aussi dans l'espace avec la même périodicité que les déplacements lumineux.

Le point important est que les 2 modulations spatiales, celle des déplacements lumineux et celle des temps de pompage optique, sont fortement corrélées dans certains cas, ce qui peut conduire à une situation où l'atome en mouvement, monte plus de collines de potentiel qu'il n'en descend (comme le héros de la mythologie grecque).

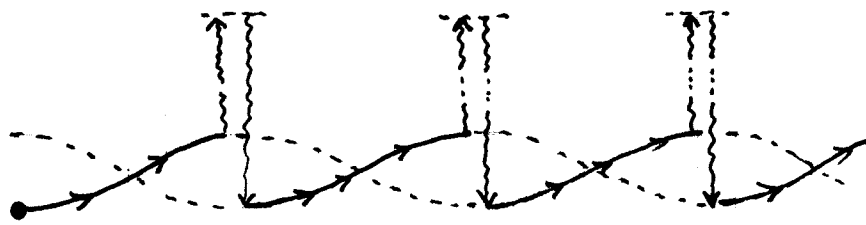


Fig. 1

② Quelques paramètres physiques importants

Caractérisation du champ laser

$$\vec{E}_L(\vec{r}, t) = \vec{E}_L^+(\vec{r}) e^{-i\omega_L t} + \vec{E}_L^-(\vec{r}) e^{i\omega_L t} \quad (1.4)$$

$\omega_L$  : fréquence  $\vec{E}_L^+$  (resp.  $\vec{E}_L^-$ ) : composante de fréquence positive (resp. négative)

$$\vec{E}_L^+(\vec{r}) = \frac{1}{2} \vec{E}(\vec{r}) \mathcal{E}_L(\vec{r}) \quad \vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{E}^*(\vec{r}) = 1 \quad (1.5)$$

$\vec{E}(\vec{r})$  : vecteur polarisation au point  $\vec{r}$  (normé).

$\mathcal{E}_L(\vec{r})$  : amplitude du champ laser en  $\vec{r}$ .

Caractérisation de la transition atomique

$\uparrow$   $e \equiv |e, m\rangle$  sous niveaux de  $e$ , supposés dégénérés  
 $\downarrow$   $g \equiv |g, \mu\rangle$  sous niveaux de  $g$ , supposés dégénérés

Fig. 2

$$P_e = \sum_m |e, m\rangle \langle e, m| \quad P_g = \sum_{\mu} |g, \mu\rangle \langle g, \mu| \quad (1.6)$$

- Opérateur dipole atomique  $\vec{d}$ , impair

$$\begin{cases} \vec{d}^+ = P_e \vec{d} P_g & \text{Partie montante de } \vec{d} \\ \vec{d}^- = P_g \vec{d} P_e & \text{Partie descendante de } \vec{d} \end{cases}$$

- En général, les  $m$  et les  $\mu$  sont les nombres quantiques magnétiques relatifs aux moments cinétiques  $J_e$  et  $J_g$  de  $e$  et  $g$

Théorème de Wigner-Eckart pour les "composantes standard"  $\vec{E}_q \cdot \vec{d}^+$  de  $\vec{d}^+$  ( $q = +1, 0, -1$ ).

$$\vec{E}_{\pm 1} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{E}_x \pm i\vec{E}_y) \quad \vec{E}_0 = \vec{E}_z \quad (1.7)$$

$$\langle J_e, m | \vec{E}_q \cdot \vec{d}^+ | J_g, \mu \rangle = \mathcal{D} \langle J_e, m | J_g, 1, \mu, q \rangle \quad (1.8)$$

$\mathcal{D}$  : élément de matrice réduit, indépendant des nombres quantiques magnétiques  $m, \mu, q$

$\langle J_e, m | J_g, 1, \mu, q \rangle$  : Coefficients de Clebsch-Gordan

Il est commode de poser

$$\vec{J}^+ = \mathcal{D} \hat{J}^+$$

(1.9)

où  $\hat{J}^+$  est un opérateur vectoriel sans dimension, dont les éléments de matrice sont des coefficients de Clebsch-Gordan.

Caractérisation du couplage atome-champ laser

- Fréquence de Rabi  $\Omega_1(\vec{r})$

$$\hbar \Omega_1(\vec{r}) = - \mathcal{D} E_L(\vec{r}) \tag{1.10}$$

- Paramètre de saturation  $s(\vec{r})$

$$s(\vec{r}) = \frac{\Omega_1^2(\vec{r})/2}{\delta^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} \tag{1.11}$$

$$\delta = \omega_L - \omega_0 = \text{Désaccord entre fréquences laser et atomique} \tag{1.12}$$

$s \gg 1 \rightarrow$  Population de e importante

$s \ll 1 \rightarrow$  " " " négligeable -

- Hamiltonien d'interaction atome-champ laser

(à l'approximation du "champ tournant")

$$\begin{aligned} V_{AL} &= - \vec{J}^+ \cdot \vec{E}_L^+(\vec{R}) e^{-i\omega_L t} - \vec{J}^- \cdot \vec{E}_L^-(\vec{R}) e^{i\omega_L t} \\ &= - \hbar G^+(\vec{R}) e^{-i\omega_L t} - \hbar G^-(\vec{R}) e^{i\omega_L t} \end{aligned} \tag{1.13}$$

$$G^\pm(\vec{R}) = \vec{J}^\pm \cdot \vec{E}_L^\pm(\vec{R}) / \hbar \tag{1.14}$$

③ Evolution de l'atome dans l'état inférieur à la limite  $s \ll 1$

Principe du calcul

- Limite semiclassique

$\vec{R}$ , opérateur position du centre de masse, est traité classiquement

$$\vec{R} \rightarrow \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t \tag{1.15}$$

Justification : Longueur de cohérence spatiale de l'atome  $\xi$  très petite devant la longueur d'onde du laser  $\lambda$ .

- Equations de Bloch optiques pour l'opérateur densité atomique

$$\frac{d\sigma}{dt} = \underbrace{\frac{1}{i\hbar} [H_A + V_{AL}, \sigma]}_{\text{Evolution hamiltonienne}} + \underbrace{\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)_{\text{em.spont.}}}_{\text{Relaxation due à l'émission spontanée}} \tag{1.16}$$

$$H_A = \frac{\vec{P}^2}{2M} + \hbar \omega_0 P_e = \text{Hamiltonien atomique} \tag{1.17}$$

= Elimination adiabatique des cohérences optiques  $\sigma_{eg} = P_e \sigma P_g$  et  $\sigma_{ge} = P_g \sigma P_e$ , et de la matrice densité dans l'état excité  $\sigma_{ee} = P_e \sigma P_e$  qui ont des constantes de temps propres très courtes, de l'ordre de  $\tau_R$ , et qui suivent donc adiabatiquement l'évolution beaucoup plus lente de la matrice densité dans l'état fondamental  $\sigma_{gg} = P_g \sigma P_g$ .

Obtention d'équations d'évolution réduite, plus simples, ne portant plus que sur  $\sigma_{gg}$ .

## Effets réactifs et effets dissipatifs

I-7

2 types de termes dans  $d\sigma_{gg}/dt$

(i) Termes d'évolution hamiltonienne (réactifs) proportionnels à

$$\delta'(\vec{r}) = \delta \frac{\delta(\vec{r})}{2} \quad (1.18)$$

(ii) Termes de relaxation (dissipatifs) proportionnels à

$$\Gamma'(\vec{r}) = \Gamma \frac{\delta(\vec{r})}{2} \quad (1.19)$$

### Effets réactifs : Déplacements lumineux

$$\left(\frac{d\sigma_{gg}}{dt}\right)_{\text{react}} = \frac{1}{i\hbar} [H_{\text{eff}}, \sigma_{gg}] \quad (1.20)$$

$$H_{\text{eff}} = \hbar \delta'(\vec{r}) \Lambda(\vec{r}) \quad (1.21)$$

$$\Lambda(\vec{r}) = P_g (\vec{E}^*(\vec{r}) \cdot \hat{d}) P_e (\vec{E}(\vec{r}) \cdot \hat{d}) P_g = (\vec{E}^*(\vec{r}) \cdot \hat{d}^-) (\vec{E}(\vec{r}) \cdot \hat{d}^+) \quad (1.22)$$

$H_{\text{eff}}(\vec{r})$  : Hamiltonien effectif dont les valeurs propres sont les déplacements lumineux en  $\vec{r}$  et dont les états propres sont les sous-niveaux de  $g$  ayant un déplacement lumineux bien défini.

$$\Lambda(\vec{r}) |g_\alpha\rangle = \lambda_\alpha |g_\alpha\rangle \quad (1.23)$$

$$\lambda_\alpha \text{ réel } \geq 0$$

Les déplacements lumineux  $\hbar \delta' \lambda_\alpha$  ont tous le même signe, celui de  $\delta$ , sont proportionnels à  $\Omega_L^2 \sim I_L$ , et varient avec  $\delta$  comme une courbe de dispersion.

### Effets dissipatifs : Pompage optique.

$$\left(\frac{d\sigma_{gg}}{dt}\right)_{\text{dissip}} = \left(\frac{d\sigma_{gg}}{dt}\right)_{\text{départ}} + \left(\frac{d\sigma_{gg}}{dt}\right)_{\text{retombée}} \quad (1.24)$$

$$\left(\frac{d\sigma_{gg}}{dt}\right)_{\text{départ}} = - \frac{\Gamma'(\vec{r})}{2} \{ \Lambda(\vec{r}), \sigma_{gg} \}_+ \quad (1.25)$$

où  $\{A, B\}_+ = AB + BA$  (anticommutateur)

Les termes de départ décrivent comment l'état fondamental se vide par absorption de photons. En projetant l'équation (1.25) dans la base des états propres  $|g_\alpha\rangle$  de  $\Lambda$  [voir (1.23)], on obtient

$$\left(\frac{d}{dt} \langle g_\alpha | \sigma | g_\alpha \rangle\right)_{\text{départ}} = - \lambda_\alpha \Gamma' \langle g_\alpha | \sigma | g_\alpha \rangle \quad (1.26)$$

$\lambda_\alpha \Gamma'$  : temps de départ bien défini à partir de  $g_\alpha$

$$\left(\frac{d}{dt} \langle g_\alpha | \sigma | g_{\alpha'} \rangle\right)_{\text{départ}} = - \frac{1}{2} (\lambda_\alpha + \lambda_{\alpha'}) \Gamma' \langle g_\alpha | \sigma | g_{\alpha'} \rangle \quad (1.27)$$

$$\left(\frac{d\sigma_{gg}}{dt}\right)_{\text{retombée}} = \Gamma'(\vec{r}) \sum_{q=-1,0,+1} (\vec{E}_q^* \cdot \hat{d}^-) (\vec{E}(\vec{r}) \cdot \hat{d}^+) \sigma_{gg} (\vec{E}^*(\vec{r}) \cdot \hat{d}^-) (\vec{E}_q \cdot \hat{d}^+) \quad (1.28)$$

Les termes de retombée décrivent comment l'état fondamental se remplit avec des atomes subissant un cycle absorption - émission spontanée

La combinaison des 2 termes décrit la "relaxation" de l'état fondamental associé au pompage optique.

#### ④ Force radiative moyenne à la limite semiclassique

##### Principe du calcul

- A la limite semiclassique (longueur de cohérence spatiale  $\xi \ll \lambda$ ) on peut montrer que la force moyenne  $\vec{F}$  agissant sur l'atome vaut

$$\vec{F}(\vec{r}, t) = - \langle \vec{\nabla} V_{AL}(\vec{r}, t) \rangle \quad (1.29)$$

- $\vec{F}$  s'exprime en fonction de  $\langle \vec{d}^{\pm} \rangle$ , donc en fonction de cohérences optiques  $\sigma_{eg}$  et  $\sigma_{ge}$ .

A la limite  $\delta \ll 1$  (faibles saturations), les cohérences optiques suivent adiabatiquement l'évolution lente de l'état fondamental et peuvent être réexprimées en fonction de  $\sigma_{gg}$ .

On trouve alors que  $\vec{F}$  est une somme de 2 termes

$$\vec{F} = \vec{F}_{reat} + \vec{F}_{dissip} \quad (1.30)$$

dont l'interprétation physique est la suivante

##### Force réactive

- Expression de  $\vec{F}_{reat}$  
$$\vec{F}_{reat} = - \langle \vec{\nabla} H_{eff} \rangle \quad (1.31)$$

- En écrivant 
$$H_{eff} = \sum_{\alpha} \hbar \delta' \lambda_{\alpha} |g_{\alpha}\rangle \langle g_{\alpha}| \quad (1.32)$$

on voit que  $\vec{F}_{reat}$  est une somme de 2 contributions liées

- aux gradients des déplacements lumineux
- aux gradients des fonctions d'onde de sous-niveaux  $|g_{\alpha}\rangle$  de  $g$  ayant un déplacement lumineux bien défini

- La force associée aux gradients des déplacements lumineux est celle qui intervient dans l'effet Sisyphus

- La force associée à des gradients de fonctions d'onde est liée à des transferts de population d'un sous-niveau à l'autre. Ces transferts sont dus à des transitions non adiabatiques induites par le mouvement de l'atome et font varier l'énergie moyenne de l'atome.

- On peut montrer enfin que la force réactive provient de processus de redistribution qui ne font pas varier le nombre total de photons laser, mais qui les font passer de l'une des ondes planes formant l'onde laser à l'autre : absorption dans une onde plane  $\mu$  et émission induite dans une autre onde plane  $\nu$ .

##### Force dissipative

- Si on développe l'onde laser en ondes planes

$$\vec{E}_L^{\pm}(\vec{r}) = \sum_{\mu} \vec{E}_{\mu}^{\pm}(\vec{r}) \quad \text{avec} \quad E_{\mu}^{\pm}(\vec{r}) \sim e^{\pm i \vec{k}_{\mu} \cdot \vec{r}} \quad (1.33)$$

et qu'on introduit les opérateurs

$$G_{\mu}^{\pm} = \vec{d}^{\pm} \cdot \vec{E}_{\mu}^{\pm} / \hbar \quad (1.34)$$

on trouve que  $\vec{F}_{dissip}$  s'écrit

$$\vec{F}_{dissip} = \sum_{\mu} \hbar \vec{k}_{\mu} \frac{\Gamma}{\delta^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} \langle G_{\mu}^{-} G_{\mu}^{+} \rangle + \sum_{\substack{\text{paires} \\ \mu, \nu}} \hbar (\vec{k}_{\mu} + \vec{k}_{\nu}) \frac{\Gamma/2}{\delta^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} [\langle G_{\nu}^{-} G_{\mu}^{+} \rangle + \langle G_{\mu}^{-} G_{\nu}^{+} \rangle] \quad (1.35)$$

- Le 1<sup>er</sup> terme ( $\sum_{\mu}$ ) décrit la force associée à l'impulsion des photons absorbés dans chaque onde. Somme des pressions de radiation exercée par les diverses ondes.
  - Le 2<sup>ème</sup> terme ( $\sum_{\text{paire } \mu\nu}$ ) décrit des effets d'interférence entre les ondes  $\mu$  et  $\nu$ . Il ne correspond pas à une redistribution. Si l'onde  $\mu$  est davantage absorbée à cause de la présence de l'onde  $\nu$ , l'onde  $\nu$  est également davantage absorbée (et non amplifiée) à cause de la présence de l'onde  $\mu$ .
- Dans une mélasse optique à 1 dimension  $\vec{k}_{\mu} = -\vec{k}_{\nu}$  et ce 2<sup>ème</sup> terme est nul.

## Thème général du cours 1991-92

### "Interférences quantiques sous les interactions photon-atome"

- On commencera par étudier un certain nombre de mécanismes de refroidissement laser, non abordés l'an dernier, et faisant intervenir, au lieu de l'effet Sisyphus, des effets d'interférence entre plusieurs amplitudes de transition conduisant le système photon + atome d'un même état initial à un même état final
  - Refroidissement  $\sigma^{+} - \sigma^{-}$ .
  - Refroidissement en dessous de l'énergie de recul par piégeage cohérent sélectif en vitesse.
- On montrera ensuite que ces effets d'interférence se manifestent également dans d'autres phénomènes physiques qui seront décrits et interprétés
  - Transfert adiabatique de populations par piégeage cohérent.
  - Mécanismes d'oscillation laser ne nécessitant pas une inversion de population.

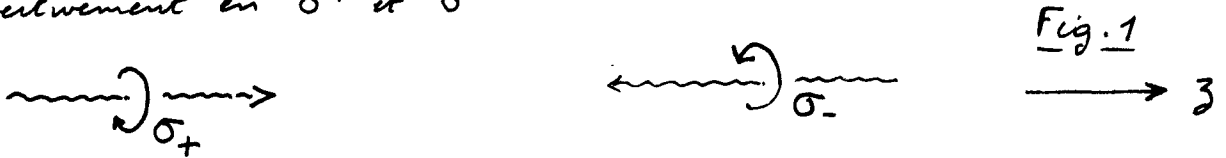
Buts de ce cours

- Présenter un mécanisme de refroidissement laser différent du mécanisme "Sisyphé" présenté l'an dernier et conduisant à des températures du même ordre.
- En étudiant ce mécanisme nouveau, introduire la notion d'interférence quantique entre 2 amplitudes d'absorption de photon, notion qui est à la base du phénomène de piégeage cohérent de population.

① - Le modèle étudié

a - Configuration laser

- 2 ondes laser, de même fréquence  $\omega_L$ , de même amplitude  $E_0$ , se propageant en sens opposé le long de  $Oz$  et polarisées respectivement en  $\sigma^+$  et  $\sigma^-$



- Expressions du champ laser

$$\vec{E}_L(z, t) = \vec{E}_L^+(z) e^{-i\omega_L t} + c.c. \quad (2.1)$$

$$\vec{E}_L^+(z) = \frac{1}{2} E_0 \vec{E}_+ e^{ikz} + \frac{1}{2} E_0 \vec{E}_- e^{-ikz} \quad (2.2)$$

$$\vec{E}_\pm = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{E}_x \pm i\vec{E}_y) \quad ; \quad \text{Polarisations } \sigma^\pm \quad (2.3)$$

En utilisant (2.3), on peut réécrire (2.2) sous la forme :

$$\vec{E}_L^+(z) = -\frac{i}{2} E_L \vec{E}(z) \quad (2.4)$$

où  $E_L = E_0 \sqrt{2}$  (2.5)

est l'amplitude du champ total, indépendante de z, et où

$$\vec{E}(z) = \frac{i}{\sqrt{2}} [\vec{E}_+ e^{ikz} + \vec{E}_- e^{-ikz}] = \vec{E}_x \sin kz + \vec{E}_y \cos kz \quad (2.6)$$

est un vecteur polarisation normé, représentant une polarisation linéaire qui tourne, lorsqu'on se déplace le long de  $Oz$ , pour former une hélice de pas  $\lambda$ . En  $z=0$ ,  $\vec{E}(0) = \vec{E}_y$ .

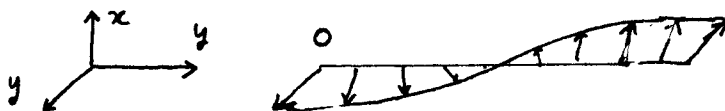


Fig. 2

- Comme l'amplitude  $E_L$  est indépendante de  $z$  et que les polarisations en 2 points différents  $z_1$  et  $z_2$  se déduisent l'une de l'autre par rotation, les déplacements lumineux des sous-niveaux fondamentaux sont indépendants de  $z$  → Pas d'oscillation spatiale de ces sous-niveaux comme dans l'effet Sisyphé.

Par contre, variation spatiale des fonctions d'onde des sous-niveaux ayant un déplacement lumineux bien défini



b- Transition atomique

- Comme la polarisation  $\vec{E}(z)$  est linéaire, la symétrie des déplacements lumineux est celle de l'effet Stark  $\rightarrow$  Pas de levée de dégénérescence des 2 sous-niveaux  $M$  et  $-M$  (par rapport à la direction de  $\vec{E}(z)$ )  $\rightarrow$  le cas où  $J_g = 1/2$  est alors peu intéressant, car l'effet des déplacements lumineux se réduit à un simple déplacement global de  $g$  (aucune variation avec  $z$ , ni pour les énergies, ni pour les fonctions d'onde).

- Pour avoir des effets intéressants, il faut donc au moins  $J_g = 1$ . C'est ce que nous choisissons ici. 3 valeurs possibles pour  $J_e$ : 2, 1, 0.

Transition  $J_g = 1 \leftrightarrow J_e = 2$

Coefficients de Clebsch-Gordan des diverses composantes de la transition

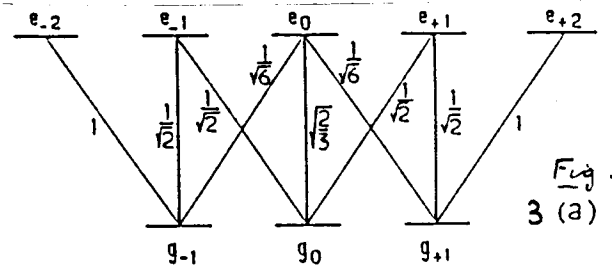


Fig. 3 (a)

Transition  $J_g = 1 \rightarrow J_e = 1$

La nullité des coef. de Clebsch-Gordan  $g_0 \rightarrow e_0$  entraîne une simplification importante. Après quelques cycles de pompage optique, les atomes, initialement dans  $g_0$ , et absorbant un photon  $\sigma_+$  et  $\sigma_-$ , se retrouvent transférés dans  $g_{-1}$  et  $g_{+1}$ .

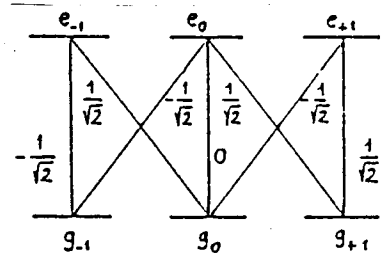


Fig. 3 (b)

A partir de ces 2 niveaux, ils ne peuvent plus par absorption d'un photon  $\sigma_+$  et  $\sigma_-$  retourner dans  $e_0$ , puisque la probabilité d'émettre spontanément un photon  $\pi$  à partir de  $e_0$  est nulle. Ils "cyclent" alors entre  $g_{-1}$ ,  $e_0$ ,  $g_{+1}$ , et on peut se limiter au système à 3 niveaux de la figure 3 (c), typique d'une "transition  $\Lambda$ ".

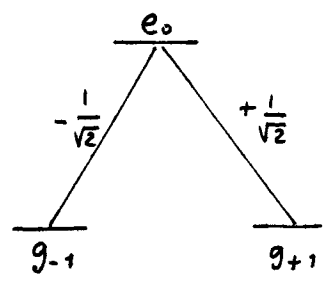


Fig. 3 (c)

Transition  $J_g = 1 \leftrightarrow J_e = 0$

Après quelques cycles de pompage optique, les atomes initialement dans  $g_{-1}$  ou  $g_{+1}$  et absorbant un photon  $\sigma^+$  ou  $\sigma^-$ , se retrouvent dans  $g_0$ , qu'ils ne peuvent plus ensuite quitter.

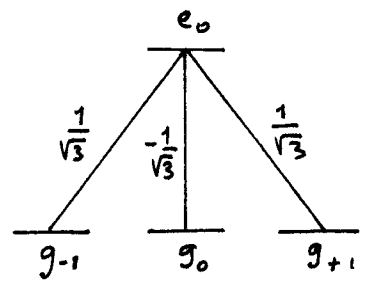


Fig. 3 (d)

Dans toute la suite, nous nous limitons aux 2 transitions  $1 \leftrightarrow 2$  et  $1 \leftrightarrow 1$  et les discutons en parallèle.

② Les paramètres physiques

a - Paramètres  $\Gamma'$  et  $\delta'$  (caractérisant effets dissipatifs et réactifs)

- Soit  $\Omega_1 = -D E_L / \hbar$  la fréquence de Rabi associée à l'onde totale et

$$\delta = \frac{\Omega_1^2 / 2}{\delta^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} \quad (2.7)$$

le paramètre de saturation correspondant ( $\delta = \omega_2 - \omega_0$  est le désaccord entre fréquence laser  $\omega_2$  et fréquence atomique  $\omega_0$ ;  $\Gamma$  est la largeur naturelle de  $e$ )

-  $\Gamma'$  et  $\delta'$  sont définis par

$$\Gamma' = \Gamma \frac{\Delta}{2} \qquad \delta' = \delta \frac{\Delta}{2} \qquad (2.8)$$

- Il est commode d'introduire le paramètre de saturation  $S_0$  associé à chacune des 2 ondes  $\sigma^+$  et  $\sigma^-$  de la figure 1. Comme elles ont une intensité moitié de l'onde totale

$$S_0 = S/2 \qquad (2.9)$$

et par suite

$$\Gamma' = \Gamma S_0 \qquad \delta' = \delta S_0 \qquad (2.10)$$

- Rappelons l'interprétation physique de  $\Gamma'$  et  $\delta'$

$\Gamma'$  est le taux de départ de l'état fondamental (sur une transition de coefficient de Clebsch-Gordan 1) pour un atome placé en un point où le paramètre de saturation vaut  $S$ .

$\delta'$  est le déplacement lumineux de ce même état dans les mêmes conditions.

b - Opérateur  $\Lambda(\vec{z})$  (caractérisant la symétrie angulaire de l'excitation lumineuse de polarisation  $\vec{E}(\vec{z})$ )

- L'opérateur

$$\Lambda(\vec{z}) = [\vec{E}^*(\vec{z}) \cdot \hat{d}^-] [\vec{E}(\vec{z}) \cdot \hat{d}^+] \qquad (2.11)$$

agit dans la multiplicité  $\{|g_m\rangle\}$  de  $g$  ( $m = -1, 0, +1$ ) et a pour éléments de matrice

$$\langle g_m | \Lambda(\vec{z}) | g_{m'} \rangle = \sum_{m''} \langle g_m | \vec{E}^*(\vec{z}) \cdot \hat{d}^- | e_{m''} \rangle \langle e_{m''} | \vec{E}(\vec{z}) \cdot \hat{d}^+ | g_{m'} \rangle \qquad (2.12)$$

- Comme  $\vec{E}(\vec{z})$  est une superposition linéaire de  $\sigma^+$  et  $\sigma^-$  (voir (2.6)), chacun des éléments de matrice de (2.12) obéit à la règle de sélection  $\Delta m = \pm 1$ , que sorte que les seuls éléments de matrice non nuls de  $\Lambda(\vec{z})$  satisfait  $m' - m = 0, \pm 2$ .

Le sous-niveau  $|g_0\rangle$  ne peut être donc couple qu'à lui-même et la matrice représentant  $\Lambda(\vec{z})$  se décompose en 2 sous-matrices, l'une de dimension 1 pour  $|g_0\rangle$ , l'autre de dimension 2 dans le sous-espace  $\{|g_{-1}\rangle, |g_{+1}\rangle\}$ . En utilisant (2.6), (2.12), (1.8) et les coefficients de Clebsch-Gordan des figures 3a, 3b, on obtient

	$g_0$	$g_{+1}$	$g_{-1}$
$g_0$	1/2	0	0
$g_{+1}$	0	7/12	$e^{2ik_3}/12$
$g_{-1}$	0	$e^{-2ik_3}/12$	7/12

Transition  $1 \leftrightarrow 2$  (2.13.a)

	$g_0$	$g_{+1}$	$g_{-1}$
$g_0$	1/2	0	0
$g_{+1}$	0	1/4	$-e^{2ik_3}/4$
$g_{-1}$	0	$-e^{-2ik_3}/4$	1/4

Transition  $1 \leftrightarrow 1$  (2.13.b)

③ Expression de la force moyenne

a - Force réactive  $\vec{F}_{react}$

- D'après (1.31), 
$$\vec{F}_{react} = -\langle \vec{\nabla} H_{eff}(z) \rangle \quad (2.14)$$

où 
$$H_{eff}(z) = \hbar \delta' \Lambda(z) \quad (2.15)$$

est l'hamiltonien effectif décrivant les déplacements lumineux des sous-niveaux de  $g$ , que l'on peut encore écrire

$$H_{eff}(z) = \hbar \delta' \sum_{\substack{m, m' = \\ -1, 0, +1}} |g_m\rangle \langle g_{m'}| \langle g_m | \Lambda(z) | g_{m'} \rangle \quad (2.16)$$

où les éléments de matrice  $\langle g_m | \Lambda(z) | g_{m'} \rangle$  sont donnés en (2.13)

- D'après (2.13), les seuls éléments de matrice dépendant de  $z$  sont les éléments non-diagonaux entre  $|g_1\rangle$  et  $|g_{-1}\rangle$ .

$dH_{eff}(z)/dz$  ne dépend donc que de  $|g_{+1}\rangle \langle g_{-1}|$  et  $|g_{-1}\rangle \langle g_{+1}|$ .

En utilisant (2.13), (2.14) et (2.16) et le fait que

$$\langle (|g_m\rangle \langle g_{m'}|) \rangle = \text{Tr} \sigma |g_m\rangle \langle g_{m'}| = \langle g_{m'} | \sigma |g_m \rangle \quad (2.17)$$

on obtient, pour la transition  $1 \leftrightarrow 2$

$$\vec{F}_{react}(1 \leftrightarrow 2) = -\frac{i}{6} \hbar k \delta' \vec{E}_z \left[ \sigma_{g_{-1}, g_1} e^{2ikz} - \sigma_{g_1, g_{-1}} e^{-2ikz} \right] \quad (2.18.a)$$

et pour la transition  $1 \leftrightarrow 1$

$$\vec{F}_{react}(1 \leftrightarrow 1) = +\frac{i}{2} \hbar k \delta' \vec{E}_z \left[ \sigma_{g_{-1}, g_1} e^{2ikz} - \sigma_{g_1, g_{-1}} e^{-2ikz} \right] \quad (2.18.b)$$

- Posons

$$\tilde{\sigma}_{g_1, g_{-1}} = \sigma_{g_1, g_{-1}} e^{-2ikz} = \tilde{\sigma}_{g_{-1}, g_1}^* \quad (2.19)$$

(L'interprétation de la transformation faisant passer de  $\sigma$  à  $\tilde{\sigma}$  sera donnée plus loin) et introduisons les parties réelle et imaginaire de  $\tilde{\sigma}_{g_1, g_{-1}}$

$$\tilde{\sigma}_{g_1, g_{-1}} = C_r + i C_i \quad (2.20)$$

Les expressions (2.18) peuvent être réécrites

$$\vec{F}_{react}(1 \leftrightarrow 2) = -\frac{\hbar k}{3} \delta' C_i \vec{E}_z \quad (2.21.a)$$

$$\vec{F}_{react}(1 \leftrightarrow 1) = \hbar k \delta' C_i \vec{E}_z \quad (2.21.b)$$

- Discussion physique

Comme les déplacements lumineux sont indépendants de  $z$  dans le modèle étudié ici,  $\vec{F}_{react}$  ne peut provenir que des gradients spatiaux des fonctions d'onde des sous-niveaux de  $g$  ayant un déplacement bien défini.

Donnons un exemple de situation physique analogue à celle étudiée ici et permettant de comprendre l'origine physique de  $\vec{F}_{react}$ . Imaginons un champ magnétique  $\vec{B}_0 \perp \vec{a} \parallel Oz$ , de module constant, mais dont la direction tourne lorsque  $z$  varie

Considérons un spin 1/2 immobile en  $z=0$  et dont le moment magnétique  $\vec{M}$  est parallèle au champ  $\vec{B}_0$  en ce point (Fig. 4) Son énergie potentielle,  $-\vec{M} \cdot \vec{B}_0$ , est alors la plus basse possible.

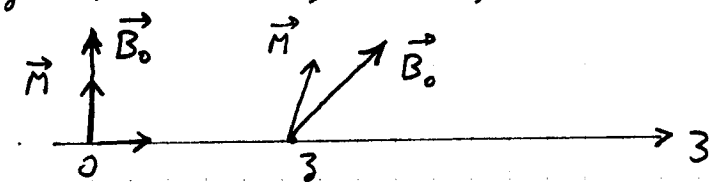


Fig. 4

Supposons alors qu'on déplace le spin le long de Oz. Si la vitesse de déplacement est infiniment lente, le spin va suivre adiabatiquement le changement de direction de  $\vec{B}_0$  et va rester // à  $\vec{B}_0$ . Si par contre le déplacement est rapide, le spin ne pourra suivre  $\vec{B}_0$  et il apparaîtra un angle entre les 2 vecteurs, correspondant à une augmentation d'énergie potentielle. Pour déplacer le spin à une vitesse  $v$ , il faudra donc fournir un travail, donc s'opposer à une force d'autant plus grande que  $v$  est plus grand.

Différence nette avec la force réactive de l'effet "Sisyphé" qui est due au fait que l'atome monte ou descend une colline de potentiel quand il se déplace.

b. Force dissipative  $\vec{F}_{dissip}$

- Comme il s'agit d'une mélasse à 1 dimension, il n'y a pas d'effets d'interférence entre les 2 ondes, et on peut ajouter indépendamment les forces de pression de radiations qu'elles exercent sur l'atome (dans l'équation (1.35),  $\vec{k}_\mu + \vec{k}_\nu = \vec{0}$ ).
- Comme les photons associés à l'onde  $\sigma^+$  ( $\sigma^-$ ) ont une impulsion  $+\hbar k$  ( $-\hbar k$ ), la force de pression de radiation exercée par l'onde  $\sigma^+$  ( $\sigma^-$ ) est égale à  $+\hbar k$  ( $-\hbar k$ ) fois le nombre de photons  $\sigma^+$  ( $\sigma^-$ ) absorbés par unité de temps par l'atome.
- D'après la discussion suivant (2.8), (2.9), (2.10), le nombre de photons absorbés par unité de temps sur chaque onde, de paramètre de saturation  $S_0$ , vaut  $\Gamma S_0/2 = \Gamma'/2$ , pour une transition ayant un coefficient de Clebsch-Gordan 1.

En utilisant les coefficients de Clebsch-Gordan de la figure 3, on trouve ainsi que, à partir de  $g_{+1}$ , l'atome absorbe  $\Gamma'/2$  photons  $\sigma^+$  et  $\Gamma'/12$  photons  $\sigma^-$  par seconde pour  $J_g=1 \leftrightarrow J_e=2$ , 0 photon  $\sigma^+$  et  $\Gamma'/4$  photons  $\sigma^-$  par seconde pour  $J_g=1 \leftrightarrow J_e=1$ . On en déduit, en appelant

$$\Pi_m = \langle g_m | \sigma | g_m \rangle \tag{2.22}$$

la population du niveau  $|g_m\rangle$ , que  $\vec{F}_{dissip}$  vaut :

$$\begin{aligned} \vec{F}_{dissip} (1 \leftrightarrow 2) &= \hbar k \frac{\Gamma'}{2} \left[ \Pi_1 + \frac{\Pi_0}{2} + \frac{\Pi_{-1}}{6} - \frac{\Pi_1}{6} - \frac{\Pi_0}{2} - \Pi_{-1} \right] \vec{E}_3 \\ &= \frac{5}{12} \hbar k \Gamma' (\Pi_1 - \Pi_{-1}) \vec{E}_3 \end{aligned} \tag{2.23.2}$$

pour la transition  $1 \leftrightarrow 2$ , et

$$\begin{aligned} \vec{F}_{\text{dissip}} (1 \leftrightarrow 1) &= \hbar k \frac{\Gamma'}{2} \left[ \frac{\pi_0}{2} + \frac{\pi_{-1}}{2} - \frac{\pi_0}{2} - \frac{\pi_1}{2} \right] \vec{E}_3 \\ &= -\frac{1}{4} \hbar k \Gamma' (\pi_1 - \pi_{-1}) \vec{E}_3 \end{aligned} \tag{2.23.b}$$

pour la transition  $1 \leftrightarrow 1$ .

- Il apparait ainsi que  $\vec{F}_{\text{dissip}}$  est proportionnelle à la différence de population entre les 2 sous-niveaux  $|g_1\rangle$  et  $|g_{-1}\rangle$ . La différence de signe entre (2.23.a) et (2.23.b) est due au fait que la transition  $\sigma^+$  est plus intense à partir de  $g_{+1}$  que à partir de  $g_{-1}$  pour  $1 \leftrightarrow 2$ , alors que c'est l'inverse pour  $1 \leftrightarrow 1$ .

### ④ Etat interne d'un atome au repos en 3

#### a. Déplacements lumineux

- Commençons par diagonaliser les matrices  $\Lambda(3)$  données en (2.13) et apparaissant dans l'expression (2.16) de  $H_{\text{eff}}(3)$ . Les vecteurs propres de ces matrices sont  $|g_0\rangle$  et les combinaisons linéaires symétrique et antisymétrique de  $|g_1\rangle e^{ikz}$  et  $|g_{-1}\rangle e^{-ikz}$

$$|\Psi_S(3)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [ |g_1\rangle e^{ikz} + |g_{-1}\rangle e^{-ikz} ] \tag{2.24.a}$$

$$|\Psi_A(3)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [ |g_1\rangle e^{ikz} - |g_{-1}\rangle e^{-ikz} ] \tag{2.24.b}$$

- On vérifie alors que pour une transition  $1 \leftrightarrow 2$

$$\begin{cases} H_{\text{eff}}(1 \leftrightarrow 2) |g_0\rangle &= \frac{\hbar \delta'}{2} |g_0\rangle \\ H_{\text{eff}}(1 \leftrightarrow 2) |\Psi_S(3)\rangle &= 2 \frac{\hbar \delta'}{3} |\Psi_S(3)\rangle \\ H_{\text{eff}}(1 \leftrightarrow 2) |\Psi_A(3)\rangle &= \hbar \frac{\delta'}{2} |\Psi_A(3)\rangle \end{cases} \tag{2.25.a}$$

et pour une transition  $1 \leftrightarrow 1$

$$\begin{cases} H_{\text{eff}}(1 \leftrightarrow 1) |g_0\rangle &= \frac{\hbar \delta'}{2} |g_0\rangle \\ H_{\text{eff}}(1 \leftrightarrow 1) |\Psi_S(3)\rangle &= 0 |\Psi_S(3)\rangle \\ H_{\text{eff}}(1 \leftrightarrow 1) |\Psi_A(3)\rangle &= \frac{\hbar \delta'}{2} |\Psi_A(3)\rangle \end{cases} \tag{2.25.b}$$

On retrouve bien le résultat préré plus haut : les déplacements lumineux (valeurs propres de  $H_{\text{eff}}$ ) sont indépendants de  $z$  alors que les états propres de  $H_{\text{eff}}$ , qui ont un déplacement lumineux bien défini, en dépendent (voir (2.24)).

Nous supposons ici que  $\delta$  est négatif ( $\omega_L < \omega_A$ ), de sorte que  $\delta'$  est aussi négatif (voir (2.8)).

$$\delta < 0 \quad \rightarrow \quad \delta' < 0 \tag{2.26}$$

#### Discussion physique

- Il apparait clairement sur (2.25) que la valeur propre associée à  $|g_0\rangle$  et  $|\Psi_A(3)\rangle$  est dégénérée. Ce résultat peut être compris aisément et relié au fait que la polarisation  $\vec{E}(3)$  de l'onde laser en 3 est linéaire.  $H_{\text{eff}}$  a la même symétrie

que le carré  $(\vec{E}(z) \cdot \vec{J})^2 = J_E^2$  de la composante <sup>(J<sub>E</sub>)</sup> des moment cinétique  $\vec{J}$  sur  $\vec{E}(z)$  et la dégénérescence entre les 2 états propres  $|+1\rangle_E$  et  $|-1\rangle_E$  de  $J_E$ , de valeurs propres  $+ \hbar$  et  $-\hbar$  n'est pas levée. Si l'on prend comme axe de quantification  $\vec{E}(z)$ , l'excitation laser a alors une polarisation  $\pi$ . Les déplacements lumineux ne sont alors autres que les produits de  $\hbar S'$  et des carrés des coefficients de Clebsch-Gordan des transitions  $\pi$  donnés sur les figures 13 a et 13 b. On retrouve alors immédiatement les valeurs propres de  $H_{eff}$  apparaissant en (2.25).

- Le raisonnement précédent montre également que  $|\Psi_S(z)\rangle$  n'est autre que le vecteur propre  $|0\rangle_E$  de  $J_E$  de valeur propre 0, alors que  $|g_0\rangle$  et  $|\Psi_A(z)\rangle$  appartiennent au sous-espace sous-tendu par les vecteurs propres  $|+1\rangle_E$  et  $|-1\rangle_E$  de  $J_E$ , de valeur propre  $+\hbar$  et  $-\hbar$ .

On pourrait songer à utiliser dans ce sous-espace les états  $|+1\rangle_E$  et  $|-1\rangle_E$  plutôt que  $|g_0\rangle$  et  $|\Psi_A\rangle$ . C'est ce qui est fait par exemple dans la référence 1. En fait, pour la discussion du phénomène de piégeage cohérent de populations, il est plus commode de garder  $|g_0\rangle$  et  $|\Psi_A\rangle$ .

b - Pompage optique et populations stationnaires

- Au lieu d'utiliser les équations de Bloch optiques (qui seront données plus loin pour un atome au repos ou en mouvement), il est plus simple de se placer dans la base des états propres de  $J_E$ , où le pompage optique est en polarisation  $\pi$  et où les seuls éléments de matrice non nuls de l'opérateur densité sont les populations des sous-niveaux Zeeman de l'état fondamental.

Transition 1 ↔ 2

Les populations de  $|0\rangle_E$ ,  $|+1\rangle_E$ ,  $|-1\rangle_E$  sont obtenues par des arguments de bilan détaillé. Par exemple, le taux de passage de  $|-1\rangle_E$  à  $|0\rangle_E$  est le produit de la population de  $|-1\rangle_E$  par la probabilité d'absorption d'un photon  $\pi$  (proportionnelle à  $1/2$ ) et la probabilité d'émission d'un photon  $\sigma^-$  (proportionnelle à  $1/2$ ). Par contre, pour passer de  $|0\rangle_E$  à  $|-1\rangle_E$ , il faut multiplier la population de  $|0\rangle_E$  par la probabilité d'absorption d'un photon  $\pi$  ( $\sim 2/3$ ) et la probabilité d'émission d'un photon  $\sigma^+$  ( $\sim 1/6$ ). Voir Fig. 3a

En régime stationnaire, les 2 flux se compensent de sorte que  $\langle -1 | \sigma^- | -1 \rangle_E \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \langle 0 | \sigma^+ | 0 \rangle_E \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{6}$ . En utilisant le fait que la somme des 3 populations est égale à 1 et que les populations de  $|+1\rangle_E$  et  $|-1\rangle_E$  sont égales par symétrie, on trouve alors que les populations de  $|0\rangle_E$ ,  $|+1\rangle_E$ ,  $|-1\rangle_E$ , on encore de  $|\Psi_S\rangle$ ,  $|g_0\rangle$ ,  $|\Psi_A\rangle$ , sont

respectivement égales à  $9/17, 4/17, 4/17$

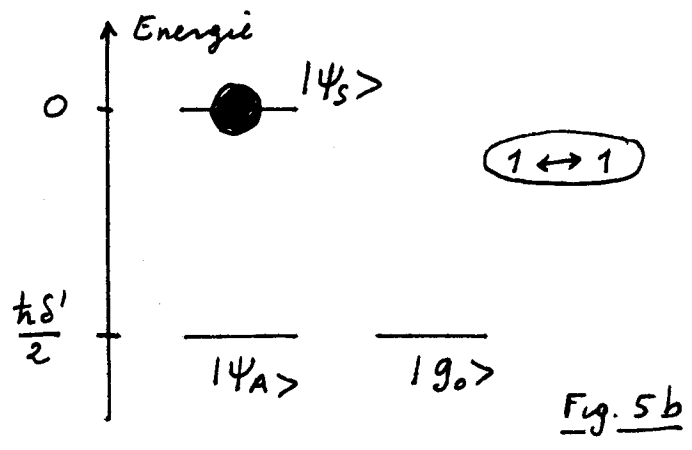
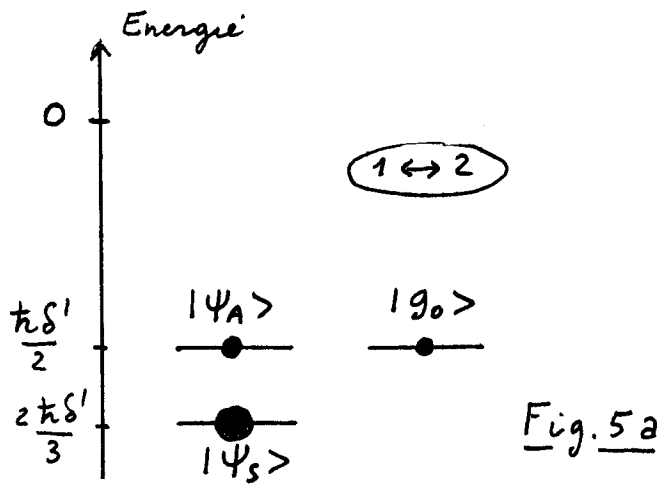
Pour  $1 \leftrightarrow 2$   $\begin{cases} \pi_s = 9/17 \\ \pi_0 = \pi_A = 4/17 \end{cases}$  (2.27.a)

Transition  $1 \leftrightarrow 1$

Le même raisonnement peut être appliqué. Un pompage optique en polarisation  $\pi$  fait passer les atomes de  $| -1 \rangle_E$  et  $| +1 \rangle_E$  dans  $| 0 \rangle_E$ . Mais, une fois qu'ils sont pompés en  $| 0 \rangle_E$ , les atomes se retrouvent piégés dans l'état fondamental, car ils ne peuvent pas quitter l'état  $| 0 \rangle_E$  par absorption d'un photon  $\pi$  à cause de la nullité du coefficient de Clebsch-Gordan  $g_0 - e_0$  (Voir Fig. 3b). En régime stationnaire, toute la population atomique va se trouver dans le niveau  $| 0 \rangle_E$ , c-à-d encore dans le niveau  $| \psi_s \rangle$

Pour  $1 \leftrightarrow 1$   $\begin{cases} \pi_s = 1 \\ \pi_0 = \pi_A = 0 \end{cases}$  (2.27.b)

- Tous les résultats obtenus dans ce § 4 sont regroupés sur la figure 5 qui donne les positions des états propres de  $H_{eff}$  et leurs populations stationnaires, schématisées par des cercles pleins d'autant plus gros que la population est importante



c - Interférences quantiques entre amplitudes de transition.

Etats non couplés pour la transition  $1 \leftrightarrow 1$

- Si  $| \psi_a \rangle$  est un état propre de l'opérateur  $\Lambda$ , de valeur propre  $\lambda_a$ , l'état  $| \psi_a \rangle$  a un déplacement lumineux mais défini  $\lambda_a \hbar \delta'$  et un temps de départ par absorption de photon  $\lambda_a \Gamma'$ .

La 2<sup>ème</sup> équation (2.25.b) montre que l'état  $| \psi_s(z) \rangle$  est un état propre de valeur propre 0 de  $\Lambda(z)$ . Un atome dans cet état n'a donc pas de déplacement lumineux et a une probabilité nulle d'absorber un photon.

- Expression de l'hamiltonien  $V_{AL}$  de couplage atome-laser.

En utilisant (1.13), (2.1), (2.2), (1.8) et les coefficients de

Clebsch-Gordan de la figure 3.b, on obtient, pour la transition  $1 \leftrightarrow 1$

$$V_{AL}(1 \leftrightarrow 1) = \frac{\hbar \tilde{\Omega}_1}{2} \left[ -\frac{1}{\sqrt{2}} |e_0\rangle \langle g_{-1}| e^{ikz} + \frac{1}{\sqrt{2}} |e_0\rangle \langle g_1| e^{-ikz} \right] e^{-i\omega_L t} + \text{h.c.} \quad (2.28)$$

où  $\tilde{\Omega}_1 = -D E_0 / \hbar$  est la fréquence de Rabi associée à  $E_0$ , c-à-d à chaque onde. Les 2 coefficients  $-1/\sqrt{2}$  et  $+1/\sqrt{2}$  proviennent des coefficients de Clebsch-Gordan des transitions  $g_{-1} \leftrightarrow e_0$ ,  $g_1 \leftrightarrow e_0$  et les  $e^{\pm ikz}$  des facteurs de propagation spatiale des ondes  $\sigma^+$  et  $\sigma^-$  (voir (2.2))

- En utilisant (2.28) et (2.24.2), on vérifie alors que

$$V_{AL}(1 \rightarrow 1) |\Psi_S(3)\rangle = \frac{\hbar \tilde{\Omega}_1}{2\sqrt{2}} e^{-i\omega_L t} \left[ -\frac{1}{\sqrt{2}} |e_0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |e_0\rangle \right] = 0 \quad (2.29)$$

L'état  $|\Psi_S(3)\rangle$  n'est donc pas couplé au laser, par suite d'une interférence parfaitement destructive entre les 2 amplitudes d'absorption d'un photon sur les transitions  $g_{-1} \leftrightarrow e_0$  et  $g_1 \leftrightarrow e_0$ .

- Importance des relations de phase

Bien noter qu'une telle interférence ne se produit que parce que

- d'une part, l'état initial  $|\Psi_S(3)\rangle$  est une superposition linéaire de  $|g_{-1}\rangle$  et  $|g_{+1}\rangle$  (voir 2.24.2)
- d'autre part, le champ laser est une superposition linéaire des ondes  $\sigma^+$  et  $\sigma^-$  (voir 2.2)

- Remarque relative à la transition  $1 \leftrightarrow 2$ .

Pour la transition  $1 \leftrightarrow 2$ , les coefficients de Clebsch-Gordan des 2 transitions  $g_{-1} \leftrightarrow e_0$  et  $g_1 \leftrightarrow e_0$  ont le même signe, de sorte que c'est maintenant l'état antisymétrique  $|\Psi_A(3)\rangle$  donné en (2.24.b) qui n'est pas couplé par  $V_{AL}$  à  $e_0$ . Un calcul analogue au précédent montre en effet que

$$\langle e_0 | V_{AL}(1 \leftrightarrow 2) | \Psi_A(3) \rangle = 0 \quad (2.30)$$

Par contre, de nouvelles transitions sont maintenant possibles à partir de  $g_{-1}$  et  $g_1$ , les transitions  $g_{-1} \leftrightarrow e_{-2}$  et  $g_1 \leftrightarrow e_2$ , et elles ne peuvent pas interférer car elles conduisent à des états orthogonaux.  $V_{AL}(1 \leftrightarrow 2) |\Psi_A(3)\rangle$  est donc maintenant une superposition linéaire de  $e_{-2}$  et  $e_{+2}$  et n'est plus nul

$$V_{AL}(1 \leftrightarrow 2) |\Psi_A(3)\rangle \neq 0 \quad (2.31)$$

Une erreur à ne pas commettre.

- Revenons à la transition  $1 \leftrightarrow 1$ . On peut considérer que l'onde  $\sigma^+$  couple l'état discret  $g_{-1}$  à l'état instable  $e_0$ , de largeur  $\hbar\Gamma$ . Si  $\Omega_1 \ll \Gamma$ ,  $e_0$  apparaît comme un continuum pour ce couplage. Si l'état  $g_{-1}$  était le seul sous-niveau fondamental, on pourrait appliquer la règle d'or de Fermi à un tel couplage, pour obtenir le temps de départ de  $g_{-1}$ .

- En fait,  $g_{-1}$  n'est pas tout seul. L'état  $g_1$  est lui aussi



couplé au même "continuum"  $e_0$  que  $g_1$ . Quand 2 états discrets sont couplés au même continuum, ils sont indirectement couplés l'un à l'autre via ce continuum, et on ne peut étudier indépendamment leur désintégration (voir par exemple Ref. 3, Chap. III).

Il y a des modes propres de désintégration, qui font intervenir des combinaisons linéaires des 2 états discrets et qui sont dus aux interférences entre les amplitudes de transition partant de chaque état.

- Si l'état initial de l'atome est  $|g_{-1}\rangle$ , il est donc incorrect d'appliquer une règle d'or de Fermi au seul état  $|g_{-1}\rangle$ . Il faut décomposer  $|g_{-1}\rangle$  sur les 2 modes propres de désintégration qui sont ici  $|\psi_S(3)\rangle$  et  $|\psi_A(3)\rangle$  et qui ont des taux de désintégration respectivement égaux à 0 et  $\Gamma/2$

$$|\psi(0)\rangle = |g_{-1}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{ikz} [|\psi_S(3)\rangle - |\psi_A(3)\rangle] \quad (2.32)$$

A un instant ultérieur, cet état devient

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{ikz} |\psi_S(3)\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} e^{ikz} e^{-\Gamma t/4} |\psi_A(3)\rangle \quad (2.33)$$

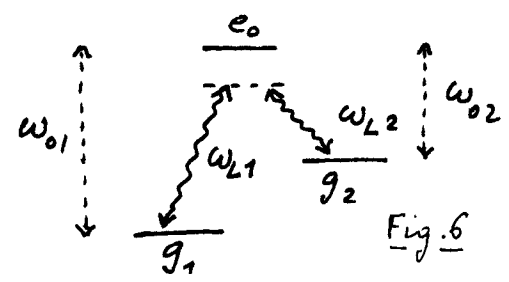
+ Etats contenant 1, 2, ... photons de fluorescence

Pour  $t \rightarrow \infty$ , on voit sur (2.33), que dans la multiplicité à 0 photon de fluorescence, il reste des atomes "piégés" dans l'état  $|\psi_S(3)\rangle$ .

Quelques problèmes en suspens et qui seront abordés plus loin

- On a utilisé ici un traitement semi-classique ; atome en un point  $z$  bien défini. Les photons  $\sigma^+$  et  $\sigma^-$  ont des impulsions différentes,  $+hk$  et  $-hk$ . Suivant que l'atome absorbe un photon  $\sigma^+$  ou  $\sigma^-$ , il recule différemment. L'interférence précédente est-elle modifiée et, si oui, comment ?

- Le phénomène précédent subsiste-t-il pour une transition  $\Lambda$  plus générale que celle étudiée ici (et correspondant à la figure 3c) ?



Transition Raman générale avec la condition de résonance Raman

$$\omega_{L1} - \omega_{L2} = \omega_{01} - \omega_{02} \quad (2.34)$$

- Que se passe-t-il lorsque la condition de résonance Raman (2.34) n'est plus exactement vérifiée ?

- Y a-t-il aussi des effets intéressants observables sur une transition  $V$  (1 état fondamental  $g_0$  et 2 états excités  $e_1, e_2$ ) ?

Références

(1) J. Dalibard, C. Cohen-Tannoudji J.O.S.A. B6, 2023 (1989)  
 (2) C. Cohen-Tannoudji, in Les Hauts, Session LIII, 1990, Systèmes fondamentaux en Optique Quantique, J. Dalibard, J.M. Raimond and J. Zinn-Justin eds Elsevier, à paraître 1992 - Chapitre 10.  
 (3) C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, G. Grynberg. Processus d'Interaction entre Photons et Atomes, InterEditions et Editions du CNRS, (Paris 1988) -

⑤ Etat interne d'un atome en mouvement à la vitesse  $v$

- On suppose maintenant que l'atome se déplace à la vitesse  $v$ , passant en  $z=0$  à  $t=0$ , de sorte que :

$$z = vt. \quad (3.1)$$

On suppose aussi que

$$T_{int} \ll T_{ext}, \quad (3.2)$$

de manière que l'atome ait le temps d'atteindre un état interne stationnaire avant que sa vitesse n'ait eu le temps de changer.

- Considérant  $v$  comme constant dans (3.1), nous allons calculer le nouvel état interne stationnaire de l'atome, qui dépend maintenant de  $v$ , ce qui nous permettra ensuite de calculer la force subie par l'atome (équations 2.21 et 2.23) et d'étudier ses variations avec  $v$ .

a - Passage dans un référentiel en mouvement et tournant.

- Plaçons nous dans le référentiel au repos de l'atome. Dans ce référentiel, l'atome est immobile en  $z=0$ .

- Dans ce référentiel, l'atome "voit" un champ laser dont la polarisation tourne à la vitesse angulaire  $-kv$  autour de  $Oz$ . Pour le montrer, il suffit de remplacer  $z$  par  $vt$  dans l'expression (2.6) du vecteur polarisation en  $z$ .

Il est indiqué alors d'introduire, dans le référentiel au repos de l'atome, un autre référentiel tournant à la fréquence angulaire  $-kv$  autour de  $Oz$ , car dans ce nouveau référentiel, qui est en mouvement uniforme et qui tourne par rapport au référentiel du labo, l'atome sera immobile en  $z=0$  et "verra" un champ laser, de polarisation linéaire fixe et parallèle à  $\vec{E}_y$ .

- La transformation unitaire qui réalise un tel changement n'est autre qu'une rotation d'angle  $-kz$  avec  $z = vt$

$$T(t) = e^{-ikz J_3 / \hbar} = e^{-ikvt J_3 / \hbar} \quad (3.3)$$

où  $J_3$  est la composante du moment cinétique  $\vec{J}$  de l'atome le long de  $Oz$ .

- Etudions par exemple comment se transforme l'hamiltonien d'interaction  $V_{AL}(1 \leftrightarrow 1)$  donné en (2.28)

$$\tilde{V}_{AL} = T(t) V_{AL} T^\dagger(t) \quad (3.4)$$

En utilisant (3.3) et le fait que

$$J_3 |g_{-1}\rangle = -\hbar |g_{-1}\rangle \quad J_3 |e_0\rangle = 0 \quad J_3 |g_{+1}\rangle = \hbar |g_{+1}\rangle \quad (3.5)$$

on obtient

$$\tilde{V}_{AL} = \frac{\hbar \Omega_1}{2} \left[ -\frac{1}{\sqrt{2}} |e_0\rangle \langle g_{-1}| + \frac{1}{\sqrt{2}} |e_0\rangle \langle g_{+1}| \right] e^{-i\omega_2 t} + h.c. \quad (3.6)$$

Les exponentielles  $e^{\pm ikz}$  qui apparaissent dans (2.28) ont disparu, ce qui montre que  $\tilde{V}_{AL}$  décrit l'interaction de l'atome, immobile en  $z=0$ , avec un champ de polarisation fixe parallèle à  $\vec{E}_y$ , ce qui correspond bien au but cherché.

- Dans le nouveau référentiel, l'état interne de l'atome est décrit par un nouvel opérateur densité  $\tilde{\sigma}(t)$  relié au précédent par

$$\tilde{\sigma}(t) = e^{-ikv t J_3 / \hbar} \sigma(t) e^{ikv t J_3 / \hbar} \quad (3.7)$$

Le changement de fonctions (2.19) a donc une interprétation simple.  $\tilde{\sigma}_{g_1, g_{-1}}$  défini en (2.19) n'est autre que l'élément non diagonal de  $\tilde{\sigma}$  entre  $g_1$  et  $g_{-1}$  dans le référentiel en mouvement et tournant. Notons cependant que les populations  $\Pi_{-1}, \Pi_0, \Pi_{+1}$  gardent la même valeur dans les 2 référentiels.

b - Nouvel hamiltonien

- Comme la transformation unitaire (3.3) dépend de  $t$ , le nouvel hamiltonien  $\tilde{H}$  qui régit l'évolution de  $|\tilde{\psi}\rangle = T(t)|\psi\rangle$  n'est pas simplement  $T(t) H T^\dagger(t)$  mais

$$\tilde{H} = T(t) H T^\dagger(t) + i\hbar \left[ \frac{dT(t)}{dt} \right] T^\dagger(t) \quad (3.8)$$

Pour le voir il suffit de calculer  $i\hbar \frac{d}{dt} |\tilde{\psi}(t)\rangle = i\hbar \frac{d}{dt} (T(t)|\psi(t)\rangle)$  et d'utiliser  $i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = H |\psi(t)\rangle$ .

- Le 1<sup>er</sup> terme de (3.8),  $T(t) H T^\dagger(t)$ , correspond simplement à l'hamiltonien d'un atome interagissant avec un champ laser de polarisation linéaire fixe, parallèle à  $\vec{E}_y$  (l'hamiltonien atomique  $H_A$  est invariant par rotation, de même que l'hamiltonien d'interaction  $V_{AV}$  avec le champ quantique du vide, qui est isotrope).

Le calcul du dernier terme de (3.8) à partir de (3.3) donne

$$i\hbar \left[ \frac{dT(t)}{dt} \right] T^\dagger(t) = V_{rot} = kv J_3 \quad (3.9)$$

Ce terme supplémentaire qui apparaît dans (3.8) est un terme inertiel dû à la rotation. Il a la même forme que l'hamiltonien d'interaction de l'atome avec un champ magnétique fictif, parallèle à  $Oz$ , et autour duquel la précession de Larmor s'effectuerait à la pulsation  $kv$ . Un tel résultat n'est autre que la traduction du théorème de Larmor.

- Finalement, la transformation (3.3) permet de ramener le problème à celui d'un atome immobile, soumis à 2 perturbations de symétries différentes.

- Une excitation laser de polarisation linéaire fixe, parallèle à  $\vec{E}_y$ , introduisant des déplacements lumineux, de grandeur  $\hbar S'$  et ayant la symétrie de l'effet Stark dans un champ électrique parallèle à  $\vec{E}_y$ , ainsi qu'un pompage optique  $\Pi$  par rapport à  $\vec{E}_y$ , et de temps de pompage  $\tau'$
- Un champ magnétique fictif, parallèle à  $\vec{E}_z$ , proportionnel à  $kv$ .

- Il suffit d'utiliser les équations (1.20), (1.24), (1.25), (1.28) en remplaçant  $\vec{E}(z)$  par  $\vec{E}_y$ , ce qui revient en particulier à remplacer  $\Lambda(z)$  par  $\Lambda(z=0)$ , et d'ajouter le terme  $-ikv [\frac{J_3}{\hbar}, \tilde{\sigma}_{gg}]$  pour tenir compte de l'évolution due au terme (3.9). On obtient ainsi

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\sigma}}_{gg} = & -i\delta' [\Lambda(z=0), \tilde{\sigma}_{gg}] - \frac{\Gamma'}{2} \{ \Lambda(z=0), \tilde{\sigma}_{gg} \}_+ \\ & + \Gamma' \sum_{q=-1,0,+1} (\vec{E}_q \cdot \hat{d}^-) (\vec{E}_y \cdot \hat{d}^+) \tilde{\sigma}_{gg} (\vec{E}_y \cdot \hat{d}^-) (\vec{E}_q \cdot \hat{d}^+) \\ & - ikv [\frac{J_3}{\hbar}, \tilde{\sigma}_{gg}] \end{aligned} \quad (3.10)$$

- les opérateurs  $\Lambda(z=0)$  sont représentés par les matrices (2.13) en l'on fait  $z=0$ . En décomposant  $\vec{E}_y$  sur les  $\vec{E}_q$  et en utilisant les coefficients de Clebsch-Gordan des figures 3 page II.2, on obtient finalement 5 équations pour  $\Pi_1, \Pi_{-1}, \Pi_0, C_r, C_i$  (voir 2.19 et 2.20)

Transition 1 ↔ 2

$$\begin{cases} \dot{\Pi}_1 = -\frac{5\Gamma'}{72} \Pi_1 + \frac{9\Gamma'}{72} \Pi_0 + \frac{\Gamma'}{72} \Pi_{-1} - \frac{\Gamma'}{18} C_r - \frac{\delta'}{6} C_i \\ \dot{\Pi}_{-1} = +\frac{\Gamma'}{72} \Pi_1 + \frac{9\Gamma'}{72} \Pi_0 - \frac{5\Gamma'}{72} \Pi_{-1} - \frac{\Gamma'}{18} C_r + \frac{\delta'}{6} C_i \\ \dot{\Pi}_0 = -(\dot{\Pi}_1 + \dot{\Pi}_{-1}) \\ \dot{C}_r = +\frac{\Gamma'}{24} \Pi_1 + \frac{\Gamma'}{8} \Pi_0 + \frac{\Gamma'}{24} \Pi_{-1} - \frac{5\Gamma'}{12} C_r + 2kv C_i \\ \dot{C}_i = +\frac{\delta'}{12} (\Pi_1 - \Pi_{-1}) - 2kv C_r - \frac{5\Gamma'}{12} C_i \end{cases} \quad (3.11.a)$$

Transition 1 ↔ 1

$$\begin{cases} \dot{\Pi}_1 = -\frac{\Gamma'}{8} \Pi_1 + \frac{\Gamma'}{8} \Pi_0 + \frac{\Gamma'}{8} \Pi_{-1} + \frac{\delta'}{2} C_i \\ \dot{\Pi}_{-1} = +\frac{\Gamma'}{8} \Pi_1 + \frac{\Gamma'}{8} \Pi_0 - \frac{\Gamma'}{8} \Pi_{-1} - \frac{\delta'}{2} C_i \\ \dot{\Pi}_0 = -(\dot{\Pi}_1 + \dot{\Pi}_{-1}) = -\frac{\Gamma'}{4} \Pi_0 \\ \dot{C}_r = \frac{\Gamma'}{8} - \frac{\Gamma'}{4} C_r + 2kv C_i \\ \dot{C}_i = -\frac{\delta'}{4} (\Pi_1 - \Pi_{-1}) - 2kv C_r - \frac{\Gamma'}{4} C_i \end{cases} \quad (3.11.b)$$

- Les termes en  $\delta'$  des équations (3.11) proviennent du 1<sup>er</sup> terme de (3.10) (déplacements lumineux), les termes en  $\Gamma'$  des 2<sup>es</sup> et 3<sup>es</sup> (départ de  $g$  par absorption et retombée par émission spontanée), les termes en  $kv$  du 4<sup>ème</sup> (champ inertiel dû à la rotation).

- La 3<sup>ème</sup> équation (3.11.b) montre que  $\Pi_0$  s'amortit avec un temps  $\Gamma'/4$ . Ce résultat confirme le fait, déjà mentionné à propos de la figure 3b de la page II.2, que le pompage optique vide le sous-niveau  $g_0$ , sans que les atomes puissent ensuite y retourner.

- Les équations (3.11) ont des coefficients indépendants du temps et admettent donc une solution stationnaire.

d. Nouvelle expression de la force moyenne stationnaire

Transition 1 ↔ 2

- En régime stationnaire,  $\dot{\Pi}_1 = \dot{\Pi}_{-1} = \dot{\Pi}_0 = \dot{c}_r = \dot{c}_i = 0$ . En retranchant la 2<sup>ème</sup> équation (3.11.a) de la 1<sup>ère</sup>, on obtient

$$\Pi_1 - \Pi_{-1} = - \frac{4\delta'}{r'} c_i \tag{3.12}$$

- En utilisant les expressions (2.21.3) de  $\vec{F}_{react}(1 \leftrightarrow 2)$  et (2.23.a) de  $\vec{F}_{dissip}(1 \leftrightarrow 2)$ , on trouve alors que

$$\vec{F}_{dissip}(1 \leftrightarrow 2) = 5 \vec{F}_{react}(1 \leftrightarrow 2) \tag{3.13}$$

de sorte que la force totale  $\vec{F}$  vaut

$$\begin{aligned} \vec{F}(1 \leftrightarrow 2) &= \vec{F}_{dissip}(1 \leftrightarrow 2) + \vec{F}_{react}(1 \leftrightarrow 2) \\ &= \frac{6}{5} \vec{F}_{dissip}(1 \leftrightarrow 2) = \frac{1}{2} h k \Gamma' (\Pi_1 - \Pi_{-1}) \vec{E}_3 \end{aligned} \tag{3.14}$$

Pour la transition 1 ↔ 2, la force subie par l'atome provient donc essentiellement de la non compensation entre les pressions de radiations des ondes  $\sigma^+$  et  $\sigma^-$ .

Transition 1 ↔ 1

- Retraçons là aussi la 2<sup>ème</sup> équation (3.11.b) de la 1<sup>ère</sup> en faisant  $\dot{\Pi}_1 = \dot{\Pi}_{-1} = 0$ . Il vient

$$\Pi_1 - \Pi_{-1} = \frac{4\delta'}{r'} c_i \tag{3.15}$$

- Les équations (2.21.b) et (2.23.b), conduisent alors à

$$\vec{F}_{dissip}(1 \leftrightarrow 1) = - \vec{F}_{react}(1 \leftrightarrow 1) \tag{3.16}$$

de sorte que la force totale s'annule

$$\vec{F}(1 \leftrightarrow 1) = \vec{0} \tag{3.17}$$

Conclusions

Il ne peut donc y avoir de force de friction que pour la transition 1 ↔ 2. Nous l'étudions plus loin (§5).

Le fait que la force moyenne s'annule pour 1 ↔ 1 ne signifie pas cependant qu'il ne peut y avoir de refroidissement laser. Nous montrons plus loin qu'une telle transition fait apparaître un phénomène nouveau, le piégeage cohérent de populations, qui est à la base de mécanismes de refroidissement différents du refroidissement  $\sigma^+, \sigma^-$  pour 1 ↔ 2.

⑥ Force moyenne pour une transition 1 ↔ 2

a. Coefficient de friction

- Supposons tout d'abord  $v = 0$ . Nous avons déjà déterminé dans le cours II l'état stationnaire de l'atome (voir Equations (2.27.a))

$$\tilde{\sigma} = \frac{9}{17} |\psi_S\rangle\langle\psi_S| + \frac{4}{17} |\psi_A\rangle\langle\psi_A| + \frac{4}{17} |g_0\rangle\langle g_0| \quad (3.18)$$

où  $|\psi_S\rangle$  et  $|\psi_A\rangle$  sont donnés en (2.24) avec  $z=0$ , puisque l'atome est en  $z=0$  dans le référentiel en mouvement tournant. A partir de (3.18), on peut calculer aisément  $\pi_1, \pi_{-1}, C_r$  et  $C_i$ . On trouve :

$$\begin{cases} \pi_1 = \pi_{-1} = 13/34 \\ \pi_0 = 4/17 \\ C_r = 5/34 \\ C_i = 0 \end{cases} \quad (3.19)$$

Il découle alors de (3.14) que la force totale moyenne est nulle pour  $v=0$ .

- On peut alors utiliser les équations (3.11.2) (avec les membres de gauche égaux à 0) pour calculer  $\pi_1 - \pi_{-1}$  à l'ordre 1 en  $v$  quand  $v$  n'est plus nul. En utilisant (3.12), on obtient à partir de la dernière équation (3.11.2)

$$\pi_1 - \pi_{-1} = \frac{96 kv}{4\delta'^2 + 5\Gamma'^2} C_r \quad (3.20)$$

Comme le second membre de (3.20) contient déjà  $kv$ , on peut pour le calcul de  $\pi_1 - \pi_{-1}$  à l'ordre 1 en  $v$ , remplacer  $C_r$  par sa valeur d'ordre 0 en  $v$  donnée en (3.19), ce qui conduit à

$$\pi_1 - \pi_{-1} = \frac{240}{17} \frac{kv \delta'}{4\delta'^2 + 5\Gamma'^2} \quad (3.21)$$

- Le report de (3.21) dans (3.14) donne alors

$$\frac{kv}{18'} \ll 1 \rightarrow \mathcal{F}_3(1 \leftrightarrow 2) = -\alpha v \quad (3.22)$$

où  $\alpha$  est un coefficient de friction donné par

$$\alpha = -\frac{120}{17} \frac{1}{\hbar} k^2 \frac{\Gamma' \delta'}{4\delta'^2 + 5\Gamma'^2} = -\frac{120}{17} \frac{1}{\hbar} k^2 \frac{\Gamma \delta}{4\delta^2 + 5\Gamma^2} \quad (3.23)$$

Il convient d'insister sur le fait que le domaine de linéarité en vitesse de la force moyenne est maintenant donné par  $kv \ll 18'$  et non plus par  $kv \ll \Gamma$  comme c'était le cas pour le refroidissement Doppler.

- A la limite  $|\delta| \gg \Gamma$ , on peut simplifier encore (3.21) et (3.23)

$$|\delta| \gg \Gamma \rightarrow \pi_1 - \pi_{-1} \approx \frac{60}{17} \frac{kv}{\delta'} \quad (3.24.a)$$

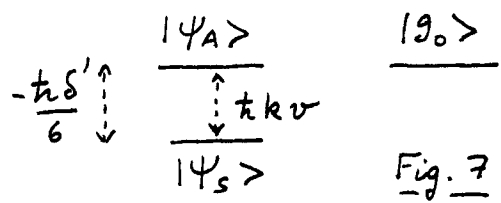
$$\alpha \approx -\frac{30}{17} \frac{1}{\hbar} k^2 \frac{\Gamma}{\delta} \quad (3.24.b)$$

### b - Interprétation physique

- Revenons à la figure 5.a, page II-8, donnant les déplacements lumineux et populations stationnaires d'un atome au repos et essayons de comprendre, à la limite  $kv \ll 18'$  et  $\Gamma \ll |\delta|$ , la perturbation introduite par le terme inertiel  $V_{rot} = kv J_z$  écrit en (3.9) qui s'ajoute à  $H$  quand l'atome est en mouvement.

- En utilisant les expressions (2.24) de  $|\psi_s\rangle$  et  $|\psi_A\rangle$  (avec  $z=0$ ) et le fait que  $J_z|g_0\rangle = 0$ ,  $J_z|g_{\pm 1}\rangle = \pm \hbar |g_{\pm 1}\rangle$ , on trouve aisément que le seul élément de matrice non nul de  $V_{rot}$  est entre  $|\psi_s\rangle$  et  $|\psi_A\rangle$  et qu'il vaut

$$\langle \psi_s | V_{rot} | \psi_A \rangle = \hbar k v \quad (3.25)$$



On note en particulier que l'état  $|g_0\rangle$  n'est couplé à aucun autre état par  $V_{rot}$ , ce qui montre l'intérêt d'utiliser les états  $|\psi_A\rangle$  et  $|g_0\rangle$  plutôt que les états propres  $|\pm 1\rangle_y$  de  $\vec{E}_y \cdot \vec{J} = J_y$ , de valeurs propres  $+\hbar$  et  $-\hbar$ .

- A la limite  $\hbar k v \ll \hbar |\delta'|$ , qui est la condition de validité de (3.24), le couplage (3.25) entre  $|\psi_A\rangle$  et  $|\psi_s\rangle$  peut être considéré comme une perturbation vis à vis de l'écart énergétique entre  $|\psi_A\rangle$  et  $|\psi_s\rangle$  qui vaut d'après (2.25.a) (voir aussi Figures 5 et 7)

$$E_A - E_s = \hbar \left( \frac{\delta'}{2} - 2 \frac{\delta'}{3} \right) = -\frac{\hbar \delta'}{6} \quad (3.26)$$

A l'ordre le plus bas en  $kv/\delta'$ , l'effet essentiel de  $V_{rot}$  est de contaminer la fonction d'onde de  $|\psi_s\rangle$  par celle de  $|\psi_A\rangle$  et vice versa. On obtient ainsi pour les états perturbés  $|\bar{\psi}_s\rangle$  et  $|\bar{\psi}_A\rangle$  associés à  $|\psi_s\rangle$  et  $|\psi_A\rangle$

$$\begin{aligned} |\bar{\psi}_s\rangle &= |\psi_s\rangle + \frac{\hbar k v}{E_s - E_A} |\psi_A\rangle = |\psi_s\rangle + \frac{6 k v}{\delta'} |\psi_A\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \left(1 + \frac{6 k v}{\delta'}\right) |g_1\rangle + \left(1 - \frac{6 k v}{\delta'}\right) |g_{-1}\rangle \right] \end{aligned} \quad (3.27.a)$$

$$\begin{aligned} |\bar{\psi}_A\rangle &= |\psi_A\rangle + \frac{\hbar k v}{E_A - E_s} |\psi_s\rangle = |\psi_A\rangle - \frac{6 k v}{\delta'} |\psi_s\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \left(1 - \frac{6 k v}{\delta'}\right) |g_1\rangle + \left(1 + \frac{6 k v}{\delta'}\right) |g_{-1}\rangle \right] \end{aligned} \quad (3.27.b)$$

Les états  $|\psi_s\rangle$  et  $|\psi_A\rangle$  contiennent chacun des proportions à poids égal (1/2) des états  $|g_1\rangle$  et  $|g_{-1}\rangle$  (voir Equations (2.24) avec  $z=0$ ). Il n'en est plus de même pour  $|\bar{\psi}_s\rangle$  et  $|\bar{\psi}_A\rangle$ . Comme  $\delta' < 0$ , il ressort de (3.27.a) que le poids de  $|g_{-1}\rangle$  est plus grand dans  $|\bar{\psi}_s\rangle$  que celui de  $|g_1\rangle$ , l'inverse étant vrai pour  $|\bar{\psi}_A\rangle$ . La contamination d'une combinaison linéaire symétrique de  $|g_1\rangle$  et  $|g_{-1}\rangle$  par une combinaison linéaire antisymétrique donne un nouvel état dans lequel les poids de  $|g_1\rangle$  et  $|g_{-1}\rangle$  sont inégaux.

Comme les populations de  $|\bar{\psi}_s\rangle$  et  $|\bar{\psi}_A\rangle$  sont inégales, on comprend ainsi comment le couplage rotationnel  $V_{rot}$  peut faire apparaître une différence de populations  $\pi_1 - \pi_{-1}$  entre  $|g_1\rangle$  et  $|g_{-1}\rangle$  et pourquoi cette différence de populations varie en  $kv/\delta'$ ,

et non en  $k\nu/\Gamma$  (comme pour le refroidissement Doppler).

De manière plus quantitative, on peut montrer (voir Ref. 1 p. III.10) que les populations de  $|\bar{\Psi}_S\rangle$  et  $|\bar{\Psi}_A\rangle$  sont les mêmes (à l'ordre 1 en  $k\nu/\delta'$ ) que celles de  $|\Psi_S\rangle$  et  $|\Psi_A\rangle$ , c-à-d 9/17 et 4/17. En utilisant (3.27), on retrouve exactement l'expression (3.24.a) de  $\Pi_1 - \Pi_{-1}$ , et par suite celle (3.24.b) du coefficient de friction.

- Le raisonnement précédent permet également de comprendre une autre propriété importante du coefficient de friction  $\alpha$  donné en (3.24.b), à savoir son indépendance de l'intensité laser  $I_L$ . Le taux d'absorption  $\Gamma'$  à partir des sous-niveaux fondamentaux est proportionnel à  $I_L$  et tend vers 0 quand  $I_L \rightarrow 0$ . Mais la différence entre les pressions de radiation exercées par les ondes  $\sigma^+$  et  $\sigma^-$  est proportionnelle, non seulement à  $\Gamma'$ , mais aussi à  $\Pi_1 - \Pi_{-1}$  (car le niveau  $g_1$  absorbe plus l'onde  $\sigma^+$  que l'onde  $\sigma^-$ , l'inverse étant vrai pour le niveau  $g_{-1}$ . Voir Fig. (3.a) et Eqs. (3.14)). A  $k\nu$  fixé, quand  $I_L \rightarrow 0$ , l'effet de la contamination induite par  $\nu_{rot}$  croît comme  $1/I_L$  car l'écart ( $\nu$  à  $\delta'$ ) entre les 2 niveaux couplés par  $\nu_{rot}$  décroît comme  $I_L$ . Quand  $I_L$  tend vers zéro, la décroissance de  $\Gamma'$  est donc compensée par la croissance de la contamination induite par  $\nu_{rot}$ , qui varie en  $1/I_L$ .

- Considérons enfin la plage de vitesse  $v_c$  à l'intérieur de laquelle la force totale  $\vec{F}$  reste linéaire en  $v$ . La discussion précédente montre que la zone linéaire de  $\vec{F}$  est déterminée par  $k\nu \ll |\delta'|$ ; on en déduit que  $v_c$  est donné par

$$k\nu_c \approx |\delta'| \quad (3.28)$$

Un tel résultat est confirmé par une résolution numérique des équations (3.11.a) (ou des équations de Bloch optiques complètes) montrant que les variations de  $\vec{F}$  avec  $v$  sont celles d'une courbe de dispersion ayant ses maxima pour  $v \approx v_c$  où  $v_c$  est donné par (3.28) [Voir références (1) et (4)]

### C. Ordre de grandeur de la température d'équilibre T

- L'ordre de grandeur de T est donné par

$$k_B T \approx \frac{D}{\alpha} \quad (3.29)$$

où D est le coefficient de diffusion de l'impulsion atomique et où  $\alpha$  est le coefficient de friction donné en (3.24.b)

- Comme les déplacements lumineux des sous-niveaux de  $g$  sont indépendants de  $z$ , D ne contient pas de contribution provenant des fluctuations de la force associée aux gradients spatiaux de ces déplacements (quand l'atome est pompé optiquement d'un sous-niveau à l'autre, le gradient du déplacement lumineux change en général, lorsqu'il n'est pas nul pour tous les sous-niveaux



comme c'est le cas ici). Les seules contributions non nulles à  $D$  proviennent donc des fluctuations des échanges d'impulsion provenant, d'une part des fluctuations de la direction dans laquelle les photons spontanés sont émis, d'autre part des fluctuations du nombre de photons absorbés par unité de temps.

Pour obtenir un ordre de grandeur de  $D$ , on peut considérer une marche au hasard dans l'espace des impulsions, dont le pas élémentaire serait  $\hbar k$ , l'intervalle entre 2 pas étant de l'ordre du temps de pompage optique  $\tau_p = 1/\Gamma'$ . On obtient ainsi

$$D \sim \hbar^2 k^2 \Gamma' \quad (3.30)$$

- En utilisant, (3.29), (3.24.b) et (3.30), on obtient alors

$$k_B T \sim \frac{\hbar^2 k^2 \Gamma'}{-\hbar k^2 \Gamma' / \delta'} = -\hbar \delta' \approx \frac{\hbar \Omega_c^2}{|\delta|} \quad (3.31)$$

On retrouve le même résultat que pour le refroidissement Sisyphus, à savoir que  $k_B T$  est de l'ordre du déplacement lumineux  $-\hbar \delta'$  (rappelons que  $\delta$  et  $\delta'$  sont négatifs).

### Remarques

(i) Le coefficient de friction (3.24.b) est  $\Gamma^2 / \delta^2$  fois plus que celui trouvé pour l'effet Sisyphus (voir équation (7.26) du cours 90-91). Si on trouve le même résultat pour  $T$  dans les 2 cas, c'est que le coefficient de diffusion  $D$  est également  $\Gamma^2 / \delta^2$  fois plus petit que celui trouvé pour l'effet Sisyphus (voir équation (7.23) du cours 90-91) et qui provenait essentiellement des fluctuations de la force associée aux gradients spatiaux des déplacements lumineux.

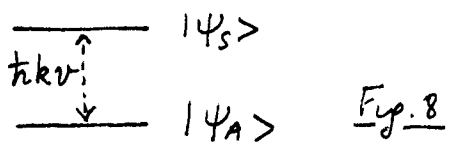
(ii) Le calcul présenté plus haut de  $D$  est très schématisé. Il ne tient pas compte des corrélations qui existent entre des directions de propagation des photons successivement absorbés par l'atome. En effet, à cause du pompage optique, un atome qui a absorbé un photon  $\sigma^+$ , a une grande chance de se trouver dans le sous-niveau  $|g_1\rangle$ . A partir de  $|g_1\rangle$ , la dissymétrie entre les coefficients de Clebsch-Gordan partant de  $g_1$  (voir Fig. 32), fait qu'il a 6 fois plus de chance d'absorber un 2<sup>ème</sup> photon  $\sigma^+$  (se propageant dans le même sens que le 1<sup>er</sup>) qu'un photon  $\sigma^-$  (se propageant dans le sens opposé). Les pas de la marche au hasard dans l'espace des impulsions peuvent donc être plus grands que  $\hbar k$ . Encore faut-il qu'entre deux absorptions successives de photons, la "précession" de l'atome dans l'état fondamental due aux déplacements lumineux dont la symétrie est déterminée par  $\vec{E}_y$ , n'ait pas redistribué la population inférieure entre  $|g_{-1}\rangle$ ,  $|g_0\rangle$  et  $|g_{+1}\rangle$ . Pour une étude plus détaillée, voir références 5, 8, 4.

⑦ Piégeage cohérent de population sélectif en vitesse

pour une transition  $J_g = 1 \leftrightarrow J_e = 1$

a - Un autre effet important du couplage entre  $|\psi_s\rangle$  et  $|\psi_A\rangle$  dû à  $v_{rot}$ .

- Revenons à la transition  $1 \leftrightarrow 1$ . Comme le niveau  $|g_0\rangle$  n'est pas couplé à  $|\psi_s\rangle$  et  $|\psi_A\rangle$  par  $v_{rot}$ , et qu'il n'est pas alimenté par émission spontanée à partir de  $|e_0\rangle$  (qui est le seul sous-niveau de  $e$  pouvant être atteint à partir de  $|g_1\rangle$  et  $|g_{-1}\rangle$ , donc à partir de  $|\psi_s\rangle$  et  $|\psi_A\rangle$ ), on peut ignorer  $|g_0\rangle$  et se limiter à  $|\psi_s\rangle$  et  $|\psi_A\rangle$



$E_s - E_A = - \frac{\hbar \delta'}{2}$  (3.32)

Nous avons vu plus haut (§ 4.C) que, pour  $v = 0$ , toute la population atomique est concentrée dans l'état  $|\psi_s\rangle$  à partir duquel aucun photon ne peut être absorbé.

- Comme pour une transition  $1 \leftrightarrow 2$ , un premier effet de la contamination de  $|\psi_s\rangle$  par  $|\psi_A\rangle$  (et réciproquement), induite par le couplage  $\hbar k v$  dû à  $v_{rot}$  est de faire apparaître une différence de population entre  $|g_1\rangle$  et  $|g_{-1}\rangle$ . Mais cette différence de population ne donne pas naissance à une force globale, car la force dissipative correspondante est exactement compensée par la force réactive pour une transition  $1 \leftrightarrow 1$  (voir (3.16)).

- Un autre effet important de cette contamination est de transférer à l'état  $|\bar{\psi}_s\rangle$ , issu de  $|\psi_s\rangle$ , une partie de l'instabilité radiative de  $|\psi_A\rangle$ . En effet, un atome dans  $|\psi_A\rangle$  peut absorber de la lumière, puisque  $\Gamma'_A = \Gamma' \lambda_A = \frac{\Gamma'}{2}$  est non nul. Comme  $|\bar{\psi}_s\rangle$  contient une proportion de  $|\psi_A\rangle$ , de l'ordre de  $k v / \delta'$  (pour  $k v \ll |\delta'|$ ), un atome dans l'état  $|\bar{\psi}_s\rangle$  peut absorber de la lumière avec un taux de l'ordre de  $\Gamma' k^2 v^2 / \delta'^2$ .

En d'autres termes, un atome de vitesse nulle se retrouve très vite piégé dans  $|\bar{\psi}_s\rangle$  où il n'absorbe plus de lumière. Dès que cet atome bouge à la vitesse  $v$ , il peut s'échapper de  $|\bar{\psi}_s\rangle$  et la fluorescence réapparaît. Il y a donc un piégeage cohérent de population, sélectif en vitesse, la largeur de la plage en vitesses, autour de  $v = 0$ , dans laquelle se produit le phénomène étant déterminé par

$k v_e \approx -\delta'$  (3.33)

b - Calcul du temps de fluorescence en fonction de  $v$

- Comme seul le sous-niveau  $e_0$  peut être excité, le taux de fluorescence  $R_F$  vaut  $R_F = \Gamma \sigma_{e_0 e_0}$  (3.34)

- Pour calculer  $\sigma_{e_0 e_0}$ , nous utilisons l'équation

$$\sigma_{ee} = \frac{\Gamma'}{\Gamma} (\vec{E} \cdot \hat{d}^+) \sigma_{gg} (\vec{E}^* \cdot \hat{d}^-) \tag{3.35}$$

résultant de l'élimination adiabatique de l'état excité (voir équation (4.15) du cours 90-91). On obtient alors, à partir de (2.5) et des coefficients de Clebsch-Gordan de la figure 3b

$$R_F = \Gamma \sigma_{e_0 e_0} = \frac{\Gamma'}{4} (\Pi_1 + \Pi_{-1} - 2C_r) = \frac{\Gamma'}{4} (1 - 2C_r) \tag{3.36}$$

- En régime stationnaire, et compte tenu de (3.15), les 2 dernières équations (3.11.b) se réduisent à 2 équations linéaires reliant  $C_r$  et  $C_i$ . On peut les résoudre analytiquement et obtenir

$$C_r = \frac{1}{2} \frac{4\delta'^2 + \Gamma'^2}{4\delta'^2 + \Gamma'^2 + 64k^2v^2} \tag{3.37}$$

Le report de (3.37) dans (3.36) donne finalement

$$R_F(v) = \Gamma' \frac{16k^2v^2}{4\delta'^2 + \Gamma'^2 + 64k^2v^2} \tag{3.38}$$

On retrouve bien que  $R_F(v)$ , nul pour  $v=0$ , croît quand  $v$  croît pour tendre vers une asymptote  $\Gamma'/4$  quand  $v$  devient grand devant la largeur  $\Delta v$  du creux Lorentzien de la figure 8 donné par

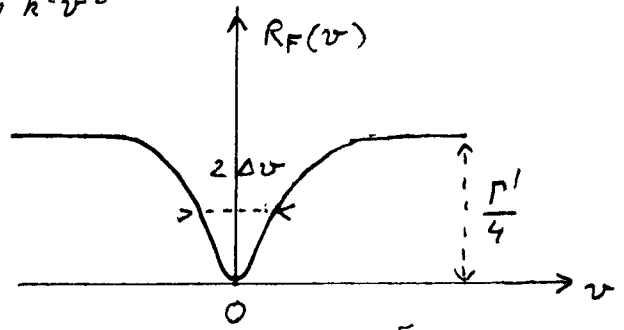


Fig. 9

$$k\Delta v = \frac{\sqrt{4\delta'^2 + \Gamma'^2}}{8} \tag{3.39}$$

Le résultat (3.39) confirme bien le résultat qualitatif (3.33) obtenu à la limite  $|\delta'| \gg \Gamma'$  et le généralise à des valeurs arbitraires de  $\Gamma'/|\delta'|$ .

- Pour des valeurs de  $v$  beaucoup plus grandes que  $\Delta v$ , telles que  $kv$  devient de l'ordre de  $\Gamma$ , on verrait apparaître des variations de  $R_F(v)$  dues à l'effet Doppler sur les raies optiques, effet dont nous n'avons pas tenu compte ici

Références (suite de la liste de la page II.10)

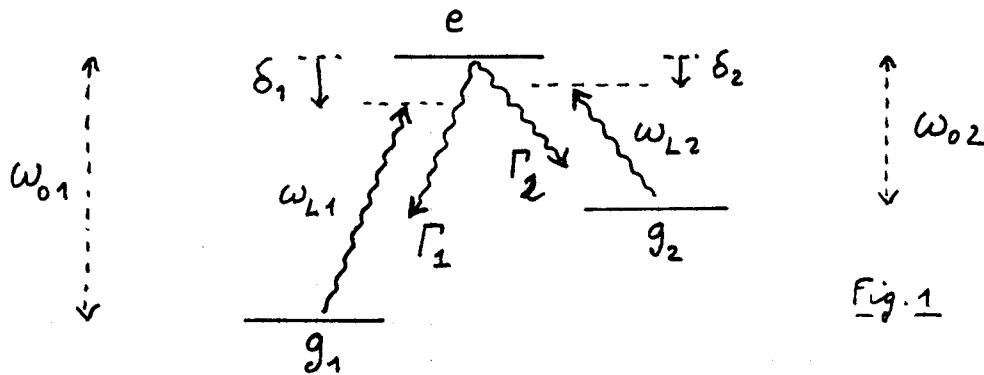
(4) P.J. Ungar, D.S. Weiss, E. Riis and S. Chu  
J.O.S.A. B6, 2058 (1989)  
(5) Y. Castin and K. Mølmer, J. Phys. B23, 4101 (1990)

Buts de ce cours.

Etudier une configuration  $\Lambda$  plus générale que celle apparaissant sur la transition  $J_g=1 \leftrightarrow J_e=1$  excitée en  $\sigma^+ - \sigma^-$ .  
Montrer que

- La force moyenne peut être non nulle, contrairement à ce qui se passe pour  $J_g=1 \leftrightarrow J_e=1$  et  $\sigma^+ - \sigma^-$ .
- Le phénomène de piégeage cohérent de population subsiste et donne naissance à des "résonances noires" étroites sur le temps de fluorescence.
- de nouveaux mécanismes de refroidissement subs-Doppler peuvent apparaître.

① Le modèle étudié



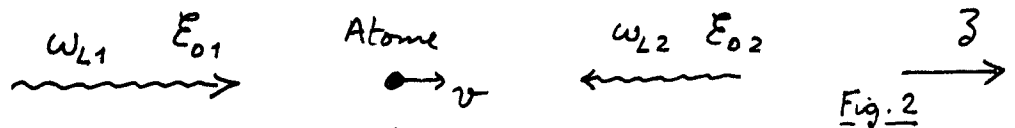
Niveaux atomiques (Fig. 1)

- Atome à 3 niveaux  $e, g_1, g_2$
- Fréquences atomiques  $e \leftrightarrow g_1 : \omega_{01}$ ,  $e \leftrightarrow g_2 : \omega_{02}$   
Les fréquences  $\omega_{01}$  et  $\omega_{02}$  peuvent être très différentes  
(Exemple de  $Ba^+$  :  $\lambda_1 = 493 \text{ nm}$   $\lambda_2 = 650 \text{ nm}$ )
- Taux d'émission spontanée  $e \rightarrow g_1 : \Gamma_1$   
" " " "  $e \rightarrow g_2 : \Gamma_2$

$$\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 \quad (4.1)$$

$\Gamma$  : largeur naturelle de  $e$  - Pas d'émission spontanée  $g_2 \rightarrow g_1$

Lasers (Fig. 2)



- Fréquences  $\omega_{L1}$  et  $\omega_{L2}$  proches de  $\omega_{01}$  et  $\omega_{02}$   
On néglige l'excitation (très non résonnante) de  $g_2 \leftrightarrow e_2$  par  $\omega_{L1}$  et  $g_1 \leftrightarrow e_1$  par  $\omega_{L2}$

Désaccords  $\delta_1 = \omega_{L1} - \omega_{01}$   $\delta_2 = \omega_{L2} - \omega_{02}$  (4.2)

Condition de résonance Raman

$$\delta_1 = \delta_2 \rightarrow \omega_{L1} - \omega_{L2} = \omega_{01} - \omega_{02} \quad (4.3)$$

Couplages

Fréquence de Rabi	$\Omega_1$	sur la transition	$g_1 \leftrightarrow e$
" " "	$\Omega_2$	" " "	$g_2 \leftrightarrow e$

② Les équations de base

a. Hamiltonien

- Hamiltonien atomique

Traitement semi-classique de la position

$$z = vt \tag{4.4}$$

On prend pour énergie zéro, celle de l'état e

$$H_A = -\hbar\omega_{01} |g_1\rangle\langle g_1| - \hbar\omega_{02} |g_2\rangle\langle g_2| \tag{4.5}$$

- Couplage atome-lasers

$$V_{AL} = \frac{\hbar\Omega_1}{2} |e\rangle\langle g_1| e^{ik_1 z} e^{-i\omega_{L1} t} + h.c. + \frac{\hbar\Omega_2}{2} |e\rangle\langle g_2| e^{-ik_2 z} e^{-i\omega_{L2} t} + h.c. \tag{4.6}$$

Les exponentielles en z viennent de la propagation spatiale qui se fait pour les 2 ondes dans des directions opposées, avec des vecteurs d'onde  $k_1 = \omega_{L1}/c$  et  $-k_2 = -\omega_{L2}/c$ . Si l'on remplace z par vt dans (4.6), on voit apparaître les fréquences "vues" par l'atome dans son référentiel au repos et décalées de  $\omega_{L1}$  et  $\omega_{L2}$  par effet Doppler :  $\omega_{L1} - k_1 v$  et  $\omega_{L2} + k_2 v$ .

b. Equations de Bloch optiques

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [H_A + V_{AL}, \sigma] + \left(\frac{d\sigma}{dt}\right)_{em.spontanée} \tag{4.7}$$

Forme du terme d'émission spontanée

$$\begin{aligned} (\dot{\sigma}_{ee})_{em.sp.} &= -\Gamma \sigma_{ee} \\ (\dot{\sigma}_{eg_1})_{em.sp.} &= -\frac{\Gamma}{2} \sigma_{eg_1} \\ (\dot{\sigma}_{eg_2})_{em.sp.} &= -\frac{\Gamma}{2} \sigma_{eg_2} \\ (\dot{\sigma}_{g_1g_1})_{em.sp.} &= \Gamma_1 \sigma_{ee} \\ (\dot{\sigma}_{g_2g_2})_{em.sp.} &= \Gamma_2 \sigma_{ee} \\ (\dot{\sigma}_{g_1g_2})_{em.sp.} &= 0 \end{aligned} \tag{4.8}$$

La dernière équation est justifiée, soit par des arguments de symétrie ( $g_1$  et  $g_2$  ont des nombres quantiques  $m$  différents, de sorte que  $\sigma_{g_1g_2}$  ne se transforme pas par rotation comme  $\sigma_{ee}$ ), soit par des arguments d'approximation séculaire (même si  $g_1$  et  $g_2$  avaient la même symétrie, le couplage par émission spontanée entre  $\sigma_{ee}$  et  $\sigma_{g_1g_2}$  est négligeable car la différence entre les fréquences propres de  $\sigma_{ee}$  et  $\sigma_{g_1g_2}$  est très grande devant  $\Gamma$ ).

c. Changement de fonctions - Transformation unitaire

- Les équations déduites de (4.7), ont des coefficients dépendant des <sup>temps</sup>

à cause des termes en  $e^{-i\omega_{L1}t}$ ,  $e^{-i\omega_{L2}t}$ ,  $e^{ik_1z}$ ,  $e^{-ik_2z}$  (avec  $z=vt$ ) de (4.6).

- On peut vérifier alors qu'il est possible d'obtenir un nouveau système d'équations avec des coefficients indépendants du temps moyennant le changement de fonctions

$$\begin{cases} \tilde{\sigma}_{1e} = \sigma_{1e} e^{ik_1z} e^{-i\omega_{L1}t} = \sigma_{1e} e^{-i(\omega_{L1}-k_1v)t} \\ \tilde{\sigma}_{2e} = \sigma_{2e} e^{-ik_2z} e^{-i\omega_{L2}t} = \sigma_{2e} e^{-i(\omega_{L2}+k_2v)t} \\ \tilde{\sigma}_{12} = \sigma_{12} e^{i(k_1+k_2)z} e^{-i(\omega_{L1}-\omega_{L2})t} = \sigma_{12} e^{-i[(\omega_{L1}-k_1v)-(\omega_{L2}+k_2v)]t} \end{cases} \quad (4.9)$$

- La transformation (4.9) peut encore être considérée comme résultant d'une transformation unitaire  $T(t)$  appliquée à  $\sigma$

$$\tilde{\sigma} = T(t) \sigma T^\dagger(t) \quad (4.10)$$

$$T(t) = e^{-iS(t)} \quad \text{avec } S = S^\dagger \quad (4.11)$$

$$\begin{aligned} S(t) &= (\omega_{L1}t - k_1z) |g_1\rangle\langle g_1| + (\omega_{L2}t + k_2z) |g_2\rangle\langle g_2| \\ &= (\omega_{L1} - k_1v)t |g_1\rangle\langle g_1| + (\omega_{L2} + k_2v)t |g_2\rangle\langle g_2| \end{aligned} \quad (4.12)$$

Une telle opération généralisée en fait le passage dans le référentiel en mouvement et tournant introduit dans le cours III.

- Nouvel hamiltonien. Même calcul que pour (3.8)

$$\tilde{H} = T(t) [H_A + V_{AL}] T^\dagger(t) + i\hbar \left[ \frac{dT(t)}{dt} \right] T^\dagger(t) \quad (4.13)$$

$$\tilde{V}_{AL} = T(t) V_{AL} T^\dagger(t) = \frac{\hbar\Omega_1}{2} |e\rangle\langle g_1| + \frac{\hbar\Omega_2}{2} |e\rangle\langle g_2| + h.c. \quad (4.14)$$

On vérifie bien que  $T(t)$  fait disparaître toute dépendance temporelle dans  $T V_{AL} T^\dagger$

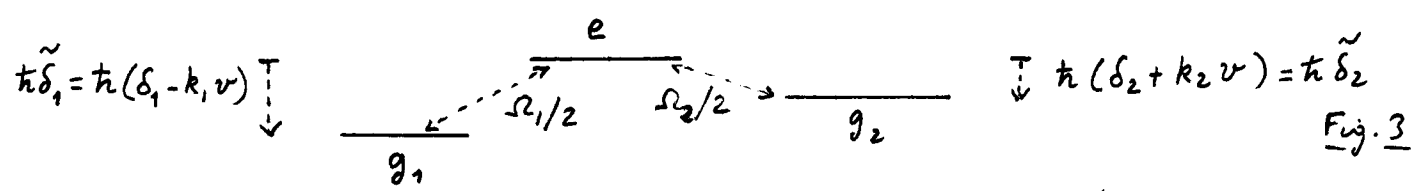
$$T(t) H_A T^\dagger(t) = H_A \quad (4.15)$$

$$i\hbar \left[ \frac{d}{dt} T(t) \right] T^\dagger(t) = \hbar \frac{dS}{dt} = \hbar(\omega_{L1} - k_1v) |g_1\rangle\langle g_1| + \hbar(\omega_{L2} + k_2v) |g_2\rangle\langle g_2| \quad (4.16)$$

En regroupant  $H_A$  et  $i\hbar \frac{dT}{dt} T^\dagger$ , on fait apparaître un nouvel hamiltonien atomique

$$\begin{aligned} \tilde{H}_A &= H_A + i\hbar \frac{dT}{dt} T^\dagger = \hbar(\omega_{L1} - \omega_{01} - k_1v) |g_1\rangle\langle g_1| + \hbar(\omega_{L2} - \omega_{02} + k_2v) |g_2\rangle\langle g_2| \\ &= \hbar(\delta_1 - k_1v) |g_1\rangle\langle g_1| + \hbar(\delta_2 + k_2v) |g_2\rangle\langle g_2| \end{aligned} \quad (4.17)$$

dont les niveaux sont représentés sur la figure 3.



On a maintenant 3 niveaux très rapprochés (car  $\delta_1, \delta_2, k_1v, k_2v$  sont très petits devant  $\omega_{01}$  et  $\omega_{02}$ ), avec des couplages  $\Omega_{1/2}$  entre  $e$  et  $g_1$ ,  $\Omega_{2/2}$  entre  $e$  et  $g_2$ . On posera

$$\begin{aligned} \tilde{\delta}_1 &= \delta_1 - k_1v \\ \tilde{\delta}_2 &= \delta_2 + k_2v \end{aligned} \quad (4.18)$$

Nouvelles équations de Bloch optiques

Après (4.9), les équations (4.7) deviennent

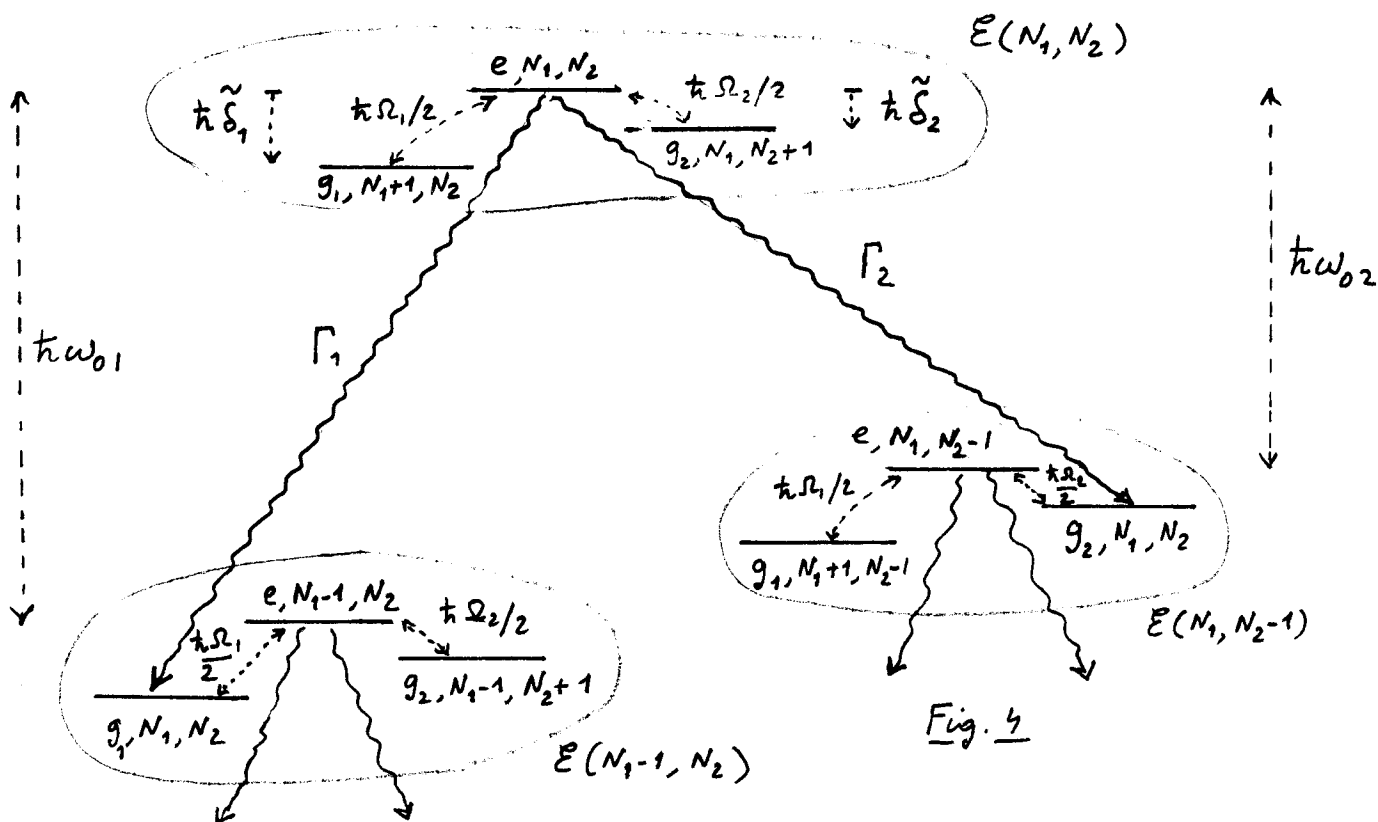
$$\left\{ \begin{aligned} \dot{\tilde{\sigma}}_{ee} &= -i\frac{\Omega_1}{2}(\tilde{\sigma}_{1e} - \tilde{\sigma}_{e1}) - i\frac{\Omega_2}{2}(\tilde{\sigma}_{2e} - \tilde{\sigma}_{e2}) - \Gamma \tilde{\sigma}_{ee} \\ \dot{\tilde{\sigma}}_{11} &= i\frac{\Omega_1}{2}(\tilde{\sigma}_{1e} - \tilde{\sigma}_{e1}) + \Gamma_1 \tilde{\sigma}_{ee} \\ \dot{\tilde{\sigma}}_{22} &= i\frac{\Omega_2}{2}(\tilde{\sigma}_{2e} - \tilde{\sigma}_{e2}) + \Gamma_2 \tilde{\sigma}_{ee} \\ \dot{\tilde{\sigma}}_{1e} &= -(i\tilde{\delta}_1 + \frac{\Gamma}{2})\tilde{\sigma}_{1e} - i\frac{\Omega_1}{2}(\tilde{\sigma}_{ee} - \tilde{\sigma}_{11}) + i\frac{\Omega_2}{2}\tilde{\sigma}_{12} \\ \dot{\tilde{\sigma}}_{2e} &= -(i\tilde{\delta}_2 + \frac{\Gamma}{2})\tilde{\sigma}_{2e} - i\frac{\Omega_2}{2}(\tilde{\sigma}_{ee} - \tilde{\sigma}_{22}) + i\frac{\Omega_1}{2}\tilde{\sigma}_{21} \\ \dot{\tilde{\sigma}}_{12} &= i(\tilde{\delta}_2 - \tilde{\delta}_1)\tilde{\sigma}_{12} - i\frac{\Omega_1}{2}\tilde{\sigma}_{e2} + i\frac{\Omega_2}{2}\tilde{\sigma}_{1e} \end{aligned} \right. \quad (4.19)$$

Nous avons utilisé les notations plus compactes  $\tilde{\sigma}_{eg_i} = \tilde{\sigma}_{ei}$  ( $i=1,2$ )  
 $\tilde{\sigma}_{g_i g_j} = \tilde{\sigma}_{ij}$ . Notons également que les éléments diagonaux de  $\sigma$  restent invariants par T :  $\tilde{\sigma}_{11} = \sigma_{11}$   $\tilde{\sigma}_{22} = \sigma_{22}$   $\tilde{\sigma}_{ee} = \sigma_{ee}$

d. Le point de vue de l'atome habillé

- Les champs laser sont quantifiés. Les états du système global  $A+L_1+L_2$  "atome + laser 1 + laser 2" sont repérés par 3 nombres quantiques, 1 pour l'atome ( $e, g_1, g_2$ ), 1 pour le nombre  $N_1$  de photons 1, 1 pour le nombre  $N_2$  de photons 2. On se place dans le référentiel au repos de l'atome de sorte que les fréquences laser sont  $\omega_{L1} - k_1 v$  et  $\omega_{L2} + k_2 v$

- Les niveaux non-perturbés du système  $A+L_1+L_2$  se groupent en multiplicités  $E(N_1, N_2)$  de 3 niveaux, bien séparés les uns des autres, la disposition des niveaux à l'intérieur de chaque multiplicité étant la même qu'en la figure 3. La figure 4 représente 3 de ces multiplicités.



- A l'intérieur de  $E(N_1, N_2)$ , le couplage  $\hbar\Omega_1/2$  entre  $|g_1, N_1+1, N_2\rangle$  et  $|e, N_1, N_2\rangle$  exprime le fait que l'atome dans l'état  $g_1$  en présence de  $N_1+1$  photons  $L_1$  peut absorber un de ces photons et passer dans  $e$ , le système global passant dans  $|e, N_1, N_2\rangle$ . Idem pour le couplage  $\hbar\Omega_2/2$  entre  $|g_2, N_1, N_2+1\rangle$  et  $|e, N_1, N_2\rangle$ .

Le système ne peut quitter la multiplicité  $E(N_1, N_2)$  que par émission spontanée à partir de  $|e, N_1, N_2\rangle$ . Il peut alors aller soit vers  $|g_1, N_1, N_2\rangle$  (qui appartient à  $E(N_1-1, N_2)$ ) avec un taux  $\Gamma_1$ , soit vers  $|g_2, N_1, N_2\rangle$  (qui appartient à  $E(N_1, N_2-1)$ ) avec un taux  $\Gamma_2$ . (Fleches ondulées de la figure 4). Noter que  $N_1$  et  $N_2$  ne changent pas au cours d'un processus d'émission spontanée. Seul l'état atomique change, passant de  $e$  à  $g_1$  ou de  $e$  à  $g_2$ .

- Le fait qu'on retrouve la même structure dans la figure 3 et dans chaque multiplicité de la figure 4 montre que la transformation unitaire visant à éliminer toute dépendance explicite du temps dans l'hamiltonien revient en fait à quantifier les champs lasers. Le point de vue de l'atome habillé est cependant plus fructueux car il associe à une suite de processus d'émission spontanée l'image d'une "cascade radiative de l'atome habillé" descendant le long de son diagramme énergétique.

③ La force moyenne

a) Expression de la force moyenne  $\vec{F}$

- Partons de l'expression semiclassique

$$\vec{F} = - \langle \vec{\nabla} V_{AL}(z) \rangle \tag{4.20}$$

En utilisant (4.6), et le fait que  $\langle |e\rangle \langle g_1| \rangle = \sigma_{1e} \dots$ , on obtient

$$\vec{F} = \left[ -i\hbar k_1 \frac{\Omega_1}{2} \sigma_{1e} e^{ik_1 z} e^{-i\omega_{21} t} + i\hbar k_2 \frac{\Omega_2}{2} \sigma_{2e} e^{-ik_2 z} e^{-i\omega_{22} t} + c.c \right] \vec{E}_3 \tag{4.21}$$

c'est à dire encore, compte tenu de (4.9)

$$\vec{F} = \left[ -i\hbar k_1 \frac{\Omega_1}{2} (\tilde{\sigma}_{1e} - \tilde{\sigma}_{e1}) + i\hbar k_2 \frac{\Omega_2}{2} (\tilde{\sigma}_{2e} - \tilde{\sigma}_{e2}) \right] \vec{E}_3 \tag{4.22}$$

- On peut alors utiliser les 2<sup>ème</sup> et 3<sup>ème</sup> équations (4.19) pour réexprimer  $\tilde{\sigma}_{1e} - \tilde{\sigma}_{e1}$  et  $\tilde{\sigma}_{2e} - \tilde{\sigma}_{e2}$ . On obtient ainsi

$$\vec{F} = \left\{ -\hbar k_1 \left[ \dot{\tilde{\sigma}}_{11} - \Gamma_1 \tilde{\sigma}_{ee} \right] + \hbar k_2 \left[ \dot{\tilde{\sigma}}_{22} - \Gamma_2 \tilde{\sigma}_{ee} \right] \right\} \vec{E}_3 \tag{4.23}$$

En régime stationnaire,  $\dot{\tilde{\sigma}}_{11} = \dot{\tilde{\sigma}}_{22} = 0$ , et on a finalement

$$\boxed{\vec{F} = (\hbar k_1 \Gamma_1 - \hbar k_2 \Gamma_2) \tilde{\sigma}_{ee} \vec{E}_3} \tag{4.24}$$

- On aurait pu bien sûr, comme dans les cas I, II, III précédents, éliminer adiabatiquement les cohérences optiques qui apparaissent dans l'expression (4.22) de  $\vec{F}$ , pour les réexprimer au moyen de (4.19) en fonction de  $\tilde{\sigma}_{11}$ ,  $\tilde{\sigma}_{22}$  et  $\tilde{\sigma}_{12}$ . Une telle procédure, valable seulement à faible intensité et faible vitesse, permettant ensuite de séparer dans  $\vec{F}$  une partie réactive et une partie dissipative. La simplicité de la transition  $\Lambda$  étudiée ici permet d'obtenir plus rapidement une expression simple (4.24), valable de plus à toute intensité et toute vitesse.



b) Interprétation physique

- D'après (4.24),  $\mathcal{F}$  apparait comme égale à  $\hbar k_1$  fois  $(dN_1/dt)_{sp}$ , où  $(dN_1/dt)_{sp} = \Gamma_1 \sigma_{ee}$  est le nombre de photons émis spontanément par seconde sur la transition  $e \rightarrow g_1$ , moins  $\hbar k_2$  fois  $(dN_2/dt)_{sp}$  où  $(dN_2/dt)_{sp} = \Gamma_2 \sigma_{ee}$  est le nombre de photons émis spontanément par seconde sur la transition  $e \rightarrow g_2$ .

- En fait, comme les photons émis spontanément ont en moyenne une impulsion nulle (puisque les probabilités d'émission spontanée dans 2 directions opposées sont égales), on s'attendrait plutôt à avoir

$$\mathcal{F} = \hbar k_1 (dN_1/dt)_{abs} - \hbar k_2 (dN_2/dt)_{abs} \tag{4.25}$$

où  $(dN_1/dt)_{abs}$  et  $(dN_2/dt)_{abs}$  sont les nombres de photons disparaissant par seconde des ondes laser  $\omega_{L1}$  et  $\omega_{L2}$  par absorption. La démonstration de (4.25) résulte de la conservation de l'impulsion globale.

- Montrons que

$$(dN_1/dt)_{sp} = (dN_1/dt)_{abs} \quad (dN_2/dt)_{sp} = (dN_2/dt)_{abs} \tag{4.26}$$

Pour cela, il suffit de noter que, tout de suite après une émission spontanée sur  $e \rightarrow g_1$ , l'atome se trouve dans  $g_1$ , le système global étant par exemple dans l'état  $|g_1, N_1, N_2\rangle$  (voir Fig. 4) la prochaine émission spontanée ne pourra alors se faire qu'à partir de l'état  $|e, N_1-1, N_2\rangle$  qui appartient à la même multiplicité que  $|g_2, N_1, N_2\rangle$ , et nécessitera donc forcément l'absorption d'un photon  $\omega_{L1}$ . Concrètement, l'atome ne peut quitter l'état  $g_1$  que par absorption d'un photon  $\omega_{L1}$ . En d'autres termes, toute émission spontanée sur  $e \rightarrow g_1$  est nécessairement suivie de l'absorption d'un photon  $\omega_{L1}$ , d'où la 1<sup>ère</sup> égalité (4.26). Même démonstration pour la 2<sup>ème</sup> égalité. Notons qu'une émission spontanée sur  $e \rightarrow g_1$  n'est pas nécessairement précédée par l'absorption d'un photon  $\omega_{L1}$ . L'atome peut en effet "monter" dans  $e$ , soit à partir de  $g_1$  par absorption d'un photon  $\omega_{L1}$ , soit à partir de  $g_2$  par absorption d'un photon  $\omega_{L2}$ . La corrélation sur laquelle nous nous appuyons pour démontrer (4.26), et par suite l'identité entre (4.24) et (4.25) concerne donc un processus d'émission spontanée et le processus d'absorption suivant.

- Notons enfin que le raisonnement précédent permet de comprendre simplement pourquoi la force moyenne totale s'annule sur une transition  $J_g=1 \leftrightarrow J_e=1$  en  $\sigma^+ - \sigma^-$ . On a en effet, dans ce cas,  $k_1 = k_2$  et  $\Gamma_1 = \Gamma_2$ .

④ Piégeage cohérent de populations - Résonances noires

a) Etude à partir des équations de Bloch optique (Refs 2, 3, 4, 6)

- L'équation (4.24) montre que la force moyenne est, comme le temps de fluorescence  $R_F$ , proportionnelle à la population  $\sigma_{ee}$  de  $e$ . Pour étudier les variations de  $R_F$  ou  $\mathcal{F}$  avec  $\nu$  (ou avec  $\delta_2, \delta_1$  et  $\nu$  étant fixés ...), une première méthode consiste à essayer de trouver la solution stationnaire des équations (4.19).

- En fait, il est possible d'obtenir une expression analytique de  $\tilde{\sigma}_{ee}$ . Voir par exemple Ref. 6. Nous ne la donnerons pas ici, préférant insister sur la discussion physique du § 4b suivant.
- Nous nous contenterons de vérifier que pour

$$\tilde{\delta}_2 = \tilde{\delta}_1 \tag{4.27}$$

la solution stationnaire de (4.19) correspond à  $\tilde{\sigma}_{ee} = 0$ . Pour cela, généralisant les résultats du cours III, nous pouvons essayer d'introduire une combinaison linéaire de  $|g_1\rangle$  et  $|g_2\rangle$  qui n'est pas couplé à  $|e\rangle$  par  $\tilde{V}_{AL}$  donné en (4.14)

$$|\Psi_{Ne}\rangle = \frac{\Omega_2 |g_1\rangle - \Omega_1 |g_2\rangle}{\sqrt{\Omega_1^2 + \Omega_2^2}} \tag{4.28}$$

et voir si la matrice densité correspondant à (4.28)

$$\tilde{\sigma}_{ee} = \tilde{\sigma}_{e1} = \tilde{\sigma}_{e2} = 0 \quad \tilde{\sigma}_{11} = \frac{\Omega_2^2}{\Omega_1^2 + \Omega_2^2} \quad \tilde{\sigma}_{22} = \frac{\Omega_1^2}{\Omega_1^2 + \Omega_2^2} \quad \tilde{\sigma}_{12} = \frac{-\Omega_1 \Omega_2}{\Omega_1^2 + \Omega_2^2} = \tilde{\sigma}_{21} \tag{4.29}$$

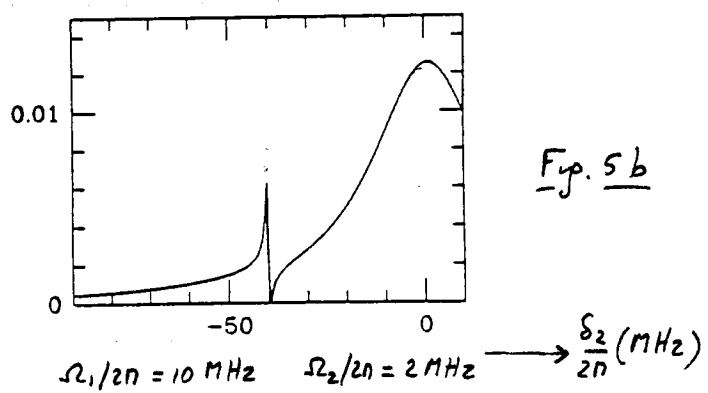
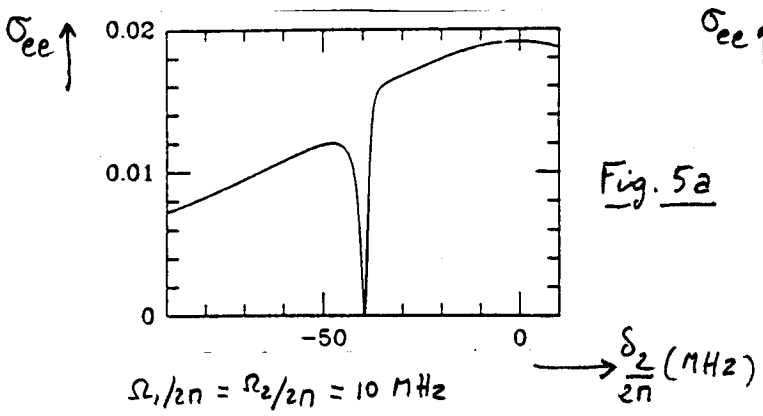
est une solution stationnaire de (4.19). Un calcul très simple montre que c'est bien ce qui se passe si  $\tilde{\delta}_2 - \tilde{\delta}_1 = 0$

Lorsque la condition de résonance Raman est vérifiée, les atomes sont donc piégés dans l'état (4.28), la fluorescence s'arrête et la force moyenne s'annule.

Notons bien que la condition de résonance Raman (4.27) correspond à l'égalité entre  $\tilde{\omega}_{21} - \tilde{\omega}_{22}$  (fréquences laser corrigées des déplacements Doppler) et  $\omega_{01} - \omega_{02}$  (fréquences atomiques non corrigées des déplacements lumineux).

- Lorsqu'on fait varier  $\tilde{\delta}_2 - \tilde{\delta}_1$  autour de 0, on constate sur la solution analytique ou numérique de (4.19) que  $\tilde{\sigma}_{ee}$  reprend une valeur non nulle, les variations de  $\tilde{\sigma}_{ee}$  avec  $\tilde{\delta}_2 - \tilde{\delta}_1$  se faisant sur une plage très étroite, si les fréquences de Rabi  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  sont assez faibles. De telles résonances, avec disparition de la fluorescence au centre, ont été observées pour la 1<sup>ère</sup> fois sur l'atome de Sodium (Ref. 1) et ont été appelées "résonances noires"

Quelques exemples de courbes théoriques, extraites de la Ref. 6, sont données sur les Figures 5a et 5b. Elles correspondent à  $\Gamma/2\pi = 21 \text{ MHz}$ ,  $\Gamma_1/\Gamma_2 \approx 3$  (Cas de l'ion  $\text{Ba}^+$  où  $e = 6^2P_{1/2}$ ,  $g_1 = 6^2S_{1/2}$ ,  $g_2 = 5^2D_{3/2}$ ). On a pris  $\nu = 0$ ,  $\delta_1/2\pi = -40 \text{ MHz}$ , et on fait varier  $\delta_2$



b) Interprétation physique

- L'interprétation physique des résonances noires est plus facile à donner dans le point de vue de l'atome habillé. Pour cela, changeons de base à l'intérieur des multiplicités de la figure 4.

- Considérons par exemple la multiplicité  $E(N_1, N_2)$ . Introduisons 2 combinaisons linéaires orthogonales des états  $|g_1, N_1+1, N_2\rangle$  et  $|g_2, N_1, N_2+1\rangle$

$$\begin{cases} |\Psi_C\rangle = \frac{\Omega_1}{\Omega} |g_1, N_1+1, N_2\rangle + \frac{\Omega_2}{\Omega} |g_2, N_1, N_2+1\rangle & (4.30.a) \end{cases}$$

$$\begin{cases} |\Psi_{NC}\rangle = \frac{\Omega_2}{\Omega} |g_1, N_1+1, N_2\rangle - \frac{\Omega_1}{\Omega} |g_2, N_1, N_2+1\rangle & (4.30.b) \end{cases}$$

avec 
$$\Omega = \sqrt{\Omega_1^2 + \Omega_2^2} \quad \text{(par } \tilde{V}_{AL}) \quad (4.30.c)$$

telles que, seule  $|\Psi_C\rangle$  soit couplée à  $|e, N_1, N_2\rangle$ ,  $|\Psi_{NC}\rangle$  ne l'étant pas. En utilisant l'expression (4.14) de  $\tilde{V}_{AL}$ , on trouve en effet que

$$\begin{cases} \langle e, N_1, N_2 | \tilde{V}_{AL} | \Psi_C \rangle = \frac{\hbar \Omega}{2} & (4.31.a) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \langle e, N_1, N_2 | \tilde{V}_{AL} | \Psi_{NC} \rangle = 0 & (4.31.b) \end{cases}$$

- A l'intérieur de  $E(N_1, N_2)$ ,  $\tilde{V}_{AL}$  n'est pas le seul hamiltonien à prendre en compte. Il y a également l'hamiltonien propre de l'atome et des photons lasers

$$H_0 = H_A + \hbar \tilde{\omega}_{L1} N_1 + \hbar \tilde{\omega}_{L2} N_2 \quad (4.32)$$

où  $N_1 = a_1^\dagger a_1$  et  $N_2 = a_2^\dagger a_2$  sont les opérateurs nombres de photons  $\omega_{L1}$  et  $\omega_{L2}$ . L'hamiltonien (4.32) est le correspondant quantique de l'hamiltonien semi-classique obtenu en (4.17) après la transformation T. En prenant pour zéro d'énergie, l'énergie de  $|e, N_1, N_2\rangle$ , on a (voir Fig. 4)

$$H_0 = \hbar \tilde{\delta}_1 |g_1, N_1+1, N_2\rangle \langle g_1, N_1+1, N_2| + \hbar \tilde{\delta}_2 |g_2, N_1, N_2+1\rangle \langle g_2, N_1, N_2+1| \quad (4.33)$$

En utilisant (4.30), il est facile alors de calculer les éléments de matrice de  $H_0$  dans la base  $\{|e, N_1, N_2\rangle, |\Psi_C\rangle, |\Psi_{NC}\rangle\}$

Éléments diagonaux de  $H_0$

$$\begin{cases} \langle e, N_1, N_2 | H_0 | e, N_1, N_2 \rangle = 0 & (4.34.a) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \langle \Psi_C | H_0 | \Psi_C \rangle = \hbar \tilde{\delta}_C & (4.34.b) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \langle \Psi_{NC} | H_0 | \Psi_{NC} \rangle = \hbar \tilde{\delta}_{NC} & (4.34.c) \end{cases}$$

avec 
$$\tilde{\delta}_C = \frac{\tilde{\delta}_1 \Omega_1^2 + \tilde{\delta}_2 \Omega_2^2}{\Omega_1^2 + \Omega_2^2} \quad (4.35.a)$$

$$\begin{cases} \tilde{\delta}_{NC} = \frac{\tilde{\delta}_1 \Omega_2^2 + \tilde{\delta}_2 \Omega_1^2}{\Omega_1^2 + \Omega_2^2} & (4.35.b) \end{cases}$$

Notons que  $\tilde{\delta}_C$  et  $\tilde{\delta}_{NC}$  sont égaux dans 2 cas

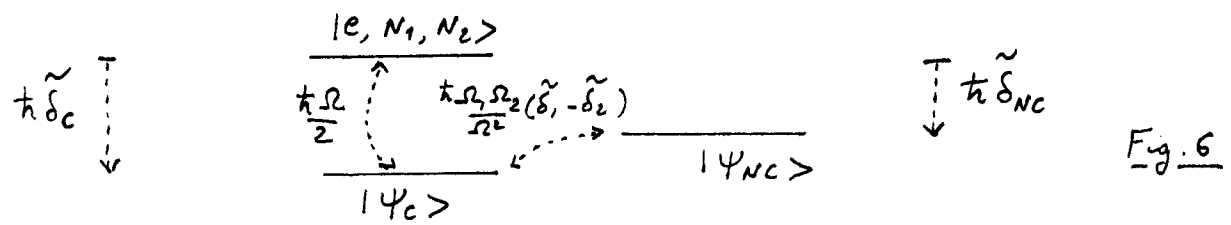
(i)  $\Omega_1 = \Omega_2 \rightarrow \tilde{\delta}_C = \tilde{\delta}_{NC} = \frac{\tilde{\delta}_1 + \tilde{\delta}_2}{2} \quad (4.36)$

(ii)  $\tilde{\delta}_1 = \tilde{\delta}_2 = \tilde{\delta} \rightarrow \tilde{\delta}_C = \tilde{\delta}_{NC} = \tilde{\delta} \quad (4.37)$

Elements non-diagonaux de  $H_0$   
les seuls non nuls sont

$$\langle \Psi_C | H_0 | \Psi_{NC} \rangle = \langle \Psi_{NC} | H_0 | \Psi_C \rangle = \frac{\hbar \Omega_1 \Omega_2}{\Omega_1^2 + \Omega_2^2} (\tilde{\delta}_1 - \tilde{\delta}_2) \quad (4.38)$$

- La figure 6 récapitule tous les résultats précédents en donnant, à l'intérieur de  $E(N_1, N_2)$ , la position des niveaux  $|e, N_1, N_2\rangle$ ,  $|\Psi_C\rangle$ ,  $|\Psi_{NC}\rangle$  et les couplages qui existent entre eux :  $\hbar \Omega_1/2$  entre  $|e, N_1, N_2\rangle$  et  $|\Psi_C\rangle$  (voir 4.31.2) et  $\hbar \Omega_1 \Omega_2 (\tilde{\delta}_1 - \tilde{\delta}_2) / \Omega^2$  entre  $|\Psi_C\rangle$  et  $|\Psi_{NC}\rangle$  (voir 4.38)



- Commençons alors à supposer que  $\tilde{\delta}_1 = \tilde{\delta}_2$  (condition de résonance Raman entre niveaux non perturbés). Il est clair alors sur la figure 6 que le niveau  $|\Psi_{NC}\rangle$  est totalement découplé des 2 autres.

Dans la cascade radiative de l'atome habillé, l'état  $|\Psi_{NC}\rangle$  qui est contaminé par  $g_1$  et  $g_2$  peut être alimenté par émission spontanée à partir du niveau  $e$  d'une multiplicité située plus haut en énergie. Une fois que l'atome habillé est dans l'état  $|\Psi_{NC}\rangle$  il ne peut plus alors quitter cet état, car il n'est couplé à aucun des 2 autres états de la multiplicité et il ne contient aucune contamination de  $e$  qui lui permette de se désintégrer par émission spontanée vers les multiplicités plus basses. L'état  $|\Psi_{NC}\rangle$  est un piège parfait pour  $\tilde{\delta}_1 = \tilde{\delta}_2$ .

- Dès que  $\tilde{\delta}_1 - \tilde{\delta}_2$  n'est plus nul, on voit sur la figure 6 que l'état  $|\Psi_{NC}\rangle$  est couplé à l'état  $|\Psi_C\rangle$ , lequel est lui-même couplé à l'état instable  $|e, N_1, N_2\rangle$ . Par double contamination, celle de  $|\Psi_C\rangle$  par  $|e, N_1, N_2\rangle$ , puis celle de  $|\Psi_{NC}\rangle$  par  $|\Psi_C\rangle$ , l'état  $|\Psi_{NC}\rangle$  acquiert donc une certaine instabilité. L'état  $|\Psi_{NC}\rangle$  n'est donc plus un piège parfait pour  $\tilde{\delta}_1 - \tilde{\delta}_2 \neq 0$  et on comprend bien pourquoi la fluorescence réapparaît autour de  $\tilde{\delta}_1 - \tilde{\delta}_2 = 0$  quand on balaye  $\tilde{\delta}_1 - \tilde{\delta}_2$ . Une étude plus poussée des contaminations de  $|\Psi_C\rangle$  par  $|e, N_1, N_2\rangle$  et de  $|\Psi_{NC}\rangle$  par  $|\Psi_C\rangle$  permettrait de rendre compte de la forme des résonances noires (voir Fig. 5) et de l'évolution de cette forme avec  $\Omega_1, \Omega_2, \delta_1, \delta_2$ .

- En conclusion, on peut dire que l'étude présentée ici généralise celle présentée à la fin du cours III, le couplage (4.38) généralisant le couplage inertiel (3.25) entre  $|\Psi_B\rangle$  et  $|\Psi_A\rangle$

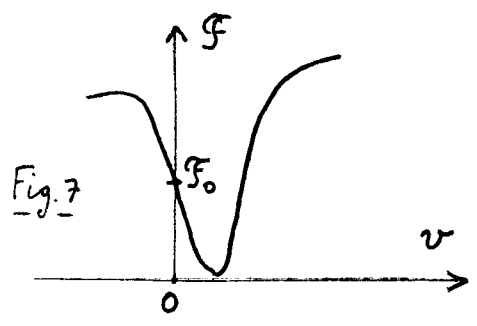
### ⑤ Refroidissement sub-Doppler

- Supposons que,  $\delta_1$  et  $\delta_2$  étant fixés, on fasse varier la vitesse  $v$  de l'atome autour de 0. D'après (4.18)

$$\tilde{\delta}_1 - \tilde{\delta}_2 = \delta_1 - \delta_2 - (k_1 + k_2)v \quad (4.39)$$

ce qui montre que  $\tilde{\delta}_1 - \tilde{\delta}_2$  varie autour de  $\delta_1 - \delta_2$ . D'après les résultats du § 4 précédent, la force moyenne, qui est proportionnelle à  $\partial \sigma_{cc}$ , présente en fonction de  $v$  des résonances noires étroites.

- Imaginons que l'on règle  $\delta_1, \delta_2$  de manière que, pour  $\nu=0$ , on soit sur le flanc descendant d'une résonance noire (Fig. 7)



Pour  $\nu=0$ ,  $F$  a donc une valeur non nulle,  $F_0$ , qui peut être compensée par une force de rappel statique si l'atome (ou l'ion) est dans un piège. Il apparaît alors clairement que la force  $F-F_0$  varie très vite autour de  $\nu=0$ , et s'écrit pour  $\nu$  assez petit

$$F-F_0 = -\alpha \nu \quad (4.30)$$

où  $\alpha$  est un coefficient de friction.

- A faible intensité, la hauteur de la résonance noire de la figure 7 est proportionnelle au taux de fluorescence en dehors de la résonance, donc à l'intensité laser  $I_L$ . Sa largeur est déterminée par le déplacement lumineux et la largeur radiative de l'état  $|\psi_c\rangle$ . Elle est donc aussi proportionnelle à  $I_L$ . On en déduit que la pente à mi-hauteur, c'est à dire  $\alpha$ , est indépendante de  $I_L$ .

- Un tel mécanisme de refroidissement est mentionné dans la référence 7. Aucun rapprochement n'est fait dans cette référence avec les mécanismes de refroidissement Raman étudiés dans les références 8 à 12. Les 2 effets doivent pourtant être reliés.

- Notons enfin que les résonances noires existent quel que soit le signe de  $\delta_1$  et  $\delta_2$ . Or, on peut toujours régler  $\delta_1, \delta_2$  pour se placer sur le flanc descendant d'une résonance noire. A la différence des refroidissements  $\sigma^+ \sigma^-$  (pour  $J_1=1 \leftrightarrow J_2=2$ ), le mécanisme précédent peut fonctionner quels que soient  $\delta_1, \delta_2$ .

Références

- (1) G. Alzetta, A. Gozzini, L. Moi, G. Orriols *Nuovo Cimento* **B56**, 5 (1976)
- (2) E. Arimondo, G. Orriols *Nuovo Cimento Lett* **17**, 133 (1976)
- (3) R.W. Whitley, C.R. Stroud *Phys. Rev.* **A14**, 1498 (1976)
- (4) P.M. Radmore, P.L. Knight *J. Phys.* **B15**, 561 (1982)
- (5) J. Dalibard, S. Reynaud, C. Cohen-Tannoudji in *Interaction of Radiation with Matter*, a Volume in Honor of A. Gozzini, Scuola Normale Superiore, Pisa (1987)
- (6) G. Janik, W. Nagourney, H. Dehmelt, *J.O.S.A.* **B2**, 1251 (1985)
- (7) V.G. Minogin, M.A. Olshany, S.V. Skulga, *J.O.S.A.* **B6**, 2108 (1989)
- (8) P.E. Toschek *Ann. Phys. Fr.* **10**, 761 (1985)
- (9) H. Gilhaus, Th. Sauter, W. Neuhauser, R. Blatt, P.E. Toschek *Opt. Commun.* **69**, 25 (1988)
- (10) P.E. Toschek, W. Neuhauser, *J.O.S.A.* **B6**, 2220 (1989)
- (11) H. Dehmelt, G. Janik, W. Nagourney, *B.A.P.S.* **30**, 612 (1985)
- (12) M. Lindberg, J. Javanainen *JOSA* **B3**, 1008 (1986)



c. Comparaison avec les autres méthodes

- A la différence des autres méthodes (refroidissement Doppler, Scyphé,  $\sigma^+ - \sigma^-$  pour  $J_g = 1 \leftrightarrow J_e = 2$ , Raman pour une transition  $\Lambda \dots$ ) cette méthode n'utilise pas de force de frottement qui amoindrit la vitesse. Rappelons en effet que pour la transition  $J_g = 1 \leftrightarrow J_e = 1$  en configuration  $\sigma^+ - \sigma^-$ , situation dans laquelle apparaît le phénomène de piégeage cohérent sélectif en vitesse, la force moyenne agissant sur l'atome est nulle quel que soit  $v$  (voir équation (3.17))

La méthode décrite ici repose sur une combinaison de la diffusion dans l'espace des vitesses et d'une sélection dans cet espace des vitesses due à une interférence quantique entre amplitudes d'absorption.

- Une autre propriété importante de cette nouvelle méthode est qu'elle ne dépend pas du désaccord  $\delta = \omega_2 - \omega_0$ .

d. Insuffisance des méthodes semiclassiques

- Dans les cours précédents, l'atome a toujours été considéré comme localisé en un point  $z$  bien défini. Par exemple l'état  $|\psi_s(z)\rangle$  écrit en (2.24.a), et qui est un état non absorbant pour une transition  $J_g = 1 \leftrightarrow J_e = 1$ , donne l'état interne d'un atome dont le centre de masse est décrit par un paquet d'ondes si bien localisé autour de  $z$  qu'il est inutile de traiter quantiquement l'évolution d'un tel paquet d'ondes.  $z = vt$  est considéré comme une fonction donnée de  $t$ .

- Si l'atome est refroidi au dessous de  $T_k$ , sa dispersion en impulsion  $\delta p$  devient inférieure à  $\hbar k$  :  $\delta p < \hbar k$ . Par suite, sa longueur d'onde de de Broglie (ou encore sa longueur de cohérence)  $\xi = \hbar / \delta p$  devient supérieure à la longueur d'onde du laser

$$\delta p < \hbar k \quad \rightarrow \quad \xi = \frac{\hbar}{\delta p} > \frac{1}{k} = \lambda \quad (5.4)$$

L'atome ne peut plus alors être considéré comme localisé dans l'onde laser. Un traitement quantique de tous ses degrés de liberté, aussi bien internes qu'externes, devient indispensable.

② Principes d'un traitement quantique

a. Modèle simple à une dimension

- Nous nous limitons dans ce paragraphe au modèle simple d'une transition  $J_g = 1 \leftrightarrow J_e = 1$  et d'une configuration  $\sigma^+ - \sigma^-$ , modèle déjà utilisé dans les cours III et IV.

- Par suite du pompage optique et de la nullité du coefficient de Clebsch-Gordan de la transition  $g_0 - e_0$ , on peut se limiter aux 3 sous-niveaux  $g_{-1}, g_1, e_0$ . (Voir Fyp. 3c, page II.2)

- Les états atomiques sont repérés par 2 nombres quantiques

Interne :  $g_{-1}, g_1, e_0$

Externe : impulsion  $p$  le long de l'axe  $Oz$  des 2 lasers.

b. Etats quantiques couplés et non couplés au champ laser

- L'hamiltonien d'interaction atome-laser  $V_{AL}$  a la même forme que plus haut en (2.28), à part que le nombre 3 est remplacé par l'opérateur position  $Z$  du centre de masse

$$V_{AL} = \frac{\hbar \tilde{\Omega}_1}{2} \left[ -\frac{1}{\sqrt{2}} |e_0\rangle \langle g_{-1}| e^{ikZ} + \frac{1}{\sqrt{2}} |e_0\rangle \langle g_{+1}| e^{-ikZ} \right] e^{-i\omega_L t} + h.c. \quad (5.5)$$

Les opérateurs  $e^{\pm ikZ}$  apparaissant dans (5.5) ne sont autres que des opérateurs de translation dans l'espace des impulsions, transformant l'état d'impulsions  $p$  du centre de masse en un état d'impulsions  $p \pm \hbar k$

$$e^{\pm ikZ} |p\rangle = |p \pm \hbar k\rangle \quad (5.6)$$

- En utilisant (5.5) et (5.6), on obtient alors aisément

$$V_{AL} |g_{-1}, p\rangle = -\frac{\hbar \tilde{\Omega}_1}{2\sqrt{2}} e^{-i\omega_L t} |e_0, p + \hbar k\rangle \quad (5.7.a)$$

$$V_{AL} |g_{+1}, p\rangle = +\frac{\hbar \tilde{\Omega}_1}{2\sqrt{2}} e^{-i\omega_L t} |e_0, p - \hbar k\rangle \quad (5.7.b)$$

L'interprétation de ces équations est très claire. Partant de l'état  $|g_{-1}\rangle$ , l'atome ne peut qu'absorber qu'un photon  $\sigma^+$  qui lui apporte un moment cinétique  $+\hbar$  le long de  $Oz$  et le fait passer dans  $e_0$ . Comme un photon  $\sigma^+$  a aussi une impulsion  $+\hbar k$  (voir Fig.1, p. II-1), l'absorption d'un tel photon augmente de  $+\hbar k$  l'impulsion de l'atome qui passe de  $p$  à  $p + \hbar k$ . Le même raisonnement montre que, à partir de  $g_{-1}$ , l'atome ne peut qu'absorber un photon  $\sigma^+$ , ce qui fait varier son moment cinétique et son impulsion le long de  $Oz$ , de  $-\hbar$  et  $-\hbar k$  respectivement.

Réciproquement, si l'on part de  $|e_0, p\rangle$ , les processus d'émission induite ne couplent un tel état qu'aux 2 états  $|g_{-1}, p - \hbar k\rangle$  et  $|g_{+1}, p + \hbar k\rangle$ . (Voir

Fig.1, où les flèches en pointillés représentent les couplages associés à  $V_{AL}$ ). Finalement, pour chaque valeur de  $p$ , on peut introduire un ensemble de 3 états, formant une famille  $\mathcal{F}(p)$

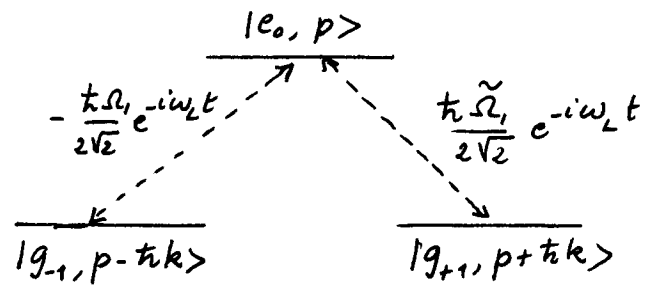


Fig. 1

$$\mathcal{F}(p) = \{ |e_0, p\rangle, |g_{-1}, p - \hbar k\rangle, |g_{+1}, p + \hbar k\rangle \} \quad (5.8)$$

qui reste stable sous l'effet de  $V_{AL}$ , c'est à dire sous l'effet des processus d'absorption et d'émission induite.

- Les équations (5.7), réécrites en remplaçant  $p$  par  $p - \hbar k$  dans la 1<sup>ère</sup> et  $p$  par  $p + \hbar k$  <sup>(dans la 2<sup>ème</sup>)</sup>, suggèrent alors d'introduire dans la famille  $\mathcal{F}(p)$ , l'état

$$|\Psi_{NC}(p)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [ |g_{-1}, p - \hbar k\rangle + |g_{+1}, p + \hbar k\rangle ] \quad (5.9)$$

car les équations (5.7) montrent alors que l'état  $|\Psi_{NC}(p)\rangle$  n'est pas couplé au laser (ce qui justifie l'indice NC), puisque

$$V_{AL} |\Psi_{NC}(p)\rangle = \frac{\hbar \tilde{\Omega}_1}{4} e^{-i\omega_L t} [ |e_0, p\rangle - |e_0, p\rangle ] = 0 \quad (5.10)$$



- La combinaison linéaire de  $|g_{-1}, p - \hbar k\rangle$  et  $|g_{+1}, p + \hbar k\rangle$  orthogonale à (5.9)

V-4

$$|\Psi_c(p)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ -|g_{-1}, p - \hbar k\rangle + |g_{+1}, p + \hbar k\rangle \right] \quad (5.11)$$

est, quant à elle, couplée au laser puisque

$$V_{AL} |\Psi_c(p)\rangle = \frac{\hbar \tilde{\Omega}_1}{2} e^{-i\omega_L t} |e_0, p\rangle \quad (5.12)$$

Dans la famille  $\mathcal{F}(p)$ , rapportée à la base  $\{|e_0, p\rangle, |\Psi_c(p)\rangle, |\Psi_{NC}(p)\rangle\}$  les seuls éléments de matrice non nuls de  $V_{AL}$  sont entre  $|e_0, p\rangle$  et  $|\Psi_c(p)\rangle$

$$\langle e_0, p | V_{AL} | \Psi_c(p) \rangle = \frac{\hbar \tilde{\Omega}_1}{2} e^{-i\omega_L t} = \langle \Psi_c(p) | V_{AL} | e_0, p \rangle^* \quad (5.13)$$

### c - Couplages associés à l'hamiltonien atomique

- Dans la famille  $\mathcal{F}(p)$ , il faut également tenir compte de l'hamiltonien atomique  $H_A$  qui s'écrit

$$H_A = H_A^{\text{ext}} + H_A^{\text{int}} = \frac{P^2}{2M} + \hbar \omega_0 P_e \quad (5.14)$$

L'hamiltonien externe n'est autre que l'énergie cinétique du centre de masse,  $P$  étant l'impulsion (le long de  $Oz$ ) de ce centre de masse. Dans un traitement quantique de ces degrés de liberté externes, une telle énergie cinétique doit apparaître dans  $H_A$ .

Pour écrire l'hamiltonien interne, nous avons supposé qu'il n'y a pas de champ magnétique externe, de sorte que les 2 sous-niveaux Zeeman  $|g_{\pm 1}\rangle$  ont la même énergie, prise égale à 0.

- Les états  $|g_{\pm 1}, p \pm \hbar k\rangle$  sont états propres de  $H_A$

$$H_A |g_{\pm 1}, p \pm \hbar k\rangle = \frac{(p \pm \hbar k)^2}{2M} |g_{\pm 1}, p \pm \hbar k\rangle \quad (5.15)$$

Il n'en est pas de même pour  $|\Psi_c(p)\rangle$  et  $|\Psi_{NC}(p)\rangle$ . En utilisant (5.9) et (5.15), on obtient en effet

$$\begin{aligned} H_A |\Psi_{NC}(p)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \frac{(p - \hbar k)^2}{2M} |g_{-1}, p - \hbar k\rangle + \frac{(p + \hbar k)^2}{2M} |g_{+1}, p + \hbar k\rangle \right] \\ &= \left( \frac{p^2}{2M} + E_R \right) |\Psi_{NC}(p)\rangle + \frac{\hbar k p}{M} |\Psi_c(p)\rangle \end{aligned} \quad (5.16)$$

où  $E_R$  est l'énergie de recul donnée en (5.1). Un calcul analogue donne pour  $H_A |\Psi_c(p)\rangle$

$$H_A |\Psi_c(p)\rangle = \left( \frac{p^2}{2M} + E_R \right) |\Psi_c(p)\rangle + \frac{\hbar k p}{M} |\Psi_{NC}(p)\rangle \quad (5.17)$$

On voit ainsi que  $|\Psi_{NC}(p)\rangle$  et  $|\Psi_c(p)\rangle$  ne sont états propres de  $H_A$  que si  $p = 0$ , c'est à dire si  $|g_{\pm 1}, p \pm \hbar k\rangle$  sont dégénérés vis à vis de  $H_A$  (voir 5.15). Notons enfin que  $|e_0, p\rangle$  est état propre de  $H_A$

$$H_A |e_0, p\rangle = \left( \frac{p^2}{2M} + \hbar \omega_0 \right) |e_0, p\rangle \quad (5.18)$$

Finalement,  $H_A$  n'est diagonal dans la base  $\{|e_0, p\rangle, |\Psi_c(p)\rangle, |\Psi_{NC}(p)\rangle\}$  que si  $p = 0$ . Si  $p \neq 0$ , des couplages non diagonaux apparaissent entre  $|\Psi_c(p)\rangle$  et  $|\Psi_{NC}(p)\rangle$

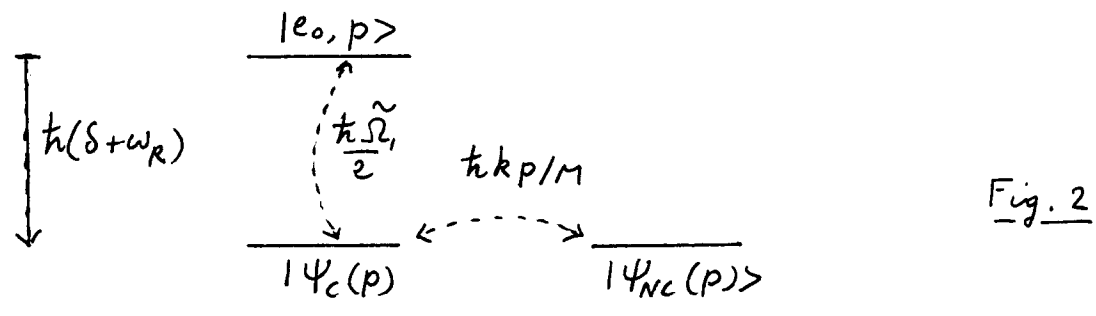
$$\langle \Psi_c(p) | H_A | \Psi_{NC}(p) \rangle = \langle \Psi_{NC}(p) | H_A | \Psi_c(p) \rangle = \frac{\hbar k p}{M} \quad (5.19)$$

qui sont l'équivalent du couplage inertiel (3.25) du cours III.

- Les résultats des §§ 2b et 2c précédents sont récapitulés sur la figure 2 qui donne les énergies des états  $|e_0, p\rangle, |\psi_c(p)\rangle, |\psi_{nc}(p)\rangle$  de  $\mathcal{F}(p)$  et les couplages non diagonaux dûs à  $V_{AL}$  et  $H_A$  qui existent entre eux (voir 5.13 et 5.19). Nous avons éliminé toute dépendance temporelle de  $V_{AL}$  en effectuant une transformation unitaire qui ajoute  $\hbar\omega_L$  aux énergies de  $|g_{\pm 1}, p \pm \hbar k\rangle$  (ou, ce qui revient au même, en quantifiant les champs laser). Par rapport à l'énergie de  $|e_0, p\rangle$ , prise pour zéro d'énergie, les énergies de  $|\psi_c(p)\rangle$  et  $|\psi_{nc}(p)\rangle$  valent, d'après (5.16), (5.17)

$$\hbar(\omega_L - \omega_0) + E_R = \hbar(\delta + \omega_R)$$

où  $\delta = \omega_L - \omega_0$  et  $\omega_R = E_R/\hbar$



d. Taux de départ de  $\mathcal{F}(p)$  par émission spontanée

- Dans la famille  $\mathcal{F}(p)$ , le seul état instable radiativement, c-à-d susceptible de se désintégrer par émission spontanée, est l'état  $|e_0, p\rangle$ . Le taux de départ de  $|e_0, p\rangle$  est  $\Gamma$ , où  $\Gamma$  est la largeur naturelle de  $e$

- Dans ce paragraphe, on s'intéresse uniquement à la manière dont un système, dont l'état initial est décrit par un vecteur de  $\mathcal{F}(p)$ , quitte cette famille par émission spontanée. On peut alors montrer (voir Ref. 6, Chap. III) que l'évolution de la projection de l'état du système dans  $\mathcal{F}(p)$  est régie par un hamiltonien effectif  $H_{eff}$  obtenu en ajoutant à l'énergie de l'état  $|e_0, p\rangle$  une partie imaginaire,  $-i\hbar\Gamma/2$ , pour décrire son instabilité. En tenant compte des éléments diagonaux et non diagonaux de  $H_A$  et  $V_{AL}$  dans  $\mathcal{F}(p)$  (voir Fig. 2), on obtient ainsi pour la matrice (non hermitique) représentant  $H_{eff}$  dans la base  $\{|e_0, p\rangle, |\psi_c(p)\rangle, |\psi_{nc}(p)\rangle\}$  l'expression suivante

$$(H_{eff}) = \hbar \begin{pmatrix} -i\Gamma/2 & \tilde{\Omega}_1/2 & 0 \\ \tilde{\Omega}_1/2 & \delta + \omega_R & kp/M \\ 0 & kp/M & \delta + \omega_R \end{pmatrix} \quad (5.20)$$

Comme la matrice (5.20) est non hermitique, ses 3 valeurs propres sont en général non réelle. Les 3 vecteurs propres correspondants décrivent les 3 modes propres de désintégration radiative à partir de  $\mathcal{F}(p)$ , dont les taux sont reliés aux parties imaginaires de ces valeurs propres. Physiquement, on peut dire que les couplages non diagonaux  $\hbar\tilde{\Omega}_1/2$  et  $\hbar kp/M$  de la figure 2 "contaminent" l'état  $|\psi_c(p)\rangle$  par  $|e_0, p\rangle$ , et l'état  $|\psi_{nc}(p)\rangle$  par  $|e_0, p\rangle$  via  $|\psi_c(p)\rangle$ , ce qui confère aux états  $|\psi_c(p)\rangle$  et  $|\psi_{nc}(p)\rangle$  une partie de l'instabilité radiative de  $|e_0, p\rangle$ .

Commençons par supposer que  $p=0$ .

V-6

- Il est clair alors sur (5.20) (et sur la figure 2) que l'état

$$|\Psi_{NC}(p=0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [ |g_{-1}, -\hbar k\rangle + |g_{+1}, +\hbar k\rangle ] \quad (5.21)$$

n'est couplé à aucun autre état de  $\mathcal{F}(p=0)$ , et est un état propre de  $H_{eff}$ , de valeur propre réelle. Un atome dans l'état  $|\Psi_{NC}(p=0)\rangle$  ne se désintègre pas radiativement. Il reste piégé dans cet état indéfiniment.

- La notion de piégeage cohérent de population subsiste donc quand on quantifie les degrés de liberté de translation. Comparons plus précisément l'état piège (5.21) à l'état piège  $|\Psi_S(z)\rangle$  de la théorie semiclassical, donné par l'équation (2.24.a). La fonction d'onde associée au ket (5.21) s'écrit

$$\Psi_{NC}(p=0, z) = \frac{1}{\sqrt{2}} [ |g_{-1}\rangle e^{-ikz} + |g_{+1}\rangle e^{ikz} ] \quad (5.22)$$

La ressemblance avec (2.24.a) est frappante mais ne doit pas prêter à confusion : L'état (2.24.a) est l'état interne d'un atome localisé en  $z$ . Dans (2.24.a),  $z$  est un paramètre ayant une valeur bien définie. Par contre (5.22) est une fonction d'onde (à 2 composantes, en quelque sorte un spinneur) décrivant un atome complètement délocalisé. Dans (5.22),  $z$  n'est pas un paramètre, mais la variable figurant dans la fonction d'onde, prenant toutes les valeurs de  $-\infty$  à  $+\infty$ .

- L'élément nouveau qui apparaît dans la théorie entièrement quantique est que l'état piège (5.21) est obtenu en superposant linéairement 2 états qui diffèrent non seulement par l'état interne, mais également par l'impulsion. Une telle situation résulte de la conservation de l'impulsion globale. Pour pouvoir interférer, les 2 amplitudes d'absorption doivent aboutir au même état final  $|e, p=0\rangle$ . Comme les photons absorbés n'ont pas la même impulsion (suivant le chemin  $\sigma_+$  ou  $\sigma_-$ ), il faut partir d'une superposition de 2 états initiaux d'impulsion différente.

Notons enfin que l'état (5.21) n'est pas factorisable. Les corrélations entre variables internes et externes dans l'état piège sont donc des corrélations quantiques non séparables.

- Pour  $p=0$ , les 2 autres valeurs propres de  $H_{eff}$  sont obtenues en diagonalisant la matrice non hermitique relative au sous-espace sous-tendu par  $|e_0, 0\rangle$  et  $|\Psi_C(0)\rangle$  (totalement découplé de  $|\Psi_{NC}(0)\rangle$ ).

$$\hbar \begin{pmatrix} -i\Gamma/2 & \tilde{\Omega}_1/2 \\ \tilde{\Omega}_1/2 & \delta + \omega_R \end{pmatrix} \quad (5.23)$$

$$\text{Si } \tilde{\Omega}_1 \ll \sqrt{(\delta + \omega_R)^2 + (\Gamma^2/4)} \quad (5.24)$$

c'est à dire si  $\tilde{\Omega}_1 \ll \Gamma$  ou si  $\tilde{\Omega}_1 \ll |\delta + \omega_R|$ , on peut calculer ces valeurs propres perturbativement. La valeur propre qui rend vers

$\delta + \omega_R$  quand  $\tilde{\Omega}_1 \rightarrow 0$  est donné par

$$\hbar(\delta + \omega_R) + \frac{(\hbar\tilde{\Omega}_1/2)^2}{\hbar(\delta + \omega_R + i\frac{\Gamma'_c}{2})} = \hbar(\delta + \omega_R) + \hbar\left(\delta'_c - i\frac{\Gamma'_c}{2}\right) \quad (5.25)$$

où

$$\Gamma'_c = \frac{(\tilde{\Omega}_1/2)^2}{(\delta + \omega_R)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} \Gamma \quad \delta'_c = \frac{(\tilde{\Omega}_1/2)^2}{(\delta + \omega_R)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} (\delta + \omega_R) \quad (5.26)$$

Au facteur  $\omega_R$  près (qui corrige  $\delta$ ), on retrouve l'élargissement ( $\hbar\Gamma'_c$ ) et le déplacement ( $\hbar\delta'_c$ ) de l'état  $|\Psi_A\rangle$  du cours III (voir page III.9).  $\Gamma'_c$  et  $\hbar\delta'_c$  représentent respectivement le temps de départ par émission spontanée et le déplacement lumineux de l'état  $|\Psi_c\rangle$  qui, lui, reste couplé au laser.

L'autre valeur propre de (5.23) reste très proche de  $-i\Gamma/2$

Que se passe-t-il lorsque  $p$  est non nul ?

- Supposons maintenant que  $p$  est non nul, tout en restant suffisamment petit pour que le couplage  $\hbar kp/M$  entre  $|\Psi_{NC}(p)\rangle$  et  $|\Psi(p)\rangle$  (voir Fig. 2) reste négligeable devant l'élargissement  $\hbar\Gamma'_c$  et le déplacement  $\hbar\delta'_c$  de  $|\Psi_c\rangle$  dus à son couplage avec  $|e, p\rangle$

$$k|p|/M \ll \Gamma'_c \text{ ou } |\delta'_c| \quad (5.27)$$

Deux des trois valeurs propres de (5.20) restent très proches des valeurs propres de (5.23), c'est à dire de  $-i\hbar\Gamma/2$  et (5.25). Quant à la troisième, elle est obtenue en appliquant la théorie des perturbations du 2<sup>ème</sup> ordre au couplage  $\hbar kp/M$  induit par  $H_A$  entre  $|\Psi_{NC}(p)\rangle$  et l'état  $|\Psi_c(p)\rangle$  résultant du couplage  $\hbar\tilde{\Omega}_1/2$  induit par  $V_{AL}$  entre  $|\Psi_c(p)\rangle$  et  $|e_0, p\rangle$ . On trouve ainsi pour cette 3<sup>ème</sup> valeur propre

$$\hbar(\delta + \omega_R) + \frac{(\hbar kp/M)^2}{\hbar(-\delta'_c + i\frac{\Gamma'_{NC}}{2})} = \hbar(\delta + \omega_R) + \hbar\left(\delta'_{NC} - i\frac{\Gamma'_{NC}}{2}\right) \quad (5.28)$$

où

$$\Gamma'_{NC}(p) = \frac{(kp/M)^2}{\delta_c'^2 + \frac{\Gamma_c'^2}{4}} \Gamma'_c = \frac{4k^2p^2}{M^2\Omega_1^2} \Gamma \quad (5.29.a)$$

$$\delta'_{NC}(p) = \frac{(kp/M)^2}{\delta_c'^2 + \frac{\Gamma_c'^2}{4}} \delta'_c = \frac{4k^2p^2}{M^2\Omega_1^2} (\delta + \omega_R) \quad (5.29.b)$$

$\Gamma'_{NC}(p)$  est le taux de départ par émission spontanée de l'état  $|\Psi_{NC}(p)\rangle$ , plus exactement de l'état  $|\overline{\Psi_{NC}(p)}\rangle$  qui résulte du couplage  $\hbar kp/M$  entre  $|\Psi_{NC}(p)\rangle$  et  $|\overline{\Psi_c(p)}\rangle$ .  $\hbar\delta'_{NC}(p)$  est le déplacement lumineux de  $|\overline{\Psi_{NC}(p)}\rangle$ .

- Il est clair sur (5.29.a) que le taux de départ de  $|\overline{\Psi_{NC}(p)}\rangle$ , qui varie comme  $p^2$ , tend vers zéro quand  $p \rightarrow 0$ . Ceci montre bien que  $|\overline{\Psi_{NC}(p)}\rangle$  est un piège d'autant plus imparfait que  $p$  est plus grand.

Réciproquement, donnons nous un temps d'interaction  $\Theta$ , et cherchons l'intervalle  $\delta p$  de valeurs de  $p$  autour de  $p=0$ , tel que si  $|p| < \delta p$ , un atome dans  $|\overline{\Psi_{NC}(p)}\rangle$  a une grande chance de rester piégé dans l'état  $|\overline{\Psi_{NC}(p)}\rangle$  pendant tout le temps  $\Theta$ .

La valeur de  $\delta p$  est donnée par

$$\Gamma'_{nc}(\delta p) \Theta < 1 \tag{5.30}$$

c'est à dire encore, compte tenu de (5.29.a), par

$$\delta p < \frac{M}{2k\sqrt{\Gamma}} \frac{\Omega_1}{\sqrt{\Theta}} \tag{5.31}$$

On voit ainsi que la classe de vitesses sélectionnée  $\delta v = \delta p/m$  peut être aussi étroite que l'on veut puisqu'elle varie en  $\Omega_1/\sqrt{\Theta}$ . Pour la réduire, et diminuer donc la température, il suffit d'allonger le temps d'interaction.

e - Redistribution entre familles due à l'émission spontanée.

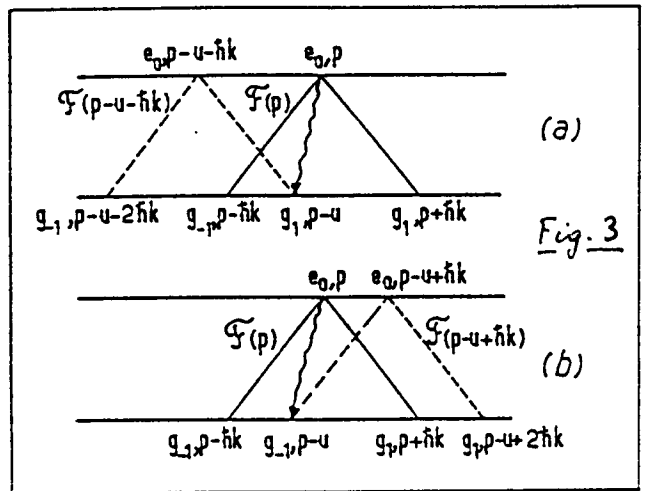
- Après avoir étudié dans le § d précédent comment un atome quitte une famille  $\mathcal{F}(p)$  par émission spontanée, nous analysons maintenant les nouvelles familles dans lesquelles il arrive après une telle émission.

- Un atome initialement dans  $\mathcal{F}(p)$  ne peut émettre un photon qu'à partir de  $|e_0, \vec{p}\rangle$ . Si le photon émis a un vecteur d'onde  $\vec{k}$  et une polarisation  $\vec{E}$ , l'atome se retrouve après émission dans une superposition linéaire de  $|g_1, \vec{p}-\hbar\vec{k}\rangle$  et  $|g_{-1}, \vec{p}-\hbar\vec{k}\rangle$  qui dépend de  $\vec{E}$  et des angles polaires  $\theta$  et  $\varphi$  de la direction d'émission  $\vec{k}/k$ . Dans le modèle à 1 dimension étudié ici, on ne s'intéresse pas aux composantes  $p_x$  et  $p_y$  de  $\vec{p}$ . Si l'on trace la matrice densité finale de l'atome sur  $p_x$  et  $p_y$ , en gardant  $\hbar k_z = \hbar k \cos\theta = u$  fixé, et si l'on moyenne sur la polarisation  $\vec{E}$  et l'angle azimutal  $\varphi$  de la direction d'émission du photon émis, on trouve que la matrice densité atomique finale est un mélange statistique (avec des poids égaux à 1/2) des états  $|g_1, p-u\rangle$  et  $|g_{-1}, p-u\rangle$ .

- La figure 3 montre les 2 états  $|g_1, p-u\rangle$  et  $|g_{-1}, p-u\rangle$  du mélange statistique obtenu après émission spontanée d'un photon de  $\hbar k_z = u$  fixé.

$|g_1, p-u\rangle$  appartient à la famille  $\mathcal{F}(p-u-\hbar k)$  alors que  $|g_{-1}, p-u\rangle$  appartient  $\mathcal{F}(p-u+\hbar k)$

Comme  $u$  peut varier entre  $-\hbar k$  et  $+\hbar k$ , l'émission spontanée peut faire passer l'atome de  $\mathcal{F}(p)$  à  $\mathcal{F}(p')$  avec  $p-2\hbar k < p' < p+2\hbar k$



f - Résultats attendus - Signature de l'effet

- Une caractéristique intéressante des états non couples  $|\Psi_{nc}(p)\rangle$  donnés en (5.9) est que ce ne sont pas des états propres de  $P_z$ . Une mesure de  $P_z$  sur un atome dans l'état  $|\Psi_{nc}(p)\rangle$  peut donner 2 résultats possibles :  $p+\hbar k$  ou  $p-\hbar k$  avec des probabilités égales 1/2.

- La discussion précédente a montré qu'après un temps d'interaction  $\Theta$  suffisamment long, une proportion importante de

atomes se retrouve piégé dans des états  $|\overline{\Psi_{NC}(p)}\rangle$  (très proches de  $\Psi_{NC}(p)\rangle$ ) avec  $|p| < \delta p$ ,  $\delta p$  étant donné en (5.31). On s'attend donc à voir dans la distribution finale des valeurs possibles de  $P_z$  2 pics centrés en  $-\hbar k$  et  $+\hbar k$  et de largeur  $\delta p$ . Si  $\Theta$  est suffisamment grand pour que largeur  $\delta p$  de ces pics soit plus petite que leur séparation  $2\hbar k$ , les 2 pics doivent être résolus le fait que  $\delta p < \hbar k$  entraîne aussi que la température  $T$  des atomes (le long de  $Oz$ ),  $k_B T \sim \frac{(\delta p)^2}{2M}$ , est plus petite que  $T_r$  donné en (5.1) et (5.2).

9- Observation expérimentale.

Voir Référence 1 dont nous extrayons ici seulement les figures 4 et 5, montrant le montage expérimental et la structure en double pic de la distribution d'impulsions atomique. De la largeur des pics, on estime une température de  $2\mu K$ , soit 2 fois plus petite que la température associée à l'énergie de recul d'un atome d'Helium métastable refroidi sur la transition à  $1.08\mu m$ . La longueur d'onde de de Broglie des atomes le long de  $Oz$  est donc 1.4 fois plus grande que la longueur d'onde laser.

Figures extraites de la Ref. 1

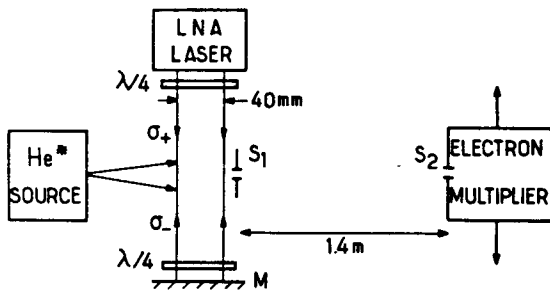


FIG. 4. Schematic experimental setup. The atomic source at 77 K produces a beam of metastable triple helium atoms ( $2^3S_1$ ) at an average velocity of 1100 m/s. These atoms interact with two  $\sigma_+$  and  $\sigma_-$  polarized counterpropagating waves at  $1.08\mu m$ . The transverse velocity distribution at the end of the interaction region is analyzed with two slits  $S_1$  and  $S_2$ , 100  $\mu m$  wide.  $S_2$  is the entrance slit of a movable He\* detector.

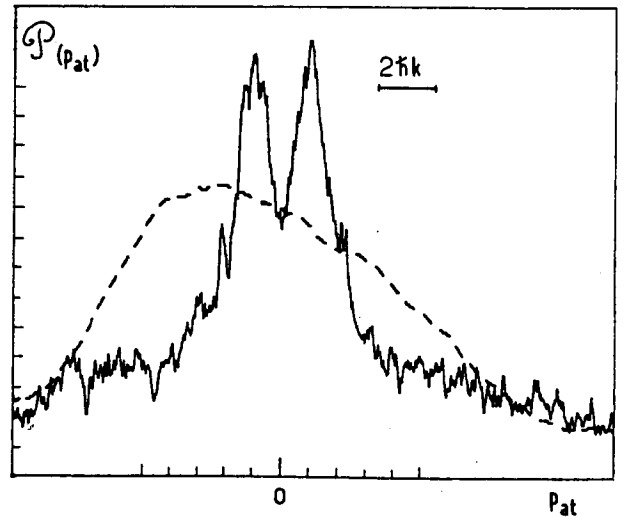


FIG. 5. Transverse atomic momentum profile at the end of the interaction region, with the laser on (solid line) and off (dashed line; this profile has been smoothed). The double-peak structure at about  $\pm \hbar k$  and above the initial distribution is a clear signature of the cooling effect presented in this Letter.

Références

- (1) A. Aspect, E. Arimondo, R. Kaiser, N. Vansteenkiste, C. Cohen-Tannoudji, Phys. Rev. Lett. **61**, 826 (1988)
- (2) Mêmes auteurs, J.O.S.A. **B6**, 2112 (1989)
- (3) C. Cohen-Tannoudji, les Houches 90, chapitre 11 (Voir référence exacte p. II.10)
- (4) Thèse de doctorat de N. Vansteenkiste (Paris Sud 1989) et R. Kaiser (Paris 1990)
- (5) Il a été aussi suggéré de refroidir des atomes au dessous de  $T_r$  en utilisant un recyclage sélectif en vitesse dans un piège. Voir D.E. Pritchard, K. Helmerson, V.S. Bagwats, G.P. Lajyatis, A.G. Martin in Laser Spectroscopy VIII, S. Svantberg and W. Persson eds (Springer Verlag, 1987) p. 68
- (6) C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, G. Grynberg, Processus d'Interaction entre photons et atomes, référence déjà citée p. II.10

③ Résultats du calcul quantique (Ref. 2, page V-9)

Caractéristiques d'un tel calcul

- Basé sur les équations de Bloch optiques généralisées décrivant l'évolution de la matrice densité atomique et traitant quantiquement tous les degrés de liberté, aussi bien externes qu'internes

$$\langle a, p' | \sigma | b, p'' \rangle = \sigma_{ab}(p', p'') \quad (6.1)$$

$a, b = e_0, g_1$  ou  $g_1$        $p', p''$  impulsion le long de Oz.

- Par suite des transferts discrets d'impulsion lors des processus d'absorption et d'émission, les équations sont des équations à différence finie. Par exemple,  $d\sigma_{ee}(p, p) / dt$  est compli à  $\sigma_{eg_1}(p, p - \hbar k)$  et  $\sigma_{eg_1}(p, p + \hbar k)$

Comme la largeur  $\delta p$  de la distribution d'impulsion peut devenir inférieure à  $\hbar k$ , impossibilité de développer les éléments de matrice de  $\sigma$  en puissances de  $\hbar k / \delta p$  et de transformer les équations de Bloch optiques généralisées en équations de Fokker-Planck complexées, comme cela est fait en général dans les théories du refroidissement laser (voir par exemple Ref. 7)

Nécessité d'une résolution numérique des équations de Bloch optiques généralisées sans aucune approximation. Simplification cependant résultant du fait que les états se regroupent en famille  $F(p)$  stable sous l'effet de  $V_{AL}$  et  $H_A$ .

- Nous nous contentons ici de commenter les résultats du calcul, renvoyant à la Ref. 2 page V-9 pour plus de détails.

Evolution de la distribution d'impulsion en fonction du temps d'interaction ⊙

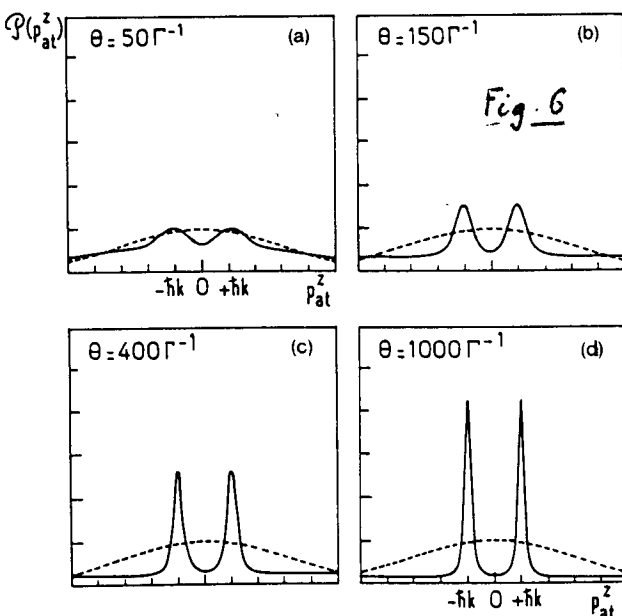


Fig. 6 (Extrait de Ref. 2)  
 ⊙ Quand ⊙ augmente, la hauteur des pics augmente et leur largeur  $\delta p$  diminue  
 $\delta = 0, \Omega_1^+ = \Omega_1^- = 0,3 \Gamma$  (fréquences de Rabi égales pour les 2 ondes)

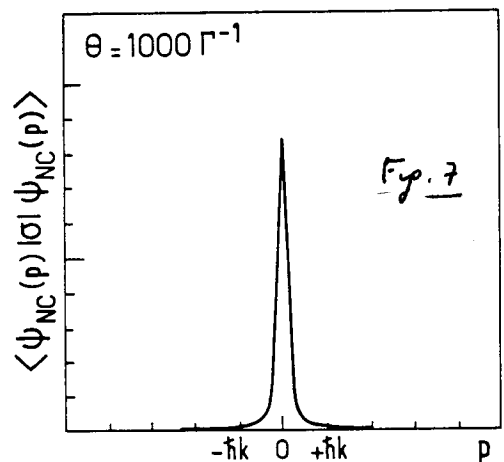


Fig. 7 (Extrait de (2)). Population de l'état  $|\psi_{NC}(p)\rangle$  en fonction de  $p$ .  $\delta = 0, \Omega_1^+ = \Omega_1^- = 0,3 \Gamma$   
 A la même échelle, la population de  $|\psi_c(p)\rangle$  ne serait pas visible.

Largeur  $\delta p$  des pics de la distribution d'impulsion

- La discussion physique simple du cours précédent (voir § 2d) nous a permis de prévoir que la largeur  $\delta p$  autour de  $p=0$  des états  $|\Psi_{nc}(p)\rangle$  dans lesquels l'atome restait piégé pendant le temps  $\Theta$  variait en  $\Omega_1/\sqrt{\Theta}$  et ne dépendait pas de  $\delta$ . Voir équation (5.31). A partir des résultats de l'intégration numérique des équations de Bloch optiques généralisées, on peut vérifier ces divers points.

- La figure 8 (extraite de (2)) montre que la largeur des pics de la figure 6 (ou du pic unique de la figure 7) est bien proportionnelle à  $1/\sqrt{\Theta}$  (Fig. 8a) et à  $\Omega_1$  (Fig. 8b). On note en particulier sur ces 2 figures que  $\delta p$  peut devenir bien inférieure à  $\hbar k$ .

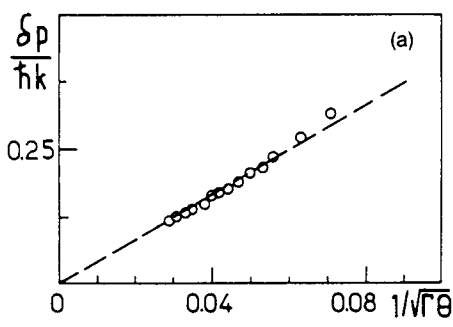


Fig. 8a  
 $\delta = 0$   
 $\Omega_1^+ = \Omega_1^- = 0.3 \Gamma$

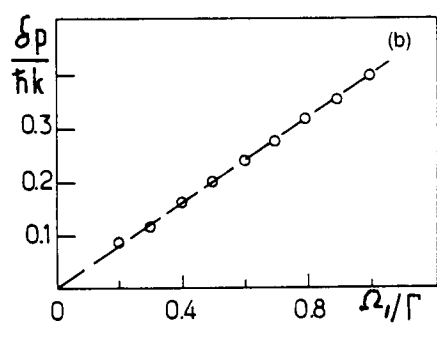


Fig. 8b  
 $\delta = 0$   
 $\Theta = 1000 \Gamma^{-1}$   
 $\Omega_1^+ = \Omega_1^- = \Omega_1$

- La figure 9 (extraite de (2)) montre que la structure en double pic subsiste que  $\delta$  soit nul ou non, et quel que soit le signe de  $\delta$ . Par ailleurs,  $\Omega_1^+ = \Omega_1^- = \Omega_1$ , étant fixé, on constate que la largeur de pics ne dépend pas de  $\delta$ , conformément à l'équation (5.31). Par contre, leur hauteur est plus grande pour  $\delta = 0$  que pour  $\delta \neq 0$ , ce qui se comprend bien puisque  $\Gamma'$  est alors plus grand, ce qui donne plus d'efficacité au pompage dans l'espace des vitesses.

On peut noter également quelques différences sur l'allure des courbes pour  $\delta > 0$  et  $\delta < 0$ . Pour leur interprétation, voir l'avis R. Kaiser (Ref. 4)

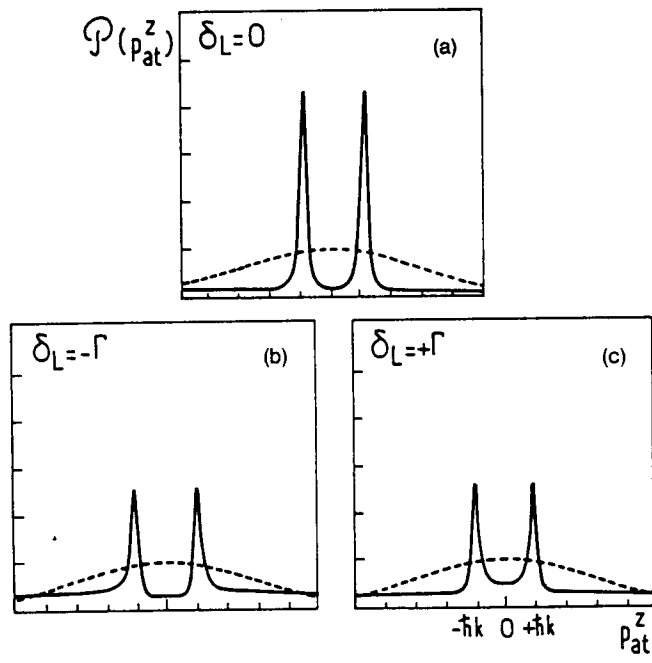


Fig. 9  
 $\Theta = 1000 \Gamma^{-1}$   
 $\Omega_1^+ = \Omega_1^- = 0.3 \Gamma$



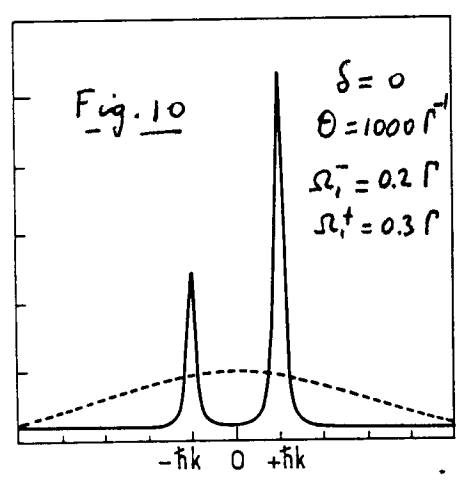
Effet d'un déséquilibre entre les 2 ondes  $\sigma^+$  et  $\sigma^-$

Si les 2 ondes lasers  $\sigma^+$  et  $\sigma^-$  n'ont pas la même amplitude, c'est à dire si  $\Omega_1^+ \neq \Omega_1^-$ , l'état piège  $|\Psi_{NC}(p=0)\rangle$  n'est plus donné par (5.21) mais par

$$|\Psi_{NC}(p=0)\rangle = \frac{1}{\Omega} \left[ \Omega_1^- |g_1, -\hbar k\rangle + \Omega_1^+ |g_1, +\hbar k\rangle \right] \quad (6.2)$$

avec 
$$\Omega = \sqrt{(\Omega_1^-)^2 + (\Omega_1^+)^2} \quad (6.3)$$

Les hauteurs des 2 pics en  $-\hbar k$  et  $+\hbar k$  sont alors inégales et respectivement proportionnelles à  $(\Omega_1^-)^2$  et  $(\Omega_1^+)^2$



La figure 10 (extrait de (2)) permet de vérifier un tel résultat. La hauteur du pic de gauche sur celle du pic de droite est bien égale à

$$\left( \frac{\Omega_1^-}{\Omega_1^+} \right)^2 = \left( \frac{0.2}{0.3} \right)^2 = \frac{4}{9} = 0,445$$

Variations de la hauteur et de l'aire des 2 pics avec  $\Theta$

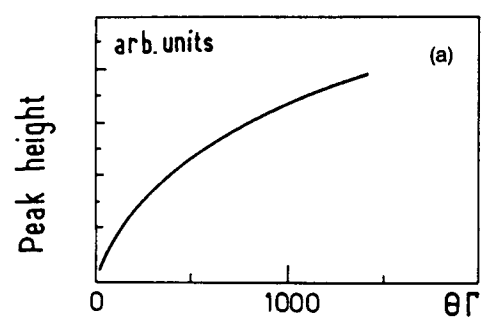
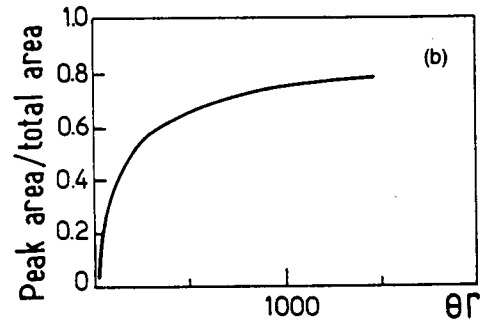


Fig. 11  
 $\delta = 0$   
 $\Omega_1^+ = \Omega_1^- = 0.3 \Gamma$



Les résultats sont représentés sur la Fig. 11 (extrait de (2)). La distribution d'impulsion initiale a une largeur  $\delta p_0 = \hbar k$  plus faible que celle utilisée pour la fig. 6 (courbe en pointillé, de largeur  $3\hbar k$ ).

On trouve que la hauteur des pics et l'aire sous chaque pic augmente avec  $\Theta$ . La figure 11 b montre notamment qu'une fraction importante (80%) des atomes peuvent être piégés.

Le problème du comportement asymptotique aux temps très longs reste ouvert. Est ce que l'aire sous les pics tend vers 1 quand  $\Theta \rightarrow \infty$  ou est ce qu'elle tend vers zéro? Une réponse numérique n'est pas suffisamment fiable. Il faudrait plutôt essayer de trouver une solution analytique aux temps très longs.

④ Une autre approche du problème basé sur une simulation

Monte-Carlo de l'évolution du système.

a) Idee générale

- Analyser les propriétés statistiques de la suite temporelle formée par les instants d'émission spontanée d'un photon par un atome. Déterminer en particulier la distribution des intervalles de temps entre 2 émissions spontanées successives.
- Essayer de comprendre de cette façon comment la fluorescence peut s'arrêter, au moins pendant un temps très long, et comment l'atome arrive dans les états piégés.

Au lieu de raisonner sur un ensemble statistique d'atomes, on essaie de suivre l'évolution au cours du temps d'un seul atome.

b) Principe de la méthode (Ref. 8)

(i) Etat de l'atome juste après un processus d'émission spontanée

- Nous avons vu plus haut (cf § 2c) que, juste après une émission spontanée (et une fois la trace prise sur  $p_x$  et  $p_y$ , et la moyenne effectuée sur la polarisation du photon émis et l'angle azimutal  $\phi_0$  de la direction d'émission), l'atome, parti de  $|e_0, p\rangle$ , se retrouve dans un mélange statistique des états  $|g_1, p'-u\rangle$  et  $|g_{-1}, p'-u\rangle$  avec des poids égaux,  $u$  étant égal à  $\hbar k \cos \theta_0$ , où  $\theta_0$  est l'angle avec  $Oz$  de la direction d'émission.

- L'atome a donc une chance sur 2 de tomber dans l'état  $|g_{-1}\rangle$  et une chance sur 2 de tomber dans l'état  $|g_1\rangle$ . Tirons au sort l'une de ces 2 possibilités et supposons que l'atome tombe dans  $|g_{-1}\rangle$ . Posons alors  $p'-u = p - \hbar k$ . Juste après l'émission spontanée, ayant eu lieu à un temps  $t$  pris pour origine ( $t=0$ ), l'atome est donc dans l'état  $|g_{-1}, p - \hbar k\rangle$  de  $\mathcal{F}(p)$ .

$$|\psi(t=0)\rangle = |g_{-1}, p - \hbar k\rangle \tag{6.4}$$

(ii) Evolution ultérieure de l'atome

- Tant que la prochaine émission spontanée n'a pas eu lieu, l'atome reste dans  $\mathcal{F}(p)$ . Puis un photon va être émis, puis un autre... L'état du système global "atome + photons de fluorescence" à l'instant  $t$  s'écrit donc

$$|\psi(t)\rangle = [c_0(t)|e_0, p\rangle + c_1(t)|g_1, p + \hbar k\rangle + c_{-1}(t)|g_{-1}, p - \hbar k\rangle] \otimes |0 \text{ photon de fluorescence}\rangle + \text{Etats avec 1, 2, 3... photons de fluorescence} \tag{6.5}$$

Les 2 premières lignes de (6.5) représentent la projection de  $|\psi(t)\rangle$  dans le sous-espace correspondant à 0 photon de fluorescence, que nous noterons  $\mathcal{E}_0$ .

- Dans  $E_0$ , l'émission spontanée est un processus qui fait passer l'atome de  $E_0$ , après son arrivée dans  $E_0$  à  $t=0$ . Comme nous l'avons déjà signalé page V-5, l'évolution de la projection de  $|\psi(t)\rangle$  dans  $E_0$  est régie par un hamiltonien effectif non hermitique, obtenu en ajoutant  $-i\hbar\Gamma/2$  à l'énergie de  $|e_0, p\rangle$  pour décrire l'instabilité de cet état. Dans la base  $\{|e_0, p\rangle, |g_+, p+\hbar k\rangle, |g_-, p-\hbar k\rangle\}$ , cet hamiltonien s'écrit

$$H_{eff} = \begin{pmatrix} \frac{p^2}{2M} - i\hbar\frac{\Gamma}{2} & +\frac{\hbar\tilde{\Omega}_1}{2\sqrt{2}} & -\frac{\hbar\tilde{\Omega}_1}{2\sqrt{2}} \\ +\frac{\hbar\tilde{\Omega}_1}{2\sqrt{2}} & \frac{(p+\hbar k)^2}{2M} + \hbar\delta & 0 \\ -\frac{\hbar\tilde{\Omega}_1}{2\sqrt{2}} & 0 & \frac{(p-\hbar k)^2}{2M} + \hbar\delta \end{pmatrix} \quad (6.6)$$

Pour obtenir l'état entre crochets de la 1<sup>ère</sup> ligne de (6.5), il faut résoudre l'équation de Schrödinger associée à (6.6) avec la condition initiale  $c_+(0) = 1, c_-(0) = c_0(0) = 0$ , découlant de (6.4).

(iii) Distributions des intervalles de temps séparant la première émission spontanée de la suivante.

- L'atome ne peut quitter  $E_0$  qu'à partir de  $|e_0, p\rangle$ . La probabilité pour que la prochaine émission spontanée (après la 1<sup>ère</sup> qui a eu lieu à  $t=0$ ) se produise entre  $t$  et  $t+dt$  est donc égale à  $\Gamma dt$  fois la probabilité d'occupation de l'état  $|e_0, p\rangle$  à l'instant  $t$

$$W(t)dt = \Gamma |c_0(t)|^2 dt \quad (6.7)$$

$W(t)$ , qui est le taux de départ de  $E_0$ , peut donc être également considéré comme la distribution des intervalles de temps  $\tau = t_{n+1} - t_n$  entre 2 émissions spontanées successives, la nième ayant lieu à  $t_n$ , la  $(n+1)$ <sup>ème</sup> à  $t_{n+1}$ .

- Nous avons vu plus haut (§ 2d) que les modes propres de désintégration de (6.6) ont une décroissance temporelle de la forme  $e^{-\gamma_j t}$  avec  $j=1, 2, 3$  et  $\gamma_1 \approx \Gamma/2, \gamma_2 \approx \Gamma'c/2, \gamma_3 \approx \Gamma'nc/2$ . Il s'ensuit que  $|c_0(t)|^2$  va être une superposition de 6 exponentielles  $e^{-(\gamma_j + \gamma_l)t}$  avec  $j, l=1, 2, 3$ . Si  $p$  est suffisamment proche de zéro,  $\gamma_3 = \Gamma'nc/2$  devient très petit, de sorte que  $|c_0(t)|^2$  peut décroître très lentement aux temps longs. On peut alors attendre très longtemps après une émission spontanée avant d'avoir la suivante. La fluorescence s'arrête très longtemps, ce qui se traduit par l'apparition de "périodes noires" dans la fluorescence.

L'analyse des périodes noires observables sur un ion piégé au moyen de la "fonction délai"  $W(t)$  a été faite pour la 1<sup>ère</sup> fois dans la référence 9. Voir aussi la Ref. 10.

(iv) Etat de l'atome entre 2 émissions spontanées successives

Supposons que le 1<sup>er</sup> photon émis après celui à  $t=0$ , le soit à  $t_1$ . On sait alors, a posteriori, que entre 0 et  $t_1$ , l'atome était dans  $E_0$ . Son état entre 0 et  $t_1$ , est alors décrit par le ket norme'

$$\frac{c_0(t) |e_0, p\rangle + c_1(t) |g_+, p+\hbar k\rangle + c_{-1}(t) |g_-, p-\hbar k\rangle}{[|c_0(t)|^2 + |c_1(t)|^2 + |c_{-1}(t)|^2]^{1/2}} \quad (6.8)$$

(v) Etat de l'atome juste après la prochaine émission

- Supposons que la prochaine émission se produise à  $t_1$ .

On peut alors tirer au sort l'état ( $|g_- \rangle$  ou  $|g_+ \rangle$ ) dans lequel l'atome va "tomber" ainsi que l'angle  $\theta_1$ , avec  $Oz$  du photon émis (déterminé par le diagramme de rayonnement de l'état  $e$ ).

- Le point important est que l'atome va ainsi changer de famille (voir § 2c), de sorte que le "label"  $p_1$  de la nouvelle famille dans laquelle il arrive est différent.

Or, la fonction délai  $W(t)$  dépend de  $p$  (voir 6.6). La nouvelle fonction délai va donc être différente de la précédente et la distribution des intervalles de temps entre le 1<sup>er</sup> photon spontané et le 2<sup>ème</sup> n'est pas la même qu'entre le 2<sup>ème</sup> et le 3<sup>ème</sup>. Il s'agit là d'une différence essentielle avec la situation analysée dans la Ref. 9, où la fonction délai reste toujours la même.

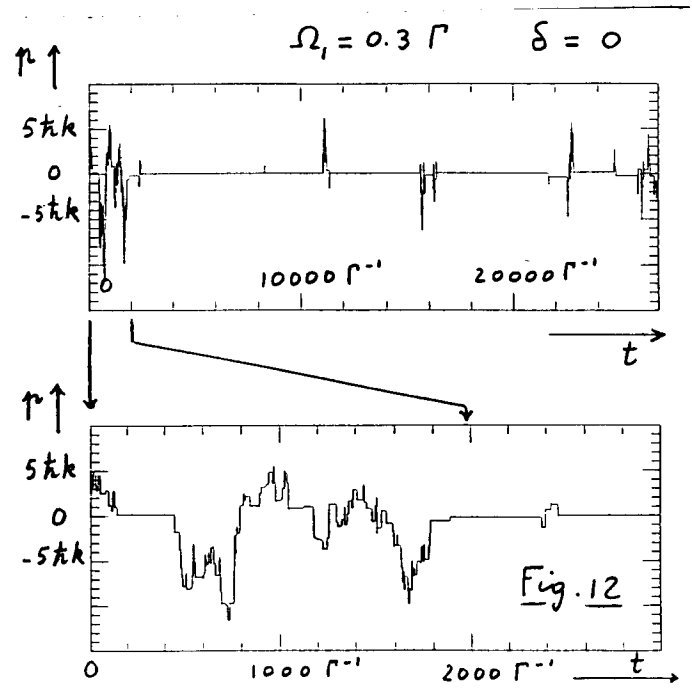
- A partir de là, on recommence le même calcul que précédemment en changeant simplement  $p$  par  $p_1$ , et ainsi de suite... On réalise ainsi une simulation Monte-Carlo de la suite temporelle des processus d'émission spontanée.

c) Résultats de la simulation

La figure 12 (extraite de la référence 8) donne les variations du "label"  $p$  de la famille  $F(p)$  dans laquelle se trouve l'atome avec le temps  $t$ .

Chaque discontinuité correspond à une émission spontanée, c'est à dire encore à un saut quantique au cours duquel  $p$  change de manière aléatoire.

Entre 2 sauts quantiques successifs, l'atome reste dans la même famille  $F(p)$ . L'intervalle de temps entre un saut et le suivant (période noire) est une variable aléatoire choisie suivant la loi  $W_p(t)$  qui dépend de  $p$



d) Discussions physique

- Le résultat de la simulation (Fig. 12) montre clairement les corrélations qui existent entre  $p$  et la longueur des périodes noires. Quand, au cours de sa marche au hasard,  $p$  se rapproche de 0, la longueur des périodes noires augmente considérablement.
- Interprétation de l'"entrée" dans les résonances noires. Revenons à (6.8). Le numérateur peut aussi se développer sur les 3 modes propres de désintégration associés à (6.6). Si  $p$  se rapproche de zéro, l'un de ces modes propres, celui associé à  $|\Psi_{NC}\rangle$ , a un temps de vie très long devant les 2 autres. Comme le vecteur d'état (6.8) est normalisé et que les 2 autres modes s'atténuent très vite, le poids relatif du mode  $|\Psi_{NC}\rangle$  va devenir très vite très prépondérant. Si aucune émission spontanée n'a eu lieu pendant les temps caractéristiques des 2 autres modes, c'est à dire si on est vraiment entré dans une période noire, l'état (6.8) devient très vite égal à  $|\Psi_{NC}\rangle$ . Le "filtrage" conduisant à  $|\Psi_{NC}\rangle$  apparaît ainsi très clairement.
- La simulation Monte Carlo que nous venons de décrire n'est pas une simulation classique. Elle préserve toutes les propriétés quantiques du système. Elle donne un nouvel éclairage sur la solution des équations de Bloch optiques généralisées, en remplaçant l'analyse des propriétés du mélange statistique associé à l'opérateur densité par l'étude de l'évolution (aléatoire) du vecteur d'état d'un seul atome au cours du temps.
- La méthode précédente peut être généralisée pour inclure l'effet de l'excitation par un champ incohérent à large bande spectrale (voir fin du cours de cette année)

Une approche plus générale, ne reposant pas sur l'utilisation de la fonction délai, a été présentée récemment (voir Ref. 11). Elle donne une simulation Monte Carlo de l'évolution de la fonction d'onde d'un système dissipatif rigoureusement équivalente à celle déduite des équations de Bloch optiques. Elle semble beaucoup mieux adaptée aux calculs numériques: il est en effet plus simple de manipuler un vecteur d'état à  $N$  composantes qu'une matrice densité à  $N^2$  éléments, quand  $N \gg 1$ . Cette méthode devrait donc avoir un large champ d'applications.

⑤ Extension à 2 et 3 dimensions

Tous les paragraphes précédents sont relatifs à des modèles à 1 dimension. Plusieurs propositions ont été publiées pour étendre la méthode de piègeage cohérent de populations sélectif à 2 dimensions (Références 2, 12, 13) ou à 3 dimensions (Références 12, 13). Nous suivons ici la présentation de la Référence 13, en nous limitant de plus à une transition  $J_g = 1 \leftrightarrow J_e = 1$ . D'autres transitions ont été également étudiées (Ref. 14).

a - Amplitude d'absorption d'un photon pour une transition  $1 \leftrightarrow 1$

- Nous ne pouvons plus, à 3 dimensions, ignorer le sous-niveau  $g_0$  de  $g$  et les 2 sous-niveaux  $e_{-1}$  et  $e_1$  de  $e$ .

- En représentation  $\{|\vec{r}\rangle\}$ , l'état le plus général dans  $g$  est représenté par une fonction d'onde à 3 composantes :

$$\langle \vec{r} | \Psi_g \rangle = \Psi_g(\vec{r}) = \Psi_{-1}(\vec{r}) |g_{-1}\rangle + \Psi_0(\vec{r}) |g_0\rangle + \Psi_1(\vec{r}) |g_1\rangle \quad (6.9)$$

Les 3 fonctions d'ondes  $\Psi_q(\vec{r})$ , avec  $q = -1, 0, +1$ , sont les composantes sphériques d'un champ vectoriel  $\vec{\Psi}_g(\vec{r})$ , dont les composantes cartésiennes dans la base

$$\begin{cases} |g_x\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}} [ |g_1\rangle - |g_{-1}\rangle ] \\ |g_y\rangle = +\frac{i}{\sqrt{2}} [ |g_1\rangle + |g_{-1}\rangle ] \\ |g_z\rangle = |g_0\rangle \end{cases} \quad (6.10)$$

sont notées  $\Psi_x(\vec{r})$ ,  $\Psi_y(\vec{r})$ ,  $\Psi_z(\vec{r})$

$$\vec{\Psi}_g(\vec{r}) = \Psi_x(\vec{r}) |g_x\rangle + \Psi_y(\vec{r}) |g_y\rangle + \Psi_z(\vec{r}) |g_z\rangle \quad (6.11)$$

- De même l'état le plus général dans  $e$  est décrit par le champ vectoriel

$$\vec{\Phi}_e(\vec{r}) : \{ \Phi_x(\vec{r}), \Phi_y(\vec{r}), \Phi_z(\vec{r}) \} \quad (6.12)$$

- Enfin, le champ laser lui-même,  $\vec{E}_L^+(\vec{r})$ , est un champ vectoriel

$$\vec{E}_L^+(\vec{r}) : \{ E_{Lx}^+(\vec{r}), E_{Ly}^+(\vec{r}), E_{Lz}^+(\vec{r}) \} \quad (6.13)$$

- A partir des propriétés des coefficients de Clebsch-Gordan d'une transition  $J_g = 1 \leftrightarrow J_e = 1$ , on peut alors montrer que l'amplitude  $\mathcal{A}$  de transition de  $\vec{\Psi}_g(\vec{r})$  à  $\vec{\Phi}_e(\vec{r})$  par absorption d'un photon dans l'onde  $\vec{E}_L^+(\vec{r})$  s'écrit

$$\mathcal{A} = \langle \Phi_e | V_{AL} | \Psi_g \rangle = C \int d^3r \vec{\Phi}_e(\vec{r}) \cdot [ \vec{E}_L^+(\vec{r}) \times \vec{\Psi}_g(\vec{r}) ] \quad (6.14)$$

Un tel résultat se comprend aisément en notant que le seul scalaire que l'on peut construire à partir des 3 vecteurs  $\vec{\Phi}_e$ ,  $\vec{\Psi}_g$ ,  $\vec{E}_L^+$  est leur produit mixte.

b - Conditions pour avoir un état piège.

(i) Si un état piège  $|\Psi_g^T\rangle$  existe, un atome porté dans cet état doit y demeurer indéfiniment. L'état  $|\Psi_g^T\rangle$  ne doit donc pas être couplé au champ laser, d'où une première condition

$$V_{AL} |\Psi_g^T\rangle = 0 \quad (6.15)$$

(ii) Il faut de plus que l'état  $|\Psi_g^T\rangle$  ne soit couplé à aucun autre état par l'hamiltonien atomique  $H_A$ . Si l'état piège  $|\Psi_g^T\rangle$

est en effet unique, tous les autres états sont instables et un couplage avec ces états, induit par  $H_A$ , rendrait  $|\Psi_g^T\rangle$  instable. On en déduit que  $|\Psi_g^T\rangle$  doit être état propre de  $H_A$ , de manière à n'être couplé qu'à lui-même par  $H_A$ . Si l'on suppose que les 3 sous-niveaux Zeeman  $g_{\pm 1}, g_0$  ont la même énergie intrinsèque (pas de champ magnétique appliqué), on doit donc avoir

$$H_A^{ext} |\Psi_g^T\rangle = \frac{\vec{p}^2}{2M} |\Psi_g^T\rangle = \frac{\hbar^2 k^2}{2M} |\Psi_g^T\rangle \tag{6.16}$$

En termes de fonctions d'onde, les 2 conditions (6.15) et (6.16) s'écrivent, compte tenu de (6.14)

$$\int d^3r \vec{\Phi}_e(\vec{r}) \cdot [\vec{E}_L^+(\vec{r}) \times \vec{\Psi}_g^T(\vec{r})] = 0 \quad \forall \vec{\Phi}_e(\vec{r}) \tag{6.17}$$

$$-\hbar^2 \Delta \vec{\Psi}_g^T(\vec{r}) = \mu^2 \vec{\Psi}_g^T(\vec{r}) \tag{6.18}$$

C - Détermination de l'état piège

- Montrons d'abord qu'il est possible de trouver simplement une solution des équations (6.17) et (6.18). Il suffit de prendre

$$\vec{\Psi}_g^T(\vec{r}) = \mu \vec{E}_L^+(\vec{r}) \tag{6.19}$$

où  $\mu$  est une constante.

En effet, la condition (6.17) est automatiquement satisfaite puisque  $\vec{E}_L^+(\vec{r}) \times \vec{E}_L^+(\vec{r}) = \vec{0}$ . Par ailleurs, comme le champ  $\vec{E}_L^+(\vec{r})$  est monochromatique, de fréquence  $\omega_L$ ,  $\vec{E}_L^+(\vec{r})$  est nécessairement une superposition d'ondes planes ayant toutes des vecteurs d'onde de même module  $k_L = \omega_L/c$ , de sorte que

$$\Delta \vec{E}_L^+(\vec{r}) = -k_L^2 \vec{E}_L^+(\vec{r}) \tag{6.20}$$

En reportant (6.19) dans (6.18), et en utilisant (6.20), on trouve bien alors que (6.18) est vérifié avec  $\mu^2 = \hbar^2 k_L^2$ .

En prenant pour décrire l'atome dans  $g$ , le même champ vectoriel que celui qui décrit l'onde laser, on obtient donc un état piège satisfaisant les 2 conditions (6.17) et (6.18).

- L'équation (6.19) définit bien un état piège. Mais nous n'avons pas démontré qu'il n'y a pas d'autre état piège.

Donnons un contre-exemple. Considérons une configuration laser formée de 3 ondes planes de même fréquence et dont les vecteurs d'ondes  $\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{k}_3$  sont dans un même plan  $xOy$ , avec

$$|\vec{k}_1| = |\vec{k}_2| = |\vec{k}_3| = \frac{\omega_L}{c} = k_L \tag{6.21}$$

Supposons maintenant que, au lieu de prendre  $\mu$  constant dans (6.19), nous remplaçons  $\mu$  par  $e^{ikz}$ , où  $k$  est une constante

$$\vec{\Psi}_g^T(\vec{r}) = e^{ikz} \vec{E}_L^+(\vec{r}) \quad (6.22)$$

La condition (6.17) est bien sur toujours vérifiée puisque  $\vec{\Psi}_g^T(\vec{r})$  reste parallèle à  $\vec{E}_L^+$ . Par ailleurs, la multiplication par  $e^{ikz}$  dans (6.22) revient à ajouter aux 3 vecteurs d'onde  $\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{k}_3$  qui figurent dans le développement de  $\vec{E}_L^+$  en ondes planes, un vecteur d'onde  $k\vec{e}_3$ , parallèle à  $Oz$ . Comme  $k\vec{e}_3$  est perpendiculaire à  $xOy$ , donc à  $\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{k}_3$ , les 3 vecteurs d'ondes  $\vec{k}_i + k\vec{e}_3$  ont même module, égal à  $\sqrt{k_L^2 + k^2}$ , de sorte que

$$\frac{\vec{P}^2}{2M} e^{ikz} \vec{E}_L^+(\vec{r}) = \frac{\hbar^2(k_L^2 + k^2)}{2M} e^{ikz} \vec{E}_L^+(\vec{r}) \quad (6.23)$$

Si  $\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{k}_3$  sont coplanaires, nous avons donc une infinité d'états piégés qui diffèrent les uns des autres par l'impulsion le long du plan  $(\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{k}_3)$ . Le piégeage n'est donc qu'à 2 dimensions.

- La discussion précédente suggère donc que, pour avoir un piège unique à 3 dimensions, il faut prendre une configuration laser formée d'au moins 4 ondes planes de vecteurs d'ondes  $\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{k}_3, \vec{k}_4$ , tous de même module, et tels qu'il existe une seule sphère, de rayon  $k_L$ , centrée en  $O$ , et passant par les extrémités de ces 4 vecteurs d'onde. Toute translation  $\vec{K}$  détruit alors l'égalité entre les modules des 4 vecteurs  $\vec{k}_i + \vec{K}$  ( $i=1,2,3,4$ ), et l'égalité (6.23), donc (6.18), n'est plus vérifiée.

Un état piégé à 3 dimensions est donc nécessairement une superposition linéaire d'au moins 4 états d'impulsion de même module et de directions différentes, et qui diffèrent aussi par l'état interne.

## Références (suite de la liste de la page V-9)

- (7) J. Dalibard and C. Cohen-Tannoudji, *J. Phys.* **B18**, 1661 (1985).
- (8) C. Cohen-Tannoudji, F. Bardou and A. Aspect, *Proceedings of Temicol's 91*, Ed. by M. Ducloy, E. Giacobino, G. Camy, World Scientific, à paraître.
- (9) C. Cohen-Tannoudji and J. Dalibard, *Europhys. Lett.* **1**, 441 (1986)
- (10) P. Zoller, M. Marte and D.F. Walls, *Phys. Rev.* **A35**, 198 (1987)
- (11) J. Dalibard, Y. Castin and K. Mølmer, à paraître.
- (12) F. Mauri, F. Papoff and E. Arimondo, in *Proceedings of Light Induced Kinetic Effects*, L. Moi, S. Gozzini, C. Gabbanini, E. Arimondo and F. Strumia eds, (E.T.S. Editrice, Pisa, 1991)
- (13) M.A. Ol'shanii and V.G. Minogin, *Proceedings of L.I.K.E.* (Même référence que 12)
- (14) F. Papoff, F. Mauri and E. Arimondo, *JOSA B*, à paraître.



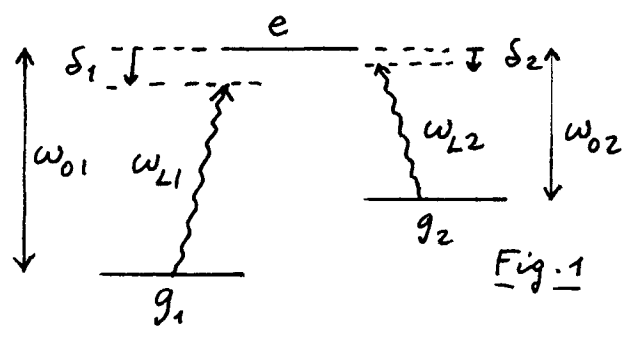
Transfert adiabatique de population par utilisation d'états non couplés

Buts de ce cours

Reprendre la configuration A étudié dans le cours IV (avec 3 niveaux  $g_1, g_2, e$ ). Montrer que si l'on fait varier dans le temps, de manière appropriée, les amplitudes des ondes  $\omega_{L1}$  et  $\omega_{L2}$  agissant sur l'atome, on peut faire passer l'atome de  $g_1$  à  $g_2$  avec une efficacité voisine de 100%.

① Introduction - Problème physique

a. Disposition des niveaux



Disposition analogue à celle du système étudié dans le cours IV.

A la différence du cours IV, on ne suppose pas ici que le niveau  $e$  ne peut se désintégrer radiativement que vers  $g_1$  et  $g_2$ .

$g_1$  et  $g_2$  peuvent faire partie d'un ensemble plus vaste de sous-niveaux (par exemple niveaux

vibrationnels de l'état électronique fondamental d'une molécule). Ce qui distingue  $g_1$  et  $g_2$  des autres sous-niveaux, c'est que, d'une part, on part à  $t=0$  de  $g_1$ , et que, d'autre part, la condition de résonance Raman entre  $g_1$  et  $g_2$

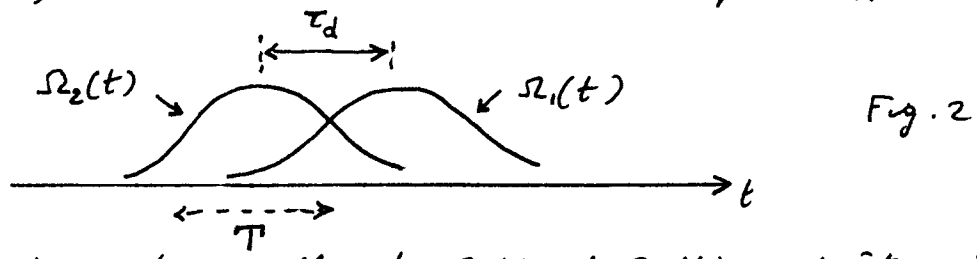
$$\omega_{L1} - \omega_{L2} = \omega_{01} - \omega_{02} \iff \delta_1 = \delta_2 \quad (7.1)$$

est supposée satisfaite.

b. Excitations laser dépendant du temps

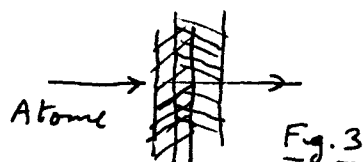
- Les fréquences de Rabi  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  caractérisant le couplage de l'atome avec les ondes laser  $\omega_{L1}$  et  $\omega_{L2}$  sont proportionnelles aux amplitudes des champs électriques de ces ondes.

- Nous supposons ici que les fréquences de Rabi "vues" par l'atome sont des fonctions du temps, ayant la forme d'impulsions de largeur  $T$ , éventuellement décalées l'une par rapport à l'autre (Fig. 2)



- Cette dépendance temporelle de  $\Omega_1(t)$  et  $\Omega_2(t)$  peut être obtenue
  - (i) soit en prenant un atome fixe éclairé par 2 impulsions laser aux fréquences  $\omega_{L1}$  et  $\omega_{L2}$
  - (ii) soit en prenant un atome de vitesse  $v$ , traversant à

angle droit 2 faisceaux laser  
continus éventuellement décalés  
spatialement (Fig. 3)



c- But poursuivi

- Peut-on choisir la forme des impulsions de la figure 2 de manière à transférer l'atome (ou la molécule) de  $g_1$  à  $g_2$  avec une efficacité maximale ?
- Pourquoi un tel transfert serait-il intéressant ? Il permettrait, en réglant  $\omega_1 - \omega_2$ , de partir d'un jet de molécules dans l'état vibrationnel  $v=0$  de l'état électronique fondamental  $g$  et de les porter sélectivement dans un état vibrationnel excité  $v \neq 0$  du même état électronique  $g$ . Possibilité d'étudier ensuite comment par exemple la réactivité chimique de la molécule dépend de son excitation vibrationnelle.

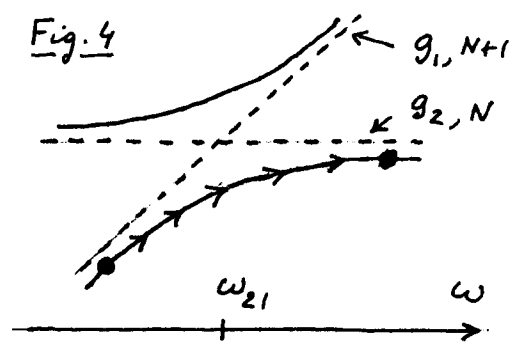
d- Quelques méthodes possibles déjà connues

(i) Cas où la transition  $g_1 \leftrightarrow g_2$  est active (par exemple en infrarouge)

- Une excitation résonnante directe (sans passer par  $e$ ) de la transition  $g_1 \leftrightarrow g_2$  permet de passer de  $g_1$  à  $g_2$  avec une impulsion  $\pi$  (il faut alors bien contrôler la forme de l'impulsion du champ qui excite la transition  $g_1 \leftrightarrow g_2$ )
- Autre méthode possible : passage adiabatique rapide sur la résonance  $g_1 \leftrightarrow g_2$ .

Interprétation en termes d'atome habillé sur la figure 4.

- En pointillés, niveaux  $g_1, N+1$  et  $g_2, N$  du système atome + photons du champ  $\omega$  excitant  $g_1 \leftrightarrow g_2$  (droites qui se croisent pour  $\omega = \omega_{21} = (E_{g_2} - E_{g_1})/\hbar$ )
- En traits pleins, niveaux perturbés formant un anticroisement.



En faisant croiser  $\omega$  autour de  $\omega = \omega_{21}$ , suffisamment lentement pour suivre adiabatement un niveau perturbé donné, mais aussi suffisamment rapidement pour ne pas être gêné par les processus de relaxation (par exemple, collisions), on peut passer continûment de  $g_1, N+1$  à  $g_2, N$

- Inconvénient de ces 2 méthodes : les règles de sélection des transitions  $g_1 \leftrightarrow g_2$  limitent l'excitation vibrationnelle à  $\Delta v = 1$ .

(ii) Cas où la transition  $g_1 \leftrightarrow g_2$  est inactive en infrarouge

- Diffusion Raman stimulée très loin de résonance.
- Excitation résonnante de la molécule dans  $e$  suivie d'une émission stimulée résonnante sur  $e - g_2$ .
- Difficultés rencontrées : éviter, si l'on passe par  $e$ , les

des excitations radiatives vers des sous-niveaux de  $g$  autres que  $g_2$ . C'est la raison pour laquelle on utilise une diffusion Raman loin de résonance (mais elle est alors peu efficace), ou une émission stimulée résonnante (mais le passage dans  $e$  introduit alors nécessairement des "fuites").

Voici références à ces diverses méthodes mentionnées dans la référence 2.

### e. Méthode étudiée ici

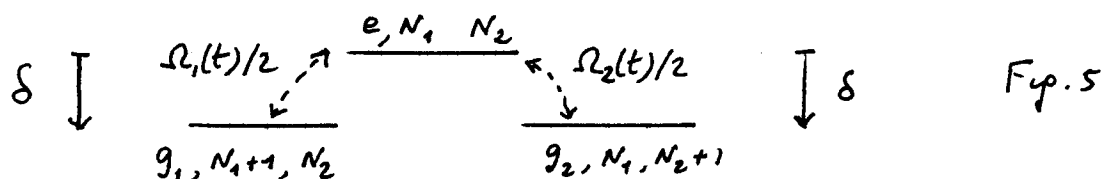
- On utilise l'interférence prantique destructive entre les amplitudes d'absorption  $g_1 \rightarrow e$  et  $g_2 \rightarrow e$ , et on reste à chaque instant dans un état non couplé qui ne contient aucune contribution de  $e$  (donc aucune fuite radiative à partir de  $e$  vers des niveaux autres que  $g_2$ ).
- Les variations temporelles de  $\Omega_1(t)$  et  $\Omega_2(t)$  font que l'état non couplé est une superposition linéaire de  $g_1$  et  $g_2$  qui dépend de  $t$ . On peut choisir ces variations temporelles pour que l'état non couplé passe continûment de  $g_1$  à  $t = -\infty$  à  $g_2$  à  $t = +\infty$ , les variations temporelles des fonctions d'onde étant par ailleurs suffisamment lentes pour que la molécule suive adiabotiquement l'état non couplé, en restant dans cet état.

## ② Diagramme d'énergie adiabotique

- Revenons à la multiplicité  $E(N_1, N_2)$ , introduite dans le cours IV, et formée par les 3 niveaux

$$E(N_1, N_2) = \{ |e, N_1, N_2\rangle, |g_1, N_1+1, N_2\rangle, |g_2, N_1, N_2+1\rangle \} \quad (7.2)$$

et représentée sur la figure 5 ci-dessous



Nous supposons ici que les 2 désaccords sont égaux ( $\delta_1 = \delta_2 = \delta$ ), voir Eq.(7.1). Les couplages  $\Omega_1(t)/2$  et  $\Omega_2(t)/2$  sont représentés par les flèches en pointillés de la figure.

- Supposons que les fréquences de Rabi  $\Omega_1(t)$  et  $\Omega_2(t)$  soient "figées" à la valeur qu'elles ont à l'instant  $t$ . Nous allons ci-dessous calculer les états propres et valeurs propres de l'hamiltonien du système pour ces valeurs de  $\Omega_1(t)$  et  $\Omega_2(t)$ , puis tracer en fonction de  $t$ , considéré comme un paramètre, le diagramme énergétique correspondant.

### a) Etats propres et valeurs propres de l'hamiltonien

#### Etat non couplé

- D'après les résultats du cours IV, nous savons que, si les

fréquences de Rabi restent figées aux valeurs  $\Omega_1(t)$  et  $\Omega_2(t)$  qu'elle prennent à l'instant  $t$ , il y a dans  $\mathcal{E}(N_1, N_2)$  un état non-couplé aux lasers qui est donné par

$$|\Psi_{NC}(t)\rangle = \frac{\Omega_2(t)|g_1, N_1+1, N_2\rangle - \Omega_1(t)|g_2, N_1, N_2+1\rangle}{\Omega(t)} \quad (7.3)$$

avec

$$\Omega(t) = \sqrt{\Omega_1^2(t) + \Omega_2^2(t)} \quad (7.4)$$

état que l'on peut encore écrire

$$|\Psi_{NC}(t)\rangle = \cos\theta(t)|g_1, N_1+1, N_2\rangle - \sin\theta(t)|g_2, N_1, N_2+1\rangle \quad (7.5)$$

avec

$$\cos\theta(t) = \frac{\Omega_2(t)}{\Omega(t)} \quad \sin\theta(t) = \frac{\Omega_1(t)}{\Omega(t)} \quad \tan\theta(t) = \frac{\Omega_1(t)}{\Omega_2(t)} \quad (7.6)$$

- En prenant pour zéro d'énergie, l'énergie de l'état  $|e, N_1, N_2\rangle$  de la figure 5, on trouve que l'énergie  $E_{NC}(t)$  de  $|\Psi_{NC}(t)\rangle$  est indépendante de  $t$  et vaut

$$E_{NC}(t) = E_{NC} = \hbar\delta \quad (7.7)$$

### Etat couplé

La combinaison linéaire de  $|g_1, N_1+1, N_2\rangle$  et  $|g_2, N_1, N_2+1\rangle$  orthogonale à (7.3)

$$\begin{aligned} |\Psi_C(t)\rangle &= \frac{\Omega_1(t)}{\Omega(t)} |g_1, N_1+1, N_2\rangle + \frac{\Omega_2(t)}{\Omega(t)} |g_2, N_1, N_2+1\rangle \\ &= \sin\theta(t) |g_1, N_1+1, N_2\rangle + \cos\theta(t) |g_2, N_1, N_2+1\rangle \end{aligned} \quad (7.8)$$

est couplé au laser puisque

$$\langle e, N_1, N_2 | V_{AL} | \Psi_C(t) \rangle = \frac{\hbar\Omega(t)}{2} \neq 0 \quad (7.9)$$

### Autres états propres et valeurs propres de l'hamiltonien.

- Les états propres et valeurs propres de  $H$ , autres que  $|\Psi_{NC}(t)\rangle$  et  $E_{NC}(t)$  donnés en (7.3) et (7.7), sont obtenus en considérant les 2 niveaux  $|e_0, N_1, N_2\rangle$  et  $|\Psi_C(t)\rangle$ , séparés par  $\hbar\delta$  et couplés par un élément de matrice  $\hbar\Omega(t)/2$ .

- Un calcul élémentaire donne alors (en utilisant le même angle  $\phi$  que dans la référence 2) les 2 valeurs propres

$$\begin{cases} |\Psi_+(t)\rangle = \sin\phi(t) [\sin\theta(t)|g_1, N_1+1, N_2\rangle + \cos\theta(t)|g_2, N_1, N_2+1\rangle] + \cos\phi(t)|e, N_1, N_2\rangle & (7.10.a) \\ |\Psi_-(t)\rangle = \cos\phi(t) [\sin\theta(t)|g_1, N_1+1, N_2\rangle + \cos\theta(t)|g_2, N_1, N_2+1\rangle] - \sin\phi(t)|e, N_1, N_2\rangle & (7.10.b) \end{cases}$$

correspondant aux 2 valeurs propres

$$E_+(t) = \frac{\hbar}{2} \left[ \delta + \sqrt{\delta^2 + \Omega^2(t)} \right] \quad (7.11.a)$$

$$E_-(t) = \frac{\hbar}{2} \left[ \delta - \sqrt{\delta^2 + \Omega^2(t)} \right] \quad (7.11.b)$$

l'angle  $\phi(t)$  étant donné par

$$\tan\phi(t) = \frac{\Omega(t)}{\sqrt{\Omega^2(t) + \delta^2} + \delta} \quad (7.12)$$

b) Diagramme énergétique

- La figure 6a, extraite de la référence 2, donne les variations avec  $t$  de  $\Omega_1(t)$  et  $\Omega_2(t)$ . On suppose que  $\Omega_2(t)$  précède  $\Omega_1(t)$ . Les 2 impulsions  $\Omega_1(t)$  et  $\Omega_2(t)$  sont supposées avoir la même largeur  $\Delta t$  et on utilise le temps réducteur  $\tau = t/\Delta t$

- La figure 6b représente les variations avec  $\tau$  des énergies  $E_{NC}(\tau)$ ,  $E_+(\tau)$  calculées plus haut en supposant  $\Omega_1(\tau)$  et  $\Omega_2(\tau)$  figées. 3 cas sont distingués suivant que  $\delta > 0$ ,  $\delta = 0$ ,  $\delta < 0$ .

Dans les 3 cas, l'énergie de  $|\Psi_{NC}\rangle$  reste la même  $\forall \tau$  et égale à  $\hbar\delta$ , alors que les énergies  $E_+$  et  $E_-$  de  $|\Psi_+\rangle$  et  $|\Psi_-\rangle$  se rapprochent d'autant plus que  $\Omega(t)$  est plus grand.

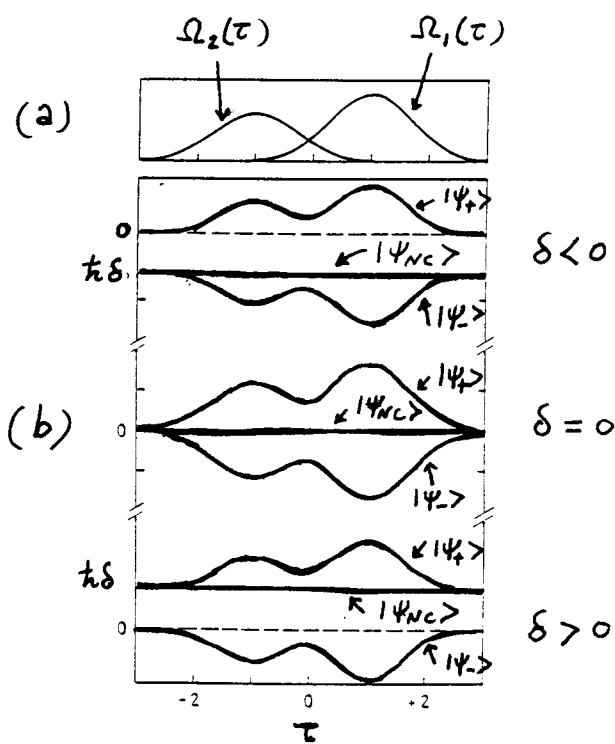


Fig. 6 (extraite de la Ref. 2)

3) Evolution temporelle du système.

a - Discussion qualitative

- On suppose maintenant que l'atome est soumis aux 2 impulsions de la figure 6a, et se trouve dans l'état  $|g_1, N_1, N_2\rangle$  juste avant le début de ces impulsions. Il s'agit de résoudre l'équation de Schrödinger décrivant son évolution temporelle et de déterminer dans quel état final il va se trouver juste après les 2 impulsions.

- A chaque instant  $t$ , les 3 états  $|\Psi_{NC}(t)\rangle$ ,  $|\Psi_+(t)\rangle$ ,  $|\Psi_-(t)\rangle$  déterminés plus haut, qui sont les états propres de  $H(t)$ , forment une base sur laquelle on peut développer l'état  $|\Psi(t)\rangle$  du système

$$|\Psi(t)\rangle = c_{NC}(t) |\Psi_{NC}(t)\rangle + c_+(t) |\Psi_+(t)\rangle + c_-(t) |\Psi_-(t)\rangle \quad (7.13)$$

Lorsqu'on écrit l'équation de Schrödinger

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\Psi(t)\rangle = H(t) |\Psi(t)\rangle \quad (7.14)$$

et qu'on utilise le développement (7.13), l'action de  $H(t)$  sur  $|\Psi(t)\rangle$  est simple puisque ce sont les états propres de  $H(t)$  qui interviennent dans (7.13). Par contre, comme ces états propres dépendent de  $t$ , apparaissent également dans le 1<sup>er</sup> membre de (7.14) des termes de la forme  $i\hbar c_j(t) \frac{d}{dt} |\Psi_j(t)\rangle$  (avec  $j = NC, +, -$ ), de sorte que  $\dot{c}_j(t)$  n'est pas complétement déterminé par  $c_j(t)$ . On obtient en fait

$$\dot{c}_j(t) = - \frac{i}{\hbar} E_j(t) c_j(t) - \sum_l c_l(t) \langle \Psi_j(t) | \dot{\Psi}_l(t) \rangle \quad (7.15)$$

avec  $(j, l = NC, +, -)$

- Si la vitesse de variations des états propres de  $H(t)$  est suffisamment faible, de manière plus précise si

$$|\langle \psi_j(t) | \dot{\psi}_e(t) \rangle| \ll \frac{1}{\hbar} |E_j(t) - E_e(t)| \quad (7.16)$$

avec  $j \neq e$ , on peut négliger les couplages non diagonaux introduits par les derniers termes de (7.15) ( $\Sigma$ ) et montrer alors qu'un système initialement dans  $|\psi_j(t)\rangle$  reste dans l'état qui se déduit de  $|\psi_j(t)\rangle$  par continuité.

En d'autres termes, le diagramme d'énergie de la figure 6 est balayé si lentement en  $\tau$ , que le système, entrant dans l'un des 3 états propres de  $H(t)$ , suit adiabatiquement cet état et sort dans cet état. En particulier, si le système entre dans l'état non couplé  $|\psi_{NC}(-\infty)\rangle$  il sort dans l'état non couplé  $|\psi_{NC}(+\infty)\rangle$ .

- Supposons que l'impulsion  $\omega_{L2}$  précède l'impulsion  $\omega_{L1}$ , comme c'est le cas sur la figure 6. On a alors, pour  $\tau = -\infty$ , plus exactement pour les valeurs de  $\tau$  où  $\Omega_2(\tau)$  commence à croître,  $\Omega_1(\tau)$  étant encore nul

$$\tau \rightarrow -\infty, \quad \frac{\Omega_2(\tau)}{\Omega(\tau)} \simeq 1, \quad \frac{\Omega_1(\tau)}{\Omega(\tau)} \simeq 0 \quad (7.17)$$

En utilisant (7.3), on voit alors que

$$\tau \rightarrow -\infty \quad |\psi_{NC}(\tau)\rangle \simeq |g_1, N_1+1, N_2\rangle \quad (7.18)$$

Le même raisonnement donne pour  $\tau \rightarrow \infty$

$$\tau \rightarrow +\infty \quad \frac{\Omega_1(\tau)}{\Omega(\tau)} \simeq 1, \quad \frac{\Omega_2(\tau)}{\Omega(\tau)} \simeq 0 \quad (7.19)$$

de sorte que, d'après (7.3)

$$\tau \rightarrow +\infty \quad |\psi_{NC}(\tau)\rangle \simeq -|g_2, N_1, N_2+1\rangle \quad (7.20)$$

On trouve <sup>(ainsi)</sup> que, si les 2 impulsions laser sont suffisamment lentes et si l'impulsion  $\omega_{L2}$  précède l'impulsion  $\omega_{L1}$ , on peut faire passer le système de  $g_1$  à  $g_2$  avec une efficacité proche de 1

- Insistons sur le fait que  $\omega_{L2}$  doit précéder  $\omega_{L1}$ , condition qui n'est pas intuitive. On s'attendrait plutôt à ce qu'il faille d'abord faire passer l'atome de  $g_1$  à  $e$  par l'impulsion  $\omega_{L1}$ , puis de  $e$  à  $g_2$  par l'impulsion  $\omega_{L2}$ , donc avoir l'impulsion à  $\omega_{L1}$  précédant celle à  $\omega_{L2}$ . En fait, le passage  $g_1 \rightarrow g_2$  n'est pas dû ici à un mécanisme en 2 étapes  $g_1 \rightarrow e$  puis  $e \rightarrow g_2$ . On utilise plutôt le suivi adiabatique de l'état non couplé, qui à tout instant ne contient aucune contamination de  $e$  (voir 7.5)

Et si l'on veut que, lorsque la 1<sup>ère</sup> impulsion démarre, l'état  $|g_1\rangle$  soit l'état non couplé, il faut bien que cette 1<sup>ère</sup> impulsion soit à la fréquence  $\omega_{L2}$  pour ne pas agir sur l'état  $|g_1\rangle$ .

- La discussion précédente pourrait laisser croire que l'état  $|e\rangle$  ne joue aucun rôle et que, seule, la condition de résonance Raman  $\omega_{L1} - \omega_{L2} = E_{g_1} - E_{g_2}$  est importante. En fait, il faut qu'il y ait un état  $e$  qui se ne soit pas trop loin de résonance, et ceci, à cause de la condition de validité de l'approximation

adiabatique (7.16). Cette condition impose en effet que les 3 niveaux de la figure 5 doivent être suffisamment écartés les uns des autres. Loin de résonance, l'écart entre  $|\Psi_{NC}\rangle$  et  $|\Psi_-\rangle$  (pour  $\delta < 0$ ), entre  $|\Psi_{NC}\rangle$  et  $|\Psi_+\rangle$  (pour  $\delta > 0$ ) est de l'ordre du déplacement lumineux de l'état fondamental. Pour une intensité laser donnée, il faut que le désaccord ne soit pas trop grand si l'on veut que le membre de droite de (7.16), de l'ordre du déplacement lumineux, soit plus grand que le membre de gauche, de l'ordre de  $1/\Delta t$  où  $\Delta t$  est la durée des impulsions (voir l'estimation de  $|\langle \Psi_j | \dot{\Psi}_0 \rangle|$  donnée dans le § c ci-dessous). En fait, la condition (7.16) est la plus facile à satisfaire à résonance ( $\delta=0$ ), quand l'écart entre  $|\Psi_{NC}\rangle$  et  $|\Psi_{\pm}\rangle$  est de l'ordre de la fréquence de Rabi  $\hbar\Omega(t)$ .

Des arguments analogues permettent de montrer également que les 2 impulsions doivent avoir un recouvrement important si l'on veut que l'écart entre  $|\Psi_{NC}\rangle$  et  $|\Psi_{\pm}\rangle$  ne diminue pas trop entre les 2 impulsions.

- Comparons enfin brièvement cette méthode de transfert aux autres méthodes évoquées dans le § 1 d ci-dessus

- (i) Pourvu que la condition (7.16) soit satisfaite, le transfert  $g_1 \rightarrow g_2$  n'est pas sensible à la forme exacte des impulsions. On n'a pas de conditions d'impulsions  $\pi$  à satisfaire.
- (ii) L'atome (ou la molécule) ne passe jamais dans  $e$ , puisque le système reste toujours dans l'état non couplé, et ceci même si les 2 lasers sont résonnants ! On évite donc les désexcitations radiatives vers des états autres que  $g_2$ .

b - Etude plus quantitative

- Formulation plus précise de la condition de suivi adiabatique

$$|\langle \Psi_+ | \dot{\Psi}_{NC} \rangle|^2 + |\langle \Psi_- | \dot{\Psi}_{NC} \rangle|^2 \ll \frac{1}{\hbar^2} |E_{NC} - E_{\pm}|^2 \tag{7.21}$$

En utilisant (7.5) et (7.10), on trouve que le membre de gauche de (7.21) est égal à  $\dot{\theta}^2$ , c'est à dire encore d'après (7.6) à

$$|\langle \Psi_+ | \dot{\Psi}_{NC} \rangle|^2 + |\langle \Psi_- | \dot{\Psi}_{NC} \rangle|^2 = \dot{\theta}^2 = \left[ \frac{\dot{\Omega}_1 \Omega_2 - \Omega_1 \dot{\Omega}_2}{\Omega_1^2 + \Omega_2^2} \right]^2 \tag{7.22}$$

En se plaçant entre les 2 impulsions, au point où  $|\dot{\Omega}_1|$  et  $|\dot{\Omega}_2|$  ont les valeurs les plus élevées, de l'ordre de  $|\Omega_1|/\Delta t$  et  $|\Omega_2|/\Delta t$ , on voit que  $|\dot{\theta}|_{max}$  est de l'ordre de  $1/\Delta t$ .

Le membre de droite de (7.21) est de l'ordre de  $\Omega^2/|\delta|$  pour  $|\delta| \gg \Omega$  et de l'ordre de  $\Omega$  pour  $|\Omega| \gg \delta$

- Modèles solubles analytiquement

Pour certaines formes de impulsions lasers, on peut obtenir des solutions analytiques de l'équation de Schrödinger (voir Référence 3 et références in)

- Intégration numérique de l'équations de Schrödinger.

• Une telle étude, présentée dans la référence 2, confirme la discussion qualitative du § a ci dessus.

• La partie supérieure de la figure 7a montre les 2 impulsions laser  $\Omega_1(t)$  et  $\Omega_2(t)$ ,  $\Omega_2(t)$  précédant  $\Omega_1(t)$ .

On constate bien sur la solution numérique (partie inférieure de 7.a) que la population  $\sigma_{11}$  de  $g_1$  décroît de 1 à 0, alors que  $\sigma_{22}$  croît de 0 à 1,  $\sigma_{ee}$  restant toujours très faible (au maximum  $2 \cdot 10^{-4}$ )

• Quand les 2 impulsions laser coïncident (Fig. 7 b),  $\sigma_{11}$  décroît de 1 à  $\frac{1}{4}$  alors que  $\sigma_{22}$  croît de 0 à  $\frac{1}{4}$ . Ceci est dû au fait que l'on a alors  $\theta = \pi/4$ . L'état initial  $|g_1\rangle$  contient  $|\psi_{NC}\rangle$  avec un poids  $1/2$ . A la sortie, les 50%

d'atomes qui ont suivi adiabotiquement  $|\psi_{NC}\rangle$  ont une chance sur 2 d'être dans  $|g_2\rangle$ , d'où le facteur  $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ . Le fait que la somme des populations ne soit pas égale à 1 est dû à la possibilité de désintégration de  $e$  vers des états autres que  $g_1$  et  $g_2$ , possibilité dont il est tenu compte dans les équations.

• Quand  $\Omega_1$  précède  $\Omega_2$  (Fig. 7c),  $\sigma_{11}$  décroît d'abord de 1 à une valeur proche de 0 alors que  $\sigma_{22}$  croît légèrement. Les atomes sont en effet portés de  $g_1$  dans  $e$  et une partie seulement retombe dans  $g_2$ . Puis  $\sigma_{22}$  décroît alors que  $\sigma_{11}$  recroît légèrement. Les atomes pompés dans  $g_2$  par l'impulsion  $\Omega_1$  sont en effet reexcités par l'impulsion  $\Omega_2$  et repompés dans  $g_1$  (voir agrandissement dans l'encart de la fig. 7c)

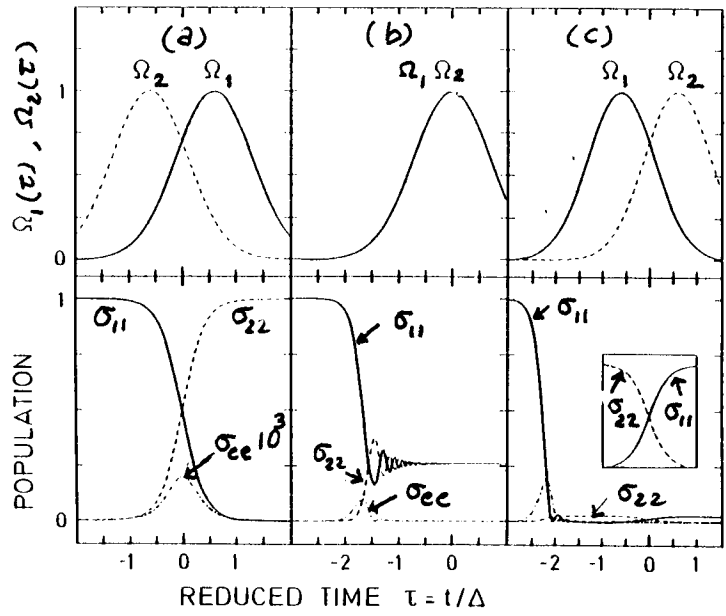


Fig. 7 (Extrait de la ref. 2)

④ Application à la réalisation de miroirs pour atomes neutres

(Voir référence 4).

a- Retour sur la transition  $J_g=1 \leftrightarrow J_e=1$  excitée en  $\sigma^+ \cdot \sigma^-$

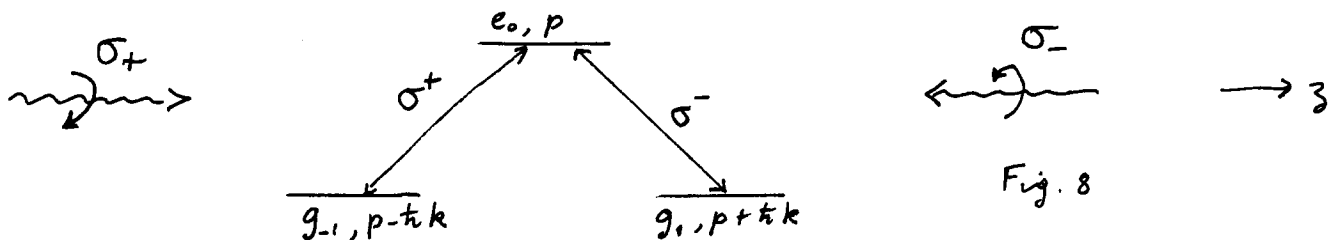


Fig. 8

- Une telle configuration a été étudiée en détail dans les cours V et VI. Si  $p=0$ , les 2 états  $|g_1, -\frac{1}{2}k\rangle$  et  $|g_1, +\frac{1}{2}k\rangle$  ont même énergie cinétique et il existe un état piège parfait. Si  $p$  est non nul mais petit, il existe un état non complet  $|\psi_{NC}(p)\rangle$  qui est un piège d'autant moins parfait que  $p$  est plus grand.

- Les idées développées plus haut sur le transfert adiabotique de population par effet Raman Stimulé peuvent être appliquées à



un tel système (Ref. 4). Si le système part de l'état  $|g_{-1}, p-tk\rangle$  (avec  $p$  pas trop grand), et si les 2 lasers sont appliqués sous forme d'impulsions, l'impulsion  $\sigma^-$  qui excite la transition  $g_{+1} \rightarrow e_0$  précédant l'impulsion  $\sigma^+$  qui excite la transition  $g_{-1} \rightarrow e_0$ , on prévoit que l'atome va être transféré de l'état  $|g_{-1}, p-tk\rangle$  à l'état  $|g_{+1}, p+tk\rangle$  avec une efficacité voisine de 1. On peut donc faire passer l'impulsion de l'atome de  $p-tk$  à  $p+tk$  avec une efficacité voisine de 1, c'est à dire réaliser un miroir pour atomes neutres.

- Une étude quantitative de ce problème est présentée dans la référence 4. On résout numériquement l'équation de Schrödinger correspondant à l'hamiltonien

$$\begin{pmatrix} \frac{p^2}{2M} - i\hbar\frac{\Gamma}{2} & \hbar\Omega_+(t)/2 & \hbar\Omega_-(t)/2 \\ \hbar\Omega_+(t)/2 & \frac{(p-tk)^2}{2M} + \hbar\delta & 0 \\ \hbar\Omega_-(t)/2 & 0 & \frac{(p+tk)^2}{2M} + \hbar\delta \end{pmatrix} \quad (7.23)$$

Cet hamiltonien est identique à celui utilisé dans les cours V et VI, à part que les fréquences de Rabi  $\Omega_+$  et  $\Omega_-$  associées aux ondes  $\sigma^+$  et  $\sigma^-$  dépendent maintenant de  $t$ . Notons également la présence de  $-i\hbar\Gamma/2$  dans (7.23), qui permet de décrire la fuite des atomes hors de la famille  $\mathcal{F}(p)$  sous-tendue par les 3 états de la figure 8.

Le résultat du calcul est que le transfert de  $|g_{-1}, p-tk\rangle$  à  $|g_{+1}, p+tk\rangle$  peut atteindre des valeurs proches de 99%.

b - Généralisation à des transitions plus complexes

- La référence 4 envisage également des transitions plus complexes, comme une transition  $J_g = 2 \leftrightarrow J_e = 2$ . Si l'on part de l'état  $|g_{-2}, p-2tk\rangle$ , avec une configuration  $\sigma_+, \sigma_-$ , les états qui sont couplés les uns aux autres par VAL forment une famille représentée sur la figure 9

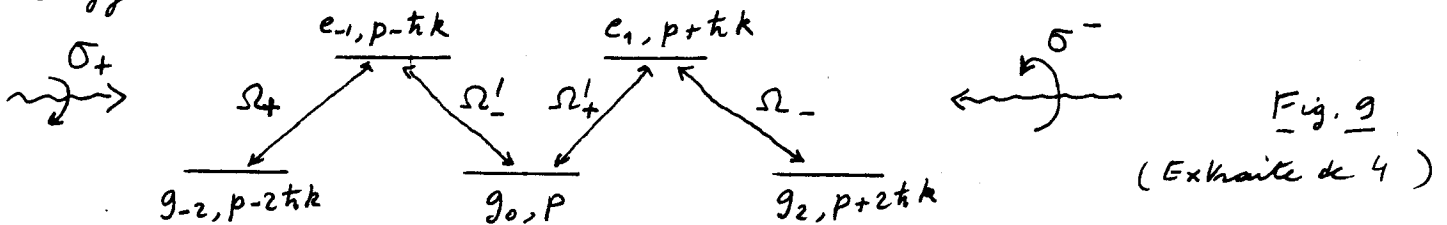


Fig. 9

(Extrait de 4)

Les  $\Omega_+, \Omega'_-, \Omega'_+, \Omega_-$  sont les fréquences de Rabi associées aux transitions indiquées par des flèches.

- Montrons tout d'abord que tout ensemble  $\{ \Omega_+, \Omega'_-, \Omega'_+, \Omega_- \}$  il existe une combinaison linéaire

$$|\Psi_{NC}\rangle = c_{-2} |g_{-2}, p-2tk\rangle + c_0 |g_0, p\rangle + c_2 |g_2, p+2tk\rangle \quad (7.24)$$

qui n'est pas couplé aux lasers ( $VAL|\Psi_{NC}\rangle = 0$ ). Pour cela, il faut avoir

$$\begin{cases} \Omega'_+ c_0 + \Omega_- c_2 = 0 \\ \Omega_+ c_{-2} + \Omega'_- c_0 = 0 \end{cases} \quad (7.25)$$

La solution des équations (7.25) est  $c_{-2} = \Omega_- \Omega'_-$ ,  $c_0 = -\Omega_- \Omega_+$ ,  $c_2 = \Omega_+ \Omega'_+$  ce qui conduit à

$$|\Psi_{NC}\rangle = N \left[ \Omega_- \Omega'_- |g_{-2}, p-2\hbar k\rangle - \Omega_- \Omega_+ |g_0, p\rangle + \Omega_+ \Omega'_+ |g_2, p+2\hbar k\rangle \right] \quad (7.26)$$

où  $N$  est un coefficient de normalisation. Pour une lumière  $\sigma_-$  pure seul  $c_{-2}$  est non nul, alors que pour une lumière  $\sigma_+$  pure, seul  $c_{+2} \neq 0$ . En appliquant l'impulsion  $\sigma^-$  avant l'impulsion  $\sigma^+$ , et en suivant adiabatiquement l'état (7.24), on peut donc passer <sup>(l'atome)</sup> de  $|g_{-2}, p-2\hbar k\rangle$  à  $|g_2, p+2\hbar k\rangle$ .

- Une résolution numérique de l'équation de Schrödinger est faite dans la référence 4.

Les résultats sont présentés sur la fig. 10 extraite de 4.

On vérifie bien que  $|c_{-2}|^2$  décroît de 1 à 0, alors que  $|c_{+2}|^2$  passe de 0 à une valeur proche de 1,  $|c_0|^2$  croissant puis décroissant (Calculs faits avec  $\delta=0$ , des impulsions gaussiennes de largeur  $T$ , décalés de  $1.2 T$ . On prend  $(\Omega_+ T)_{\max} = (\Omega_- T)_{\max} = 50$ ,  $\Gamma T = 5$ )

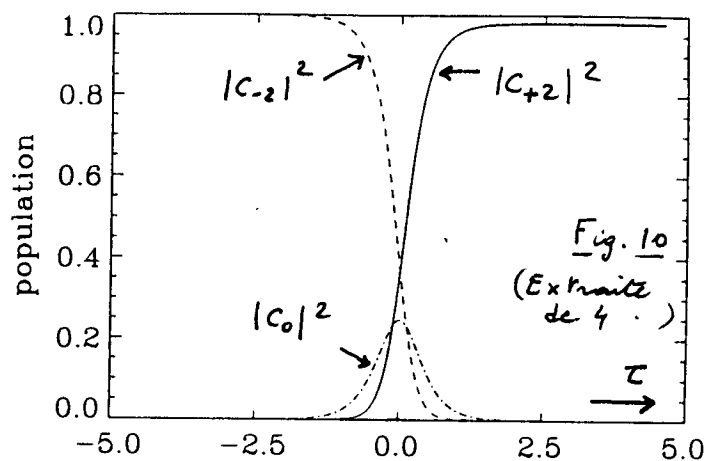


Fig. 10  
(Extraite de 4.)

- L'avantage d'un tel système est de doubler le transfert d'impulsion à l'atome ( $+4\hbar k$  au lieu de  $+2\hbar k$ ). Une fois l'atome dans  $|g_{+2}, p+2\hbar k\rangle$  rien n'empêche d'ailleurs de recommencer en appliquant 2 impulsions laser  $\sigma^+$  et  $\sigma^-$ ,  $\sigma^+$  venant cette fois de la droite et  $\sigma^-$  de la gauche et l'impulsion  $\sigma^+$  précédant l'impulsion  $\sigma^-$ , ce qui fera passer de  $|g_{+2}, p+2\hbar k\rangle$  à  $|g_{-2}, p+6\hbar k\rangle$ , et ainsi de suite...

## Références

- 1 - J.R. Kuhlinski, U. Gombatz, F.T. Hioe, K. Bergmann  
Phys. Rev. A40, 6741 (1989)
- 2 - U. Gombatz, P. Rudecki, S. Schieman, K. Bergmann  
J. Chem. Phys. 92, 5363 (1990)
- 3 - C.E. Carol, F.T. Hioe, Phys. Rev. A42, 1522 (1990)
- 4 - P. Marte, P. Zoller, J.L. Hall Phys. Rev. A, à paraître
- 5 - Une étude expérimentale de cette méthode de transfert effectuée sur la molécule  $Na_2$  est présentée dans la Ref. 2 et dans U. Gombatz, P. Rudecki, M. Becker, S. Schieman, M. Küllz, K. Bergmann, Chem. Phys. Lett. 149, 463 (1988)

Modèle simple de système amplificateur sans inversion de population

1 Introduction

a - Lasers basés sur l'effet Raman stimulé

- Milieu atomique soumis à 2 champs de fréquences  $\omega_{L1}$  et  $\omega_{L2}$  satisfaisant une condition de résonance Raman

$\omega_{L1} - \omega_{L2} = (E_{g2} - E_{g1}) / \hbar$  (8.1)

entre 2 niveaux  $g_1$  et  $g_2$ , d'énergies  $E_{g2}$  et  $E_{g1}$ .

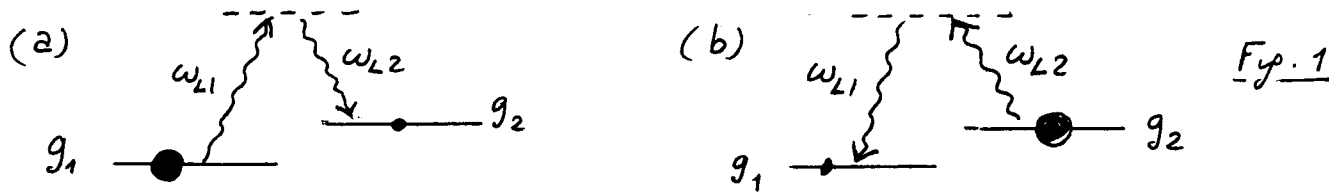
- Effet Raman stimulé.  $N_1, N_2$ : nombres de photons  $\omega_{L1}, \omega_{L2}$

$|g_1, N_1, N_2\rangle \rightleftharpoons |g_2, N_1-1, N_2+1\rangle$  (8.2)

Absorption d'un photon dans une onde et émission stimulée d'un photon dans l'autre onde, l'atome passant de  $g_1$  à  $g_2$  ou de  $g_2$  à  $g_1$

En l'absence de tout processus dissipatif (émission spontanée, collisions, excitation par un rayonnement incohérent...), oscillation de Rabi entre les 2 états avec une fréquence de Rabi proportionnelle au couplage effectif entre les 2 états (proportionnel au produit des champs  $E_{L1}, E_{L2}$ )

- Pour briser la symétrie entre les 2 sens de (8.2), on peut utiliser des processus de pompage et de relaxation pour peupler davantage un niveau que l'autre ou le vider moins vite que l'autre, et obtenir ainsi des niveaux  $g_1$  et  $g_2$  inégalement peuplés. Suivant que  $g_1$  est plus peuplé (Fig. 1a) ou moins peuplé (Fig. 1b) que  $g_2$ , ce sont les processus Stokes (Fig. 1a) ou anti-Stokes (Fig. 1b) qui prédominent, conduisant à une amplification de  $\omega_{L2}$  (Fig. 1a) ou  $\omega_{L1}$  (Fig. 1b)



b - Le modèle de Imamoglu, Field, Harris (Ref. 1)

Le modèle

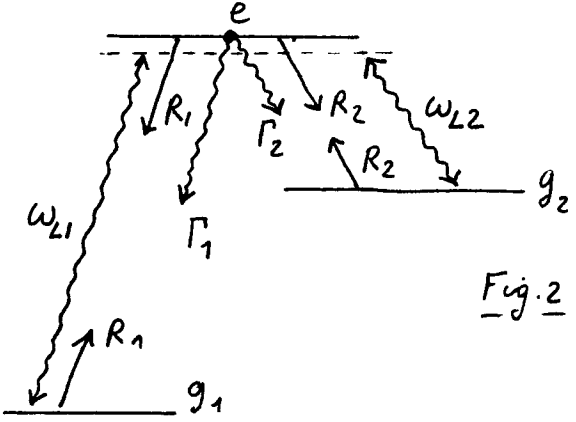
- On suppose  $\omega_{L1}$  et  $\omega_{L2}$  résonnants ou quasirésonnants avec un niveau excité  $e$  de l'atome. Des processus de perte importants apparaissent alors: absorption d'un photon  $\omega_{L1}$  ou  $\omega_{L2}$  suivie d'une émission spontanée

$\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  sont les temps d'émission spontanée  $e \rightarrow g_1$  et  $e \rightarrow g_2$

- Le milieu est pompé par un rayonnement incohérent à large bande spectrale. Son effet peut donc être décrit par des temps de transition  $R_1$  entre  $e$  et  $g_1$  et  $g_1$  et  $e$ ,  $R_2$  entre  $e$  et  $g_2$  et  $g_2$  et  $e$  (Voi Ref. 2, §IV-E-1)

Nous poserons  $\tilde{\Gamma}_1 = \Gamma_1 + R_1$   $\tilde{\Gamma}_2 = \Gamma_2 + R_2$   $\tilde{\Gamma} = \tilde{\Gamma}_1 + \tilde{\Gamma}_2$  (8.3)

- Système fermé (pas d'autres niveaux que  $e, g_1, g_2$ ) et purement radiatif (relaxation et pompage purement radiatifs).



Idee sous-jacente Comme un seul niveau excité e intervient ici (alors que plus haut, on avait plusieurs niveaux très loins et jouant donc des rôles équivalents), possibilité d'interférences quantiques destructives entre 2 amplitudes d'absorption, qui pourraient réduire de manière spectaculaire les pertes sur  $g_1 \rightarrow e$ , et permettre une amplification sur le processus anti-Stokes (Fig. 1b) même si  $g_1$  contient plus de la moitié de la population globale  $\rightarrow$  Laser sans inversions de populations.

Intérêt pour réaliser éventuellement un laser UV ou X mou.

Méthode suivie dans la référence 1

équations.

- Ecriture des équations de Bloch optiques et solution stationnaire de ces
- Calcul du dipôle moyen sur  $e - g_1$ , et détermination des conditions dans lesquelles  $E_{L1}$  est amplifié : Condition d'amplification
- Calcul des populations  $\sigma_{ee}, \sigma_{11}, \sigma_{22}$  de  $e, g_1, g_2$  et conditions pour lesquelles  $\sigma_{11} > \sigma_{22} + \sigma_{ee}$  : Condition de non inversion de population.
- Démonstration de l'existence de plages des valeurs des paramètres pour lesquelles les 2 conditions peuvent être simultanément satisfaites  
 $\hookrightarrow$  Possibilité d'amplification sans inversion de population.

② Principe de la méthode suivie dans ce cours (Ref. 3)

Pour essayer d'identifier les divers processus physiques et leur importance relative, nous suivons ici une méthode différente, consistant à suivre l'évolution au cours du temps d'un seul atome (méthode des sauts quantiques et de la fonction délai du § 4 du cours VI)

a - Multiplicités  $E(N_1, N_2)$

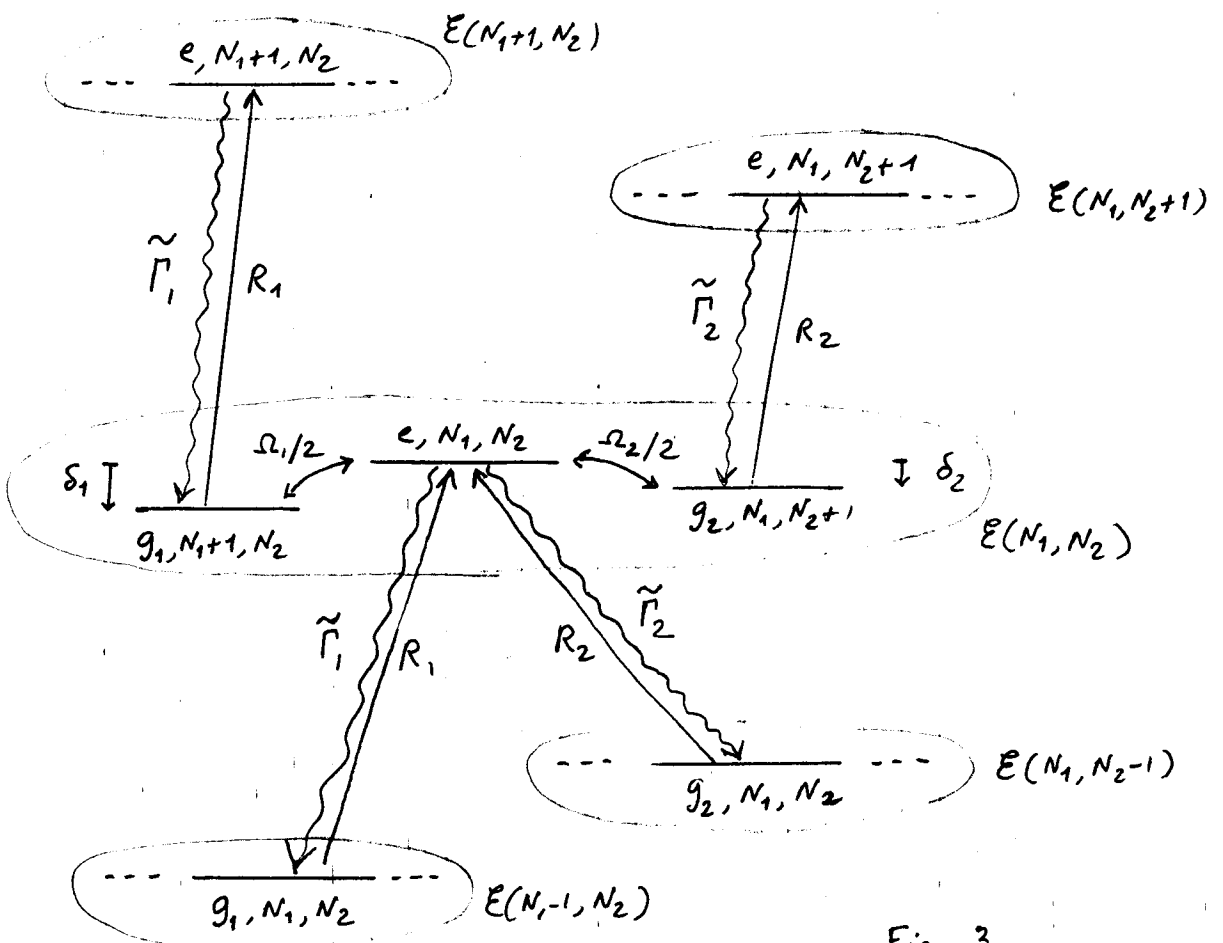


Fig. 3

- Comme dans le cours IV, nous avons des multiplicités contenant chacune 3 niveaux, proches les uns des autres, du système global "atome + photons  $\omega_{L1}$  + photons  $\omega_{L2}$ ".

Par exemple, la multiplicité  $E(N_1, N_2)$  contient l'état  $|e, N_1, N_2\rangle$  et les 2 états  $|g_1, N_1+1, N_2\rangle$  et  $|g_2, N_1, N_2+1\rangle$ , situés respectivement à une distance  $\delta_1$  et  $\delta_2$  de  $|e, N_1, N_2\rangle$  (en unités de pulsation), avec

$$\delta_1 = \omega_{L1} - \omega_{e1} \quad \delta_2 = \omega_{L2} - \omega_{e2} \quad (8.4)$$

Les couplages de ces 2 états avec  $|e, N_1, N_2\rangle$  étant respectivement caractérisés par les fréquences de Rabi  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ . (Voir Fig. 3)

- Les différentes multiplicités sont espacées de  $\omega_{L1}$  ou  $\omega_{L2}$ .

Par exemple  $E(N_1+1, N_2)$  est à une distance  $\omega_{L1}$  au dessus de  $E(N_1, N_2)$ , alors que  $E(N_1-1, N_2)$  est à une distance  $\omega_{L1}$  au dessous.

b - Différentes manières de quitter une multiplicité ou d'entrer dans une multiplicité.

- Les processus dissipatifs (émission spontanée, absorption et émission induite de rayonnement incohérent) sont effectués à l'atome des sauts quantiques d'une multiplicité à l'autre, durant un temps très court (de l'ordre du temps de corrélation des processus dissipatifs). Au cours d'un saut quantique, les photons laser restent "spectateurs" et  $N_1$  et  $N_2$  ne changent pas

- Départs de  $E(N_1, N_2)$  : 4 processus sont possibles (Figure 3)

- (i) Absorption d'un photon du rayonnement incohérent et passage de  $|g_1, N_1+1, N_2\rangle$  à  $|e, N_1+1, N_2\rangle$  qui appartient à  $E(N_1+1, N_2)$  : Taux  $R_1$
- (ii) Absorption d'un photon du rayonnement incohérent et passage de  $|g_2, N_1, N_2+1\rangle$  à  $|e, N_1, N_2+1\rangle$  qui appartient à  $E(N_1, N_2+1)$  : Taux  $R_2$
- (iii) Emission spontanée ou émission induite par le rayonnement incohérent :  $|e, N_1, N_2\rangle \rightarrow |g_1, N_1, N_2\rangle \in E(N_1-1, N_2)$  : Taux  $\tilde{\Gamma}_1 = \Gamma_1 + R_1$
- (iv) Emission spontanée ou émission induite par le rayonnement incohérent :  $|e, N_1, N_2\rangle \rightarrow |g_2, N_1, N_2\rangle \in E(N_1, N_2-1)$  : Taux  $\tilde{\Gamma}_2 = \Gamma_2 + R_2$

- Arrivées dans  $E(N_1, N_2)$  : 4 processus possibles (Figure 3)

- (i) Arrivée dans  $|g_1, N_1+1, N_2\rangle$  par émission spontanée ou induite par le ray! incohérent, à partir de  $|e, N_1+1, N_2\rangle \in E(N_1+1, N_2)$  : Taux  $\tilde{\Gamma}_1$
- (ii) Arrivée dans  $|g_2, N_1, N_2+1\rangle$  par émission spontanée ou induite par le ray! incohérent à partir de  $|e, N_1, N_2+1\rangle \in E(N_1, N_2+1)$  : Taux  $\tilde{\Gamma}_2$
- (iii) Arrivée dans  $|e, N_1, N_2\rangle$  par excitation incohérente à partir de  $|g_1, N_1, N_2\rangle \in E(N_1-1, N_2)$  : Taux  $R_1$
- (iv) Arrivée dans  $|e, N_1, N_2\rangle$  par excitation incohérente à partir de  $|g_2, N_1, N_2\rangle \in E(N_1, N_2-1)$  : Taux  $R_2$ .

c - Evolution à l'intérieur d'une multiplicité

- Une fois que le système est arrivé dans une multiplicité,

par exemple  $E(N_1, N_2)$ , son vecteur d'état initial, juste après le saut quantique qui l'a fait entrer dans  $E(N_1, N_2)$ , est décrit par l'un des 3 états  $|e, N_1, N_2\rangle, |g_1, N_1+1, N_2\rangle, |g_2, N_1, N_2+1\rangle$  (voir § b précédent)

- L'évolution ultérieure de la restriction du vecteur d'état dans  $E(N_1, N_2)$  est régie par l'hamiltonien effectif, non hermitique

$$H_{\text{eff}} = \hbar \begin{pmatrix} -i\tilde{\Gamma}/2 & \Omega_1/2 & \Omega_2/2 \\ \Omega_1/2 & \delta_1 - iR_1/2 & 0 \\ \Omega_2/2 & 0 & \delta_2 - iR_2/2 \end{pmatrix} \quad (8.5)$$

obtenue en ajoutant respectivement les énergies imaginaires  $-i\hbar\tilde{\Gamma}/2, -i\hbar R_1/2, -i\hbar R_2/2$  aux énergies des 3 états  $|e, N_1, N_2\rangle, |g_1, N_1+1, N_2\rangle$  et  $|g_2, N_1, N_2+1\rangle$

- Nous appellerons  $c_{ji}(t)$  la solution de l'équation de Schrödinger associée à (8.5) et représentant l'amplitude de probabilité de trouver le système dans l'état  $j$  de  $E(N_1, N_2)$ , où  $j = e, 1, 2$ , sachant que le système est parti à l'instant  $t=0$  de l'état  $i$  de  $E(N_1, N_2)$ , avec  $i = e, 1, 2$  (pour simplifier, nous omettons les indices des nombres de photons 1 et 2)

$$c_{ji}(t) = \langle j | U(t) | i \rangle = \langle j | e^{-iH_{\text{eff}}t/\hbar} | i \rangle \quad (8.6)$$

d - Description de l'évolution temporelle

- Apparaît comme constituée d'une suite de périodes d'évolution cohérente dans une multiplicité donnée, séparés par des sauts quantiques d'une multiplicité à une multiplicité voisine (Fig. 4)

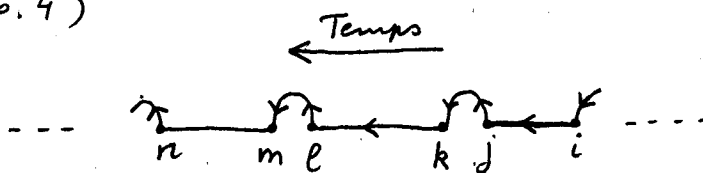


Fig. 4

Nous choisissons sur la figure un sens d'écoulement du temps de la droite vers la gauche pour rester conforme avec le fait que dans les éléments de matrice de l'opérateur d'évolution écrits en (8.6), l'état  $i$  à droite est antérieur à l'état  $j$  à gauche.

- Chaque période  $[j, i]$  est caractérisée par l'état  $i$  dans lequel elle commence, après le saut quantique qui amène le système dans une multiplicité  $E(N_1, N_2)$ , et l'état  $j$  à partir duquel le système va quitter  $E(N_1, N_2)$  lors du prochain saut.

L'évolution représentée sur la figure 4 correspond donc à la suite suivante de périodes

$$-- [n, m] [l, k] [j, i] \dots$$

Fig. 5

- Soit  $\Lambda_i$  le temps de départ total à partir du niveau  $j$  de

$\mathcal{E}(N_1, N_2)$ . L'examen de la figure 3 montre que

$$\Lambda_1 = R_1 \quad \Lambda_e = \tilde{\Gamma}_1 + \tilde{\Gamma}_2 = \tilde{\Gamma} \quad \Lambda_2 = R_2 \quad (8.7)$$

On déduit alors de (8.6) que (\*)

$$W_{ji}(t) dt = \Lambda_j |C_{ji}(t)|^2 dt \quad (8.8)$$

est la probabilité pour qu'un système, entré dans l'état  $i$  de  $\mathcal{E}(N_1, N_2)$  à  $t=0$ , quitte  $\mathcal{E}(N_1, N_2)$  à partir de l'état  $j$  entre  $t$  et  $t+dt$ . Les 9 fonctions  $\Lambda_j |C_{ji}(t)|^2$  sont donc des "fonctions délai" du type de celles introduites dans le § 4 du cours VI.

- Une simulation Monte-Carlo de l'évolution temporelle de la figure 4 procède alors comme suit.

(i) Considérons une période partant de l'état  $i$  (à  $t=0$ ). A partir de (8.8), on peut calculer les probabilités diverses relatives à la fin de cette période : instant du départ, état à partir duquel le départ s'effectue. A partir de ces probabilités, on peut tirer au sort les caractéristiques de la fin de cette période. On trouve par exemple qu'elle finit à  $t_1$  et à partir de  $j$ .

(ii) Connaissant l'état de départ du prochain saut,  $j$ , on en déduit l'état d'arrivée après ce saut. L'examen de la figure 3 montre en effet que

- un départ à partir d'un état 1 ( $g_1, N_1+1, N_2$ ) ne peut conduire que vers un état  $e$  ( $e, N_1+1, N_2$ )
- un départ à partir d'un état 2 ( $g_2, N_1, N_2+1$ ) ne peut conduire que vers un état  $e$  ( $e, N_1, N_2+1$ )
- un départ à partir d'un état  $e$  ( $e, N_1, N_2$ ) peut conduire, soit vers un état 1 ( $g_1, N_1, N_2$ ), soit vers un état 2 ( $g_2, N_1, N_2$ ), les probabilités respectives de ces 2 éventualités étant  $\tilde{\Gamma}_1/\tilde{\Gamma}$  et  $\tilde{\Gamma}_2/\tilde{\Gamma}$ .

(iii) Sachant que le saut a eu lieu à  $t_1$ , on en déduit l'état du système entre 0 et  $t_1$ , qui est nécessairement dans  $\mathcal{E}(N_1, N_2)$

$$|\psi(t)\rangle = \frac{C_{1i}(t)|g_1, N_1+1, N_2\rangle + C_{2i}(t)|g_2, N_1, N_2+1\rangle + C_{ei}(t)|e, N_1, N_2\rangle}{[|C_{1i}(t)|^2 + |C_{2i}(t)|^2 + |C_{ei}(t)|^2]^{1/2}} \quad (8.9)$$

(iv) Connaissant l'état initial,  $j$ , de la 2<sup>ème</sup> période, on peut recommencer la procédure, et ainsi de suite ...

### e - Variations du champ de rayonnement entre 2 sauts successifs

- Revenons à notre problème initial. Comment peut-on voir, dans cette approche, si le champ  $w_{e1}$  va être amplifié ou absorbé ?

- Chaque période  $[j, i]$  commence dans un état  $i$  où les nombres de photons  $w_{e1}$  et  $w_{e2}$  sont bien définis (voir Fig. 3). Par contre, entre

(\*) L'interprétation de  $W_{ji}(t)$  comme une probabilité implique la condition de normalisation  $\sum_j \int_0^\infty dt W_{ji}(t) = 1$  qui sera démontrée plus loin (Voir Appendice)

2 sauts, le couplage atome-laser transforme cet état  $i$  en une superposition linéaire d'états à nombres de photons différents, comme cela apparaît sur (8.9).

- Le prochain saut qui s'effectue à  $t_1$ , à partir de l'état  $j$  de la superposition (8.9), va porter le système dans l'état  $k$  d'une multiplicité voisine, qui est très corréliée à  $j$  (voir point (ii) du § précédent) et où les nombres de photons  $w_{L1}$  et  $w_{L2}$  sont bien définis, en ayant d'ailleurs la même valeur dans les états  $j$  et  $k$  (voir Fig. 3)

- On peut ainsi, en quelque sorte, considérer que chaque saut est une "mesure" du nombre de photons  $w_{L1}$  et  $w_{L2}$  puisque chaque saut rend ce nombre de photons bien défini. Par contre, d'un saut au suivant, les nombres de photons varient, et c'est ce que nous allons préciser maintenant pour chacune des 9 périodes possibles  $[j, i]$  en essayant d'identifier à chaque fois les processus physiques responsables de ces variations.

Période [2, 1] - D'après la figure 3, une telle période correspond à

$$|e, N_1, N_2 + 1\rangle \xrightarrow{R_2} |g_2, N_1, N_2 + 1\rangle \xrightarrow{\tilde{P}_1} |g_1, N_1 + 1, N_2\rangle \xrightarrow{\tilde{P}_1} |e, N_1 + 1, N_2\rangle$$

où la flèche ondulée correspond à l'évolution cohérente dans  $E(N_1, N_2)$  et où les sauts quantiques d'arrivée et de départ sont symbolisés par  $\tilde{P}_1$  et  $\tilde{R}_2$ .

• Quand on passe de 1 à 2,  $N_1$  et  $N_2$  varient

$$\text{Période [2, 1]} \rightarrow \Delta N_1 = -1 \quad \Delta N_2 = +1 \quad (8.10)$$

• Description des processus physiques

L'atome arrive dans  $g_1$  après une émission spontanée ou induite par le rayonnement incohérent. Un photon  $w_{L1}$  disparaît alors qu'un photon supplémentaire  $w_{L2}$  apparaît, l'atome passant de  $g_1$  à  $g_2$ . C'est l'effet Raman stimulé de  $g_1$  vers  $g_2$  (Voir Fig. 1a). Enfin l'atome absorbe un photon du rayonnement incohérent et passe de  $g_1$  à  $e$ . C'est cette absorption incohérente qui signe le processus Raman stimulé.

Période [e, 1] Même démarche

$$|g_1, N_1, N_2\rangle \xrightarrow{\tilde{P}_1} |e, N_1, N_2\rangle \xrightarrow{\tilde{P}_1} |g_1, N_1 + 1, N_2\rangle \xrightarrow{\tilde{P}_1} |e, N_1 + 1, N_2\rangle$$

ou

$$|g_2, N_1, N_2\rangle \xrightarrow{\tilde{P}_1} |e, N_1, N_2\rangle \xrightarrow{\tilde{P}_1} |g_1, N_1 + 1, N_2\rangle \xrightarrow{\tilde{P}_1} |e, N_1 + 1, N_2\rangle$$

$$\text{Période [e, 1]} \rightarrow \Delta N_1 = -1 \quad \Delta N_2 = 0 \quad (8.11)$$

• L'atome arrive dans  $g_1$  après émission spontanée (ou induite incohérente) Il absorbe un photon  $w_{L1}$  et passe dans  $e$ . Il retombe ensuite par émission spontanée (ou induite incohérente) soit dans  $g_1$  : fluorescence de résonance sur  $g_1 - e$  ; soit dans  $g_2$  : effet Raman spontané (ou stimulé incohérent) de  $g_1$  vers  $g_2$ .



$$|e, N_1+1, N_2\rangle \xleftarrow{R_1} |g_1, N_1+1, N_2\rangle \xleftarrow{\pi_1} |g_1, N_1+1, N_2\rangle \xleftarrow{\tilde{\pi}_1} |e, N_1+1, N_2\rangle$$

- Période [e, 1]  $\rightarrow \Delta N_1 = 0 \quad \Delta N_2 = 0$  (8.12)
- Rien ne change pour les photons laser. Mais après émission spontanée d'un photon, l'atome absorbe un photon du rayonnement incohérent.

Période [1, 2]

$$|e, N_1+1, N_2\rangle \xleftarrow{R_1} |g_1, N_1+1, N_2\rangle \xleftarrow{\pi_2} |g_2, N_1, N_2+1\rangle \xleftarrow{\tilde{\pi}_2} |e, N_1, N_2+1\rangle$$

- Période [1, 2]  $\rightarrow \Delta N_1 = +1 \quad \Delta N_2 = -1$  (8.13)
- Effet Raman stimulé de  $g_2$  vers  $g_1$ , "signé" par l'absorption d'un photon incohérent sur  $g_1 - e$ .

Période [2, 2]  $\rightarrow \Delta N_1 = 0 \quad \Delta N_2 = 0$  (8.14)

$$|e, N_1, N_2+1\rangle \xleftarrow{R_2} |g_2, N_1, N_2+1\rangle \xleftarrow{\pi_2} |g_2, N_1, N_2+1\rangle \xleftarrow{\tilde{\pi}_2} |e, N_1, N_2+1\rangle$$

Emission spontanée, puis absorption incohérente sur  $g_2 - e$

Période [e, 2]  $\rightarrow \Delta N_1 = 0 \quad \Delta N_2 = -1$  (8.15)

$$\begin{matrix} |g_1, N_1, N_2\rangle \\ \text{ou} \\ |g_2, N_1, N_2\rangle \end{matrix} \xleftarrow{\tilde{\pi}_1} |e, N_1, N_2\rangle \xleftarrow{\pi_2} |g_2, N_1, N_2+1\rangle \xleftarrow{\tilde{\pi}_2} |e, N_1, N_2+1\rangle$$

Fluorescence de résonance sur  $g_2 - e$  ou effet Raman spontané de  $g_2$  vers  $g_1$ . Un photon  $\omega_{22}$  est absorbé

Période [1, e]  $\rightarrow \Delta N_1 = +1 \quad \Delta N_2 = 0$  (8.16)

$$|e, N_1+1, N_2\rangle \xleftarrow{R_1} |g_1, N_1+1, N_2\rangle \xleftarrow{\pi_1} |e, N_1, N_2\rangle \xleftarrow{R_2} |g_2, N_1, N_2\rangle$$

L'atome, excité de manière incohérente dans e, émet de manière stimulée un photon  $\omega_{21}$

Période [2, e]  $\rightarrow \Delta N_1 = 0, \quad \Delta N_2 = +1$  (8.17)

$$|e, N_1, N_2+1\rangle \xleftarrow{R_2} |g_2, N_1, N_2+1\rangle \xleftarrow{\pi_1} |e, N_1, N_2\rangle \xleftarrow{R_1} |g_1, N_1, N_2\rangle$$

L'atome, excité de manière incohérente dans e, émet de manière stimulée un photon  $\omega_{22}$

Période [e, e]  $\rightarrow \Delta N_1 = 0, \quad \Delta N_2 = 0$  (8.18)

$$\begin{matrix} |g_1, N_1, N_2\rangle \\ |g_2, N_1, N_2\rangle \end{matrix} \xleftarrow{\tilde{\pi}_1} |e, N_1, N_2\rangle \xleftarrow{\pi_2} |e, N_1, N_2\rangle \xleftarrow{R_1} |g_1, N_1, N_2\rangle \xleftarrow{R_2} |g_2, N_1, N_2\rangle$$

Fluorescence de résonance sur  $g_1 - e$  et  $g_2 - e$  et effet Raman spontané de  $g_1$  vers  $g_2$  ou de  $g_2$  vers  $g_1$

A la différence des périodes [e, 1] et [e, 2], ce ne sont pas des photons laser qui sont absorbés, mais des photons du rayonnement incohérent.

<u>Gains</u>	Période $[1,2]$ : Effet Raman stimulé $g_2 \rightarrow g_1$	(8.19.a)
	Période $[1,e]$ : Emission stimulée $e \rightarrow g_1$	(8.19.b)
<u>Pertes</u>	Période $[2,1]$ : Effet Raman stimulé $g_1 \rightarrow g_2$	(8.19.c)
	Période $[e,1]$ : Absorption $g_1 \rightarrow e$	(8.19.d)

Que faire maintenant ? 2 possibilités

- (i) Faire des simulations Monte-Carlo numériques, conduisant à des courbes analogues à celles de la figure 12 du cours VI
- (ii) Essayer d'établir des résultats analytiques sur les propriétés statistiques des périodes  $[j,i]$  : probabilités d'occurrence, durée moyenne d'une période ... de manière à comprendre les facteurs qui contrôlent la vitesse de variation moyenne  $\langle \Delta N_1 \rangle / \Delta t$  du nombre de photons  $\omega_1$

C'est la 2<sup>ème</sup> voie que nous allons suivre ici, en commençant par établir des propriétés générales au § 3 suivant, puis en étudiant plus particulièrement certains cas limites intéressants au cours IX suivant.

③ Propriétés statistiques des périodes  $[j,i]$  entre 2 sauts successifs

a - Quelques définitions de probabilités

- 
$$P([j,i]) = \text{Probabilité d'une période } [j,i] \quad (8.20)$$

On tire au hasard une période parmi la suite infinie de la figure 5.  $P([j,i])$  est la probabilité de sortir une période  $[j,i]$

$P([j,i])$  est encore la probabilité pour qu'une période quelconque tirée au hasard commence dans l'état  $i$  et finisse dans l'état  $j$ .

La connaissance des  $P([j,i])$ , en particulier celle de  $P([1,2])$ ,  $P([1,e])$ ,  $P([2,1])$ ,  $P([e,1])$ , est essentielle pour savoir si le nombre moyen  $\langle N_1 \rangle$  de photons  $\omega_1$  augmente ou diminue au cours du temps (voir (8.19)).

Pour calculer les  $P([j,i])$ , nous passerons intermédiairement, au § b suivant, par d'autres probabilités que nous introduisons maintenant

- 
$$P(i) = \text{Probabilité pour qu'une période quelconque, tirée au hasard, commence dans l'état } i \quad (8.21)$$

- 
$$P(j|i) = \text{Probabilité pour qu'une période finisse dans l'état } j \text{ sachant qu'elle a commencé dans l'état } i. \quad (8.22)$$

- 
$$P(i_n:j / i_n:i) = \text{Probabilité, sachant qu'une période a commencé dans l'état } i, \text{ pour que la période suivante commence dans l'état } j \quad (8.23)$$

Corrélations entre les débuts de 2 périodes consécutives

b' - Comment calculer ces diverses probabilités

- La plus simple à calculer est  $P(j|i)$ . En effet, compte tenu du sens physique de (8.8), on a

$$P(j/i) = \Lambda_j \int_0^\infty dt |c_{ji}(t)|^2 \quad (8.24)$$

où les  $\Lambda_j$  sont les taux de départ globaux à partir de  $j$ , donnés en (8.7) et où  $c_{ji}(t)$  est donné en (8.6)

les  $P(j/i)$  obéissent à la condition de normalisation

$$\sum_j P(j/i) = 1 \quad (8.25)$$

qui exprime que, si le système est entré dans l'état  $i$  de  $E(N_1, N_2)$  à  $t=0$ , et si les 3 valeurs propres de (8.5) ont une partie imaginaire négative non nulle (pas d'état piège parfait dans  $E(N_1, N_2)$ ), alors le système aura certainement quitté  $E(N_1, N_2)$  à  $t=\infty$ . (Voir Appendice)

- D'après la définition d'une probabilité conditionnelle

$$P([j, i]) = P(j/i) P(i) \quad (8.26)$$

Connaissant les  $P(j/i)$  d'après (8.24), il nous faut maintenant, pour obtenir les  $P([j, i])$ , expliquer comment on calcule les  $P(i)$ .

- • Une période commençant par  $j$ , de probabilité  $P(j)$ , suit nécessairement une période commençant par  $i=1, 2$  ou  $e$ , de probabilité  $P(i)$ . On en déduit que

$$P(j) = \sum_i P(in:j/in:i) P(i) \quad (8.27)$$

où  $P(in:j/in:i)$  est défini en (8.23)

• Par ailleurs, une période qui a commencé dans  $i$  se termine nécessairement dans un état  $k=1, 2$  ou  $e$ , avec un saut quantique  $j \leftarrow k$  qui amène le système dans la période suivante commençant par  $j$ . On peut donc écrire

$$P(in:j/in:i) = \sum_k \pi_{jk} P(k/i) \quad (8.28)$$

où  $\pi_{jk}$  = Probabilité, pour un saut quantique s'effectuant à partir de l'état  $k$  d'une multiplicité, d'aboutir dans l'état  $j$  d'une multiplicité voisine (8.29)

L'examen de la figure 3 montre que

$$\pi_{j1} = \delta_{ej} \quad \pi_{j2} = \delta_{ej} \quad \pi_{je} = \frac{\tilde{\Gamma}_1}{\tilde{\Gamma}} \delta_{1j} + \frac{\tilde{\Gamma}_2}{\tilde{\Gamma}} \delta_{2j} \quad (8.30)$$

Notons que les  $\pi_{jk}$  sont normalisés

$$\sum_j \pi_{jk} = 1 \quad (8.31)$$

• Finalement, les  $P(i)$  sont donnés par un système linéaire et homogène de 3 équations

$$\sum_i \alpha_{ji} P(i) = 0 \quad \text{avec } j=1, 2, e \quad (8.32)$$

dont les coefficients  $\alpha_{ji}$  valent, d'après (8.27) et (8.28)

$$\alpha_{ji} = \sum_k \pi_{jk} P(k/i) - \delta_{ji} \quad (8.33)$$

La somme des lignes du déterminant associé à  $\alpha_{ji}$  est nulle puisque

$$\sum_j \alpha_{ji} = \sum_k \left( \sum_j \pi_{jk} \right) P(k/i) - \sum_i \delta_{ji} = 1 - 1 = 0 \quad (8.34)$$

compte tenu de (8.31) et (8.25). Ceci montre que le système homogène (8.31) a une solution non nulle. Cette solution non nulle n'est déterminée qu'à un coefficient multiplicatif près, fixé par la relation de normalisation

$$\sum_i P(i) = 1 \quad (8.35)$$

Récapitulation sur les calculs à faire

(i) Résolution de l'équation de Schrödinger associée à (8.5) avec les 3 conditions initiales possibles : état initial = 1, 2 ou e

↳ Calcul des 9 fonctions  $c_{ji}(t)$

(ii) Calcul des  $P(j|i)$  au moyen de (8.24)

(iii) Calcul des  $P(i)$  au moyen de (8.32), compte tenu de (8.33), (8.30) et (8.35)

(iv) Calcul des  $P([j,i])$  au moyen de (8.26)

c - Durée moyenne d'une période  $[j,i]$

- Dans toutes les considérations qui précèdent (§§ a et b), chaque période  $[j,i]$  n'est caractérisée que par l'état d'entrée  $i$  et l'état de sortie  $j$ , et les calculs de probabilité ne tiennent compte que de ces données.

On peut se poser d'autres questions qui nécessitent la connaissance d'autres caractéristiques des périodes  $[j,i]$ . Supposons par exemple que l'on tire sur l'axe des temps, un temps  $t$  au hasard. La probabilité de trouver à cet instant le système dans une période  $[j,i]$  ne dépendra pas seulement de la probabilité a priori  $P([j,i])$  d'une période  $[j,i]$  dans la suite de périodes représentée sur la figure 5, mais aussi de la durée moyenne de cette période. Une période qui dure un temps long est avantagée dans un tel tirage au sort par rapport à une période qui dure un temps court.

- L'équation (8.8) donne la probabilité pour qu'une période, commencée dans l'état  $i$  à  $t=0$ , s'achève dans l'état  $j$  entre  $t$  et  $t+dt$ . La durée d'une telle période  $[j,i]$  est  $t$ . On en déduit que le temps moyen  $T(j,i)$  d'une période  $[j,i]$  est égal à

$$T(j,i) = \frac{\lambda_j \int_0^{\infty} t |c_{ji}(t)|^2 dt}{\lambda_j \int_0^{\infty} |c_{ji}(t)|^2 dt} = \frac{\lambda_j \int_0^{\infty} t |c_{ji}(t)|^2 dt}{P(j|i)} \quad (8.36)$$

- Durée moyenne d'une période quelconque :  $T$

Il faut moyenner les  $T(j,i)$  avec des poids  $P([j,i])$  (qui sont normalisés, compte tenu de (8.26), (8.25) et (8.35))

$$T = \sum_i \sum_j T(j,i) P([j,i]) \quad (8.37)$$

d - Variation moyenne du nombre de photons  $\omega_L$

- D'après (8.19),  $\Delta N_L$  vaut +1 pour les périodes  $[1,2]$  et  $[1,e]$ , -1 pour les périodes  $[2,1]$  et  $[e,1]$ , 0 pour toutes les autres périodes

On en déduit que la variation moyenne  $\langle \Delta N_L \rangle$  du nombre de photons  $\omega_L$  pour une période quelconque est donné par

$$\langle \Delta N_1 \rangle = \mathcal{P}([1,2]) + \mathcal{P}([1,e]) - \mathcal{P}([2,1]) - \mathcal{P}([e,1]) \quad (8.38)$$

la condition d'amplification du champ  $\omega_L$ , étant  $\langle \Delta N_1 \rangle > 0$ .

- On peut aussi calculer la vitesse de variation moyenne de  $N_1$ . Prenons  $N$  périodes consécutives avec  $N \gg 1$ . La durée moyenne de l'ensemble de ces  $N$  périodes vaut  $NT$ . La variation moyenne de  $N_1$  à l'issue de ces  $N$  périodes est  $N \langle \Delta N_1 \rangle$ . On en déduit

$$\left\langle \frac{\Delta N_1}{\Delta t} \right\rangle = \frac{\langle \Delta N_1 \rangle}{T} = \frac{\mathcal{P}([1,2]) + \mathcal{P}([1,e]) - \mathcal{P}([2,1]) - \mathcal{P}([e,1])}{\sum_j \sum_i T(j,i) \mathcal{P}([j,i])} \quad (8.39)$$

- Nous expliquerons également dans le cours IX suivant comment calculer les populations stationnaires des états  $g_1, g_2, e$

Références

- 1 - A. Imamoglu, J.E. Field, S.E. Harris Phys. Rev. Lett. 66, 1154 (1991)
- 2 - C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, G. Grynberg. Processus d'Interaction entre photons et atomes - Référence déjà donnée page II-10
- 3 - Travail non encore publié, fait en collaboration avec B. Zambon et E. Arimondo.

Appendice Démonstration de  $\sum_j \mathcal{P}(j|i) = \sum_j \Lambda_j \int_0^\infty |c_j(t)|^2 dt = 1$

- L'équation de Schrödinger relative à (8.5), s'écrit pour un état initial quelconque  $\{c_j(0)\}$  avec  $\sum_j |c_j(0)|^2 = 1$

$$\dot{c}_j(t) = -\frac{\Lambda_j}{2} c_j(t) - \frac{i}{\hbar} \sum_k h_{jk} c_k(t) \quad (8.40)$$

où  $\Lambda_j$  est le taux de départ global de  $j$  (venant des termes imaginaires diagonaux de 8.5) et où  $h_{jk}$  est la partie hermitique de (8.5) (une fois les termes imaginaires diagonaux enlevés)

$$h_{jk} = h_{kj}^* \quad (8.41)$$

- A partir de (8.40) et de l'équation complexe conjuguée, on obtient

$$\frac{d}{dt} |c_j(t)|^2 = \dot{c}_j^*(t) c_j(t) + c_j^*(t) \dot{c}_j(t) = -\Lambda_j |c_j(t)|^2 - \frac{i}{\hbar} \sum_k [c_j^*(t) h_{jk} c_k(t) - c_k^*(t) h_{kj} c_j(t)] \quad (8.42)$$

Intégrons (8.42) de 0 à  $+\infty$ , sommions sur  $j$  et utilisons (8.41). Il vient

$$\underbrace{\sum_j |c_j(\infty)|^2}_{=0} - \underbrace{\sum_j |c_j(0)|^2}_{=1} = - \sum_j \Lambda_j \int_0^\infty |c_j(t)|^2 dt - \frac{i}{\hbar} \underbrace{\sum_j \sum_k [c_j^*(t) h_{jk} c_k(t) - c_k^*(t) h_{kj} c_j(t)]}_{=0} \quad (8.43)$$

Le 1<sup>er</sup> terme du membre de gauche est nul puisque le système a certainement quitté  $E(N_1, N_2)$  à  $t = +\infty$  (nous supposons qu'il n'y a pas d'état piège parfait dans  $E(N_1, N_2)$ ). Le dernier terme du membre de droite est nul (pour le voir il suffit d'inverser les indices de sommation  $j$  et  $k$  dans l'un des 2 termes). Un tel résultat exprime que l'évolution sous l'effet de l'hamiltonien hermitique  $h$  ne peut changer la norme du vecteur. L'égalité des termes restants donne finalement  $1 = \sum_j \Lambda_j \int_0^\infty |c_j(t)|^2 dt$ , et ceci quel que soit l'état initial  $c_j(0)$ , en particulier si  $c_j(0) = \delta_{ij}$ , auquel cas  $c_j(t)$  n'est autre, d'après (8.6), que  $c_{ji}(t)$ , c.q.f.d.

4 Situation limite envisagée dans ce cours

La méthode générale de calcul exposée dans le § 3 précédent et permettant d'évaluer de manière quantitative l'importance des processus d'amplification et d'absorption du champ  $\omega_2$ , est appliquée dans ce cours à une situation limite intéressante qui conduit à des expressions analytiques, dont l'interprétation physique peut être discutée simplement. Nous commençons dans, le § 4, par préciser les hypothèses faites sur les champs  $\omega_1$  et  $\omega_2$ .

a - Hypothèses sur le champ  $\omega_2$  excitant la transition  $g_2 - e$

(i) Le champ  $\omega_2$  est résonnant

$$\omega_2 = \omega_{e2} \tag{9.1}$$

Sur la figure 3, les niveaux  $|e, N_1, N_2\rangle$  et  $|g_2, N_1, N_2 + 1\rangle$  sont dégénérés

(ii) Le champ  $\omega_2$  a une intensité faible

$$\Omega_2 \ll \Gamma \tag{9.2}$$

Compte tenu de (9.1), on déduit de (9.2) que la probabilité par unité de temps d'absorption d'un photon  $\omega_2$  par l'atome dans l'état  $g_2$  est égale à  $\Gamma'_2$  où

$$\Gamma'_2 = \frac{\Omega_2^2}{\Gamma} \tag{9.3}$$

De (9.2) et (9.3) on déduit que

$$\Gamma'_2 = \Gamma \frac{\Omega_2^2}{\Gamma^2} \ll \Gamma \tag{9.4}$$

(iii) Tout en étant très petit devant  $\Gamma$ ,  $\Gamma'_2$  est supposé très grand devant  $R_1$  et  $R_2$ , ce qui implique que  $R_2 \ll \Gamma$  et  $R_1 \ll \Gamma$

$$R_1, R_2 \ll \Gamma'_2 \ll \Gamma \tag{9.5}$$

Pourquoi ces hypothèses ?

- La condition (9.1) n'est pas essentielle. Il suffirait que le niveau excité  $e$  soit beaucoup plus proche de résonance que tous les autres niveaux excités. La condition (9.1) simplifie les calculs.
- Les conditions (9.4) et (9.5) (jointes à la condition (9.6) plus loin) entraînent que les résonances liées à l'effet Raman stimulé entre  $g_1$  et  $g_2$  sont étroites (ces résonances étant étudiées en fonction du désaccord  $\delta_1 = \omega_{e1} - \omega_1$  du champ  $\omega_1$ ). De même, les effets d'interférence entre les amplitudes d'absorption à partir de  $g_1$  et  $g_2$  apparaîtront sur une plage étroite de valeurs de  $\delta_1$ .
- La condition  $\Gamma'_2 \gg R_2$  entraîne que le niveau  $g_2$  peut être plus rapidement vidé par absorption de rayonnement cohérent à  $\omega_2$  (temps  $\Gamma'_2$ ) que par absorption de rayonnement incohérent (temps  $R_2$ ). C'est cette condition qui permettra d'avoir plus loin un niveau  $g_2$  moins rempli que le niveau  $g_1$  (pas d'inversion de population en l'absence de champ  $\omega_1$ )

b - Hypothèses sur le champ  $\omega_{L1}$  excitant la transition  $g_1 - e$

(i) le champ  $\omega_{L1}$  a une intensité très faible

Il est en effet considéré comme un champ "sonde". L'atome étant "pompé" par les rayonnements cohérent ( $\omega_{L2}$ ) et incohérent, on applique un champ  $\omega_{L1}$  très faible, le problème étant de voir s'il va être amplifié ou atténué. La fréquence de Raman  $\Omega_1$ , associée au champ  $\omega_{L1}$  est donc très petite devant tous les autres termes ou fréquences.

$$\Omega_1 \ll \Omega_2, R_1, R_2, \Gamma \tag{9.6}$$

(ii) Le champ  $\omega_{L1}$  peut être non résonnant, de manière à pouvoir étudier la variation des divers processus avec l'écart à la condition de résonance Raman. Posons

$$\delta_1 = \omega_{L1} - \omega_{e1} \tag{9.7}$$

On suppose cependant que  $|\delta_1|$  reste très petit devant  $\Gamma$ , tout en pouvant être grand devant  $\Gamma'_2$ , ce qui est possible, compte tenu de (9.5)

$$\Gamma'_2 \lesssim |\delta_1| \ll \Gamma \tag{9.8}$$

En d'autres termes, on peut balayer la résonance Raman, tout en restant toujours résonnant sur la transition  $g_1 - e$

Remarque Les conditions de faible intensité (9.1) et (9.6), jointes à (9.8), entraînent que les niveaux habillés ne sont pas séparés d'une quantité supérieure à leur largeur dans la multiplicité  $E(N_1, N_2)$ . Il est alors impossible d'effectuer l'approximation séculaire sur l'équation pilote écrite dans la base des états habillés. La situation limite étudiée dans ce cours ne se prête donc pas bien à des interprétations en termes de populations de niveaux habillés. Nous allons voir par contre que la méthode des sauts quantiques et des fonctions délai est bien adaptée à une telle limite.

c - Approximations possibles sur les équations d'évolution à l'intérieur d'une multiplicité  $E(N_1, N_2)$

- L'équation de Schrödinger associée à l'hamiltonien effectif (8.5) décrivant l'évolution cohérente à l'intérieur de  $E(N_1, N_2)$  s'écrit pour les amplitudes  $c_e(t), c_1(t), c_2(t)$  apparaissant dans la restriction du vecteur d'état à l'intérieur de  $E(N_1, N_2)$

$$|\psi(t)\rangle = c_e(t) |e, N_1, N_2\rangle + c_1(t) |g_1, N_1+1, N_2\rangle + c_2(t) |g_2, N_1, N_2+1\rangle \tag{9.9}$$

$$\begin{cases} \dot{c}_e = -\frac{\tilde{\Gamma}}{2} c_e - i\frac{\Omega_1}{2} c_1 - i\frac{\Omega_2}{2} c_2 \end{cases} \tag{9.10.a}$$

$$\begin{cases} \dot{c}_1 = -(\frac{R_1}{2} + i\delta_1) c_1 - i\frac{\Omega_1}{2} c_e \end{cases} \tag{9.10.b}$$

$$\begin{cases} \dot{c}_2 = -\frac{R_2}{2} c_2 - i\frac{\Omega_2}{2} c_e \end{cases} \tag{9.10.c}$$

Nous avons pris  $S_2 = 0$ , compte tenu de (9.1)

- Les conditions (9.4), (9.5), (9.6) et (9.8) entraînent que  $c_e$  varie beaucoup plus vite que  $c_1$  et  $c_2$ . Après un régime transitoire durant un temps de l'ordre de  $1/\Gamma$ ,  $c_e$  est "asservi" par les variables lentes  $c_1$  et  $c_2$ . On peut alors négliger  $\dot{c}_e$  devant  $\frac{\tilde{\Gamma}}{2} c_e$

dans l'équation (9.10.3) qui devient alors une équation algébrique donnant  $c_2$  en fonction de  $c_1$  et  $c_2$

$$t > \frac{1}{\Gamma} \quad c_2(t) \approx -i \frac{\Omega_1}{\tilde{\Gamma}} c_1(t) - i \frac{\Omega_2}{\tilde{\Gamma}} c_2(t) \quad (9.11)$$

Il apparaît ainsi clairement que l'amplitude d'arrivée dans l'état excité est une somme de 2 amplitudes partant de  $g_1$  et  $g_2$  et pouvant interférer.

- Reportons 9.11 dans (9.10.b) et (9.10.c). Il vient

$$t > \frac{1}{\Gamma} \quad \left\{ \begin{aligned} \dot{c}_1(t) &= -\left(\frac{R_1}{2} + \frac{\Omega_1^2}{2\Gamma} + i\delta_1\right) c_1(t) - \frac{\Omega_1\Omega_2}{2\tilde{\Gamma}} c_2(t) \end{aligned} \right. \quad (9.12.a)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{c}_2(t) &= -\left(\frac{R_2}{2} + \frac{\Omega_2^2}{2\Gamma}\right) c_2(t) - \frac{\Omega_1\Omega_2}{2\tilde{\Gamma}} c_1(t) \end{aligned} \right. \quad (9.12.b)$$

La condition (9.6) permet de négliger  $\Omega_1^2/\tilde{\Gamma}$  devant  $R_1$  dans (9.12.a) alors que la condition (9.5) permet de négliger  $R_2$  devant  $\Omega_2^2/\Gamma = \Gamma'_2$ . On obtient ainsi

$$t > \frac{1}{\Gamma} \quad \left\{ \begin{aligned} \dot{c}_1(t) &= -\left(\frac{R_1}{2} + i\delta_1\right) c_1(t) - \frac{\Omega_1\Omega_2}{2\tilde{\Gamma}} c_2(t) \end{aligned} \right. \quad (9.13.a)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{c}_2(t) &= -\frac{\Gamma'_2}{2} c_2(t) - \frac{\Omega_1\Omega_2}{2\tilde{\Gamma}} c_1(t) \end{aligned} \right. \quad (9.13.b)$$

- Pour étudier ce qui se passe aux temps courts ( $t \leq 1/\Gamma$ ), il faut revenir aux équations (9.10).

5) Evolution du système en l'absence de champ  $\omega_{L1}$  ( $\Omega_1 = 0$ )

a. Pourquoi une telle étude ?

- Dans le § 6 suivant, nous étudierons les 4 périodes  $[1,2]$ ,  $[1,e]$ ,  $[2,1]$  et  $[e,1]$  au cours desquelles  $N_2$  varie de  $+1$  ou  $-1$  (voir (8.19)). Nous verrons que les 4 probabilités conditionnelles  $P(j|i)$  associés à ces 4 périodes sont proportionnelles à  $\Omega_2^2$ . Pour calculer les 4 probabilités  $P([j,i]) = P(j|i)P(i)$  à l'ordre le plus bas en  $\Omega_2$ , il suffit donc de calculer les probabilités  $P(i)$  de commencer une période dans l'état  $i$  à l'ordre 0 en  $\Omega_2$ . C'est ce que nous faisons dans le § b ci-dessous

- Les populations stationnaires des divers niveaux, et leur inversion ou non inversion, doivent être déterminés avant que le champ sonde  $\omega_{L1}$  ne soit appliqué, et en présence du champ pompe  $\omega_{L2}$ . C'est ce que nous faisons dans le § c ci-dessous

b. Calcul des probabilités  $P(i)$  de commencer une période dans l'état  $i$

- Il apparaît clairement sur la figure 3 du cours VIII que le système ne peut entrer dans  $g_1$  ou  $g_2$  que par un saut quantique à partir de  $e$  (correspondant à une émission spontanée ou induite non-réversible), les probabilités relatives d'aller dans  $g_1$  et  $g_2$  étant respectivement proportionnelles à  $\tilde{\Gamma}_1/\tilde{\Gamma}$  et  $\tilde{\Gamma}_2/\tilde{\Gamma}$ . On en déduit donc sans approximation

$$\frac{P(1)}{P(2)} = \frac{\tilde{\Gamma}_1}{\tilde{\Gamma}_2} \quad (9.14)$$

Comme nous supposons ici  $R_1, R_2 \ll \Gamma$  nous pouvons remplacer dans (9.14) et dans toute la suite de ce cours,  $\tilde{\Gamma}_1 = \Gamma + R_1$  par  $\Gamma_1$  et  $\tilde{\Gamma}_2 = \Gamma + R_2$  par  $\Gamma_2$ , ce qui donne



$$\frac{P(1)}{P(2)} \approx \frac{\Gamma_1}{\Gamma_2} \quad (9.15)$$

- Evaluons maintenant, de manière aussi simple que possible les probabilités conditionnelles  $P(in: j / in: i)$  de commencer une période dans l'état  $j$  sachant que la période précédente a commencé dans l'état  $i$

- La figure 3 du cours VIII montre que, comme on suppose ici  $\Omega_1 = 0$ , le système partant de  $g_1$ , ne peut que "sauter" vers  $e$ . On a donc sans approximation

$$P(in: j / in: 1) = \delta_{e1} \quad (9.16)$$

- Par ailleurs, si une période commence dans  $e$  et comme on suppose ici  $\Gamma \gg \Omega_2$ , le système aura une probabilité plus élevée de sauter vers les états  $g_1$  et  $g_2$  de multiplicités inférieures, que de passer dans l'état  $g_2$  de la même multiplicité puis de sauter vers l'état  $e$  de la multiplicité supérieure. On en déduit

$$P(in: j / in: e) \approx \frac{\Gamma_1}{\Gamma} \delta_{j1} + \frac{\Gamma_2}{\Gamma} \delta_{j2} \quad \text{à l'ordre le plus bas en } \frac{\Gamma_2'}{\Gamma} \quad (9.17)$$

- Considérons enfin une période commençant dans  $g_2$ . Comme on suppose ici  $\Gamma_2' \gg R_2$ , le système aura une probabilité moins élevée de sauter dans l'état  $e$  de la multiplicité supérieure, que de passer dans l'état  $e$  de la même multiplicité, puis de sauter dans l'état  $g_1$  ou  $g_2$  de multiplicités inférieures. On en déduit

$$P(in: j / in: 2) \approx \frac{\Gamma_1}{\Gamma} \delta_{j1} + \frac{R_2}{\Gamma_2'} \delta_{j2} \quad \text{à l'ordre le plus bas en } \frac{R_2}{\Gamma_2'} \quad (9.18)$$

- L'équation (8.27) appliquée à  $j=e$  donne

$$P(e) = \sum P(in: e / in: i) P(i) \quad (9.19)$$

D'après (9.16), (9.17), (9.18), on a

$$P(in: e / in: i) \approx \delta_{e1} \quad \text{à l'ordre le plus bas en } \frac{\Gamma_2'}{\Gamma}, \frac{R_2}{\Gamma_2'} \quad (9.20)$$

On en déduit, compte tenu de (9.19)

$$P(e) \approx P(1) \quad \text{à l'ordre le plus bas en } \frac{\Gamma_2'}{\Gamma}, \frac{R_2}{\Gamma_2'} \quad (9.21)$$

- En utilisant (9.15), (9.21) et la condition de normalisation (8.35) sur les  $P(i)$ , on obtient

$$\frac{P(1)}{\Gamma_1} = \frac{P(2)}{\Gamma_2} \approx \frac{P(e)}{\Gamma_1} \approx \frac{1}{2\Gamma_1 + \Gamma_2} \quad (9.22)$$

ce qui donne finalement (à l'ordre le plus bas en  $\frac{\Gamma_2'}{\Gamma}, \frac{R_2}{\Gamma_2'}$ )

$$P(1) \approx \frac{\Gamma_1}{2\Gamma_1 + \Gamma_2} \quad P(e) \approx \frac{\Gamma_1}{2\Gamma_1 + \Gamma_2} \quad P(2) = \frac{\Gamma_2}{2\Gamma_1 + \Gamma_2} \quad (9.23)$$

### c - Populations stationnaires des états $g_1, g_2, e$

- Ces populations sont proportionnelles aux temps moyens passés dans ces états par le système au cours de son évolution.

- Considérons tout d'abord une période commençant dans l'état  $g_1$ . Comme on suppose ici  $\Omega_1 = 0$ , le système restera dans  $g_1$ , et ceci pendant un temps moyen  $1/R_1$ , puisque la solution  $C_1(t)$  de (9.10.6) avec  $\Omega_1 = 0$  et  $C_1(0) = 1$  donne  $|C_1(t)|^2 = e^{-R_1 t}$

- Les modes propres de désintégration des équations (9.10) avec  $\Omega_1 = 0$ , sont des états  $|\bar{g}_2\rangle$  et  $|\bar{e}\rangle$ , très voisins de  $|g_2\rangle$  et  $|e\rangle$  (nous sous-entendons les nombres quantiques  $N_1, N_2$  des photons) puisque  $\Omega_2 \ll \Gamma$ , les temps de désintégration étant  $1/\Gamma'_2$  pour  $|\bar{g}_2\rangle$  et  $1/\Gamma$  pour  $|\bar{e}\rangle$ .

Lorsqu'une période commence dans l'état  $g_2$ , la proportion de  $\bar{g}_2$  va être prépondérante. Le système va donc rester essentiellement dans l'état  $g_2$  et il va y rester un temps moyen  $1/\Gamma'_2$ .

De même, lorsqu'une période commence dans l'état  $e$ , la proportion d'état  $\bar{e}$  va être prépondérante. Le système va donc rester essentiellement dans l'état  $e$  et il va y rester un temps moyen  $1/\Gamma$ .

- On déduit de ce qui précède que les temps moyens passés par le système dans les états  $g_1, g_2, e$  sont respectivement proportionnels à  $P(1)/R_1, P(2)/\Gamma'_2$  et  $P(e)/\Gamma$ , ce qui donne pour les populations stationnaires  $\pi_1, \pi_2$  et  $\pi_e$  de ces états, compte tenu de (9.23) et de la condition de normalisation des  $\pi_i$ :

$$\frac{\pi_1}{\frac{\Gamma_1}{2\Gamma_1 + \Gamma_2} \frac{1}{R_1}} = \frac{\pi_2}{\frac{\Gamma_2}{2\Gamma_1 + \Gamma_2} \frac{1}{\Gamma'_2}} = \frac{\pi_e}{\frac{\Gamma_1}{2\Gamma_1 + \Gamma_2} \frac{1}{\Gamma}} = \frac{1}{\frac{\Gamma_1}{2\Gamma_1 + \Gamma_2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{\Gamma}\right) + \frac{\Gamma_2}{2\Gamma_1 + \Gamma_2} \frac{1}{\Gamma'_2}} \quad (9.24)$$

Comme  $\Gamma \gg R_1, \Gamma'_2$ , il apparaît sur (9.24) que  $\pi_e$  est négligeable devant  $\pi_1$  et  $\pi_2$ , de sorte que

$$\frac{\pi_1}{\Gamma_1/R_1} \approx \frac{\pi_2}{\Gamma_2/\Gamma'_2} \quad (9.25)$$

- La condition de non-inversion de populations, en l'absence de champ  $\omega_{L1}$ , mais en présence de champ  $\omega_{L2}$ , s'écrit donc

$$\pi_2 < \pi_1 \quad \rightarrow \quad \frac{\Gamma_2}{\Gamma'_2} < \frac{\Gamma_1}{R_1} \quad \rightarrow \quad \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1} < \frac{\Gamma'_2}{R_1} \quad (9.26)$$

### Remarque

Un calcul analogue fait avec  $\Omega_2 = 0$  (en plus de  $\Omega_1 = 0$ ) donnerait  $\pi_1/(\Gamma_1/R_1) = \pi_2/(\Gamma_2/R_2)$ ,  $\pi_e$  restant négligeable si  $\Gamma \gg R_1, R_2$ . La condition de non inversion serait donc  $\Gamma_2/\Gamma_1 < R_2/R_1$ .

En général, dans la théorie des lasers à effet Raman stimulé, on calcule les populations stationnaires avec  $\Omega_1 = \Omega_2 = 0$ . La raison est que les 2 champs  $\omega_{L1}$  et  $\omega_{L2}$  sont très loin de résonance et que les pertes par émission spontanée dues au champ  $\omega_{L2}$  sont négligeables, de sorte que, pour  $\Omega_1 = 0$ , les populations des niveaux sont les mêmes que  $\Omega_2$  soit nul ou non. Dans le schéma de Imamoglu, Field et Harris étudié ici, il faut tenir compte de l'effet du champ  $\omega_{L2}$  puisqu'on s'est placé volontairement à résonance pour introduire des pertes radiatives. En présence du champ  $\omega_{L1}$ , et comme  $\Omega_2 \gg \Omega_1$ , l'état  $|g_1\rangle$  sera très voisin de l'état non couplé alors que l'état  $|g_2\rangle$  sera très voisin de l'état couplé. On peut donc espérer que les pertes radiatives n'affecteront pas trop le champ  $\omega_{L1}$  à cause des

interférences quantiques bloquant l'absorption à partir de  $g_1$ , alors qu'elles seront efficaces pour vider l'état  $g_2$  et obtenir ainsi un milieu non inversé

⑥ Processus augmentant ou diminuant le nombre  $N_1$  de photons  $\omega_{L1}$

a - Gain par effet Raman stimulé  $g_2 \rightarrow g_1$

- D'après (8.19.a), un tel processus se produit pendant les périodes  $[1,2]$  de probabilité  $P([1,2]) = P(2)P(1/2)$

- Pour calculer

$$P(1/2) = R_1 \int_0^\infty |C_{12}(t)|^2 dt \tag{9.27}$$

(voir (8.24) et (8.7)), il faut résoudre l'équation de Schrödinger (9.10) et trouver la valeur de  $C_1(t)$  correspondant à la condition initiale  $C_j(0) = \delta_{j1}$ , valeur notée  $C_{12}(t)$  d'après (8.6)

- Comme  $C_{22}(0) = 0$ , le régime transitoire de durée  $1/\Gamma$  au voisinage de  $t=0$  a une influence négligeable sur  $C_{12}(t)$  et  $C_{22}(t)$  et on peut utiliser les équations (9.13)

A l'ordre le plus bas en  $\frac{\Omega_1}{\Gamma}$  et  $\frac{\Omega_2}{\Gamma}$ , on peut utiliser la solution

$$C_{22}(t) = e^{-\frac{\Gamma'}{2}t} \tag{9.28}$$

correspondant à  $C_{22}(0) = 1$ , et reporter cette solution dans le second membre de (9.13.a) où elle est multipliée par  $-\Omega_1\Omega_2/2\Gamma$ . On obtient alors

$$\dot{C}_{12}(t) + \left(\frac{R_1}{2} + i\delta_1\right)C_{12}(t) = -\frac{\Omega_1\Omega_2}{2\Gamma} e^{-\frac{\Gamma'}{2}t/2} \tag{9.29}$$

qui est une équation différentielle linéaire pour  $C_{12}(t)$  avec terme source. Une solution particulière de l'équation avec 2<sup>e</sup> membre s'obtient en posant  $C_{12}(t) = \alpha e^{-\frac{\Gamma'}{2}t/2}$  dans (9.2), ce qui donne  $\alpha$ . On ajoute à cette solution une solution générale  $\mu e^{-(\frac{R_1}{2} + i\delta_1)t}$  de l'équation sans second membre,  $\mu$  étant déterminé ensuite par la condition initiale  $C_{12}(0) = 0$ . On obtient ainsi (compte tenu de  $R_1 \ll \Gamma'$ )

$$C_{12}(t) \approx \frac{\Omega_1\Omega_2}{2\Gamma(\frac{\Gamma'}{2} - i\delta_1)} \left[ e^{-\frac{\Gamma'}{2}t/2} - e^{-(\frac{R_1}{2} + i\delta_1)t} \right] \tag{9.30}$$

- Le crochet de (9.30) passe de 0 à -1 en un temps court  $2/\Gamma'$ , puis s'amortit exponentiellement de -1 à 0 en un temps plus long  $2/R_1$ . Comme  $1/R_1 \gg 1/\Gamma'$ , la contribution de la 1<sup>ère</sup> phase à  $\int_0^\infty |C_{12}(t)|^2 dt$  est négligeable, et on obtient, compte tenu de (9.27)

$$P(1/2) = R_1 \int_0^\infty |C_{12}(t)|^2 dt \approx R_1 \frac{\Omega_1^2 \Omega_2^2}{\Gamma^2 (\frac{\Gamma'^2}{2} + 4\delta_1^2)} \int_0^\infty e^{-R_1 t} dt = \frac{\Omega_1^2 \Omega_2^2}{\Gamma^2 (\frac{\Gamma'^2}{2} + 4\delta_1^2)} \tag{9.31}$$

qu'on peut encore écrire, compte tenu de (9.3)

$$P(1/2) = \frac{\Omega_1^2}{\Omega_2^2} \frac{1}{1 + \frac{4\delta_1^2}{\Gamma'^2}} \tag{9.32}$$

$P(1/2)$  passe donc de  $(\Omega_1/\Omega_2)^2$  à 0 sur un intervalle de valeurs de  $\delta_1$  de largeur  $\Gamma'_2$  (voir Fig.5)

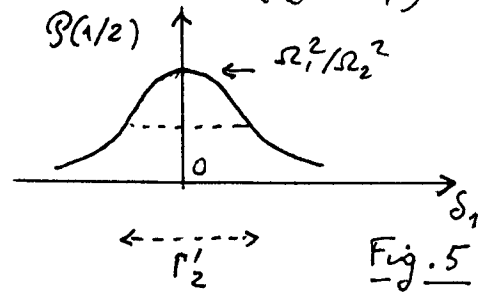


Fig. 5

- On peut encore considérer que  $\Gamma'_2$  est la largeur de la résonance Raman entre  $g_2$  et  $g_1$ , puisque  $g_2$  est plus large que  $g_1$  et a pour largeur  $\Gamma'_2$ .

Il est donc normal de trouver que l'amplification par effet Raman stimulé  $g_2 \rightarrow g_1$ , maximale pour  $S_1 = 0$ , n'existe que sur une plage de valeurs de  $S_1$  correspondant à la largeur de la résonance Raman.

- En utilisant (9.23) et (9.32), on obtient finalement

$$P([1,2]) = P(1/2) P(2) = \frac{\Gamma_2}{2\Gamma_1 + \Gamma_2} \frac{\Omega_1^2}{\Omega_2^2} \frac{1}{1 + \frac{4\delta_1^2}{\Gamma_2^2}} \quad (9.33)$$

b - Gain par émission induite  $e \rightarrow g_1$

- D'après (8.19.b), il faut étudier maintenant les périodes  $[1,e]$  et calculer

$$P(1/e) = R_1 \int_0^\infty |C_{1e}(t)|^2 dt \quad (9.34)$$

- Comme la condition initiale correspond maintenant à l'atome dans  $e$  à  $t=0$ , il faut revenir aux équations (9.10). On peut à partir de ces équations calculer  $C_{1e}(t)$ .

Nous ne ferons pas ici un tel calcul, car nous calculons plus loin (§d)  $C_{e1}(t)$ , et on peut montrer de manière générale (par exemple sur la transformée de Laplace des équations (9.10)) que

$$C_{1e}(t) = C_{e1}(t) \quad (9.35)$$

- Considérons alors la probabilité conditionnelle

$$P(e/1) = \Gamma \int_0^\infty |C_{e1}(t)|^2 dt \quad (9.36)$$

relative aux périodes  $[e,1]$  associées au processus d'absorption  $g_1 \rightarrow e$ . En utilisant (9.35) et en comparant (9.34) et (9.36), on obtient

$$P(1/e) = \frac{R_1}{\Gamma} P(e/1) \ll P(e/1) \quad (9.37)$$

puisque nous supposons ici  $R_1 \ll \Gamma$  (voir 9.5).

- Considérons enfin  $P([1,e])$ . En utilisant le fait que  $P(e) \approx P(1)$  (voir 9.21), on obtient, compte tenu de (9.37)

$$\begin{aligned} P([1,e]) &= P(1/e) P(e) = \frac{R_1}{\Gamma} P(e/1) P(e) \\ &\approx \frac{R_1}{\Gamma} P(e/1) P(1) = \frac{R_1}{\Gamma} P([e,1]) \ll P([e,1]) \end{aligned} \quad (9.38)$$

On en conclut que la probabilité des périodes produisant un gain par émission stimulée  $e_1 \rightarrow g$  est négligeable devant celle des périodes produisant une perte par absorption  $g_1 \rightarrow e$ .

c - Pertes par effet Raman stimulée  $g_1 \rightarrow g_2$

- D'après (8.19.c), il faut étudier les périodes  $[2,1]$  et calculer

$$P(2/1) = R_2 \int_0^\infty |C_{21}(t)|^2 dt \quad (9.39)$$

- Comme dans le § a précédent, on part de la solution d'ordre 0 en  $\Omega_1/\Gamma$  pour  $C_{11}(t)$  qui vaut 1 pour  $t=0$

$$C_{11}(t) = e^{-(\frac{R_1}{2} + i\delta_1)t} \quad (9.40)$$

et on reporte cette solution dans le dernier terme de l'équation (9.31.b)

relative à  $\dot{c}_{21}(t)$ , où elle se retrouve multipliée par  $\Omega_1 \Omega_2 / 2\Gamma$

$$\dot{c}_{21}(t) + \frac{\Gamma_2'}{2} c_{21}(t) = -\frac{\Omega_1 \Omega_2}{2\Gamma} e^{-(\frac{R_1}{2} + i\delta)t} \quad (9.41)$$

La même méthode que celle suivie pour intégrer l'équation (9.29) conduit à la solution

$$c_{21}(t) \approx \frac{\Omega_1 \Omega_2}{2\Gamma(\frac{\Gamma_2'}{2} - i\delta_1)} \left[ e^{-\frac{\Gamma_2'}{2}t/2} - e^{-(\frac{R_1}{2} + i\delta)t} \right] \quad (9.42)$$

On constate, en comparant (9.30) et (9.42) que  $c_{21}(t) = c_{12}(t)$ , ce qui montre bien le caractère symétrique de l'effet Raman stimulé, la dissymétrie ne peut provenir que des temps d'entrée dans  $g_1$  et  $g_2$  et des temps de départ de ces états. Nous discuterons ce point plus loin. L'intégrale (9.39) donnant  $\mathcal{P}(2/1)$  est donc la même que l'intégrale (9.31) donnant  $\mathcal{P}(1/2)$ , au remplacement près de  $R_1$  par  $R_2$ . On déduit alors immédiatement de (9.32) que

$$\mathcal{P}(2/1) = \frac{R_2}{R_1} \frac{\Omega_1^2}{\Omega_2^2} \frac{1}{1 + \frac{4\delta_1^2}{\Gamma_2'^2}} \quad (9.43)$$

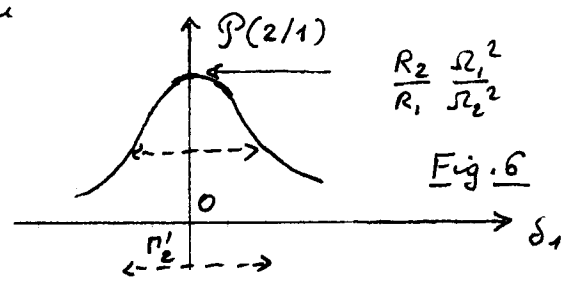


Fig. 6

$\mathcal{P}(2/1)$  passe donc de  $\frac{R_2}{R_1} \frac{\Omega_1^2}{\Omega_2^2}$  à 0 sur un intervalle de valeurs de  $\delta_1$  de largeur  $\Gamma_2'$  autour de 0, ce qui correspond bien à la largeur de la résonance Raman (Fig. 6).

- En utilisant (9.43) et (9.23), on obtient

$$\mathcal{P}([2,1]) = \mathcal{P}(2/1) \mathcal{P}(1) = \frac{\Gamma_1}{2\Gamma_1 + \Gamma_2} \frac{R_2}{R_1} \frac{\Omega_1^2}{\Omega_2^2} \frac{1}{1 + \frac{4\delta_1^2}{\Gamma_2'^2}} \quad (9.44)$$

- La comparaison de (9.44) et (9.33) montre alors que

$$\frac{\mathcal{P}([2,1])}{R_2 \Gamma_1} = \frac{\mathcal{P}([1,2])}{R_1 \Gamma_2} \quad (9.45)$$

La dissymétrie entre les 2 processus Raman stimulés inverses différents  $g_1 \rightarrow g_2$  et  $g_2 \rightarrow g_1$ , apparaît bien sur (9.45) comme étant due aux différences entre les temps d'entrée et de sortie dans les niveaux concernés. Le passage  $g_1 \rightarrow g_2$  a une probabilité proportionnelle au temps d'entrée  $\Gamma_1$  dans  $g_1$  et au temps de sortie  $R_2$  à partir de  $g_2$  (voir Fig. 3 du cours VIII) alors que le passage  $g_2 \rightarrow g_1$  a une probabilité proportionnelle au temps d'entrée  $\Gamma_2$  dans  $g_2$  et au temps de sortie  $R_1$  de  $g_1$ . Les gains Raman ne sont donc supérieurs aux pertes que si  $R_1 \Gamma_2 > R_2 \Gamma_1$ .

$$\text{Gains Raman} > \text{Perte Raman} \quad \text{si} \quad R_1 \Gamma_2 > R_2 \Gamma_1 \quad (9.46)$$

Notons bien que le temps de départ  $\Gamma_2'$  à partir de  $g_2$  n'apparaît pas dans une telle condition (alors qu'il apparaît dans l'expression (9.25) des populations stationnaires). Ceci est dû au fait que  $\Gamma_2'$  décrit des transitions à l'intérieur de  $E(N_1, N_2)$ . Une fois le système passé de  $g_1, N_1+1, N_2$  à  $g_2, N_1, N_2+1$ , s'il revient à  $e, N_1, N_2$  avec un temps  $\Gamma_2'$  et qu'il quille ensuite  $E(N_1, N_2)$  à partir de  $e$ , la perte du photon  $\omega_1$  n'est plus due à l'effet Raman stimulé  $g_1 \rightarrow g_2$ , mais à l'absorption  $g_1 \rightarrow e$ .

d - Pertes dues à l'absorption  $g_1 \rightarrow e$

- D'après (8.19.d), il faut étudier les périodes  $[e, 1]$  et calculer

$$P(e/1) = \Gamma \int_0^\infty |c_{e1}(t)|^2 dt \quad (9.47)$$

- Revenons à l'équation (9.10.a)

$$\dot{c}_{e1}(t) = -\frac{\Gamma}{2} c_{e1}(t) - i\frac{\Omega_1}{2} c_{11}(t) - i\frac{\Omega_2}{2} c_{21}(t) \quad (9.48)$$

Après un régime transitoire, durant un temps très court de l'ordre de  $2/\Gamma$ ,  $c_{e1}(t)$  est passé de 0 à sa valeur adiabatique (9.11)

$$t > \frac{1}{\Gamma} \quad c_{e1}(t) \approx -i\frac{\Omega_1}{\Gamma} c_{11}(t) - i\frac{\Omega_2}{2} c_{21}(t) \quad (9.49)$$

En reportant dans (9.49) les valeurs (9.40) et (9.42) de  $c_{11}(t)$  et  $c_{21}(t)$  données plus haut, on obtient

$$c_{e1}(t) = \left[ -\frac{i\Omega_1}{\Gamma} + i\frac{\Omega_2}{\Gamma} \frac{\Omega_1\Omega_2}{2\Gamma(\frac{\Gamma'_2}{2} - i\delta_1)} \right] e^{-(\frac{R_1}{2} + i\delta)t} - \frac{i\Omega_2}{\Gamma} \frac{\Omega_1\Omega_2}{2\Gamma(\frac{\Gamma'_2}{2} - i\delta_1)} e^{-\frac{\Gamma'_2}{2}t} \quad (9.50)$$

- Supposons tout d'abord  $\delta_1 = 0$ . On constate alors, en utilisant (9.3), que le 1<sup>er</sup> crochet du 2<sup>em</sup> membre de (9.50) (coefficient de l'exponentielle à constante de temps longue, en  $2/R_1$ ) s'annule. On a alors

$$\delta_1 = 0 \rightarrow c_{e1}(t) = -i\frac{\Omega_1}{\Gamma} e^{-\frac{\Gamma'_2}{2}t} \quad (9.51)$$

de sorte que

$$P(e/1) = \Gamma \frac{\Omega_1^2}{\Gamma^2} \int_0^\infty e^{-\Gamma'_2 t} dt = \frac{\Omega_1^2}{\Gamma} \frac{1}{\Gamma'_2} = \frac{\Omega_1^2}{\Omega_2^2} \quad \text{pour } \delta_1 = 0 \quad (9.52)$$

L'interprétation d'un tel résultat est simple. Quand  $\delta_1 = 0$ , il y a un état non-couplé  $|\Psi_{NC}\rangle$ , qui ne peut absorber de lumière, très proche de  $|g_1\rangle$  (puisque  $\Omega_1 \ll \Omega_2$ ), et un état couplé  $|\Psi_C\rangle$  qui est couplé à  $e$  et qui est très proche de  $|g_2\rangle$ . De manière plus précise

$$|g_1, N_1+1, N_2\rangle = \frac{\Omega_2}{\Omega} |\Psi_{NC}\rangle + \frac{\Omega_1}{\Omega} |\Psi_C\rangle \quad (9.53)$$

où  $\Omega = \sqrt{\Omega_1^2 + \Omega_2^2} \approx \Omega_2$ . A  $t=0$ , on part de (9.53). Puis les 2 parties de (9.53) décroissent avec des constantes de temps,  $2/R_1$  pour  $|\Psi_{NC}\rangle$ ,  $2/\Gamma'_2$  pour  $|\Psi_C\rangle$ . L'état  $|e, N_1, N_2\rangle$  est alimenté à partir de ces 2 composantes, avec une efficacité nulle pour  $|\Psi_{NC}\rangle$  qui est un piège parfait vis à vis de  $e$  pour  $\delta_1 = 0$ . Après un temps  $1/\Gamma'_2$ , la composante  $|\Psi_C\rangle$ , de poids  $\Omega_1^2/\Omega^2 \approx \Omega_1^2/\Omega_2^2$  se sera désintégrée via  $e$ , ce qui explique le résultat (9.52). Puis, la partie en  $|\Psi_{NC}\rangle$  décroîtra plus lentement par absorption de rayonnement incohérent vers l'état  $|e, N_1+1, N_2\rangle$  sans variation de  $N_1$

- Supposons maintenant  $\delta_1 \neq 0$ . Le coefficient de  $e^{-(\frac{R_1}{2} + i\delta)t}$  peut être réécrit, compte tenu de (9.3)

$$-\frac{i\Omega_1}{\Gamma} \frac{\delta_1}{\delta_1 + i\frac{\Gamma'_2}{2}} \quad (9.54)$$

qui est bien nul pour  $\delta_1 = 0$  et qui a un module tendant vers  $\frac{\Omega_1}{\Gamma}$  quand  $|\delta_1| \gg \Gamma'_2/2$ , c'est à dire quand on sort de la résonance Raman. Dans cette limite, la contribution de la 1<sup>er</sup> exponentielle de (9.50),  $-i\frac{\Omega_1}{\Gamma} e^{-(\frac{R_1}{2} + i\delta)t}$ , à l'intégrale (9.47) devient prépondérante devant celle de la seconde (en  $e^{-\Gamma'_2 t/2}$ ), et l'on a

$$|\delta_1| \gg \Gamma'_2 \rightarrow P(e/1) = \Gamma \frac{\Omega_1^2}{\Gamma^2} \int_0^\infty e^{-R_1 t} dt = \frac{\Omega_1^2}{\Gamma R_1} \quad (9.55)$$

Là aussi, l'interprétation physique est claire. En dehors de la résonance Raman, les effets d'interférence destructive entre  $c_{11}(t)$  et  $c_{21}(t)$  dans l'état  $|V_{bc}\rangle$  n'existent plus. On peut calculer la désintégration de  $g_1$  par absorption de rayonnement cohérent, indépendamment de la présence <sup>(de  $g_2$ )</sup>. On peut alors définir un taux d'absorption

$$\Gamma'_1 = \frac{\Omega_1^2}{\Gamma} \tag{9.56}$$

à partir de  $g_1$ , analogue au taux  $\Gamma'_2$  introduit en (9.3) pour  $g_2$ . Comme on suppose  $\Omega_1 \ll \Gamma$  et  $\Omega_1 \ll R_1$ ,  $\Gamma'_1 \ll R_1$ , et la décroissance de  $g_1$  est essentiellement contrôlée par l'absorption de rayonnement incohérent avec un taux  $R_1$ . On obtient donc la probabilité d'absorber un photon  $\omega_{L1}$  du rayonnement cohérent en multipliant le taux d'absorption (9.56) par la durée de séjour  $1/R_1$  de l'atome dans  $g_1$ , ce qui redonne bien (9.55)

- Comparons les valeurs (9.52) et (9.55) de  $\mathcal{P}(e/1)$

$$\frac{\mathcal{P}(e/1) \text{ pour } \delta_1 = 0}{\mathcal{P}(e/1) \text{ pour } |\delta_1| \gg \Gamma'_2} = \frac{\Omega_1^2 / \Omega_2^2}{\Omega_1^2 / \Gamma R_1} = \frac{\Gamma R_1}{\Omega_2^2} = \frac{R_1}{\Gamma'_2} \ll 1 \tag{9.57}$$

compte tenu de (9.5).

Un tel résultat montre bien l'importance des interférences quantiques entre amplitudes d'absorption qui réduisent les pertes par absorption de photons  $\omega_{L1}$  par un facteur considérable  $\Gamma'_2 / R_1 \gg 1$  quand la condition de résonance Raman  $\delta_1 = 0$  est vérifiée

- les pertes minimales par absorption sont donc obtenues pour  $\delta_1 = 0$ . Calculons alors  $\mathcal{P}([e, 1])$ . En utilisant (9.52) et (9.23), on obtient

$$\delta_1 = 0 \rightarrow \mathcal{P}([e, 1]) = \mathcal{P}(e/1) \mathcal{P}(1) = \frac{\Gamma_1}{2\Gamma_1 + \Gamma_2} \frac{\Omega_1^2}{\Omega_2^2} \tag{9.58}$$

## 7 Récapitulation

### a - Condition d'amplification

- La variation moyenne du nombre  $N_1$  de photons  $\omega_{L1}$  par période est donné en (8.38). Nous avons vu plus haut que  $\mathcal{P}([1, e])$ , qui représente le gain par émission induite, est négligeable. On a donc

$$\langle \Delta N_1 \rangle = \mathcal{P}([1, 2]) - \mathcal{P}([2, 1]) - \mathcal{P}([e, 1]) \tag{9.59}$$

- Calculons  $\langle \Delta N_1 \rangle$  pour  $\delta_1 = 0$ , puisque c'est pour cette valeur de  $\delta_1$  que le gain  $\mathcal{P}([1, 2])$  est maximal et les pertes par absorption  $\mathcal{P}([e, 1])$  minimales. En utilisant (9.33), (9.44) et (9.58), on obtient

$$\langle \Delta N_1 \rangle = \frac{1}{2\Gamma_1 + \Gamma_2} \frac{\Omega_1^2}{\Omega_2^2} \frac{1}{R_1} [\Gamma_2 R_1 - \Gamma_1 R_2 - \Gamma_1 R_1] \text{ pour } \delta_1 = 0 \tag{9.60}$$

La condition d'amplification,  $\langle \Delta N_1 \rangle > 0$ , s'écrit donc  $\Gamma_2 R_1 > \Gamma_1 R_2 + \Gamma_1 R_1$ , soit encore

$$\frac{R_2 + R_1}{R_1} < \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1} \tag{9.61}$$

b - Compatibilité avec la condition de non-inversion

En regroupant (9.61) et la condition (9.26) de non-inversion, on obtient la double inégalité

$$\frac{R_2 + R_1}{R_1} < \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1} < \frac{\Gamma_2'}{R_1} \tag{9.62}$$

Ces 2 inégalités ne sont compatibles que si  $\Gamma_2' > R_2 + R_1$ , ce qui est bien le cas, compte tenu de (9.5)

c - Conclusions

- La méthode des sauts quantiques et des fonctions délais suivie dans ces 2 cours VIII et IX permet d'analyser en détail un modèle simple d'amplificateur sans inversion de population. Elle conduit à des résultats identiques à ceux donnés par les équations de Bloch optiques (voir Ref 1 page VIII-11), dans la limite considérée ici (voir § 4)
- Les calculs présentés ici peuvent sembler plus longs que ceux effectués dans une résolution analytique ou numérique des équations de Bloch optiques. Ils ont cependant le grand avantage de pouvoir isoler la contribution de chaque processus physique et de comprendre les paramètres qui contrôlent chaque processus.
- Ainsi, nous avons vu que le gain était dû à un processus Raman stimulé, la symétrie avec le processus inverse étant rompue par l'inégalité entre les temps d'entrée dans  $g_1$  et  $g_2$  et on de sortie de  $g_1$  et  $g_2$ .
- A la limite  $\Omega_1 \ll \Omega_2$ , les pertes par absorption de rayonnement cohérent à partir de  $g_1$  sont considérablement réduites par un effet d'interférence quantique destructive. C'est cette réduction des pertes par absorption qui permet l'amplification du champ  $\omega_{L1}$ .
- Cette interférence destructive n'opère pas pour l'absorption de rayonnement cohérent à partir de  $g_2$ . Le temps moyen passé dans  $g_2$  est considérablement réduit par l'absorption de rayonnement cohérent  $\omega_{L2}$  et c'est ce qui permet d'avoir un niveau  $g_2$  beaucoup moins peuplé que  $g_1$  (non-inversion).
- Les effets d'interférence quantique à la base de l'amplification sans inversion n'opèrent que lorsque la condition de résonance Raman est satisfaite, à la largeur  $\Gamma_2'$  du niveau  $g_2$  près.



# Configurations $\Lambda$ Interférences entre amplitudes de diffusion

## Buts de ce cours (voir Ref. 1)

- Présenter un autre point de vue pour interpréter physiquement le phénomène de piégeage cohérent de populations observable sur une configuration  $\Lambda$ . Ce point de vue consiste à étudier la diffusion d'un photon  $\omega_{L1}$  par un atome interagissant avec des photons  $\omega_{L2}$ .
- Identifier les amplitudes qui interfèrent et interpréter les phénomènes résonnants observables au voisinage
  - (i) de la condition de résonance Raman entre niveaux non perturbés.
  - (ii) de la condition de résonance Raman entre niveaux déplacés par la lumière.
- Montrer l'analogie entre les variations avec  $\omega_{L1}$  de la section efficace de diffusion et les profils de Fano.

## ① Hypothèses - Buts du calcul

- Même configuration de niveaux que dans les cours précédents

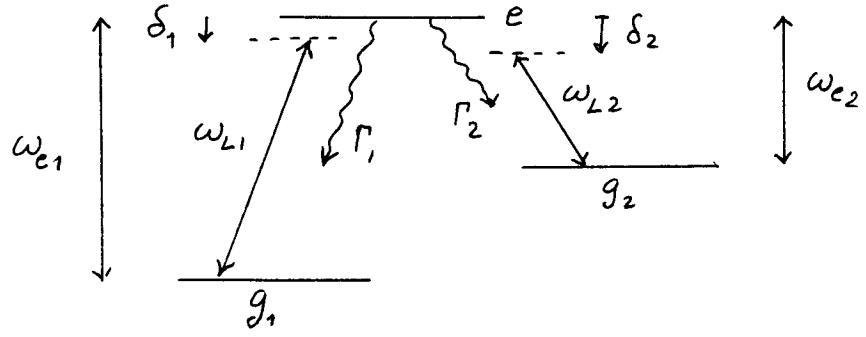


Fig. 1

- Etats initial et final du processus de diffusion étudié

### Etat initial $|i\rangle$

Atome dans  $g_1$  - 1 photon  $\omega_{L1}$  -  $N_2$  photons  $\omega_{L2}$   
Tous les autres modes du champ vides.

### Etat final $|f\rangle$

Atome dans  $g_1$  - 0 photon  $\omega_{L1}$  -  $N_2$  photons  $\omega_{L2}$   
1 photon de fluorescence  $\omega$

Le but du calcul est de comprendre comment la présence de photons  $\omega_{L2}$  peut inhiber la diffusion du photon incident  $\omega_{L1}$  (disparition du photon  $\omega_{L1}$  et remplacement de ce photon par un photon de fluorescence  $\omega$ )

### Remarques

- (i) Nous considérerons également plus loin des processus où des photons  $\omega_{L2}$  disparaissent au cours du processus de diffusion et où plusieurs photons de fluorescence apparaissent (cf § 3e)
- (ii) Quand le champ de rayonnement est quantifié dans un cube de côté  $L$ , les fréquences de Rabi  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ , caractérisant le couplage de l'atome avec les photons  $\omega_{L1}$  et  $\omega_{L2}$  (et définies à partir des éléments de matrice de l'hamiltonien d'interaction  $V$ ),

sont respectivement proportionnelles à

$$\Omega_1 \sim \sqrt{\frac{\hbar \omega_{L1}}{2\epsilon_0 L^3}} \quad \Omega_2 \sim \sqrt{\frac{N_2 \hbar \omega_{L2}}{2\epsilon_0 L^3}} \quad (10.1)$$

Si l'on fait tendre  $L$  vers l'infini, il faut aussi faire tendre  $N_2$  vers l'infini, de manière à garder  $N_2/L^3$  et par suite  $\Omega_2$  constants. Par contre,  $\Omega_1^2$ , qui varie en  $1/L^3$ , tend vers 0, de même donc que la probabilité de diffusion par unité de temps ou du photon  $\omega_{L1}$ . Il ne faut pas oublier cependant que le flux incident associé au photon incident,  $\phi = c/L^3$ , varie aussi en  $1/L^3$ , de sorte que la section efficace de diffusion du photon incident, proportionnelle à  $w/\phi$ , est indépendante de  $L$ .

En d'autres termes, nous calculons ici la section efficace de diffusion d'un photon  $\omega_{L1}$  par un atome interagissant avec un nombre  $N_2$  de photons  $\omega_{L2}$  tel que la fréquence de Rabi  $\Omega_2$  a une valeur bien définie.

- Rappels sur l'amplitude de diffusion  $S_{fi}$  (voir Ref 2, compléments A<sub>I</sub> et B<sub>III</sub>)  
 $S_{fi}$  : Élément de la matrice  $S$  entre  $|i\rangle$  et  $\langle f|$ .

$$S_{fi} = \delta_{fi} - 2\pi i \delta(E_f - E_i) T_{fi} \quad (10.2)$$

$T_{fi}$  : Matrice de transition définie par

$$T_{fi} = V_{fi} + \langle f | V \frac{1}{E_i - H + i\eta} V | i \rangle \quad (10.3)$$

Dans (10.3),

$V_{fi} = \langle f | V | i \rangle$  est l'élément de matrice de l'hamiltonien d'interaction  $V$  entre atome et photons.

$H = H_0 + V$  est l'hamiltonien total,  $H_0$  étant l'hamiltonien non perturbé du système atome + photons n'interagissant pas.

Les états initial et final,  $|i\rangle$  et  $|f\rangle$ , sont des états propres de  $H_0$ , de valeurs propres  $E_i$  et  $E_f$ .

$\eta$  est un réel que l'on fait tendre vers 0 par valeurs positives.

Remarques

- (i) Comme  $H = H_0 + V$  figure au dénominateur du dernier terme de (10.3), l'expression exacte (10.3) est non perturbative vis à vis de  $V$ .
- (ii) Si l'on développe le propagateur  $\frac{1}{E_i - H + i\epsilon}$  en puissance de  $V$  et du propagateur non perturbé  $\frac{1}{E_i - H_0 + i\epsilon}$ , on obtient le développement de Born de l'amplitude de diffusion. L'expression exacte (10.3) résume donc le développement de Born.
- (iii) L'approximation du "champ tournant" est faite dans  $V$ . On néglige donc les processus où l'atome dans  $g_1$  émet et reabsorbe virtuellement un photon. Les états  $|i\rangle$  et  $|f\rangle$  (atome dans  $g_1$  en présence d'un photon  $\omega_{L1}$  ou  $\omega$ ) sont donc des états asymptotiques corrects pour le processus de diffusion (voir complément B<sub>III</sub> de la Ref. 2)

② Calcul de l'amplitude de diffusion.

a - Lien entre la matrice S et la résolvente de H

- L'approximation dipolaire électrique et l'approximation du champ tournant conduisent pour V à l'expression

$$V = - \vec{d}^+ \cdot \vec{E}^+ - \vec{d}^- \cdot \vec{E}^- \tag{10.4}$$

où  $\vec{d}^+$  et  $\vec{d}^-$  sont les parties montante et descendante de l'opérateur dipole  $\vec{d}$ , et où  $\vec{E}^+$  et  $\vec{E}^-$  sont les composantes de fréquence positive et négative de l'opérateur champ électrique.

- Pour passer de  $|i\rangle$  à  $|f\rangle$ , il faut détruire le photon incident  $\omega_{L1}$  et créer le photon de fluorescence  $\omega$ . Comme  $\vec{E}^+$  et  $\vec{E}^-$  ne peuvent que détruire ou créer un seul photon à la fois, V ne peut relier  $|i\rangle$  à  $|f\rangle$

$$V_{fi} = 0 \tag{10.5}$$

- Posons  $|i\rangle = |g_1; 1, N_2, 0\rangle$  (10.6)

où 1, représente 1 photon dans le mode  $\omega_{L1}$ ,  $N_2$  représente  $N_2$  photons dans le mode  $\omega_{L2}$  et 0 le vide pour tous les autres modes, et calculons  $V|i\rangle$ .

A cause de l'approximation du champ tournant, l'atome dans  $g_1$  ne peut qu'absorber le photon  $\omega_{L1}$  et monter dans e (il ne peut pas émettre de photon nouveau et monter dans e). Par ailleurs, nous supposons les fréquences des 2 transitions  $g_1-e$  et  $g_2-e$  suffisamment différentes pour qu'on puisse négliger les couplages non résonnants entre les photons  $\omega_{L2}$  et l'atome dans  $g_1$  (l'absorption non résonnante d'un photon  $\omega_{L2}$  par l'atome dans  $g_1$  peut être négligée). Le seul état auquel  $|i\rangle$  est couplé par V est donc l'état  $|e; 0, N_2, 0\rangle$ , et on peut écrire

$$V|i\rangle = \frac{\hbar\Omega_1}{2} |e; 0, N_2, 0\rangle \tag{10.7}$$

où  $\Omega_1$  peut être considérée comme la fréquence de Rabi associée au couplage avec le photon  $\omega_{L1}$ .

- Posons  $|f\rangle = |g_1; 0, N_2, 1\omega\rangle$  (10.8)

où  $1\omega$  représente l'état avec 1 photon  $\omega$ , tous les modes autres que  $\omega_{L1}$ ,  $\omega_{L2}$  et  $\omega$  étant vides, et calculons  $V|f\rangle$ . Le même raisonnement que celui fait précédemment montre que le seul processus possible à partir de  $|f\rangle$  est l'absorption des photons  $\omega$  par l'atome montant de  $g_1$  à e, de sorte que

$$\langle f|V = \frac{\hbar\Omega}{2} \langle e; 0, N_2, 0| \tag{10.9}$$

où  $\Omega$  peut être considérée comme la fréquence de Rabi associée au couplage avec le photon  $\omega$ .

- Reportons (10.5), (10.7) et (10.9) dans l'expression (10.3) de  $T_{fi}$ . Si l'on introduit la résolvante (X-4)

$$G(z) = \frac{1}{z - H} \quad (10.10)$$

de  $H$ ,  $z$  étant la variable complexe, on peut écrire

$$T_{fi} = \frac{\hbar^2 \Omega_1 \Omega_2}{4} \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \langle e; 0_1, N_2, 0 | G(z = E_i + i\eta) | e; 0_1, N_2, 0 \rangle \quad (10.11)$$

Pour simplifier les notations, nous posons

$$|\varphi_e\rangle = |e; 0_1, N_2, 0\rangle \quad (10.12)$$

$$G_{ee}(z) = \langle \varphi_e | G(z) | \varphi_e \rangle \quad (10.13)$$

de sorte que

$$T_{fi} = \frac{\hbar^2 \Omega_1 \Omega_2}{4} \lim_{\eta \rightarrow 0^+} G_{ee}(z = E_i + i\eta) \quad (10.14)$$

### b - Calcul des éléments de matrice importants de la résolvante

- L'état  $|\varphi_e\rangle$  est un état discret de  $H_0$ , couplé à un continuum d'états finals auxquels il peut être couplé de manière résonnante (atome dans l'état  $g_1$  ou  $g_2$  avec un photon de fluorescence émis ayant une énergie proche de  $\hbar\omega_{e1}$  ou  $\hbar\omega_{e2}$ ). L'état  $|\varphi_e\rangle$  est donc un état instable et on peut songer à utiliser des techniques d'opérateurs de projection pour calculer la restriction de  $G(z)$  dans l'état  $|\varphi_e\rangle$ .

- Auparavant, il faut se demander: s'il n'existe pas d'autre état discret de  $H_0$ , proche de  $|\varphi_e\rangle$ , et qui serait couplé à  $|\varphi_e\rangle$ , soit directement, soit indirectement via le continuum auquel est couplé  $|\varphi_e\rangle$ . Dans un tel cas, on voit en effet qu'il ne serait pas correct d'étudier l'évolution de  $|\varphi_e\rangle$  indépendamment de ces autres états discrets proches de lui.

- Or, il existe bien un tel état. C'est l'état

$$|\varphi_2\rangle = |g_2; 0_1, N_2+1, 0\rangle \quad (10.15)$$

contenant un photon  $\omega_{22}$  de plus que  $\varphi_e$ , l'atome étant dans  $g_2$  au lieu d'être dans  $e$ . Si  $\omega_{22}$  est voisin de  $\omega_{e2}$ , les énergies de  $|\varphi_e\rangle$  et  $|\varphi_2\rangle$  sont très proches l'une de l'autre. De manière plus précise, si l'on prend pour 0 d'énergie l'énergie de l'état  $|\varphi_e\rangle$

$$E_{\varphi_e} = 0 \quad (10.16)$$

on a

$$E_{\varphi_2} = \hbar \delta_2 \quad (10.17)$$

où  $\delta_2 = \omega_{22} - \omega_{e2}$  (voir Figure 1). Par ailleurs, les états  $|\varphi_e\rangle$  et  $|\varphi_2\rangle$  sont bien couplés l'un à l'autre par  $V$  puisque l'atome dans l'état  $g_2$  peut absorber un photon  $\omega_{22}$  et monter dans  $e$ . Plus précisément

$$\langle \varphi_2 | V | \varphi_e \rangle = \frac{\hbar \Omega_2}{2} \quad (10.18)$$

(Comme  $N_2 \gg 1$  à la limite  $L \rightarrow \infty$ ,  $\sqrt{N_2+1} \approx \sqrt{N_2}$ ).

Notons par contre que  $|\varphi_2\rangle$  n'est pas couplé directement à un continuum puisque on suppose  $g_2$  stable radiativement (pas d'émission spontanée de  $g_2$  vers  $g_1$ ).

- En toute rigueur, l'état  $|i\rangle$  est un autre état propre de  $H_0$ , couple à  $|\varphi_e\rangle$  (voir équation 10.7), et d'énergie très voisine puisque, avec le zéro d'énergie (10.16), on a

$$E_i = \hbar \delta_1 \tag{10.19}$$

où  $\delta_1 = \omega_{L1} - \omega_{e1}$ . Le couplage  $\hbar \Omega_1 / 2$  entre  $|i\rangle$  et  $|\varphi_e\rangle$  tend cependant vers 0 quand  $L \rightarrow \infty$  et nous négligerons son effet sur l'évolution des états  $|\varphi_e\rangle$  et  $|\varphi_2\rangle$ .

- La discussion précédente montre qu'il ne faut pas étudier seulement  $G_{ee}(z)$ , mais plutôt la restriction de  $G(z)$

$$\begin{pmatrix} G_{ee}(z) & G_{e2}(z) \\ G_{2e}(z) & G_{22}(z) \end{pmatrix} \tag{10.20}$$

dans le sous-espace sous-tendu par  $|\varphi_e\rangle$  et  $|\varphi_2\rangle$ . Des techniques d'opérateurs de projection (voir Ref.2, chapitre III) permettent alors de montrer que la matrice (10.20) est l'inverse de la matrice

$$\begin{pmatrix} z - E_{\varphi_e} - V_{ee} - R_{ee}(z) & -V_{e2} - R_{e2}(z) \\ -V_{2e} - R_{2e}(z) & z - E_{\varphi_2} - V_{22} - R_{22}(z) \end{pmatrix} \tag{10.21}$$

Dans (10.21),  $R(z)$  est l'opérateur déplacement que nous n'explicitons ici. Nous nous contenterons d'indiquer (voir Ref.2, chap. III pour plus de détails) que les éléments de matrice de  $R(z)$  varient très peu avec  $z$  au voisinage de  $E_i + i\eta$  et que leurs valeurs sont reliées au voisinage de  $z = E_i + i\eta$  aux largeurs naturelles des états instables. Comme ici seul l'état  $|\varphi_e\rangle$  est instable, on a

$$R_{ee}(z \text{ voisin de } E_i + i\eta) \approx -i\hbar \frac{\Gamma}{2} \quad R_{e2} = R_{22} = 0 \tag{10.22}$$

En utilisant (10.16), (10.17), (10.18), (10.22) et le fait que  $V_{ee} = V_{22} = 0$ , on obtient alors

$$z \text{ voisin de } E_i + i\eta \quad \begin{pmatrix} G_{ee}(z) & G_{e2}(z) \\ G_{2e}(z) & G_{22}(z) \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} z + i\hbar \frac{\Gamma}{2} & -\hbar \frac{\Omega_2}{2} \\ -\hbar \frac{\Omega_2}{2} & z - \hbar \delta_2 \end{pmatrix} \tag{10.23}$$

De (10.23), on déduit alors immédiatement par inversion de la dernière matrice de (10.23)

$$z \text{ voisin de } E_i + i\eta \quad G_{ee}(z) = \frac{z - \hbar \delta_2}{(z - z_I)(z - z_{II})} \tag{10.24}$$

où  $(z - z_I)(z - z_{II})$  est le déterminant associé à la matrice (10.23),  $z_I$  et  $z_{II}$  étant les 2 valeurs propres de cette matrice

On peut enfin décomposer en (10.24) en fractions rationnelles et obtenir

$$G_{ee}(z) = \frac{1}{z_I - z_{II}} \left[ \frac{z_I - \hbar \delta_2}{z - z_I} - \frac{z_{II} - \hbar \delta_2}{z - z_{II}} \right] \tag{10.25}$$

C. Récapitulation - Conclusion

- Reportons (10.25) dans (10.14) et utilisons (10.19). Comme  $z_I$  et  $z_{II}$  sont complexes, le  $i\eta$  n'est plus nécessaire et on obtient

$$T_{fi} = \frac{\hbar^2 \Omega_1 \Omega_2}{4} \frac{1}{z_I - z_{II}} \left[ \frac{z_I - \hbar \delta_2}{\hbar \delta_1 - z_I} - \frac{z_{II} - \hbar \delta_2}{\hbar \delta_1 - z_{II}} \right] \quad (10.26)$$

- Il apparaît ainsi clairement que l'amplitude de diffusion, étudiée en fonction de  $\delta_1$ , pour  $\delta_2$  fixé, est une somme de 2 amplitudes variant de manière résonnante autour des valeurs réelles de  $z_I$  et  $z_{II}$  sur des intervalles de largeurs données par les parties imaginaires de  $z_I$  et  $z_{II}$ . Il y a donc bien un phénomène d'interférence quantique.

- Il apparaît aussi clairement sur (10.26) que les 2 termes du crochet de (10.26) se compensent exactement si  $\delta_1 = \delta_2$ .

$$\delta_1 = \delta_2 \rightarrow T_{fi} = 0 \quad (10.27)$$

L'interférence quantique est donc parfaitement destructive quand les fréquences  $\omega_{L1}$  et  $\omega_{L2}$  satisfont la condition de résonance Raman entre niveaux non déplacés par la lumière.

③ - Limite perturbative - Discussion physique

Les calculs du § 2 précédent sont valables quel que soit  $\Omega_2$ . Nous supposons maintenant que l'effet du couplage avec les photons  $\omega_{L2}$  peut être traité perturbativement,  $\Omega_2$  étant très petit, soit devant  $\Gamma$ , soit devant  $|\delta_2|$ . De manière plus précise, nous supposons

$$\delta_2 = \frac{\Omega_2^2 / 2}{\delta_2^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} \ll 1 \quad (10.28)$$

où  $\delta_2$  est le paramètre de saturation pour la transition  $g_2 - e$ .

L'intérêt d'une telle limite est double. D'une part, elle conduit à des résonances étroites sur l'amplitude de diffusion, superposées à des résonances larges, ce qui fait apparaître des profils de Fano. D'autre part, elle se prête bien à des discussions physiques et à des représentations diagrammatiques simples.

a - Interprétation des 2 poles  $z_I$  et  $z_{II}$  de la résolvante

- D'après (10.23), la restriction de la résolvante dans le sous-espace sous-tendu par  $|\varphi_2\rangle$  et  $|\varphi_e\rangle$  peut être considérée comme la résolvante de l'hamiltonien effectif  $H_{eff}$

$$H_{eff} = \hbar \begin{pmatrix} -i \frac{\Gamma}{2} & \frac{\Omega_2}{2} \\ \frac{\Omega_2}{2} & \delta_2 \end{pmatrix} \quad (10.29)$$

-  $z_I$  et  $z_{II}$  sont les 2 valeurs propres complexes de  $H_{eff}$ . Nous appelons  $z_{II}$  la valeur propre qui tend vers  $\delta_2$  quand  $\Omega_2 \rightarrow 0$ . On peut toujours écrire

$$z_{II} = \hbar \left[ \delta_2 + \delta'_2 - i \frac{\Gamma'_2}{2} \right] \quad (10.30)$$

où  $\hbar \delta'_2$  et  $-i \hbar \Gamma'_2 / 2$  sont les parties réelle et imaginaire de la correction introduite par  $\Omega_2$ . La conservation de la trace de (10.29)

donne alors pour  $Z_I$

$$Z_I = -i \frac{\hbar \Gamma}{2} - \hbar \delta'_2 + i \frac{\hbar \Gamma'_2}{2} = -\hbar \delta'_2 - i \hbar \frac{\Gamma - \Gamma'_2}{2} \quad (10.31)$$

- La condition (10.28) permet de calculer  $\delta'_2$  et  $\Gamma'_2$  perturbativement

$$\hbar(\delta'_2 - i \frac{\Gamma'_2}{2}) \approx \frac{(\hbar \Omega_2/2)^2}{\hbar(\delta_2 + i \frac{\Gamma}{2})} \quad (10.32)$$

ce qui donne

$$\delta'_2 \approx \delta_2 \frac{\delta_2}{2} \quad (10.33.a) \quad \Gamma'_2 \approx \Gamma \frac{\delta_2}{2} \quad (10.33.b)$$

$\hbar \delta'_2$  et  $\hbar \Gamma'_2$  ne sont autres que le déplacement radiatif et l'élargissement radiatif du niveau  $g_2$  dûs aux photons  $\omega_{L2}$

$Z_{II}$  et  $Z_I$  sont donc les énergies complexes des états  $g_2$  et  $e$  perturbés par les photons  $\omega_{L2}$ , les parties réelle et imaginaire étant associées respectivement à l'énergie perturbée et à la largeur des niveaux.

- Le couplage avec les photons  $\omega_{L2}$  perturbe également les fonctions d'onde des états  $\varphi_2$  et  $\varphi_e$  qui deviennent, au 1<sup>er</sup> ordre en  $\Omega_2$ ,

$$|\varphi_2\rangle \rightarrow |\overline{\varphi_2}\rangle = |\varphi_2\rangle + \frac{\Omega_2/2}{\delta_2 + i \frac{\Gamma}{2}} |\varphi_e\rangle \quad (10.34.a)$$

$$|\varphi_e\rangle \rightarrow |\overline{\varphi_e}\rangle = |\varphi_e\rangle - \frac{\Omega_2/2}{\delta_2 + i \frac{\Gamma}{2}} |\varphi_2\rangle \quad (10.34.b)$$

Notons que,  $H_{eff}$  n'étant pas hermitique,  $|\overline{\varphi_2}\rangle$  et  $|\overline{\varphi_e}\rangle$  ne sont pas orthogonaux.

### b - Interprétation des 2 résonances dans l'amplitude de diffusion

- En utilisant (10.19), (10.12) et le fait que la restriction de  $G(z)$  dans le sous-espace  $\{|\varphi_e\rangle, |\varphi_2\rangle\}$  est la résolvante de  $H_{eff}$  donné en (10.29), on peut recréer l'amplitude de transition (10.14) sous la forme

$$T_{fi} = \frac{\hbar^2 \Omega_1 \Omega_2}{4} \langle \varphi_e | \frac{1}{\hbar \delta_1 - H_{eff}} | \varphi_e \rangle \quad (10.35)$$

- Nous avons plus haut que  $H_{eff}$  a 2 vecteurs propres  $|\overline{\varphi_2}\rangle$  et  $|\overline{\varphi_e}\rangle$ , de valeurs propres  $Z_{II}$  et  $Z_I$ . En développant  $|\varphi_e\rangle$  sur les 2 états propres de  $H_{eff}$

$$|\varphi_e\rangle = \alpha |\overline{\varphi_e}\rangle + \beta |\overline{\varphi_2}\rangle \quad (10.36)$$

et en reportant (10.36) dans (10.35), on obtient

$$T_{fi} = \frac{\hbar^2 \Omega_1 \Omega_2}{4} \left\{ \alpha \langle \varphi_e | \overline{\varphi_e} \rangle \frac{1}{\hbar \delta_1 - Z_I} + \beta \langle \varphi_e | \overline{\varphi_2} \rangle \frac{1}{\hbar \delta_1 - Z_{II}} \right\} \quad (10.37)$$

Les 2 résonances qui apparaissent dans  $T_{fi}$  correspondent donc à 2 états intermédiaires possibles par lesquels le système global peut passer, après l'absorption du photon  $\omega_{L1}$  et avant l'émission du photon de fluorescence  $\omega$ : ces 2 états sont les états propres  $|\overline{\varphi_e}\rangle$  et  $|\overline{\varphi_2}\rangle$  de  $H_{eff}$ .

Remarque: Faire attention au fait que  $\alpha \neq \langle \overline{\varphi_e} | \varphi_e \rangle$  dans (10.36), à cause de la non orthogonalité de  $|\overline{\varphi_e}\rangle$  et  $|\overline{\varphi_2}\rangle$ . Même si les états  $|\overline{\varphi_e}\rangle$  et  $|\overline{\varphi_2}\rangle$  sont normés, on obtient, en prenant le produit

scalaire des 2 membres de (10.36) avec  $\langle \bar{\varphi}_e |$

$$\langle \bar{\varphi}_e | \varphi_e \rangle = \alpha + \beta \langle \bar{\varphi}_e | \varphi_2 \rangle \neq \alpha \tag{10.38}$$

Entre les composantes  $\alpha$  et  $\beta$  du développement de  $|\varphi_e\rangle$  sur la base  $\{|\bar{\varphi}_e\rangle, |\bar{\varphi}_2\rangle\}$  et les produit scalaires  $\langle \bar{\varphi}_e | \varphi_e \rangle$  et  $\langle \bar{\varphi}_2 | \varphi_e \rangle$ , il y a la même différence qu'entre les composantes contravariantes et covariantes d'un vecteur dans une base non orthogonale. Une autre manière d'exprimer le même point est que les vecteurs de base non orthogonaux  $|\bar{\varphi}_e\rangle$  et  $|\bar{\varphi}_2\rangle$  ne satisfont pas la relation de fermeture d'une base orthogonale

$$|\bar{\varphi}_e\rangle \langle \bar{\varphi}_e| + |\bar{\varphi}_2\rangle \langle \bar{\varphi}_2| \neq \mathbb{1} \tag{10.39}$$

- Interprétation des positions des 2 résonances

Ces positions correspondent aux valeurs de  $\delta_1$  pour lesquelles les parties réelles des dénominateurs de (10.37) s'annulent

- La 1<sup>ère</sup> résonance, associée à  $\mathcal{Z}_I$ , apparait pour

$$\delta_1 = -\delta'_2 \tag{10.40}$$

et correspond à la condition de résonance optique entre  $\omega_{L1}$  et la fréquence de la transition  $g_1 - e$  corrigé du déplacement lumineux  $-\delta'_2$  du niveau  $e$

$$\delta_1 = \delta'_2 \iff \hbar\omega_{L1} = E_e - \hbar\delta'_2 - E_{g_1} = \hbar\omega_{e1} - \hbar\delta'_2$$

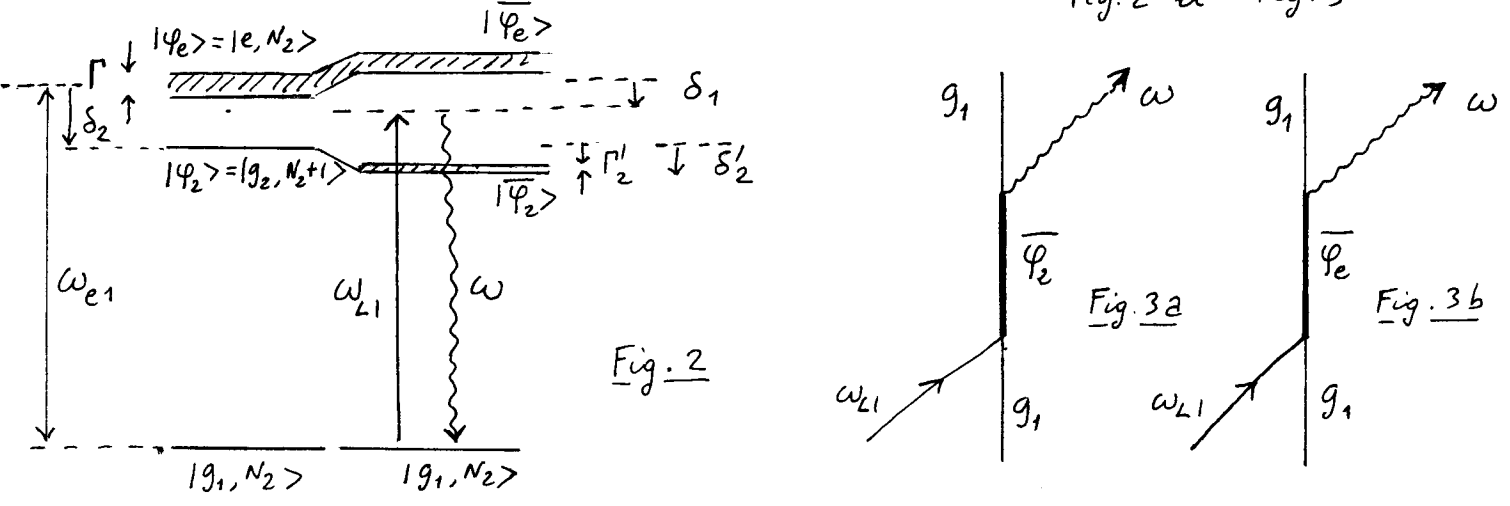
- La 2<sup>ème</sup> résonance, associée à  $\mathcal{Z}_{II}$ , apparait pour

$$\delta_1 = \delta_2 + \delta'_2 \tag{10.41}$$

et correspond à la condition de résonance Raman entre le niveau  $g_1$  et le niveau  $g_2$  déplacé par interaction avec les photons  $\omega_{L2}$

$$\delta_1 = \delta_2 + \delta'_2 \iff \hbar\omega_{L1} - \hbar\omega_{L2} = E_{g_2} + \hbar\delta'_2 - E_{g_1} \tag{10.42}$$

- Représentations diagrammatiques : 2 représentations possibles Fig. 2 et Fig. 3



- La partie gauche de la figure 2 représente les états non perturbés du système atome + photons  $\omega_{L2}$ , la partie droite les états perturbés  $|\bar{\varphi}_2\rangle$  et  $|\bar{\varphi}_e\rangle$ . (le couplage avec les photons  $\omega_{L2}$  est non résonnant pour  $g_1$  et n'affecte pas  $|g_1, N_2\rangle$ ) l'atome, partant de  $g_1$ , absorbe le photon  $\omega_{L1}$  (flèche droite montante), passe intermédiairement dans  $|\bar{\varphi}_e\rangle$  ou  $|\bar{\varphi}_2\rangle$  et retombe dans  $g_1$  en émettant le photon de fluorescence  $\omega$  (flèche ondulée descendante)



• Les 2 figures 3.a et 3.b montrent plus clairement que la figure 2 les 2 états intermédiaires possibles du processus de diffusion, mais les défauts d'énergie dans l'état intermédiaire n'apparaissent pas, alors qu'ils apparaissent très clairement sur la figure 2.

C. Interprétation en termes de fluorescence et d'effet Raman stimulé et spontané

- Revenons à (10.26) et utilisons (10.30) et (10.31). Dans le dénominateur du terme qui multiplie le crochet, figure  $3_I - 3_{II}$ . Dans les parties réelle et imaginaire de  $3_I - 3_{II}$ , on peut négliger  $\delta'_2$  devant  $\delta_2$  et  $\Gamma'_2$  devant  $\Gamma$ , compte tenu de (10.33) et (10.28), et écrire  $3_I - 3_{II} \approx -\hbar(\delta_2 + i\frac{\Gamma}{2})$ . Les mêmes arguments permettent de remplacer dans le 1<sup>er</sup> terme du crochet,  $3_I - \hbar\delta_2$  par  $-\hbar(\delta_2 + i\frac{\Gamma}{2})$  et  $\hbar\delta_1 - 3_I$  par  $\hbar(\delta_1 + i\frac{\Gamma}{2})$ . Par contre le numérateur du 2<sup>em</sup> terme du crochet,  $3_{II} - \hbar\delta_2 = \hbar(\delta'_2 - i\frac{\Gamma'_2}{2})$  ne peut être négligé, bien qu'il soit d'ordre 2 en  $\Omega_2$ , puisque le dénominateur  $\hbar\delta_1 - 3_{II} = \hbar(\delta_1 - \delta_2 - \delta'_2 + i\frac{\Gamma'_2}{2})$  peut lui aussi être très petit et d'ordre 2 en  $\Omega_2$  si  $\delta_1 - \delta_2$  est très proche de 0. Les diverses approximations effectuées sur  $3_I - 3_{II}$  et sur le 1<sup>er</sup> terme du crochet de (10.26) permettent d'obtenir pour  $T_{fi}$  l'expression approchée

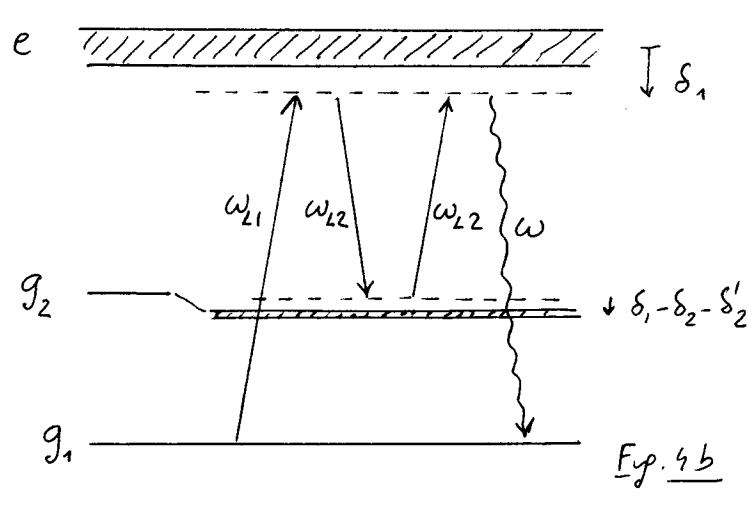
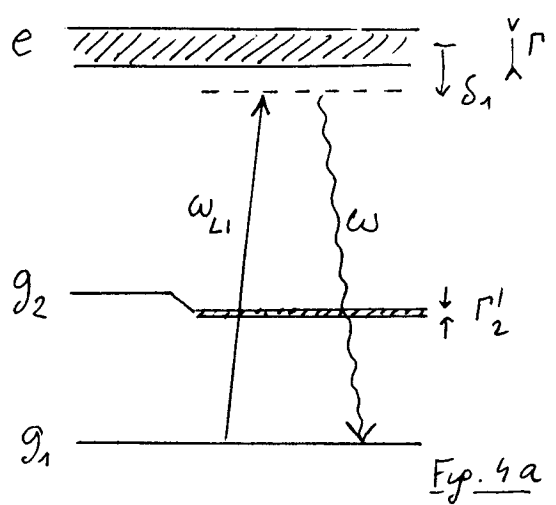
$$T_{fi} \approx \frac{\hbar \Omega_1 \Omega}{4} \left\{ \frac{1}{\delta_1 + i\frac{\Gamma}{2}} + \frac{\delta'_2 - i\frac{\Gamma'_2}{2}}{\delta_2 + i\frac{\Gamma}{2}} \frac{1}{\delta_1 - \delta_2 - \delta'_2 + i\frac{\Gamma'_2}{2}} \right\} \quad (10.43)$$

qui a l'avantage de continuer à s'annuler pour  $\delta_1 = \delta_2$  comme l'expression exacte (10.26)

- Comme le dernier terme de (10.43) n'est important qu'au voisinage de  $\delta_1 = \delta_2$  sur un intervalle de largeur  $\Gamma'_2 \ll \Gamma$ , on peut remplacer dans le dénominateur de ce dernier terme  $\delta_2 + i\frac{\Gamma}{2}$  par  $\delta_1 + i\frac{\Gamma}{2}$ , de même que dans le dénominateur de l'expression (10.32) donnant  $\delta'_2 - i\frac{\Gamma'_2}{2}$ , que l'on utilise ensuite pour réexprimer le numérateur du dernier terme de (10.43). On obtient ainsi

$$T_{fi} \approx \frac{\hbar \Omega}{2} \left\{ \frac{1}{\hbar(\delta_1 + i\frac{\Gamma}{2})} + \frac{1}{\hbar(\delta_1 + i\frac{\Gamma}{2})} \frac{\hbar \Omega_2}{2} \frac{1}{\hbar(\delta_1 - \delta_2 - \delta'_2 + i\frac{\Gamma'_2}{2})} \frac{\hbar \Omega_2}{2} \frac{1}{\hbar(\delta_1 + i\frac{\Gamma}{2})} \right\} \frac{\hbar \Omega_1}{2} \quad (10.44)$$

- On peut alors donner une représentation diagrammatique très simple des 2 termes de (10.44). Voir Figures 4a et 4b



- Dans les 2 figures 4, les niveaux traces sont les niveaux atomique  $g_1, g_2, e$ , le niveau  $g_2$  étant déplacé et élargi par l'interaction avec les photons  $\omega_{L2}$ .

Le 1<sup>er</sup> terme de (10.44) est associé à l'absorption de  $\omega_{L1}$  suivie de l'émission de  $\omega$  (fluorescence de résonance - voir Fig 4.a)

Le 2<sup>o</sup> terme de (10.44) correspond à 1 processus à 4 photons, où l'atome, partant de  $g_1$ , absorbe un photon  $\omega_{L1}$  et passe dans  $e$ , puis émet de manière stimulée un photon  $\omega_{L2}$  et passe dans  $g_2$ , puis absorbe un photon  $\omega_{L2}$  et remonte dans  $e$  avant finalement d'émettre spontanément le photon  $\omega$  et de retomber dans  $g_1$ . Chaque terme  $\frac{\hbar\Omega_1}{2}, \frac{\hbar\Omega_2}{2}, \frac{\hbar\Omega_1}{2}$  du 2<sup>o</sup> terme de (10.44) correspond à l'interaction avec un photon  $\omega, \omega_{L2}$  ou  $\omega_{L1}$ , 2 interactions successives étant séparées par un dénominateur d'énergie relatif au défaut d'énergie de l'état intermédiaire. Un tel processus à 4 photons, représenté sur la figure 4b, décrit donc un processus Raman stimulé  $g_1 \rightarrow g_2$  suivi par un processus Raman spontané  $g_2 \rightarrow g_1$ . L'amplitude correspondante devient importante quand l'énergie du 2<sup>o</sup> état intermédiaire coïncide avec celle de l'état  $g_2$  déplacé par les photons  $\omega_{L2}$ , à  $\Gamma'_2$  près.

#### d - Lien avec les profils de Fano

- Comme  $\Gamma \gg \Gamma'_2$ , on peut considérer l'état  $e$  des figures 4a et 4b comme un "continuum" vis à vis des autres états

On voit alors sur la figure 4 que 2 chemins permettent d'atteindre ce continuum à partir de  $g_1$

(i) un chemin direct par absorption de  $\omega_{L1}$  (Fig. 4a)

(ii) un chemin indirect passant par un état discret  $g_2$

(Fig. 4b). L'état discret  $g_2$  est atteint après un processus Raman stimulé  $g_1 \rightarrow g_2$ , puis l'absorption d'un photon  $\omega_{L2}$  à partir de  $g_2$  fait passer le système dans  $e$

- La situation précédente est du type de celles conduisant à des profils de Fano. (Voir par exemple Ref. 2, Complément C<sub>I</sub>)

Effectivement, on peut interpréter de cette manière les profils désymétriques apparaissant sur les variations avec  $\delta_1$  de la population de l'état excité (voir par exemple la figure 5b du cours IV). Le zéro de ces courbes correspond

à la valeur de  $\delta_1$  pour laquelle l'interférence entre les 2 amplitudes de (10.26) est parfaitement destructive, c.à.d., comme nous l'avons vu plus haut  $\delta_1 = \delta_2$  (condition de résonance Raman entre niveaux non perturbés). Le second terme de (10.43)

est maximum quand  $\delta_1 - \delta_2 - \delta'_2 = 0$  (condition de résonance Raman entre niveaux perturbés). Il est alors plus grand que le "fond" correspondant au 1<sup>er</sup> terme par un facteur de l'ordre de  $\frac{\delta'_2 - i\Gamma'_2/2}{i\Gamma'_2/2}$

Ce facteur a un module beaucoup plus grand que 1 si  $|\delta'_2| \gg \Gamma'_2$ , c'est à dire d'après (10.33), si  $|\delta_2| \gg \Gamma$ . Dans un tel cas, le pic étroit apparaissant sur la courbe 5b du cours IV peut être interprété comme résultant d'une résonance Raman entre niveaux perturbés.

- Notons enfin que, dans le cours IX, nous avons vu que si le système part de  $g_1$ , l'amplitude  $C_{e_1}(t)$  de le trouver, un instant  $t$  après dans l'état  $e$  avant toute émission spontanée, est une somme de 2 amplitudes  $C_{e_1}(t)$  et  $C_{e_2}(t)$  qui interfèrent destructivement si  $\delta_1 = \delta_2$ . Ces 2 amplitudes ne sont autres que celles décrivant les 2 chemins conduisant de  $g_1$  à  $e$  et que nous venons de discuter.

e - Processus mettant en jeu plusieurs photons de fluorescence.

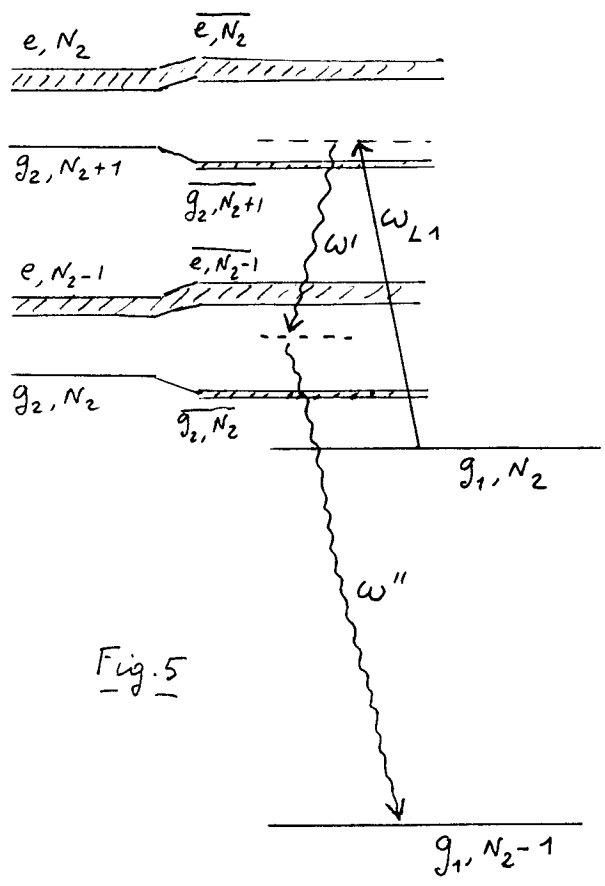


Fig. 5

- Ces processus apparaissent clairement sur des diagrammes d'énergie du type de ceux de la figure 2 et faisant intervenir plusieurs multiplicités de niveaux habillés par les photons  $\omega_{L2}$ .

- Par exemple, la figure 5 montre un processus où l'atome, partant de  $g_1$  en présence d'un photon  $\omega_{L1}$  et de  $N_2$  photons  $\omega_{L2}$  absorbe le photon  $\omega_{L1}$  et passe dans l'un des 2 états habillés  $\overline{e, N_2}$  ou  $\overline{g_2, N_2+1}$  de la multiplicité  $\{e, N_2, g_2, N_2+1\}$  (nous avons changé de notations par rapport à  $\Phi_e, \Phi_g, \overline{\Phi_e}, \overline{\Phi_g}$  pour faire apparaître  $N_2$ ), puis tombe dans l'un des 2 états  $\overline{e, N_2-1}$  ou  $\overline{g_2, N_2}$  de la multiplicité  $\{e, N_2-1, g_2, N_2\}$  en émettant spontanément un photon  $\omega'$  avant d'arriver finalement dans l'état  $g_1, N_2-1$  par émission spontanée d'un 2<sup>ème</sup> photon  $\omega''$ . A cours d'un tel processus, 1 photon  $\omega_{L1}$  et un photon  $\omega_{L2}$  ont disparu et 2 photons  $\omega'$  et  $\omega''$ , avec bien sûr  $\omega'+\omega''=\omega_{L1}+\omega_{L2}$  sont apparus.

- On peut montrer que les 2 chemins conduisant intermédiairement le système de  $g_1, N_2$  à  $\overline{g_2, N_2}$  via  $\overline{e, N_2}$  ou  $\overline{g_2, N_2+1}$  interfèrent destructivement quand  $\delta_1 = \delta_2$ , de même que les 2 chemins conduisant intermédiairement le système de  $g_1, N_2$  à  $\overline{e, N_2-1}$  via  $\overline{e, N_2}$  ou  $\overline{g_2, N_2+1}$ . Une telle démonstration se généralise à tous les processus impliquant un nombre quelconque de photons de fluorescence.

- Notons enfin que, seuls, les états  $g_1$  qui sont stables et n'ont pas de largeur peuvent être considérés comme les états finaux d'un processus de diffusion.

Références

(1) Les résultats présentés dans ce cours proviennent d'un travail non encore publié, fait en collaboration avec B. Lounis.  
 (2) C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc et G. Grynberg, Processus d'interactions entre photons et atomes - Référence déjà donnée page II-10.