

COLLEGE DE FRANCE

COURS DE PHYSIQUE

ATOMIQUE ET MOLECULAIRE

Claude COHEN-TANNOUJJI

ANNEE SCOLAIRE : 1990 - 1991

TABLE DES MATIERES

Résumé du cours 1989 - 1990	I - 1
INTRODUCTION GENERALE	
1 - Thème choisi	I - 5
2 - Systèmes en interaction	I - 5
3 - Temps caractéristiques - Fréquences caractéristiques	I - 6
4 - Localisation de l'atome - Traitement semiclassique ou quantique des degrés de liberté de translation	I - 9
ATOME DANS UNE ONDE LASER - DESCRIPTION DE LA DYNAMIQUE	
1 - Introduction	II - 1
2 - Hamiltonien	II - 1
3 - Force radiative à la limite semiclassique	II - 2
4 - Equations du mouvement de la matrice densité atomique	II - 4
5 - Nouvelles approximations adaptées aux nouveaux mécanismes	II - 7
Appendice - Exemple simple de calcul de coefficient de diffusion - Atome à 2 niveaux à 1 noeud d'une onde stationnaire	II - 9
LIMITE DES FAIBLES INTENSITES ET FAIBLES VITESSES POMPAGE OPTIQUE ET DEPLACEMENTS LUMINEUX	
1 - Elimination adiabatique des cohérences optiques	III - 1
2 - Nouvelle expression pour la force moyenne à la limite semiclassique	III - 2
3 - Matrice densité décrivant l'état des atomes excités dans e	III - 2
4 - Evolution de l'état fondamental à la limite semiclassique	IV - 1
5 - Evolution de l'état fondamental - Traitement entièrement quantique	IV - 4

FORCE RADIATIVE MOYENNE A LA LIMITE DES FAIBLES INTENSITES
ET FAIBLES VITESSES

1 - Expression générale de la force moyenne	V - 1
2 - Interprétation de la force \mathcal{F} , associée aux déplacements lumineux	V - 2
3 - Développement de l'onde laser en ondes planes	V - 4
4 - Cas des mélasses optiques à une dimension	V - 6

LE REFROIDISSEMENT "SISYPHE" - ETUDE SEMICLASSIQUE D'UN
MODELE A UNE DIMENSION

1 - Le modèle étudié	VI - 1
2 - Déplacements lumineux	VI - 3
3 - Equations du pompage optique	VI - 4
4 - Atome en mouvement - L'effet Sisyphe	VI - 5
5 - Solution des équations du pompage optique (pour un atome de vitesse v imposée)	VII - 1
6 - Description du mouvement atomique dans le régime $T_{int} \ll T_{ext}$	VII - 3

1 - Introduction

- Buts de ce chapitre : Donner une idée générale des approches théoriques qui ont été développées pour décrire quantitativement le mouvement d'un atome dans une onde laser. Introduire les équations de base sous une forme permettant de les appliquer au cas d'un atome ayant plusieurs sous-niveaux dans l'état fondamental.
- Description du mouvement par une force. La plus proche de la description classique. Ne s'applique que si l'atome est bien localisé en position et en vitesse (limite semiclassical). Approche de Gordon et Ashkin [Ref. 1].

Comme toutes les approches quantiques essayant de généraliser des équations classiques, cette approche utilise le point de vue de Heisenberg.

Séparation de la force agissant sur l'atome en une force moyenne et une force de Langevin fluctuante permettant de calculer le coefficient de diffusion de l'impulsion atomique.

- Description du mouvement atomique à partir des équations d'évolution de la matrice densité atomique (Comment évolue l'impulsion moyenne de l'atome ? la variance de cette impulsion ? Peut-on introduire des fonctions de distribution ? ...)
 - Approche qui utilise l'autre point de vue, celui de Schrödinger.
 - Divers niveaux de description suivant qu'on s'intéresse à l'évolution d'une base d'opérateurs atomiques (équations de Bloch-Langevin), à celle de la matrice densité atomique incluant les 2 types de degrés de liberté internes et externes (équations de Bloch optiques généralisées), à celle de la matrice densité interne (équations de Bloch optiques).
 - A la limite semiclassical, et quand il existe 2 échelles de temps bien distinctes permettant de découpler variables externes et variables internes, ces 2 approches sont équivalentes (voir Ref. 2)

2 - Hamiltoniens

- Récapitule la dynamique du système global (voir Fig. 1 du cours I)

$$H = H_A + H_V + V_{AL} + V_{AV} \quad (2.1)$$

- Il n'y a pas d'Hamiltoniens H_L du champ laser quand ce dernier est décrit comme un champ externe classique (voir Equ. 1.2)

Dans les approches de type atome habillé où le champ laser est traité quantiquement, il faut ajouter à (2.1) l'Hamiltonien H_L du mode laser

- Hamiltonien atomique : H_A

$$H_A = H_A^{\text{ext}} + H_A^{\text{int}} \quad (2.2)$$

$$H_A^{\text{ext}} = \vec{P}^2 / 2M \quad (2.3)$$

$$H_A^{\text{int}} = \hbar \omega_A P_e \quad (2.4)$$

$$P_e = \sum_m |e_m\rangle \langle e_m| \quad P_g = \sum_\mu |g_\mu\rangle \langle g_\mu| \quad (2.5)$$

P_e et P_g : Projecteurs sur les sous-espaces de dégénérescence de e et g

- Hamiltonien du champ quantique dans l'état vide: H_V

II-2

$$H_V = \sum_j \hbar \omega_j (a_j^\dagger a_j + \frac{1}{2}) \quad (2.6)$$

Somme d'hamiltoniens harmoniques relatifs aux divers modes j

Développement du champ électrique quantique en modes j

$$\vec{E}(\vec{r}) = i \sum_j \underbrace{\epsilon_{\omega_j} a_j \vec{\epsilon}_j e^{i\vec{k}_j \cdot \vec{r}}}_{\vec{E}^+(\vec{r})} + h.c. \quad (2.7)$$

$$\epsilon_{\omega_j} = \sqrt{\frac{\hbar \omega_j}{2\epsilon_0 L^3}} \quad \vec{E}^+(\vec{r}) : \text{composante de fréquence positive de } \vec{E} \text{ variant en } e^{-i\omega_j t} \text{ dans le point de vue de Heisenberg} \quad (2.8)$$

- Hamiltonien d'interaction atome-laser: V_{AL}

$$V_{AL} = -\vec{d} \cdot \vec{E}_L(\vec{R}, t) \quad (2.9)$$

$$\vec{d} = \vec{d}^+ + \vec{d}^- \quad (2.10.a)$$

$$\vec{d}^+ = P_e \vec{d} P_g \quad \vec{d}^- = P_g \vec{d} P_e \quad (2.10.b)$$

Approximation du champ tournant

$$V_{AL} = -\vec{d}^+ \cdot \vec{E}_L^+(\vec{R}) e^{-i\omega_L t} - \vec{d}^- \cdot \vec{E}_L^-(\vec{R}) e^{+i\omega_L t} \quad (2.11)$$

$$\vec{E}_L(\vec{R}, t) = \vec{E}_L^+(\vec{R}) e^{-i\omega_L t} + \vec{E}_L^-(\vec{R}) e^{+i\omega_L t} \quad (2.12)$$

- Hamiltonien d'interaction atome-champ quantique du vide: V_{AV}

$$V_{AV} = -\vec{d} \cdot \vec{E}(\vec{R}) \approx -\vec{d}^+ \cdot \vec{E}^+(\vec{R}) - \vec{d}^- \cdot \vec{E}^-(\vec{R}) \quad (2.13)$$

3. Force radiative à la limite semiclassical

Equations de Heisenberg pour \vec{R} et \vec{P}

$$\dot{\vec{R}} = \frac{1}{i\hbar} [\vec{R}, H] = \frac{1}{i\hbar} [\vec{R}, H_A^{ext}] = \frac{\vec{P}}{M} \quad (2.14.a)$$

$$\begin{aligned} \dot{\vec{P}} &= M \ddot{\vec{R}} = \frac{1}{i\hbar} [\vec{P}, H] = -\frac{\partial H}{\partial \vec{R}} \\ &= -\vec{\nabla} V_{AL}(\vec{R}) - \vec{\nabla} V_{AV}(\vec{R}) \end{aligned} \quad (2.14.b)$$

Champ du vide et champ source

- Dans V_{AV} figurent $\vec{E}(\vec{R})$ et les opérateurs d'annihilation $a_j(t)$ et de création $a_j^\dagger(t)$ d'un photon du mode j (voir Equ. 2.7)

- L'équation de Heisenberg de $a_j(t)$ est une équation différentielle linéaire avec un terme source atomique, qui s'intègre aisément (voir Ref. 3 Complément A_V)

$$a_j(t) = \underbrace{a_j(0) e^{-i\omega_j t}}_{a_j^{vide}(t)} + a_j^{source}(t) \quad (2.15)$$

1^{er} terme: champ du vide évoluant librement entre 0 et t

2^{em} terme: champ source venant du dipôle atomique

$$\hookrightarrow \vec{E}(\vec{R}, t) = \vec{E}^{vide}(\vec{R}, t) + \vec{E}^{source}(\vec{R}, t) \quad (2.16)$$

- Choisir dans V_{AV} de l'ordre normal (tous les a_j à droite, les a_j^\dagger à gauche) conduisant à des calculs plus simples quand on prend des valeurs moyennes dans le vide $|0\rangle$ puisque

$$a_j |0\rangle = 0 \quad \langle 0 | a_j^\dagger = 0 \quad (2.17)$$

Opérateur force radiative semiclassique

- On reporte (2.16) dans (2.13) puis dans (2.14.b). Le gradient de $\vec{E}_{source}(\vec{r}, t)$ dû au dipôle au point \vec{R} où le dipôle est situé est nul (c'est une fonction paire de $\vec{r}-\vec{R}$). Seule subsiste donc dans $-\vec{\nabla} V_{AV}(\vec{R})$ la contribution de $\vec{E}_{vide}(\vec{R})$, de sorte qu'on obtient pour \vec{P} c'est à dire pour l'opérateur force $\vec{F}(\vec{R}, t)$

$$\vec{F}(\vec{R}, t) = -\vec{\nabla} V_{AL}(\vec{R}, t) - : \vec{\nabla} V_{AV}^{vide}(\vec{R}, t) : \quad (2.18)$$

où le dernier terme représente la contribution de \vec{E}_{vide} dans V_{AV} rangé dans l'ordre normal

- Si le paquet d'ondes atomique est bien localisé en position et en vitesse à $t=0$, on peut remplacer, au voisinage de $t=0$, l'opérateur $\vec{R}(t)$ qui apparaît dans (2.18) par le nombre $\vec{r}_0 + \vec{v}_0 t$

$$\vec{R}(t) \longrightarrow \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t \quad (2.19)$$

$$\text{où } \vec{r}_0 = \langle \vec{R}(0) \rangle \quad \vec{v}_0 = \langle \vec{P}(0) \rangle / M \quad (2.20)$$

L'opérateur (2.18) devient alors un opérateur qui n'agit plus que sur les variables du champ et les variables atomiques internes. Ce n'est plus un opérateur vis à vis des variables atomiques externes

Force moyenne \vec{F}

- On remplace \vec{R} par $\vec{r}_0 + \vec{v}_0 t$ dans (2.18) et on prend la valeur moyenne. Dans le point de vue de Heisenberg, l'état du champ est le même qu'à $t=0$. C'est donc le vide. Le 2^{ème} terme de (2.18) donne alors une valeur moyenne nulle à cause de l'ordre normal et de (2.17). On obtient pour la force moyenne

$$\vec{F}(\vec{r}_0 + \vec{v}_0 t, t) = - \langle \vec{\nabla} V_{AL}(\vec{r}, t) \rangle |_{\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t} \quad (2.21)$$

- En utilisant (2.12), on peut réécrire (2.21) sous la forme

$$\vec{F}(\vec{r}, t) = + \sum_{i=x,y,z} \left[\langle d_i^+ \rangle \vec{\nabla} E_{Li}^+(\vec{r}) e^{-i\omega_L t} + \langle d_i^- \rangle \vec{\nabla} E_{Li}^-(\vec{r}) e^{+i\omega_L t} \right] \quad (2.22)$$

où $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t$.

Force de Langevin $\delta\vec{F}$

- On peut toujours écrire (en posant encore $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t$)

$$\vec{F}(\vec{r}, t) = \vec{F}(\vec{r}, t) + \delta\vec{F}(\vec{r}, t) \quad (2.23)$$

$$\text{où } \delta\vec{F}(\vec{r}, t) = \vec{F}(\vec{r}, t) - \vec{F}(\vec{r}, t) = \vec{F}(\vec{r}, t) - \langle \vec{F}(\vec{r}, t) \rangle \quad (2.24)$$

est la partie fluctuante de \vec{F}

- Séparons les contributions de V_{AL} et V_{AV} à $\delta\vec{F}$. En utilisant (2.18) (2.21), (2.22), on obtient

$$\begin{aligned} \delta\vec{F}_{Laser}(\vec{r}, t) &= -\vec{\nabla} V_{AL}(\vec{r}, t) + \langle \vec{\nabla} V_{AL}(\vec{r}, t) \rangle \\ &= \sum_{i=x,y,z} \left[\delta d_i^+ \vec{\nabla} E_{Li}^+(\vec{r}) e^{-i\omega_L t} + \delta d_i^- \vec{\nabla} E_{Li}^-(\vec{r}) e^{+i\omega_L t} \right] \end{aligned} \quad (2.25)$$

$$\text{où } \delta d_i^\pm = d_i^\pm - \langle d_i^\pm \rangle \quad (2.26)$$

est la partie fluctuante du dipôle atomique

$$\delta \vec{F}_{vide}(\vec{r}, t) = - : \vec{\nabla} V_{AV}^{vide}(\vec{r}, t) : + \underbrace{\langle : \vec{\nabla} V_{AV}^{vide}(\vec{r}, t) : \rangle}_{= \vec{0}} \quad (2.27)$$

$$= \sum_{i=x,y,z} \left[d_i^+ \vec{\nabla} E_{vide i}^+(\vec{r}, t) + \vec{\nabla} E_{vide i}^-(\vec{r}, t) d_i^- \right]$$

- Le coefficient de diffusion D de l'impulsion atomique, défini par $\frac{d}{dt} \Delta P^2(t) = 2D$ (2.28)

où $\Delta P^2(t) = \langle [\vec{P}(t) - \langle \vec{P}(t) \rangle]^2 \rangle$ est la variance de l'impulsion est relié simplement à la fonction de corrélation de $\delta \vec{F}$ [voir Ref. 1]

$$D = \text{Re} \int_0^\infty dt \langle \delta \vec{F}(t) \cdot \delta \vec{F}(t-t) \rangle \quad (2.29)$$

Remplaçons $\delta \vec{F}$ par $\delta \vec{F}_{laser} + \delta \vec{F}_{vide}$. On peut montrer que les termes croisés en $\delta \vec{F}_{laser} \cdot \delta \vec{F}_{vide}$ ont une contribution nulle dans (2.29). On peut donc écrire

$$D = D_{laser} + D_{vide} \quad (2.30)$$

avec
$$D_{laser} = \text{Re} \int_0^\infty dt \langle \delta \vec{F}_{laser}(t) \cdot \delta \vec{F}_{laser}(t-t) \rangle \quad (2.31)$$

$$D_{vide} = \text{Re} \int_0^\infty dt \langle \delta \vec{F}_{vide}(t) \cdot \delta \vec{F}_{vide}(t-t) \rangle \quad (2.32)$$

D_{laser} est associé aux fluctuations des échanges d'impulsion lors des processus d'absorption et d'émission induite de photons laser. D_{vide} est associé aux fluctuations des échanges d'impulsion lors des processus d'émission spontanée.

- Pour obtenir la force moyenne \vec{F} et le coefficient de diffusion D, il faut calculer la valeur moyenne et les fonctions de corrélation du dipôle atomique. Ceci nous amène tout naturellement aux équations du mouvement de la matrice densité atomique.
- Voir en appendice un exemple simple de calcul de coefficient de diffusion.

4- Equations du mouvement de la matrice densité atomique

a- Equations de Bloch optiques (voir Ref. 3, chapitres IV et V)

Approximations

- On ne quantifie pas les degrés de liberté externes. \vec{R} est remplacé par $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t$. $\vec{p}^2/2M$ n'est pas inclus dans H.
- L'effet de l'émission spontanée est décrit par une équation pilote. Approximation justifiée par la petitesse du temps T_c , temps de corrélation des fluctuations du vide (voir cours I).
- Les termes de relaxation par émission spontanée ne sont pas modifiés par la présence du laser. Pendant T_c , le couplage V_{AL} n'a pas le temps de se manifester ($\Omega, T_c \ll 1$).
 ↳ On ajoute indépendamment les vitesses d'évolution de σ dues à $H_A^{int} + V_{AL}$ et à l'émission spontanée.

$$\frac{d\sigma}{dt} = \underbrace{\frac{1}{i\hbar} [H_A^{int} + V_{AL}, \sigma]}_{\text{Evolution hamiltonienne}} + \underbrace{S(\sigma)}_{\text{Relaxation due à l'émission spontanée}} \quad (2.33)$$

Structure de σ

- Transition atomique $J_g \leftrightarrow J_e$: $J_g(J_e)$ moment cinétique de $g(e)$

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{ee} & \sigma_{eg} \\ \sigma_{ge} & \sigma_{gg} \end{pmatrix} \quad \sigma_{ge} = \sigma_{eg}^+$$

$\sigma_{ee} = P_e \sigma P_e$ Matrice carrée $(2J_e+1) \times (2J_e+1)$ } Contiennent des populations et des cohérences Zeeman.
 $\sigma_{gg} = P_g \sigma P_g$ " " $(2J_g+1) \times (2J_g+1)$
 $\sigma_{eg} = P_e \sigma P_g$ Matrice rectangle $(2J_e+1) \times (2J_g+1)$ Cohérences optiques.

Termes décrivant l'effet de l'émission spontanée (voir Ref. 4)

- Très simples pour σ_{ee} et σ_{eg} (2.35.a)

$$P_e \mathcal{T}(\sigma) P_e = -\Gamma \sigma_{ee}$$

L'atome quitte e avec un taux Γ

$$P_e \mathcal{T}(\sigma) P_g = -\frac{\Gamma}{2} \sigma_{eg} \quad (2.35.b)$$

Les cohérences optiques sont amorties avec un taux $\Gamma/2$ (le déplacement de Lamb est réinclus dans ω_A)

- Un peu plus compliqué pour σ_{gg} . Les termes correspondants décrivant l'alimentation de g à partir de e

$$P_g \mathcal{T}(\sigma) P_g = \Gamma \sum_{q=+1,0,-1} (\hat{d}^- \cdot \hat{E}_q^*) \sigma_{ee} (\hat{d}^+ \cdot \hat{E}_q) \quad (2.36.a)$$

$$\hat{E}_{+1} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{E}_x + i\hat{E}_y) \quad \hat{E}_0 = \hat{E}_z \quad \hat{E}_{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{E}_x - i\hat{E}_y) \quad (2.36.b)$$

\hat{d} : opérateur dipôle réduit, proportionnel à \vec{d} , mais sans dimension et normalisé de la manière suivante : $\langle e_{m+q} | \hat{E}_q \cdot \hat{d}^+ | g_m \rangle$ est le coefficient de Clebsch-Gordan de la transition $g_m \rightarrow e_{m+q}$, normalisé de manière que la somme des carrés de ces coefficients partant d'un sous-niveau excité quelconque soit égale à 1. Cette condition est équivalente à

$$\hat{d}^+ \cdot \hat{d}^- = P_e \quad (2.37)$$

- Exemple concret : Transition $J_g = 1/2 \leftrightarrow J_e = 3/2$

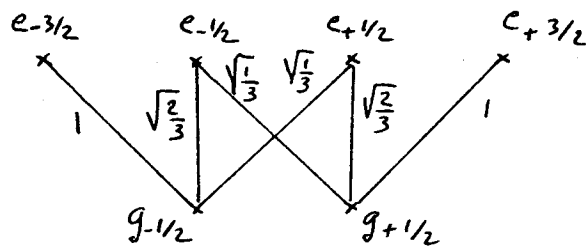


Fig. 1

$$\left(\dot{\sigma}_{g_{+1/2} g_{+1/2}} \right)_{sp} = \Gamma \sigma_{e_{3/2} e_{3/2}} + \frac{2}{3} \Gamma \sigma_{e_{1/2} e_{1/2}} + \frac{1}{3} \Gamma \sigma_{e_{-1/2} e_{-1/2}} \quad (2.38.a)$$

$$\left(\dot{\sigma}_{g_{-1/2} g_{-1/2}} \right)_{sp} = \Gamma \sigma_{e_{-3/2} e_{-3/2}} + \frac{2}{3} \Gamma \sigma_{e_{-1/2} e_{-1/2}} + \frac{1}{3} \Gamma \sigma_{e_{1/2} e_{1/2}} \quad (2.38.b)$$

$$\left(\dot{\sigma}_{g_{+1/2} g_{-1/2}} \right)_{sp} = \Gamma \sqrt{\frac{1}{3}} \sigma_{e_{+3/2} e_{+1/2}} + \Gamma \frac{2}{3} \sigma_{e_{+1/2} e_{-1/2}} + \Gamma \sqrt{\frac{1}{3}} \sigma_{e_{-1/2} e_{-3/2}} \quad (2.38.c)$$

Le fait que l'émission spontanée ne couple pas les populations aux cohérences Zeeman et ne couple entre elles que des cohérences Zeeman de même Δm est dû à l'isotropie in vacuo et à l'invariance par rotation de V_{AL} .

$$\dot{\sigma}_{eg} = \frac{1}{i\hbar} P_e [H_A^{int}, \sigma] P_g + \frac{1}{i\hbar} P_e [V_{AL}(\vec{r}, t), \sigma] P_g + \underbrace{P_e \mathcal{S}(\sigma) P_g}_{= -\Gamma \sigma_{eg} / 2} \quad (2.39)$$

$$P_e [V_{AL}(\vec{r}, t), \sigma] P_g = -\vec{d}^+ \cdot \vec{E}_L^+(\vec{r}) \sigma_{gg} e^{-i\omega_L t} + \sigma_{ee} \vec{d}^+ \cdot \vec{E}_L^+(\vec{r}) e^{-i\omega_L t} \quad (2.40)$$

Bien que la fonction classique $\vec{E}_L^+(\vec{r})$ commute avec les opérateurs internes σ_{ee} et σ_{gg} , l'ordre entre ces 2 quantités a été conservé tel qu'il apparaît dans le calcul du commutateur. En effet, dans le paragraphe suivant, \vec{r} sera remplacé par l'opérateur \vec{R} dans $\vec{E}_L^+(\vec{r})$, et σ sera un opérateur agissant non plus seulement sur les degrés de liberté internes mais également sur les degrés de liberté externes. Les 2 opérateurs σ et $\vec{E}_L^+(\vec{R})$ ne commutent plus alors nécessairement et il faudra garder l'ordre tel qu'il apparaît dans (2.40).

Pour éliminer les $e^{-i\omega_L t}$ qui apparaissent dans (2.40), posons

$$\tilde{\sigma}_{eg} = \sigma_{eg} e^{i\omega_L t} \quad (2.41)$$

On obtient alors

$$\dot{\tilde{\sigma}}_{eg} = -\left(\frac{\Gamma}{2} - i\delta\right) \tilde{\sigma}_{eg} - \frac{1}{i\hbar} \left[\vec{d}^+ \cdot \vec{E}_L^+(\vec{r}) \sigma_{gg} - \sigma_{ee} \vec{d}^+ \cdot \vec{E}_L^+(\vec{r}) \right] \quad (2.42)$$

où $\delta = \omega_L - \omega_A$ est le désaccord (voir Eq. 1.6)

Equations d'évolution de σ_{ee} et σ_{gg}

Un calcul analogue donne, compte tenu de (2.35.a)

$$\dot{\sigma}_{ee} = -\Gamma \sigma_{ee} - \frac{1}{i\hbar} \left[\vec{d}^+ \cdot \vec{E}_L^+(\vec{r}) \tilde{\sigma}_{ge} - \tilde{\sigma}_{eg} \vec{d}^- \cdot \vec{E}_L^-(\vec{r}) \right] \quad (2.43)$$

et

$$\dot{\sigma}_{gg} = P_g \mathcal{S}(\sigma) P_g - \frac{1}{i\hbar} \left[\vec{d}^- \cdot \vec{E}_L^-(\vec{r}) \tilde{\sigma}_{eg} - \tilde{\sigma}_{ge} \vec{d}^+ \cdot \vec{E}_L^+(\vec{r}) \right] \quad (2.44)$$

b. Equations de Bloch optiques généralisées

Eléments nouveaux par rapport au paragraphe précédent.

- On quantifie les degrés de liberté externes. Les σ_{ab} avec $a, b = e$ ou g sont des opérateurs à la fois internes et externes, qui ont des éléments de matrice en représentation $\{|\vec{r}\rangle\}$: $\langle \vec{r}' | \sigma_{ab} | \vec{r}'' \rangle$, en représentation $\{|\vec{P}\rangle\}$: $\langle \vec{P}' | \sigma_{ab} | \vec{P}'' \rangle$ ou en représentation de Wigner : $W_{ab}(\vec{r}, \vec{P})$
- Le champ laser $\vec{E}_L^+(\vec{R})$ ou $\vec{E}_L^-(\vec{R})$, qui apparaît dans V_{AL} , contient l'opérateur \vec{R} et est donc un opérateur externe. Il faut donc faire attention à l'ordre entre σ_{ab} et $\vec{E}_L^{\pm}(\vec{R})$ dans le calcul de $[V_{AL}, \sigma]$ (voir plus haut le commentaire après (2.40)).
- Il faut garder l'hamiltonien $\vec{P}^2/2M$ dans H .
- Les termes décrivant l'émission spontanée ont la même forme (2.35) pour σ_{ee} et σ_{eg} . Pour σ_{gg} , il sont modifiés, ce qui se comprend aisément puisqu'ils doivent décrire le transfert d'impulsion de e à g quand l'atome retombe de e à g en émettant un photon de fluorescence [voir Refs. 2, 3 et 4, 5]. De telles équations sont également discutées dans les Refs. 6 et 7.

Elles s'écrivent

$$P_g \mathcal{S}(\sigma) P_g = \Gamma \int \frac{d^2k}{8\pi/3} \sum_{\hat{E}_L \hat{k}} (\hat{d} \cdot \hat{E}^*) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{R}} \sigma_{ee} e^{i\vec{k} \cdot \vec{R}} (\hat{d}^+ \cdot \hat{E}) \quad (2.45)$$

où \hat{d}^- et \hat{d}^+ ont été déjà définis plus haut, à propos de (2.36). Dans (2.45), \hat{k} est un vecteur unitaire caractérisant la direction dans laquelle est émis un photon de fluorescence de vecteur d'onde

$$\vec{k} = \frac{\omega_A}{c} \hat{k} \quad (2.46)$$

avec une polarisation \hat{E} perpendiculaire à \hat{k} . Les 2 opérateurs $e^{-i\vec{k} \cdot \vec{R}}$ et $e^{i\vec{k} \cdot \vec{R}}$, qui encadrent σ_{ee} dans (2.45), font que $\langle \vec{p}'' | \sigma_{gg} | \vec{p}' \rangle$ est alimenté par émission spontanée à partir de $\langle \vec{p}'' + \hbar \vec{k} | \sigma_{ee} | \vec{p}' + \hbar \vec{k} \rangle$. On voit apparaître clairement que l'émission spontanée d'un photon \vec{k} diminue l'impulsion atomique de $\hbar \vec{k}$. Le fait que les transferts par émission spontanée se font à $\vec{p}' - \vec{p}''$ constant est dû à l'homogénéité de l'état vide $|0\rangle$ et à l'invariance de V_{AV} par translations.

Nouvelles équations d'évolution

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\sigma}}_{eg} = & -(\frac{\Gamma}{2} - i\delta) \tilde{\sigma}_{eg} + \frac{1}{i\hbar} \left[\frac{\vec{p}^2}{2m}, \tilde{\sigma}_{eg} \right] \\ & - \frac{1}{i\hbar} \left[\vec{d}^+ \cdot \vec{E}_L^+(\vec{R}) \sigma_{gg} - \sigma_{ee} \vec{d}^+ \cdot \vec{E}_L^+(\vec{R}) \right] \end{aligned} \quad (2.47)$$

$$\dot{\sigma}_{ee} = -\Gamma \sigma_{ee} + \frac{1}{i\hbar} \left[\frac{\vec{p}^2}{2m}, \sigma_{ee} \right] - \frac{1}{i\hbar} \left[\vec{d}^+ \cdot \vec{E}_L^+(\vec{R}) \tilde{\sigma}_{ge} - \tilde{\sigma}_{eg} \vec{d}^- \cdot \vec{E}_L^-(\vec{R}) \right] \quad (2.48)$$

$$\dot{\sigma}_{gg} = P_g \mathcal{S}(\sigma) P_g + \frac{1}{i\hbar} \left[\frac{\vec{p}^2}{2m}, \sigma_{gg} \right] - \frac{1}{i\hbar} \left[\vec{d}^- \cdot \vec{E}_L^-(\vec{R}) \tilde{\sigma}_{eg} - \tilde{\sigma}_{ge} \vec{d}^+ \cdot \vec{E}_L^+(\vec{R}) \right] \quad (2.49)$$

Remarque

Nous mentionnons ici juste pour mémoire les équations de Bloch-Langevin obtenues en écrivant les équations de Heisenberg pour les opérateurs atomiques $|a, \vec{p}'\rangle \langle b, \vec{p}''|$ avec $a, b = g_m$ ou e_m , et en utilisant (2.16) pour exprimer l'opérateur champ qui apparaît dans V_{AV} . En choisissant l'ordre normal dans V_{AV} , on peut montrer que les termes provenant du champ source donnent naissance aux termes d'amortissement par émission spontanée étudiés plus haut, alors que les termes provenant du champ du vide donnent naissance à des forces de Langevin [voir Ref. 3, complément AV ou cette demande est exposé dans le cas où les degrés de liberté externes sont traités classiquement]. L'intérêt des équations de Bloch-Langevin est qu'elles permettent de démontrer le théorème de régression quantique qui explique comment calculer les fonctions de corrélations atomiques (moyennes à 2 temps) à partir des équations de Bloch optiques (éventuellement généralisées) qui décrivent l'évolution des moyennes à 1 temps.

5. Nouvelles approximations adaptées aux nouveaux mécanismes

Le fait d'avoir inclus l'existence de plusieurs sous-niveaux Zeeman dans e et g complique considérablement les équations d'évolution de σ , et leur résolution semble beaucoup plus difficile. Il est possible néanmoins d'introduire de nouvelles approximations adaptées aux nouveaux mécanismes et de retrouver des équations simples permettant de dépeindre des images physiques fructueuses.

a - Faibles intensités

Les nouveaux mécanismes reposent sur l'existence de temps internes qui deviennent longs à faible intensité, comme le temps de pompage optique τ_p entre sous-niveaux Zeeman de g .

Le régime intéressant est donc celui des faibles intensités. On peut alors éliminer adiabatiquement les cohérences optiques $\tilde{\sigma}_{eg}$ et l'état excité σ_{ee} des équations et obtenir des équations plus simples qui ne font plus intervenir que σ_{gg} et qui sont interprétable en termes d'hamiltonien effectif associé aux déplacements lumineux et de taux de pompage optique.

De même la force moyenne peut être réexprimée entièrement en fonction de σ_{gg} et des réponses réactive et dissipative de l'atome.

b - Très faibles vitesses

Les nouveaux mécanismes conduisent à des températures très basses, où les vitesses sont très faibles. La dépendance en vitesse des forces radiatives est caractérisée, non plus par le paramètre $k v / \Gamma$, comme c'est le cas pour le refroidissement Doppler, mais par les paramètres $k v / \Gamma'$ ou $k v / S'$, où $k \Gamma'$ et $k S'$ sont l'élargissement et le déplacement de l'état fondamental sous l'effet de la lumière (à faible intensité $\Gamma', S' \ll \Gamma$). Dans l'élimination adiabatique des cohérences optiques, qui sont amorties avec un taux $\Gamma/2$, on peut donc négliger l'effet de l'hamiltonien $\vec{p}^2/2M$, ce qui revient à faire un calcul à l'ordre 0 en $k v / \Gamma$.

c - De nouvelles approches

En plus des simplifications précédentes, le fait d'avoir des très faibles intensités permet d'envisager des calculs perturbatifs, par exemple des amplitudes de diffusion des photons incidents par l'atome, dans lesquels on peut suivre ce qui se passe, non seulement sur l'atome (comme c'est le cas quand on travaille sur la seule matrice densité atomique), mais également sur le photon incident. On peut également, dans ce cas, étudier l'importance des corrélations qui s'établissent entre l'atome et le photon. Ce point sera crucial pour comprendre les échanges d'impulsions entre atome et champ aux nœuds d'une onde stationnaire.

Références

- (1) J.P. Gordon and A. Ashkin, Phys. Rev. A21, 1606 (1980)
- (2) J. Dalibard and C. Cohen-Tannoudji J. Phys. B18, 1661 (1985)
- (3) Processus d'interaction entre photons et atomes - Référence (2) des cours I
- (4) C. Cohen-Tannoudji in Les Houches XXVII, 1975 - Frontiers in Laser Spectroscopy, R. Balian, S. Haroche and S. Liberman eds (North Holland, 1977)
- (5) S. Stenholm, Appl. Phys. 15, 287 (1978)
- (6) Y. Castin, H. Wallis and J. Dalibard, J.O.S.A. B6, 2046 (1989)
- (7) A. Aspect, E. Arinondo, R. Kaiser, N. Vansteenkiste and C. Cohen-Tannoudji J.O.S.A. B6, 2112 (1989)

Appendice : Exemple simple de calcul de coefficient de diffusion (II-9)
 Atome à 2 niveaux à un noeud d'une onde stationnaire

Notations

$$\vec{E}_L(x,t) = \vec{e}_3 E_0 \sin k_L x \cos \omega_L t \quad (2.50)$$

$$\vec{d} = \vec{e}_3 d (\hat{d}^+ + \hat{d}^-) \quad \hat{d}^+ = |e\rangle\langle g| \quad \hat{d}^- = |g\rangle\langle e| \quad (2.51)$$

d : élément de matrice du dipole qui a la même polarisation, \vec{e}_3 , que celle de l'onde stationnaire laser

$$E_{Li}^+(x) = \delta_{iz} \frac{1}{2} E_0 \sin k_L x = E_{Li}^-(x) \quad (2.52)$$

On pose $d E_0 = \hbar \Omega_1$ (2.53)

Ω_1 est la fréquence de Rabi aux ventres

$$\delta = \frac{\Omega_1^2 / 2}{\delta^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} \quad (2.54)$$

δ est le paramètre de saturation aux ventres. $\delta = 4\delta_0$ où δ_0 est le paramètre de saturation associé à chacune des 2 ondes planes progressives formant l'onde stationnaire.

Calcul de D_{vide} et D_{laser}

- Au voisinage d'un noeud, on peut négliger la fluorescence $\rightarrow D_{vide} \approx 0$
- D'après (2.52), au voisinage d'un noeud, par exemple en $x=0$

$$\vec{\nabla} E_{Li}^\pm = \delta_{iz} \frac{1}{2} k_L E_0 \vec{e}_x \quad (2.55)$$

Si l'on reporte (2.55) dans (2.25), on obtient, compte tenu de (2.51) et (2.53),

$$\langle \delta \vec{F}_{laser}(t) \cdot \delta \vec{F}_{laser}(t-\tau) \rangle = \hbar^2 k_L^2 \left(\frac{\Omega_1}{2}\right)^2 \left[\langle \delta \hat{d}^-(t) \delta \hat{d}^+(t-\tau) \rangle e^{i\omega_L \tau} + \langle \delta \hat{d}^+(t) \delta \hat{d}^-(t-\tau) \rangle e^{-i\omega_L \tau} \right] \quad (2.56)$$

- Calcul des fonctions de corrélation du dipole atomique
- D'après le théorème de régression quantique, pour $t > t'$, $\langle \delta \hat{d}^-(t) \delta \hat{d}^+(t') \rangle$ obéit à une équation analogue à celle de $\langle \delta \hat{d}^-(t) \rangle$. Or $\langle \hat{d}^- \rangle = \sigma_{eg}$ et au voisinage d'un noeud, où $\vec{E}_L = \vec{0}$, $\dot{\sigma}_{eg} = -(i\omega_A + \frac{\Gamma}{2}) \sigma_{eg}$. Donc

$$\frac{d}{dt} \langle \delta \hat{d}^-(t) \delta \hat{d}^+(t') \rangle = -(i\omega_A + \frac{\Gamma}{2}) \langle \delta \hat{d}^-(t) \delta \hat{d}^+(t') \rangle \quad (2.57)$$

On en déduit que, pour $x \approx 0$ et $t > t'$

$$\langle \delta \hat{d}^-(t) \delta \hat{d}^+(t') \rangle = e^{-i\omega_A t} e^{-\frac{\Gamma}{2} t} \langle \delta \hat{d}^-(t') \delta \hat{d}^+(t') \rangle = e^{-i\omega_A t} e^{-\frac{\Gamma}{2} t} \left(\sigma_{gg}(t') - |\langle \hat{d}^+(t') \rangle|^2 \right) \quad (2.58)$$

puisque, à un noeud où $\vec{E}_L = \vec{0}$, $\sigma_{gg} = 1$ et $\langle \hat{d}^+ \rangle = 0$. Un calcul analogue donne

$$\langle \delta \hat{d}^+(t) \delta \hat{d}^-(t-\tau) \rangle = 0 \quad (2.59)$$

(en effet, cette fonction de corrélation est proportionnelle à $\sigma_{ee}(t-\tau) - |\langle \hat{d}^-(t-\tau) \rangle|^2$ qui est nul à un noeud)

- Finalement, pour $\tau > 0$ et $x \approx 0$

$$\langle \delta \vec{F}_{laser}(t) \cdot \delta \vec{F}_{laser}(t-\tau) \rangle = \hbar^2 k_L^2 \left(\frac{\Omega_1}{2}\right)^2 e^{i(\omega_L - \omega_A)\tau} e^{-\frac{\Gamma}{2}\tau} \quad (2.60)$$

- Reprenons alors (2.60) dans (2.31). Il vient

$$D_{laser} = \hbar^2 k_L^2 \left(\frac{\Omega_1}{2}\right)^2 \text{Re} \int_0^\infty d\tau e^{i\delta\tau} e^{-\frac{\Gamma}{2}\tau} = \hbar^2 k_L^2 \Gamma \frac{\Omega_1^2 / 8}{\delta^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} \quad (2.61)$$

$$= \hbar^2 k_L^2 \Gamma \frac{\delta}{4} = \hbar^2 k_L^2 \Gamma \delta_0$$

qui est aussi le coefficient de diffusion global puisque en $x=0$, $D_{vide} = 0$

- Résultat intrigant : En $x=0$, il n'y a pas d'absorption de lumière et pourtant l'impulsion de l'atome fluctue puisque $D \neq 0$!

Buts de ce chapitre : Étudier la forme et le contenu physique des équations générales introduites dans le cours II, à la limite des faibles intensités et faibles vitesses, qui est celle où les nouveaux mécanismes de refroidissement laser sont les plus efficaces.

1 - Élimination adiabatique des cohérences optiques

a. Approximations

Faibles intensités

- A faible intensité, des constantes de temps longues, de l'ordre du temps de pompage τ_p (ou de $1/\delta'$), apparaissent dans l'évolution de σ_{gg} , beaucoup plus longues que le temps $\tau_R = 1/\Gamma$ caractérisant l'amortissement de $\tilde{\sigma}_{eg}$ et $\tilde{\sigma}_{ee}$. Dans l'évolution couplée de $\tilde{\sigma}_{ee}$, σ_{gg} , $\tilde{\sigma}_{eg}$, c'est la variable lente σ_{gg} qui va imposer sa vitesse de variation à toutes les autres, de sorte que $\tilde{\sigma}_{eg}$ sera de l'ordre de $\tilde{\sigma}_{eg}/\tau_p$, qui est beaucoup plus petit que $\Gamma\tilde{\sigma}_{eg}/2 = \tilde{\sigma}_{eg}/2\tau_R$. Il en est de même pour $\tilde{\sigma}_{ee}$ qui est négligeable devant $\Gamma\tilde{\sigma}_{ee}$.

Dans les équations (2.42) et (2.47), on peut donc négliger $\tilde{\sigma}_{eg}$ devant $-\Gamma\tilde{\sigma}_{eg}/2$ et remplacer le membre de gauche des 2 équations par 0.

- A faible intensité, σ_{gg} est d'ordre 0 en champ laser \vec{E}_L^+ . D'après (2.42) et (2.47), $\tilde{\sigma}_{eg}$ est alors au moins d'ordre 1, et d'après (2.43) et (2.48), $\tilde{\sigma}_{ee}$ est au moins d'ordre 2. Le dernier terme de (2.42) et (2.47), qui fait intervenir le produit de $\tilde{\sigma}_{ee}$ par \vec{E}_L^+ est donc au moins d'ordre 3. Si on se limite à l'ordre 2, on peut donc négliger ce dernier terme.

Faibles vitesses

- Si les degrés de liberté externes sont traités classiquement, \vec{r} est remplacé par $\vec{r}_0 + \vec{v}_0 t$ dans (2.42) et (2.43). Dans le calcul de $\tilde{\sigma}_{eg}$ et $\tilde{\sigma}_{ee}$, des termes supplémentaires apparaissent à cause de cette dépendance temporelle de \vec{r} . Ils sont de l'ordre de $\vec{v}_0 \cdot \vec{\nabla} \tilde{\sigma}_{eg} \approx k v_0 \tilde{\sigma}_{eg}$ et $\vec{v}_0 \cdot \vec{\nabla} \tilde{\sigma}_{ee} \approx k v_0 \tilde{\sigma}_{ee}$. Si on fait un calcul à l'ordre 0 en $k v / \Gamma$, on peut négliger ces termes devant $-\Gamma\tilde{\sigma}_{eg}/2$ et $-\Gamma\tilde{\sigma}_{ee}$.

En procédant ainsi, on perd bien sûr le mécanisme de refroidissement Doppler dans une mélasse optique. Mais on s'intéresse ici aux nouveaux mécanismes de refroidissement laser qui apparaissent à des vitesses beaucoup plus faibles que le refroidissement Doppler (effets en $k v_0 / \delta'$ ou $k v_0 / \delta''$).

Notons enfin qu'il n'est pas question de négliger la dépendance temporelle de \vec{r} dans l'équation donnant $\dot{\sigma}_{gg}$, car nous verrons plus loin que les termes de droite de (2.44) sont de l'ordre de $\delta' \sigma_{gg}$ et $\delta'' \sigma_{gg}$ qui ne sont pas nécessairement grands devant $k v_0 \sigma_{gg}$.

- Si les degrés de liberté externes sont traités quantiquement, il suffit de noter que les termes provenant de $[\vec{P}^2/2M, \sigma]/i\hbar$ deviennent, en représentation de Wigner, égaux à $(\vec{P}/M) \cdot \vec{\nabla} w \approx (k p / M) w \approx k v w$. Comme précédemment, ces termes sont négligeables devant ceux décrivant l'amortissement par émission spontanée pour w_{eg} et w_{ee} (à l'ordre 0 en $k v / \Gamma$). On peut donc, dans un calcul à l'ordre 0 en $k v / \Gamma$, négliger les commutateurs avec $\vec{P}^2/2M$ dans (2.47) et (2.48), mais non dans (2.44).

b. Expression des cohérences optiques en fonction de σ_{gg}

III-2

- Compte tenu des approximations précédentes, (2.47) donne

$$\tilde{\sigma}_{eg} = -\frac{1}{\hbar} \frac{1}{\delta + i\frac{\Gamma}{2}} \vec{d}^+ \cdot \vec{E}_L^+(\vec{R}) \sigma_{gg} \quad (3.1.a)$$

et par suite, en prenant l'adjoint

$$\tilde{\sigma}_{ge} = -\frac{1}{\hbar} \frac{1}{\delta - i\frac{\Gamma}{2}} \sigma_{gg} \vec{d}^- \cdot \vec{E}_L^-(\vec{R}) \quad (3.1.b)$$

- Dans (3.1.a) et (3.1.b), les degrés de liberté externes sont traités quantiquement. A la limite semiclassical, il suffit de remplacer \vec{R} par $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t$.

2 - Nouvelle expression pour la force moyenne à la limite semiclassical

a. Valeur moyenne du dipôle atomique

$$\begin{aligned} \langle \vec{d} \rangle &= \text{Tr} \{ \vec{d}^- \cdot \sigma_{eg} + \sigma_{ge} \vec{d}^+ \} \\ &= \text{Tr} \{ \vec{d}^- \cdot \tilde{\sigma}_{eg} \} e^{-i\omega_L t} + \text{Tr} \{ \tilde{\sigma}_{ge} \cdot \vec{d}^+ \} e^{i\omega_L t} = \langle \vec{d}^-(t) \rangle + \langle \vec{d}^+(t) \rangle \end{aligned} \quad (3.2)$$

- Le report de (3.1) dans (3.2) donne (après avoir remplacé \vec{R} par $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t$)

$$\langle \vec{d}^-(t) \rangle = -\frac{1}{\hbar} \frac{1}{\delta + i\frac{\Gamma}{2}} \text{Tr} \{ \vec{d}^- \cdot \vec{d}^+ \cdot \vec{E}_L^+(\vec{r}) \sigma_{gg} \} e^{-i\omega_L t} \quad (3.3.a)$$

$$\langle \vec{d}^+(t) \rangle = -\frac{1}{\hbar} \frac{1}{\delta - i\frac{\Gamma}{2}} \text{Tr} \{ \vec{d}^- \cdot \vec{E}_L^-(\vec{r}) \vec{d}^+ \sigma_{gg} \} e^{i\omega_L t} \quad (3.3.b)$$

On pourrait aisément, à partir de ces expressions, calculer le tenseur de susceptibilité linéaire reliant $\langle \vec{d}^- \rangle$ à \vec{E}^+ , ou $\langle \vec{d}^+ \rangle$ à \vec{E}^- .

b. Expression de la force moyenne en fonction de σ_{gg}

- En reportant (3.3) dans (2.22), on obtient

$$\begin{aligned} \vec{F}(\vec{r}, t) &= -\frac{1}{\hbar} \frac{1}{\delta - i\frac{\Gamma}{2}} \sum_{i,j} \text{Tr} \{ d_i^- d_j^+ \sigma_{gg} \} E_{Li}^-(\vec{r}) (\vec{\nabla} E_{Lj}^+(\vec{r})) \\ &\quad - \frac{1}{\hbar} \frac{1}{\delta + i\frac{\Gamma}{2}} \sum_{i,j} \text{Tr} \{ d_i^- d_j^+ \sigma_{gg} \} E_{Lj}^+(\vec{r}) (\vec{\nabla} E_{Li}^-(\vec{r})) \end{aligned} \quad (3.4)$$

- Nous reviendrons, dans un chapitre ultérieur, sur l'interprétation physique de cette expression et nous la réécrirons sous une forme plus suggestive. Il nous faut auparavant identifier un certain nombre de grandeurs physiques régissant l'évolution de l'état fondamental.

3 - Matrice densité décrivant l'état des atomes excités dans e.

a. Expression de σ_{ee} en fonction de σ_{gg}

- Dans l'équation (2.48) donnant $\dot{\sigma}_{ee}$, on peut, comme nous l'avons expliqué ci-dessus (§.1), négliger $\dot{\sigma}_{ee}$ dans le membre de gauche et le commutateur avec $\vec{P}^2/2m$ dans le membre de droite. On obtient alors une équation donnant σ_{ee} en fonction de $\tilde{\sigma}_{eg}$ et $\tilde{\sigma}_{ge}$

$$\sigma_{ee} = -\frac{1}{\Gamma} \frac{1}{i\hbar} \left[\vec{d}^+ \cdot \vec{E}_L^+(\vec{R}) \tilde{\sigma}_{ge} - \tilde{\sigma}_{eg} \vec{d}^- \cdot \vec{E}_L^-(\vec{R}) \right] \quad (3.5)$$

Il suffit alors de remplacer $\tilde{\sigma}_{eg}$ et $\tilde{\sigma}_{ge}$ par leurs expressions (3.1) données plus haut en fonction de σ_{gg} pour obtenir l'équation

$$\sigma_{ee} = \frac{1}{\hbar^2} \frac{1}{\delta^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} \vec{d}^+ \cdot \vec{E}_L^+(\vec{R}) \sigma_{gg} \vec{d}^- \cdot \vec{E}_L^-(\vec{R})$$

qui donne σ_{ee} en fonction de σ_{gg} .

- Dans (3.6) les degrés de liberté externes sont traités quantiquement. A la limite semiclassical, il suffit de remplacer \vec{R} par $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t$
- L'équation (3.6) montre que si l'état fondamental est pur, c-à-d si

$$\sigma_{gg} = |\Psi_g\rangle \langle \Psi_g| \quad (3.7)$$

($|\Psi_g\rangle$ dépend également des degrés de liberté externes), alors l'état excité est aussi pur : $\sigma_{ee} = |\Psi_e\rangle \langle \Psi_e|$ avec

$$|\Psi_e\rangle \text{ proportionnel à } \vec{d}^+ \cdot \vec{E}_L^+(\vec{R}) |\Psi_g\rangle \quad (3.8)$$

b - Etude plus détaillée d'un exemple concret : atome à 2 niveaux à un noeud d'une onde stationnaire.

Buts de ce calcul

- Les notations sont les mêmes que dans l'appendice des cours II page II-9.
- On place un atome à 2 niveaux, dans l'état fondamental, en $x=0$, c'est à dire à un noeud de l'onde stationnaire (2.50). Ses degrés de liberté externes sont traités quantiquement. L'état de son centre de masse est donc décrit par une fonction d'onde $\Psi_g(x)$, supposée réelle, centrée en $x=0$, paire, de largeur Δx

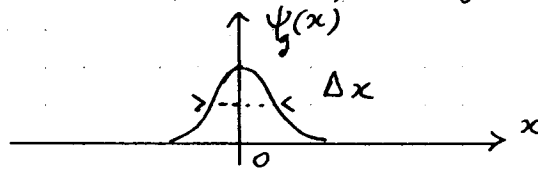


Fig. 1

On suppose également $\Delta x \ll \lambda_L$ (3.9)

L'atome est donc bien localisé au noeud.

- La transformée de Fourier $\Psi_g(p)$ de $\Psi_g(x)$ est elle aussi paire, centrée en $p=0$ et de largeur $\Delta p \sim \hbar / \Delta x$. La condition (3.9) entraîne que

$$\Delta p \gg \hbar k_L \quad (3.10)$$

- Comme Δx n'est pas strictement nul, l'atome peut absorber des photons et monter dans e . Dans ce qui suit, on essaie, à partir de (3.8) de comprendre comment varie la variance $\langle p^2 \rangle$ de p quand un atome passe de g à e

Fonction d'onde des atomes excités

- L'équation (3.6) donne, compte tenu de (2.50), (2.51), (2.52), (2.53), (2.54)

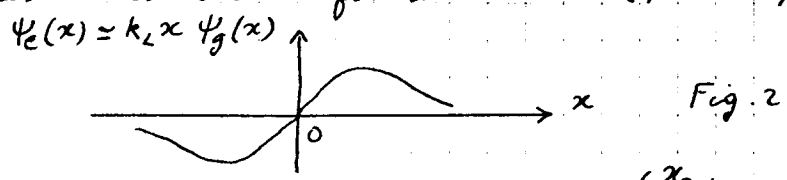
$$\begin{aligned} \sigma_{ee} &= \frac{1}{\hbar^2} \frac{1}{\delta^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} \left(\frac{1}{2} d E_0 \right)^2 |e\rangle \langle e| \otimes |\Psi_e\rangle \langle \Psi_e| \\ &= \frac{s}{2} |e\rangle \langle e| \otimes |\Psi_e\rangle \langle \Psi_e| \end{aligned} \quad (3.11)$$

où la fonction d'onde $\Psi_e(x)$ associée à $|\Psi_e\rangle$ s'écrit

$$\Psi_e(x) = \sin k_L x \Psi_g(x) \approx k_L x \Psi_g(x) \quad (3.12)$$

Dans (3.11), s est le paramètre de saturation aux centres de l'onde stationnaire. $s = 4s_0$ où s_0 est le paramètre de saturation de chacune des 2 ondes progressives formant l'onde stationnaire.

- Les équations (3.11) et (3.12) montrent que les atomes qui sont dans l'état excité ont leur centre de masse décrit par une fonction d'onde ayant une forme très différente (voir Fig. 2) de celle des atomes restés dans l'état fondamental (produit par x d'une fonction paire en x)



Ceci ne serait plus vrai en tout autre point x_0 de l'onde stationnaire. On aurait alors $\Psi_e(x) = \sin k_L x \Psi_g(x)$. Si $\sin k_L x_0 \neq 0$, la forme de $\Psi_e(x)$ est très voisine de celle de $\Psi_g(x)$ puisque $\sin k_L x$ varie peu sur la largeur Δx de $\Psi_g(x)$

Proportion d'atome excités : π_e

- Cette proportion est donnée par la trace de σ_e

$$\pi_e = \text{Tr} \sigma_e = \frac{\delta}{2} \langle \Psi_e | \Psi_e \rangle = \frac{\delta}{2} \langle \Psi_g | k_L^2 x^2 | \Psi_g \rangle \quad (3.13)$$

- Cette proportion est faible, non seulement parce que $\delta \ll 1$ (faibles intensités), mais parce que $\langle \Psi_g | k_L^2 x^2 | \Psi_g \rangle \approx k_L^2 \Delta x^2 \approx \frac{\Delta x^2}{\lambda_L^2} \ll 1$. C'est uniquement parce que la fonction d'ondes Ψ_g centrée en $x=0$ n'a pas une largeur nulle que l'atome peut "voir" un champ non nul, dont l'intensité est de l'ordre de $(\Delta x / \lambda_L)^2$, et par suite être excité.

- Prenons pour fixer les idées une fonction d'onde Ψ_g gaussienne

$$\Psi_g(x) = \left(\frac{1}{\pi a^2}\right)^{1/4} e^{-x^2/2a^2} \quad (3.14)$$

a est la largeur à $1/e$ de $|\Psi_g(x)|^2$. Un calcul élémentaire donne

$$\pi_e = \frac{\delta}{2} k_L^2 \langle x^2 \rangle = \frac{\delta}{4} k_L^2 a^2 \quad (3.15)$$

Contribution des atomes excités à la variance d'impulsion

$$\Delta P^2 = \langle P^2 \rangle - \langle P \rangle^2 = \langle P^2 \rangle \quad \text{puisque } \langle P \rangle = 0 \quad (3.16)$$

- Calcul de $\langle P^2 \rangle_e$ dans l'état excité. D'après (3.11)

$$\langle P^2 \rangle_e = \text{Tr} \sigma_{ee} P^2 = \frac{\delta}{2} k_L^2 \langle \Psi_g | x P^2 x | \Psi_g \rangle \quad (3.17)$$

Si l'on prend la fonction d'onde (3.14), l'élément de matrice de (3.17) peut être aisément calculé en représentation x . On trouve alors

$$\langle P^2 \rangle_e = \frac{3}{8} \delta \hbar^2 k_L^2 \quad (3.18)$$

- Calcul de $\langle P^2 \rangle$ pour un atome excité $\langle P^2 \rangle_{\text{atome excité}}$.

(3.17) et (3.18) donnent la contribution totale de l'état excité qui contient une proportion π_e d'atome excité. Par atome, on a donc

$$\langle P^2 \rangle_{\text{atome excité}} = \frac{\langle P^2 \rangle_e}{\pi_e} = \frac{\langle \Psi_g | x P^2 x | \Psi_g \rangle}{\langle \Psi_g | x^2 | \Psi_g \rangle} \quad (3.19)$$

On a utilisé (3.17) et (3.13). Pour la fonction d'ondes gaussienne (3.14), on obtient, compte tenu de (3.18) et (3.15)

$$\langle P^2 \rangle_{\text{atome excité}} = \frac{3}{2} \frac{\hbar^2}{a^2} \quad (3.20)$$

Variation de $\langle P^2 \rangle$ par atome quand on passe de g à e

- la proportion d'atome dans g est pratiquement égale à 1 : $\pi_g = 1$

On a donc

$$\langle P^2 \rangle_{\text{atome fondamental}} = \frac{\langle \Psi_g | P^2 | \Psi_g \rangle}{\pi_g} \approx \langle \Psi_g | P^2 | \Psi_g \rangle \quad (3.21)$$

qui est égal pour la fonction d'ondes gaussienne (3.14) à

$$\langle P^2 \rangle_{\text{atome fondamental}} = \frac{\hbar^2}{2a^2} \quad (3.22)$$

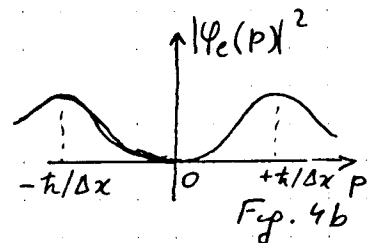
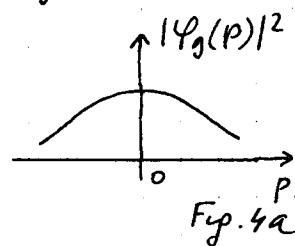
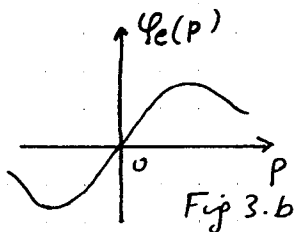
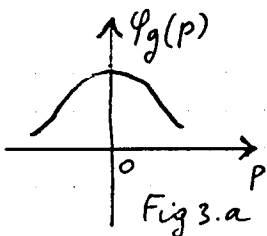
- En comparant (3.22) à (3.20), on voit alors que, en moyenne, quand un atome passe de g à e , la variation de $\langle P^2 \rangle$ vaut

$$\langle P^2 \rangle_{\text{atome excité}} - \langle P^2 \rangle_{\text{atome fondamental}} = \frac{\hbar^2}{a^2} \quad (3.23)$$

Cette variation de $\langle P^2 \rangle$ est beaucoup plus grande que $\hbar^2 k_L^2$ d'après (3.10), et devient de plus en plus grande quand $a \rightarrow 0$. Ce résultat peut paraître étrange. Lorsque l'atome absorbe un photon dans une onde stationnaire, son impulsion ne peut augmenter que de $+\hbar k_L$ ou $-\hbar k_L$. Comment son $\langle P^2 \rangle$ peut-il augmenter de beaucoup plus que $\hbar^2 k_L^2$?

Etude du même phénomène en représentation p

- Comme $|\Psi_e\rangle \sim X |\Psi_g\rangle$ d'après (3.12) et que l'opérateur X en représentation p est $-\frac{\hbar}{i} \frac{d}{dp}$, on voit que si $\Psi_g(p)$ est la fonction d'onde des atomes dans g en représentation p , celle des atomes excités est $\Psi_e(p) \sim i\hbar \frac{d\Psi_g(p)}{dp}$. Les figures 3a et 3b donnent l'allure de $\Psi_g(p)$ et $\Psi_e(p)$ - Les figures 4a et 4b celle des distributions d'impulsion $|\Psi_g(p)|^2$ et $|\Psi_e(p)|^2$



- On voit que, comme en représentation x , les fonctions d'onde diffèrent notablement dans g et e .

En particulier, la distribution d'impulsion dans e a un "trou" en $p=0$ et 2 "bosses" centrées au voisinage de $\pm \hbar/\Delta x$. Si on prend des distributions normalisées à 1, on voit bien que la distribution de la figure 4.b conduit à un $\langle P^2 \rangle$ plus grand que celui de la figure 4.a par une quantité de l'ordre de $\hbar^2/\Delta x^2$.

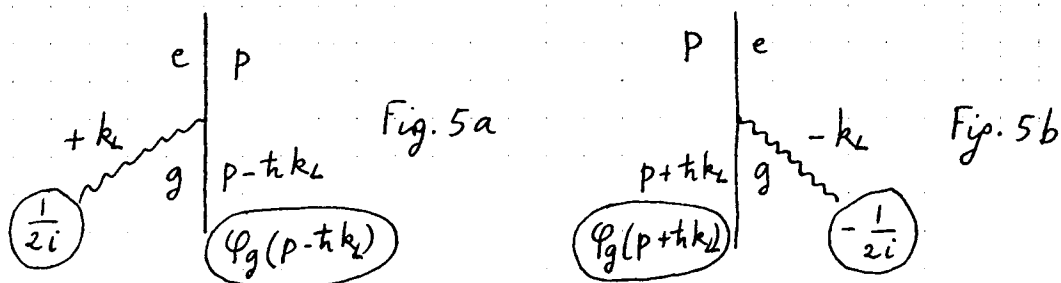
Interférences et filtrage

- Le trou en $p=0$ de la figure 4.b résulte d'un effet d'interférence.

- Pour le voir, rappelons tout d'abord qu'une onde stationnaire en $\sin k_L x$ est une superposition de 2 ondes planes $e^{ik_L x}$ et $e^{-ik_L x}$ interférant avec un signe -

$$\sin k_L x = \frac{1}{2i} [e^{ik_L x} - e^{-ik_L x}] \quad (3.24)$$

- Pour arriver dans l'état $|e, p\rangle$ (atome dans l'état excité e avec une impulsion p), l'atome peut partir de l'état $|g, p - \hbar k\rangle$, dans lequel il a une amplitude $\varphi_g(p - \hbar k)$ de se trouver, et absorber un photon e^{ikx} , qui a une amplitude $1/2i$ de se trouver dans l'onde stationnaire (Fig. 5a). Il peut également partir de $|g, p + \hbar k\rangle$ (amplitude $\varphi_g(p + \hbar k)$) et absorber un photon e^{-ikx} (amplitude $-1/2i$) (Fig. 5b)



- les 2 chemins de la figure 5 aboutissent au même état final. Comme le système global "atome + photon" a une amplitude non nulle de se trouver dans chacun des 2 états initiaux, les 2 chemins peuvent interférer, et l'amplitude d'exciter l'atome dans l'état e avec une impulsion p est proportionnelle à

$$\frac{1}{2i} [\varphi_g(p - \hbar k) - \varphi_g(p + \hbar k)] \approx i \hbar k \frac{d}{dp} \varphi_g(p) \quad (3.25)$$

On retrouve bien que l'amplitude d'avoir un atome excité d'impulsion p est proportionnelle à $d\varphi_g(p)/dp$.

- Si $\varphi_g(p)$ était indépendant de p , c'est à dire si $\varphi_g(x)$ était proportionnel à $\delta(x)$, l'interférence entre les 2 amplitudes de figures 5a et 5b serait parfaitement destructive, quel que soit p , ce qui correspond bien à l'impossibilité d'exciter un atome parfaitement localisé à un noeud. Par contre, si $\varphi_g(x)$ et $\varphi_g(p)$ ont une certaine largeur, on voit que l'interférence, parfaitement destructive au voisinage de $p=0$, ne l'est plus quand on s'écarte de $p=0$, à cause du fait que $\varphi_g(p - \hbar k)$ et $\varphi_g(p + \hbar k)$ deviennent différents, l'excitation étant maximale au voisinage des points d'inflexion de la courbe donnant $\varphi_g(p)$.

Ainsi, si $\langle p^2 \rangle$ est beaucoup plus grand pour un atome excité que pour un atome dans l'état fondamental, c'est parce que l'interférence entre les 2 amplitudes possibles d'excitations filtre les atomes d'après leur impulsion initiale et empêche les atomes de p faible d'être excités. Ne peuvent être excités que les atomes d'impulsion suffisamment grande, de l'ordre de $\hbar/\Delta x$. C'est parce qu'il y a une corrélation importante entre l'impulsion initiale de l'atome et sa probabilité d'excitation que $\langle p^2 \rangle$ varie de beaucoup plus que $\hbar^2 k^2$ quand l'atome passe de g à e . Il n'y a aucune violation de la conservation de l'impulsion lors des processus d'absorption, comme cela apparaît clairement sur les figures 5.

- L'augmentation spectaculaire de $\langle p^2 \rangle$ discutée ici rappelle l'augmentation spectaculaire de $\langle J_z \rangle$ lorsqu'une molécule passe d'un état J à un état $J+1$ par absorption d'un photon σ^+ . la probabilité de transition $J, M \rightarrow J+1, M+1$ croît très vite avec M .
Voir J. Vigué, N. Billy, B. Girard et G. Gouesard, C.R. Acad. Sci. à paraître
Voir aussi mêmes auteurs Phys. Rev. Lett. 62, 1358 (1989).

4 - Evolution de l'état fondamental à la limite semiclassique

a) Equation d'évolution de σ_{gg}

- Dans (2.44), on remplace σ_{eg} et $\tilde{\sigma}_{ge}$ par leurs expressions approchées (3.1.a) et (3.1.b), \vec{R} étant remplacé par $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t$, puisqu'on considère ici la limite semiclassique. On obtient ainsi

$$\dot{\sigma}_{gg} = P_g \mathcal{T}(\sigma_{ee}) P_g + \frac{1}{i\hbar^2} \frac{1}{\delta + i\frac{\Gamma}{2}} (\vec{d}^- \cdot \vec{E}_L(\vec{r})) (\vec{d}^+ \cdot \vec{E}_L(\vec{r})) \sigma_{gg} - \frac{1}{i\hbar} \frac{1}{\delta - i\frac{\Gamma}{2}} \sigma_{gg} (\vec{d}^- \cdot \vec{E}_L(\vec{r})) (\vec{d}^+ \cdot \vec{E}_L(\vec{r})) \quad (4.1)$$

La 1^{ère} ligne décrit le repeuplement de l'état fondamental à partir de l'état excité, σ_{ee} étant donné par (3.6) et les termes retombée par émission spontanée étant donnés en (2.36). La 2^{ème} ligne de (4.1) décrit l'effet de l'excitation laser sur les atomes se trouvant dans l'état fondamental

- Posons

$$\hbar G^+(\vec{r}) = \vec{d}^+ \cdot \vec{E}_L(\vec{r}) \quad \hbar G^-(\vec{r}) = \vec{d}^- \cdot \vec{E}_L(\vec{r}) = [\hbar G^+(\vec{r})]^\dagger \quad (4.2)$$

Si l'on sépare les parties réelle et imaginaire de $\pm \frac{1}{i\hbar^2} \frac{1}{\delta \pm i\frac{\Gamma}{2}}$ dans la 2^{ème} ligne de (4.1) et que l'on utilise (4.2), on peut réécrire (4.1) sous la forme

$$\dot{\sigma}_{gg} = P_g \mathcal{T}(\sigma_{ee}) P_g - i \frac{\delta}{\delta^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} [G^- G^+, \sigma_{gg}] - \frac{\Gamma/2}{\delta^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} \{G^- G^+, \sigma_{gg}\}_+ \quad (4.3)$$

où $\{U, V\}_+ = UV + VU$. On voit apparaître ainsi la somme d'un commutateur et d'un anticommutateur de σ_{gg} avec l'opérateur $- +$ qui est hermitique puisque

$$(G^- G^+)^\dagger = (G^+)^\dagger (G^-)^\dagger = G^- G^+ \quad (4.4)$$

Une telle structure de l'équation d'évolution de σ_{gg} dans les premières théories quantiques du cycle de pompage optique (Refs. 1, 2).

- Pour la suite, il sera utile d'introduire quelques notations.

• Posons
$$\vec{E}_L^+(\vec{r}) = \hat{E}(\vec{r}) E_L(\vec{r}) \quad \vec{E}_L^-(\vec{r}) = \hat{E}^*(\vec{r}) E_L(\vec{r}) = \vec{E}_L^+(\vec{r})^* \quad (4.5)$$

où \hat{E} est un vecteur polarisation normé, éventuellement complexe (pour décrire des polarisations circulaires ou elliptiques)

$$\hat{E}(\vec{r}) \cdot \hat{E}^*(\vec{r}) = 1 \quad (4.6)$$

et où $E_L(\vec{r})$ est réel et représente l'amplitude du champ

• L'opérateur \vec{d}^+ est un opérateur vectoriel. Les composantes standard $\hat{E}_q \cdot \vec{d}^+$ de \vec{d}^+ où

$$\hat{E}_{+1} = -\frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{E}_x + i\hat{E}_y) \quad \hat{E}_0 = \hat{E}_z \quad \hat{E}_{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{E}_x - i\hat{E}_y) \quad (4.7)$$

satisfont au théorème de Wigner-Eckart

$$\langle J_e, e_m | \hat{E}_q \cdot \vec{d} | J_g, g_\mu \rangle = \mathcal{D} \langle J_e m | J_g 1 \mu q \rangle \quad (4.8) \quad \text{IV-2}$$

où \mathcal{D} est un "élément de matrice réduit" indépendant de q , m, μ , et où $\langle J_e m | J_g 1 \mu q \rangle$ est un coefficient de Clebsch-Gordan.

On peut donc écrire $\vec{d}^+ = \mathcal{D} \hat{d}^+$ (4.9)

où \hat{d}^+ est un opérateur vectoriel sans dimensions, tel que les éléments de matrice de $\hat{E}_q \cdot \hat{d}^+$ sont des coefficients de Clebsch-Gordan

• A partir de \mathcal{D} et E_L , on peut introduire la fréquence de Rabi Ω_1

$$-\mathcal{D} E_L(\vec{r}) = \frac{\hbar \Omega_1(\vec{r})}{2} \quad (4.10)$$

et le paramètre de saturation s

$$s(\vec{r}) = \frac{\Omega_1^2(\vec{r})/2}{\delta^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} \quad (4.11)$$

de même que les quantités

$$\Gamma'(\vec{r}) = \Gamma \frac{s(\vec{r})}{2} \quad (4.12.a) \quad \delta'(\vec{r}) = \delta \frac{s(\vec{r})}{2} \quad (4.12.b)$$

• Introduisons enfin l'opérateur hermitique sans dimensions A

$$A(\vec{r}) = P_g \hat{E}^*(\vec{r}) \cdot \hat{d}^- P_e \hat{E}(\vec{r}) \cdot \hat{d}^+ P_g = P_g \hat{E}^*(\vec{r}) \cdot \hat{d}^- P_e \hat{E}(\vec{r}) \cdot \hat{d}^+ P_g \quad (4.13)$$

qui est proportionnel à $G^- G^+$.

- Avec ces notations, l'équation (4.3) peut être réécrite

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{\sigma}_{gg} &= P_g \mathcal{S}(\sigma_{ee}) P_g \\ &- i \delta'(\vec{r}) [A(\vec{r}), \sigma_{gg}] - \frac{\Gamma'(\vec{r})}{2} \{A(\vec{r}), \sigma_{gg}\} \end{aligned}} \quad (4.14)$$

Dans (4.14), σ_{ee} peut être réexprimé en fonction de σ_{gg} grâce à l'équation (3.6) qui s'écrit avec les nouvelles notations.

$$\begin{aligned} \sigma_{ee} &= \frac{1}{\delta^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} G^+(\vec{r}) \sigma_{gg} G^-(\vec{r}) \\ &= \frac{\Gamma'(\vec{r})}{\Gamma} \hat{E}(\vec{r}) \cdot \hat{d}^+ \sigma_{gg} \hat{E}^*(\vec{r}) \cdot \hat{d}^- \end{aligned} \quad (4.15)$$

b. Hamiltonien effectif associé aux déplacements lumineux

- Le terme en δ' de (4.14) s'écrit (évolution hamiltonienne)

$$\frac{1}{i\hbar} [H_{\text{eff}}, \sigma_{gg}] \quad \text{où} \quad H_{\text{eff}} = \hbar \delta'(\vec{r}) \vec{A}(\vec{r}) \quad (4.16)$$

L'hamiltonien effectif H_{eff} décrit les effets réactifs de VAL. (δ' varie avec δ comme une courbe de dispersion - voir 4.12.b et 4.10)

- L'opérateur A est hermitique et a donc des valeurs propres réelles a_α et des vecteurs propres orthogonaux $|g_\alpha\rangle$

$$A |g_\alpha\rangle = a_\alpha |g_\alpha\rangle \quad (4.17)$$

Les a_α et $|g_\alpha\rangle$ dépendent en général de \vec{r} , comme $\hat{E}(\vec{r})$. Chaque sous-niveau $|g_\alpha\rangle$ a un déplacement lumineux bien défini, $\hbar \delta'_\alpha$,

qui est proportionnel, comme $\delta(\vec{r})$, à l'intensité laser. Si tous les a_α sont différents, la dégénérescence Zeeman de g est complètement levée par l'irradiation laser.

- Les opérateurs \hat{d}^+ et \hat{d}^- qui apparaissent dans l'expression (4.13) de A sont des opérateurs vectoriels. Comme A est un produit de 2 opérateurs vectoriels, sa décomposition en opérateurs tensoriels irréductibles $T_q^{(k)}$ fait apparaître seulement les valeurs $k=0$ (scalaire), $k=1$ (vecteur), $k=2$ (tenseur). Le terme $k=0$ correspond à un déplacement d'ensemble de g . Le terme $k=1$ a la même structure que celui qui serait associé à un champ magnétique fictif, le terme $k=2$ peut souvent être décrit en termes de champ électrique fictif. Si le moment cinétique J_g de g est $J_g = 1/2$, seules les valeurs $k=0$ et $k=1$ sont permises (théorème de Wigner-Eckart). Les symétries des champs fictifs associés aux déplacements lumineux sont déterminées par les symétries du vecteur polarisation $\hat{E}(\vec{r})$. Voir référence 5.

C - Relaxation associée au pompage optique

- Le dernier terme de (4.14) décrit comment l'état fondamental se vide sous l'effet de l'excitation. La contribution de ce dernier terme à la vitesse de variation de la population $\langle g_\alpha | \dot{\rho} | g_\alpha \rangle$ de l'état propre $|g_\alpha\rangle$ de A est égale à

$$- a_\alpha \Gamma'(\vec{r}) \langle g_\alpha | \rho | g_\alpha \rangle \tag{4.18}$$

Pour chaque état propre $|g_\alpha\rangle$ de A , on peut donc définir une probabilité par unité de temps de quitter l'état $|g_\alpha\rangle$, égale à $a_\alpha \Gamma'(\vec{r})$. Comme δ , Γ' est proportionnel à l'intensité laser. Enfin, Γ' varie avec δ comme une courbe d'absorption, ce qui montre que les effets physiques décrits par Γ' sont des effets dissipatifs.

- Le 1^{er} terme de (4.14), décrit la retombée dans g de atomes qui ont absorbé un photon et sont l'état dans e est décrit par (4.15). En utilisant (4.15) et (2.36.a) on peut écrire ce terme sous la forme

$$P_g \dot{\rho}(0_{cc}) P_g = \Gamma'(\vec{r}) \sum_{q=+1,0,-1} (\hat{E}_q^* \cdot \hat{d}^-) (\hat{E}(\vec{r}) \cdot \hat{d}^+) \sigma_{gg} (\hat{E}^*(\vec{r}) \cdot \hat{d}^-) (\hat{E}_q \cdot \hat{d}^+) \tag{4.19}$$

La combinaison de (4.19) et du dernier terme de (4.14) décrit la relaxation de l'état fondamental sous l'effet des processus d'absorption et d'émission spontanée de photons. Des différences de populations importantes peuvent apparaître entre les sous-niveaux Zeeman de g (pompage optique). Les éléments non diagonaux de σ_{gg} ("cohérence" Zeeman) peuvent, dans certains cas, varier de manière importante quand un champ magnétique statique est balayé autour de certaines valeurs (effet Hanle).

- On peut vérifier aisément que l'équation d'évolution (4.14) conserve la trace de σ_{gg}

$$\frac{d}{dt} \text{Tr} \sigma_{gg} = 0 \tag{4.20}$$

En utilisant l'invariance d'une trace dans une permutation circulaire et le fait que

$$\sum_q (\hat{E}_q \cdot \hat{d}^+) (\hat{E}_q^* \cdot \hat{d}^-) = \hat{d}^+ \cdot \hat{d}^- = P_e \quad (4.21)$$

(compte tenu de la relation de normalisation des coefficients de Clebsch-Gordan), on voit en effet que la trace du 1^{er} terme (4.19) vaut

$$\Gamma'(\vec{r}) \text{Tr} (\hat{E}^*(\vec{r}) \cdot \hat{d}^-) P_e (\hat{E}(\vec{r}) \cdot \hat{d}^+) \sigma_{gg} = \Gamma'(\vec{r}) \text{Tr} [A(\vec{r}) \sigma_{gg}] \quad (4.22)$$

et compense exactement la trace du dernier terme de (4.14), celle du 2^{em} terme, qui est un commutateur, étant automatiquement nulle.

d. Effet du déplacement de l'atome à la vitesse \vec{v}_0 .

- Si l'atome se déplace à la vitesse, \vec{r} est égal à $\vec{r}_0 + \vec{v}_0 t$ dans toutes les équations précédentes.
- En général la polarisation $\hat{E}(\vec{r})$ varie d'un point à l'autre, de même que l'intensité laser qui apparaît dans $S(\vec{r})$. L'atome est donc soumis à un pompage optique et à des déplacements lumineux qui varient en général dans le temps. Comme l'atome réagit à des variations de l'excitation optique avec des constantes de temps longues, de l'ordre de $1/\Gamma'$, il répond avec un certain retard à ces variations temporelles. Nous analyserons plus loin l'importance d'un tel retard dans les nouveaux mécanismes de refroidissement laser.

5. Evolution de l'état fondamental. Traitement entièrement quantique

a) Cas général

- Les calculs sont très analogues à ceux du §4 et ne seront pas repris. Les modifications sont les suivantes.
- Dans l'équation (4.14), il faut
 - rajouter au 2^{em} membre $[\vec{P}^2/2M, \sigma_{gg}]/i\hbar$
 - remplacer dans $S'(\vec{r})$, $\Gamma'(\vec{r})$, $A(\vec{r})$, \vec{r} par l'opérateur \vec{R} et regrouper $S'(\vec{R})$ et $A(\vec{R})$, $\Gamma'(\vec{R})$ et $A(\vec{R})$, de manière que dans le calcul du commutateur ou de l'anticommutateur l'ordre entre \vec{R} et σ_{gg} soit respecté.
 - utiliser pour $P_g S(\sigma_{ee}) P_g$ l'équation (2.45) au lieu de (2.36.a)

On obtient ainsi

$$\dot{\sigma}_{gg} = P_g S(\sigma_{ee}) P_g + \frac{1}{i\hbar} \left[\frac{\vec{P}^2}{2M}, \sigma_{gg} \right] - i [S'(\vec{R}) A(\vec{R}), \sigma_{gg}] - \frac{1}{2} \{ \Gamma'(\vec{R}) A(\vec{R}), \sigma_{gg} \}_+ \quad (4.23)$$

- Dans la 1^{re} ligne de (4.15), il faut remplacer \vec{r} par \vec{R} ; dans la 2^{em}, il faut remplacer $\Gamma'(\vec{r})$ par $\sqrt{\Gamma'(\vec{R})}$ à droite et $\sqrt{\Gamma'(\vec{R})}$ à gauche

$$\begin{aligned} \sigma_{ee} &= \frac{1}{S^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} G^+(\vec{R}) \sigma_{gg} G^-(\vec{R}) \\ &= \frac{1}{\Gamma} \sqrt{\Gamma'(\vec{R})} \hat{E}(\vec{R}) \cdot \hat{d}^+ \sigma_{gg} \hat{E}^*(\vec{R}) \cdot \hat{d}^- \sqrt{\Gamma'(\vec{R})} \end{aligned} \quad (4.24)$$

b) Etude plus détaillée d'un exemple concret : atome à 2 niveaux à un noeud d'une onde stationnaire

Buts du calcul

- A partir de l'équation d'évolution de σ_{gg} , calculer $\frac{d}{dt} \langle P^2 \rangle$ et retrouver le résultat du cours II (page II-9) sur le coefficient de diffusion de l'impulsion.
- Compléter la discussion physique du § 3 b ci-dessus, où l'on avait calculé σ_{ee}

$$\sigma_{ee} = \frac{\delta}{2} k_L X \sigma_{gg} k_L X \quad (4.25)$$

et où l'on s'était intéressé à la variation de $\langle P^2 \rangle$ quand un atome passe de g à e .

Equations donnant $\dot{\sigma}_{gg}$

- Par rapport au cas général où g est dégénéré, $A(\vec{R})$ est ici un nombre indépendant de \vec{R} (comme $\hat{E}(\vec{R})$). $S'(\vec{R})$ et $\Gamma'(\vec{R})$ sont respectivement égaux à $\delta' k_L^2 X^2$ et $\Gamma' k_L^2 X^2$, où $S' = \delta \delta / 2$ et $\Gamma' = \Gamma \delta / 2$ sont respectivement le déplacement lumineux et le taux d'absorption aux ventres de l'onde stationnaire où le paramètre de saturation vaut δ . Comme dans l'équation (4.25), on a remplacé au voisinage du noeud $\sin k_L X$ par $k_L X$.

- L'équation (4.23) devient alors

$$\dot{\sigma}_{gg} = P_g \sigma(\sigma_{ee}) P_g + \frac{1}{i\hbar} \left[\frac{P^2}{2M}, \sigma_{gg} \right] - i \delta' [k_L^2 X^2, \sigma_{gg}] - \frac{\Gamma'}{2} \{k_L^2 X^2, \sigma_{gg}\} \quad (4.26)$$

- Dans l'état interne fondamental, les états externes qui ont un déplacement lumineux et un taux d'absorption bien définis sont les états propres de l'opérateur X^2 , donc les états propres $|x\rangle$ de l'opérateur position. Un atome dans l'état $|g, x\rangle$ a un déplacement lumineux $\delta'(x)$ et un taux d'absorption $\Gamma'(x)$ donnés par

$$\delta'(x) = \delta' k_L^2 x^2 \quad \Gamma'(x) = \Gamma' k_L^2 x^2 \quad (4.27)$$

Contribution à $d\langle P^2 \rangle / dt$ du terme d'énergie cinétique

Multiplications $[P^2/2M, \sigma_{gg}] / i\hbar$ par P^2 et prenons la trace. En utilisant l'invariance de la trace d'un produit dans une permutation circulaire, on trouve un résultat nul.

Contribution à $d\langle P^2 \rangle / dt$ des atomes qui retombent de e à g

- C'est la contribution du 1^{er} terme de (4.26).
- Nous avons vu dans le § 3 b ci-dessus qu'un atome passant de g à e augmente en moyenne son $\langle P^2 \rangle$ d'une quantité

de l'ordre de $\hbar^2/\Delta x^2$ (où $\Delta x = a$ est la largeur en x du paquet d'ondes), beaucoup plus grande que $\hbar^2 k_L^2$, et nous avons donné une interprétation physique de ce résultat. Quand l'atome retombe de e à g , il transfère à g cette augmentation de $\langle P^2 \rangle$. S'y ajoute la contribution des photons de fluorescence, qui n'étant pas corrélés avec l'impulsion de l'atome dans e , ajoutent à $\langle P^2 \rangle$ une contribution de l'ordre de $\hbar^2 k_L^2$ négligeable devant $\hbar^2/\Delta x^2$. On peut donc négliger l'impulsion des photons de fluorescence, ce qui revient simplement à écrire le 1^{er} terme de (4.26) sous la forme

$$\left(\frac{d}{dt} \sigma_{gg}\right)_{sp} = \Gamma \sigma_{ee} = \Gamma \frac{\delta}{2} k_L X \sigma_{gg} k_L X \quad (4.28)$$

où l'on a utilisé (4.25). En multipliant les 2 membres de (4.28) par P^2 et en prenant la trace, on obtient

$$\left(\frac{d}{dt} \langle P^2 \rangle\right)_{sp} = \Gamma \frac{\delta}{2} k_L^2 \langle X P^2 X \rangle \quad (4.29)$$

Dans le cours III, nous avons calculé $\langle X P^2 X \rangle$ pour le paquet d'ondes gaussien (3.14) et trouvé $\langle X P^2 X \rangle = \frac{3}{4} \hbar^2$

Contribution à $d\langle P^2 \rangle/dt$ des atomes qui quittent g

- C'est la contribution des 2 derniers termes de (4.26). Nous supposons ici $\delta = 0$, de sorte que $\delta' = 0$. Il ne reste donc plus que le dernier terme de (4.26)
- En multipliant le dernier terme de (4.26) par P^2 et en prenant la trace, on obtient

$$\left(\frac{d}{dt} \langle P^2 \rangle\right)_{\text{départ}} = -\Gamma \frac{\delta k_L^2}{2} \left\langle \frac{1}{2} (X^2 P^2 + P^2 X^2) \right\rangle \quad (4.30)$$

La relation de commutation $[X, f(P)] = i\hbar \frac{df(P)}{dP}$ donne alors

$$\begin{cases} X^2 P^2 = X P^2 X + 2i\hbar X P \\ P^2 X^2 = X P^2 X - 2i\hbar P X \end{cases} \quad (4.31)$$

de sorte que
$$\frac{1}{2} (X^2 P^2 + P^2 X^2) = X P^2 X - \hbar^2 \quad (4.32)$$

et par suite
$$\left(\frac{d}{dt} \langle P^2 \rangle\right)_{\text{départ}} = -\frac{\Gamma \delta k_L^2}{2} (\langle X P^2 X \rangle - \hbar^2) \quad (4.33)$$

- Pour le paquet d'ondes gaussien (3.14), $\langle X P^2 X \rangle$ vaut $3\hbar^2/4$, de sorte que la parenthèse de (4.33) vaut $-\hbar^2/4$, et $(d\langle P^2 \rangle/dt)_{\text{départ}}$ vaut $\Gamma \delta \hbar^2 k_L^2 / 8$. Le départ des atomes de g contribue donc lui aussi à augmenter $\langle P^2 \rangle$. L'interprétation est la suivante. Comme l'amplitude de probabilité de quitter g après un temps t varie en $e^{-\Gamma(x)t/2}$ et que $\Gamma(x)$ croît avec x (voir (4.27)), les atomes qui restent dans g ont une fonction d'onde qui est d'autant plus réduite qu'on s'écarte de $x=0$

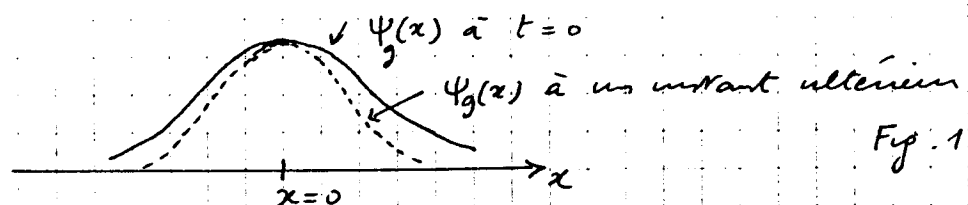


Fig. 1

La fonction d'onde des atomes restant dans g est donc plus étroite en x , donc plus large en p . (Nous avons implicitement supposé ici que γ est suffisamment grand pour qu'on puisse négliger l'étalement du paquet d'ondes entre 0 et t devant l'effet d'affinement en x discuté ici.

Vitesse de variation globale de $\langle P^2 \rangle$

- Ajoutons (4.29) et (4.33). On obtient, quelle que soit la forme exacte du paquet d'ondes

$$\frac{d}{dt} \langle P^2 \rangle = \Gamma \frac{d}{dt} \hbar^2 k_L^2 = 2\Gamma s_0 \hbar^2 k_L^2 = 2D \quad (4.34)$$

avec

$$D = \Gamma s_0 \hbar^2 k_L^2 \quad (4.35)$$

- On retrouve ainsi le résultat (2.61) du cours II, mais avec une compréhension physique plus poussée

Références

- Théorie quantique du cycle de pompage optique

(1) J.-P. Barrat et C. Cohen-Tannoudji

J. Phys. Rad. 22, 329 et 443 (1961)

(2) C. Cohen-Tannoudji, Thèse d'état, Paris (1962)

Ann. Phys. (Paris) 7, 423 et 469 (1962)

- Premières observations expérimentales des déplacements lumineux

(3) C. Cohen-Tannoudji C. R. Acad. Sci. 252, 394 (1961)

(4) M. Arditi and T.R. Carver, Phys. Rev 124, 800 (1961)

- Levée de dégénérescence Zeeman par déplacements lumineux et équivalence avec des champs magnétiques et électriques fictifs

(5) C. Cohen-Tannoudji et J. Dupont, Rev Phys Rev A5, 968 (1972)
et références in

Buts de ce cours

Aux faibles intensités et faibles vitesses, les cohérences optiques peuvent être réexprimées adiabatiquement en fonction de l'opérateur densité σ_{gg} de l'état fondamental. Il en est donc de même de la force radiative moyenne qui ne dépend que des cohérences optiques. Le but de ce cours est de discuter l'expression approchée ainsi obtenue pour cette force moyenne et d'en extraire un certain nombre d'interprétations physiques.

Nous n'aborderons pas encore ici le calcul de σ_{gg} et discutons simplement la structure de l'expression reliant la force moyenne à σ_{gg} .

① Expression générale de la force moyenne

- Nous utiliserons systématiquement dans ce cours la notation

$$\hbar G^\pm(\vec{r}) = \vec{d}^\pm \cdot E_L^\pm(\vec{r}) \quad (5.1)$$

déjà introduite en (4.2). Les équations (3.2) et (3.3) donnant le dipôle moyen deviennent avec ces notations

$$\langle \vec{d}(t) \rangle = \langle \vec{d}^+(t) \rangle + \langle \vec{d}^-(t) \rangle \quad (5.2)$$

avec

$$\langle \vec{d}^-(t) \rangle = - \frac{1}{\delta + i\frac{\Gamma}{2}} \langle \vec{d}^- G^+ \rangle e^{-i\omega_L t} \quad (5.3.a)$$

$$\langle \vec{d}^+(t) \rangle = - \frac{1}{\delta - i\frac{\Gamma}{2}} \langle G^- \vec{d}^+ \rangle e^{i\omega_L t} \quad (5.3.b)$$

où $\langle \rangle$ signifie valeur moyenne dans l'état g : $\langle A \rangle = \text{Tr} A \sigma_{gg}$.

- De même, l'expression (3.4) de la force moyenne devient, après avoir fait rentrer les quantités classiques E_{Lj}^- , $\vec{\nabla} E_{Lj}^+$, dans la trace sur σ_{gg} .

$$\vec{F}(\vec{r}, t) = -\hbar \frac{1}{\delta - i\frac{\Gamma}{2}} \langle G^-(\vec{r}) (\vec{\nabla} G^+(\vec{r})) \rangle - \hbar \frac{1}{\delta + i\frac{\Gamma}{2}} \langle (\vec{\nabla} G^-(\vec{r})) G^+(\vec{r}) \rangle \quad (5.4)$$

- Séparons les parties réelles et imaginaires de $\frac{1}{\delta \pm i\frac{\Gamma}{2}}$ dans (5.4). On obtient

$$\vec{F}(\vec{r}, t) = \vec{F}_1(\vec{r}, t) + \vec{F}_2(\vec{r}, t) \quad (5.5)$$

avec

$$\vec{F}_1(\vec{r}, t) = -\hbar \frac{\delta}{\delta^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} \left[\langle G^-(\vec{r}) (\vec{\nabla} G^+(\vec{r})) \rangle + \langle (\vec{\nabla} G^-(\vec{r})) G^+(\vec{r}) \rangle \right] \quad (5.6.a)$$

$$\vec{F}_2(\vec{r}, t) = i\hbar \frac{\Gamma/2}{\delta^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} \left[\langle (\vec{\nabla} G^-(\vec{r})) G^+(\vec{r}) \rangle - \langle G^-(\vec{r}) (\vec{\nabla} G^+(\vec{r})) \rangle \right] \quad (5.6.b)$$

\vec{F}_1 est la force associée aux déplacements lumineux, ou encore la force en δ' , car c'est le même facteur, $\frac{\delta}{\delta^2 + \frac{\Gamma^2}{4}}$, qui

apparaît dans (5.6.a) et devant le terme décrivant l'effet des déplacements lumineux dans (4.3)

\vec{F}_2 est la force associée au pompage optique, ou encore la force en Γ' , à cause du facteur $\frac{\Gamma/2}{\delta^2 + \frac{\Gamma^2}{4}}$

Remarque

La dépendance en δ et Γ de \vec{F}_1 et \vec{F}_2 n'est pas entièrement contenue dans les facteurs $\delta/(\delta^2 + \Gamma^2/4)$ et $\Gamma/(\delta^2 + \Gamma^2/4)$ de (5.6), car la résolution de l'équation pilote pour σ_{gg} donne une solution dépendant de δ et Γ , de sorte que les valeurs moyennes figurant dans les crochets de (5.6) dépendent aussi de δ et Γ . En particulier, il serait erroné de croire que, à grand désaccord ($|\delta| \gg \Gamma$), \vec{F}_2 est négligeable devant \vec{F}_1 . Le crochet de (5.6.a) peut en effet avoir une valeur beaucoup plus petite que celle du crochet de (5.6.b)

② Interprétation de la force \vec{F}_1 associée aux déplacements lumineux.

- Revenons à l'équation (4.3). Le 1^{er} terme de la 2^{ème} ligne, qui décrit l'effet des déplacements lumineux, s'écrit

$$-i \frac{\delta}{\delta^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} [G^- G^+, \sigma_{gg}] = \frac{1}{i\hbar} [H_{eff}, \sigma_{gg}] \tag{5.7}$$

où
$$H_{eff} = \hbar \frac{\delta}{\delta^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} G^- G^+ \tag{5.8}$$

est l'hamiltonien effectif associé aux déplacements lumineux dans l'état fondamental. On peut vérifier aisément que (4.16) coïncide avec (5.8), compte tenu de (5.1).

- On voit alors aisément que \vec{F}_1 , donnée en (5.6.a), s'écrit

$$\vec{F}_1 = - \langle \vec{\nabla} H_{eff} \rangle \tag{5.9}$$

La force \vec{F}_1 est donc tout simplement l'opposé de la valeur moyenne dans l'état fondamental du gradient de l'hamiltonien effectif associé aux déplacements lumineux, ce qui justifie le nom donné à \vec{F}_1 .

- Soient $|g_\alpha\rangle$ et E_α les états propres et valeurs propres de H_{eff}

$$H_{eff} = \sum_{\alpha} E_{\alpha} |g_{\alpha}\rangle \langle g_{\alpha}| \tag{5.10}$$

En prenant le gradient de (5.10), on obtient

$$\vec{\nabla} H_{eff} = \sum_{\alpha} (\vec{\nabla} E_{\alpha}) |g_{\alpha}\rangle \langle g_{\alpha}| + \sum_{\alpha} E_{\alpha} [(\vec{\nabla} |g_{\alpha}\rangle) \langle g_{\alpha}| + |g_{\alpha}\rangle (\vec{\nabla} \langle g_{\alpha}|)] \tag{5.11}$$

et par suite

$$\vec{F}_1 = - \sum_{\alpha} (\vec{\nabla} E_{\alpha}) \Pi_{\alpha} - \sum_{\alpha} E_{\alpha} [\langle g_{\alpha} | \sigma_{gg} | (\vec{\nabla} |g_{\alpha}\rangle) + (\vec{\nabla} \langle g_{\alpha}|) \sigma_{gg} | g_{\alpha}\rangle] \tag{5.12}$$

où
$$\Pi_\alpha = \langle g_\alpha | \sigma_{gg} | g_\alpha \rangle \quad (5.13)$$

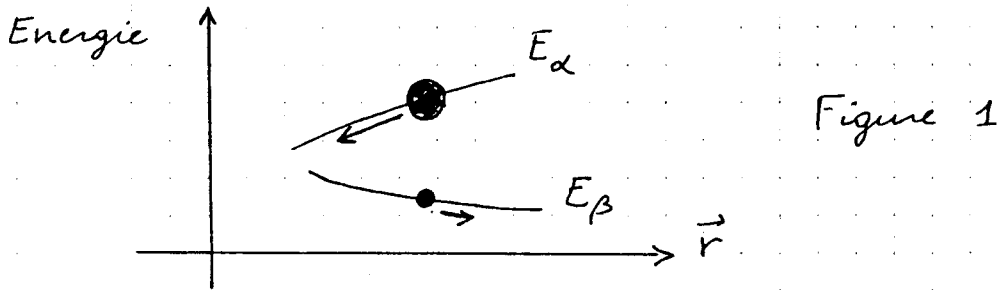
est la population du niveau $|g_\alpha\rangle$

Interprétation du 1^{er} terme de (5.12)

Si les états propres $|g_\alpha\rangle$ de H_{eff} sont indépendants de \vec{r} , le dernier terme de (5.12) est nul et \vec{F}_1 se réduit à

$$\vec{F}_1 = - \sum_\alpha (\vec{\nabla} E_\alpha) \Pi_\alpha \quad (5.14)$$

L'interprétation physique de (5.14) est très analogue à celle de la force dipolaire en termes d'atome habillé (voir Ref. 1) la force moyenne \vec{F}_1 est la somme des forces $-\vec{\nabla} E_\alpha$ associées aux gradients des énergies des sous-niveaux de g déplacés par la lumière (flèches de la figure 1), pondérées par les probabilités d'occupation de ces niveaux (cercles pleins de la figure 1)



- Déplaçons l'atome de \vec{r} à $\vec{r} + d\vec{r}$. Le travail qu'il faut effectuer contre la force \vec{F}_1 écrite en (5.12) vaut

$$-\vec{F}_1 \cdot d\vec{r} = \sum_\alpha \Pi_\alpha dE_\alpha + \sum_\alpha E_\alpha \left[\langle g_\alpha | \sigma_{gg} | dg_\alpha \rangle + \langle dg_\alpha | \sigma_{gg} | g_\alpha \rangle \right] \quad (5.15)$$

où
$$dE_\alpha = d\vec{r} \cdot \vec{\nabla} E_\alpha \quad (5.16.a)$$

$$|dg_\alpha\rangle = d\vec{r} \cdot \vec{\nabla} |g_\alpha\rangle \quad (5.16.b)$$

Interprétation du 2^{ème} terme de (5.12)

Négligeons ici tout pompage optique. Si les états propres de H_{eff} ne dépendaient pas de \vec{r} , un atome initialement dans l'état $|g_\alpha\rangle$ resterait dans le même état quand on déplace l'atome. Si les états propres varient avec \vec{r} , l'atome peut quitter l'état $|g_\alpha\rangle$ quand on le déplace, par suite d'effets non adiabatiques. Au 1^{er} ordre en $d\vec{r}$, le dernier terme de (5.15) peut s'écrire

$$\sum_\alpha E_\alpha d\Pi_\alpha^{na} \quad (5.17)$$

où
$$d\Pi_\alpha^{na} = (\langle g_\alpha | + \langle dg_\alpha |) \sigma_{gg} (|g_\alpha\rangle + |dg_\alpha\rangle) - \langle g_\alpha | \sigma_{gg} | g_\alpha \rangle \quad (5.18)$$

est la variation non adiabatique de la population de l'état $|g_\alpha\rangle$ au cours du déplacement (voir discussion analogue pour les forces dipolaires dans la référence 1.)

③ Développement de l'onde laser en ondes planes

V-4

On peut toujours développer l'onde laser $\vec{E}_L^+(\vec{r})$ en ondes planes progressives de vecteurs d'ondes \vec{k}_μ

$$\vec{E}_L^+(\vec{r}) = \sum_{\mu} \vec{E}_{\mu}^+(\vec{r}) \quad (5.19)$$

où $\vec{E}_{\mu}^+(\vec{r})$ varie avec \vec{r} comme $e^{i\vec{k}_{\mu} \cdot \vec{r}}$. On en déduit

$$\vec{\nabla} G^+ = i \sum_{\mu} \vec{k}_{\mu} G_{\mu}^+ \quad (5.20.a)$$

$$\vec{\nabla} G^- = -i \sum_{\nu} \vec{k}_{\nu} G_{\nu}^- \quad (5.20.b)$$

où

$$\hbar G_{\mu}^{\pm} = \vec{d}^{\pm} \cdot \vec{E}_{\mu}^{\pm}(\vec{r}) \quad (5.21)$$

Nouvelle expression de \vec{F}_1

- En reportant les équations (5.20) dans (5.6.a), on obtient

$$\vec{F}_1 = -i \frac{\delta}{\delta^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} \sum_{\mu} \sum_{\nu} \hbar \vec{k}_{\mu} \left[\langle G_{\nu}^- G_{\mu}^+ \rangle - \langle G_{\mu}^- G_{\nu}^+ \rangle \right] \quad (5.22)$$

- Termes à 1 seule onde $\mu = \nu$

Ils sont nuls car $[\langle G_{\mu}^- G_{\mu}^+ \rangle - \langle G_{\mu}^- G_{\mu}^+ \rangle] = 0$

- Termes à 2 ondes $\mu \neq \nu$. La contribution de la paire (μ, ν) s'écrit

$$-i \frac{\delta}{\delta^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} \hbar (\vec{k}_{\mu} - \vec{k}_{\nu}) \left[\langle G_{\nu}^- G_{\mu}^+ \rangle - \langle G_{\mu}^- G_{\nu}^+ \rangle \right] \quad (5.23)$$

- Interprétation : \vec{F}_1 est une force de redistribution.

Le travail effectué par l'onde E_{μ} sur le dipôle induit par l'onde E_{ν} est l'opposé de celui effectué par l'onde E_{ν} sur le dipôle induit par l'onde E_{μ} . (Ce résultat peut se vérifier aisément en utilisant les termes en $\delta / (\delta^2 + \Gamma^2/4)$ de (5.3) et en remplaçant G^{\pm} par G_{ν}^{\pm} (ou G_{μ}^{\pm}), puis en calculant le travail effectué sur ce dipôle moyen par E_{μ} (ou E_{ν}).

Si des photons sont absorbés sur l'onde E_{μ} à cause de la présence de l'onde E_{ν} , un nombre égal de photons sont émis (de manière stimulée) sur l'onde E_{ν} à cause de la présence de l'onde E_{μ} . Il y a donc un transfert de photons du mode μ au mode ν . Une telle redistribution ne change pas l'énergie totale du champ (puisque $\omega_{\mu} = \omega_{\nu} = \omega_L$), mais change l'impulsion totale du champ (puisque $\vec{k}_{\mu} \neq \vec{k}_{\nu}$) et donc celle de l'atome.

Le fait que les termes en $\delta / (\delta^2 + \Gamma^2/4)$ ne correspondent pas à une variation du nombre global de photons est le pendant du fait que les déplacements lumineux ne font pas varier la population totale de g : la trace du commutateur de la 2^{ème} ligne de (4.3) est nulle.

Nouvelle expression de \vec{F}_2

V.5

- En reportant les équations (5.20) dans (5.6.b), on obtient

$$\vec{F}_2 = \frac{\Gamma/2}{\delta^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} \sum_{\mu} \sum_{\nu} \hbar \vec{k}_{\mu} \left[\langle G_{\mu}^{-} G_{\nu}^{+} \rangle + \langle G_{\nu}^{-} G_{\mu}^{+} \rangle \right] \quad (5.24)$$

- Termes à une seule onde ($\mu = \nu$). A la différence de ce qui se passe pour F_1 , ils sont non nuls et valent

$$\frac{\Gamma}{\delta^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} \hbar \vec{k}_{\mu} \langle G_{\mu}^{-} G_{\mu}^{+} \rangle \quad (5.25)$$

Interprétation: Ces termes représentent la force de pression de radiation associée aux photons absorbés sur l'onde μ indépendamment de l'effet des autres ondes. Pour démontrer ce point il suffit de démontrer que le coefficient de $\hbar \vec{k}_{\mu}$ dans (5.25) est égal au nombre de photons absorbés par unité de temps par l'atome interagissant avec la seule onde μ , puisque chaque photon absorbé transfère une impulsion $\hbar \vec{k}_{\mu}$ à l'atome. Or, le dernier terme de la 2^{ème} ligne de (4.3) est un terme de départ décrivant comment l'état fondamental se vide par absorption réelle de photons. En remplaçant dans ce dernier terme G^{\pm} par G_{μ}^{\pm} (puisque on considère ici l'interaction avec la seule onde μ) et en prenant la trace, on trouve, en utilisant l'invariance d'une trace dans une permutation circulaire, que le nombre d'atomes quittant l'état g par unité de temps sous l'effet de la seule onde μ , n'est autre que $\frac{\Gamma}{\delta^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} \langle G_{\mu}^{-} G_{\mu}^{+} \rangle$, c'est à dire le coefficient de $\hbar \vec{k}_{\mu}$ dans (5.25).

- Termes croisés à 2 ondes ($\mu \neq \nu$). La contribution de la paire (μ, ν) dans (5.24) s'écrit

$$\frac{\Gamma}{\delta^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} \hbar (\vec{k}_{\mu} + \vec{k}_{\nu}) \left[\langle G_{\mu}^{-} G_{\nu}^{+} \rangle + \langle G_{\nu}^{-} G_{\mu}^{+} \rangle \right] \quad (5.26)$$

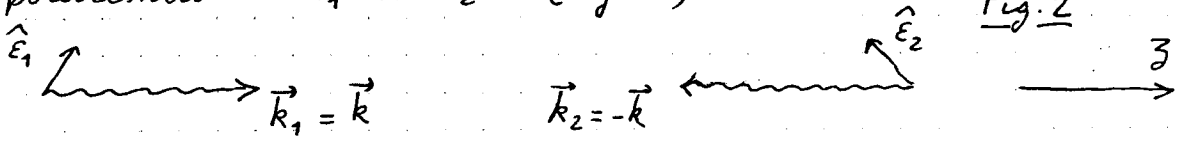
Interprétation: Comme pour les termes croisés (5.24) de la force F_1 , les processus physiques à l'origine du terme (5.26) sont l'absorption de photons $\hbar \vec{k}_{\mu}$ sur l'onde μ travaillant sur le dipôle induit par l'onde ν , et réciproquement l'absorption de photons $\hbar \vec{k}_{\nu}$ sur l'onde ν travaillant sur le dipôle induit par l'onde μ . Les nombres correspondants de photons absorbés par unité de temps sur les ondes μ et ν sont respectivement les coefficients de $\hbar \vec{k}_{\mu}$ et $\hbar \vec{k}_{\nu}$ dans (5.26). On voit qu'ils sont égaux dans (5.26) alors qu'ils ont des signes opposés dans les termes croisés (5.23) associés à F_1 . Les processus à l'origine de (5.26) ne sont donc pas des processus de redistribution. Nous n'avons pas, comme pour F_1 , des photons qui disparaissent de l'une des 2 ondes pour réapparaître dans l'autre, mais des photons qui disparaissent (ou apparaissent) en nombre égal dans les 2 ondes. Les termes (5.26) représentent donc des effets d'interférence qui augmentent (ou diminuent) de la même manière les pressions de radiation exercées par chacune des 2 ondes seules.

4 Cas des mélanges optiques à une dimension

- Nous supposons maintenant que l'onde laser est formée de 2 ondes planes se propageant dans des directions opposées, de vecteurs d'ondes

$$\vec{k}_1 = \vec{k} \quad \vec{k}_2 = -\vec{k}_1 = -\vec{k} \quad (5.27)$$

et de polarisations $\hat{\epsilon}_1$ et $\hat{\epsilon}_2$ (Fig. 2)



- La force \vec{F}_1 est, comme nous l'avons vu plus haut, une force de pure redistribution. L'expression (5.2) devient ici :

$$\vec{F}_1 = \frac{\delta}{\delta^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} 2\hbar \vec{k} i \left[\langle G_1^- G_2^+ \rangle - \langle G_2^- G_1^+ \rangle \right] \quad (5.28)$$

- Comme $\vec{k}_1 + \vec{k}_2 = \vec{0}$ d'après (5.27), le terme croisé (5.26) de la force \vec{F}_2 est nul, et la force \vec{F}_2 se réduit à la somme des 2 termes à une seule onde (5.25) correspondant à \vec{k}_1 et \vec{k}_2 . On a donc, compte tenu de (5.27)

$$\vec{F}_2 = \frac{\Gamma}{\delta^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} \hbar \vec{k} \left[\langle G_1^- G_1^+ \rangle - \langle G_2^- G_2^+ \rangle \right] \quad (5.29)$$

Pour calculer \vec{F}_2 , on peut donc considérer uniquement la différence des pressions de radiation exercées par chacune des 2 ondes et calculées en considérant chaque fois cette seule onde.

Remarques

- (i) Le fait de ne considérer qu'une seule onde à la fois dans le calcul de \vec{F}_2 veut dire ici que dans le calcul de \vec{F}_2 , les termes croisés $\langle G_1^- G_2^+ \rangle$ et $\langle G_2^- G_1^+ \rangle$ n'interviennent pas. Il ne faut pas oublier cependant que les valeurs moyennes des termes à une seule onde $\langle G_1^- G_1^+ \rangle$ et $\langle G_2^- G_2^+ \rangle$ dépendent de Ω_{gg} et que l'équation pilote qu'il faut résoudre pour obtenir Ω_{gg} tient compte de l'interaction de l'atome avec les 2 ondes à la fois. Il serait donc erroné de calculer $\langle G_1^- G_1^+ \rangle$ en ignorant l'existence de l'onde 2.
- (ii) Les photons supplémentaires absorbés sur l'onde 1 à cause de la présence de l'onde 2 ne contribuent pas à \vec{F}_2 parce que leur effet est compensé exactement par les photons supplémentaires (en nombre égal) absorbés sur l'onde 2 à cause de la présence de l'onde 1, et qui poussent l'atome dans une direction opposée. S'ils ne contribuent pas à la force moyenne, les photons supplémentaires contribuent certainement à la diffusion d'impulsion : augmentation de la fluorescence, augmentation des fluctuations de la différence des nombres de photons absorbés dans chaque onde.
- (iii) Si l'atome n'a qu'un seul sous-niveau dans g , et si les 2 ondes 1 et 2 ont même intensité, on trouve que la force (5.29), calculée ici à l'ordre 0 en $\hbar \nu / \Gamma$, est nulle. C'est

uniquement les termes d'ordre 1 ou plus en kV/Γ qui donnent naissance à une force \vec{F}_2 non nulle qui est à la base du refroidissement Doppler : c'est l'effet Doppler qui brise la symétrie entre les 2 ondes. Par contre, quand l'atome a plusieurs sous-niveaux dans g , et qu'il existe dans l'état fondamental une asymétrie créée par le pompage optique, l'absorption de photons de polarisation \hat{E}_1 peut être plus probable que l'absorption de photons de polarisation \hat{E}_2 . [$\langle G_1^- G_1^+ \rangle - \langle G_2^- G_2^+ \rangle$] peut alors être non nul, même à l'ordre 0 en kV/Γ , le mécanisme physique à l'origine du fait que \vec{F}_2 est non nul étant alors l'anisotropie de g créée par le pompage optique, et non plus l'effet Doppler.

Populations et cohérences Zeeman

- Les polarisations \vec{E}_1 et \vec{E}_2 des 2 ondes de la figure 2 sont perpendiculaires à l'axe Oz de propagation des 2 ondes, et sont donc des superpositions des 2 polarisations $\hat{E}_\pm = \mp(\hat{E}_x \pm i\hat{E}_y)/\sqrt{2}$ (Polarisations σ^\pm). Les valeurs moyennes $\langle G_1^- G_1^+ \rangle$, $\langle G_2^- G_2^+ \rangle$, $\langle G_1^- G_2^+ \rangle$ et $\langle G_2^- G_1^+ \rangle$, qui apparaissent dans (5.28) et (5.29), font donc nécessairement intervenir des éléments de matrice $\langle g_\mu | \sigma | g_{\mu'} \rangle$ de σ avec $\mu - \mu' = 0, \pm 2$. En effet, partant de g_μ , l'atome peut, par interaction avec l'onde 1 ou 2, monter dans e_m avec $\mu = \pm 1$, puis en interagissant de nouveau avec l'onde 1 ou 2, redescendre dans $g_{\mu'}$ avec $\mu' = m \pm 1$, c'est à dire $\mu' = \mu, \mu \pm 2$. Dans une mélasse optique à 1 dimension, la force moyenne s'exprime donc en fonction des populations des sous-niveaux Zeeman de l'état fondamental et des cohérences Zeeman $\Delta\mu = \pm 2$.

- L'apparition des cohérences Zeeman dans ce problème peut être interprétée de la manière suivante. Chacune des 2 ondes 1 et 2 de la figure 2 peut être considérée comme une superposition linéaire d'une onde σ^+ et d'une onde σ^- (qui se réduit à 1 seul terme si \hat{E}_1 ou \hat{E}_2 se réduit à \hat{E}_+ ou \hat{E}_-). Considérons alors la composante σ_+ de l'une des 2 ondes 1 ou 2. Si l'état fondamental était isotrope, le dipôle induit par cette composante σ^+ serait lui aussi σ^+ et ne pourrait donc interagir qu'avec l'onde σ^+ qui lui a donné naissance ou la composante σ^+ de l'onde se propageant en sens opposé. Par contre, si l'état fondamental est anisotrope, en particulier si les cohérences Zeeman $\Delta\mu = \pm 2$ ne sont pas toutes nulles, la composante σ^+ d'une onde peut induire un dipôle qui a une composante σ^- et qui peut donc interagir avec la composante σ^- de la même onde ou de l'onde se propageant en sens opposé. L'existence de cohérences Zeeman $\Delta\mu = \pm 2$ permet donc à 2 ondes de polarisations opposées σ^+ et σ^- , se propageant dans le même sens ou en sens opposé, d'être couplées.

Références

(1) J. Dalibard, C. Cohen-Tannoudji J.O.S.A. B2, 1707 (1985)
 Pour des présentations analogues de la force moyenne après élimination adiabatique des cohérences optiques, voir
 (2) J. Dalibard, C. Cohen-Tannoudji J.O.S.A. B6, 2023 (1989)
 (3) H. Wallis, Thèse Bonn 1990
 (4) G. Nienhuis in L.I.K.E. Proceedings (L. Moi et al eds) à paraître 1990.

Le refroidissement "Sisyphé"

Etude semiclassique d'un modèle à 1 dimension

Buts de ce cours

Présenter sur un modèle très simple l'un des nouveaux mécanismes les plus importants de refroidissement laser, appelé refroidissement "Sisyphé" parce que l'atome en mouvement monte plus de côtes de potentiel qu'il n'en descend.

On se limite ici à une mélasse optique à 1 dimension. La configuration laser et la transition atomique choisies sont telles que la force moyenne subie par l'atome est due uniquement à la variation spatiale des énergies des sous-niveaux de l'état fondamental ayant un déplacement lumineux bien défini (les fonctions d'onde de ces sous-niveaux sont indépendantes de la position de l'atome et les pressions de radiation exercées par les 2 ondes laser se propageant en sens opposé s'équilibrent toujours exactement). Le mécanisme étudié est donc très pur.

Le traitement présenté ici est semiclassique et suit de très près celui de la référence 1 et celui de la référence 2.

① - Le modèle étudié

Configuration laser

- 2 ondes laser, de même amplitude E_0 , de même fréquence ω_L , se propageant en sens opposé le long de Oz et de polarisations linéaires croisées le long de Ox et Oy (Fig. 1)

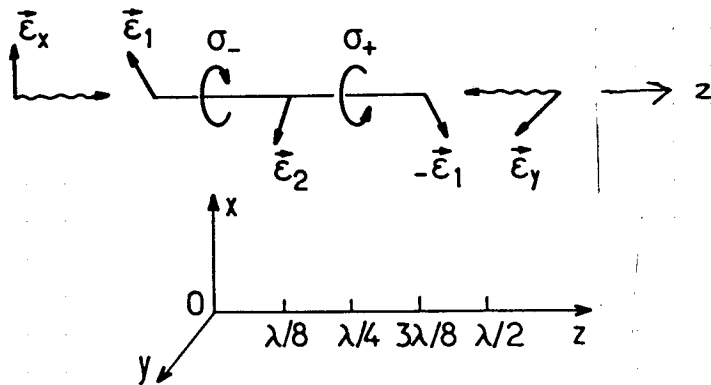


Fig. 1

$$\vec{E}_L(z, t) = \vec{E}_L^+(z) e^{-i\omega_L t} + c.c. \quad (6.1)$$

$$\vec{E}_L^+(z) = (\hat{E}_x e^{ikz} - i \hat{E}_y e^{-ikz}) E_0 \quad (6.2)$$

- Le facteur $-i$ dans 6.2 est choisi de manière à avoir une polarisation σ_- en $z=0$. La polarisation change très vite le long de Oz , devenant elliptique, linéaire, σ^+ , elliptique, linéaire... (Fig. 1)

Forts gradients de polarisation - Gradients d'ellipticité

- Calcul de la polarisation $\hat{E}(z)$ en z et de l'amplitude $E_L(z)$ en z

$$\vec{E}_L^+(z) = E_0 \sqrt{2} \left[\cos kz \frac{\hat{E}_x - i \hat{E}_y}{\sqrt{2}} + i \sin kz \frac{\hat{E}_x + i \hat{E}_y}{\sqrt{2}} \right] \quad (6.3)$$

$$\hat{E}(z) = \cos kz \hat{E}_- - i \sin kz \hat{E}_+ \quad (6.4.a) \quad E_L(z) = \sqrt{2} E_0 \quad (6.4.b)$$

Transition atomique

$$J_g = 1/2 \leftrightarrow J_e = 3/2$$

Les coefficients de Clebsch-Gordan sont donnés sur la Fig. 2

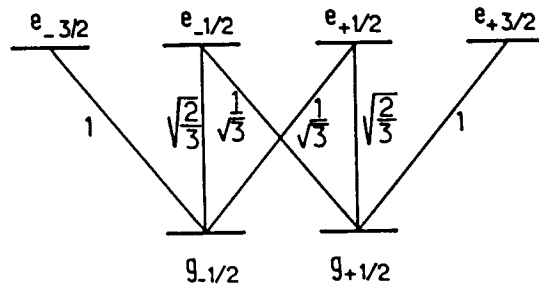


Fig. 2

Simplifications qui en résultent pour la force moyenne

(i) Force \vec{F}_1 en S' (voir cours V, § 2)

- Comme il n'y a que 2 sous-niveaux dans g , l'opérateur

$$A(z) = (\hat{E}^*(z) \cdot \hat{d}^-) (\hat{E}(z) \cdot \hat{d}^+) \quad (6.5)$$

est diagonal dans la base $\{|g_{+1/2}\rangle, |g_{-1/2}\rangle\}$. En effet, $\hat{E}(z)$ est une superposition linéaire de \hat{E}_+ et \hat{E}_- (voir 6.4.a), et les seuls éléments non diagonaux de A ne peuvent apparaître qu'entre 2 sous-niveaux $|g_\mu\rangle$ et $|g_{\mu'}\rangle$ avec $\mu - \mu' = \pm 2$, ce qui est impossible ici

- Les états propres de A sont donc $|g_{+1/2}\rangle$ et $|g_{-1/2}\rangle$ et sont indépendants de z . Il n'y a donc pas de contribution à \vec{F}_1 d'effets non adiabatiques liés à la variation spatiale des fonctions d'onde : le dernier terme (de 5.12) est nul.

- Par contre, comme la polarisation $\hat{E}(z)$ varie avec z , les valeurs propres de $A(z)$ dépendent de z . Les énergies $E_{\pm 1/2}(z)$ des 2 sous-niveaux $|g_{\pm 1/2}\rangle$ déplacés par la lumière varient donc avec z . Si l'on note

$$\pi_{\pm 1/2}(z) = \langle g_{\pm 1/2} | \sigma(z) | g_{\pm 1/2} \rangle \quad (6.6)$$

les populations de ces 2 sous-niveaux pour un atome en z , le 1^{er} terme de (5.12) devient ici

$$\vec{F}_1(z) = -\pi_{+1/2}(z) \vec{\nabla} E_{+1/2}(z) - \pi_{-1/2}(z) \vec{\nabla} E_{-1/2}(z) \quad (6.7)$$

(ii) Force \vec{F}_2 en Γ' (voir cours V, §§ 3 et 4)

- Comme on se limite ici à une mélasse à 1 dimension, \vec{F}_2 est simplement la différence entre les pressions de radiation exercées par les 2 ondes 1 et 2 ($\hat{E}_1 = \hat{E}_x$, $\hat{E}_2 = \hat{E}_y$) se propageant en sens inverse - voir équation (5.29) du cours V.

- Comme les intensités des 2 ondes sont égales, il suffit de calculer $\langle (\hat{E}_1^* \cdot \hat{d}^-) (\hat{E}_1 \cdot \hat{d}^+) \rangle - \langle (\hat{E}_2^* \cdot \hat{d}^-) (\hat{E}_2 \cdot \hat{d}^+) \rangle$.

Or $\hat{E}_1 = \hat{E}_x$ et $\hat{E}_2 = \hat{E}_y$ sont tous 2 des superpositions à poids égal de \hat{E}_+ et \hat{E}_- . Comme il ne peut y avoir de cohérences Zeeman $\Delta\mu = 2$ dans g (à cause de $J_g = 1/2$), il n'y a pas de termes croisés entre les composantes σ^+ et σ^- de \hat{E}_1 (ou \hat{E}_2). Pour obtenir $\langle (\hat{E}_1^* \cdot \hat{d}^-) (\hat{E}_1 \cdot \hat{d}^+) \rangle$, il suffit donc de sommer les populations

$\Pi_{+1/2}$ et $\Pi_{-1/2}$ ^{pondérés} par la demi-somme des carrés des coefficients de Clebsch-Gordan des transitions σ^+ et σ^- partant de chacun de ces 2 sous-niveaux. On obtient alors aisément

$$\langle (\hat{E}_1^* \cdot \hat{d}^-) (\hat{E}_1 \cdot \hat{d}^+) \rangle = \frac{2}{3} (\Pi_{+1/2} + \Pi_{-1/2}) = \frac{2}{3} = \langle (\hat{E}_2^* \cdot \hat{d}^-) (\hat{E}_2 \cdot \hat{d}^+) \rangle \quad (6.8)$$

Les pressions de radiation des 2 ondes s'équilibrent donc toujours exactement et \vec{F}_2 est identiquement nul.

(iii) Récapitulation

- la force moyenne totale se réduit donc à (6.7) et n'est due qu'à la variation spatiale des déplacements lumineux.
- Pour aller plus loin, il faut maintenant calculer les déplacements lumineux $E_{\pm 1/2}(z)$, ainsi que les populations $\Pi_{\pm 1/2}(z)$ des 2 sous-niveaux $|g_{\pm 1/2}\rangle$. Il faut donc revenir à l'équation d'évolution de σ_{gg} , introduite dans le cours IV, et résoudre cette équation pour un atome, soit immobile en z , soit passant en z à la vitesse v .

② Déplacements lumineux (voir cours IV, § 4b)

Matrice représentant $A(z)$ dans la base $\{|g_{\pm 1/2}\rangle\}$

- Nous avons déjà mentionné plus haut que $\langle g_{+1/2} | A(z) | g_{-1/2} \rangle = 0$
- Pour calculer $A_{\pm\pm} = \langle g_{\pm 1/2} | A(z) | g_{\pm 1/2} \rangle$, on utilise (6.4.a) et les coefficients de Clebsch-Gordan de la figure 2. On trouve

$$\begin{cases} A_{++}(z) = \sin^2 kz + \frac{1}{3} \cos^2 kz = 1 - \frac{2}{3} \cos^2 kz \\ A_{--}(z) = \frac{1}{3} \sin^2 kz + \cos^2 kz = 1 - \frac{2}{3} \sin^2 kz \end{cases} \quad (6.9)$$

Calcul de $E_{\pm 1/2}(z)$

$$\begin{cases} E_{+1/2}(z) = \hbar \delta' A_{++} = \hbar \delta' (1 - \frac{2}{3} \cos^2 kz) \\ E_{-1/2}(z) = \hbar \delta' A_{--} = \hbar \delta' (1 - \frac{2}{3} \sin^2 kz) \end{cases} \quad (6.10)$$

où
$$\delta' = \delta \frac{\delta}{2} = \delta \delta_0 \quad (6.11)$$

δ étant le paramètre de saturation pour une onde d'amplitude E_L . Comme $E_L = \sqrt{2} E_0$ (voir 6.4.b), $\delta = 2 \delta_0$ où δ_0 est le paramètre de saturation de chacune des 2 ondes 1 et 2, d'où la 2^{ème} égalité (6.11)

- Les énergies des 2 sous-niveaux $g_{\pm 1/2}$ varient donc sinusoidalement dans l'espace, et en opposition de phase (Fig. 3)

On peut écrire
$$E_{+1/2}(z) - E_{-1/2}(z) = -\frac{2}{3} \hbar \delta' (\cos^2 kz - \sin^2 kz) = U_0 \cos 2kz \quad (6.12)$$

où
$$U_0 = -\frac{2}{3} \hbar \delta' = -\frac{2}{3} \hbar \delta \delta_0 \quad (6.13)$$

est la profondeur des puits de potentiels associés à chacun de ces 2 niveaux oscillant dans l'espace (Fig. 3). On suppose ici $\delta < 0$, de sorte que $U_0 > 0$.

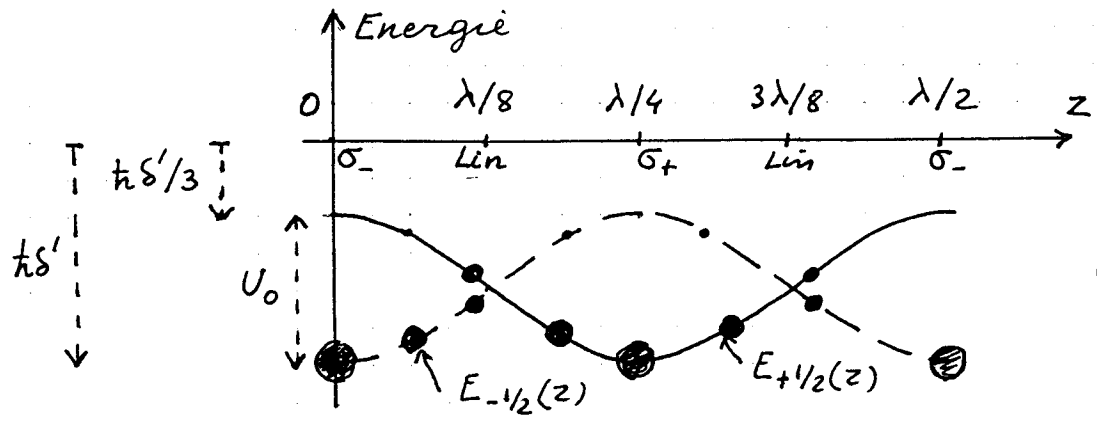


Fig. 3

Nouvelle expression de la force moyenne

En reportant (6.10) dans (6.7), on obtient, compte tenu de (6.13)

$$\vec{F}(z) = \vec{F}_1(z) = \hat{e}_z k U_0 \sin 2kz [\pi_{+1/2}(z) - \pi_{-1/2}(z)]$$

$$= \hat{e}_z k U_0 \sin 2kz \mathcal{M}(z) \tag{6.14}$$

où $\mathcal{M}(z) = \pi_{+1/2}(z) - \pi_{-1/2}(z)$ (6.15)

est la différence de populations entre les 2 sous-niveaux $|g_{\pm 1/2}\rangle$.

③ Equations du pompage optique (voir cours IV, § 4c)

Paramètre Γ'

$$\Gamma' = \Gamma \frac{\delta}{2} = \Gamma \delta_0 \tag{6.16}$$

Termes de départ : diagonaux dans la base $\{|g_{\pm 1/2}\rangle\}$

$$\left\{ \begin{aligned} \left(\frac{d}{dt} \pi_{+1/2}(z) \right)_{\text{départ}} &= -\Gamma' A_{++} \pi_{+1/2}(z) = -\Gamma' \left(1 - \frac{2}{3} \cos^2 kz\right) \pi_{+1/2}(z) \\ \left(\frac{d}{dt} \pi_{-1/2}(z) \right)_{\text{départ}} &= -\Gamma' A_{--} \pi_{-1/2}(z) = -\Gamma' \left(1 - \frac{2}{3} \sin^2 kz\right) \pi_{-1/2}(z) \end{aligned} \right. \tag{6.17}$$

Termes de retombée

A cause de l'isotropie de l'émission spontanée, une population dans g ne peut être alimentée qu'à partir d'une population dans e . Or comme il n'y a pas de cohérence $\Delta m = 2$ dans g , une population dans e ne peut être alimentée par absorption qu'à partir d'une population dans g . Les termes de retombée ne complètent donc les populations dans g qu'aux populations dans g . Effectivement, les équations (6.19) deviennent ici, compte tenu de (6.4.a) et des coefficients de Clebsch-Gordan de la Fig. 2

$$\left\{ \begin{aligned} \left(\frac{d}{dt} \pi_{+1/2}(z) \right)_{\text{retombée}} &= \Gamma' \left(\sin^2 kz + \frac{1}{9} \cos^2 kz \right) \pi_{+1/2}(z) + \Gamma' \frac{2}{9} \sin^2 kz \pi_{-1/2}(z) \\ \left(\frac{d}{dt} \pi_{-1/2}(z) \right)_{\text{retombée}} &= \Gamma' \frac{2}{9} \cos^2 kz \pi_{+1/2}(z) + \Gamma' \left(\cos^2 kz + \frac{1}{9} \sin^2 kz \right) \pi_{-1/2}(z) \end{aligned} \right. \tag{6.18}$$

Vitesse de variation globale de $\pi_{\pm 1/2}(z)$

En ajoutant (6.17) et (6.18) on obtient

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d}{dt} \pi_{+1/2}(z) &= -\frac{2}{9} \Gamma' \cos^2 kz \pi_{+1/2}(z) + \frac{2}{9} \Gamma' \sin^2 kz \pi_{-1/2}(z) \\ \frac{d}{dt} \pi_{-1/2}(z) &= \frac{2}{9} \Gamma' \cos^2 kz \pi_{+1/2}(z) - \frac{2}{9} \Gamma' \sin^2 kz \pi_{-1/2}(z) \end{aligned} \right. \tag{6.19}$$

Taux de pompage optique d'un niveau à l'autre

- Les équations (6.19) s'interprètent très simplement en considérant que le pompage optique transfère l'atome du sous niveau $|g_{+1/2}\rangle$ (resp. $|g_{-1/2}\rangle$) vers le sous niveau $|g_{-1/2}\rangle$ (resp. $|g_{+1/2}\rangle$) avec un taux $\Gamma'_{+1/2 \rightarrow -1/2}$ (resp. $\Gamma'_{-1/2 \rightarrow +1/2}$)

$$\begin{cases} \Gamma'_{+1/2 \rightarrow -1/2}(z) = \frac{2}{g} \Gamma' \cos^2 kz \\ \Gamma'_{-1/2 \rightarrow +1/2}(z) = \frac{2}{g} \Gamma' \sin^2 kz \end{cases} \quad (6.20)$$

- Les taux de pompage optique d'un sous-niveau à l'autre varient donc dans l'espace, avec la même période spatiale que les déplacements lumineux (6.9).

$\Gamma'_{+1/2 \rightarrow -1/2}(z)$ est maximum quand $\cos^2 kz$ est maximum, c'est à dire en $z = 0, \lambda/2, \dots$ c'est à dire encore aux maxima de $E_{+1/2}(z)$ (voir Fig. 3). Par contre $\Gamma'_{+1/2 \rightarrow -1/2}(z) = 0$ quand $\cos^2 kz = 0$, c'est à dire en $z = \lambda/4, 3\lambda/4, \dots$ c'est à dire encore aux minima de $E_{+1/2}(z)$ (voir Fig. 3)

Point très important pour la suite. Quand on se déplace le long de Oz sur l'une des 2 courbes $E_{\pm 1/2}(z)$, le taux de pompage optique vers l'autre sous-niveau est maximum au sommet des côtes de la courbe de potentiel, nul au fond des vallées.

Vitesse de variation de la différence de populations $\mathcal{M}(z) = \pi_{+1/2}(z) - \pi_{-1/2}(z)$

- On vérifie aisément sur (6.19) que $\pi_{+1/2}(z) + \pi_{-1/2}(z)$ ne varie pas et reste égal à 1

$$\pi_{+1/2}(z) + \pi_{-1/2}(z) = 1 \quad (6.21)$$

- En retranchant la 2^{ème} équation (6.19) de la 1^{ère} et en utilisant (6.15) et (6.21), on obtient

$$\frac{d}{dt} \mathcal{M}(z) = -\frac{1}{\tau_p} [\mathcal{M}(z) + \cos 2kz] \quad (6.22)$$

où
$$\frac{1}{\tau_p} = \frac{2}{g} \Gamma' = \frac{2\Gamma' \delta_0}{g} \quad (6.23)$$

τ_p est le temps de pompage optique caractérisant la vitesse de variation de la différence de population entre les 2 sous-niveaux.

④ Atome en mouvement - L'effet Sisyphe

Un atome est lancé à la vitesse v_0 le long de Oz dans l'un des 2 sous-niveaux Zeeman, par exemple dans l'état $|g_{+1/2}\rangle$

a - Discussion qualitative dans le cas $\frac{1}{2} M v_0^2 \gg U_0, v_0 \tau_p \gg \lambda$

- Comme $v_0 \tau_p \gg \lambda$, l'atome parcourt plusieurs λ avant d'être pompé optiquement vers l'autre sous-niveau.
- Comme $\Gamma'_{+1/2 \rightarrow -1/2}$ est maximal aux sommets de la courbe $E_{+1/2}(z)$ la transition $+1/2 \rightarrow -1/2$ se fera préférentiellement au voisinage d'un sommet, l'atome se retrouvant après la transition dans l'état $|g_{-1/2}\rangle$ au voisinage du fond d'une vallée de $E_{-1/2}(z)$ [voir Fig. 4]. Une telle

transition diminue l'énergie potentielle de l'atome, tout en laissant son énergie cinétique inchangée (on néglige pour le moment la variation d'énergie cinétique due à l'émission du photon de fluorescence et à l'absorption d'un photon laser - voir § b plus loin). L'énergie totale de l'atome diminue donc, comme cela est représenté sur la partie supérieure de la figure 4.

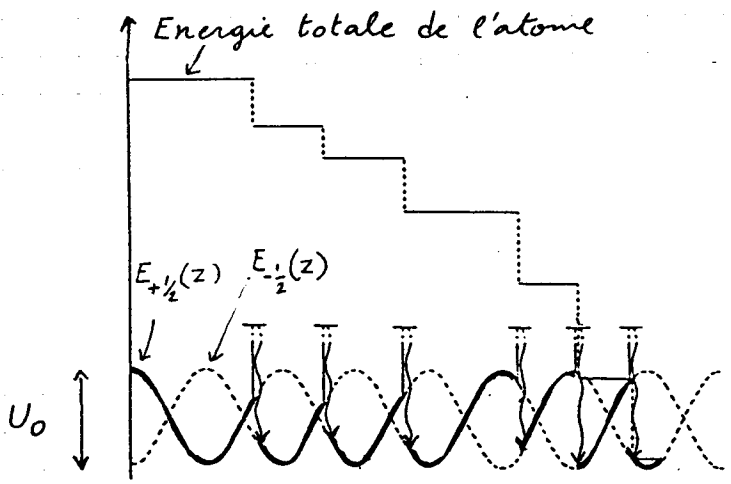


Fig. 4
(extraite de la Ref. 2)

- Le cycle précédent peut être répété plusieurs fois. Comme l'atome quitte le plus souvent une courbe de potentiel au voisinage d'un sommet pour se retrouver au fond d'une vallée dans l'autre courbe de potentiel, il gravit plus de côtes qu'il n'en descend, comme Sisyphé dans la mythologie grecque, d'où le nom donné à l'effet. Il ressort clairement de la discussion précédente que l'effet Sisyphé est dû à la conjonction de 2 effets
 - o des déplacements lumineux oscillant dans l'espace
 - o des taux de pompage optique variant dans l'espace et étant les plus importants du sous-niveau le plus élevé vers le sous-niveau le plus bas.
- Après un certain nombre de cycles, l'atome peut se retrouver piégé au fond d'un puits de potentiel. C'est le cas du dernier cycle de la figure 4. Son énergie peut reaugmenter ensuite à cause de la diffusion d'impulsion ou d'un pompage optique vers l'autre niveau. Mais on conçoit aisément que l'énergie de l'atome en régime stationnaire va s'exprimer en unités de U_0 . D'où la tentation de prendre U_0 de plus en plus petit pour avoir des températures d'équilibre de plus en plus basses. Voir cependant § b plus loin.
- Bilan d'impulsion et d'énergie

Entre 2 cycles de fluorescence, le mouvement est conservatif. Quand l'atome gravit une côte, son énergie potentielle augmente et son énergie cinétique diminue. La variation d'impulsion de l'atome est, quant à elle, due à une redistribution cohérente des photons entre les 2 ondes laser se propageant en sens inverse.

Au cours d'un cycle de fluorescence, l'énergie potentielle perdue par l'atome est emportée par le photon de fluorescence qui a une énergie plus élevée que celle du photon laser absorbé. Cette dissipation d'énergie par processus de diffusion Raman anti-Stokes est essentielle pour l'effet Sisyphé.

b - Existence d'un seuil pour V_0 Perte moyenne d'énergie potentielle par effet Sisyphes

- Nous supposons que l'atome va très vite : $v_{Tp} \gg \lambda$. Il parcourt plusieurs arches de $E_{\pm}(z)$ avant de passer d'un sous-niveau à l'autre par pompage optique. Sa répartition spatiale varie donc très peu avec z . Nous la supposons uniforme.

- Supposons l'atome dans $g_{-1/2}$. Il peut passer dans $g_{+1/2}$ au point z avec une probabilité $\Gamma_{-1/2 \rightarrow +1/2} = 2\Gamma' \sin^2 kz / g$ et son énergie potentielle varie alors de $E_{+1/2}(z) - E_{-1/2}(z) = V_0 \cos 2kz$. La moyenne spatiale de la variation d'énergie potentielle vaut donc

$$\overline{\Delta U} = V_0 \frac{\frac{2}{g} \overline{\sin^2 kz \cos 2kz}}{\frac{2}{g} \overline{\sin^2 kz}} = - \frac{V_0}{2} \quad (6.24)$$

↳ Même résultant pour des atomes dans $g_{+1/2}$ et passant dans $g_{-1/2}$. La perte moyenne d'énergie potentielle quand l'atome change de sous-niveau est donc $-V_0/2$.

- D'après les coefficients de Clebsch-Gordan de la figure 2, et d'après (6.4.a), pour un atome dans $g_{+1/2}$, le nombre de cycles (σ^+, σ^+) (absorption d'un photon σ^+ suivi de l'émission spontanée d'un photon σ^+), (σ^-, σ^-) , (σ^-, π) sont respectivement proportionnels à $\overline{\sin^2 kz} \times 1$, $\overline{\cos^2 kz} \times 1/9$, $\overline{\cos^2 kz} \times 2/9$, c'est à dire encore à $g, 1, 2$. Seuls les cycles (σ^-, π) font changer l'atome de sous-niveau.

Sur 6 photons absorbés et réémis, un seul est donc utile en moyenne pour diminuer V_0 . Après N cycles de fluorescence, la variation moyenne d'énergie potentielle vaut donc

$$\overline{\Delta U} = - \frac{N}{6} \frac{V_0}{2} = - N \frac{V_0}{12} \quad (6.25)$$

Gain d'énergie cinétique le long de Oz dû aux photons de fluorescence

- Quand un atome excité d'impulsion \vec{p} émet un photon de fluorescence $\hbar \vec{k}$, son impulsion passe de \vec{p} à $\vec{p} - \hbar \vec{k}$, et son p_z^2 varie en moyenne de $\hbar^2 \langle k_z^2 \rangle$. (le terme en $-2\hbar \vec{k} \cdot \vec{p}$ a une moyenne nulle car les émissions \vec{k} et $-\vec{k}$ ont la même probabilité).

- Sur 6 photons absorbés, 5 sont réémis avec une polarisation circulaire σ^+ ou σ^- , et pour ces photons, on a $\langle k_z^2 \rangle = 2k^2/5$, 1 est réémis avec une polarisation π qui donne $\langle k_z^2 \rangle = k^2/5$. Après N cycles de fluorescence, la variation moyenne d'énergie cinétique due aux photons de fluorescence vaut donc ($E_R = \hbar^2 k^2 / 2M$ est l'énergie de recul) :

$$(\overline{\Delta T})_{\text{spont}} = N E_R \left[\frac{5}{6} \frac{2}{5} + \frac{1}{6} \frac{1}{5} \right] = N \frac{11}{30} E_R \quad (6.26)$$

- Remarque : Dans la Ref. 2, on suppose, pour simplifier les calculs numériques, que les photons σ_{\pm} sont émis parallèlement ou antiparallèlement à Oz, les photons π perpendiculairement à Oz. L'expression (6.26) doit alors être remplacé par

$$(\overline{\Delta T})'_{\text{spont}} = N E_R \left[\frac{5}{6} \times 1 + \frac{1}{6} \times 0 \right] = N \frac{5}{6} E_R \quad (6.26)'$$

Gain d'énergie cinétique le long de Oz dû à l'absorption

- L'émission de N photons de fluorescence se traduit par la disparition de N_+ photons dans l'onde 1 et N_- dans l'onde 2, avec

$$N_+ + N_- = N \tag{6.27}$$

l'atome gagnant l'impulsion

$$\Delta p_z = (N_+ - N_-) \hbar k \tag{6.28}$$

- En moyenne, $\langle N_+ \rangle = \langle N_- \rangle$ et $\langle \Delta p_z \rangle = 0$. Par contre, $N_+ - N_-$ fluctue autour de 0. A faible intensité et grande vitesse on peut penser que les effets non poissoniens sont négligeables. Nous l'admettrons ici, ce qui donne pour la variance de $N_+ - N_-$

$$\langle (N_+ - N_-)^2 \rangle = \langle N_+ \rangle + \langle N_- \rangle = N \tag{6.29}$$

de sorte que le gain moyen d'énergie cinétique le long de Oz après absorption de N photons, c'est à dire après N cycles, vaut

$$(\overline{\Delta T})_{abs} = N E_R \tag{6.30}$$

Bilan global pour la variation moyenne d'énergie totale $\overline{\Delta E}$

- En ajoutant (6.25), (6.26) et (6.30), on obtient

$$\overline{\Delta E} = N \left[-\frac{U_0}{12} + \frac{11}{30} E_R + E_R \right] \tag{6.31}$$

qui n'est négatif que si

$$U_0 > 16.4 E_R \tag{6.32}$$

le même calcul fait avec (6.26)' donne

$$U_0 > 22 E_R \tag{6.33}$$

- On voit ainsi, en conclusion, que U_0 doit être supérieur à quelques dizaines de E_R si l'on veut que le mécanisme Sisyphe soit efficace, c'est à dire, diminue l'énergie totale des atomes.

C- Les 2 régimes

- Supposons maintenant que l'atome, dans l'état $g_{-1/2}$, soit piégé au fond d'un puits de potentiel, par exemple au voisinage de $z=0$. Négligeons momentanément tout pompage optique. L'atome va osciller autour de sa position d'équilibre avec une pulsation Ω_{osc} qu'on obtient en développant $E_{-1/2}(z)$ au voisinage de $z=0$

$$E_{-1/2}(z) = \hbar \delta' + U_0 \sin^2 k z \approx \hbar \delta' + U_0 k^2 z^2 \tag{6.34}$$

et en égalant le terme en z^2 à $\frac{1}{2} M \Omega_{osc}^2 z^2$, ce qui donne

$$\Omega_{osc} = k \sqrt{\frac{2U_0}{M}} \tag{6.35}$$

- Considérons maintenant la quantité $\Omega_{osc} \tau_p \sim k \tau_p \sqrt{2U_0/M}$ qui représente physiquement le nombre d'oscillations que l'atome effectue dans le puits avant de changer de couche de potentiel par pompage optique. 2 cas extrêmes sont alors à envisager

Régime "sautant"

$$\Omega_{osc} \tau_p = k \tau_p \sqrt{\frac{2U_0}{M}} \ll 1 \tag{6.36}$$

L'atome saute très souvent d'un sous-niveau à l'autre avant

de bouger appréciablement. Bien que τ_p soit long (bien plus long que $\tau_R = \Gamma^{-1}$), les variables internes évoluent beaucoup plus vite que les variables externes

$$T_{int} \ll T_{ext} \quad (6.37)$$

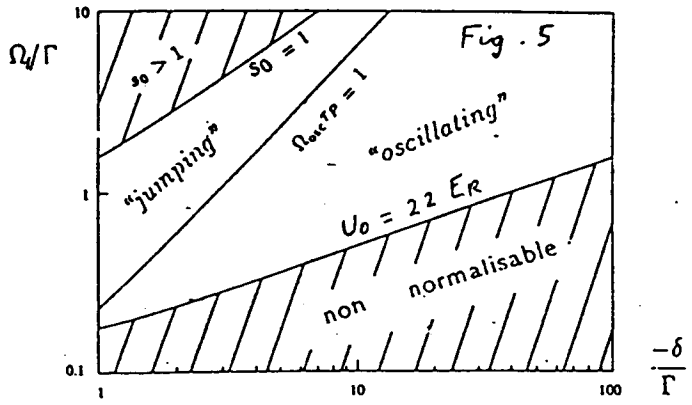
Elles peuvent alors être éliminées adiabatiquement au profit des variables externes, et le mouvement de l'atome décrit en termes de force moyenne et de coefficient de diffusion. C'est ce qui est fait dans la référence 1

Régime oscillant $\Omega_{osc} \tau_p = k \tau_p \sqrt{\frac{2U_0}{m}} \gg 1 \quad (6.38)$

τ_p est maintenant si long que ce sont les variables externes qui évoluent plus vite que les variables internes. La description habituelle en termes de force n'est alors plus valable.

Une approche originale, développée récemment (voir Ref. 3), consiste à considérer tout d'abord les niveaux d'énergie de $P^2/2M + H_{eff}(z)$: particule dans le bi-potentiel de la figure 3. (Ces niveaux sont en fait des "bandes" à cause du caractère périodique du potentiel). La condition (6.38) exprime que la largeur des niveaux, de l'ordre de \hbar/τ_p , est plus petite que la distance entre les niveaux, de l'ordre de $\hbar \Omega_{osc}$. Les équations du pompage optique entre ces niveaux peuvent alors être simplifiées (approximation séculaire permettant de négliger les couplages entre populations et cohérences) et résolues numériquement, ce qui donne les populations des niveaux. Connaissant par ailleurs les fonctions d'ondes, on en déduit les distributions de position et d'impulsion.

Recapitulatif : La figure 5, extraite de la référence 2, donne, pour l'énergie de recul du Césium, les domaines des différents régimes dans le plan $\frac{\Omega_1}{\Gamma}, \frac{-\delta}{\Gamma}$



$$S_0 = 1 \rightarrow \frac{\Omega_1^2/2}{\delta^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} = 1 \rightarrow \text{droite de pente 1 en coordonnées logarithmiques pour } |\delta| \gg \Gamma$$

$$U_0 = 22 E_R \rightarrow \frac{\Omega_1^2 \delta}{\delta^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} = C^te \rightarrow \Omega_1 \sim \delta^{1/2} \rightarrow \text{Droite de pente } 1/2$$

$$\Omega_{osc} \tau_p = 1 \rightarrow \frac{\sqrt{U_0}}{\Gamma} = C^te \rightarrow \frac{\sqrt{\delta}}{\Gamma \sqrt{S_0}} = C^te \rightarrow \Omega_1 \sim \delta^{3/2} \rightarrow \text{Droite de pente } 3/2$$

Références

- (1) J. Dalibard and C. Cohen-Tannoudji JOSA B6, 2023 (1989)
voir aussi P.J. Ungar, P.S. Weiss, E. Riis, S. Chu JOSA B6, 2058 (1989)
pour une résolution numérique des équations de Bloch optiques
- (2) Y. Castin, J. Dalibard, C. Cohen-Tannoudji, Proceedings of the LIKE workshop (L. Moi et al eds) Elbe, Mai 1990, à paraître
- (3) Y. Castin, J. Dalibard, soumis à Europhysics Letters.

- Comme dans le § 4b, nous supposons que l'atome parcourt plusieurs λ avant de changer de niveau : $v t_p \gg \lambda$ et que son énergie est élevée : $E \gg U_0$

Entre 2 sauts, l'atome, sur un sous-niveau donné, a une énergie potentielle moyenne égale à $U_0/2$, de sorte que son énergie cinétique moyenne \tilde{T} est égale à $E - U_0/2$ (Son énergie cinétique instantanée oscille entre E et $E - U_0$)

$$\tilde{T} = E - \frac{U_0}{2} = \frac{\tilde{p}^2}{2M} \quad (6.39)$$

Variance de la variation d'énergie potentielle δU

- Comme l'atome va très vite, toutes les positions z sont équiprobables et la probabilité de passer de $g_{-1/2}$ à $g_{+1/2}$ est proportionnelle à $\sin^2 kz$ en z . On en déduit comme la variation δU de U en z vaut $U_0 \cos 2kz$

$$(\overline{\delta U})_{\text{saut}} = U_0 \frac{\sin^2 kz \cos 2kz}{\sin^2 kz} = -\frac{U_0}{2} \quad (\overline{\delta U^2})_{\text{saut}} = U_0^2 \frac{\sin^2 kz \cos^2 2kz}{\sin^2 kz} = \frac{U_0^2}{2} \quad (6.40)$$

- Les résultats précédents sont pour un saut. Pendant le temps δt il y a $\delta N/6$ sauts, où δN est le nombre de cycles de fluorescence, égal d'après (6.17) à $\Gamma' \delta t (1 - \frac{2}{3} \sin^2 kz) = \Gamma' \delta t (1 - \frac{2}{3} \cos^2 kz) = \frac{2}{3} \Gamma' \delta t$

$$\text{Nombre moyen de sauts pendant } \delta t = \frac{1}{6} \frac{2}{3} \Gamma' \delta t = \frac{1}{9} \Gamma' s_0 \delta t \quad (6.41)$$

- Comme les sauts sont indépendants et que les variances s'ajoutent on a donc

$$\overline{\delta U^2} - \overline{\delta U}^2 = \frac{1}{9} \Gamma' s_0 \frac{U_0^2}{2} \delta t = \frac{\Gamma' s_0 U_0^2}{18} \delta t \quad (6.42)$$

Variance de la variation d'énergie cinétique δT

- Au cours d'une absorption ou d'une émission spontanée, l'impulsion p varie de p à $p - \hbar k_z$ et son énergie cinétique varie de

$$\delta T = -2\hbar k_z \frac{p}{2M} + \frac{\hbar^2 k_z^2}{2M} \quad (6.43)$$

Nous avons calculé plus haut (§ 4b) la moyenne de δT pour un cycle de fluorescence

$$(\overline{\delta T})_{\text{cycle}} = \beta E_R \quad \text{avec } \beta = \frac{41}{30} \text{ ou } \frac{11}{6} \quad (6.44)$$

- Calculons maintenant la moyenne de δT^2 pour un cycle

$$(\overline{\delta T^2})_{\text{cycle}} = \frac{\hbar^2 k_z^2 p^2}{M^2} + \frac{\hbar^4 k_z^4}{4M^2} - \frac{\hbar^3 k_z^3 p}{M^2} \approx 4 \frac{\tilde{p}^2}{2M} \frac{\hbar^2 k_z^2}{2M} = 4 \frac{\tilde{p}^2}{2M} \beta E_R \quad (6.45)$$

En effet, dans la 1^{ère} égalité, on peut négliger le 2^{ème} terme devant le premier (car $\tilde{p} \gg \hbar k_z$), le 3^{ème} est nul par symétrie, et dans le premier $p \approx \tilde{p}$

- En retranchant le carré de (6.44) de (6.45) et en négligeant de nouveau E_R devant $\tilde{p}^2/2M$, on obtient, après multiplication par $\delta N = \frac{2}{3} \Gamma' s_0 \delta t$ (nombre de cycles de fluorescence)³

$$\overline{\delta T^2} - \overline{\delta T}^2 = \frac{2}{3} \Gamma' s_0 4 \frac{\tilde{p}^2}{2M} \beta E_R \quad (6.46)$$

Variance de la variation d'énergie totale δE

- En ajoutant (6.42) et (6.46), on obtient

$$\overline{\delta E^2} - \overline{\delta E}^2 = \frac{2}{3} \Gamma' s_0 \delta t \left[\frac{U_0^2}{12} + \frac{11}{6} \frac{\tilde{p}^2}{M^2} \hbar^2 k^2 \right] \quad (6.47)$$

- On connaît déjà la moyenne de δE (voir § 4b plus haut)

$$\overline{\delta E} = \overline{\delta U} + \overline{\delta T} = \frac{2}{3} \Gamma' s_0 \delta t \left[-\frac{U_0}{12} + \beta \frac{\hbar^2 k^2}{2M} \right] \quad (6.48)$$

Comme les sauts de E sont petits par rapport à E , on pourrait, à partir de (6.47) et (6.48), écrire une équation de Fokker-Planck pour la fonction de distribution de l'énergie

⑤ Solution des équations du pompage optique (pour un atome de vitesse v imposée):

a - Atome immobile ($v = 0$)

- Si z est indépendant du temps, (6.22) admet une solution stationnaire

$$M^{st}(z) = -\cos 2kz \quad (7.1)$$

d'où l'on déduit les populations stationnaires de $g_{+1/2}$, $g_{-1/2}$, en utilisant (6.15) et (6.21)

$$\Pi_{+1/2}^{st}(z) = \frac{1}{2}(1 + M^{st}(z)) = \sin^2 kz \quad (7.2.a)$$

$$\Pi_{-1/2}^{st}(z) = \frac{1}{2}(1 - M^{st}(z)) = \cos^2 kz \quad (7.2.b)$$

- Les populations stationnaires de $|g_{+1/2}\rangle$ et $|g_{-1/2}\rangle$ sont représentées par les cercles pleins de la figure 3 (page VI-4). Le sous-niveau le plus peuplé est le sous-niveau le plus bas. Aux points où la polarisation est circulaire pure, le pompage optique est total dans l'un des deux sous-niveaux.

b - Atome de vitesse v : $z = vt$

Solution générale

- En utilisant $z = vt$, on peut réécrire (6.22) sous la forme

$$\dot{M}(t) + \frac{1}{\tau_p} M(t) = -\frac{1}{\tau_p} \cos 2kv t \quad (7.3)$$

qui est celle d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants (car τ_p est, d'après (6.23), indépendant de z et donc de t), avec un terme source modulé à la fréquence $2kv$. La solution forcée de (7.3), à la fréquence $2kv$, s'écrit donc

$$M(t) = \operatorname{Re} \frac{-\frac{1}{\tau_p}}{2ikv + \frac{1}{\tau_p}} e^{2ikv t} \quad (7.4)$$

c'est à dire encore en revenant à la variable $z = vt$

$$M(z) = -\frac{1}{1 + 4k^2 v^2 \tau_p^2} \cos 2kz - \frac{2kv\tau_p}{1 + 4k^2 v^2 \tau_p^2} \sin 2kz \quad (7.5)$$

- Il apparaît clairement sur (7.4) et (7.5) que le paramètre important pour décrire les variations de $M(z)$ avec v est

$$kv\tau_p = \frac{v\tau_p}{\lambda} \quad (7.6)$$

qui est le rapport entre la distance parcourue par l'atome pendant le temps de pompage optique et la longueur d'onde λ , qui caractérise les variations spatiales de l'onde laser. $kv\tau_p$ est en quelque sorte un paramètre de non adiabaticité qui caractérise la difficulté qu'a le pompage optique de suivre les

variations de la polarisation laser pour un atome en mouvement à la vitesse v . Si $kv\tau_p \gg 1$, les effets non adiabatiques seront importants.

- On peut encore dire que, dans son référentiel au repos, l'atome voit une lumière dont la polarisation est modulée, passant alternativement de σ^+ à σ^- . Si la modulation est lente ($kv \ll 1/\tau_p$), le pompage optique a le temps de suivre les variations de la polarisation, et M oscille entre -1 et $+1$. Si la modulation est rapide ($kv \gg 1/\tau_p$), le pompage optique n'a plus le temps de suivre et l'atome n'est plus polarisé $\rightarrow M \approx 0$ et par suite $\pi_{+1/2} \approx \pi_{-1/2} \approx 1/2$.

Solutions à faible vitesse : $kv\tau_p \ll 1$

- A l'ordre 1 en $kv\tau_p$, (7.5) donne, compte tenu de (7.1)

$$\begin{aligned}
 M(z) &= -\cos 2kz - 2kv\tau_p \sin 2kz \\
 &\approx -\cos 2k(z - v\tau_p) \\
 &= M^{st}(z - v\tau_p)
 \end{aligned}
 \tag{7.7}$$

L'état interne d'un atome en mouvement lent, qui passe au point z avec la vitesse v , est donc le même que celui d'un atome qui serait au repos derrière lui au point $z - v\tau_p$. On voit ainsi clairement les "effets de retard" introduits sur un atome en mouvement par le fait que le pompage optique nécessite un temps fini τ_p .

- Le résultat (7.7) peut être retrouvé par une autre méthode qui a l'avantage de s'appliquer même si τ_p dépendait de z , auquel cas on ne disposerait pas d'une solution générale aussi simple que (7.4).

Comme $z = vt$, on peut réécrire (6.22) sous la forme

$$\frac{\partial}{\partial t} M + v \frac{\partial}{\partial z} M = -\frac{1}{\tau_p} M - \frac{\cos 2kz}{\tau_p}
 \tag{7.8}$$

Après un temps de l'ordre de τ_p , le régime transitoire s'est amorti et le terme $\partial M / \partial t$ est nul.

$$v \frac{\partial}{\partial z} M = -\frac{1}{\tau_p} M - \frac{\cos 2kz}{\tau_p}
 \tag{7.9}$$

On peut alors rechercher une solution de (7.9) sous forme d'un développement en puissances de $kv\tau_p$. A l'ordre 0, on peut ignorer le membre de gauche de (7.9), ce qui donne alors la solution stationnaire (7.1)

$$M^{(0)}(z) = M^{st}(z)
 \tag{7.10}$$

A l'ordre 1, on peut remplacer dans le membre de gauche, qui est déjà proportionnel à v , M par $M^{(0)} = M^{st}$, ce qui donne, puisque le terme en $-\cos 2kz / \tau_p$ a disparu après le calcul à l'ordre 0

$$M^{(1)}(z) = -v\tau_p \frac{\partial}{\partial z} M^{st}(z)
 \tag{7.11}$$

En ajoutant (7.10) et (7.11), on obtient alors, à l'ordre 1 inclus

$$M(z) = M^{st}(z) - v \tau_p \frac{d}{dz} M^{st}(z) \approx M^{st}(z - v \tau_p) \quad (7.12)$$

qui coïncide avec (7.7).

Solutions à grande vitesse : $k v \tau_p \gg 1$

L'équation (7.5) donne alors

$$M(z) = -\frac{1}{2k v \tau_p} \sin 2kz \quad (7.13)$$

$M(z)$ décroît donc en $1/v$ à grande vitesse.

⑥ Description du mouvement atomique dans le régime Tint « Text

Si Tint « Text, l'atome change très souvent de sous-niveau avant que sa vitesse n'ait eu le temps de changer appréciablement. On peut alors utiliser les résultats du paragraphe précédent donnant l'état interne de l'atome pour une vitesse v fixée

a - Atome immobile en z

Force radiative moyenne - Potentiel effectif

- Il suffit de reporter (7.1) dans l'expression (6.14) de la force radiative moyenne \vec{F} pour obtenir la valeur F de la composante sur Oz de \vec{F} , pour un atome en z avec $v=0$

$$F(z, v=0) = -k U_0 \sin 2kz \cos 2kz = -\frac{k U_0}{2} \sin 4kz \quad (7.14)$$

- On peut encore écrire

$$F(z, v=0) = -\frac{d}{dz} \bar{U}(z) \quad (7.15)$$

où $\bar{U}(z)$ est un potentiel effectif égal à

$$\bar{U}(z) = \frac{U_0}{4} \sin^2 2kz \quad (7.16)$$

- Il est clair, d'après (7.14), que la moyenne spatiale de $F(z, v=0)$, notée $\overline{F(v=0)}$, est nulle

$$\overline{F(v=0)} = 0 \quad (7.17)$$

Un tel résultat se comprend aisément sur la figure 3. En 2 points symétriques par rapport au fond d'une vallée, par exemple en $z = \lambda/4$, les populations sont égales, mais les gradients des énergies de chaque sous-niveau sont opposés

Condition de validité du résultat obtenu

- La condition Tint « Text sur laquelle repose le calcul précédent signifie que l'atome, initialement immobile, doit se déplacer d'une quantité très petite devant λ pendant τ_p .

- L'ordre de grandeur de F est $k U_0$, l'accélération correspondante étant de l'ordre de $k U_0 / M$. Pendant le temps τ_p , l'atome se déplace d'une quantité de l'ordre de $\frac{k U_0}{M} \tau_p^2$, qui doit donc être très petite devant $\lambda = 1/k$, ce qui donne

$$\frac{k U_0}{M} \tau_p^2 \ll \frac{1}{k} \quad (7.18)$$

que l'on peut encore recevoir, compte tenu de (6.35)

VII-4

$$\Omega_{osc} \tau_p \ll 1$$

(7.19)

On retrouve bien le régime "sautant" introduit au § 4 c.

Coefficient de diffusion de l'impulsion

- Nous nous contenterons ici d'une discussion qualitative
- Diffusion d'impulsion due aux photons de fluorescence: D_{spont}
La direction d'émission de ces photons est aléatoire. L'impulsion atomique effectue donc une marche aléatoire dans l'espace des impulsions, de pas $\hbar k$, le nombre de pas par unité de temps étant de l'ordre de $\Gamma' = \Gamma s_0$. On en déduit

$$D_{spont} \approx \hbar^2 k^2 \Gamma s_0 \quad (7.20)$$

- Diffusion d'impulsion due aux fluctuations de la différence entre le nombre de photons absorbés dans chaque onde: D_{abs}
Il est du même ordre de grandeur que le précédent

$$D_{abs} \approx \hbar^2 k^2 \Gamma s_0 \quad (7.21)$$

- Diffusion d'impulsion due aux fluctuations des forces dipolaires: D_{dip} .

Tous les τ_p en moyenne, l'atome change de sous-niveau et la force instantanée, liée au gradient de $E_{+1/2}$ ou $E_{-1/2}$, de l'ordre de $\hbar k U_0$, change de signe. La fonction de corrélation de cette force, $F(t)F(t-\tau)$, de l'ordre de $\hbar^2 k^2 U_0^2$ pour $\tau=0$, tend vers 0 quand $\tau \gg \tau_p$, de sorte que

$$\begin{aligned} D_{dip} &\approx \int_0^\infty d\tau \overline{F(t)F(t-\tau)} \approx \hbar^2 k^2 U_0^2 \tau_p \\ &\approx \hbar^2 k^2 \frac{\delta'^2}{\Gamma'} = \hbar^2 k^2 \Gamma s_0 \frac{\delta^2}{\Gamma^2} \end{aligned} \quad (7.22)$$

Pour $|\delta| \gg \Gamma$, D_{dip} est plus important que D_{spont} et D_{abs} . Un calcul exact de D_{dip} , présenté dans la Réf (1), donne pour la moyenne spatiale de D_{dip}

$$\overline{D_{dip}} = \frac{3}{4} \hbar^2 k^4 \Gamma s_0 \frac{\delta^2}{\Gamma^2} \quad (7.23)$$

b - Atome de vitesse faible: $\hbar k v \tau_p \ll 1$

Calcul de la force - Coefficient de friction

- Reprenons la 1^{ère} ligne de (7.7) dans l'expression (6.14) de F . Il vient

$$F(z, v) = F(z, v=0) - \alpha(z) v \quad (7.24)$$

où $\alpha(z)$, qui est le coefficient de friction en z , vaut

$$\alpha(z) = 2 \hbar^2 k^2 U_0 \tau_p \sin^2 2kz \quad (7.25)$$

- Contrairement à $F(z, v=0)$ qui a une moyenne spatiale nulle (voir (7.17)), $\alpha(z)$ a une moyenne spatiale qui vaut

$$\begin{aligned} \bar{\alpha} &= k^2 U_0 \tau_p = -\frac{2}{3} \hbar k^2 \delta s_0 \tau_p \\ &= -3 \hbar k^2 \frac{\delta}{F} \end{aligned} \tag{7.26}$$

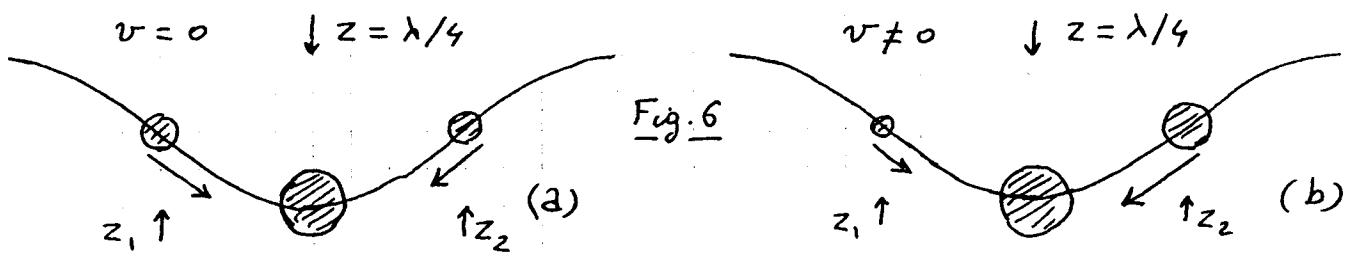
On a utilisé (6.13) et (6.23). Rappelons que $\delta < 0$, de sorte que $\bar{\alpha}$ est bien positif et représente une friction.

- Le temps d'amortissement de la vitesse associé à la force (7.24) moyenné sur une longueur d'onde est de l'ordre de $1/\bar{\alpha}M \approx 1/k^2 U_0 \tau_p M$ d'après (7.26). Ce temps peut être considéré comme un temps externe τ_{ext} . En écrivant qu'un tel temps est très long devant $\tau_{int} \approx \tau_p$, on retrouve la condition (7.18)

Discussion physique

(i) Le fait que $\mathcal{F}(z, v)$ n'a plus une moyenne spatiale nulle quand $v \neq 0$ est dû à l'effet de retard discuté dans le § 5 b plus haut

Considérons, sur la courbe $E_{+1/2}(z)$ de la figure 3, 2 points z_1 et z_2 situés symétriquement de part et d'autre de $z = \lambda/4$. Pour $v = 0$, les populations stationnaires de $g_{+1/2}$ sont égales en ces 2 points, alors que les gradients de $E_{+1/2}$ sont opposés (Fig. 6 a)



Supposons maintenant $v \neq 0$. Comme $\pi_{+1/2}^{st}(z)$ est une fonction croissante de z sur la partie descendante de $E_{+1/2}(z)$, en particulier au voisinage de z_1 , $\pi_{+1/2}$ sera plus petit au point z_1 pour un atome en mouvement que pour un atome au repos (voir Fig. 6 b), à cause de l'effet de retard qui entraîne que $\pi_{+1/2}(z_1) = \pi_{+1/2}^{st}(z_1 - v\tau_p) < \pi_{+1/2}^{st}(z_1)$. Au contraire, au voisinage de z_2 , sur la partie montante de $E_{+1/2}(z)$, $\pi_{+1/2}^{st}(z)$ est une fonction décroissante de z de sorte que $\pi_{+1/2}(z_2) = \pi_{+1/2}^{st}(z_2 - v\tau_p) > \pi_{+1/2}^{st}(z_2)$.

Il apparaît ainsi clairement sur les figures 6 a et 6 b que la force qui accélère l'atome dans les parties descendantes est plus faible pour $v \neq 0$ que pour $v = 0$, alors que la force qui le décélère dans les parties montantes est plus forte pour $v \neq 0$ que pour $v = 0$. On comprend ainsi pourquoi l'atome en mouvement est globalement ralenti.

(ii) Une caractéristique très importante de $\bar{\alpha}$, qui apparaît clairement sur (7.19), est que $\bar{\alpha}$ est indépendant de l'intensité laser I_L . Un tel résultat est dû au fait que, quand I_L décroît, la diminution de U_0 (déplacements lumineux) est compensée par un allongement de τ_p (temps de pompage optique). Rappelons que pour le refroidissement laser Doppler, le coefficient de friction est proportionnel à I_L . Notons enfin que la valeur de $\bar{\alpha}$ trouvée

en (7.19) est plus grande que la valeur maximale de α pour le refroidissement laser Doppler.

(iii) Sous l'effet du terme indépendant de v de (7.24), l'atome effectue des oscillations dans le potentiel effectif $\bar{V}(z)$ donné en (7.16). La fréquence de ces oscillations est, à un facteur 2 près, la fréquence Ω_{osc} calculée en (6.35). Le 2^{ème} terme de (7.24) amortit une telle oscillation avec un taux γ

$$\gamma \approx \frac{\bar{\alpha}}{M} \approx \frac{k^2 U_0}{M} \tau_p \quad (7.27)$$

Comparons γ à Ω_{osc} . En utilisant (6.35) et (7.20), on obtient

$$\frac{\gamma}{\Omega_{osc}} \approx \frac{\frac{k^2 U_0}{M} \tau_p}{k \sqrt{\frac{U_0}{M}}} = k \sqrt{\frac{U_0}{M}} \tau_p = \Omega_{osc} \tau_p \ll 1 \quad (7.28)$$

puisque nous supposons dans tout ce paragraphe la condition (7.19) vérifiée. L'oscillation de l'atome dans $\bar{V}(z)$ est donc très peu amortie.

Ordre de grandeur de la température

- A partir du coefficient de friction $\bar{\alpha}$, donné en (7.26), et du coefficient de diffusion de l'impulsion qui, pour $|\delta| \gg \Gamma$, est de l'ordre de Dip donné en (7.22), on peut estimer l'ordre de grandeur de la température d'équilibre. Comme dans la théorie du mouvement Brownien, on a

$$k_B T \approx \frac{D}{\bar{\alpha}} \approx \frac{\hbar^2 k^2 \Gamma s_0 \delta^2 / \Gamma^2}{\hbar k^2 \delta / \Gamma} \approx \hbar \delta s_0 = \hbar \delta' \approx U_0 \quad (7.29)$$

On trouve que $k_B T$ est de l'ordre de grandeur des déplacements lumineux $\hbar \delta'$ de l'état fondamental, ou encore de l'ordre de grandeur de la profondeur U_0 des puits de potentiels de la figure 3. On trouve le même résultat que celui fourni par le raisonnement général du § 4 a ci dessus, conduisant à une énergie moyenne finale de l'ordre de U_0 .

- Comme $s_0 \approx \Omega_1^2 / 2\delta^2$ pour $|\delta| \gg \Gamma$, on a

$$k_B T \approx \hbar \frac{\Omega_1^2}{|\delta|} \quad (7.30)$$

La température d'équilibre est donc proportionnelle à Ω_1^2 , donc à l'intensité laser et inversement proportionnelle au module du désaccord $|\delta|$.

- A faible intensité, le déplacement lumineux de l'état fondamental est beaucoup plus petit que $\hbar \Gamma$. Le refroidissement Sisyphus conduit donc à une température beaucoup plus basse que le refroidissement Doppler. On ne peut pas cependant réduire indéfiniment l'intensité laser, puisque nous avons vu plus haut (§ 4 b) que U_0 doit être supérieur à un seuil de quelques dizaines de E_R .

- Le résultat précédent n'est valable que si la plage de vitesses correspondant à (7.29) est suffisamment petite pour

que l'approximation \mathcal{F} linéaire en v et D indépendant de v soit valable. Nous revenons plus loin sur ces 2 points.

c - Atome de vitesse quelconque

Calcul de la force

Au lieu de reporter (7.7) dans (6.14), on reporte maintenant l'expression exacte (7.5). Après moyenne spatiale, on trouve pour la force moyenne

$$\overline{\mathcal{F}(v)} = -kV_0 \frac{k v \tau_p}{1 + 4k^2 v^2 \tau_p^2} = -\frac{\bar{\alpha} v}{1 + \left(\frac{v}{v_c}\right)^2} \quad (7.31)$$

où $\bar{\alpha}$ est donné en (7.26) et où v_c est une "vitesse de capture" donnée par

$$v_c = \frac{1}{2k\tau_p} = \frac{\lambda}{2\tau_p} \quad (7.32)$$

Un atome de vitesse v_c parcourt donc une distance $\lambda/2$ pendant le temps de pompage optique

Discussion physique

- v_c donne l'ordre de grandeur de la plage de vitesses dans laquelle $\overline{\mathcal{F}(v)}$ reste linéaire. Comme $1/\tau_p$ est proportionnel à l'intensité laser Ω_1^2 , v_c décroît comme Ω_1^2 quand Ω_1 diminue. Cette situation est différente de celle du refroidissement Doppler ou la vitesse de capture, de l'ordre de Γ/k , est indépendante de Ω_1 .

- La plage de vitesse correspondant à la température d'équilibre (7.30) est donnée par

$$k_B T \approx \frac{1}{2} M v_{rms}^2 \sim \frac{\hbar \Omega_1^2}{|\delta|} \quad (7.33)$$

v_{rms} varie proportionnellement à Ω_1 , alors que v_c varie quadratiquement. Pour que le calcul conduisant à (7.29) ou (7.30) soit valable, il faut que v_{rms} tombe dans la zone linéaire de $\overline{\mathcal{F}(v)}$, c'est à dire encore que $v_{rms} < v_c$, ce qui donne, compte tenu de (7.32) et (7.33)

$$k_B T \gg E_R \frac{\delta^2}{\Gamma^2} \quad (7.34)$$

En fait, le raisonnement précédent suppose encore que le coefficient de diffusion reste constant dans l'intervalle v_c .

Nous allons voir maintenant, en étudiant ce qui se passe à grande vitesse, que D décroît avec v sur un intervalle de l'ordre de v_c , de sorte que la condition (7.34) est trop sévère.

d - Atome de vitesse élevé

Description des phénomènes à la limite $E \gg V_0$, $v \gg v_c$

- C'est la description donnée au § 4 ci-dessus, en termes de sauts d'un sous-niveau à l'autre au cours desquels E varie de δE , de l'ordre de $-V_0$. Comme $V_0 \ll E$, chaque

saut fait varier très peu l'énergie en valeur relative, de sorte que $T_{ext} \gg T_{int}$. On peut donc, à haute énergie (et même si $S_{osc} \tau_p \gg 1$), utiliser la description en termes de force moyenne et de coefficient de diffusion. C'est uniquement quand E aura beaucoup diminué et sera devenu de l'ordre de U_0 qu'il faudra éventuellement changer de description si $S_{osc} \tau_p \gg 1$.

- Entre 2 sauts, l'atome reste sur un même sous-niveau, avec une énergie totale E constante. Comme $v \gg v_c$, il parcourt plusieurs λ avant de changer de sous-niveau et son énergie cinétique T , qui oscille entre E et $E - U_0$, a une valeur moyenne

$$\tilde{T} = E - \frac{U_0}{2} = \frac{\tilde{p}^2}{2M} \quad (7.35)$$

Comme U_0 est constant, on déduit que (7.35) que la variation $\delta \tilde{T}$ de \tilde{T} dans un saut est égale à la variation δE de E

$$\delta \tilde{T} = \delta E = \frac{\tilde{p}}{M} \delta \tilde{p} = v \delta \tilde{p} \quad (7.36)$$

- Dans le § 4 ci-dessus (voir notamment les formules (6.48) et (6.47) du complément au § 4, page VI-10), nous avons calculé la valeur moyenne $\overline{\delta E}$ de δE et sa variance $\overline{\delta E^2} - \overline{\delta E}^2$ au bout d'un temps δt . Comme d'après (7.36), $\delta \tilde{p} = \delta E/v$, nous pouvons en déduire la vitesse de variation de la valeur moyenne et de la variance de $\delta \tilde{p}$, c-à-d encore la force moyenne et le coefficient de diffusion de p à vitesse élevée

Force moyenne et coefficient de diffusion de l'impulsion à vitesse élevée

- De (6.47) et (6.48) et de $\delta \tilde{p} = \delta E/v$, on déduit (pour $\beta = \frac{11}{6}$)

$$\frac{\overline{\delta \tilde{p}}}{\delta t} = \frac{2}{3} \frac{\Gamma S_0}{v} \left[-\frac{U_0}{12} + \frac{11}{6} \frac{\hbar^2 k^2}{2M} \right] = \overline{\mathcal{F}} \quad (7.37)$$

$$\frac{\overline{\delta \tilde{p}^2} - \overline{\delta \tilde{p}}^2}{\delta t} = 2D = \frac{2}{3} \Gamma S_0 \frac{1}{v^2} \left[\frac{U_0^2}{12} + \frac{11}{6} v^2 \frac{\hbar^2 k^2}{2M} \right] \quad (7.38)$$

- Force moyenne

Si l'on suppose $U_0 \gg E_R$, on peut négliger le 2^{ème} terme du crochet de (7.37). On obtient alors, compte tenu de (6.23) et (7.26)

$$\overline{\mathcal{F}}(v) = -\frac{2}{3} \frac{\Gamma S_0}{v} \frac{U_0}{12} = -\frac{k^2 U_0 \tau_p}{4 v^2 k^2 \tau_p^2} \frac{v}{\left(\frac{v}{v_c}\right)^2} = -\tilde{\alpha} v \quad (7.39)$$

qui coïncide avec la forme asymptotique de (7.31) pour $v \gg v_c$.

- Coefficient de diffusion de l'impulsion

On peut écrire (7.38) sous la forme

$$D = D_0 + D_1(v) \quad (7.40)$$

où

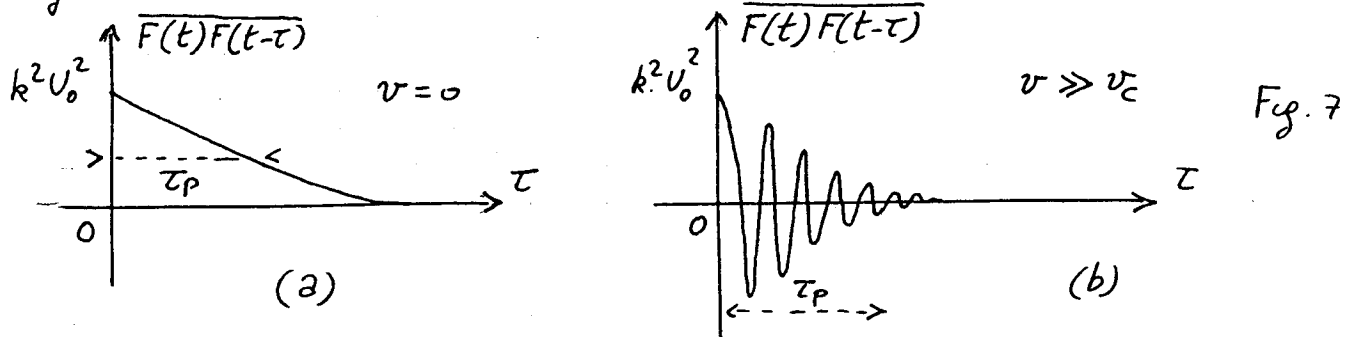
$$D_0 = \frac{11}{18} \Gamma S_0 \frac{\hbar^2 k^2}{2M} \quad (7.41)$$

$$D_1(v) = \frac{\Gamma S_0}{36} \frac{U_0^2}{v^2} \tag{7.42}$$

D_0 est le coefficient de diffusion dû aux fluctuations de la direction d'émission des photons de fluorescence et aux fluctuations de la différence entre les nombres de photons absorbés dans les zondes. D_1 , qui est proportionnel à U_0^2 , est le coefficient de diffusion dû aux fluctuations des forces dipolaires. En utilisant (6.13), (6.23) et (7.23), on peut l'écrire sous la forme

$$D_1(v) = \hbar^2 k^2 \Gamma S_0 \frac{\delta^2}{\Gamma^2} \frac{1}{4 k^2 v^2 \tau_p^2} = \frac{4}{3} D_{dip}(v=0) \frac{1}{\left(\frac{v}{v_c}\right)^2} \tag{7.43}$$

Il apparaît ainsi que le coefficient de diffusion D_{dip} décroît avec v , en $(4/3)(v_c/v)^2$ pour $v \gg v_c$. Cette décroissance est due au fait que, comme l'atome parcourt plusieurs λ avant de changer de sous niveau, la force dipolaire instantanée (gradient de $E_{+1/2}$ ou $E_{-1/2}$) oscille plusieurs fois avant de changer de signe. La fonction de corrélation de $F(t)$, $\overline{F(t)F(t-\tau)}$, qui a l'allure représentée sur la Fig. 7.2 pour $v=0$, a l'allure représentée sur la Fig. 7.6 pour $v \gg v_c$.



L'intégrale de $\overline{F(t)F(t-\tau)}$, qui n'est autre que D_1 ou D_{dip} , est donc beaucoup plus petite pour $v \gg v_c$ que pour $v=0$.

- Conséquence pour la température d'équilibre.

Pour $v \gg v_c$, la force de friction est beaucoup plus faible d'après (7.31). Mais en même temps le chauffage par diffusion d'impulsions est beaucoup plus faible d'après (7.43), à condition bien sûr que $D_1(v)$ reste encore prépondérant devant D_0 . Il s'en suit que le refroidissement Si-syphé peut rester efficace même si $v \gg v_c$. On peut montrer ainsi que la condition de validité de (7.29), écrite plus haut sous la forme $v_{rms} \ll v_c$ peut être remplacé par $v_{rms} \ll v_c \frac{|S|}{\Gamma}$ qui est moins sévère.

Références . les mêmes que page VI-9