

TABLE DES MATIERESIntroduction générale.

- Résumé du cours 1988-89. I.1
- Rappel de quelques résultats importants. I.5
- Problèmes abordés dans le cours 1989-90. I.9

Modèles simples d'opérations de mesure idéales.

- 1 - Le modèle de Von Neumann. II.1
 - Hypothèses simplificatrices. II.1
 - Etat du système global après interaction. II.1
 - Propriétés importantes de l'état final du système global. II.2
 - Application des postulats de la mesure au système global. II.3
 - quelques généralisations. II.3
- 2 - Succession de 2 opérations de mesure idéales sur S faites avec 2 appareils différents M_A et M_B . II.4
 - Problème étudié - Hypothèses simplificatrices. II.4
 - Calcul de l'état final du système global $S+M_A+M_B$. II.5
 - Calcul de quelques probabilités relatives aux résultats enregistrés par M_A et M_B . II.6
- 3 - La réduction du paquet d'ondes II.8
 - Nouvel éclairage apporté par l'approche précédente. II.8
 - Etat de S après une mesure non lue de M_A . II.9

Interférences quantiques et observations.

- 1 - Cas où le système S interagit plusieurs fois avec le même appareil de mesure M . III.1
 - Le modèle de Bell - Nauenberg. III.1
 - Probabilité de lire un résultat donné à l'instant final. III.2
 - Existence d'effets d'interférence quantique. III.2
 - Discussion physique. III.2
- 2 - L'interféromètre de Stern et Gerlach. III.3
 - L'expérience de Stern et Gerlach : un exemple de mesure idéale. III.3
 - Conséquences du principe de superposition : possibilité d'avoir 2 paquets d'ondes cohérents, polarisés différemment et bien séparés. III.3

- Expérience proposée par Bohm et Wigner pour montrer l'importance de ces cohérences. III.4
- 3 - Introduction de dispositifs observant par quels chemins l'atome passe dans l'interféromètre. III.5
 - Le modèle de Scully, Shea, Mc Cullen. III.5
 - Le modèle de Scully, Englert et Schwinger. III.8

Difficultés d'une théorie quantique de la mesure.

- 1 - Corrélations quantiques non-séparables entre système S et appareil de mesure M . IV.1
 - Ambiguïté sur la grandeur de S mesurée par M . IV.1
 - Modèles simplifiés utilisant pour décrire S et M des systèmes à 2 états. IV.2
- 2 - Introduction dans l'analyse d'un autre appareil N mesurant le résultat enregistré par M . IV.4
 - Idée générale. IV.4
 - Étude de l'évolution globale de $S+M+N$ sur un modèle simplifié. IV.4
 - L'interaction $M-N$ peut lever l'ambiguïté sur la grandeur de S mesurée par M . IV.5
- 3 - Où situer la frontière entre évolution unitaire et tirage aléatoire du résultat de mesure ? IV.6
 - La chaîne infinie de Von Neumann. Où l'arrêter ? IV.6
 - Cohérence des résultats obtenus en appliquant le postulat de la mesure à S , $S+M$, $S+M+N$. IV.7
- 4 - Cohérences quantiques macroscopiques. IV.8
 - Les difficultés qui leur sont associées. IV.8
 - L'interaction $M-N$ peut faire disparaître les cohérences entre états de $S+M$. IV.8

La théorie de Zurek. Règles de superselection induites par l'environnement.

- 1 - Introduction générale. V.1
- 2 - Étude d'un modèle schématisé n'utilisant que des systèmes à 2 états. V.2
- 3 - Étude plus générale. V.4
 - Forme générale de l'hamiltonien - Hypothèse simplificatrice. V.4
 - Lien avec l'opération de mesure - Buts du calcul. V.5

- Niveaux d'énergie du système global $M+E$. V.5
 - Relaxation T_2 de type purement inhomogène. V.6
 - Relaxation T_2 de type à la fois homogène et inhomogène. V.8
 - Limite des faibles couplages. Lien avec l'équation pilote. V.9
- 4 - Discussion physique. VI.1
- L'effet de l'interaction $M-E$ peut être considéré comme une mesure idéale de M par E . VI.1
 - La mesure de M par E permet de résoudre deux des difficultés d'une théorie quantique de la mesure. VI.2
 - Règles de supersélection. VI.2
 - L'information n'est pas perdue. Elle est transférée. VI.3
 - L'effet de M sur E est aussi important que l'effet de E sur M . VI.4
 - Lien avec le point de vue de Copenhague. VI.4
- 5 - Etude d'un modèle permettant de suivre l'évolution de $S+M$ en présence d'interactions $S-M$ et $M-E$. VI.5
- Le modèle de Walls-Collet-Milburn. Hamiltonien. VI.5
 - Equations pilote de $S+M$. VI.6
 - Solution de l'équation pilote. VI.7
 - Discussion physique. VI.8
- Appendice. VI.9

Vitesse d'apparition des corrélations quantiques entre 2 systèmes initialement non corrélés.

- Introduction - Buts de ce cours. VII.1
- 1 - Forme canonique de Schmidt pour le vecteur d'état d'un ensemble de 2 systèmes dans un état pur. VII.1
- Position du problème. VII.1
 - Démonstration de l'existence d'une forme canonique de Schmidt. VII.2
 - Quelques conséquences des résultats précédents. VII.3
- 2 - Calcul perturbatif de la vitesse d'apparition des corrélations quantiques à partir d'un état initial produit. VII.4
- Principe du calcul. VII.4
 - Calcul perturbatif des valeurs propres de $\rho(1)$. VII.4
- 3 - Etude de quelques applications. VII.6
- Deux oscillateurs harmoniques couplés. VII.6
 - Atome à 2 niveaux couplé au champ de rayonnement. VII.8

Comportement classique induit par l'environnement.

- 1 - Introduction. VIII.1
- 2 - Cas de 2 particules interagissant par un potentiel dépendant de la distance. VIII.2
- Notations. VIII.2
 - Vitesse d'apparition des corrélations quantiques entre les 2 particules. VIII.3
 - Calcul non perturbatif à la limite $m_1, m_2 \rightarrow \infty$. VIII.3
 - Quelques ordres de grandeur. VIII.5
- 3 - Cas d'une particule de masse M subissant des collisions répétées avec d'autres particules microscopiques. VIII.6
- Limite $M \rightarrow \infty$. Rappels de résultats concernant la vitesse de destruction des cohérences spatiales. VIII.6
 - Quelques ordres de grandeur. VIII.6
 - Compétition entre l'effet de l'étalement du paquet d'ondes et l'effet des collisions. VIII.7
- Quelques questions pouvant être posées à propos du §2. VIII.10
- Existence d'autres variables qui peuvent rester décorréliées. VIII.10
 - Limite $m_2 \rightarrow \infty$. VIII.11
 - Exemple d'états quasiclassiques pour 2 particules interagissant par un potentiel en $1/r$. VIII.13
- 4 - Quelques problèmes pouvant être posés à propos des isomères optiques. IX.1
- Description du système étudié. IX.1
 - Origine de la stabilité des isomères optiques. Réponse de Hund. IX.2
 - Insuffisances de la réponse précédente. Quelques autres questions. IX.2
- 5 - Modification par les collisions à basse température de l'oscillation de Rabi entre les états droit et gauche. IX.3
- Équation pilote. IX.3
 - Étude des divers régimes. IX.5
 - Interprétation en termes de temps de transition à la limite $\Omega \ll \gamma_c$. IX.5
 - Conclusions.
- 6 - Autre analyse des phénomènes basé sur la théorie quantique de la mesure. IX.7
- Reinterprétation de l'évolution de la molécule en termes de mesures répétées par l'environnement. IX.7
 - Calcul de l'opérateur densité de la molécule après n collisions. IX.7

- Limite des temps de collisions élevés. IX.8
- Effet Zénon quantique. Gel de l'évolution propre. IX.9

Mesure, information et entropie.

- 1 - Entropie statistique associée à un état quantique. X.1
 - Information manquante associée à une loi de probabilité. X.1
 - Entropie statistique de Von Neumann. X.1
 - Quelques propriétés importantes de l'entropie statistique. X.2
- 2 - Diverses entropies statistiques pouvant être introduites à propos d'une mesure idéale. X.4
 - Opérateurs densité du système avant et après la mesure. X.4
 - Entropie du système après la mesure. X.5
 - Entropie statistique associée à la distribution de probabilité des résultats de mesure. X.5
 - Relations entre ces diverses entropies. Additivité de l'information. X.5
- 3 - Bilan d'information au cours d'une mesure idéale. X.6
 - Perte d'information après une mesure idéale non lue. X.6
 - L'état D' est un état d'entropie maximale. X.6
 - Informations moyenne gagnée par la lecture. X.7

Introduction générale

A. Résumé du cours 1988-89

Le cours de l'année 1988-89 est le premier d'une série de deux cours portant sur le thème général "Cohérences quantiques et dissipation". L'objectif d'une telle étude est de comprendre comment une superposition linéaire de deux états $|\psi_1\rangle$ et $|\psi_2\rangle$ d'un système quantique est transformée en un mélange statistique d'états par couplage dissipatif avec un environnement, et ce d'autant plus rapidement que les deux états $|\psi_1\rangle$ et $|\psi_2\rangle$ sont macroscopiquement différents.

Le cours commence par quelques brefs rappels de mécanique quantique sur le principe de superposition et la description de l'état d'un système par un opérateur densité. La notion de cohérence quantique entre deux états est introduite et reliée à l'élément de matrice non diagonal de l'opérateur densité entre ces deux états. L'importance de cette notion en physique atomique et moléculaire est soulignée et illustrée sur plusieurs exemples (effet Hanle, battements quantiques). On rappelle également que le couplage avec l'environnement détruit les cohérences quantiques avec un temps de relaxation T_2 , en général beaucoup plus court que le temps T_1 caractérisant l'évolution des populations des niveaux d'énergie.

Une situation particulièrement intéressante apparaît lorsqu'il existe des cohérences quantiques entre deux états différents d'un ensemble de deux sous-systèmes A et B. De telles cohérences reflètent alors l'existence de corrélations quantiques non séparables entre les deux sous-systèmes. L'impossibilité de comprendre ces corrélations avec des concepts classiques (paradoxe de Einstein-Podolsky-Rosen) souligne bien la différence importante qui existe entre une superposition cohérente de deux états et un

mélange statistique de ces deux états. On montre que les mêmes difficultés apparaissent dans l'analyse quantique du processus de mesure. Des corrélations quantiques non séparables apparaissent en effet entre l'appareil de mesure \mathcal{M} et le système \mathcal{S} . De plus, de telles corrélations peuvent se manifester sur plusieurs paires d'observables corrélées de \mathcal{S} et \mathcal{M} , ne commutant pas entre elles, ce qui introduit une ambiguïté dans l'identification de la grandeur de \mathcal{S} qui est mesurée par \mathcal{M} .

On expose alors les grandes lignes de la théorie de Zurek permettant de résoudre, au moins partiellement, ces difficultés. Le point important est que le système $\mathcal{S} + \mathcal{M}$ n'est pas en général isolé, mais couplé à un environnement \mathcal{E} . C'est l'interaction entre \mathcal{M} et \mathcal{E} qui privilégie une paire particulière (S,M) d'observables corrélées de \mathcal{S} et \mathcal{M} , et qui lève l'ambiguïté mentionnée plus haut. La dissipation introduite par le couplage avec \mathcal{E} n'affecte pas les populations (poids relatifs) des états corrélés de S et M apparaissant à l'issue du processus de mesure, tout en détruisant très rapidement les cohérences quantiques entre états macroscopiquement différents de M. Les corrélations quantiques non séparables sont ainsi transformées par le couplage avec \mathcal{E} en corrélations classiques.

La discussion précédente montre l'importance que revêt la destruction par la dissipation des cohérences quantiques. Le reste du cours de cette année sera consacré à l'étude de quelques modèles simples permettant d'illustrer et de comprendre un tel phénomène. L'analyse du processus quantique de mesure à partir d'un tel point de vue sera reprise l'année suivante de manière plus approfondie.

Etude d'un premier exemple simple : effet de l'émission spontanée d'un photon sur les cohérences quantiques de l'atome émetteur

Le premier exemple étudié est relatif à un atome à 2 niveaux a et b. A l'instant initial $t = 0$, l'atome est dans un niveau excité b, et l'état quantique de son centre de masse est décrit par un opérateur densité quelconque, qui peut contenir des

cohérences quantiques en position, en impulsion, et éventuellement être formé de paquets d'ondes bien séparés spatialement l'un de l'autre. Après un temps suffisamment long (supérieur à la durée de vie radiative de l'état excité b), l'atome est retombé dans son état fondamental a en émettant spontanément un photon, et l'état de son centre de masse a changé. Que sont devenues les cohérences quantiques initiales de l'état du centre de masse ? Un tel problème est suffisamment simple pour que l'on puisse obtenir une solution exacte. De plus, l'émission spontanée peut être considérée comme le prototype de processus dissipatif en optique quantique et il est important par exemple de déterminer les limites qu'un tel processus introduit sur les longueurs de cohérence spatiale que le refroidissement laser permet d'obtenir.

On commence par résoudre l'équation de Schrödinger décrivant l'évolution du système global atome + rayonnement. En prenant la trace sur les variables du rayonnement et les variables atomiques internes, on détermine alors l'opérateur densité décrivant l'état du centre de masse de l'atome après émission spontanée d'un photon. L'expression obtenue montre que l'émission spontanée détruit toute cohérence spatiale de l'atome émetteur entre deux points \vec{r}_1 et \vec{r}_2 séparés par une distance supérieure à la longueur d'onde λ_0 d'un photon émis. Un tel résultat est interprété physiquement et relié au fait que, dans l'état final du système global atome + rayonnement, des corrélations quantiques non séparables apparaissent entre la position de l'atome et l'état du champ émis. On montre également que la destruction des cohérences quantiques de l'atome émetteur est moins sévère si des informations partielles sont conservées sur l'énergie ou la direction du photon émis. Enfin, l'évolution des cohérences en impulsion est étudiée. Elles sont beaucoup moins sensibles à l'émission spontanée et se retrouvent pratiquement inchangées à l'issue du processus d'émission.

Autre exemple de destruction de cohérences spatiales.

Diffusion de photons ou de particules légères

L'étude précédente ne considère qu'un seul processus

d'émission. Pour la compléter, on aborde ensuite l'étude de cycles absorption-émission de photons, ou plus généralement de processus de diffusion de photons ou de particules matérielles plus légères que la particule diffusante. De plus, on ne se limite pas à un seul processus de diffusion. Le problème est de comprendre comment les cohérences quantiques de la particule "cible" sont affectées par une suite aléatoire de processus de collision avec des particules "projectiles".

A partir de la matrice S de collision, il est possible de calculer l'évolution au cours d'une collision donnée de l'état du système global cible + projectile. Il suffit alors de tracer sur les variables du projectile (sommation sur tous les états finals possibles du projectile), puis de moyenner sur les états initiaux du projectile ainsi que sur toutes les collisions pouvant se produire par unité de temps, pour obtenir la vitesse de variation moyenne de l'opérateur densité de la particule cible. Il apparaît alors que la cohérence spatiale de la particule cible entre deux points \vec{r}_1 et \vec{r}_2 est détruite avec un taux d'amortissement proportionnel au carré $(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)^2$ de la distance séparant les deux points et au coefficient de diffusion D de l'impulsion de la particule cible.

La signification physique d'un tel résultat est analysée en détail. On introduit tout d'abord la notion de cohérence spatiale globale à une distance \vec{u} donnée, représentant l'ensemble de toutes les cohérences spatiales entre couples de points \vec{r}_1 et \vec{r}_2 tels que $\vec{r}_1 - \vec{r}_2 = \vec{u}$. Cette fonction $\mathcal{F}(\vec{u})$ se trouve être en fait la transformée de Fourier de la distribution de probabilité $\mathcal{P}(\vec{p})$ de l'impulsion \vec{p} de la particule. Pour comprendre le comportement de la cohérence spatiale globale, il suffit donc de comprendre celui de la distribution d'impulsion. Pour fixer les idées, supposons que l'état de la particule cible soit une superposition cohérente de deux paquets d'ondes très étroits, séparés par une distance u_0 , beaucoup plus grande que leur largeur. On trouve alors immédiatement que $\mathcal{P}(p)$ présente des oscillations très rapides en p , de période $\pi\hbar/u_0$. L'existence d'une cohérence spatiale globale

à la distance u_0 , se traduit donc par un comportement oscillant de $\mathcal{P}(p)$ en fonction de p , de période inversement proportionnelle à u_0 . Sous l'effet des collisions, l'impulsion de la particule cible effectue une marche au hasard dans l'espace des impulsions, caractérisée par un coefficient de diffusion D . Un tel processus de diffusion entraîne que les oscillations rapides de $\mathcal{P}(p)$ vont s'atténuer avec un taux proportionnel à D et inversement proportionnel au carré de la période de ces oscillations. Il est possible ainsi de comprendre pourquoi la cohérence entre les deux paquets d'ondes séparés d'une distance u_0 est détruite avec un taux proportionnel à Du_0^2 .

Etude quantitative de la destruction des cohérences spatiales d'une particule Brownienne

Toute l'étude précédente est limitée aux effets d'ordre le plus bas en $1/M$, où M est la masse de la particule cible. Ont donc été ignorés tous les effets liés à la vitesse \vec{p}/M de la particule cible, comme le vol libre, ou la friction associée aux changements de la vitesse de la particule lors des collisions.

Pour étudier de manière plus quantitative la contribution de tels effets, il faut partir de l'équation cinétique décrivant l'évolution temporelle de l'opérateur densité de la particule cible. Après un bref rappel des diverses représentations possibles de cet opérateur densité, et en particulier de la représentation de Wigner $w(p,x,t)$, on donne l'équation d'évolution de $w(p,x,t)$ qui sera établie plus loin dans le cadre d'un modèle simple (modèle de Caldeira-Leggett). Cette équation est une équation de Fokker-Planck, contenant des termes qui décrivent respectivement, le vol libre de la particule cible, l'amortissement et la diffusion de l'impulsion de cette particule sous l'effet des collisions.

La double transformée de Fourier de $w(p,x,t)$ par rapport à p et x est une autre fonction caractéristique $C(u,v,t)$ qui obéit à une équation aux dérivées partielles du premier ordre en u , v et t . On expose alors la méthode des caractéristiques qui permet de

résoudre une telle équation et d'obtenir l'évolution des cohérences quantiques de la particule pour n'importe quel état initial. Le cas particulier d'un état initial gaussien est étudié en détail. On montre que l'évolution de la cohérence spatiale globale n'est pas affectée par le vol libre, et on illustre un tel résultat par la description d'expériences récentes d'interférométrie à neutrons. On étudie également l'évolution de la distribution de probabilité $\mathcal{R}(x)$ de la position x de la particule. Le résultat important qui ressort de cette étude est le suivant : lorsque le couplage avec l'environnement croît, c'est-à-dire lorsque le taux de collisions croît, les cohérences spatiales de la particule cible sont détruites de plus en plus rapidement alors que l'évolution de la distribution de probabilité de la position est de plus en plus lente. En d'autres termes, dans la base des états propres de l'opérateur position, un accroissement du couplage avec l'environnement se traduit par un raccourcissement du temps de relaxation T_2 et un allongement du temps de relaxation T_1 .

Le modèle de Caldeira-Leggett appliqué au mouvement Brownien

Le modèle de Caldeira-Leggett est un modèle simple de couplage dissipatif conduisant à une force de friction proportionnelle à la vitesse. Il permet d'établir très simplement l'équation de Fokker-Planck satisfaite par $w(p,x,t)$ et discutée plus haut.

Pour introduire un tel modèle, on commence par considérer l'hamiltonien décrivant la dynamique d'une particule lourde couplée à un gaz de particules légères par des potentiels harmoniques. Cet hamiltonien est visiblement invariant par translation globale de l'ensemble des particules. On montre que, moyennant un changement d'échelle approprié, un tel hamiltonien est équivalent à l'hamiltonien de Caldeira-Leggett qui décrit la dynamique d'une particule libre couplée à un réservoir d'oscillateurs harmoniques par des termes de couplage linéaires par rapport à la position de la particule et à la position de chaque oscillateur.

A partir des équations de Heisenberg couplées de la particule et des oscillateurs du réservoir, il est possible alors de montrer qu'un choix convenable des paramètres de couplage permet d'écrire l'équation quantique du mouvement de la particule sous la forme d'une équation de Langevin quantique, avec une force de friction proportionnelle à la vitesse et une force de Langevin dont la fonction de corrélation dépend de l'état initial choisi pour le réservoir. Si cet état initial est un état d'équilibre thermodynamique à une température T suffisamment élevée (limite classique), et si la largeur du spectre de fréquences du réservoir est grande devant le taux d'amortissement de la vitesse de la particule lourde, il est possible d'utiliser la méthode de l'équation pilote pour établir l'équation du mouvement de l'opérateur densité réduit de la particule lourde. On établit une telle équation sous forme opératorielle et on montre qu'elle conduit bien à une équation de Fokker-Planck pour la représentation de Wigner $w(p,x,t)$ de l'opérateur densité.

Toute l'approche précédente est généralisée au cas où la particule lourde est supposée de plus soumise à un potentiel extérieur harmonique. Les conditions dans lesquelles il est possible d'établir une équation pilote pour un oscillateur harmonique suramorti ou sous-amorti sont discutées en détail. On montre en particulier qu'avec un réservoir à $T = 0^{\circ}\text{K}$, il est possible d'écrire une équation pilote pour un oscillateur harmonique sous-amorti.

Cohérences quantiques et dissipation pour un oscillateur harmonique sous-amorti

Certaines propositions expérimentales récentes envisagent la possibilité de préparer un oscillateur harmonique (associé à un mode du champ électromagnétique) dans une superposition cohérente de deux états cohérents. En l'absence de dissipation, les paquets d'ondes associés à ces deux états cohérents oscilleraient sans se déformer, et on pourrait essayer d'observer les phénomènes d'interférences associés à la cohérence qui existe entre eux.

Le problème qui se pose alors est d'étudier l'influence d'une dissipation éventuelle sur ces phénomènes d'interférence. On utilise pour cela l'équation pilote décrivant l'évolution d'un oscillateur harmonique sous-amorti et introduite plus haut. Lorsque l'opérateur densité de l'oscillateur est représenté par une fonction caractéristique adaptée à l'ordre normal (opérateurs d'annihilation à droite des opérateurs de création), l'équation pilote prend la forme d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre qui peut être résolue par la méthode des caractéristiques. On montre alors que, si l'état initial de l'oscillateur est une superposition de deux états cohérents, un tel état évolue vers un mélange statistique de deux états cohérents : l'amplitude complexe associée à chaque état cohérent s'amortit avec un taux γ alors que la cohérence quantique entre les deux états cohérents s'amortit avec un taux beaucoup plus élevé, plus grand que γ par un facteur égal au carré de la distance entre les deux états cohérents (exprimée en unités de la largeur de chaque état cohérent). Lorsque les deux paquets d'ondes associés aux deux états cohérents sont bien séparés, un tel facteur d'amplification est très élevé, ce qui montre la difficulté qu'il y a à observer des cohérences quantiques macroscopiques en présence de dissipation.

B. Rappels de quelques résultats importants

I-5

Pour fixer les idées, nous raisonnons sur une particule cible S subissant des collisions avec un environnement E de particules P beaucoup plus légères que S .

① Les cohérences de S sont détruites à cause des corrélations qui s'établissent entre S et P lors d'une collision

- Etat initial de $S + P$

$$|\Psi_i\rangle = (a|\varphi_1\rangle + b|\varphi_2\rangle) \otimes |X\rangle \quad (1.1)$$

$|\varphi_1\rangle$ et $|\varphi_2\rangle$: 2 états de S localisés en x_1 et x_2

$|X\rangle$: état d'impulsion bien définie de P

- Etat final de $S + P$ après la collision

$$|\Psi_f\rangle = a|\varphi_1\rangle \otimes |X_1\rangle + b|\varphi_2\rangle \otimes |X_2\rangle \quad (1.2)$$

$|X_1\rangle$ ($|X_2\rangle$) état de diffusion de P centré en x_1 (x_2)

- Opérateur densité réduit de S après la collision : c'est la trace de $\rho = |\Psi_f\rangle\langle\Psi_f|$ sur la particule projectile P

La "cohérence" initiale $ab^* = \langle\varphi_1| \text{Tr}_P(|\Psi_i\rangle\langle\Psi_i|) |\varphi_2\rangle$ entre $|\varphi_1\rangle$ et $|\varphi_2\rangle$ devient

$$\langle\varphi_1| \text{Tr}_P(|\Psi_f\rangle\langle\Psi_f|) |\varphi_2\rangle = ab^* \text{Tr}_P(|X_1\rangle\langle X_2|) = ab^* \langle X_2|X_1\rangle \quad (1.3)$$

C'est parce que les états $|X_1\rangle$ et $|X_2\rangle$ ne se recouvrent pas que la cohérence initiale entre $|\varphi_1\rangle$ et $|\varphi_2\rangle$ est réduite.

- Portée des cohérences dans l'état final

$\langle X_2|X_1\rangle$ devient négligeable quand $|x_2 - x_1|$ devient plus grand que la longueur d'onde de de Broglie λ_{DB} de la particule projectile P .

- De manière très schématisée, on peut dire que P "mesure" la position de S . Suivant que S est en x_1 ou en x_2 , l'onde sphérique diffusée est centrée en x_1 ou en x_2 . En observant cette onde diffusée, on peut savoir si S est en x_1 ou en x_2 .

La résolution de la mesure est déterminée par la longueur d'onde de de Broglie des ondes diffusées. On sait bien en optique qu'on ne peut pas résoudre 2 points x_1 et x_2 avec une lumière de longueur d'onde λ si $|x_1 - x_2| < \lambda$.

② Même si $|x_2 - x_1| \ll \lambda_{DB}$, des interactions répétées avec l'environnement font disparaître la cohérence entre $|\varphi_1\rangle$ et $|\varphi_2\rangle$ avec un temps proportionnel à $(x_1 - x_2)^2$

- Si $|x_2 - x_1| \ll \lambda_{DB}$, $|\langle X_2|X_1\rangle|$ est très peu inférieur à 1.

Un produit d'un très grand nombre de tels facteurs apparaissant

lors des collisions successives subies par S finit par donner un nombre voisin de 0 multipliant la cohérence initiale $a b^*$.

Nous présentons maintenant une estimation plus précise du temps de destruction de la cohérence entre $|\varphi_1\rangle$ et $|\varphi_2\rangle$.

- Cohérence globale à une distance u , $F(u)$, pour la particule S , d'opérateur densité σ

$$F(u) = \int dx \langle x+u | \sigma | x \rangle$$

$$= \iiint dx dp dp' \underbrace{\langle x+u | p \rangle}_{(2\pi\hbar)^{-1/2} e^{ip(x+u)/\hbar}} \langle p | \sigma | p' \rangle \underbrace{\langle p' | x \rangle}_{(2\pi\hbar)^{-1/2} e^{-ip'x/\hbar}} \quad (1.4)$$

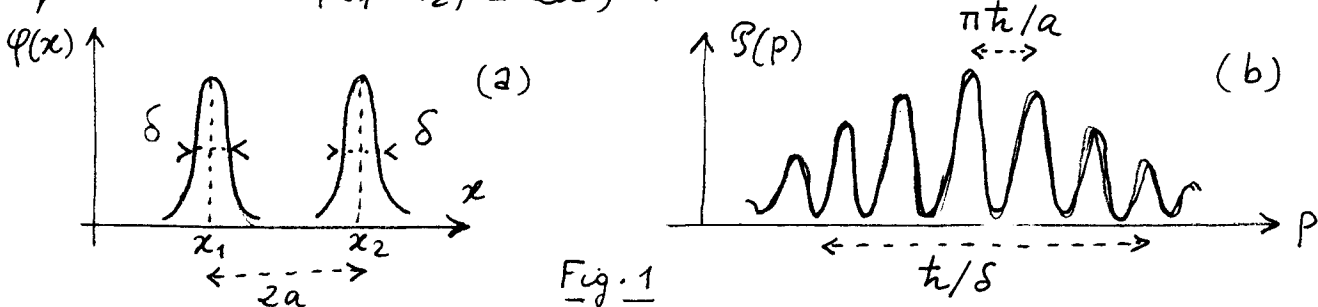
En utilisant $\frac{1}{2\pi\hbar} \int dx e^{i(p-p')x/\hbar} = \delta(p-p')$ (1.5)

on obtient

$$F(u) = \int dp e^{ipu/\hbar} P(p) \quad \text{avec} \quad P(p) = \langle p | \sigma | p \rangle \quad (1.6)$$

$F(u)$ est la transformée de Fourier, à la valeur u , de la distribution d'impulsion $P(p)$

- Allure de $P(p)$ quand la particule S est dans un état $\varphi(x)$ superposition linéaire de 2 états $\varphi_1(x)$ et $\varphi_2(x)$ localisés en x_1 et x_2 (les largeurs δ de φ_1 et φ_2 étant petites devant $|x_1 - x_2| = 2a$).



L'existence de cohérences spatiales entre points distants de $2a$ dans $\varphi(x)$ est responsable d'oscillations rapides en p de période $\pi\hbar/a$ dans $P(p)$

Comprendre comment la cohérence spatiale globale à la distance $2a$ est détruite est donc équivalent à comprendre comment les oscillations rapides de $P(p)$ disparaissent sous l'effet des collisions subies par S .

- Sous l'effet des collisions répétées avec l'environnement, l'impulsion p de S diffuse avec un coefficient de diffusion D . De manière plus précise, si $P(p)$ est une fonction delta en p à $t=0$, cette fonction delta devient, après un temps δt , une fonction de largeur δp telle que

$$\delta p^2 = 2D \delta t \quad (1.7)$$

Or, la distribution initiale $P(p)$, représentée sur la figure 1b,

peut être considérée comme une superposition linéaire de fonctions $\delta(p-p')$ avec des coefficients $P(p')$. Comme chacune de ces fonctions delta s'élargit au cours du temps, les oscillations rapides de la figure 1b auront disparu au bout d'un temps T tel que l'élargissement δp correspondant à T soit de l'ordre de la période $\pi \hbar / a$ des oscillations initiales de $P(p)$. Compte tenu de (1.7), on obtient pour T l'équation

$$2DT \sim (\pi \hbar / a)^2 \tag{1.8}$$

ce qui donne pour le temps, $1/T$, de destruction de cohérence spatiales entre 2 points distants de $2a$

$$\frac{1}{T} \sim \frac{Da^2}{\hbar^2} \tag{1.9}$$

Le temps de destruction des cohérences spatiales entre 2 points séparés d'une distance donnée croît donc comme le carré de cette distance et comme le coefficient de diffusion de l'impulsion de la particule.

- Lien entre le temps $1/T$ de destruction des cohérences spatiales et le temps d'amortissement γ de l'impulsion moyenne de la particule.

Si la particule S est en équilibre thermodynamique à la température, D et γ sont reliés par (théorème fluctuation - dissipation) :

$$D \sim M \gamma k_B T \tag{1.10}$$

En éliminant D entre (1.9) et (1.10), on obtient alors

$$\frac{1}{T} \sim \gamma \frac{a^2 k_B T M}{\hbar^2} \sim \gamma \frac{a^2}{\lambda_T^2} \tag{1.11}$$

où
$$\lambda_T \sim \frac{\hbar}{\sqrt{M k_B T}} \tag{1.12}$$

est la longueur d'onde de de Broglie thermique de la particule à la température T .

Si $a > \lambda_T$, la cohérence spatiale à une distance $2a$ est détruite plus rapidement que l'impulsion moyenne de la particule par un facteur de l'ordre de $(a/\lambda_T)^2$.

③ Quand le couplage avec l'environnement E croît, la position de la particule est de plus en plus "gelée" alors que ses cohérences spatiales sont détruites de plus en plus vite.

- D : coefficient de diffusion de p

D croît si le nombre n de particules projectiles par unité de volume croît

$$D \uparrow \text{ si } n \uparrow \tag{1.13}$$

- D : coefficient de diffusion de x

Pour estimer D , on peut considérer que x effectue une

marche au hasard de pas $(p/M)\gamma^{-1}$ tous les intervalles de temps γ^{-1} . Pendant un temps δt , il y a $\delta t/\gamma^{-1} \sim \gamma \delta t$ pas, et on a donc

$$\delta x^2 \sim \left(\frac{p}{M}\gamma^{-1}\right)^2 \gamma \delta t \sim D \delta t \tag{1.14}$$

avec

$$D \sim \frac{p^2}{M^2\gamma} \sim \frac{kT}{M\gamma} \tag{1.15}$$

puisque $p^2/2M \sim k_B T$. De (1.10) et (1.15), on déduit alors que

$$D \sim \frac{(k_B T)^2}{D} \tag{1.16}$$

- Compte tenu de (1.13) et (1.16), on a donc

$$D \searrow \text{ si } n \nearrow \tag{1.17}$$

- Finalement, dans la base $\{|x\rangle\}$, quand le couplage avec l'environnement croît, T_1 devient de plus en plus long alors que T_2 devient de plus en plus court.

④ Origine de la dissymétrie entre x et p .

- Après une collision transférant l'impulsion $\hbar k$ à S , la cohérence entre p_1 et p_2 devient une cohérence entre $p_1 + \hbar k$ et $p_2 + \hbar k$.

La cohérence globale à une distance donnée $v = p_1 - p_2$ en impulsion est donc peu affectée par les collisions avec l'environnement. Différence importante avec la cohérence globale à une distance $u = x_1 - x_2$ en position.

De même, si $n \nearrow$, l'impulsion de la particule S n'est pas de plus en plus gelée comme la position, mais, au contraire, diffuse de plus en plus vite.

- Nous verrons dans le cours de cette année que la dissymétrie entre les comportements de x et p est due au fait que l'hamiltonien d'interaction H_I entre S et E fait intervenir x et non p . C'est dans la base de l'observable de S couplé à E que les cohérences sont détruites de plus en plus vite quand le couplage $S-E$ croît, alors que les populations sont de plus en plus gelées.

x n'évolue pas à cause de H_I , puisque $[x, H_I] = 0$, mais à cause de l'hamiltonien propre de S , $H_S = p^2/2M$. En fait, x évolue entre 2 collisions. Quand le nombre n de collisions par unité de temps croît, l'environnement E "observe" S de plus en plus fréquemment, ce qui détruit les cohérences spatiales de plus en plus rapidement mais aussi empêche de plus en plus x d'évoluer (paradoxe de Zénon quantique).

① Le modèle de Von Neumann (refs 1-2)

a. Hypothèses simplificatrices

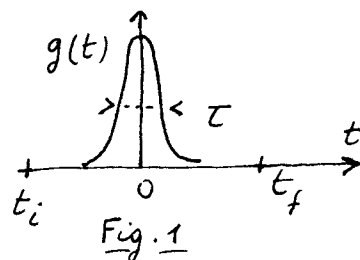
- Système S sur lequel on fait la mesure, d'observables A, B, \dots
Particule P , de masse M , de position X , d'impulsion P , et qui va être considérée comme l'appareil de mesure
- Hamiltonien d'interaction $S-P$

$$H_{SP} = g(t) A P \tag{2.1}$$

A : observable de S

P : impulsion de P

$g(t)$: fonction donnée de t , très centrée autour de $t=0$ et réelle que



$$\int g(t) dt = g$$

(2.2)

On "branche" l'interaction entre S et P pendant un temps très court.

- La durée τ de l'interaction est suffisamment courte pour que, pendant une durée de l'ordre de quelques τ , on puisse négliger l'évolution propre due aux hamiltoniens propres H_S et H_P de S et P .

Par exemple, la masse M de P est suffisamment grande pour qu'on puisse négliger le déplacement de P pendant τ ainsi que l'étalement de son paquet d'ondes.

- l'équation satisfaite par l'opérateur d'évolution $U(t, t_i)$ (t_i : temps initial - voir Fig. 1)

$$i\hbar \frac{d}{dt} U(t, t_i) = g(t) A P U(t, t_i) \tag{2.3}$$

s'intègre alors aisément (A et P commutent entre eux) pour donner à l'instant final t_f

$$U(t_f, t_i) = \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \left(\int_{t_i}^{t_f} g(t) dt \right) A P \right\} = e^{-igAP/\hbar} \tag{2.4}$$

b. Etat du système global après interaction

(i) Cas où l'état initial de $S+P$ est

$$|\psi(t_i)\rangle = |u_n\rangle \otimes |\varphi\rangle \tag{2.5}$$

S est dans l'état propre $|u_n\rangle$ de A de valeur propre a_n (supposée non dégénérée - voir plus loin pour la généralisation)

$$A |u_n\rangle = a_n |u_n\rangle \tag{2.6}$$

P est dans l'état $|\varphi\rangle$, de fonction d'onde $\varphi(x)$, de largeur Δx , localisée autour de $x=0$

- On a alors, compte tenu de (2.4), (2.5) et (2.6)

$$|\psi(t_f)\rangle = U(t_f, t_i) |\psi(t_i)\rangle = |u_n\rangle \otimes |\varphi_n\rangle \quad (2.7)$$

où
$$|\varphi_n\rangle = e^{-ig a_n P/\hbar} |\varphi\rangle \quad (2.8)$$

On reconnaît dans (2.8) l'opérateur de translation $e^{-ig a_n P/\hbar}$ de \mathcal{P} . En effet,

$$\begin{aligned} \varphi_n(x) &= \langle x | \varphi_n \rangle = \langle x | e^{-ig a_n P/\hbar} | \varphi \rangle \\ &= \langle x - g a_n | \varphi \rangle = \varphi(x - g a_n) \end{aligned} \quad (2.9)$$

Après interaction avec \mathcal{S} dans l'état $|u_n\rangle$ où A a la valeur a_n , \mathcal{P} est traduit d'une quantité $g a_n$ (Fig. 2)

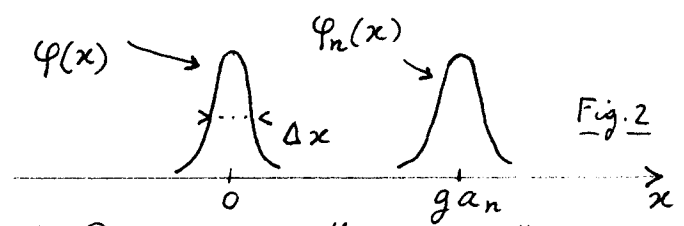


Fig. 2

Si l'on considère la position de \mathcal{P} comme l'"aiguille" d'un appareil de mesure, cette aiguille est centrée sur une valeur, $g a_n$, qui dépend bien de l'état $|u_n\rangle$ dans lequel se trouve \mathcal{S}

(ii) Cas où l'état initial de $\mathcal{S} + \mathcal{P}$ est

$$|\psi(t_i)\rangle = \left(\sum_n c_n |u_n\rangle \right) \otimes |\varphi\rangle \quad (2.10)$$

\mathcal{S} est dans une superposition linéaire d'états propres de A . D'après la linéarité de l'équation de Schrödinger, on a alors, compte tenu de (2.5), (2.7) et (2.8)

$$|\psi(t_f)\rangle = \sum_n c_n |u_n\rangle \otimes |\varphi_n\rangle \quad (2.11)$$

c. Propriétés importantes de l'état final du système global

- L'état final (2.11) reflète l'existence de corrélations apparues entre \mathcal{S} et \mathcal{P} après l'interaction : à chaque état $|u_n\rangle$ de \mathcal{S} est associé un état $|\varphi_n\rangle$ de \mathcal{P} . Si l'on suppose que la fonction d'onde initiale $\varphi(x)$ de \mathcal{P} est suffisamment étroite, c.-à-d. si

$$\Delta x \ll g |a_n - a_m| \quad \text{si } n \neq m \quad (2.12)$$

les fonctions d'ondes $\varphi_n(x)$ et $\varphi_m(x)$ ne se recouvrent pas (si $n \neq m$), de sorte que

$$\langle \varphi_n | \varphi_m \rangle = \delta_{nm} \quad (2.13)$$

La corrélation entre \mathcal{S} et \mathcal{P} est alors parfaite. A 2 états orthogonaux $|u_n\rangle$ et $|u_m\rangle$ de \mathcal{S} sont associés 2 états orthogonaux de \mathcal{P} .

- Les probabilités d'occupation des états $|u_n\rangle$ de \mathcal{S} , égales à $|c_n|^2$ d'après (2.10) avant interaction, demeurent égales à $|c_n|^2$ après interaction d'après (2.11). C'est en ce sens que

l'opération étudiée plus haut peut être considérée comme une mesure idéale de A (par opposition à des mesures non-idéales comme la détection d'un photon par effet photo-électrique qui détruit le photon détecté).

- L'état final (2.11) est une superposition linéaire de états $|u_n\rangle \otimes |\varphi_n\rangle$ avec des amplitudes c_n , et non un mélange statistique de ces mêmes états avec des poids $|c_n|^2$.
L'un des objets du cours de cette année est précisément de discuter les manifestations physiques de l'existence de ces cohérences quantiques entre $|\varphi_m\rangle \otimes |u_m\rangle$ et $|\varphi_n\rangle \otimes |u_n\rangle$ et de préciser les conditions dans lesquelles il est légitime de les ignorer.

d. Application des postulats de la mesure au système global

- Une fois que S et P ont interagi et que l'état du système global est passé de (2.10) à (2.11), on observe la position X de la particule P et on utilise les postulats de la mesure pour calculer les probabilités des divers résultats possibles.
- Si la largeur Δx de $\varphi(x)$ est suffisamment petite, les états $|\varphi_n\rangle$ peuvent être considérés comme des états propres approchés de X , orthogonaux les uns aux autres (voir (2.13)).
La probabilité de trouver à t_f P dans l'état $|\varphi_n\rangle$ (c'est à dire l'aiguille dans la position q_n) est égale ~~à~~ à la norme de la projection de $|\psi(t_f)\rangle$ dans le sous-espace sous-tendu par $|\varphi_n\rangle$, c'est à dire $|c_n|^2 \langle u_n | u_n \rangle = |c_n|^2$.
- On trouve le même résultat que si l'on appliquait les postulats de la mesure à S tout seul dans l'état initial $\sum_n c_n |u_n\rangle$ et qu'on posait la question : quelle est la probabilité de trouver a_n quand on mesure A sur S dans cet état?
- La position X de P apparaît donc bien comme la position de l'aiguille d'un appareil mesurant A , puisque la probabilité de trouver cette aiguille centrée en q_n après interaction entre S et P est égale à la probabilité $|c_n|^2$ de trouver a_n pour A avant l'interaction $S-P$.

En d'autres termes, la mesure de A sur S donne le même résultat (au facteur d'échelle q près) que la mesure de X sur P une fois que S et P ont interagi.

e. Quelques généralisations

(i) Valeurs propres dégénérées pour A

$$A |u_n^\alpha\rangle = a_n |u_n^\alpha\rangle \quad (2.14)$$

α indice de dégénérescence

$$\langle u_n^\alpha | u_m^\beta \rangle = \delta_{nm} \delta_{\alpha\beta} \quad (2.15)$$

- Les formules (2.5) et (2.7), (2.10) et (2.11) sont alors modifiées comme suit

$$|\psi(t_i)\rangle = |u_n^\alpha\rangle \otimes |\varphi\rangle \longrightarrow |\psi(t_f)\rangle = |u_n^\alpha\rangle \otimes |\varphi_n\rangle$$

$$|\psi(t_i)\rangle = \left(\sum_n \sum_\alpha c_n^\alpha |u_n^\alpha\rangle \right) \otimes |\varphi\rangle \longrightarrow \sum_n \left(\sum_\alpha c_n^\alpha |u_n^\alpha\rangle \right) \otimes |\varphi_n\rangle \quad (2.17)$$

où $|\varphi_n\rangle$ est toujours donné par (2.8)

- La probabilité de trouver à t_f , \mathcal{P} dans l'état $|\varphi_n\rangle$ (c'est à dire l'aiguille centrée en g_n) est égale à la norme de la projection de $|\psi(t_f)\rangle$ sur le sous espace sous tendu par $|\varphi_n\rangle$, c'est à dire à $\sum_n |c_n^\alpha|^2$. On retrouve le même résultat que pour la probabilité de trouver a_n quand on mesure A sur \mathcal{S} dans l'état initial $\sum_n \sum_\alpha c_n^\alpha |u_n^\alpha\rangle$.

(ii) Définition générale d'une opération de mesure idéale

- Système \mathcal{S} . Le même que plus haut. Equation (2.14)
- Appareil de mesure \mathcal{M} . Plus général que la particule \mathcal{P} considérée plus haut. Etat initial $|\varphi\rangle$.

- Interaction $\mathcal{S}-\mathcal{M}$ de durée très brève, telle que, si \mathcal{S} est initialement dans un état propre $|u_n^\alpha\rangle$ de A , le système $\mathcal{S}+\mathcal{M}$ se retrouve après interaction dans l'état

$$|\psi(t_i)\rangle = |u_n^\alpha\rangle \otimes |\varphi\rangle \longrightarrow |\psi(t_f)\rangle = |u_n^\alpha\rangle \otimes |\varphi_n\rangle \quad (2.18)$$

L'état de \mathcal{S} n'a pas changé, alors que l'état final $|\varphi_n\rangle$ de \mathcal{M} dépend de a_n . Cette corrélation est parfaite

$$\langle \varphi_n | \varphi_m \rangle = \delta_{nm} \quad (2.19)$$

- D'après la linéarité de l'équation de Schrödinger, on a alors

$$\left(\sum_n \sum_\alpha c_n^\alpha |u_n^\alpha\rangle \right) \otimes |\varphi\rangle \longrightarrow \sum_n \left(\sum_\alpha c_n^\alpha |u_n^\alpha\rangle \right) \otimes |\varphi_n\rangle \quad (2.20)$$

② Succession de 2 opérations de mesure idéales sur \mathcal{S} faites avec 2 appareils différents \mathcal{M}_A et \mathcal{M}_B (ref. 3)

a. Problème étudié - Hypothèses simplificatrices.

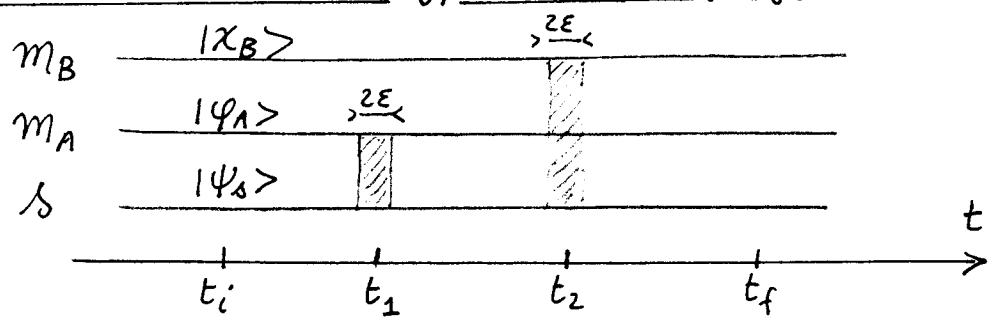


Fig. 3

- A l'instant initial t_i , \mathcal{S} est dans $|\psi_S\rangle$, \mathcal{M}_A dans $|\varphi_A\rangle$, \mathcal{M}_B dans $|X_B\rangle$ (voir Fig. 3)

- L'interaction entre M_A et S est "branchée" entre $t_1 - \epsilon$ et $t_1 + \epsilon$. Elle correspond à une mesure idéale de l'observable A de S effectuée à l'instant t_1 . De même, l'interaction entre M_B et S est "branchée" entre $t_2 - \epsilon$ et $t_2 + \epsilon$ (avec $t_2 - t_1 \gg 2\epsilon$) pour effectuer à t_2 une mesure idéale de B sur S (Voi Fig. 3)
- Pour simplifier l'écriture, on néglige l'évolution propre de M_A et M_B (on pourrait aisément en tenir compte). M_A (M_B) n'évolue donc qu'entre $t_1 - \epsilon$ et $t_1 + \epsilon$ ($t_2 - \epsilon$ et $t_2 + \epsilon$) par suite de l'interaction avec S . Par contre, on tient compte de l'évolution propre de S entre t_i et t_1 , t_1 et t_2 , t_2 et t_f , tout en négligeant l'évolution propre de S pendant les durées 2ϵ de chaque interaction.
Toujours pour simplifier l'écriture, on suppose les valeurs propres a_n et b_q de A et B non dégénérées. Par contre, A et B ne commutent pas nécessairement et peuvent avoir des vecteurs propres $|u_n\rangle$ et $|v_q\rangle$ différents

$$A|u_n\rangle = a_n|u_n\rangle \quad B|v_q\rangle = b_q|v_q\rangle \quad (2.21)$$

- Dans ce qui suit, nous allons calculer l'évolution du système global $S + M_A + M_B$ entre t_i et t_f (§ 2 b), puis, en appliquant les postulats de la mesure à M_A et M_B à t_f , en déduire les probabilités d'observer les "aiguilles" de M_A et M_B dans des positions données. Comme les mesures sont idéales, nous en déduirons toutes les probabilités concernant les mesures de A à t_1 et B à t_2 (§ 2 c). Nous pouvons alors, à partir de cette étude globale sur $S + M_A + M_B$, retrouver la "réduction du paquet d'ondes" qui est généralement postulée quand on considère uniquement S , sans inclure dans le système étudié M_A et M_B (§ 3)

b. Calcul de l'état final du système global $S + M_A + M_B$

- On part de
$$|\Psi(t_i)\rangle = |\Psi_S\rangle \otimes |\varphi_A\rangle \otimes |\chi_B\rangle \quad (2.22)$$

- Entre t_i et $t_1 - \epsilon$, seul S évolue. Si U_S est l'opérateur d'évolution propre de S

$$|\Psi(t_1 - \epsilon)\rangle = (U_S(t_1 - \epsilon, t_i)|\Psi_S\rangle) \otimes |\varphi_A\rangle \otimes |\chi_B\rangle \quad (2.23)$$

Développons l'état de S à l'instant $t_1 - \epsilon$ sur la base $\{|u_n\rangle\}$ des états propres de A

$$U_S(t_1 - \epsilon, t_i)|\Psi_S\rangle = \sum_n |u_n\rangle \langle u_n | U_S(t_1 - \epsilon, t_i) | \Psi_S \rangle \quad (2.24)$$

- Entre $t_1 - \epsilon$ et $t_1 + \epsilon$, M_B n'évolue toujours pas. Comme l'interaction $S - M_A$ correspond à une opération de mesure idéale, le système $S + M_A$, qui est, d'après (2.23) et (2.24), dans l'état $\sum_n c_n |u_n\rangle \otimes |\varphi_A\rangle$ à l'instant $t_1 - \epsilon$ (avec $c_n = \langle u_n | U_S(t_1 - \epsilon, t_i) | \Psi_S \rangle$), se retrouve à l'instant $t_1 + \epsilon$ dans l'état $\sum_n c_n |u_n\rangle \otimes |\varphi_A^n\rangle$ où $|\varphi_A^n\rangle$ est l'état de M_A corrélié avec $|u_n\rangle$ (voir (2.10) et (2.11)). On peut donc écrire

$$|\Psi(t_1 + \epsilon)\rangle = \sum_n \langle u_n | U_S(t_1 - \epsilon, t_i) | \Psi_S \rangle |u_n\rangle \otimes |\varphi_A^n\rangle \otimes |\chi_B\rangle \quad (2.25)$$

On suppose les états $\{|\varphi_A^n\rangle\}$ orthonormés (corrélation parfaite - voir (2.19))

- Entre $t_1 + \epsilon$ et $t_2 - \epsilon$, seul S évolue. Il faut donc faire agir sur (2.25) l'opérateur $U_S(t_2 - \epsilon, t_1 + \epsilon)$. En développant, à l'instant t_2 , le vecteur $U_S(t_2 - \epsilon, t_1 + \epsilon) |u_n\rangle$ sur la base $\{|v_q\rangle\}$ des états propres de B , on obtient

$$|\psi(t_2 - \epsilon)\rangle = \sum_n \sum_q \langle v_q | U_S(t_2 - \epsilon, t_1 + \epsilon) | u_n \rangle \langle u_n | U_S(t_1 - \epsilon, t_i) | \psi_S \rangle \times |v_q\rangle \otimes |\varphi_A^n\rangle \otimes |\chi_B\rangle \quad (2.26)$$

- Entre $t_2 - \epsilon$ et $t_2 + \epsilon$, seuls S et M_B évoluent. M_A reste "spectateur". En utilisant le fait que l'interaction $S-M_B$ correspond à une mesure idéale et en introduisant les états $|\chi_B^q\rangle$ de M_B corrélés (parfaitement) avec $|v_q\rangle$, on obtient

$$|\psi(t_2 + \epsilon)\rangle = \sum_n \sum_q \langle v_q | U_S(t_2, t_1) | u_n \rangle \langle u_n | U_S(t_1, t_i) | \psi_S \rangle \times |v_q\rangle \otimes |\varphi_A^n\rangle \otimes |\chi_B^q\rangle \quad (2.27)$$

On a remplacé ϵ par 0 dans les opérateurs d'évolution U_S figurant sur la 1^{ère} ligne de (2.26), puisqu'on suppose ϵ suffisamment petit pour que l'évolution propre de S pendant un temps ϵ soit négligeable.

- Enfin, entre $t_2 + \epsilon$ et t_f , seul S évolue, et il suffirait d'appliquer $U_S(t_f, t_2)$ à $|v_q\rangle$ dans (2.27) pour obtenir $|\psi(t_f)\rangle$.

C. Calcul de quelques probabilités relatives aux résultats enregistrés par M_A et M_B

Comme M_A et M_B n'évoluent pas après $t_2 + \epsilon$, il suffit d'utiliser l'expression (2.27) de l'état du système global à $t_2 + \epsilon$

(i) Probabilité d'observer a_n sur M_A à t_1 et b_q sur M_B à t_2

- Après les 2 interactions en t_1 et t_2 , on observe ^{à l'instant $t_2 + \epsilon$} les "aiguilles" de M_A et M_B et on utilise les postulats de la mécanique quantique pour calculer la probabilité de "lire" les résultats a_n sur M_A et b_q sur M_B (plus exactement $g a_n$ et $g' b_q$ où g et g' sont des constantes analogues à celle introduite en (2.2)). Cette probabilité n'est autre que la probabilité de trouver M_A dans $|\varphi_A^n\rangle$ et M_B dans $|\chi_B^q\rangle$ à $t_2 + \epsilon$, c'est à dire encore la norme de $P_A^n P_B^q |\psi(t_2 + \epsilon)\rangle$ où $P_A^n = |\varphi_A^n\rangle \langle \varphi_A^n|$ et $P_B^q = |\chi_B^q\rangle \langle \chi_B^q|$ sont les projecteurs sur les états $|\varphi_A^n\rangle$ et $|\chi_B^q\rangle$. Enfin, comme M_A n'a pas évolué depuis $t_1 + \epsilon$, la probabilité de lire a_n sur M_A à $t_2 + \epsilon$ est la même qu'à $t_1 + \epsilon$. On en déduit, en utilisant (2.27) et le fait que $(P_A^n P_B^q)^2 = P_A^n P_B^q = |\varphi_A^n \chi_B^q\rangle \langle \varphi_A^n \chi_B^q|$

$$\begin{aligned} \text{Proba}(\text{lire } a_n \text{ sur } M_A \text{ à } t_1 + \epsilon \text{ et } b_q \text{ sur } M_B \text{ à } t_2 + \epsilon) &= \\ &= \langle \psi(t_2 + \epsilon) | \varphi_A^n, \chi_B^q \rangle \langle \varphi_A^n, \chi_B^q | \psi(t_2 + \epsilon) \rangle = \\ &= | \langle v_q | U_S(t_2, t_1) | u_n \rangle \langle u_n | U_S(t_1, t_i) | \psi_S \rangle |^2 \end{aligned} \quad (2.28)$$

- Cette probabilité, relative à des résultats de lecture sur M_A et M_B est ainsi exprimée en fonction d'éléments de matrices relatifs au seul système S . Nous reviendrons plus loin sur ce point (§ 3).

(ii) Probabilité d'observer b_q sur M_B à t_2 sachant que l'on a observé a_n sur M_A à t_1 .

- Calculons tout d'abord la probabilité de lire a_n sur M_A à $t_1 + \epsilon$. D'après les postulats de la mécanique, et en écrivant pour simplifier $\mathcal{P}(a_n, t_1)$ pour Proba (lire a_n sur M_A à $t_1 + \epsilon$), on obtient, compte tenu de (2.25)

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(a_n, t_1) &= \langle \psi(t_1 + \epsilon) | \varphi_A^n \rangle \langle \varphi_A^n | \psi(t_1 + \epsilon) \rangle \\ &= |\langle u_n | U_S(t_1, t_i) | \psi_S \rangle|^2 \end{aligned} \quad (2.29)$$

- Par ailleurs, d'après la définition même de probabilité conditionnelle, on peut écrire

$$\mathcal{P}(a_n, t_1 \text{ et } b_q, t_2) = \mathcal{P}(a_n, t_1) \mathcal{P}(b_q, t_2 / a_n, t_1) \quad (2.30)$$

où $\mathcal{P}(a_n, t_1 \text{ et } b_q, t_2)$ est la probabilité double (2.28), $\mathcal{P}(a_n, t_1)$ la probabilité simple (2.29) et $\mathcal{P}(b_q, t_2 / a_n, t_1)$ la probabilité conditionnelle que l'on cherche précisément à calculer ici et qui vaut donc, compte tenu de (2.28), (2.29) et (2.30)

$$\mathcal{P}(b_q, t_2 / a_n, t_1) = |\langle v_q | U_S(t_2, t_1) | u_n \rangle|^2 \quad (2.31)$$

(iii) Probabilité d'observer b_q sur M_B à t_2 , quel que soit le résultat enregistré sur M_A à t_1 .

- Les 2 interactions $S-M_A$ et $S-M_B$ ont bien lieu à t_1 et t_2 mais on ne lit pas le résultat enregistré par M_A . On s'intéresse seulement à la probabilité de lire b_q sur M_B à $t_2 + \epsilon$ qu'on notera $\mathcal{P}(b_q, t_2; M_A \text{ non lu})$. D'après les postulats de la mesure

$$\mathcal{P}(b_q, t_2; M_A \text{ non lu}) = \langle \psi(t_2 + \epsilon) | \chi_B^q \rangle \langle \chi_B^q | \psi(t_2 + \epsilon) \rangle \quad (2.32)$$

En reportant (2.27) dans (2.32) et en utilisant le fait que les états $|\varphi_A^n\rangle$ sont orthonormés, on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(b_q, t_2; M_A \text{ non lu}) &= \sum_n |\langle v_q | U_S(t_2, t_1) | u_n \rangle \langle u_n | U_S(t_1, t_i) | \psi_S \rangle|^2 \\ &= \sum_n \mathcal{P}(a_n, t_1 \text{ et } b_q, t_2) = \sum_n \mathcal{P}(a_n, t_1) \mathcal{P}(b_q, t_2 / a_n, t_1) \end{aligned} \quad (2.33)$$

Bien noter que la 1^{ère} ligne de (2.33) est une somme de carrés et non le carré d'une somme.

- Il est intéressant de comparer $\mathcal{P}(b_q, t_2; M_A \text{ non lu})$ à $\mathcal{P}(b_q, t_2; \text{sans } M_A)$ qui est la probabilité de lire b_q sur M_B à $t_2 + \epsilon$ en l'absence de tout appareil M_A interagissant avec S entre t_i et t_1 . Un raisonnement analogue à celui conduisant à (2.29) donne

$$\mathcal{P}(b_q, t_2; \text{sans } M_A) = |\langle v_q | U_S(t_2, t_i) | \psi_S \rangle|^2 \quad (2.34)$$

En utilisant $U_S(t_2, t_i) = U_S(t_2, t_1) U_S(t_1, t_i)$ et en insérant la relation de fermeture $\sum_n |u_n\rangle\langle u_n| = \mathbb{1}$ entre les 2 U_S , on obtient

$$\mathcal{P}(b_q, t_2; \text{sans } M_A) = \left| \sum_n \langle v_q | U_S(t_2, t_1) | u_n \rangle \langle u_n | U_S(t_1, t_i) | \psi_s \rangle \right|^2 \quad (2.35)$$

A la différence de (2.33), (2.35) est le carré d'une somme et non une somme de carrés

En d'autres termes, même si M_A n'est pas eu, l'interaction $S-M_A$ à l'instant t_1 fait disparaître des effets d'interférence entre "chemins" passant par des états différents $|u_n\rangle$ à t_1 , effets qui existent en l'absence de M_A .

Remarque

Si l'on répète la mesure de A à t_1 et celle de B à t_2 sur un très grand nombre de systèmes identiques tous dans le même état initial $|\psi_s(t_i)\rangle$, la valeur moyenne du produit des résultats observés est

$$\sum_n \sum_q a_n b_q \mathcal{P}(a_n, t_1 \text{ et } b_q, t_2) \quad (2.36)$$

En utilisant (2.28) et $A = \sum_n a_n |u_n\rangle\langle u_n|$, $B = \sum_q b_q |v_q\rangle\langle v_q|$, on peut mettre (2.36) sous forme d'une fonction de corrélation, c-à-d sous forme d'une valeur moyenne dans $|\psi_s(t_1)\rangle$ d'un produit d'opérateurs de S pris, dans le point de vue de Heisenberg, à des instants différents (voir M. Goldberger and K. Watson, Phys. Rev. 134, B 919 (1964)).

③ La réduction du paquet d'ondes

a. Nouvel éclairage apporté par l'approche globale précédente

- Deux types de postulats sur la mesure sont généralement utilisés quand on raisonne sur le système observé S seul, sans inclure dans l'analyse, comme nous l'avons fait ci-dessus, l'évolution des appareils de mesure $M_A, M_B \dots$ qui interagissent avec S.

Postulat I sur la probabilité $\mathcal{P}(a_n)$ d'observer un résultat donné a_n
Fait intervenir la valeur moyenne du projecteur $P_n = |u_n\rangle\langle u_n|$ sur le sous espace propre correspondant à a_n

$$\mathcal{P}(a_n) = \langle \psi | P_n | \psi \rangle \text{ ou plus généralement } \mathcal{P}(a_n) = \text{Tr } \rho P_n \quad (2.37)$$

Postulat II sur l'état du système juste après une mesure (idéale) qui a donné a_n . C'est le fameux postulat de réduction du paquet d'ondes

$$|\psi\rangle \rightarrow \frac{P_n |\psi\rangle}{\sqrt{\langle \psi | P_n | \psi \rangle}} \text{ ou plus généralement } \rho \rightarrow \frac{P_n \rho P_n}{\text{Tr } \rho P_n} \quad (2.38)$$

- Par exemple, pour calculer la probabilité $\mathcal{P}(b_q)$ lors d'une mesure de B à t_2 sachant que l'on a trouvé a_n lors d'une mesure de A à l'instant $t_1 < t_2$, on utilise habituellement le raisonnement suivant :

Puisque l'on a trouvé a_n à l'instant t_1 , l'état de S juste après cette mesure est, d'après le postulat II, $|u_n\rangle$.

Entre t_1 et t_2 , S évolue et son état est devenu à t_2 $|\psi_s(t_2)\rangle = U_S(t_2, t_1) |u_n\rangle$. Si à t_2 on mesure B, la probabilité de trouver b_q est, d'après le postulat I

$$\mathcal{P}(b_q, t_2 / a_n, t_1) = \langle \psi_s(t_2) | v_q \rangle \langle v_q | \psi_s(t_2) \rangle = |\langle v_q | U_S(t_2, t_1) | u_n \rangle|^2 \quad (2.39)$$

- Plus haut, nous avons obtenu le même résultat (voir (2.31)) en étudiant l'évolution du système global $S + M_A + M_B$ et en appliquant uniquement le postulat I, sans jamais utiliser le postulat II. En effet le résultat (2.31) a été déduit des probabilités (2.28) et (2.29), qui sont analogues à (2.37), et de la définition d'une probabilité conditionnelle.

Ainsi, si l'on inclut dans le système global étudié M_A et M_B , on n'a plus besoin du postulat de réduction du paquet d'ondes pour décrire l'état de S après la 1^{ère} mesure. Les résultats obtenus en appliquant uniquement le postulat I au système global $S + M_A + M_B$ coïncident avec ceux obtenus en appliquant les postulats I et II au seul système S . Le postulat II n'est donc pas aussi fondamental que le postulat I. Il permet essentiellement de faire l'économie d'une description globale de $S + M_A + M_B$ et de raisonner uniquement sur S .

b. Etat de S après une mesure de M_A non lue

- Dans la présentation habituelle où seul S est considéré, le raisonnement est le suivant :

Après une mesure de A ayant donné a_n , dont la probabilité est $P(a_n) = \text{Tr } \rho P_n$ (postulat I, voir (2.37)), l'état du système S est devenu $\rho_n = P_n \rho P_n / \text{Tr } \rho P_n = P_n \rho P_n / P(a_n)$ (postulat II, voir (2.38)). Si l'on n'observe pas le résultat obtenu, on peut seulement dire que, après la mesure, l'état de S est ρ_n avec une probabilité $P(a_n)$, $\rho_{n'}$ avec une probabilité $P(a_{n'})$, Il s'agit là de la définition même d'un mélange statistique d'états, de sorte que l'état ρ' de S après la mesure non lue de A s'écrit

$$\rho \xrightarrow[\text{non lue}]{\text{Mesure de } A} \rho'$$

$$\rho' = \sum_n P_n P(a_n) = \sum_n \frac{P_n \rho P_n}{P(a_n)} P(a_n) = \sum_n P_n \rho P_n \quad (2.40)$$

ρ' s'obtient donc à partir de ρ en ne gardant que les blocs diagonaux de ρ à l'intérieur de chaque sous-espace propre de A . Toutes les cohérences quantiques entre états de valeurs propres a_n et $a_{n'}$ différentes de A ont été détruites par la mesure de A , même si cette mesure n'est pas lue.

- Appliquons maintenant l'analyse globale du § 2 à un tel problème.

Nous connaissons l'état (2.25) du système global $S + M_A + M_B$ à l'instant $t_1 + \epsilon$, c'est à dire après l'interaction $S - M_A$. Cet état, qui est une superposition linéaire d'états et non un mélange statistique d'états, a été obtenu par résolution de l'équation de Schrödinger de $S + M_A$ entre $t_1 - \epsilon$ et $t_1 + \epsilon$ (voir § 1 ci-dessus). Nous n'avons utilisé aucun postulat sur la mesure (ni I, ni II) puisque nous n'observons pas M_A .

Nous allons utiliser maintenant (2.25) pour faire des prévisions de résultats de mesure faisant intervenir des appareils

autres que M_A . En d'autres termes, une fois que S et M_A ont interagis à t_1 , on ne s'intéresse plus à M_A et on suppose que S et M_A n'interagissent plus à nouveau. Toutes les prévisions concernant des mesures faites après t_1 par des appareils M_B autres que M_A seront d'après (2.37) données par des valeurs moyennes d'observables telles que $G_B \otimes \mathbb{I}_A$ où G_B est une observable de M_B et \mathbb{I}_A l'opérateur identité de M_A . Pour calculer ces probabilités, nous pouvons alors nous contenter d'utiliser la trace sur M_A de l'opérateur densité de $S+M_A$ associé à (2.25)

$$\rho' = \text{Tr}_{M_A} \rho_{S+M_A}(t_1 + \epsilon) \quad (2.41)$$

A partir de (2.25) et (2.41), on obtient alors immédiatement, en utilisant l'orthogonalité des états $\{|\varphi_A^n\rangle\}$

$$\begin{aligned} \rho' &= \sum_n \sum_{n'} \langle u_n | U_S(t_1, t_i) | \psi_S \rangle \langle \psi_S | U_S^\dagger(t_1, t_i) | u_{n'} \rangle \underbrace{\text{Tr}_{M_A} |\varphi_A^n\rangle \langle \varphi_A^{n'}|}_{= \langle \varphi_A^n | \varphi_A^{n'} \rangle = \delta_{nn'}} \times \\ &\quad \times |u_n\rangle \langle u_{n'}| \otimes |X_B\rangle \langle X_B| \\ &= |X_B\rangle \langle X_B| \otimes \sum_n | \langle u_n | U_S(t_1, t_i) | \psi_S \rangle |^2 |u_n\rangle \langle u_n| \\ &= |X_B\rangle \langle X_B| \otimes \sum_n P_n \rho_S(t_1) P_n \end{aligned} \quad (2.42)$$

On retrouve bien que pour toutes les mesures ultérieures qui ne font plus intervenir M_A , on peut considérer que l'état de S après la mesure non lue de M_A est donné par le mélange statistique d'états (2.40)

- Le calcul précédent montre clairement que, si les cohérences quantiques de S entre $|u_n\rangle$ et $|u_{n'}\rangle$ (avec $n \neq n'$) sont détruites après la mesure non lue de M_A , c'est parce que l'interaction $S-M_A$ a corrélié $|u_n\rangle$ et $|u_{n'}\rangle$ à des états orthogonaux de M_A $|\varphi_A^n\rangle$ et $|\varphi_A^{n'}\rangle$. Les amplitudes quantiques associées à S dans $|u_n\rangle$ et S dans $|u_{n'}\rangle$ n'interfèrent plus car, en consultant M_A , on pourrait en principe savoir si S est dans $|u_n\rangle$ ou $|u_{n'}\rangle$.

Notons cependant que, si la cohérence réduite de S entre $|u_n\rangle$ et $|u_{n'}\rangle$ est nulle, il n'en est pas de même pour $S+M_A$ qui, d'après (2.25), est (après l'interaction $S-M_A$) dans une superposition linéaire des états $|u_n\rangle \otimes |\varphi_A^n\rangle$ et $|u_{n'}\rangle \otimes |\varphi_A^{n'}\rangle$. Si S et M_A interagissaient de nouveau, on obtiendrait des résultats erronés si l'on négligeait ces cohérences quantiques qui décrivent les corrélations apparues entre S et M_A à l'issue de leur interaction (voir cours suivant).

Références

- (1) J. Von Neumann, *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics* Princeton University Press (1955), chapitre VI.
Reproduit dans *Quantum Theory and Measurement*, edited by J.A. Wheeler and W.H. Zurek, Princeton University Press (1983), p. 619
- (2) B. d'Espagnat, *Conceptual Foundations of Quantum Mechanics*, Benjamin 1971, 2^e édition 1976
- (3) La présentation de ce paragraphe résulte de discussions avec Franck Lalœ

Buts de ce cours

- Montrer sur quelques exemples simples que les cohérences quantiques qui apparaissent entre états du système global (système S + appareil de mesure M) ne peuvent pas être ignorées car elles peuvent donner naissance à des effets d'interférence quantiques observables.
- Montrer que ces effets d'interférence quantique disparaissent si on essaie d'observer par quel chemin le système $S+M$ passe.

① Cas où le système S interagit plusieurs fois avec le même appareil de mesure M

a. Le modèle de Bell-Nauenberg (ref. 1)

- Revenons au modèle de Von Neumann (cours II, § 1) où l'interaction entre S et une particule P déplace P d'une quantité proportionnelle aux valeurs propres d'une observable A de S . Nous supposons ici le spectre de A continu

$$A|a\rangle = a|a\rangle \quad (3.1)$$

Si S est dans $|a\rangle$, P est déplacé de $ga = \hat{a}$ (où g est une constante)

$$|a\rangle \otimes \varphi(x) \rightarrow |a\rangle \otimes \varphi(x - \hat{a}) \quad (3.2)$$

- A l'instant initial $t_i < 0$ (voir Fig. 1), S est dans l'état $|\psi_s\rangle$, P dans un état très localisé autour de $x=0$, que nous assimilerons à une fonction $\delta(x)$. S et P interagissent 3 fois, au voisinage de $t=0$, $t=T$, $t=2T$ (Fig. 1). Quel est l'état de $S+P$ après la dernière interaction ?

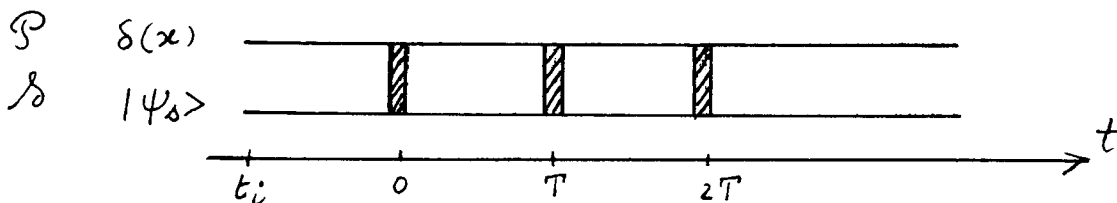


Fig. 1

- Considérons un chemin particulier dans l'évolution de $S+P$, entre t_i et $2T+\epsilon$, où S passe dans les états $|a'\rangle$ à $t=0$, $|a''\rangle$ à $t=T$, $|a'''\rangle$ à $t=2T$. L'amplitude correspondante pour S est

$$\underbrace{\langle a''' | U_S(2T, T) | a'' \rangle}_{f(a''', a'')} \underbrace{\langle a'' | U_S(T, 0) | a' \rangle}_{f(a'', a')} \underbrace{\langle a' | U_S(0, t_i) | \psi_s \rangle}_{c(a')} \quad (3.3)$$

que nous noterons plus simplement $f(a''', a'') f(a'', a') c(a')$ (en supposant que $U_S(t_2, t_1)$ ne dépend que de $t_2 - t_1$).

Quelle est l'évolution correspondante de P ? Comme dans le cours II (§ 2), nous supposons que P n'évolue que pendant une interaction avec S . Donc, après l'interaction en $t=0$ où S se trouve dans l'état $|a'\rangle$, P passe de $\delta(x)$ à $\delta(x - \hat{a}')$. Puis P passe de $\delta(x - \hat{a}')$ à $\delta(x - \hat{a}' - \hat{a}'')$ après l'interaction avec S dans $|a''\rangle$ à $t=T$, et enfin de $\delta(x - \hat{a}' - \hat{a}'' - \hat{a}''')$ après la dernière interaction en $t=2T$ avec S qui finit dans l'état $|a'''\rangle$.

Il suffit alors de sommer sur tous les chemins possibles pour obtenir l'état de $S+P$ après la dernière interaction.

$$|\psi(2T+\epsilon)\rangle = \sum_{a'} \sum_{a''} \sum_{a'''} f(a''', a'') f(a'', a') c(a') |a'''\rangle \otimes \delta(x - \hat{a}' - \hat{a}'' - \hat{a}''')$$

Faisons enfin le changement de variables $\hat{a} = \hat{a}' + \hat{a}'' + \hat{a}'''$. Il vient

$$|\psi(2T+\epsilon)\rangle = \sum_{a'} \sum_{a''} \sum_a f(a''', a - a' - a''') f(a - a' - a''', a') c(a') |a'''\rangle \otimes \delta(x - \hat{a}) \quad (3.5)$$

b. Probabilité de lire un résultat donné \hat{a} sur \mathcal{P} à l'instant final

- Après les 3 interactions, à $t = 2T + \epsilon$, on observe \mathcal{P} et on calcule la probabilité de trouver \mathcal{P} localisé en \hat{a} . D'après le postulat I sur la mesure (voir (2.37)), cette probabilité est égale à la norme du vecteur multipliant $\delta(x - \hat{a})$ dans (3.5)

$$\mathcal{P}(\hat{a}) = \sum_{a'''} \left| \sum_{a'} f(a''', a - a' - a''') f(a - a' - a''', a') c(a') \right|^2 \quad (3.6)$$

- Nous allons montrer tout d'abord que le résultat obtenu en (3.6) reflète l'existence d'effets d'interférence quantique.

c. Existence d'effets d'interférence quantique

- Dans (3.6), a est fixé puisqu'on s'intéresse précisément à cette position finale de \mathcal{P} . Si l'état final de \mathcal{S} est $|a'''\rangle$, \mathcal{P} est donc, juste avant $2T$, localisé en $\hat{a} - \hat{a}'''$. Comme \mathcal{P} était initialement en 0, les 2 interactions à $t=0$ et $t=T$ doivent donc lui avoir donné à ces 2 instants des déplacements \hat{a}' et \hat{a}'' tels que $\hat{a}' + \hat{a}'' = \hat{a} - \hat{a}'''$. Il existe donc plusieurs chemins conduisant au même état final de $\mathcal{S} + \mathcal{P}$, $|a'''\rangle \otimes \delta(x - \hat{a})$ et différant par les états intermédiaires $|a'\rangle$ et $|a''\rangle$ par lesquels \mathcal{S} passe à $t=0$ et $t=T$. Ce sont tous les chemins pour lesquels $a' + a'' = a - a'''$, c'est à dire pour lesquels $a'' = a - a' - a'''$.

- Or, on voit sur (3.6) que tous ces chemins interfèrent. Pour a''' fixé, on a en effet en (3.6) le carré d'une somme sur a' (avec $a'' = a - a' - a'''$) et non une somme de carrés. Ces effets d'interférence auraient été brisés ou perdus si l'on avait, après les interactions à $t=0$ et $t=2T$, remplacé le vecteur d'état de $\mathcal{S} + \mathcal{P}$ par un mélange statistique d'états.

- On voit enfin sur (3.6) qu'il faut sommer la probabilité d'arriver en $|a'''\rangle \otimes \delta(x - \hat{a})$ sur tous les états finaux possibles $|a'''\rangle$ de \mathcal{S} qui sont orthogonaux les uns aux autres.

d. Discussion physique.

- Dans l'expérience que nous venons d'analyser, \mathcal{S} et \mathcal{P} ont interagi intermédiairement à $t=0$ et $t=T$, et nous n'avons pas observé le résultat de ces 2 interactions. Le résultat obtenu en (3.6) est cependant tout à fait différent de celui trouvé dans le § 3 iii du cours II. Nous considérons alors une mesure faite par M_B après une mesure non lue faite par M_A . Le résultat trouvé en (2.33) était une somme de carrés et non le carré d'une somme (aucun effet d'interférence)

- La différence essentielle est que nous avons alors $M_B \neq M_A$. Ici au contraire \mathcal{S} interagit toujours avec le même appareil \mathcal{P} et les corrélations quantiques apparues entre \mathcal{S} et \mathcal{P} après une interaction influencent l'évolution de $\mathcal{S} + \mathcal{P}$ lors d'une interaction ultérieure.

- Une autre manière plus imagée de comprendre la différence entre les 2 situations est la suivante. Dans l'expérience utilisant 2 appareils différents M_A et M_B , on pourrait toujours, après avoir lu M_B , lire le résultat qui est resté enregistré sur M_A . On saurait ainsi par quel chemin S est passé. Ici, on ne peut lire que P , et une fois qu'on a lu P à $t=2T+E$ et trouvé \hat{a} , on n'a plus aucun moyen de savoir dans quel état était S à $t=0+E$ et $t=T+E$. On ne peut donc pas savoir par quel chemin S est passé.

② L'interféromètre de Stern et Gerlach

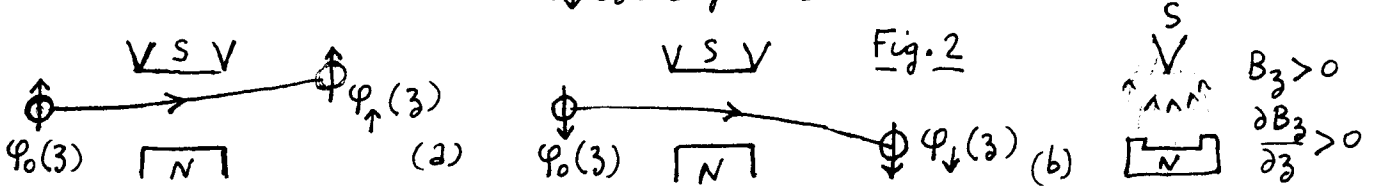
a - L'expérience de Stern et Gerlach: un exemple de mesure idéale

- L'expérience de Stern et Gerlach fournit un exemple, autre que celui de Von Neumann, d'interaction $S-M$ correspondant à une mesure idéale.

S est ici le spin \vec{S} de l'atome entrant dans le champ \vec{B} inhomogène - M est la position z du centre de masse de cet atome le long de l'axe Oz parallèle à \vec{B} .

L'hamiltonien décrivant le mouvement de l'atome contient en effet un terme, $-\gamma S_z B_z(z)$, où γ est une constante, couplant S_z à z (comme B est inhomogène, B_z dépend de z). Ce couplage entre variables de spin et variables de translation va introduire une corrélation entre l'état de spin et la trajectoire du centre du paquet d'ondes atomique, de sorte qu'en observant cette trajectoire on peut déterminer l'état de spin.

- Ainsi, si l'état initial du centre de masse de l'atome est un paquet d'ondes bien localisé en z , $\phi_0(z)$, et si l'état de spin est l'état propre \uparrow de S_z (on suppose $S=1/2$), le paquet d'onde va être défléchi vers le haut et devenir $\phi_\uparrow(z)$ [Fig. 2a]. Si au contraire, l'état de spin est \downarrow le paquet d'ondes sera défléchi vers le bas et deviendra $\phi_\downarrow(z)$ [Fig. 2b].



L'interaction entre S_z et $B_z(z)$ ne change donc pas l'état de spin \uparrow ou \downarrow , mais transforme ϕ_0 en un état ϕ_\uparrow ou ϕ_\downarrow corrélié avec l'état de spin. Si la déflexion est suffisante, les 2 paquets d'ondes ϕ_\uparrow et ϕ_\downarrow ne se recouvrent plus. On a alors $\langle \phi_\uparrow | \phi_\downarrow \rangle = \int dz \phi_\uparrow^*(z) \phi_\downarrow(z) = 0$ et la corrélation est parfaite.

b - Conséquence du principe de superposition: possibilité d'avoir 2 paquets d'ondes cohérents, polarisés différemment, et bien séparés

- Supposons maintenant que l'état de spin de l'atome entrant dans l'interfer soit l'état propre $|+\rangle_x$ de S_x :

$$|+\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}} [|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle] \tag{3.7}$$

La linéarité de l'équation de Schrödinger entraîne alors que

l'état global (orbital et de spin) de l'atome sortant sera

$$\frac{1}{\sqrt{2}} [\Psi_{\uparrow}(z) \otimes |\uparrow\rangle + \Psi_{\downarrow}(z) \otimes |\downarrow\rangle] \quad (3.8)$$

- On obtient à la sortie de l'appareil une superposition linéaire de 2 paquets d'onde, mais séparés spatialement, et correspondant à des orientations de spin opposés. En d'autres termes, il y a des cohérences quantiques entre les 2 états $|\uparrow\rangle \otimes |\Psi_{\uparrow}\rangle$ et $|\downarrow\rangle \otimes |\Psi_{\downarrow}\rangle$

C - Expérience proposée par Bohm et Wigner pour montrer l'importance de ces cohérences (refs 2, 3)

- Pour montrer que l'état (3.8) ne peut pas être assimilé à un mélange statistique des 2 états $\Psi_{\uparrow}(z)$ et $\Psi_{\downarrow}(z)$ avec des poids 1/2, Bohm et Wigner suggèrent de rajouter des gradients de champ appropriés pour faire en sorte que les 2 paquets d'ondes se recombinent (voir Fig. 3)

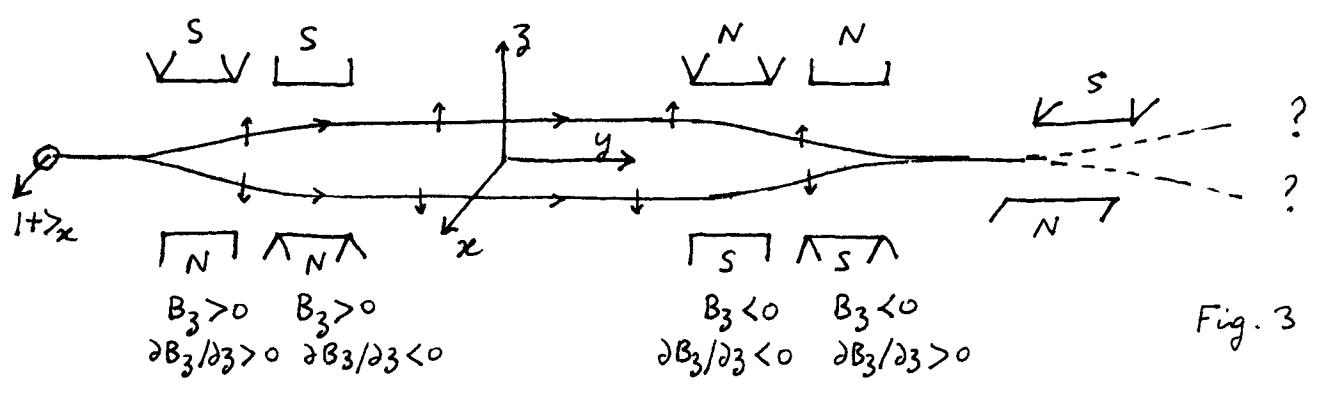


Fig. 3

- En faisant alors passer les atomes dans un appareil de Stern et Gerlach orienté de manière à mesurer S_x (appareil le plus à droite sur la figure 3), on doit être capable de différencier clairement les 2 éventualités : superposition linéaire (3.8) ou mélange statistique des 2 états correspondants.

Dans le premier cas, les 2 paquets d'ondes sont cohérents et se recombinent pour donner l'état $|\psi_0\rangle \otimes |\uparrow\rangle_x$ (on néglige l'étalement des paquets d'ondes). Le paquet d'ondes sort alors à coup sûr dans la voie correspondant à $S_x = +\hbar/2$

Si, au contraire, on a un mélange statistique des 2 paquets d'ondes on obtient, en les recombinant, un atome dont l'état de spin est un mélange statistique des états \uparrow et \downarrow avec des poids égaux, c'est à dire encore un mélange statistique des états $|\uparrow\rangle_x$ et $|\downarrow\rangle_x$ avec des poids égaux. L'atome a alors une chance sur deux de sortir du dernier appareil dans la voie $S_x = +\hbar/2$, une chance sur deux dans la voie $S_x = -\hbar/2$

- L'appareil de la figure 3 peut être considéré comme un interféromètre atomique, l'interféromètre de Stern et Gerlach. Bien que l'expérience correspondante n'ait jamais été réalisée, il est clair que c'est le 1^{er} résultat (correspondant à la superposition linéaire 3.8) qui serait observé. Pour un calcul précis de l'état de l'atome sortant, décrivant quanti-

quement le mouvement du centre de masse de l'atome et tenant compte du caractère tridimensionnel des champs, voir la référence (4). D'ailleurs, il existe en optique des expériences analogues à celles de la figure 3, où l'atome est remplacé par un photon et les appareils de Stern-Gerlach par des cubes polariseurs séparant le faisceau lumineux incident en 2 faisceaux de polarisations orthogonales qu'on peut ensuite recombinaisonner. On sait bien alors qu'il faut faire interférer les champs et non ajouter les intensités.

- L'expérience de la figure 3 peut être rapprochée de celle analysée dans le § 1 précédent.

La 1^{ère} interaction entre S_z et z , qui conduit à l'état (3.8), est celle qui corréle S_z et z . Le point important est que S_z et z interagissent à nouveau dans les aimants qui permettent de recombinaisonner les 2 paquets d'ondes ψ_{\uparrow} et ψ_{\downarrow} . Si l'on considère S_z comme l'observable mesurée de S , z comme l'observable de l'appareil de mesure M couplé à S_z , nous sommes dans une situation où S et M interagissent plusieurs fois. Les corrélations quantiques apparues entre S et M à l'issue de leur 1^{ère} interaction et décrites par les cohérences quantiques de (3.8) ne peuvent pas être ignorées si l'on veut comprendre correctement l'évolution de $S+M$ lors d'une 2^{ème} interaction.

On peut dire encore que rien ne permet, dans l'expérience de la figure 3, de savoir par quel chemin (celui du haut ou celui du bas) l'atome passe. La séparation entre les 2 trajectoires à la sortie du 1^{er} appareil résulte d'une interaction entre S_z et z qui a corréle S_z et z , mais aucun appareil ne mesure ensuite z .

③ Introduction de dispositifs observant par quels chemins l'atome passe dans l'interféromètre.

a. Le modèle de Scully, Shea, McCullen (ref. 5)

i. Description du modèle - Hypothèses

- Pour déterminer par quel chemin l'atome A passe, Scully, Shea et McCullen proposent de placer dans le trajet supérieur de la figure 3 un atome détecteur D à 2 niveaux $|a\rangle$ et $|b\rangle$ qui va interagir avec A par un potentiel pouvant faire passer D de $|a\rangle$ à $|b\rangle$ ou de $|b\rangle$ à $|a\rangle$ et dépendant de $\vec{r}_A - \vec{r}_D$ où \vec{r}_A est la position de A , \vec{r}_D celle de D . Si ce potentiel est de très courte portée, D ne sera sensible qu'au paquet d'ondes passant dans le chemin supérieur et ne "verra" pas le paquet d'ondes passant dans le chemin inférieur. Si D est initialement dans $|a\rangle$ et si la vitesse de déplacement des paquets d'ondes est convenablement ajustée, A peut faire passer D de $|a\rangle$ à $|b\rangle$ si A passe dans le chemin supérieur, alors que rien ne se passe pour D si A passe dans le chemin inférieur. On peut alors, en observant l'état de D savoir par quel chemin A est passé.

- L'interaction V_{AD} entre A et D est choisie de la forme

$$V_{AD} = g v(\vec{r}_A - \vec{r}_D) (|a\rangle\langle b| + |b\rangle\langle a|) \quad (3.9)$$

où g est une constante de couplage. Pour montrer qu'il n'y a pas besoin, pour comprendre la destruction des effets d'interférence, d'invoquer une diffusion par D du paquet d'ondes de A passant dans le trajet supérieur, Scully, Shea et McCullen ignorent délibérément toute modification des paquets d'ondes de A due à V_{AD} (voir cependant le début du § b i ci-dessous). L'effet de V_{AD} sera donc essentiellement de faire évoluer D sans modifier l'état de A .

ii. Etat final du système global

- Compte tenu de l'approximation précédente, il suffit de calculer l'évolution de D due à V_{AD} pour un mouvement donné du paquet d'ondes associé à A . Si l'on note

$$|X(t)\rangle = \alpha(t) |a\rangle + \beta(t) |b\rangle \quad (3.10)$$

l'état de D , les équations d'évolution de α et β sont

$$\begin{cases} i\hbar \dot{\alpha} = E_a \alpha + g f(t) \beta \\ i\hbar \dot{\beta} = E_b \beta + g f(t) \alpha \end{cases} \quad (3.11)$$

où E_a et E_b sont les énergies de $|a\rangle$ et $|b\rangle$ et où

$$f(t) = \int d^3r_A |\varphi_{\uparrow}(\vec{r}_A, t)|^2 v(\vec{r}_A - \vec{r}_D) \quad (3.12)$$

est une fonction connue de t si l'on connaît le mouvement de $\varphi_{\uparrow}(\vec{r}_A, t)$. Dans (3.12), \vec{r}_D est fixe. On suppose \vec{r}_D suffisamment proche du trajet supérieur de la figure 3 et $v(\vec{r}_A - \vec{r}_D)$ de portée suffisamment courte pour que l'on puisse négliger l'effet de V_{AD} quand A passe dans le trajet inférieur. C'est pourquoi seul φ_{\uparrow} apparaît dans (3.12).

- Si l'on suppose pour simplifier $E_a = E_b = 0$, la solution de (3.12), correspondant à $\alpha(t) = 1$, $\beta(t) = 0$ pour $t = -\infty$, s'écrit

$$\alpha(t) = \cos \Omega(t) \quad \beta(t) = -i \sin \Omega(t) \quad (3.13)$$

où

$$\hbar \Omega(t) = g \int_{-\infty}^t f(t') dt' \quad (3.14)$$

Après un temps long devant le temps de passage du paquet d'ondes supérieur en \vec{r}_D , $\Omega(t)$ tend vers

$$\Omega = \frac{g}{\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t') dt' \quad (3.15)$$

- Finalement, si l'état initial de $A+D$ est $|\uparrow\rangle \otimes |\varphi_{\uparrow}\rangle \otimes |a\rangle$ l'état final après l'interaction $A-D$ est

$$|\uparrow\rangle \otimes |\varphi_{\uparrow}\rangle \otimes [\cos \Omega |a\rangle - i \sin \Omega |b\rangle] \quad (3.16)$$

A n'a pas changé et D est passé de $|a\rangle$ à $\cos \Omega |a\rangle - i \sin \Omega |b\rangle$. Choisissons la vitesse de φ_{\uparrow} de telle sorte que $\Omega = \pi/2$

$$\Omega = \pi/2 \quad (3.17)$$

L'évolution de $A+D$ peut alors être décrite par

$$|\uparrow\rangle \otimes |\varphi_{\uparrow}\rangle \otimes |a\rangle \longrightarrow -i |\uparrow\rangle \otimes |\varphi_{\uparrow}\rangle \otimes |b\rangle \quad (3.18)$$

Par contre, si l'atome \mathcal{A} est dans la voie inférieure (état $|\downarrow\rangle \otimes |\varphi_{\downarrow}\rangle$), son interaction avec \mathcal{D} est nulle et on a

$$|\downarrow\rangle \otimes |\varphi_{\downarrow}\rangle \otimes |a\rangle \longrightarrow |\downarrow\rangle \otimes |\varphi_{\downarrow}\rangle \otimes |a\rangle \quad (3.19)$$

- Si l'état initial de \mathcal{A} , avant interactions avec \mathcal{D} , est (3.8), la linéarité de l'équation de Schrödinger entraîne, compte tenu de (3.18) et (3.19)

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}} [|\uparrow\rangle \otimes |\varphi_{\uparrow}\rangle + |\downarrow\rangle \otimes |\varphi_{\uparrow}\rangle] \otimes |a\rangle &\longrightarrow \\ \longrightarrow -\frac{i}{\sqrt{2}} |\uparrow\rangle \otimes |\varphi_{\uparrow}\rangle \otimes |b\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |\downarrow\rangle \otimes |\varphi_{\downarrow}\rangle \otimes |a\rangle &\quad (3.20) \end{aligned}$$

- Après recombinaison des 2 paquets d'ondes, $|\varphi_{\uparrow}\rangle$ et $|\varphi_{\downarrow}\rangle$ deviennent égaux à $|\varphi_0\rangle$ et l'état final de $\mathcal{A} + \mathcal{D}$ quand \mathcal{A} sort de l'interféromètre (juste avant d'entrer dans le dernier appareil qui analyse S_x) s'écrit

$$|\varphi_0\rangle \otimes \left[-\frac{i}{\sqrt{2}} |\uparrow\rangle \otimes |b\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |\downarrow\rangle \otimes |a\rangle \right] \quad (3.21)$$

iii - Destruction des interférences

- Le dernier appareil de la figure 3 analyse seulement S_x et n'interagit pas du tout avec \mathcal{D} . Les prédictions concernant les résultats possibles d'une mesure de S_x et déduisant du postulat I sur la mesure peuvent donc être entièrement déduites de la trace sur \mathcal{D} de l'opérateur densité ρ associé à (3.21)

$$\begin{aligned} \rho = |\varphi_0\rangle \langle \varphi_0| \otimes \left[\frac{1}{2} |\uparrow\rangle \langle \uparrow| \otimes |b\rangle \langle b| + \frac{1}{2} |\downarrow\rangle \langle \downarrow| \otimes |a\rangle \langle a| - \right. \\ \left. - \frac{i}{2} |\uparrow\rangle \langle \downarrow| \otimes |b\rangle \langle a| + \frac{i}{2} |\downarrow\rangle \langle \uparrow| \otimes |a\rangle \langle b| \right] \quad (3.22) \end{aligned}$$

Comme $\text{Tr}_{\mathcal{D}} |b\rangle \langle a| = \langle a|b\rangle$ et que $|a\rangle$ et $|b\rangle$ sont orthogonaux, on en déduit que

$$\text{Tr}_{\mathcal{D}} \rho = |\varphi_0\rangle \langle \varphi_0| \otimes \left[\frac{1}{2} |\uparrow\rangle \langle \uparrow| + \frac{1}{2} |\downarrow\rangle \langle \downarrow| \right] \quad (3.23)$$

- Pour prédire ce qui va se passer dans le dernier analyseur, il n'est donc pas incorrect de considérer que l'état de spin de \mathcal{A} est un mélange statistique des états $|\uparrow\rangle$ et $|\downarrow\rangle$ avec des poids égaux, donc aussi des états $|+\rangle_x$ et $|-\rangle_x$ avec les mêmes poids. A la sortie du dernier analyseur, \mathcal{A} aura donc une probabilité $1/2$ de passer dans la voie $S_x = +\hbar/2$, $1/2$ de passer dans la voie $S_x = -\hbar/2$.

- Ainsi, bien que \mathcal{D} n'ait pas du tout modifié l'évolution de \mathcal{A} , le seul fait que \mathcal{D} ait interagi avec \mathcal{A} de manière à aboutir dans des états orthogonaux $|a\rangle$ ou $|b\rangle$ suivant que \mathcal{A} passe dans la voie inférieure ou supérieure, fait disparaître les effets d'interférence quantiques observables en l'absence de \mathcal{D} et discutés plus haut. C'est parce que $|\varphi_{\uparrow}\rangle$ et $|\varphi_{\downarrow}\rangle$ se sont corrélés avec des états orthogonaux de \mathcal{D} (voir (3.20)) que l'interférence

est détruite. On pourrait toujours consulter D après que A ait traversé l'interféromètre et savoir où A est parti (vers le haut si D est dans $|b\rangle$, vers le bas si D est dans $|a\rangle$).

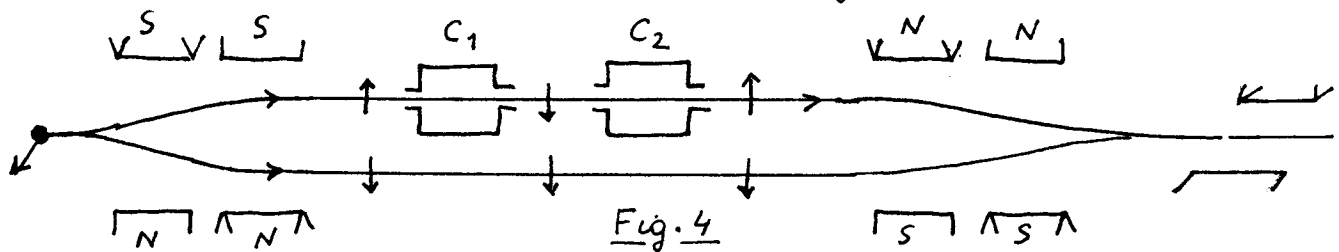
- Il ne faut pas perdre de vue que c'est parce qu'on ne s'intéresse plus à D dans la dernière mesure (celle de S_x) que la trace sur D a été prise dans (3.23), ce qui a remplacé une superposition d'états de $A + D$ par un mélange statistique d'états de A . Tant qu'on n'introduit pas le postulat I sur la mesure, l'évolution est toujours régie par l'équation de Schrödinger, évolution qui conserve nécessairement le caractère pur d'un état.

b - Le modèle de Scully, Englert et Schwinger (ref. 6)

i - Description du modèle - Hypothèses.

- Le modèle précédent peut être critiqué. En effet, pour que D ne soit pas affecté par Φ_p , il faut que $V(\vec{r}_A - \vec{r}_D)$ soit à très courte portée. Le changement d'impulsion de A dû à la diffusion par D n'est alors certainement pas négligeable et peut à lui seul détruire les effets d'interférence discutés au § 2, sans qu'il soit nécessaire d'invoquer le changement d'état de D .

- Un autre exemple de détecteur D , perturbant beaucoup moins la trajectoire de Φ_p et changeant d'état si A passe par la voie supérieure, a été récemment proposé par Scully, Englert et Schwinger (ref. 6). Ce modèle utilise 2 cavités microondes C_1 et C_2 , placés en série, percés de trous suffisamment larges pour que le paquet d'ondes Φ_p puisse, dans la voie supérieure, passer à travers ces trous sans être perturbé (Fig. 4).



- Ces 2 cavités sont accordées à résonance sur la fréquence de basculement du spin $\uparrow \rightarrow \downarrow$. Un champ magnétique statique uniforme est en effet appliqué entre les 2 appareils de Stern-Gerlach pour écarter les 2 niveaux de spin \uparrow et \downarrow . En l'absence de C_1 et C_2 , un tel champ introduit un déphasage fixe entre les 2 chemins, ce qui fait tourner d'un certain angle le spin de l'atome dans le plan xOy une fois que les 2 paquets d'ondes ont été recombinaés (les 2 paquets d'ondes sont déphasés mais restent cohérents).

- La longueur de C_1 et l'intensité moyenne du champ dans C_1 sont ajustés pour que le spin de A , étant \uparrow à l'entrée de C_1 , se retrouve \downarrow à la sortie, après émission induite d'un photon microonde dans la cavité (voir Fig. 4). De même, la longueur de C_2 et l'intensité moyenne du champ dans C_2 sont telles que le spin de A passe de \downarrow à \uparrow après traversée de C_2 et absorption d'un photon microonde. Finalement, le passage de A dans la voie supérieure à travers C_1

et C_2 ne change pas globalement l'état de spin de A tout en changeant l'état du champ dans chaque cavité. Par ailleurs, le transfert d'impulsion entre atome et champ lors de l'absorption ou de l'émission d'un seul photon microonde est complètement négligeable devant l'impulsion moyenne et la dispersion en impulsion de φ_{\uparrow} , de sorte qu'on peut valablement négliger toute diffusion du paquet d'ondes passant dans la voie supérieure.

ii- Cas où les états initiaux du champ dans C_1 et C_2 sont des états à nombre de photons bien définis (états de Fock)

- L'état initial du champ dans C_1 et C_2 est $|N_1, N_2\rangle$; C_1 contient N_1 photons, C_2 N_2 photons.

Après passage dans C_1 , l'état global de $A+C_1+C_2$ subit la transition

$$|\varphi_{\uparrow}\rangle \otimes |\uparrow\rangle \otimes |N_1, N_2\rangle \rightarrow |\varphi_{\uparrow}\rangle \otimes |\downarrow\rangle \otimes |N_1+1, N_2\rangle \quad (3.24)$$

Le passage de A dans C_2 donne ensuite

$$|\varphi_{\uparrow}\rangle \otimes |\downarrow\rangle \otimes |N_1+1, N_2\rangle \rightarrow |\varphi_{\uparrow}\rangle \otimes |\uparrow\rangle \otimes |N_1+1, N_2-1\rangle \quad (3.25)$$

Globalement, l'état de A reste $|\varphi_{\uparrow}\rangle \otimes |\uparrow\rangle$ alors que C_1+C_2 passe de $|N_1, N_2\rangle$ à $|N_1+1, N_2-1\rangle$. Enfin, si A passe dans la voie inférieure, $|\varphi_{\downarrow}\rangle \otimes |\downarrow\rangle \otimes |N_1, N_2\rangle$ reste inchangé.

- Lorsque les 2 paquets d'ondes φ_{\uparrow} et φ_{\downarrow} sont recombinés en φ_0 , on obtient finalement pour état de $A+C_1+C_2$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} |\varphi_0\rangle \otimes [|\uparrow\rangle \otimes |N_1+1, N_2-1\rangle + e^{i\eta} |\downarrow\rangle \otimes |N_1, N_2\rangle] \quad (3.26)$$

où $e^{i\eta}$ est le déphasage introduit par le champ statique uniforme qui écarte les 2 niveaux \uparrow et \downarrow .

- Lorsqu'on prend la trace sur C_1 et C_2 de l'opérateur densité ρ associé à (3.26) (comme nous l'avons fait plus haut dans le § 2 iii) pour obtenir l'opérateur densité réduit de A , on trouve alors que la cohérence entre \uparrow et \downarrow est multipliée par

$$\text{Tr}(|N_1+1, N_2-1\rangle \langle N_1, N_2|) = \langle N_1, N_2 | N_1+1, N_2-1\rangle = 0 \quad (3.27)$$

Les interférences ont donc été détruites, car les 2 chemins de A ont été corrélés à des états orthogonaux de C_1+C_2 . En consultant l'état du champ dans C_1 et C_2 , on peut savoir si A est passé en haut (il y a un photon de plus dans C_1 , 1 photon de moins dans C_2) ou en bas (N_1 et N_2 n'ont pas changé).

iii- Cas où les états initiaux du champ dans C_1 et C_2 sont des états cohérents $|\alpha_1\rangle$ et $|\alpha_2\rangle$.

- L'état $|\alpha_1\rangle$ est une superposition linéaire d'états de Fock $|N_1\rangle$, la distribution des valeurs possibles de N_1 étant centrée autour d'une valeur moyenne $\langle N_1 \rangle$, avec une dispersion ΔN_1 de l'ordre de $\sqrt{\langle N_1 \rangle}$. Si $\langle N_1 \rangle$ est ajusté à une valeur telle que l'impulsion "vue" par A au passage à travers C_1 soit une "impulsion π " (qui fait passer le spin de \uparrow à \downarrow), et si $\langle N_1 \rangle \gg 1$, on peut montrer que l'état de $A+C_1+C_2$ à la sortie de C_1 est, à une très bonne approximation, $|\varphi_{\uparrow}\rangle \otimes |\downarrow\rangle \otimes |\alpha'_1, \alpha_2\rangle$ où $|\alpha'_1\rangle$ est un état cohérent très peu différent de $|\alpha_1\rangle$ dans la mesure où il contient en moyenne

un photon de plus que $|\alpha_1\rangle$ ($|\alpha'_1\rangle$ est donné par la même superposition linéaire d'états de Fock que $|\alpha_1\rangle$, tous les N étant décalés de +1). Le même raisonnement montre que, à la sortie de C_2 , l'état de $B+C_1+C_2$ est $|\varphi_\uparrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle \otimes |\alpha'_1, \alpha'_2\rangle$, où $|\alpha'_2\rangle$ est un état cohérent très peu différent de $|\alpha_2\rangle$ (contenant en moyenne un photon de moins), de sorte que la formule généralisant (3.26) donne, pour état final, lorsque A sort de l'interféromètre

$$\frac{1}{\sqrt{2}} |\varphi_0\rangle \otimes [|\uparrow\rangle \otimes |\alpha'_1, \alpha'_2\rangle + e^{i\eta} |\downarrow\rangle \otimes |\alpha_1, \alpha_2\rangle] \quad (3.28)$$

- Le facteur de réduction de la cohérence entre \uparrow et \downarrow , apparaissant lorsqu'on prend la trace sur C_1 et C_2 , est alors

$$\text{Tr} |\alpha'_1, \alpha'_2\rangle \langle \alpha_1, \alpha_2| = \langle \alpha_1, \alpha_2 | \alpha'_1, \alpha'_2 \rangle \simeq 1 \quad (3.29)$$

Il est très peu différent de 1 car $|\alpha'_1\rangle$ et $|\alpha'_2\rangle$ sont très voisins de $|\alpha_1\rangle$ et $|\alpha_2\rangle$. Dans ce cas, les interférences entre les 2 chemins ne sont pas détruites. Les 2 chemins sont corrélés avec des états du champ $|\alpha'_1, \alpha'_2\rangle$ et $|\alpha_1, \alpha_2\rangle$ qui ne sont pas orthogonaux. L'interaction $B - C_1 + C_2$ a introduit une corrélation qui est très imparfaite.

En termes plus physiques, la dispersion sur les valeurs possibles de N_1 et N_2 dans C_1 et C_2 est si grande qu'on ne peut pas, en mesurant l'état du champ dans C_1 et C_2 avant et après passage de A , affirmer avec certitude que les nombres de photons ont varié de +1 ou -1. On ne peut donc pas déterminer avec certitude par quel chemin A est passé, ce qui explique la non destruction des interférences.

- On peut expliquer de cette manière pourquoi les interféromètres à neutrons continuent à donner des effets d'interférence si l'on bascule le spin du neutron dans l'une des 2 voies de l'interféromètre par une impulsion de champ de radiofréquence (voir références 7 et 8)

Références

- (1) J. Bell and N. Nauenberg, in *Preludes in Theoretical Physics in honor of V. Weisskopf*, De Shalit et al eds, North Holland 1966 reproduit dans J. Bell, *Speakable and Unsayable in Quantum Mechanics*, Cambridge 1987
- (2) D. Bohm, *Quantum Theory*, Prentice-Hall, 1951, p.604
- (3) E.P. Wigner, *Am. J. Phys.* 31, 6 (1963)
- (4) J. Schwinger, M.O. Scully and B.G. Englert, *Z. Phys.* D10, 135 (1988)
- (5) M.O. Scully, R. Shea and Mc Cullen, *Phys. Rep.* 43, 485 (1978)
- (6) M.O. Scully, B.G. Englert and J. Schwinger, *Phys. Rev.* A40, 1775 (1989)
- (7) G. Badurek, H. Rauch and J. Summhammer, *Phys. Rev. Lett* 51, 1015 (1983)
- (8) G. Badurek, H. Rauch and D. Tuppinger, *Phys. Rev.* A34, 2600 (1986)

① Corrélations quantiques non séparables entre système S et appareil de mesure M .

a) Ambiguïté sur la grandeur de S mesurée par M .

- L'une des caractéristiques les plus importantes d'une opération de mesure idéale (voir cours II, § 1c)

$$|\Psi_i\rangle = \left(\sum_n c_n |u_n\rangle\right) \otimes |\varphi_0\rangle \rightarrow |\Psi_f\rangle = \sum_n c_n |u_n\rangle \otimes |\varphi_n\rangle \quad (4.1)$$

est l'établissement de corrélations entre S et M : si S est dans $|u_n\rangle$, M est dans $|\varphi_n\rangle$. A 2 états orthogonaux $|u_n\rangle$ et $|u_{n'}\rangle$ de S sont associés 2 états orthogonaux $|\varphi_n\rangle$ et $|\varphi_{n'}\rangle$ de M (corrélations parfaites).

- Le fait que $|\Psi_f\rangle$ soit une superposition linéaire d'états, et non un mélange statistique d'états, entraîne cependant, comme nous allons le voir maintenant, des difficultés d'interprétation. On peut en effet toujours introduire dans l'espace des états de M , une nouvelle base orthonormée $\{|x_\nu\rangle\}$ suivant laquelle chacun des états $|\varphi_n\rangle$ peut être développé.

$$|\varphi_n\rangle = \sum_\nu |x_\nu\rangle \langle x_\nu | \varphi_n \rangle \quad (4.2)$$

Reportons alors (4.2) dans le membre de droite de (4.1) et définissons les vecteurs $|v_\nu\rangle$ de S par

$$|v_\nu\rangle = \frac{1}{b_\nu} \sum_n c_n |u_n\rangle \langle x_\nu | \varphi_n \rangle \quad (4.3)$$

où

$$b_\nu = \sqrt{\sum_n |c_n|^2 |\langle x_\nu | \varphi_n \rangle|^2} \quad (4.4)$$

est choisi de manière que les $|v_\nu\rangle$ soient normés ($\langle v_\nu | v_\nu \rangle = 1$). On peut alors réécrire l'état $|\Psi_f\rangle$ de (4.1) sous la forme

$$|\Psi_f\rangle = \sum_\nu b_\nu |v_\nu\rangle \otimes |x_\nu\rangle \quad (4.5)$$

qui montre que les états $|x_\nu\rangle$ de M sont corrélés avec les états $|v_\nu\rangle$ de S . Toutefois, comme les états $|v_\nu\rangle$ ne sont pas nécessairement orthogonaux les uns aux autres, cette corrélation n'est pas parfaite.

- Supposons, pour simplifier la discussion, que les c_n soient tels que les $|v_\nu\rangle$ soient orthogonaux les uns aux autres (par exemple, les c_n sont tous égaux). Introduisons alors 2 observables $A = \sum_n a_n |u_n\rangle \langle u_n|$ et $B = \sum_\nu b_\nu |v_\nu\rangle \langle v_\nu|$ de S , admettant respectivement pour états propres les états $\{|u_n\rangle\}$ et $\{|v_\nu\rangle\}$. Une fois que S et M ont interagis et se retrouvent dans l'état $|\Psi_f\rangle$ écrit en (4.1) ou (4.5), on peut toujours décider d'observer M et de voir si M est dans l'un des états $\{|\varphi_n\rangle\}$ ou l'un des états $\{|x_\nu\rangle\}$. Dans le premier cas, on saura dans quel état $|u_n\rangle$ S se trouve; dans le second cas, dans quel état $|v_\nu\rangle$ S se trouve. On a ainsi l'impression que, dans l'état $|\Psi_f\rangle$, M contient des

informations, non seulement sur l'observable A de S , mais aussi sur l'observable B qui ne commute pas nécessairement avec A .

De plus, il semble qu'on puisse décider de choisir quel état observer sur M , et donc quelle observable A ou B a été mesurée sur S , longtemps après que S et M aient fini d'interagir (expériences à choix retardé, ou "delayed choice experiments").

- Toutes les difficultés d'interprétation que nous venons de mentionner sont de même nature que celles rencontrées dans la discussion du "paradoxe E.P.R." (Einstein - Podolsky - Rosen). Elles sont liées au fait que les corrélations apparues entre S et M à la suite de leur interaction, ne sont pas des corrélations classiques, mais des corrélations quantiques non séparables (voir référence 1)

b) Modèles simplifiés utilisant pour décrire S et M des systèmes à 2 états

- En vue de développements ultérieurs dans ce cours et les suivants, il est commode d'introduire, comme Zurek (refs 2 à 4), des modèles très simplifiés où S et M sont représentés par des systèmes à 2 états.

- Nous noterons $|\uparrow\rangle$ et $|\downarrow\rangle$ ces 2 états, qui peuvent toujours être considérés comme les 2 états propres de la composante J_z d'un spin fictif $1/2$. A partir de $|\uparrow\rangle$ et $|\downarrow\rangle$, on peut introduire d'autres bases d'états orthogonaux, par exemple

$$|\odot\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle] \quad |\oplus\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle] \quad (4.6)$$

qui peuvent être considérés comme les états propres de J_x , ou

$$|\rightarrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|\uparrow\rangle + i|\downarrow\rangle] \quad |\leftarrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|\uparrow\rangle - i|\downarrow\rangle] \quad (4.7)$$

qui peuvent être considérés comme les états propres de J_y . Enfin nous noterons $|S\uparrow\rangle, |M\rightarrow\rangle \dots$ les états où S est dans $|\uparrow\rangle$, M est dans $|\rightarrow\rangle \dots$

- L'hamiltonien d'interaction entre S et M est pris égal à

$$H_{SM} = \hbar g [|S\uparrow\rangle \langle S\uparrow| - |S\downarrow\rangle \langle S\downarrow|] \otimes [|M\rightarrow\rangle \langle M\rightarrow| - |M\leftarrow\rangle \langle M\leftarrow|] \quad (4.8)$$

où g est une constante de couplage (ayant les dimensions d'une fréquence). H_{SM} est diagonal dans la base $\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$ de S . L'interaction S - M ne change donc pas les probabilités d'occupation de $|S\uparrow\rangle$ et $|S\downarrow\rangle$, de sorte que la mesure associée à H_{SM} est idéale.

On néglige pour simplifier les hamiltoniens propres H_S et H_M de S et M .

- Supposons S initialement dans $|S\uparrow\rangle$. Comme S reste en fait dans $|S\uparrow\rangle$, le 1^{er} crochet de (4.8) peut être remplacé par 1. Les 2 états propres du 2^e crochet de (4.8) sont les états $|M\rightarrow\rangle$ et $|M\leftarrow\rangle$, de valeurs propres $+1$ et -1 , de sorte que les 2

valeurs propres de H_{SM} sont alors séparés par un écart $2\hbar g$. En termes de spin fictif, la dynamique de M , quand S est dans l'état $|S\uparrow\rangle$, est une précession de Larmor autour de Oy , dans le sens direct, avec une fréquence angulaire $2g$. Si S est dans l'état $|S\downarrow\rangle$, le sens de la précession de Larmor de M autour de Oy est simplement inversé.

- Nous supposons dans ce qui suit que l'état initial de M est $|m\circ\rangle$ (spin de M pointant le long de Ox), et que la durée τ de l'interaction est telle que

$$2g\tau = \pi/2 \quad (4.9)$$

(rotation de $\pi/2$ autour de Oz). Si initialement l'état de $S+M$ est $|S\uparrow\rangle \otimes |m\circ\rangle$, la rotation de $+\pi/2$ autour de Oy du spin de M initialement le long de Ox , amènera ce spin le long de la direction négative de Oz . On peut donc écrire

$$|\Psi_i\rangle = |S\uparrow\rangle \otimes |m\circ\rangle \rightarrow |\Psi_f\rangle = |S\uparrow\rangle \otimes |m\downarrow\rangle \quad (4.10)$$

Un raisonnement analogue donne

$$|\Psi_i\rangle = |S\downarrow\rangle \otimes |m\circ\rangle \rightarrow |\Psi_f\rangle = |S\downarrow\rangle \otimes |m\uparrow\rangle \quad (4.11)$$

et par suite par superposition linéaire

$$|\Psi_i\rangle = (a|S\uparrow\rangle + b|S\downarrow\rangle) \otimes |m\circ\rangle \rightarrow |\Psi_f\rangle = a|S\uparrow\rangle \otimes |m\downarrow\rangle + b|S\downarrow\rangle \otimes |m\uparrow\rangle \quad (4.12)$$

L'opération de mesure associée à H_{SM} agissant pendant un temps τ donné par (4.9) et pour un état initial $|m\circ\rangle$ de M peut donc être considérée comme un exemple de mesure idéale puisqu'elle corréle les 2 états orthogonaux $|\uparrow\rangle$ et $|\downarrow\rangle$ de S aux 2 états orthogonaux $|\downarrow\rangle$ et $|\uparrow\rangle$ de M .

- Supposons $a = b = 1/\sqrt{2}$ et appliquons les projecteurs $|S\circ\rangle\langle S\circ|$ et $|S\oplus\rangle\langle S\oplus|$ à l'état

$$|\Psi_f\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |S\uparrow\rangle \otimes |m\downarrow\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |S\downarrow\rangle \otimes |m\uparrow\rangle \quad (4.13)$$

Il vient, compte tenu de (4.6) et (4.13)

$$|S\circ\rangle\langle S\circ| \Psi_f\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |S\circ\rangle \otimes |m\circ\rangle \quad (4.14.a)$$

$$|S\oplus\rangle\langle S\oplus| \Psi_f\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}} |S\oplus\rangle \otimes |m\oplus\rangle \quad (4.14.b)$$

ce qui montre que $|\Psi_f\rangle$ peut se réécrire

$$|\Psi_f\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |S\circ\rangle \otimes |m\circ\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} |S\oplus\rangle \otimes |m\oplus\rangle \quad (4.15)$$

Il existe donc également des corrélations parfaites entre les 2 états orthogonaux $|\circ\rangle$ et $|\oplus\rangle$ de S et les 2 états orthogonaux $|\circ\rangle$ et $|\oplus\rangle$ de M . Suivant qu'on choisit de mesurer J_z ou J_x sur M , on va en déduire J_z ou J_x sur S , et il est clair ici que J_z et J_x sont 2 observables incompatibles.

- En conclusion de ce paragraphe, il ne semble pas qu'une vraie mesure de S par M puisse se réduire simplement à une interaction $S-M$ introduisant des corrélations entre S et M .

② Introduction dans l'analyse d'un autre appareil N mesurant le résultat enregistré par M

a) Idée générale

- A ce stade, on peut être tenté de dire que l'observateur N qui lit le résultat enregistré par M interagit avec M et qu'il faut donc introduire cette interaction M-N dans l'analyse, S et M interagissant dans une 1^{ère} étape, puis N et M dans une 2^{ème} étape (voir Fig. 1).

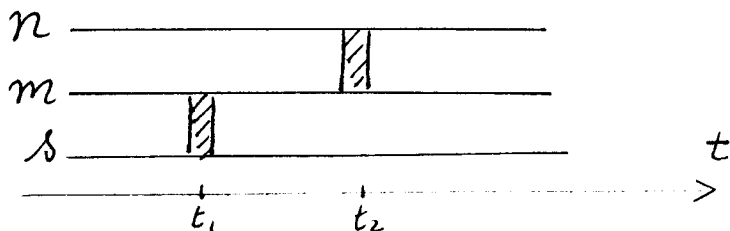


Fig. 1

- Disons tout de suite que cette addition d'appareils les uns après les autres (chaîne de von Neumann) ne résout pas tous les problèmes de la mesure. Nous allons voir cependant que certaines difficultés peuvent être résolues (voir §§ 3c et 4b ci dessous). De plus, les calculs présentés plus loin nous serviront pour la présentation, dans le cours suivant, de l'approche de Zurek où N est remplacé par un environnement.

b) Etude de l'évolution globale de S+M+N sur un modèle simplifié

- Nous complétons le modèle simplifié du § 1b ci dessus en prenant pour N un système très simple à 2 états $|n\uparrow\rangle$ et $|n\downarrow\rangle$, l'interaction M-N étant décrite par

$$H_{m-n} = \hbar g' [|m\uparrow\rangle\langle m\uparrow| - |m\downarrow\rangle\langle m\downarrow|] \otimes [|n\rightarrow\rangle\langle n\rightarrow| - |n\leftarrow\rangle\langle n\leftarrow|] \quad (4.16)$$

H_{m-n} n'agit pas sur S.

- Le même type de calcul que celui fait dans le § 1b montre alors que, si $2g'\tau' = \pi/2$, l'interaction H_{m-n} agissant pendant un temps τ' produit les évolutions suivantes pour le système M+N

$$|m\uparrow\rangle \otimes |n\odot\rangle \rightarrow |m\uparrow\rangle \otimes |n\downarrow\rangle \quad (4.17)$$

$$|m\downarrow\rangle \otimes |n\odot\rangle \rightarrow |m\downarrow\rangle \otimes |n\uparrow\rangle \quad (4.18)$$

- Supposons qu'initialement le système global S+M+N soit dans l'état

$$|\Psi_i\rangle = [a|S\uparrow\rangle + b|S\downarrow\rangle] \otimes |m\odot\rangle \otimes |n\odot\rangle \quad (4.19)$$

Après la 1^{ère} interaction entre S et M à t_1 , la partie de $|\Psi_i\rangle$ relative à S et M est transformée comme en (4.12), N restant "spectateur". Puis, lors de l'interaction entre M et N à t_2 , la partie relative à M et N se transforme suivant (4.17) et (4.18), S restant "spectateur". L'évolution globale de S+M+N

en 2 étapes se fait donc suivant le schéma :

$$|\Psi_i\rangle = [a|S\uparrow\rangle + b|S\downarrow\rangle] \otimes |m\circ\rangle \otimes |n\circ\rangle$$

$$\Rightarrow [a|S\uparrow\rangle \otimes |m\downarrow\rangle + b|S\downarrow\rangle \otimes |m\uparrow\rangle] \otimes |n\circ\rangle$$

$$\Rightarrow |\Psi_f\rangle = a|S\uparrow\rangle \otimes |m\downarrow\rangle \otimes |n\uparrow\rangle + b|S\downarrow\rangle \otimes |m\uparrow\rangle \otimes |n\downarrow\rangle \quad (4.20)$$

Il apparaît clairement sur (4.20) que n se retrouve corrélé avec m , lequel est corrélé aussi avec S , de sorte que n est aussi corrélé avec S .

c) L'interaction m - n peut lever l'ambiguïté sur la grandeur de S mesurée par m .

- Faisons $a = b = 1/\sqrt{2}$ dans (4.20). Il vient

$$|\Psi_f\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|S\uparrow\rangle \otimes |m\downarrow\rangle \otimes |n\uparrow\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|S\downarrow\rangle \otimes |m\uparrow\rangle \otimes |n\downarrow\rangle \quad (4.21)$$

Le fait de rajouter l'interaction m - n nous a fait donc passer de (4.13) à (4.21). L'état (4.21) contient-il, comme (4.13), des corrélations entre les états $|S\circ\rangle$ et $|S\oplus\rangle$ de S et des états orthogonaux de m , comme cela apparaît sur (4.15) ?

- Pour répondre à une telle question, faisons agir, comme en (4.14) les projecteurs $|S\circ\rangle\langle S\circ|$ et $|S\oplus\rangle\langle S\oplus|$ sur l'état $|\Psi_f\rangle$ écrit en (4.21). Il vient, compte tenu de (4.6) et (4.21)

$$|S\circ\rangle\langle S\circ|\Psi_f\rangle =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}|S\circ\rangle \otimes \left[\frac{1}{\sqrt{2}}|m\downarrow\rangle \otimes |n\uparrow\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|m\uparrow\rangle \otimes |n\downarrow\rangle \right] \quad (4.22.a)$$

$$|S\oplus\rangle\langle S\oplus|\Psi_f\rangle =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}|S\oplus\rangle \otimes \left[\frac{1}{\sqrt{2}}|m\downarrow\rangle \otimes |n\uparrow\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|m\uparrow\rangle \otimes |n\downarrow\rangle \right] \quad (4.22.b)$$

de sorte que $|\Psi_f\rangle$ peut se réécrire

$$|\Psi_f\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|S\circ\rangle \otimes \left[\frac{1}{\sqrt{2}}|m\downarrow\rangle \otimes |n\uparrow\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|m\uparrow\rangle \otimes |n\downarrow\rangle \right] + \frac{1}{\sqrt{2}}|S\oplus\rangle \otimes \left[\frac{1}{\sqrt{2}}|m\downarrow\rangle \otimes |n\uparrow\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|m\uparrow\rangle \otimes |n\downarrow\rangle \right] \quad (4.23)$$

Il apparaît clairement sur (4.23) que les états orthogonaux $|S\circ\rangle$ et $|S\oplus\rangle$ de S ne sont pas corrélés avec des états orthogonaux de m comme dans (4.15). Le crochet qui multiplie $|S\circ\rangle$ dans la 1^{ère} ligne de (4.23) n'est pas le produit d'un vecteur de m par un vecteur de n . Quand S est dans l'état $|S\circ\rangle$, m n'est pas dans un état pur bien défini, alors que (4.21) montre que, quand S est dans $|S\uparrow\rangle$ m est dans $|m\downarrow\rangle$.

- Ainsi, l'interaction m - n brouille les corrélations entre $|S\circ\rangle$ et $|m\circ\rangle$, $|S\oplus\rangle$ et $|m\oplus\rangle$ qui existaient bien en l'absence de n (comparer 4.15 et 4.23), alors qu'elle ne perturbe pas les corrélations entre $|S\uparrow\rangle$ et $|m\downarrow\rangle$, $|S\downarrow\rangle$ et $|m\uparrow\rangle$ (comparer 4.13 et 4.21). Cette différence de comportement est liée au fait que l'hamiltonien

d'interaction H_{M-N} entre M et N est diagonal dans la base $\{|m\uparrow\rangle, |m\downarrow\rangle\}$ de M . Cette interaction ne modifie donc pas les probabilités d'occupation des états $|m\uparrow\rangle$ et $|m\downarrow\rangle$. Comme ces états sont corrélés avec $|S\downarrow\rangle$ et $|S\uparrow\rangle$ et que H_{M-N} n'agit pas sur S , H_{M-N} ne modifie pas les corrélations entre $|S\uparrow\rangle$ et $|m\downarrow\rangle$, $|S\downarrow\rangle$ et $|m\uparrow\rangle$. L'interaction H_{M-N} privilégie donc une base de M , la base $\{|m\uparrow\rangle, |m\downarrow\rangle\}$ qui diagonalise H_{M-N} , et par suite la base corrélée $\{|S\downarrow\rangle, |S\uparrow\rangle\}$ de S , qui peut être considérée comme la base diagonalisant l'observable de S qui est mesurée par M .

- Toutes les conclusions précédentes ne sont valables que si la durée τ' de l'interaction H_{M-N} est convenablement choisie ($2g'\tau' = \pi/2$). On peut donc considérer qu'elles ne sont pas très générales. En fait, nous verrons dans les cours suivants qu'en remplaçant N par un environnement E ayant un grand nombre de degrés de liberté, ces conclusions deviennent beaucoup plus générales.

③ Où situer la frontière entre évolution unitaire et triage aléatoire du résultat de mesure?

a) La chaîne infinie de von Neumann. Où l'arrêter?

- Le fait d'avoir rajouté l'appareil N qui interagit avec M nous a conduits à remplacer l'état final (4.12) de $S+M$ par l'état final (4.20) de $S+M+N$, pour un même état initial $a|S\uparrow\rangle + b|S\downarrow\rangle$ de S . Il est clair cependant que l'état final (4.20) demeure, comme (4.12) un état pur, superposition linéaire d'états des divers systèmes considérés ($S+M$ pour 4.12, $S+M+N$ pour 4.20). Nous ne pouvons donc pas expliquer de cette manière pourquoi une mesure particulière de S va donner un résultat bien défini, correspondant à $|S\uparrow\rangle$ ou $|S\downarrow\rangle$. Les 2 résultats possibles apparaissent bien dans (4.12) ou (4.20), mais nous ne pouvons pas expliquer pourquoi une expérience particulière va donner un résultat et pas l'autre.

- L'addition d'une chaîne quelconque d'appareils, $N', N'' \dots$ interagissant successivement les uns avec les autres (chaîne de von Neumann) ne résout pas cette difficulté. Tant qu'on utilise uniquement l'équation de Schrödinger (postulat III) pour décrire l'évolution du système global considéré, $S+M$, ou $S+M+N$, ou $S+M+N+N' \dots$, l'état final du système global restera toujours une superposition linéaire d'états (si S est initialement dans une superposition d'états). En d'autres termes, il n'est pas possible de déduire le postulat I sur la mesure, de nature fondamentalement probabiliste, d'une équation de Schrödinger linéaire, décrivant l'évolution unitaire d'un système, aussi complexe soit-il. Dans le cours II, nous avons montré qu'il était possible de déduire le postulat II de réduction du paquet d'ondes, des postulats I (sur la probabilité des résultats de mesure) et III (sur l'évolution par équation de Schrödinger) appliqués à un système suffisamment grand. L'analyse présentée dans ce cours montre qu'une telle extension des systèmes considérés ne permet pas de déduire

le postulat I du postulat III. Les deux sont nécessaires.

- Il faudra donc nécessairement briser la chaîne de von Neumann à un moment ou à un autre et dire : tout ce qui précède est le système physique, évoluant suivant l'équation de Schrödinger. Maintenant, on "observe" un tel système et l'évolution associée à une telle observation n'est plus régie par l'équation de Schrödinger mais par le postulat I sur la mesure qui va donner la probabilité d'observer tel ou tel résultat. Le problème auquel on se trouve confronté est alors le suivant : où se situe la frontière entre les champs d'application des postulats III et I ? Où faut-il s'arrêter d'appliquer l'équation de Schrödinger pour introduire des considérations probabilistes ?

b) Cohérence des résultats obtenus en appliquant le postulat de la mesure à S , $S+M$, $S+M+N$.

- Dans l'exemple simple des 3 systèmes à 2 états S , M , N que nous venons d'analyser, on peut couper la chaîne de von Neumann à 3 endroits différents, après S , après $S+M$, après $S+M+N$. Que donne le postulat I sur la mesure dans chacun de ces 3 cas

(i) On considère seulement S comme système physique, dans l'état $|\psi_S\rangle = a|S\uparrow\rangle + b|S\downarrow\rangle$. M et N ne sont pas considérés comme des systèmes quantiques interagissant avec S , mais comme faisant partie du dispositif qui observe S et auquel on applique le postulat I. La probabilité d'observer S dans l'état $|S\uparrow\rangle$ est alors $|a|^2$.

(ii) On considère $S+M$ comme le système physique ayant subi l'évolution unitaire (4.12). N fait partie du dispositif qui observe M . La probabilité d'observer M dans $|m\downarrow\rangle$, et par suite S dans $|S\uparrow\rangle$ est alors, d'après le postulat I, égale à $|a|^2$.

(iii) On considère $S+M+N$ comme le système physique ayant subi l'évolution unitaire (4.20). On considère alors un dispositif externe qui observe N et auquel on applique le postulat I. La probabilité de trouver N dans $|n\uparrow\rangle$, et par suite M dans $|m\downarrow\rangle$, et par suite S dans $|S\uparrow\rangle$ est là encore égale à $|a|^2$.

- Ainsi, quel que soit l'endroit où l'on place la séparation entre le système physique évoluant de manière unitaire et le dispositif observant un tel système, on trouve le même résultat, pourvu que la chaîne des interactions successives $S-M$, $M-N$... propage de manière parfaite la corrélation avec S . Un tel résultat atténue donc quelque peu la difficulté soulevée par la question posée à la fin du § 3a précédent.

④ Cohérences quantiques macroscopiques

IV-8

a) Les difficultés qui leur sont associées

- Si l'on pousse la chaîne de Von Neumann assez loin, le système physique évoluant suivant l'équation de Schrödinger contiendra des objets de plus en plus macroscopiques qui pourront, d'après des équations analogues à (4.20), se trouver dans des superpositions d'états macroscopiquement différents (par exemple, le "chat de Schrödinger" dans une superposition d'état vivant et d'état mort, l'aiguille d'un appareil de mesure dans une superposition de 2 positions très différentes ...)
- De telles situations ne correspondent pas à notre expérience courante des phénomènes macroscopiques. Plusieurs attitudes peuvent alors être adoptées. On peut considérer que la mécanique quantique n'est plus nécessairement valable à l'échelle macroscopique et que par exemple des nouveaux termes non linéaires dans l'équation d'évolution empêchent les cohérences quantiques macroscopiques d'apparaître. On peut aussi invoquer, et c'est ce que nous ferons dans le cours de cette année, le couplage avec l'environnement toujours présent pour faire disparaître ces cohérences. Nous avons vu en effet dans le cours 88-89 que les cohérences quantiques entre 2 états macroscopiquement différents sont détruites en général très rapidement, proportionnellement au "carré de la distance" entre les 2 états. On peut ainsi comprendre pourquoi de telles cohérences ne sont pas couramment observées et l'intérêt des expériences essayant de trouver des conditions expérimentales où ces cohérences macroscopiques sont suffisamment protégées de l'environnement pour donner naissance à des phénomènes physiques observables.

b) L'interaction M-N peut faire disparaître les cohérences entre états de S+M.

- Revenons au modèle simple considéré dans les §§ 2 et 3 et montrons comment l'introduction de l'interaction M-N peut faire disparaître les cohérences entre états de S+M apparaissant à l'issue de l'interaction S-M. C'est un mécanisme tout à fait analogue qui intervient dans la destruction des cohérences quantiques de S+M par interactions avec un environnement E, beaucoup plus complexe que le système à 2 niveaux N considéré ici.

- En l'absence de N, l'état final de S+M contient des cohérences quantiques entre les états $|S\uparrow\rangle \otimes |M\downarrow\rangle$ et $|S\downarrow\rangle \otimes |M\uparrow\rangle$. Dans la base de ces 2 états, l'opérateur densité $|\Psi_f\rangle\langle\Psi_f|$ est représenté par la matrice

$$\begin{pmatrix} |a|^2 & ab^* \\ a^*b & |b|^2 \end{pmatrix} \quad (4.24)$$

Après interaction avec N, l'état de S+M+N est donné par (4.20). La matrice représentant l'opérateur densité réduit de S+M

(obtenus après trace partielle sur N) s'écrit, dans la base $\{ |s\uparrow\rangle \otimes |m\downarrow\rangle, |s\downarrow\rangle \otimes |m\uparrow\rangle \}$

$$\begin{pmatrix} |a|^2 \langle n\uparrow | n\uparrow \rangle & ab^* \langle n\downarrow | n\uparrow \rangle \\ a^*b \langle n\uparrow | n\downarrow \rangle & |b|^2 \langle n\downarrow | n\downarrow \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |a|^2 & 0 \\ 0 & |b|^2 \end{pmatrix} \quad (4.25)$$

La cohérence réduite entre $|s\uparrow\rangle \otimes |m\downarrow\rangle$ et $|s\downarrow\rangle \otimes |m\uparrow\rangle$ a donc été détruite par l'interaction avec N . Si on s'intéresse uniquement à $s+m$ et non à N , on peut considérer que la superposition d'états (4.12) est remplacé par un mélange statistique d'états. Les corrélations entre s et m peuvent alors être considérées comme des corrélations classiques.

- Insistons bien cependant sur le fait qu'en prenant la trace sur N , nous renonçons à toute l'information contenue dans les corrélations apparues entre M et N et par suite entre s et N . Le résultat (4.25) n'est valable que si l'on renonce à mesurer toute observable sensible à ces corrélations entre s et N ou m et N . Sinon, il faut revenir au vecteur d'état (4.20). Enfin, il faut bien noter que prendre la trace sur N découle en fait de l'application du postulat I sur la mesure aux observables n'agissant que sur s , ou m , ou $s+m$. La transformation du vecteur d'état (4.20) en mélange statistique (4.25) ne résulte donc pas du seul postulat III, mais de l'application des 2 postulats I et III.

Références

- (1) Colloque de la fondation Hugot du Collège de France sur les Implications conceptuelles de la Physique Quantique
Journal de Physique, Colloque C2, Tome 42, Mars 1981
- (2) W. Zurek Phys. Rev. D24, 1516 (1981)
- (3) W. Zurek Phys. Rev. D26, 1862 (1982)
- (4) W. Zurek, dans Experimental Gravity and Measurement Theory
P. Meystre et M.O. Scully eds, Plenum, New York 1983

① Introduction - Idée générale

- Dans le cours IV, nous avons vu que l'introduction d'un nouveau système N interagissant avec l'appareil de mesure M permettait de résoudre 2 difficultés rencontrées dans l'analyse de la mesure d'un système S par un appareil M

(i) Ambiguïté sur la grandeur de S mesurée par M

En l'absence de N , des corrélations quantiques non séparables sont apparues entre S et M après l'interaction $S-M$. Ces corrélations se manifestent sur plusieurs bases corrélées de S et M : $\{|u_n\rangle\}$ de S et $\{|\varphi_n\rangle\}$ de M , ou $\{|v_y\rangle\}$ de S et $\{|\chi_y\rangle\}$ de M ...

Si l'interaction H_{M-N} est diagonale dans la base $\{|\varphi_n\rangle\}$ de M , H_{M-N} ne modifie pas les probabilités d'occupation des états $|\varphi_n\rangle$ de M . Par ailleurs, H_{M-N} n'agit pas sur S . Finalement, H_{M-N} ne perturbe pas les corrélations entre $|u_n\rangle$ et $|\varphi_n\rangle$, alors, que les corrélations entre $|v_y\rangle$ et $|\chi_y\rangle$ sont en général brouillées.

La forme de l'interaction H_{M-N} privilégie donc une base $\{|\varphi_n\rangle\}$ de M , et par suite, la base correspondante $\{|u_n\rangle\}$ de S .

(ii) Cohérences quantiques macroscopiques entre états de $S+M$.

En l'absence de N , des cohérences quantiques entre $|u_n\rangle \otimes |\varphi_n\rangle$ et $|u_{n'}\rangle \otimes |\varphi_{n'}\rangle$ apparaissent à l'issue de l'interaction $S-M$.

L'interaction H_{M-N} corréle les états $|\varphi_n\rangle$ et $|\varphi_{n'}\rangle$ de M à des états $|\Omega_n\rangle$ et $|\Omega_{n'}\rangle$ de N . Si la durée de l'interaction $M-N$ est convenablement choisie, les états $|\Omega_n\rangle$ et $|\Omega_{n'}\rangle$ sont orthogonaux, et la cohérence réduite de $S+M$ (après trace sur N) entre $|u_n\rangle \otimes |\varphi_n\rangle$ et $|u_{n'}\rangle \otimes |\varphi_{n'}\rangle$ se retrouve multipliée par $\langle \Omega_{n'} | \Omega_n \rangle = 0$.

- La situation étudiée dans le cours IV est cependant très peu réaliste. Le système N considéré a très peu de degrés de liberté (système à 2 états) et, surtout, l'interaction $M-N$ doit durer un temps τ' bien défini pour que les propriétés mentionnées plus haut soient valables. Pour d'autres valeurs de τ' , $|\Omega_n\rangle$ et $|\Omega_{n'}\rangle$ ne sont plus nécessairement orthogonaux et peuvent même coïncider.

- Dans ce cours V, nous allons remplacer N par un environnement E ayant un très grand nombre de degrés de liberté. (Nous verrons dans un cours ultérieur que, si M est macroscopique, il est pratiquement impossible d'isoler M de son environnement). De plus, l'interaction H_{M-E} sera toujours présente et non branchée pendant un certain temps. Nous allons montrer alors que les 2 propriétés mentionnées plus haut sont valables de manière beaucoup plus générale.

(i) - L'interaction H_{M-E} privilégie une base particulière de M , la base de l'aiguille ("pointer basis"), et lève donc l'ambiguïté sur la grandeur de S mesurée par M .

(ii) - Dans la base de l'aiguille, les cohérences quantiques réduites sont très rapidement détruites par interaction avec l'environnement E , ce qui fait apparaître des règles de superselection.

② Etude d'un modèle schématique n'utilisant que des systèmes à 2 états.

- Comme dans le § 1b du cours IV, S et M sont des systèmes à 2 états, $|S\uparrow\rangle$ et $|S\downarrow\rangle$ pour S , $|M\uparrow\rangle$ et $|M\downarrow\rangle$ pour M , avec $H_S = H_M = 0$, les états initiaux étant $a|S\uparrow\rangle + b|S\downarrow\rangle$ pour S et $|M\circ\rangle$ pour M (notations identiques à celles du cours IV).

- Par contre, on remplace le système N du § 3b du cours IV par un environnement E formé d'un très grand nombre N de systèmes E_k à 2 états $|k\uparrow\rangle$ et $|k\downarrow\rangle$. L'interaction $M-E$ est décrite par l'hamiltonien suivant généralisant (4.15)

$$H_{M-E} = \sum_{k=1}^N \hbar g_k [|M\uparrow\rangle\langle M\uparrow| - |M\downarrow\rangle\langle M\downarrow|] \otimes [|k\rightarrow\rangle\langle k\rightarrow| - |k\leftarrow\rangle\langle k\leftarrow|] \quad (5.1)$$

On suppose $H_E = 0$.

- On part de l'état initial

$$|\Psi(0)\rangle = (a|S\uparrow\rangle + b|S\downarrow\rangle) \otimes |M\circ\rangle \otimes |E(0)\rangle \quad (5.2)$$

où
$$|E(0)\rangle = \prod_{k=1}^N (\alpha_k |k\rightarrow\rangle + \beta_k |k\leftarrow\rangle) \quad (5.3)$$

Chaque système E_k de E est dans une superposition de $|\rightarrow\rangle$ et $|\leftarrow\rangle$.

- Dans une 1^{ère} étape, S et M interagissent pendant un temps τ très court, suffisamment court pour qu'on puisse négliger l'effet de H_{M-E} pendant ce temps. H_{S-M} et τ sont les mêmes que dans (4.8) et (4.9), de sorte que l'évolution de $S+M$ pendant cette 1^{ère} étape est donnée par (4.12). Comme E reste spectateur pendant ce temps, on peut décrire cette 1^{ère} phase par

$$|\Psi(0)\rangle \rightarrow |\Psi(0+)\rangle = (a|S\uparrow\rangle \otimes |M\downarrow\rangle + b|S\downarrow\rangle \otimes |M\uparrow\rangle) \otimes |E(0)\rangle \quad (5.4)$$

- Une fois que S et M ont fini d'interagir, c-à-d à $t=0+$, M et E interagissent et évoluent sous l'effet de (5.1), S restant spectateur. Etudions tout d'abord l'évolution de $a|S\uparrow\rangle \otimes |M\downarrow\rangle \otimes |E(0)\rangle$. Comme $|M\downarrow\rangle$ est état propre de H_{M-E} , on peut, pour étudier l'évolution de ce terme, remplacer le 1^{er} crochet de (5.1) par -1 . Les états $|k\rightarrow\rangle$ et $|k\leftarrow\rangle$ sont alors états propres de H_{M-E} avec des valeurs propres $-\hbar g_k$ et $+\hbar g_k$, et l'évolution de $|E(0)\rangle$ s'obtient simplement en multipliant $|k\rightarrow\rangle$ par $e^{ig_k t}$, $|k\leftarrow\rangle$ par $e^{-ig_k t}$. Il vient ainsi :

$$a|S\uparrow\rangle \otimes |M\downarrow\rangle \otimes |E(0)\rangle \rightarrow a|S\uparrow\rangle \otimes |M\downarrow\rangle \otimes |E_{\downarrow}(t)\rangle \quad (5.5)$$

avec
$$|E_{\downarrow}(t)\rangle = \prod_{k=1}^N (\alpha_k e^{ig_k t} |k\rightarrow\rangle + \beta_k e^{-ig_k t} |k\leftarrow\rangle) \quad (5.6)$$

Un raisonnement analogue donne

$$b|S\downarrow\rangle \otimes |M\uparrow\rangle \otimes |E(0)\rangle \rightarrow b|S\downarrow\rangle \otimes |M\uparrow\rangle \otimes |E_{\uparrow}(t)\rangle \quad (5.7)$$

avec
$$|E_{\uparrow}(t)\rangle = \prod_{k=1}^N (\alpha_k e^{-ig_k t} |k\rightarrow\rangle + \beta_k e^{ig_k t} |k\leftarrow\rangle) \quad (5.8)$$

Par superposition linéaire de (5.5) et (5.7), on obtient finalement pour l'état de $S+M+E$ à l'instant t

$$|\Psi(t)\rangle = a|S\uparrow\rangle \otimes |M\downarrow\rangle \otimes |E_{\downarrow}(t)\rangle + b|S\downarrow\rangle \otimes |M\uparrow\rangle \otimes |E_{\uparrow}(t)\rangle \quad (5.9)$$

- On constate d'abord sur (5.9) que les états $|m\uparrow\rangle$ et $|m\downarrow\rangle$ sont corrélés avec les états $|E_\uparrow(t)\rangle$ et $|E_\downarrow(t)\rangle$ de E . Comme les probabilités d'occupation de $|m\uparrow\rangle$ et $|m\downarrow\rangle$ ne sont pas modifiées par H_{M-E} (qui est diagonal dans la base $|m\uparrow\rangle, |m\downarrow\rangle$) et que H_{M-E} n'agit pas sur S , on voit clairement sur (5.9) que les corrélations introduites par H_{S-M} entre $|S\uparrow\rangle$ et $|m\downarrow\rangle$ et entre $|S\downarrow\rangle$ et $|m\uparrow\rangle$ ne sont pas modifiées par H_{M-E} . Par contre, on vérifierait aisément, comme dans le cours IV, que dans l'état (5.9), l'état $|S0\rangle$ de S n'est pas corrélé avec un état bien défini de M , comme c'est le cas en l'absence de E . (voir la formule 4.15). Nous verrons en effet plus loin que, pour t suffisamment grand, les états $|E_\uparrow(t)\rangle$ et $|E_\downarrow(t)\rangle$ sont orthogonaux. L'interaction H_{M-E} a donc privilégié une base de M , la base de l'aiguille $\{|m\uparrow\rangle, |m\downarrow\rangle\}$.

- Si on ne s'intéresse qu'à $S+M$, l'opérateur densité réduit de $S+M$, obtenu en prenant la trace sur E de $|\Psi(t)\rangle\langle\Psi(t)|$ est égal à

$$\rho_{S+M}(t) = \begin{pmatrix} |a|^2 \langle E_\downarrow(t) | E_\downarrow(t) \rangle & ab^* \langle E_\uparrow(t) | E_\downarrow(t) \rangle \\ a^*b \langle E_\downarrow(t) | E_\uparrow(t) \rangle & |b|^2 \langle E_\uparrow(t) | E_\uparrow(t) \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |a|^2 & ab^* z(t) \\ a^*b z^*(t) & |b|^2 \end{pmatrix} \quad (5.10)$$

On a utilisé

$$\langle E_\uparrow(t) | E_\uparrow(t) \rangle = \langle E_\downarrow(t) | E_\downarrow(t) \rangle = \prod_{k=1}^N (|\alpha_k|^2 + |\beta_k|^2) = 1 \quad (5.11)$$

qui découle de (5.6) et (5.8) et note

$$z(t) = \langle E_\uparrow(t) | E_\downarrow(t) \rangle = \prod_{k=1}^N [\cos 2g_k t + i(|\alpha_k|^2 - |\beta_k|^2) \sin 2g_k t] \quad (5.12)$$

Il apparaît sur (5.12) que $z(t)$ est le produit d'un très grand nombre N de facteurs, dont chacun a un module égal à $[1 - 4|\alpha_k|^2|\beta_k|^2 \sin^2 2g_k t]^{1/2}$, qui vaut 1 en $t=0$ (et $t = n\pi/2g_k$) et qui autrement est plus petit que 1. Il s'ensuit que, si les fréquences g_k sont réparties au hasard sur un certain intervalle de largeur Δ , le module de $z(t)$, partant de 1 en $t=0$, va tendre vers 0 au bout d'un temps de l'ordre de $1/\Delta$.

La figure 1 (extraite de la référence 1) montre par exemple l'évolution temporelle de $z(t)$ quand on prend $N=5, 10$ ou 15 , tous les $|\alpha_k|^2$ et $|\beta_k|^2$ étant pris égaux à $1/2$, et les g_k étant tirés au hasard dans l'intervalle $0,1$. On voit que $z(t)$ tend bien vers zéro d'autant mieux que N est plus grand. Le caractère discret des g_k est responsable des fluctuations résiduelles de z autour de 0 (variant en $1/\sqrt{N}$). Pour t suffisamment long (d'autant plus long que N est plus grand), le caractère discret des g_k peut également faire apparaître des "réurrences"

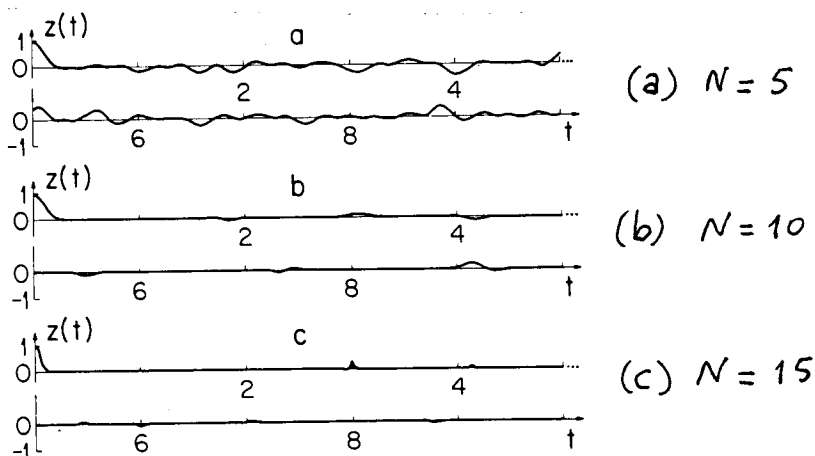


Fig. 1
(extraite de la référence 1)

③ Etude plus générale

a) Forme générale de l'hamiltonien - Hypothèse simplificatrice

- L'hamiltonien H du système $M+E$ s'écrit

$$H = H_M + H_E + H_{M-E} \quad (5.13)$$

où H_M et H_E sont les hamiltoniens propres de M et E , H_{M-E} l'hamiltonien d'interaction $M-E$

- Comme nous l'avons vu plus haut, la base privilégiée $\{|\varphi_a\rangle\}$ de M est déterminée par H_{M-E} qui est diagonal dans cette base. Nous pouvons donc écrire

$$H_{M-E} = \sum_a |\varphi_a\rangle \langle \varphi_a| \otimes W_a \quad (5.14)$$

où W_a est un opérateur de E , dépendant de a .

- Très souvent, on prend pour H_{M-E} la forme particulière suivante

$$H_{M-E} = V \otimes W \quad (5.15)$$

où V est un opérateur de M , W un opérateur de E . Comme H_{M-E} est diagonal dans la base $\{|\varphi_a\rangle\}$ de M , il en est de même de V qui peut s'écrire

$$V = \sum_a \lambda_a |\varphi_a\rangle \langle \varphi_a| \quad (5.16)$$

où λ_a est la valeur propre de V correspondant à l'état propre $|\varphi_a\rangle$. En reportant (5.16) dans (5.15) et en comparant l'expression ainsi obtenue avec (5.14), on voit que, si H_{M-E} est donné par (5.15)

$$W_a = \lambda_a W \quad (5.17)$$

- M ne peut quitter l'état $|\varphi_a\rangle$ sous l'effet de H_{M-E} . Par contre, l'hamiltonien propre H_M pourrait très bien faire transiter M de $|\varphi_a\rangle$ vers $|\varphi_b\rangle$ si $\langle \varphi_b | H_M | \varphi_a \rangle \neq 0$.

Pour simplifier la discussion et les calculs qui suivent, nous supposons ici que H_M est lui aussi diagonal dans la base $\{|\varphi_a\rangle\}$:

$$H_M = \sum_a E_a |\varphi_a\rangle \langle \varphi_a| \quad (5.18)$$

où E_a est l'énergie "non perturbée" de $|\varphi_a\rangle$. M ne peut donc quitter l'état $|\varphi_a\rangle$, ni sous l'effet de l'évolution propre (H_M), ni sous l'effet de l'interaction avec l'environnement E (H_{M-E}).

Une telle hypothèse simplificatrice entraîne que, dans la base $\{|\varphi_a\rangle\}$, la relaxation induite par E est uniquement de type T_2 . En contrepartie, l'absence de relaxation de type T_1 , va nous permettre de donner de la relaxation de type T_2 , une théorie plus générale que celle trouvée dans d'autres traitements (basés par exemple sur l'équation pilote dans les conditions de rétrécissement par le mouvement).

- Nous reviendrons dans un cours ultérieur sur le cas où H_M a des éléments non diagonaux dans la base $\{|\varphi_a\rangle\}$ qui diagonalise H_{M-E} . Nous verrons comment l'interaction répétée avec E gèle progressivement les oscillations de Rabi entre $|\varphi_a\rangle$ et $|\varphi_b\rangle$ induites par H_M (paradoxe de Zénon quantique)

- A ce stade, nous ne ferons aucune hypothèse particulière sur H_E .

b. Lien avec l'opérations de mesure - Buts du calcul

- Dans ce qui précède, nous n'avons considéré que M et E . En fait, il y a également le système S mesuré par M .

Juste avant l'instant $t=0$, S et M ont interagi pendant un temps très court, suffisamment court pour qu'on puisse ignorer toute interaction avec E pendant ce temps. L'interaction $S-M$ a introduit des corrélations parfaites entre S et M , et l'état de $S+M+E$ à $t=0$ est donné par

$$|\Psi_{SM E}(0)\rangle = \left(\sum_a c_a |u_a\rangle \otimes |\varphi_a\rangle \right) \otimes |\chi(0)\rangle \quad (5.19)$$

où $|u_a\rangle$ est l'état de S corrélié avec l'état $|\varphi_a\rangle$ de M , $|\chi(0)\rangle$ l'état de E .

- Après $t=0$, S et M sont séparés et n'interagissent plus. On néglige d'autre part les interactions de S avec E (S est un système microscopique, beaucoup moins sensible à E que l'appareil macroscopique M). S restera donc "spectateur" après $t=0$, et l'évolution de $|u_a\rangle$ sera simplement donnée par $|u_a(t)\rangle = e^{-iH_S t/\hbar} |u_a\rangle$, où H_S est l'hamiltonien propre de S .

- Après $t=0$, on peut donc "oublier" S et considérer uniquement $M+E$ partant de l'état

$$|\Psi_{ME}(0)\rangle = \left(\sum_a c_a |\varphi_a\rangle \right) \otimes |\chi(0)\rangle \quad (5.20)$$

Comme ni H_M , ni H_{ME} , ne peuvent faire quitter l'état $|\varphi_a\rangle$ à M , l'état (5.20) devient à l'instant t

$$|\Psi_{ME}(t)\rangle = \sum_a c_a |\varphi_a\rangle e^{-iE_a t/\hbar} \otimes |\chi_a(t)\rangle \quad (5.21)$$

où $|\chi_a(t)\rangle$ est un état de E corrélié avec $|\varphi_a\rangle$. Le but de ce § 3 est de calculer les états $|\chi_a(t)\rangle$ ainsi que les produits scalaires $\langle \chi_b(t) | \chi_a(t) \rangle$ qui apparaissent comme des facteurs de réductions des cohérences réduites de M entre $|\varphi_a\rangle$ et $|\varphi_b\rangle$

$$\begin{aligned} \langle \varphi_a | (T_{2M} |\Psi_{ME}(t)\rangle \langle \Psi_{ME}(t) |) | \varphi_b \rangle &= c_a c_b^* e^{-i(E_a - E_b)t/\hbar} T_{2M} |\chi_a(t)\rangle \langle \chi_b(t) | \\ &= c_a c_b^* e^{-i(E_a - E_b)t/\hbar} \langle \chi_b(t) | \chi_a(t) \rangle \end{aligned} \quad (5.22)$$

- Ayant déterminé $|\Psi_{ME}(t)\rangle$ en (5.21), $|\Psi_{SM E}(t)\rangle$ s'en déduit immédiatement. Il suffit de multiplier chaque $|\varphi_a\rangle$ par $|u_a(t)\rangle$

$$|\Psi_{SM E}(t)\rangle = \sum_a c_a |u_a(t)\rangle \otimes |\varphi_a\rangle e^{-iE_a t/\hbar} \otimes |\chi_a(t)\rangle \quad (5.23)$$

Le facteur de réduction $\langle \chi_b(t) | \chi_a(t) \rangle$ est également celui qui réduit les cohérences quantiques de $S+M$ entre $|u_a(t)\rangle \otimes |\varphi_a\rangle$ et $|u_b(t)\rangle \otimes |\varphi_b\rangle$. Par ailleurs, il apparaît clairement sur (5.23) que les corrélations initiales présentes dans (5.19) entre $|u_a\rangle$ et $|\varphi_a\rangle$, $|u_b\rangle$ et $|\varphi_b\rangle$... ne sont pas détruites par interactions de M avec E . Ceci ne serait plus vrai dans toute autre base de M .

Dans ce qui suit, nous nous contenterons donc de calculer le passage de (5.20) à (5.21).

c. Niveaux d'énergie du système global $M+E$

- Comme tous les termes de l'hamiltonien (5.13) de $M+E$ sont diagonaux dans la base $\{|\varphi_a\rangle\}$, on peut diagonaliser H dans chaque sous-espace $|\varphi_a\rangle$. Revenant H_E sous la forme

$$H_E = \mathbb{I}_M \otimes H_E = \sum_a |\varphi_a\rangle \langle \varphi_a| \otimes H_E \quad (5.24)$$

et regroupant (5.14), (5.18) et (5.24), on peut écrire

$$H = H_m + H_E + H_{m-E} = |a\rangle\langle a| \otimes (E_a + A) + |b\rangle\langle b| \otimes (E_b + B) + \dots \quad (5.25)$$

où A, B, \dots sont des opérateurs de E dépendant de a, b, \dots et donnés par

$$A = H_E + W_a \quad B = H_E + W_b \quad \dots \quad (5.26)$$

- Introduisons les états propres $|\alpha_i\rangle$ de A ($i=1,2,\dots$), de valeurs propres $E_{\alpha_i}^a$

$$A|\alpha_i\rangle = E_{\alpha_i}^a |\alpha_i\rangle \quad (5.27)$$

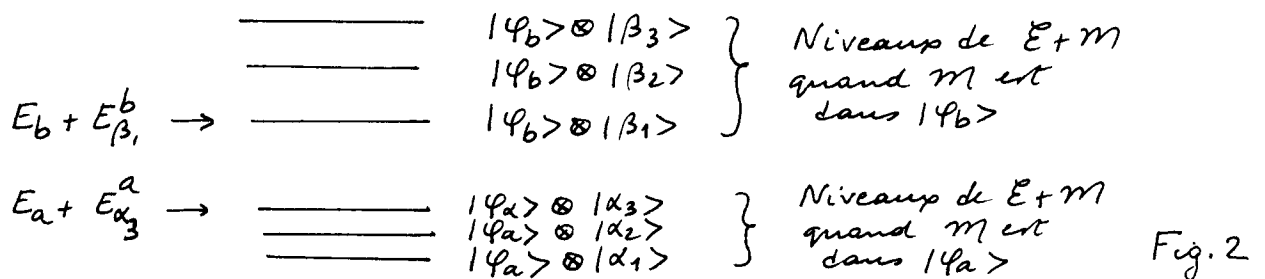
On déduit alors de (5.25) et (5.27) que

$$H|a\rangle \otimes |\alpha_i\rangle = (E_a + E_{\alpha_i}^a) |a\rangle \otimes |\alpha_i\rangle \quad (5.28)$$

Les états $|a\rangle \otimes |\alpha_i\rangle$ sont donc des niveaux d'énergie de $m+E$, pour lesquels m est dans $|a\rangle$, E dans $|\alpha_i\rangle$ ($i=1,2,\dots$) (voir Fig. 2). On peut de même introduire les états propres de B

$$B|\beta_j\rangle = E_{\beta_j}^b |\beta_j\rangle \quad (5.29)$$

conduisant à une autre multiplicité de niveaux d'énergie de $m+E$, pour lesquels m est dans $|\varphi_b\rangle$, E dans $|\beta_j\rangle$ (voir Fig. 2) et ainsi de suite



- Montrons enfin qu'on peut donner une forme explicite des états $|\chi_a(t)\rangle, |\chi_b(t)\rangle$ apparaissant dans (5.21). Il suffit d'écrire

$$|\Psi_{mE}(t)\rangle = e^{-iHt/\hbar} |\Psi_{mE}(0)\rangle \quad (5.30)$$

et d'utiliser (5.20) et (5.25) pour obtenir, par comparaison avec (5.21)

$$|\chi_a(t)\rangle = e^{-iAt/\hbar} |\chi(0)\rangle \quad |\chi_b(t)\rangle = e^{-iBt/\hbar} |\chi(0)\rangle \quad \dots \quad (5.31)$$

Nous pouvons maintenant utiliser les états propres de A et B introduits plus haut pour calculer $\langle \chi_b(t) | \chi_a(t) \rangle$. Nous allons pour cela, comme dans la référence 2, distinguer 2 cas différents suivant que A et B commutent entre eux ou non.

d) Relaxation T_2 de type purement inhomogène

- Nous supposons tout d'abord que A et B commutent.

$$[A, B] = 0 \quad (5.32)$$

On peut alors trouver une base de vecteurs propres communs à A et B

$$\begin{cases} A|\alpha_i\rangle = E_{\alpha_i}^a |\alpha_i\rangle \\ B|\alpha_i\rangle = E_{\alpha_i}^b |\alpha_i\rangle \end{cases} \quad (5.33.a) \quad (5.33.b)$$

Notons cependant que les valeurs propres $E_{\alpha_i}^a$ et $E_{\alpha_i}^b$ de A et B corres-

pendant au même vecteur propre $|\alpha_i\rangle$ ne peuvent pas coïncider pour tout i . Si tel était le cas, on aurait alors $A=B$, et dans le sous-espace $\{|\varphi_a\rangle, |\varphi_b\rangle\}$, on pourrait écrire

$$H = (E_a + A) \otimes |\varphi_a\rangle\langle\varphi_a| + (E_b + A) \otimes |\varphi_b\rangle\langle\varphi_b| \\ = H_M + A \otimes (|\varphi_a\rangle\langle\varphi_a| + |\varphi_b\rangle\langle\varphi_b|) \quad (5.34)$$

Comme $|\varphi_a\rangle\langle\varphi_a| + |\varphi_b\rangle\langle\varphi_b|$ se réduit à l'opérateur unité de M , $\mathbb{1}_M$, dans le sous-espace $\{|\varphi_a\rangle, |\varphi_b\rangle\}$, on aurait alors, dans la restriction de H à ce sous-espace, aucun terme dépendant à la fois de M et de E , et susceptible donc de décrire une interaction entre M et E .

- Développons l'état initial $|\chi(0)\rangle$ de E sur la base $\{|\alpha_i\rangle\}$

$$|\chi(0)\rangle = \sum_i \gamma_i |\alpha_i\rangle \quad (5.35)$$

On obtient alors, à partir de (5.31), (5.33) et (5.35)

$$|\chi_a(t)\rangle = \sum_i \gamma_i e^{-iE_{\alpha_i}^a t/\hbar} |\alpha_i\rangle \quad (5.36.a)$$

$$|\chi_b(t)\rangle = \sum_i \gamma_i e^{-iE_{\alpha_i}^b t/\hbar} |\alpha_i\rangle \quad (5.36.b)$$

et par suite, comme $\langle\alpha_j|\alpha_i\rangle = \delta_{ij}$

$$\langle\chi_b(t)|\chi_a(t)\rangle = \sum_i |\gamma_i|^2 e^{-i(E_{\alpha_i}^a - E_{\alpha_i}^b)t/\hbar} = \sum_i p_i e^{i\omega_i t} \quad (5.37)$$

où l'on a posé

$$p_i = |\gamma_i|^2 \quad \hbar\omega_i = E_{\alpha_i}^b - E_{\alpha_i}^a \quad (5.38)$$

Comme les γ_i sont les coefficients du développement d'un vecteur normé $|\chi(0)\rangle$ on a bien sur

$$0 \leq p_i \leq 1 \quad \sum_i p_i = 1 \quad (5.39)$$

- Il apparaît clairement sur (5.37) que, pour $t=0$, $\langle\chi_b(t)|\chi_a(t)\rangle = 1$. Puis, quand t augmente, et si un grand nombre de p_i sont non nuls avec des fréquences ω_i différentes les unes des autres, on voit que $\langle\chi_b(t)|\chi_a(t)\rangle$ tend vers zéro. Les diverses exponentielles $p_i e^{i\omega_i t}$ finissent en effet par se brouiller. Si le nombre de p_i non nuls est N et si les fréquences ω_i sont réparties au hasard, il subsiste des fluctuations de $\langle\chi_b(t)|\chi_a(t)\rangle$ autour de 0, de l'ordre de $1/\sqrt{N}$, et des récurrences peuvent apparaître aux temps très longs.

- Il est possible de donner de (5.37) une interprétation très simple, en termes de "largeur de raie inhomogène". On peut en effet réécrire (5.37) sous la forme

$$z(t) = \langle\chi_b(t)|\chi_a(t)\rangle = \int f_{ba}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (5.40)$$

où

$$f_{ba}(\omega) = \sum_i |\gamma_i|^2 \delta\left[\omega - \frac{E_{\alpha_i}^b - E_{\alpha_i}^a}{\hbar}\right] \quad (5.41)$$

La fonction $z(t)$, qui décrit comment la cohérence réduite de M entre $|\varphi_a\rangle$ et $|\varphi_b\rangle$ décroît et tend vers zéro sous l'effet du couplage avec E (voir 5.22), apparaît ainsi sous la forme de la transformée d'une densité spectrale $f_{ba}(\omega)$ donnée en (5.41).

Pour interpréter $f_{ba}(\omega)$, considérons le problème "optique" suivant. Supposons $M+E$ dans un mélange statistique des états $|\varphi_a\rangle \otimes |\alpha_i\rangle$ avec des poids $p_i = |\gamma_i|^2$ et supposons que M absorbe de la lumière sur la transition $|\varphi_a\rangle \rightarrow |\varphi_b\rangle$. Comme les états $|\beta_j\rangle$ de E dans la multiplicité $|\varphi_b\rangle$ coïncident avec les états $|\alpha_i\rangle$ de E

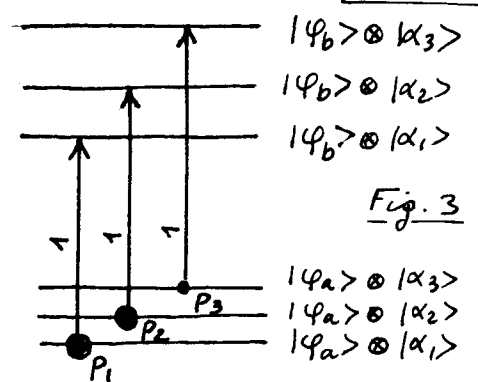


Fig. 3

dans la multiplicité $|\Phi_a\rangle$ (voir 5.33) et que $\langle \alpha_j | \alpha_i \rangle = \delta_{ij}$, la seule raie permise partant de $|\Phi_a\rangle \otimes |\alpha_i\rangle$ est celle qui aboutit à $|\Phi_b\rangle \otimes |\alpha_i\rangle$ (voir Fig. 3 avec $i=1,2,3$). Elle a une "force d'oscillateur" $\langle \alpha_i | \alpha_i \rangle = 1$, une intensité proportionnelle à la population P_i du niveau de départ (cercles en noir sur la figure 3) et une fréquence (par rapport à la fréquence $(E_b - E_a)/\hbar$ de M tout seul) égale à $(E_{\alpha_i}^b - E_{\alpha_i}^a)/\hbar$. La densité spectrale $f_{ba}(\omega)$ donnée en (5.41) n'est donc autre que le spectre

d'absorption de M couplé à E et partant de l'état initial donné plus haut. La largeur spectrale d'un tel spectre est due au fait que les fréquences d'absorption ne sont pas les mêmes suivant l'état de départ $|\Phi_a\rangle \otimes |\alpha_i\rangle$. Pour cette raison, on peut considérer le spectre $f_{ba}(\omega)$ comme un spectre inhomogène et l'amortissement décrit par $\zeta(t)$ comme une relaxation de type T_2 inhomogène.

- Une telle situation, correspondant à $[A, B] = 0$, est la seule qui ait été considérée par Zurek (qui ne conserve que la partie de $H_M \otimes E$ diagonale dans la base diagonalisant H_E - voir ref. 1 - On peut alors montrer aisément qu'une telle approximation entraîne $[A, B] = 0$). Elle a l'inconvénient d'être très particulière et de ne conduire à aucun amortissement des cohérences réduites de M si l'état initial de E est un état propre de A ou B . En effet, dans un tel cas, tous les P_i sont nuls sauf un qui vaut 1, et $|\zeta(t)|$ reste égal à 1 pour tout t (voir 5.37). C'est pourquoi la situation $[A, B] \neq 0$, étudiée dans le paragraphe suivant, est beaucoup plus réaliste.

e. Relaxation de type T_2 à la fois homogène et inhomogène.

- Nous considérons maintenant le cas beaucoup plus général où $[A, B] \neq 0$ et où les vecteurs propres de A et B sont donc différents (voir (5.27) et (5.29)). Commençons par considérer le cas où E est initialement dans un état $|\alpha_i\rangle$ bien défini

$$|\chi(0)\rangle = |\alpha_i\rangle \tag{5.42}$$

Nous allons montrer que, même dans ce cas, $\langle \chi_b(t) | \chi_a(t) \rangle$ tend bien vers 0 quand t croît (contrairement à ce qui se passe si $[A, B] = 0$ - voir fin du paragraphe précédent).

- En reportant (5.42) dans (5.31), et en utilisant (5.33), on obtient

$$|\chi_a(t)\rangle = e^{-iA t/\hbar} |\alpha_i\rangle = e^{-iE_{\alpha_i}^a t/\hbar} |\alpha_i\rangle \tag{5.43.a}$$

$$|\chi_b(t)\rangle = e^{-iB t/\hbar} |\alpha_i\rangle = \sum_j e^{-iE_{\beta_j}^b t/\hbar} |\beta_j\rangle \langle \beta_j | \alpha_i \rangle = \sum_j \langle \beta_j | \alpha_i \rangle e^{-iE_{\beta_j}^b t/\hbar} |\beta_j\rangle \tag{5.43.b}$$

de sorte que

$$\zeta(t) = \langle \chi_b(t) | \chi_a(t) \rangle = \sum_j |\langle \beta_j | \alpha_i \rangle|^2 e^{i(E_{\beta_j}^b - E_{\alpha_i}^a) t/\hbar} \tag{5.44}$$

$\zeta(t)$ apparaît comme une somme d'exponentielles oscillant à des fréquences différentes $(E_{\beta_j}^b - E_{\alpha_i}^a)/\hbar$, pondérées par des facteurs $|\langle \beta_j | \alpha_i \rangle|^2$. Si $|\alpha_i\rangle$ est non orthogonal à plusieurs $|\beta_j\rangle$ (comme c'est le cas en général si $[A, B] \neq 0$) et si les fréquences $(E_{\beta_j}^b - E_{\alpha_i}^a)/\hbar$ sont suffisamment différentes, $\zeta(t)$ tend vers 0 quand t croît.

- Comme dans le paragraphe précédent, on peut considérer que la fonction $z(t)$ écrite en (5.44) est la transformée de Fourier d'une densité spectrale

$$f_{ba}^i(\omega) = \sum_{\beta_j} |\langle \beta_j | \alpha_i \rangle|^2 \delta(\omega - \frac{E_{\beta_j}^b - E_{\alpha_i}^a}{\hbar}) \quad (5.45)$$

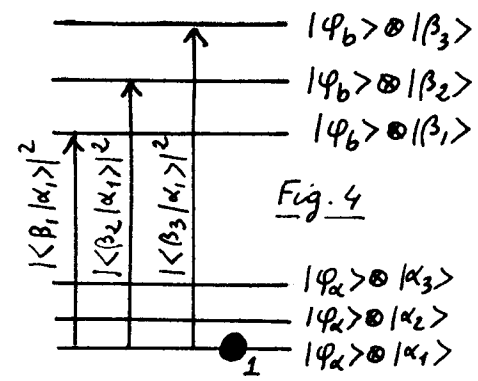


Fig. 4

qui peut être interprété "optiquement" de la manière suivante. Le système global $M + E$ part de l'état $|\phi_a\rangle \otimes |\alpha_i\rangle$ (voir Fig. 4 où $i=1$). Comme les états propres de E ne sont pas les mêmes si M est dans $|\phi_a\rangle$ ou $|\phi_b\rangle$, M peut, par absorption de lumière, passer de $|\alpha_i\rangle$ vers tous les $|\beta_j\rangle$, les "forces d'oscillateur" des diverses transitions étant $|\langle \beta_j | \alpha_i \rangle|^2$ et les fréquences $(E_{\beta_j}^b - E_{\alpha_i}^a)/\hbar$. La densité spectrale (5.45) peut donc être considérée comme donnant la forme de la raie d'absorption de M à partir d'un état $|\alpha_i\rangle$ bien défini. Il n'y a plus de sommation sur plusieurs états $|\alpha_i\rangle$ (comme dans (5.41)). Le spectre (5.45) est donc un spectre homogène et l'amortissement $z(t)$ correspondant (5.44) décrit une relaxation de type T_2 homogène.

- Evidemment, si plusieurs états $|\alpha_i\rangle$ sont initialement peuplés, il faut sommer tous les spectres homogènes $f_{ba}^i(\omega)$ pondérés par les probabilités d'occupation p_i des états $|\alpha_i\rangle$. Si les centres des différents spectres $f_{ba}^i(\omega)$ avec $i=1, 2, \dots$ ne coïncident pas, il y aura en plus une contribution inhomogène à la densité spectrale $f_{ba}(\omega)$ et bien sûr une contribution inhomogène à la relaxation de type T_2 . Le centre $\bar{\omega}_i$ du spectre $f_{ba}^i(\omega)$ (par rapport à $(E_b - E_a)/\hbar$) s'obtient en pondérant les positions des transitions $|\alpha_i\rangle \rightarrow |\beta_j\rangle$ (i fixe, j variable) par leurs probabilités $|\langle \beta_j | \alpha_i \rangle|^2$

$$\begin{aligned} \hbar \bar{\omega}_i &= \sum_{\beta_j} (E_{\beta_j}^b - E_{\alpha_i}^a) |\langle \beta_j | \alpha_i \rangle|^2 = \sum_{\beta_j} \langle \alpha_i | \beta_j \rangle E_{\beta_j}^b \langle \beta_j | \alpha_i \rangle - E_{\alpha_i}^a \sum_{\beta_j} \langle \alpha_i | \beta_j \rangle \langle \beta_j | \alpha_i \rangle \\ &= \langle \alpha_i | B | \alpha_i \rangle - E_{\alpha_i}^a = \langle \alpha_i | (B - A) | \alpha_i \rangle \end{aligned} \quad (5.46)$$

Si $\hbar \bar{\omega}_i$ ne dépend pas de i , il n'y a pas de contribution inhomogène à T_2 .

f - Limite des faibles couplages - Liens avec l'équation pilote

- Montrons tout d'abord qu'une autre interprétation peut être donnée de l'expression (5.44) de $z(t)$.

Considérons pour cela un système quantique d'hamiltonien $\hbar = B$ et d'états propres d'énergie $|\beta_j\rangle$. Supposons qu'à l'instant $t=0$ ce système soit dans l'état $|\alpha_i\rangle$ qui ne coïncide pas avec les états propres $|\beta_j\rangle$ de $\hbar = B$

$$|\psi(0)\rangle = |\alpha_i\rangle \quad (5.47)$$

Un instant t après, l'état du système est devenu

$$|\psi(t)\rangle = e^{-iBt/\hbar} |\psi(0)\rangle = \sum_{\beta_j} e^{-iE_{\beta_j}^b t/\hbar} |\beta_j\rangle \langle \beta_j | \alpha_i \rangle \quad (5.48)$$

et $z(t)$ peut alors être interprété comme

$$z(t) = \langle \alpha_i | e^{-iBt/\hbar} | \alpha_i \rangle \quad (5.49)$$

c'est à dire comme l'amplitude de probabilité pour que le système, partant de l'état $|\alpha_i\rangle$ à $t=0$, soit resté dans l'état $|\alpha_i\rangle$ à l'instant t .

- L'état initial $|\alpha_i\rangle$, état propre de A , peut être considéré comme un état propre d'un hamiltonien "non perturbé" $\hbar_0 = A$. Sous

l'effet du couplage $v = h - h_0$, qui est égal à $B - A = W_b - W_a$ (voir (5.26)), cet état va se désintégrer vers le quasicontinuum formé par les autres états propres de h_0 , et $z(t)$ est l'amplitude qui décrit cette désintégration.

- Si le couplage $v = h - h_0 = B - A$ est assez faible, c-à-d si H_{M-E} est assez faible (puisque W_b et W_a sont reliés à H_{M-E} - voir (5.14)), les conditions d'application de la règle d'or de Fermi sont remplies et on peut définir une probabilité de désintégration par unité de temps, proportion au carré d'un élément de matrice de v et à une densité d'états finals, et $z(t)$ va décroître exponentiellement. On peut montrer que le résultat obtenu pour $z(t)$ coïncide avec celui fourni par l'équation pilote qui prédit que les cohérences réduites de M s'amortissent exponentiellement sous l'effet du couplage avec E qui apparaît comme un réservoir (voir cours 88-89, appendice du cours VIII et références in). Le traitement présenté ici est cependant plus général que l'équation pilote. L'expression générale (5.44) obtenue pour $z(t)$ peut contenir des corrections non markoviennes (décroissance non exponentielle). Il y a aussi une contribution inhomogène à la relaxation T_2 . La valeur moyenne de $v = B - A$ dans l'état $|\alpha_i\rangle$ (voir (5.46)) peut en effet être non nulle et varier avec α_i , contrairement à ce qui est supposé en général dans l'établissement de l'équation pilote.

- Dans le cas particulier où $H_{M-E} = V \otimes W$ (voir (5.15)), on a $v = B - A = (\lambda_b - \lambda_a)W$ où λ_a et λ_b sont les valeurs propres de l'opérateur V de M apparaissant dans H_{M-E} (voir (5.17) et (5.16)). Le temps de destruction de la cohérence réduite de M entre $|\varphi_a\rangle$ et $|\varphi_b\rangle$ sera donc, à la limite des faibles couplages, proportionnel à $(\lambda_a - \lambda_b)^2$ puisqu'il fait intervenir alors le carré des éléments de matrice de v . On retrouve que la cohérence réduite entre les 2 états $|\varphi_a\rangle$ et $|\varphi_b\rangle$, états propres de l'observable V de M apparaissant dans l'hamiltonien d'interaction H_{M-E} , décroit proportionnellement au carré de la distance entre les 2 valeurs propres

Références

- (1) W. Zurek Phys. Rev. D 26, 1862 (1982)
- (2) T. Endo. Journ. of the Phys. Soc. of Jap. 57, 71 (1988)
T. Endo " " " " " " " 56, 1684 (1987)

Résultats établis dans le cours précédent et buts de ce cours

- Après une interaction correspondant à une opération de mesure idéale, le système S et l'appareil de mesure ont subi l'évolution :

$$|\Psi_i\rangle = \left(\sum_a c_a |u_a\rangle\right) \otimes |\varphi_0\rangle \rightarrow |\Psi_f\rangle = \sum_a c_a |u_a\rangle \otimes |\varphi_a\rangle \quad (6.1)$$

mettant en évidence des corrélations quantiques non-séparables entre les états orthogonaux $|u_a\rangle$ de S et les états orthogonaux $|\varphi_a\rangle$ de M .

- A partir de $t=0$, M interagit avec un environnement E ayant un très grand nombre de degrés de liberté et initialement dans l'état $|\chi(0)\rangle$. L'interaction $H_{M,E}$ est diagonale dans la base $\{|\varphi_a\rangle\}$ de M . Sous l'effet de $H_{M,E}$, le système $S+M+E$ évolue suivant

$$|\Psi_{SM,E}(0)\rangle = \left(\sum_a c_a |u_a\rangle \otimes |\varphi_a\rangle\right) \otimes |\chi(0)\rangle \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\Psi_{SM,E}(t)\rangle = \sum_a c_a |u_a(t)\rangle \otimes |\varphi_a(t)\rangle \otimes |\chi_a(t)\rangle \quad (6.2)$$

où $|u_a(t)\rangle = e^{-iH_S t/\hbar} |u_a\rangle$ et $|\varphi_a(t)\rangle = e^{-iH_M t/\hbar} |\varphi_a\rangle = e^{-i\epsilon_a t/\hbar} |\varphi_a\rangle$ décrivent les évolutions propres de $|u_a\rangle$ et $|\varphi_a\rangle$, et où $|\chi_a(t)\rangle$ est un état de E corrélié avec l'état $|\varphi_a\rangle$ de M . Le point important est que

$$\text{Pour } t \text{ suffisamment long } \langle \chi_b(t) | \chi_a(t) \rangle = 0 \text{ si } b \neq a \quad (6.3)$$

- Dans ce cours, nous commençons par récapituler les points importants de la théorie de Zurek et par en discuter le contenu physique (§4). Puis nous présentons un modèle particulier où les interactions $S-M$ et $M-E$ ne sont pas séparées dans le temps mais constamment présentes, et où il est possible d'obtenir une expression analytique pour l'évolution au cours du temps de l'opérateur densité réduit de $S+M$ (§5).

④ Discussion physique

a. L'effet de l'interaction $M-E$ peut être considéré comme une mesure idéale de M par E .

- Il apparaît clairement sur (6.2) que, sous l'effet de H_{SM} , il s'établit des corrélations entre les états $|\varphi_a\rangle, |\varphi_b\rangle, \dots$ de M et les états $|\chi_a(t)\rangle, |\chi_b(t)\rangle, \dots$ de E . Comme les états $|\chi_a(t)\rangle, |\chi_b(t)\rangle, \dots$ deviennent orthogonaux au bout d'un temps suffisamment long, cette corrélation devient parfaite, et l'évolution (6.2) peut être considérée comme une opération de mesure idéale de M par E . Le temps T_2 au bout duquel $|\chi_a(t)\rangle, |\chi_b(t)\rangle, \dots$ deviennent orthogonaux peut être considéré comme le temps de mesure de M par E .

- Si l'on prend la trace sur E , c'est qu'on ne s'intéresse plus à E . On peut dans ce cas considérer que la mesure de M par E n'est pas eue.

- L'évolution (6.2) ne modifie pas les probabilités d'occupation des états $|\varphi_a\rangle$ de M (puisque $|\varphi_a(t)\rangle$ et $|\varphi_a\rangle$ diffèrent par un facteur de phase). Ceci est dû au fait que H_{SM} et $H_{M,E}$ ont été supposés tous deux diagonaux dans la base $\{|\varphi_a\rangle\}$ de M (voir (5.14) et (5.18)). On dit

alors que \mathcal{E} effectue une mesure "non-démolissante" des observables de \mathcal{M} diagonales dans la base $\{|\varphi_a\rangle\}$. La base privilégiée de \mathcal{M} est celle des observables de \mathcal{M} sur lesquelles \mathcal{E} effectue en permanence une mesure non-démolissante ("P.N.D.")

b - La mesure de \mathcal{M} par \mathcal{E} permet de résoudre deux des difficultés d'une théorie quantique de la mesure.

(i) Plus d'ambiguïté sur la grandeur de \mathcal{S} mesurée par \mathcal{M}

- La comparaison de (6.1) et (6.2) montre tout d'abord que l'interaction avec l'environnement laisse intactes les corrélations entre $|\psi_a\rangle$ et $|\varphi_a\rangle$, $|\psi_b\rangle$ et $|\varphi_b\rangle$...

- En changeant de base pour \mathcal{S} , $\{|\psi_a\rangle\} \rightarrow \{|\nu_y\rangle\}$, on peut écrire $|\psi_a\rangle = \sum_y |\nu_y\rangle \langle \nu_y | \psi_a \rangle$, et par suite (6.1) sous la forme

$$|\Psi_{\mathcal{S}\mathcal{M}}(0)\rangle = \sum_y |\nu_y\rangle \otimes |\Omega_y\rangle \quad (6.4)$$

$$\text{ou} \quad |\Omega_y\rangle = \sum_a c_a \langle \nu_y | \psi_a \rangle |\varphi_a\rangle \quad (6.5)$$

est un état de \mathcal{E} pouvant être considéré comme corrélé avec $|\nu_y\rangle$. En présence de \mathcal{E} , comme $|\varphi_a\rangle$ se corrèle avec $|\chi_a(t)\rangle$, le vecteur $|\Omega_y\rangle \otimes |\chi(0)\rangle$ de $\mathcal{M} + \mathcal{S}$ devient à l'instant t

$$|\Omega_y\rangle \otimes |\chi(0)\rangle \rightarrow \sum_a c_a \langle \nu_y | \psi_a \rangle |\varphi_a(t)\rangle \otimes |\chi_a(t)\rangle \quad (6.6)$$

ce qui donne pour l'état de $\mathcal{S} + \mathcal{M} + \mathcal{E}$ à l'instant t

$$|\Psi_{\mathcal{S}+\mathcal{M}+\mathcal{E}}(t)\rangle = \sum_y |\nu_y\rangle \otimes \left[\sum_a c_a \langle \nu_y | \psi_a \rangle |\varphi_a(t)\rangle \otimes |\chi_a(t)\rangle \right] \quad (6.7)$$

Dès que les vecteurs $|\chi_a(t)\rangle$ deviennent orthogonaux les uns aux autres, le vecteur de $\mathcal{S} + \mathcal{M}$ figurant dans le crochet de (6.7) n'est plus un produit d'un vecteur de \mathcal{M} par un vecteur de \mathcal{E} , et les corrélations initiales entre $|\nu_y\rangle$ et $|\Omega_y\rangle$, figurant dans (6.4), ont disparu: l'état $|\nu_y\rangle$ de \mathcal{S} ne reste pas corrélé avec un état bien défini de \mathcal{M} .

Il y a donc une seule base $\{|\varphi_a\rangle\}$ de \mathcal{M} dans laquelle les corrélations $\mathcal{S} - \mathcal{M}$ ne sont pas brouillées par \mathcal{E} . C'est la base de \mathcal{M} qui diagonalise $H_{\mathcal{M}\mathcal{E}}$. Les observables de \mathcal{S} mesurées par \mathcal{M} sont celles qui sont diagonales dans la base $\{|\psi_a\rangle\}$ corrélée avec la base privilégiée $\{|\varphi_a\rangle\}$ de \mathcal{M} . C'est donc finalement la forme de l'interaction avec \mathcal{E} qui fixe les grandeurs de \mathcal{S} mesurées par \mathcal{M} .

(ii) les cohérences quantiques de $\mathcal{S} + \mathcal{M}$ dans la base $\{|\psi_a\rangle \otimes |\varphi_a\rangle\}$ sont détruites.

- les cohérences quantiques de $\rho_{\mathcal{S}\mathcal{M}}(t) = \text{Tr}_{\mathcal{E}} |\Psi_{\mathcal{S}\mathcal{M}\mathcal{E}}(t)\rangle \langle \Psi_{\mathcal{S}\mathcal{M}\mathcal{E}}(t)|$ entre $|\varphi_a\rangle$ et $|\varphi_b\rangle$ sont réduites par rapport à celles de $|\Psi_{\mathcal{S}\mathcal{M}}(0)\rangle \langle \Psi_{\mathcal{S}\mathcal{M}}(0)|$ par un facteur $\langle \chi_b(t) | \chi_a(t) \rangle$.

- Comme les produits scalaires $\langle \chi_b(t) | \chi_a(t) \rangle$ sont devenus nuls si $b \neq a$ au bout d'un temps T_2 , les cohérences quantiques de $\mathcal{S} + \mathcal{M}$ sont détruites au bout du même temps. Le temps T_2 peut donc être considéré comme le temps de relaxation des cohérences quantiques de $\mathcal{S} + \mathcal{M}$ dans la base privilégiée, et aussi, comme nous l'avons vu plus haut, comme le temps de mesure de \mathcal{M} par \mathcal{E} .

c - Règles de superselection

- Au bout d'un temps T_2 , l'état de $\mathcal{S} + \mathcal{M}$ peut être considéré comme

un mélange statistique d'états $|u_a\rangle \otimes |\varphi_a\rangle, |u_b\rangle \otimes |\varphi_b\rangle \dots$ avec des poids $|c_a|^2, |c_b|^2 \dots$. Cela veut-il dire que $S+M$ ne peut être trouvé que dans l'un de ces états seulement ?

- Il est bien connu en mécanique quantique que plusieurs interprétations peuvent être données d'un mélange statistique. Considérons pour simplifier un système à 2 états $|\uparrow\rangle$ et $|\downarrow\rangle$ décrit par le mélange

$$\rho = 0,6 |\uparrow\rangle\langle\uparrow| + 0,4 |\downarrow\rangle\langle\downarrow| \quad (6.8)$$

Une première manière de se représenter cet état est de le considérer comme l'état représentatif d'un ensemble de 100 spins, dont 60 sont dans l'état $|\uparrow\rangle$ et 40 dans l'état $|\downarrow\rangle$. Mais on peut tout aussi bien écrire

$$\begin{aligned} \rho &= 0,2 |\uparrow\rangle\langle\uparrow| + 0,4 (|\uparrow\rangle\langle\uparrow| + |\downarrow\rangle\langle\downarrow|) \\ &= 0,2 |\uparrow\rangle\langle\uparrow| + 0,4 |\otimes\rangle\langle\otimes| + 0,4 |\oplus\rangle\langle\oplus| \end{aligned} \quad (6.9)$$

ce qui fait apparaître ρ comme l'état représentatif de 100 spins dont 20 sont dans l'état $|\uparrow\rangle$, 40 dans l'état $|\otimes\rangle$, 40 dans l'état $|\oplus\rangle$.

- Un raisonnement analogue peut être fait pour le mélange

$$\rho = \sum_a |c_a|^2 |\varphi_a\rangle\langle\varphi_a| \quad (6.10)$$

Mais si on arrive à mettre ρ sous forme d'un autre mélange faisant intervenir des projecteurs $|\Omega_\nu\rangle\langle\Omega_\nu|$ sur des états $|\Omega_\nu\rangle$ n'appartenant pas à la base $\{|\varphi_a\rangle\}$, l'interaction avec E fera disparaître très rapidement les cohérences quantiques apparaissant dans le développement de $|\Omega_\nu\rangle$ sur la base $\{|\varphi_a\rangle\}$, de sorte que les états du nouveau mélange se transformeront très vite en état $|\varphi_a\rangle$, ou $|\varphi_b\rangle$, ou $|\varphi_c\rangle \dots$

- L'interaction de M avec E interdit donc à M d'être dans une superposition linéaire des états de la base privilégiée $\{|\varphi_a\rangle\}$, cette interdiction n'étant d'ailleurs valable qu'à des échelles de temps plus longues que T_2 . Une telle interdiction correspond à ce qu'on appelle une "règle de superselection". De telles règles ont été parfois postulées pour imposer à M d'avoir un comportement classique dans la base $\{|\varphi_a\rangle\}$. Dans la théorie de Zurek, de telles règles apparaissent comme une conséquence du couplage avec E .

d. L'information n'est pas perdue - Elle est transférée.

- Les états $|\Psi_{SM_E}(0)\rangle$ et $|\Psi_{SM_E}(t)\rangle$ figurant en (6.2) sont tous deux des états purs, d'entropie nulle. Aucune perte d'information ne se produit au cours du temps à cause de l'interaction avec E .

- Par contre, alors que $\rho_{SM}(0)$ correspond à un cas pur, $\rho_{SM}(t)$ est un mélange statistique d'états, d'entropie plus grande que celle de $\rho_{SM}(0)$. Le fait de prendre la trace sur E a fait perdre de l'information. C'est l'information qui est associée aux corrélations apparues entre M et E par suite de leur interaction, information à laquelle on renonce quand on prend la trace sur E .

- Revenons à $S+M+E$. Comme l'information totale reste constante, l'information gagnée par M sur E et associée aux corrélations $M-E$ doit s'accompagner d'une perte d'information. En fait, M , en gagnant de l'information sur E , en perd sur S . Avant

d'interagir avec E, M est corrélé avec S dans plusieurs bases différentes $\{|u_a\rangle\}$ et $\{|p_a\rangle\}$, $\{|v_y\rangle\}$ et $\{|r_y\rangle\}$... L'établissement de nouvelles corrélations entre M et E brouille les corrélations entre $\{|v_y\rangle\}$ et $\{|r_y\rangle\}$

- C'est ce transfert d'information, qui n'affecte pas les corrélations entre $\{|u_a\rangle\}$ et $\{|p_a\rangle\}$, qui rend la base $\{|p_a\rangle\}$ de M privilégiée : c'est la seule base où subsistent des corrélations entre S et M. De plus, on voit sur (6.2) que, dans l'état $|\psi_{SM}(t)\rangle$, $|u_a\rangle$ est corrélé, non seulement à $|p_a\rangle$, mais aussi à $|x_a(t)\rangle$. Le transfert d'information de S-M à M-E s'accompagne donc d'un renforcement des corrélations concernant les états $\{|u_a\rangle\}$ de S, puisqu'on peut considérer maintenant que, non seulement M, mais aussi E, mesure les observables de S diagonales dans la base $\{|u_a\rangle\}$.

- Notons enfin que l'information associée aux corrélations apparaissant entre M et E n'est pas aisément accessible. Par suite du très grand nombre de degrés de liberté de E, des expériences sensibles à ces corrélations, bien que théoriquement envisageables, sont de plus en plus difficiles à réaliser en pratique quand la taille de E croît. C'est cette fuite d'information liée à des mesures de plus en plus difficiles à faire qui peut expliquer l'irréversibilité du système quand on se restreint aux corrélations plus aisément accessibles, celles existant entre S et M.

e - L'effet de M sur E est aussi important que l'effet de E sur M

- Dans les traitements usuels (comme ceux utilisant l'équation pilote), l'accent est mis sur la dissipation de M produite par l'action de E sur M. On prend la trace sur E et on étudie comment l'opérateur densité réduit de M évolue au cours du temps.

- Le traitement donné dans le cours V montre clairement que E est également perturbé par M. Suivant que M est dans $|p_a\rangle$ ou $|p_b\rangle$, l'évolution de E n'est pas la même : E évolue vers $|x_a(t)\rangle$ ou $|x_b(t)\rangle$, et c'est parce que $|x_a(t)\rangle$ et $|x_b(t)\rangle$ deviennent orthogonaux au bout d'un certain temps T_2 que les cohérences quantiques réduites de M sont détruites. La notion de dissipation est donc étroitement liée à celle de corrélation quantique.

- Dans certains cas, si E est un système à très petit nombre de degrés de liberté, l'interaction M-E peut faire apparaître des corrélations suffisantes entre M et E pour faire disparaître les cohérences quantiques de M, et il semble alors peu approprié de parler de dissipation pour M. Par exemple, dans le § 3b du cours III, nous avons considéré un spin qui passe à travers 2 cavités monomodes et qui se retrouve à la sortie dans le même état qu'à l'entrée. Le fait que les effets d'interférence, observables en l'absence des cavités, disparaissent est davantage dû à une corrélation parfaite entre le chemin suivi par le spin dans l'interféromètre et l'état du champ (monomode donc à 1 seul degré de liberté) dans les 2 cavités qu'à une dissipation.

f - Liens avec le point de vue de Copenhague

- Dans le point de vue de Copenhague, l'accent est mis sur le fait que les appareils de mesure doivent être analysés en termes classiques.

Mais on ne précise pas quel est le critère qui fait qu'un appareil de mesure, constitué en fait d'objets quantiques comme des atomes, des noyaux..., peut être considéré comme un objet classique.

- Dans la théorie de Zurek, ce critère apparaît plus clairement. C'est l'interaction avec l'environnement E qui privilégie une base de M , dans laquelle les cohérences réduites de M sont détruites très rapidement, et dans laquelle M se comporte comme un objet classique. Les états de S qui sont mesurés par M sont les états de S qui sont corrélés avec les états de la base de M dans laquelle M a un comportement classique puisque l'interaction avec E l'empêche d'être dans une superposition linéaire de ces états (règles de sélection induites par E). En d'autres termes, le caractère classique d'un système n'est pas une propriété intrinsèque de ce système. Il est déterminé par l'interaction avec l'environnement qui impose des règles de superselection dans une certaine base dans laquelle le système apparaît comme classique.

- Notons enfin que la séparation entre M et E n'est pas forcément aussi tranchée qu'il y paraît. M peut être constitué par un petit nombre de degrés de liberté de l'appareil de mesure, ceux qui interagissent directement avec le système microscopique S . E est alors l'ensemble des autres degrés de liberté de l'appareil de mesure couplés à ceux qui sont directement en contact avec S , ainsi que l'environnement externe proprement dit de l'appareil.

⑤ Etude d'un modèle permettant de suivre l'évolution de $S+M$ en présence d'interactions $S-M$ et $M-E$ (référence 2)

a - Le modèle de Walls-Collet-Milburn. Hamiltonien.

- S est un oscillateur harmonique à 1 dimension, de fréquence ω_0 , d'opérateurs de création et d'annihilation a et a^\dagger

$$H_S = \hbar \omega_0 a^\dagger a \quad (6.11)$$

S est par exemple un mode du champ électromagnétique.

- M est un autre oscillateur harmonique à 1 dimension, de fréquence ω et d'opérateurs b et b^\dagger

$$H_M = \hbar \omega b^\dagger b \quad (6.12)$$

M est par exemple un autre mode du champ électromagnétique

- L'interaction $S-M$ est décrite par l'Hamiltonien

$$H_{SM} = \frac{\hbar}{2} a^\dagger a (b \eta^* e^{i\omega t} + b^\dagger \eta e^{-i\omega t}) \quad (6.13)$$

où $\eta e^{-i\omega t}$ est la partie de fréquence positive d'un champ classique de fréquence ω .

Physiquement, H_{SM} peut décrire un processus de mélange à 4 ondes (Fig. 1) : absorption d'un photon de l'onde S (opérateur a) ; émission induite d'un photon de l'onde S (opérateur a^\dagger) ; absorption d'un photon de l'onde $\eta e^{-i\omega t}$ (suffisamment intense pour pouvoir être traité classiquement) ; émission d'un photon de l'onde M (opérateur b^\dagger). Le processus de la figure 1, associé à l'Hamiltonien (6.13) fait apparaître un champ dans le mode M , proportionnellement au nombre de photons dans le mode S et à l'amplitude η de l'onde classique. L'amplitude du champ apparaissant

dans le mode m est une mesure du nombre de photons dans le mode S

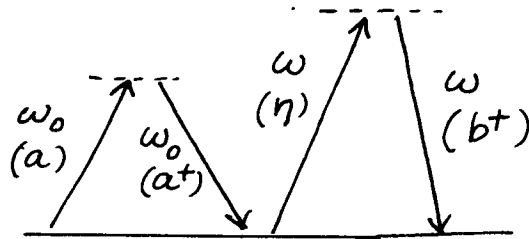


Fig. 1

- \mathcal{E} est un réservoir d'oscillateurs harmoniques i , au zéro absolu, de fréquences ω_i et d'opérateurs a_i et a_i^\dagger , le couplage m - \mathcal{E} étant linéaire en $b, b^\dagger, a_i, a_i^\dagger$

$$H_{\mathcal{E}} = \sum_i \hbar \omega_i a_i^\dagger a_i \quad (6.14)$$

$$H_{m\mathcal{E}} = \sum_i g_i (b a_i^\dagger + b^\dagger a_i) \quad (6.15)$$

g_i est une constante de couplage. Les ω_i forment un quasi-continuum assez large pour que l'effet de \mathcal{E} sur m puisse être décrit par une équation pilote. Les g_i sont suffisamment petits pour que l'amortissement de m soit faible: $\gamma \ll \omega$ où γ est le taux d'amortissement de m . On peut alors utiliser l'équation pilote établie dans le cours 88-89 (voir formule (9.51) de ce cours, et aussi la référence 3)

- Comme $a^\dagger a$ commute avec H_m et H_S et que \mathcal{E} n'agit pas sur S , $a^\dagger a$ est une constante du mouvement. Si S est dans l'état propre $|n\rangle$ de $a^\dagger a$ (avec $n=0,1,2,\dots$), il y reste au cours du temps. L'opération de mesure de S par m est donc une opération de mesure idéale.

b - Equation pilote de $S+m$

- Nous nous plaçons en représentation d'interaction par rapport à $H_0 + H_m$

$$\tilde{\rho}_{Sm}(t) = e^{i(H_0 + H_m)t/\hbar} \rho_{Sm}(t) e^{-i(H_0 + H_m)t/\hbar} \quad (6.16.2)$$

$$\tilde{H}_{Sm} = e^{i(H_0 + H_m)t/\hbar} H_{Sm} e^{-i(H_0 + H_m)t/\hbar} = \frac{\hbar}{2} a^\dagger a (b \eta^* + b^\dagger \eta) \quad (6.16.b)$$

Le passage en représentation d'interaction fait disparaître la dépendance temporelle de $H_{Sm}(t)$ (comme un "passage dans le référentiel tournant").

- En l'absence de \mathcal{E} , l'équation d'évolution de $\tilde{\rho}_{Sm}$ est

$$\frac{d}{dt} \tilde{\rho}_{Sm} = \frac{1}{i\hbar} [\tilde{H}_{Sm}, \tilde{\rho}_{Sm}] = \frac{1}{2} [a^\dagger a (\varepsilon b^\dagger - \varepsilon^* b), \tilde{\rho}_{Sm}] \quad (6.17)$$

avec

$$\varepsilon = \eta / i \quad \varepsilon^* = -\eta^* / i \quad (6.18)$$

- Pour décrire l'effet de $H_{m\mathcal{E}}$ (qui n'agit pas sur S), il suffit d'ajouter à (6.17) les termes de l'équation pilote (9.51) du cours 88-89 (sauf le terme $-i\omega [b^\dagger b, \rho_{Sm}]$, puisqu'on est en représentation d'interaction). On obtient finalement (en omettant les indices Sm et ν pour simplifier les notations)

$$\frac{d}{dt} \rho = \frac{1}{2} [a^\dagger a (\varepsilon b^\dagger - \varepsilon^* b), \rho] - \frac{\gamma}{2} [b^\dagger b \rho + \rho b^\dagger b] + \gamma b \rho b^\dagger \quad (6.19)$$

La 1^{ère} ligne de (6.19) décrit l'effet sur $S+M$ de l'interaction $S-M$, la 2^{ème} ligne, celle de l'interaction $M-E$.

- Pour comprendre la signification physique du paramètre γ apparaissant dans la 2^{ème} ligne de (6.19), calculons l'évolution de la valeur moyenne de l'amplitude du champ b dans le mode M . Nous supposons S dans l'état $|n\rangle$, ce qui permet de remplacer $a^\dagger a$ par n dans la 1^{ère} ligne de (6.19). En multipliant les 2 membres de (6.19) par b , en prenant la trace et en utilisant l'invariance d'une trace dans une permutation circulaire, de même que $[b, b^\dagger] = 1$, on obtient

$$\frac{d}{dt} \langle b \rangle = \frac{\epsilon n}{2} - \frac{\gamma}{2} \langle b \rangle \quad (6.20)$$

Le 1^{er} terme de (6.20) décrit comment l'amplitude moyenne croît proportionnellement au nombre n de photons dans le mode S et à l'amplitude ϵ de l'onde classique; le 2^{ème} terme décrit l'amortissement de $\langle b \rangle$ avec un temps $\gamma/2$ sous l'effet du couplage avec E . Si, à $t=0$, $\langle b \rangle = 0$, la solution de (6.20) s'écrit

$$\langle b \rangle(t) = \alpha_n(t) = \frac{\epsilon n}{\gamma} (1 - e^{-\gamma t/2}) \quad (6.21)$$

C. Solution de l'équation pilote (voir aussi l'Appendice)

- L'équation pilote (6.19) est suffisamment simple pour qu'on puisse en trouver une solution analytique. En effet, si l'on considère la fonction caractéristique adaptée à l'ordre normal associé à ρ (voir cours X du cours 88-89)

$$C_N(\lambda, \lambda^*) = \text{Tr}(\rho e^{\lambda b^\dagger} e^{-\lambda^* b}) \quad (6.22)$$

on peut montrer que l'équation d'évolution de $C_N(\lambda, \lambda^*)$ déduite de (6.19) est une équation aux dérivées partielles linéaire du 1^{er} ordre par rapport à λ, λ^*, t . Cette équation peut être alors résolue par la méthode des caractéristiques (voir cours VI du cours 88-89). Le passage de $C_N(\lambda, \lambda^*)$ à ρ s'effectue ensuite grâce à (6.22)

- Nous nous contenterons ici de donner les résultats d'un tel calcul (voir l'Appendice pour plus de détails).

Nous supposons qu'à $t=0$

$$|\Psi_S(0)\rangle = \sum_n c_n |n\rangle \quad |\Psi_M(0)\rangle = |0\rangle \quad (6.23)$$

de sorte que

$$\rho(0) = \sum_n \sum_{n'} c_n c_{n'}^* (|n\rangle \langle n'|)_S \otimes (|0\rangle \langle 0|)_M \quad (6.24)$$

S est dans une superposition linéaire d'états $|n\rangle$, M est dans l'état fondamental $|0\rangle$.

On obtient alors pour $\rho(t)$ le résultat suivant

$$\rho(t) = \sum_n \sum_{n'} c_n c_{n'}^* \exp \left\{ \frac{|\epsilon|^2}{\gamma^2} (n-n')^2 \left(1 - \frac{\gamma t}{2} - e^{-\gamma t/2} \right) \right\} \times (|n\rangle \langle n'|)_S \otimes \left(\frac{|\alpha_n(t)\rangle \langle \alpha_{n'}(t)|}{\langle \alpha_{n'}(t) | \alpha_n(t) \rangle} \right)_M \quad (6.25)$$

où $|\alpha_n(t)\rangle$ est l'état cohérent du mode M correspondant à l'amplitude classique $\alpha_n(t)$ écrite en (6.21).

d - Discussion physique

- Considérons tout d'abord l'exponentielle de la 1^{ère} ligne de (6.25). Pour $n = n'$, elle vaut 1. Pour $n \neq n'$, c'est une fonction décroissante de t , car $1 - \frac{\gamma t}{2} - e^{-\gamma t/2}$ est négatif et a un module qui croît avec t . Pour $\gamma t \gg 1$, on peut négliger $e^{-\gamma t/2}$ devant $1 - \frac{\gamma t}{2} \sim -\frac{\gamma t}{2}$, de sorte que l'exponentielle vaut alors

$$\exp \left\{ -\frac{\gamma t}{2} \frac{|\mathcal{E}|^2}{\gamma^2} (n-n')^2 \right\} \quad (6.26)$$

On obtient une exponentielle qui tend très vite vers 0, avec un temps plus grand que $\frac{\gamma}{2}$ par un facteur $\frac{|\mathcal{E}|^2}{\gamma^2} (n-n')^2$, qui peut encore s'écrire, compte tenu de (6.21)

$$\frac{|\mathcal{E}|^2}{\gamma^2} (n-n')^2 = |\alpha_n(\infty) - \alpha_{n'}(\infty)|^2 \quad (6.27)$$

Le facteur d'augmentation du temps de décroissance est donc proportionnel au carré de la distance entre les 2 valeurs moyennes dans l'état stationnaire, $\alpha_n(\infty)$ et $\alpha_{n'}(\infty)$, des amplitudes du champ dans le mode m correspondant à n photons et n' photons dans le mode s .

- Le produit scalaire $\langle \alpha_{n'}(t) | \alpha_n(t) \rangle$, figurant au dénominateur de la 2^{ème} ligne de (6.25), introduit lui aussi une dépendance temporelle. Pour $\gamma t \gg 1$, le module de ce produit scalaire devient constant et égal à

$$|\langle \alpha_n(\infty) | \alpha_{n'}(\infty) \rangle| = \exp \left\{ -\frac{1}{2} |\alpha_n(\infty) - \alpha_{n'}(\infty)|^2 \right\} = e^{-\frac{|\mathcal{E}|^2}{2\gamma^2} (n-n')^2} \quad (6.28)$$

Il est du même ordre que la contribution du terme 1 de la parenthèse de la 1^{ère} ligne de (6.25) que nous avons négligé devant celle de $-\gamma t/2$ pour $\gamma t \gg 1$.

- Pour $\gamma t \gg 1$, on peut donc négliger les termes non-diagonaux de (6.27), et ceci d'autant mieux que $|\mathcal{E}|^2/\gamma^2$ est plus grand que 1, ce qui donne

$$\rho(\infty) = \sum_n |\mathcal{C}_n|^2 \left(|n\rangle \langle n| \right)_s \otimes \left(|\alpha_n(\infty)\rangle \langle \alpha_n(\infty)| \right)_m \quad (6.29)$$

On a utilisé $\langle \alpha_n(\infty) | \alpha_n(\infty) \rangle = 1$

On trouve donc que, au bout d'un temps de l'ordre de quelques γ^{-1} , l'opérateur densité de $s+m$ est devenu un mélange statistique, avec des poids $|\mathcal{C}_n|^2$, d'états où s est dans l'état $|n\rangle$ et m dans l'état cohérent $|\alpha_n(\infty)\rangle$ correspondant à la valeur moyenne stationnaire de l'amplitude du champ dans le mode m quand il y a n photons dans le mode s .

Pour $|\mathcal{E}|/\gamma$ suffisamment grand, les distances $|\alpha_n(\infty) - \alpha_{n'}(\infty)|$ entre les points représentant dans le plan complexe les états cohérents $|\alpha_n(\infty)\rangle$ et $|\alpha_{n'}(\infty)\rangle$, de l'ordre de $(n-n')|\mathcal{E}|/\gamma$, sont beaucoup plus grandes que la largeur de chaque état cohérent, de l'ordre de 1, de sorte que les états $|\alpha_n(\infty)\rangle$ et $|\alpha_{n'}(\infty)\rangle$ sont pratiquement orthogonaux (voir aussi (6.28)). La corrélation entre les états $|n\rangle$ de s et $|\alpha_n(\infty)\rangle$ de m est alors parfaite, l'environnement détruisant les cohérences quantiques entre $|n\rangle \otimes |\alpha_n(\infty)\rangle$ et $|n'\rangle \otimes |\alpha_{n'}(\infty)\rangle$ au bout d'un temps de l'ordre de quelques γ^{-1} .

- D'après (6.29), la base privilégiée de m ("base de l'aiguille") est formée d'états cohérents $\{|\alpha_n(\infty)\rangle\}$. Effectivement, l'hamiltonien d'interaction H_{mE} (voir (6.15)) fait intervenir les opérateurs b et b^\dagger et les états $|\alpha_n(\infty)\rangle$ sont bien les états propres de l'opérateur b de m apparaissant dans H_{mE} .

- L'amplitude moyenne stationnaire $\alpha_n(\infty)$ du champ dans le mode m , à l'issue du processus de mesure, peut être aussi grande que l'on veut si $|E|/8$ est suffisamment grand. Le mécanisme de mesure étudié dans ce modèle contient donc un processus d'amplification (mélange à 4 ondes) limité par les pertes et conduit à des états de m (états de l'aiguille) qui sont quasi-classiques, comme on s'y attend pour une "aiguille macroscopique".

Références

- (1) Articles de Zurek - Mêmes références que dans le cours IV, notamment Phys. Rev. D 24, 1516 (1981) et 26, 1862 (1982)
- (2) D.F. Walls, M.J. Collet, G.J. Milburn, Phys. Rev. D 32, 3208 (1985)
- (3) C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, G. Grynberg, "Processus d'interaction entre photons et atomes", Interéditions et Editions du CNRS Paris 1988, Complément B, IV.

Appendice (les numéros soulignés réfèrent à des formules du cours 88-89)

- Cherchons une solution de (6.19) de la forme

$$\rho(t) = \sum_{nn'} (|n\rangle\langle n'|)_s \otimes (\rho_{nn'})_m \tag{6.30}$$

où $\rho_{nn'}$ est un opérateur de m satisfaisant, d'après (6.19), à l'équation

$$\dot{\rho}_{nn'} = \frac{n}{2} (\epsilon b^\dagger - \epsilon^* b) \rho_{nn'} - \frac{n'}{2} \rho_{nn'} (\epsilon b^\dagger - \epsilon^* b) + \frac{\gamma}{2} [2b\rho_{nn'}b^\dagger - b^\dagger b \rho_{nn'} - \rho_{nn'} b^\dagger b] \tag{6.31}$$

D'après (6.24),

$$\rho_{nn'}(t=0) = c_n c_{n'}^* (|0\rangle\langle 0|)_m \tag{6.32}$$

- Soit

$$C_{nn'}(\lambda, \lambda^*, t) = \text{Tr} [e^{\lambda b^\dagger} e^{-\lambda^* b} \rho_{nn'}(t)] \tag{6.33}$$

la fonction caractéristique, adaptée à l'ordre normal, associé à $\rho_{nn'}(t)$. En utilisant (10.14) et (10.15), on obtient

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + a_1(\lambda, \lambda^*, t) \frac{\partial}{\partial \lambda} + a_2(\lambda, \lambda^*, t) \frac{\partial}{\partial \lambda^*} \right] C_{nn'}(\lambda, \lambda^*, t) = b(\lambda, \lambda^*, t) C_{nn'}(\lambda, \lambda^*, t) \tag{6.34}$$

avec

$$\begin{cases} a_1(\lambda, \lambda^*, t) = a_2^*(\lambda, \lambda^*, t) = \frac{\gamma}{2} \lambda - \frac{n-n'}{2} \epsilon \\ b(\lambda, \lambda^*, t) = -\frac{1}{2} (n \epsilon \lambda^* - n' \epsilon^* \lambda) \end{cases} \tag{6.35}$$

$$\tag{6.36}$$

Il faut résoudre (6.34) avec la condition initiale (6.32) qui donne

$$\begin{aligned} C_{nn'}(\lambda, \lambda^*, 0) &= c_n c_{n'}^* \text{Tr} (e^{\lambda b^\dagger} e^{-\lambda^* b} |0\rangle\langle 0|) \\ &= c_n c_{n'}^* \langle 0 | e^{\lambda b^\dagger} e^{-\lambda^* b} | 0 \rangle = c_n c_{n'}^* \end{aligned} \tag{6.37}$$

- Equations des caractéristiques (voir cours VI du cours 88-89) (VI-10)

$$\frac{dt}{1} = \frac{d\lambda}{a_1(\lambda, \lambda^*)} \rightarrow \frac{d\lambda}{dt} = a_1(\lambda, \lambda^*) = \frac{\gamma}{2}\lambda - \frac{n-n'}{2}\epsilon \quad (6.38)$$

Solution correspondant à $\lambda = \lambda_0$ pour $t = 0$

$$\lambda(t, \lambda_0) = \left[\lambda_0 - (n-n') \frac{\epsilon}{\gamma} \right] e^{\gamma t/2} + (n-n') \frac{\epsilon}{\gamma} \quad (6.39)$$

Inversion de cette formule donnant le point λ_0 par lequel passe en $t=0$ la caractéristique passant en λ à t

$$\lambda_0 = (n-n') \frac{\epsilon}{\gamma} + \left[\lambda - (n-n') \frac{\epsilon}{\gamma} \right] e^{-\gamma t/2} \quad (6.40)$$

- Le long d'une caractéristique, on a donc (voir aussi (6.29))

$$\frac{d}{dt} C_{nn'}(\lambda(t, \lambda_0), \lambda^*(t, \lambda_0^*), t) = b(\lambda(t, \lambda_0), \lambda^*(t, \lambda_0^*), t) C_{nn'}(\lambda(t, \lambda_0), \lambda^*(t, \lambda_0^*), t) \quad (6.41)$$

où d'après (6.36) et (6.39)

$$b(\lambda(t, \lambda_0), \lambda^*(t, \lambda_0^*), t) = \frac{1}{2}(n'\epsilon^*\lambda_0 - n\epsilon\lambda_0^*) e^{\gamma t/2} + (n-n')^2 \frac{|\epsilon|^2}{2\gamma} e^{\gamma t/2} - (n-n')^2 \frac{|\epsilon|^2}{2\gamma} \quad (6.42)$$

La solution de (6.41), correspondant à la condition initiale (6.37) s'écrit (voir aussi (6.30))

$$C_{nn'}(\lambda(t, \lambda_0), \lambda^*(t, \lambda_0^*), t) = c_n c_{n'}^* \exp \left\{ \int_0^t dt' b(\lambda(t', \lambda_0), \lambda^*(t', \lambda_0^*), t') \right\} \quad (6.43)$$

Après intégration de (6.42) entre 0 et t et report dans l'exponentielle de (6.43), il faut enfin remplacer λ_0 par son expression (6.40) en fonction de λ , ce qui donne finalement (voir aussi (6.32))

$$C_{nn'}(\lambda, \lambda^*, t) = c_n c_{n'}^* \exp \left\{ \frac{|\epsilon|^2}{\gamma^2} (n-n')^2 \left(1 - \frac{\gamma t}{2} - e^{-\gamma t/2} \right) \right\} \times \exp \left\{ \alpha_{n'}^*(t) \lambda - \alpha_n(t) \lambda^* \right\} \quad (6.44)$$

où $\alpha_n(t)$ est donné par (6.21).

- Il suffit enfin de noter que l'exponentielle de la 2^{ème} ligne de (6.44) est la fonction caractéristique adaptée à l'ordre normal et associée à $\frac{|\alpha_n(t)\rangle \langle \alpha_{n'}(t)|}{\langle \alpha_{n'}(t) | \alpha_n(t) \rangle}$ puisque

$$\text{Tr} \left\{ e^{\lambda b^\dagger} e^{-\lambda^* b} \frac{|\alpha_n(t)\rangle \langle \alpha_{n'}(t)|}{\langle \alpha_{n'}(t) | \alpha_n(t) \rangle} \right\} = \frac{\langle \alpha_{n'}(t) | e^{\lambda b^\dagger} e^{-\lambda^* b} | \alpha_n(t) \rangle}{\langle \alpha_{n'}(t) | \alpha_n(t) \rangle} = \exp \left\{ \alpha_{n'}^*(t) \lambda - \alpha_n(t) \lambda^* \right\} \quad (6.45)$$

pour montrer que (6.25) est bien la solution de l'équation pilote (6.19) correspondant à la condition initiale (6.24).

Introduction - Buts de ce cours

- Considérons, en mécanique classique, 2 systèmes en interaction, par exemple 2 particules 1 et 2. Le mouvement de chaque particule est bien sûr influencé par celui de l'autre. Mais à chaque instant, chaque particule a un état bien défini (défini par sa position et sa vitesse).
- En mécanique quantique aussi, l'évolution de chaque système est influencé par l'autre, mais apparaissent en plus des corrélations quantiques entre les 2 systèmes. Si l'état initial de 1+2 est un produit, $|\Psi(0)\rangle = |1\rangle \otimes |2\rangle$, il n'en sera plus de même en général un instant t après : l'état de 1+2 sera toujours un état pur $|\Psi(t)\rangle$, mais $|\Psi(t)\rangle$ sera en général une superposition linéaire d'états produits qui ne se réduit pas à un seul état produit. L'état de chaque système ne sera plus pur, comme à $t=0$, mais sera décrit par un mélange statistique d'états associé à l'opérateur densité obtenu en prenant la trace de $|\Psi(t)\rangle\langle\Psi(t)|$ sur 1 ou 2. L'entropie statistique de chaque système pris séparément augmente au cours du temps. Cette perte d'information s'explique par le fait qu'en s'intéressant au système 1 ou 2 séparément, on perd l'information associée aux corrélations quantiques qui sont apparues entre eux du fait de leur interaction.
- Dans les cours précédents nous avons montré l'importance du rôle joué par les corrélations quantiques dans l'opérations de mesure. Dans ce cours, nous allons établir des résultats généraux sur la dynamique des corrélations quantiques apparaissant entre 2 systèmes initialement non corrélés. Nous allons montrer en particulier que la vitesse d'apparition de ces corrélations peut dépendre de manière très sensible de l'état initial de chaque système. Ceci nous permettra de comprendre pourquoi il est possible, dans certains cas, de négliger de telles corrélations, alors que dans d'autres cas, elles apparaissent si vite qu'elles interdisent toute cohérence quantique réduite sur chaque système.

① Forme canonique de Schmidt pour le vecteur d'état d'un ensemble de 2 systèmes dans un état pur.

a - Position du problème

- Puisque le système global 1+2 est dans un état pur, son état est décrit par un ket $|\Psi(1,2)\rangle$ qui peut toujours être développé sur une base orthonormée $\{|1u_n\rangle \otimes |2v_q\rangle\}$, produit tensoriel d'une base $\{|1u_n\rangle\}$ de l'espace des états E_1 de 1 par une base orthonormée $\{|2v_q\rangle\}$ de l'espace des états E_2 de 2

$$|\Psi(1,2)\rangle = \sum_n \sum_q c_{nq} |1u_n\rangle \otimes |2v_q\rangle \quad (7.1)$$

- Nous allons montrer ci-dessous que $|\Psi(1,2)\rangle$ peut toujours être réécrit sous la forme suivante, dite forme canonique de Schmidt

$$|\Psi(1,2)\rangle = \sum_\lambda \gamma_\lambda |1\varphi_\lambda\rangle \otimes |2\chi_\lambda\rangle \quad (7.2)$$

où les $|1\varphi_\lambda\rangle$ (resp $|2\chi_\lambda\rangle$) forment un système orthonormé dans E_1 (resp E_2)

$$\langle 1\varphi_\lambda | 1\varphi_{\lambda'} \rangle = \delta_{\lambda\lambda'} \quad (7.3.a) \quad \langle 2\chi_\lambda | 2\chi_{\lambda'} \rangle = \delta_{\lambda\lambda'} \quad (7.3.b)$$

- Il importe de bien saisir la différence entre (7.1) et (7.2)

- Dans (7.1), les vecteurs de base sont repérés par 2 indices indépendants, n pour 1, q pour 2. Dans (7.2), ils sont repérés par le même indice λ pour 1 et pour 2. Si les espaces E_1 et E_2 sont chacun à un nombre fini N de dimensions, le développement (7.1) fait apparaître N^2 termes alors que le développement (7.2) contient au maximum N termes.

- Le développement (7.2) fait apparaître des corrélations parfaites entre les états $|1\varphi_\lambda\rangle$ de 1 et les états $|2\chi_\lambda\rangle$ de 2: quand 1 est dans $|1\varphi_\lambda\rangle$, 2 est dans $|2\chi_\lambda\rangle$ et réciproquement. A 2 états orthogonaux $|1\varphi_\lambda\rangle$ et $|1\varphi_{\lambda'}\rangle$ de 1 sont associés 2 états orthogonaux $|2\chi_\lambda\rangle$ et $|2\chi_{\lambda'}\rangle$ de 2. On pourrait bien sur réécrire (7.1) sous la forme

$$| \Psi(1,2) \rangle = \sum_n |1u_n\rangle \otimes |2\Omega_n\rangle \quad (7.4)$$

avec

$$|2\Omega_n\rangle = \sum_q c_{nq} |2v_q\rangle \quad (7.5)$$

mais les états $|2\Omega_n\rangle$ ne sont pas en général orthogonaux les uns aux autres. C'est la raison pour laquelle le développement (7.2) est plus intéressant que le développement (7.1).

b - Démonstration de l'existence d'une forme canonique de Schmidt

- Commençons par supposer que le développement (7.2) existe, et calculons les opérateurs densités réduits de 1 et 2. On a par exemple, compte tenu de (7.3.b)

$$\begin{aligned} \rho(1) &= \text{Tr}_2 | \Psi(1,2) \rangle \langle \Psi(1,2) | = \sum_\lambda \sum_{\lambda'} \delta_\lambda \delta_{\lambda'}^* |1\varphi_\lambda\rangle \langle 2\varphi_{\lambda'}| \underbrace{\text{Tr}_2 |2\chi_\lambda\rangle \langle 2\chi_{\lambda'}|}_{= \langle 2\chi_{\lambda'} | 2\chi_\lambda \rangle = \delta_{\lambda\lambda'}} \\ &= \sum_\lambda |\delta_\lambda|^2 |1\varphi_\lambda\rangle \langle 1\varphi_\lambda| \end{aligned} \quad (7.6)$$

Un calcul tout à fait analogue donnerait

$$\rho(2) = \sum_\lambda |\delta_\lambda|^2 |2\chi_\lambda\rangle \langle 2\chi_\lambda| \quad (7.7)$$

Il apparaît ainsi que, si (7.2) existe, les $|1\varphi_\lambda\rangle$ et les $|2\chi_\lambda\rangle$ sont les états qui diagonalisent $\rho(1)$ et $\rho(2)$ respectivement, les $|\delta_\lambda|^2$ étant les valeurs propres correspondantes.

- Le résultat précédent suggère alors la démarche suivante

- Connaissant $| \Psi(1,2) \rangle$, on veut calculer l'opérateur densité réduit de 1, $\rho(1) = \text{Tr}_2 | \Psi(1,2) \rangle \langle \Psi(1,2) |$. Comme $\rho(1)$ est un opérateur densité, c'est un opérateur hermitique, semi-positif, de trace 1. La diagonalisation de $\rho(1)$ donne alors

$$\rho(1) = \sum_{\lambda^i} \pi_{\lambda^i} |1\varphi_{\lambda^i}\rangle \langle 1\varphi_{\lambda^i}| \quad (7.8)$$

où les valeurs propres π_{λ^i} satisfont

$$\pi_{\lambda^i} \text{ réel, positif ou nul} \quad \sum_{\lambda^i} \pi_{\lambda^i} = 1 \quad (7.9)$$

et où les vecteurs propre $|1\varphi_{\lambda^i}\rangle$, associés à la valeur propre π_{λ^i} (c'est un indice de dégénérescence éventuelle) sont orthonormés

$$\langle 1\varphi_{\lambda^i} | 1\varphi_{\lambda'^i} \rangle = \delta_{\lambda\lambda'} \delta_{i'i'} \quad (7.10)$$

- Utilisant la relation de fermeture

$$\sum_{\lambda, i} |1\varphi_{\lambda}^i\rangle\langle 1\varphi_{\lambda}^i| = \mathbb{1}_{E_1} \quad (7.11)$$

où $\mathbb{1}_{E_1}$ est l'opérateur identité de E_1 , on obtient

$$|\Psi(1,2)\rangle = \left(\sum_{\lambda, i} |1\varphi_{\lambda}^i\rangle\langle 1\varphi_{\lambda}^i| \right) |\Psi(1,2)\rangle = \sum_{\lambda, i} |1\varphi_{\lambda}^i\rangle \otimes |2\Omega_{\lambda}^i\rangle \quad (7.12)$$

$$\text{ou } |2\Omega_{\lambda}^i\rangle = \langle 1\varphi_{\lambda}^i | \Psi(1,2) \rangle = \sum_n \sum_q c_{nq} \langle 1\varphi_{\lambda}^i | 1u_n \rangle |2v_q\rangle \quad (7.13)$$

est un vecteur parfaitement bien défini de E_2 , si on connaît $|\Psi(1,2)\rangle$ et les vecteurs propres $|1\varphi_{\lambda}^i\rangle$ de $\rho(1)$.

- Recalculons alors $\rho(1) = \text{Tr}_2 |\Psi(1,2)\rangle\langle \Psi(1,2)|$ à partir de (7.12)

$$\rho(1) = \sum_{\lambda, i} \sum_{\lambda', i'} |1\varphi_{\lambda}^i\rangle\langle 1\varphi_{\lambda'}^{i'}| \left(\text{Tr}_2 |2\Omega_{\lambda}^i\rangle\langle 2\Omega_{\lambda'}^{i'}| \right) = \sum_{\lambda, i} \sum_{\lambda', i'} \langle 2\Omega_{\lambda'}^{i'} | 2\Omega_{\lambda}^i \rangle |1\varphi_{\lambda}^i\rangle\langle 1\varphi_{\lambda'}^{i'}| \quad (7.14)$$

En comparant (7.8) et (7.14), on en déduit alors que

$$\langle 2\Omega_{\lambda'}^{i'} | 2\Omega_{\lambda}^i \rangle = \delta_{\lambda\lambda'} \delta_{i i'} \pi_{\lambda} \quad (7.15)$$

Il suffit alors, pour tous les π_{λ} non nuls de (7.8), de définir les vecteurs

$$|2\chi_{\lambda}^i\rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi_{\lambda}}} |2\Omega_{\lambda}^i\rangle \quad (7.16)$$

qui satisfont, compte tenu de (7.15), à

$$\langle 2\chi_{\lambda'}^{i'} | 2\chi_{\lambda}^i \rangle = \delta_{\lambda\lambda'} \delta_{i i'} \quad (7.17)$$

pour réécrire $|\Psi(1,2)\rangle$ sous la forme

$$|\Psi(1,2)\rangle = \sum_{\lambda, i} \sqrt{\pi_{\lambda}} |1\varphi_{\lambda}^i\rangle \otimes |2\chi_{\lambda}^i\rangle \quad (7.18)$$

qui est bien une forme canonique de Schmidt (7.2), compte tenu de (7.10) et (7.17). Les coefficients du développement (7.18) sont définis à un facteur de phase près, puisqu'on peut changer arbitrairement les phases des $|1\varphi_{\lambda}^i\rangle$ et celles des $|2\chi_{\lambda}^i\rangle$. Le choix fait en (7.18) revient à prendre tous les coefficients du développement réels et positifs.

En conclusion, nous avons bien montré qu'il existe un développement canonique de Schmidt pour $|\Psi(1,2)\rangle$ et identifié les vecteurs de 1 et 2 qui apparaissent dans ce développement (ce sont les vecteurs propres de $\rho(1)$ et $\rho(2)$), de même que les coefficients $\gamma_{\lambda} = \sqrt{\pi_{\lambda}}$

C - Quelques conséquences des résultats précédents

- On déduit immédiatement de (7.18) que

$$\rho(1) = \sum_{\lambda, i} \pi_{\lambda} |1\varphi_{\lambda}^i\rangle\langle 1\varphi_{\lambda}^i| \quad (7.19) \quad \rho(2) = \sum_{\lambda, i} \pi_{\lambda} |2\chi_{\lambda}^i\rangle\langle 2\chi_{\lambda}^i| \quad (7.20)$$

On voit ainsi que les opérateurs densités réduits de 1 et 2 ont mêmes valeurs propres non nulles, avec les mêmes degrés de dégénérescence. Nous verrons dans un cours ultérieur que ceci entraîne que 1 et 2, pris séparément, ont même entropie statistique.

- Considérons un ensemble de 2 spins 1/2 dans un état pur. L'écriture de $|\Psi(1,2)\rangle$ sous la forme (7.18) permet de montrer qu'il existe 2 directions \vec{n}_1 et \vec{n}_2 telles que si 1 est orienté le long de \vec{n}_1 (resp. $-\vec{n}_1$), 2 est orienté le long de \vec{n}_2 (resp. $-\vec{n}_2$). De plus, l'égalité des valeurs propres de $\rho(1)$ et $\rho(2)$ (voir (7.19) et (7.20)) entraîne que le taux de polarisation de 1 le long de \vec{n}_1 est le même que celui de 2 le long de \vec{n}_2 .

② Calcul perturbatif de la vitesse d'apparition des corrélations quantiques à partir d'un état initial produit

a - Principe du calcul

- Le système global 1+2 est initialement dans un état produit

$$|\Psi(0)\rangle = |\varphi_0\rangle \otimes |\chi_0\rangle = |\varphi_0, \chi_0\rangle \quad (7.21)$$

(le dernier terme de (7.21) utilise des notations simplifiées). A l'instant $t=0$, la forme canonique de Schmidt se réduit à un seul terme. Il n'y a pas de corrélations quantiques et les 2 opérateurs densités réduits sont des cas purs.

$$\rho_1(0) = |\varphi_0\rangle\langle\varphi_0| \quad \rho_2(0) = |\chi_0\rangle\langle\chi_0| \quad (7.22)$$

- Sous l'effet de l'hamiltonien

$$H = H_1 + H_2 + W \quad (7.23)$$

où H_1 et H_2 sont les hamiltoniens propres de 1 et 2 et W leur interaction, $|\Psi(0)\rangle$ évolue et devient

$$|\Psi(t)\rangle = e^{-iHt/\hbar} |\Psi(0)\rangle = \left(1 - \frac{it}{\hbar} H - \frac{t^2}{2\hbar^2} H^2 \dots\right) |\Psi(0)\rangle \quad (7.24)$$

A l'instant t , la forme canonique de Schmidt ne se réduit plus en général à un seul terme. Au lieu d'avoir dans (7.2) tous les γ_α nuls, sauf un γ_0 qui vaut 1, plusieurs γ_α sont maintenant non nuls. Pour t suffisamment petit, l'un des γ_α aura un module très légèrement inférieur à 1, celui qui se raccorde à γ_0 pour $t=0$, tous les autres ayant des modules très petits (puisque $\sum |\gamma_\alpha|^2 = 1$). Dans ce paragraphe, nous allons établir une expression perturbative décrivant comment le module du coefficient $\gamma_0(t)$ qui tend vers 1 quand $t \rightarrow 0$, décroît au voisinage de $t=0$. Cette vitesse de décroissance de $|\gamma_0(t)|$ caractérise la vitesse à laquelle de nouveaux termes apparaissent dans le développement de Schmidt, c'est à dire encore la vitesse avec laquelle apparaissent les corrélations entre 1 et 2.

- D'après les résultats du § 1 précédent, les $|\gamma_\alpha(t)|^2$ ne sont autres que les valeurs propres π_α de $\rho_1(t)$ et $\rho_2(t)$. Le principe du calcul est donc simple. A partir de (7.24), nous calculons $\rho_1(t)$ et $\rho_2(t)$. Nous cherchons ensuite une expression perturbative des valeurs propres de $\rho_1(t)$ pour t petit et étudions au voisinage de $t=0$, la décroissance de la valeur propre $\pi_0(t)$ qui tend vers 1 quand $t \rightarrow 0$.

b - Calcul perturbatif des valeurs propres de $\rho(1)$

- Introduisons dans les espaces des états \mathcal{E}_1 et \mathcal{E}_2 de 1 et 2 des bases orthonormées $\{|\varphi_j\rangle\}$ et $\{|\chi_k\rangle\}$, avec $j=0,1,2,\dots$ $k=0,1,2,\dots$ incluant les états initiaux $|\varphi_0\rangle$ de 1 et $|\chi_0\rangle$ de 2. La base

$$\{|\varphi_j\rangle \otimes |\chi_k\rangle\} = \{|\varphi_j, \chi_k\rangle\} \quad (7.25)$$

de $\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$ est une base fixe sur laquelle nous allons développer $|\Psi(t)\rangle$ donné par (7.24). En utilisant

$$\sum_j \sum_k |\varphi_j, \chi_k\rangle \langle\varphi_j, \chi_k| = \mathbb{1} \quad (7.26)$$

nous obtenons, au 2^{ème} ordre inclus en t , et compte tenu de (7.21)

$$|\Psi(t)\rangle = |\varphi_0 \chi_0\rangle - \frac{it}{\hbar} \sum_j \sum_k |\varphi_j \chi_k\rangle \langle \varphi_j \chi_k | H | \varphi_0 \chi_0 \rangle - \frac{t^2}{2\hbar^2} \sum_j \sum_k |\varphi_j \chi_k\rangle \langle \varphi_j \chi_k | H^2 | \varphi_0 \chi_0 \rangle \quad (7.27)$$

qu'on peut encore écrire sous la forme

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_j |\varphi_j\rangle \otimes |2\Omega_j\rangle \quad (7.28)$$

où

$$|2\Omega_j\rangle = \delta_{j0} |2\chi_0\rangle - \frac{it}{\hbar} \sum_k |2\chi_k\rangle \langle \varphi_j \chi_k | H | \varphi_0 \chi_0 \rangle - \frac{t^2}{2\hbar^2} \sum_k |2\chi_k\rangle \langle \varphi_j \chi_k | H^2 | \varphi_0 \chi_0 \rangle \quad (7.29)$$

- Les vecteurs $|2\Omega_j\rangle$ ne sont pas orthogonaux les uns aux autres, de sorte que (7.28) n'est pas en général un développement de Schmidt. En fait, les produits scalaires $\langle 2\Omega_\ell | 2\Omega_j \rangle$ sont les éléments de matrice, dans la base fixe $\{|\varphi_j\rangle\}$, de l'opérateur densité réduit $\rho(1)$ de 1. En effet, d'après (7.28),

$$\rho_1(t) = \text{Tr}_2 |\Psi(t)\rangle \langle \Psi(t)| = \sum_j \sum_\ell |\varphi_j\rangle \langle \varphi_\ell| (\text{Tr}_2 |2\Omega_j\rangle \langle 2\Omega_\ell|) \quad (7.30)$$

de sorte que

$$(\rho_1(t))_{j\ell} = \langle \varphi_j | \rho_1(t) | \varphi_\ell \rangle = \text{Tr}_2 |2\Omega_j\rangle \langle 2\Omega_\ell| = \langle 2\Omega_\ell | 2\Omega_j \rangle \quad (7.31)$$

Il suffit alors d'utiliser (7.29) pour obtenir à l'ordre 2 en t

$$(\rho_1(t))_{j\ell} = \alpha_{j\ell} + \beta_{j\ell} t + \gamma_{j\ell} t^2 \quad (7.32)$$

avec

$$\alpha_{j\ell} = \delta_{j0} \delta_{\ell 0} \quad (7.33)$$

$$\beta_{j\ell} = \frac{i}{\hbar} [\delta_{j0} \langle \varphi_0 \chi_0 | H | \varphi_\ell \chi_0 \rangle - \delta_{\ell 0} \langle \varphi_j \chi_0 | H | \varphi_0 \chi_0 \rangle] \quad (7.34)$$

$$\gamma_{j\ell} = \frac{1}{2\hbar^2} [2 \sum_k \langle \varphi_0 \chi_0 | H | \varphi_\ell \chi_k \rangle \langle \varphi_j \chi_k | H | \varphi_0 \chi_0 \rangle - \delta_{\ell 0} \langle \varphi_j \chi_0 | H^2 | \varphi_0 \chi_0 \rangle - \delta_{j0} \langle \varphi_0 \chi_0 | H^2 | \varphi_\ell \chi_0 \rangle] \quad (7.35)$$

Seul α_{00} est non nul et vaut 1. De même, seuls β_{j0} avec $j \neq 0$ et $\beta_{0\ell}$ avec $\ell \neq 0$ sont non nuls (β_{00} est nul)

- Pour trouver les valeurs propres λ de $\rho_1(t)$, il faut résoudre l'équation aux valeurs propre

	$j \setminus \ell$	0	1	2	
	0	$1 + \gamma_{00} t^2 - \lambda$	$\beta_{01} t + \gamma_{01} t^2$	$\beta_{02} t + \gamma_{02} t^2$...
Déf	1	$\beta_{10} t + \gamma_{10} t^2$	$\gamma_{11} t^2 - \lambda$	$\gamma_{12} t^2$...
	2	$\beta_{20} t + \gamma_{20} t^2$	$\gamma_{21} t^2$	$\gamma_{22} t^2 - \lambda$...
					(7.36)

Supposons la dimension de l'espace E_1 finie et égale à N. Le

déterminant (7.36) est alors un déterminant $N \times N$, qui vaut à l'ordre 2 en t

$$(1-\lambda) \left[(-\lambda)^{N-1} + (-\lambda)^{N-2} \sum_{j \neq 0} \gamma_{jj} t^2 \right] + \gamma_{00} t^2 (-\lambda)^{N-1} - \sum_{j \neq 0} \beta_{0j} \beta_{j0} t^2 (-\lambda)^{N-2} = 0 \quad (7.37)$$

A partir de (7.34), (7.35) et (7.26), on montre alors que (7.37) s'écrit

$$\lambda^N - \lambda^{N-1} + \lambda^{N-2} \frac{t^2}{\hbar^2} \sum_{j \neq 0} \sum_{k \neq 0} |\langle \varphi_j \chi_k | H | \varphi_0 \chi_0 \rangle|^2 = 0 \quad (7.38)$$

$N-2$ valeurs propres restent nulles. Une valeur propre $\Pi_0(t)$ vaut

$$\Pi_0(t) = 1 - A t^2$$

où

$$A = \frac{1}{\hbar^2} \sum_{j \neq 0} \sum_{k \neq 0} |\langle \varphi_j \chi_k | H | \varphi_0 \chi_0 \rangle|^2 \quad (7.39)$$

et l'autre $\Pi_1(t)$ vaut $A t^2$.

Le résultat obtenu ne dépend pas de N et reste valable pour tout N . Le coefficient A , qui décrit la décroissance au voisinage de $t=0$ de $\Pi_0(t)$ qui tend vers 1 quand $t \rightarrow 0$, caractérise la vitesse d'apparition des corrélations quantiques entre 1 et 2.

Comme les hamiltoniens propres H_1 et H_2 de 1 et 2 ne peuvent changer l'état de 1 et 2 à la fois, ils ne peuvent relier $|\varphi_0 \chi_0\rangle$ à $|\varphi_j \chi_k\rangle$ avec $j \neq 0$ et $k \neq 0$. Seule l'interaction W entre 1 et 2 (voir (7.23)) contribue à (7.39) qu'on peut donc reccrire, en introduisant les projecteurs sur les espaces supplémentaires de φ_0 dans E_1 , χ_0 dans E_2

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{\hbar^2} \sum_{j \neq 0} \sum_{k \neq 0} |\langle 1\varphi_j, 2\chi_k | W(1,2) | 1\varphi_0, 2\chi_0 \rangle|^2 = \\ &= \frac{1}{\hbar^2} \langle 1\varphi_0, 2\chi_0 | W(1,2) \left[\mathbb{1}_{E_1} - |1\varphi_0\rangle\langle 1\varphi_0| \right] \otimes \left[\mathbb{1}_{E_2} - |2\chi_0\rangle\langle 2\chi_0| \right] W(1,2) | 1\varphi_0, 2\chi_0 \rangle \end{aligned} \quad (7.40)$$

③ Etude de quelques applications

a - Deux oscillateurs harmoniques couplés

Hamiltonien

$$H = \underbrace{\hbar\omega_1 a_1^\dagger a_1}_{H_1} + \underbrace{\hbar\omega_2 a_2^\dagger a_2}_{H_2} + \underbrace{\hbar g (a_1^\dagger a_2 + a_2^\dagger a_1)}_W \quad (7.41)$$

L'oscillateur 1 (resp 2) a une fréquence ω_1 (resp. ω_2) et des opérateurs de création et d'annihilation a_1 et a_1^\dagger (resp a_2 et a_2^\dagger). g est une constante de couplage. W décrit des processus où 1 perd un quantum d'énergie $\hbar\omega_1$, alors que 2 gagne un quantum $\hbar\omega_2$ et réciproquement.

Cas où l'état initial est un état propre de H_1 et H_2

- Chaque oscillateur est dans un niveau d'énergie bien défini

$$|\psi(0)\rangle = |N_1\rangle \otimes |N_2\rangle = |N_1, N_2\rangle \quad (7.42)$$

On a alors

$$W |N_1, N_2\rangle = \hbar g \left[\sqrt{N_1(N_2+1)} |N_1-1, N_2+1\rangle + \sqrt{(N_1+1)N_2} |N_1+1, N_2-1\rangle \right] \quad (7.43)$$

Comme les 2 états figurant au second membre de (7.43) ont à la fois N_1 et N_2 changés, les 2 projecteurs apparaissant sur la 2^{ème} ligne de (7.40)

sont inutiles et A se réduit à

$$A = \frac{1}{\hbar^2} \langle N_1, N_2 | W^2 | N_1, N_2 \rangle \\ = g^2 [N_1(N_2+1) + (N_1+1)N_2] = g^2 [2N_1N_2 + N_1 + N_2] \quad (7.44)$$

- Il apparaît ainsi que la vitesse d'apparitions des corrélations quantiques croît comme le produit N_1N_2 des nombres quantiques N_1 et N_2 repérant l'énergie de 1 et 2 (à la limite $N_1, N_2 \gg 1$)

Cas où l'état initial est un état cohérent

- Chaque oscillateur i ($i=1,2$) est dans un état cohérent $|\alpha_i\rangle$, état propre de a_i , de valeur propre α_i

$$|\psi(0)\rangle = |\alpha_1\rangle \otimes |\alpha_2\rangle = |\alpha_1, \alpha_2\rangle \quad (7.45)$$

$$a_1|\alpha_1\rangle = \alpha_1|\alpha_1\rangle \quad a_2|\alpha_2\rangle = \alpha_2|\alpha_2\rangle \quad (7.46)$$

Les expressions adjointes de (7.46) sont

$$\langle \alpha_1 | a_1^\dagger = \alpha_1^* \langle \alpha_1 | \quad \langle \alpha_2 | a_2^\dagger = \alpha_2^* \langle \alpha_2 | \quad (7.47)$$

- Développons le produit des 2 projecteurs de la 2^{ème} de (7.40)

$$(1 - |\alpha_1\rangle\langle\alpha_1|)(1 - |\alpha_2\rangle\langle\alpha_2|) = 1 + |\alpha_1, \alpha_2\rangle\langle\alpha_1, \alpha_2| - |\alpha_1\rangle\langle\alpha_1| \otimes \mathbb{1}_2 - |\alpha_2\rangle\langle\alpha_2| \otimes \mathbb{1}_1 \quad (7.48)$$

et calculons la contribution de chacun des 4 termes de (7.48).

• La contribution du 1^{er} terme vaut $\hbar^2 g^2 \langle \alpha_1, \alpha_2 | (a_1^\dagger a_2 + a_2^\dagger a_1)^2 | \alpha_1, \alpha_2 \rangle$.
Pour pouvoir utiliser (7.46) et (7.47), il faut ranger $(a_1^\dagger a_2 + a_2^\dagger a_1)^2$ dans l'ordre normal. En utilisant $[a_i, a_i^\dagger] = 1$ ($i=1,2$), on obtient

$$(a_1^\dagger a_2 + a_2^\dagger a_1)^2 = (a_1^\dagger)^2 a_2^2 + (a_2^\dagger)^2 a_1^2 + 2a_1^\dagger a_2^\dagger a_1 a_2 + a_2^\dagger a_2 + a_1^\dagger a_1 \quad (7.49)$$

La contribution du 1^{er} terme de (7.48) vaut donc

$$\hbar^2 g^2 [(\alpha_1^* \alpha_2 + \alpha_2^* \alpha_1)^2 + |\alpha_2|^2 + |\alpha_1|^2] \quad (7.50)$$

• La contribution du 2^{ème} terme de (7.48) vaut, compte tenu de (7.46) et (7.47)

$$\hbar^2 g^2 [\langle \alpha_1, \alpha_2 | a_1^\dagger a_2 + a_2^\dagger a_1 | \alpha_1, \alpha_2 \rangle]^2 = \hbar^2 g^2 (\alpha_1^* \alpha_2 + \alpha_2^* \alpha_1)^2 \quad (7.51)$$

• La contribution du 3^{ème} terme de (7.48) vaut

$$-\hbar^2 g^2 \langle \alpha_1, \alpha_2 | a_1^\dagger a_2 + a_2^\dagger a_1 | \alpha_1 \rangle \langle \alpha_1 | a_1^\dagger a_2 + a_2^\dagger a_1 | \alpha_1, \alpha_2 \rangle \quad (7.52)$$

$$\text{Or } \langle \alpha_1 | a_1^\dagger a_2 + a_2^\dagger a_1 | \alpha_1, \alpha_2 \rangle = (\alpha_1^* \alpha_2 + \alpha_1 a_2^\dagger) | \alpha_2 \rangle \quad (7.53)$$

On en déduit, compte tenu de $[a_2, a_2^\dagger] = 1$ et (7.46) (7.47), que

$$(7.52) = -\hbar^2 g^2 \langle \alpha_2 | (\alpha_1 \alpha_2^* + \alpha_1^* a_2) (\alpha_1^* \alpha_2 + \alpha_1 a_2^\dagger) | \alpha_2 \rangle \\ = -\hbar^2 g^2 [(\alpha_1^* \alpha_2 + \alpha_2^* \alpha_1)^2 + |\alpha_1|^2] \quad (7.54)$$

• Un calcul analogue donne pour la contribution du 4^{ème} terme de (7.48)

$$-\hbar^2 g^2 [(\alpha_1^* \alpha_2 + \alpha_2^* \alpha_1)^2 + |\alpha_2|^2] \quad (7.55)$$

- Finalement, en ajoutant (7.50), (7.51), (7.54) et (7.55), on obtient

$$A = 0 \quad (7.56)$$

Ainsi, si l'état initial des 2 oscillateurs est un état cohérent, la vitesse d'apparition des corrélations quantiques entre 1 et 2 est nulle, et ce quelle que soit l'énergie moyenne $|\alpha_1|^2 \hbar \omega_1$ et $|\alpha_2|^2 \hbar \omega_2$ de 1 et 2.

Discussion physique

- Le résultat précédent montre clairement que, suivant l'état initial des 2 oscillateurs, des corrélations quantiques peuvent apparaître très rapidement (état initial (7.42) avec $N_1, N_2 \gg 1$) ou pas du tout (état initial (7.45)). Il est satisfaisant de noter que, si l'état initial est quasi-classique, le comportement du système va rester classique. L'évolution de chaque système est bien sûr influencé par l'autre, mais il n'apparaît pas de corrélations quantiques non séparables entre eux: chaque oscillateur reste dans un état pur bien défini.

- Le résultat (7.56), établi à partir d'une étude perturbative, reste en fait valable à tout instant. En effet, l'hamiltonien (7.41) est suffisamment faible pour pouvoir être mis sous la forme

$$H = \hbar \omega_I a_I^\dagger a_I + \hbar \omega_{II} a_{II}^\dagger a_{II} \quad (7.57)$$

où a_I et a_{II} sont donnés par des superpositions linéaires de a_1 et a_2 décrivant 2 modes normaux de vibration des 2 oscillateurs. Il est clair alors que l'état initial (7.45) est un état cohérent $|\alpha_I, \alpha_{II}\rangle$ des 2 nouveaux oscillateurs I et II, α_I et α_{II} étant donnés par les mêmes superpositions linéaires de α_1 et α_2 que a_I et a_{II} en fonction de a_1 et a_2 . L'évolution due à (7.57) conserve ensuite le caractère d'état cohérent de $|\psi(t)\rangle$, aussi bien vis à vis de a_I et a_{II} que de a_1 et a_2 . L'état $|\psi(t)\rangle$ reste donc un état produit (sans corrélation quantique) à tout instant.

- L'exemple étudié ici est très simple dans la mesure où le système est linéaire. Nous allons le compliquer en remplaçant l'un des 2 oscillateurs par un système à 2 niveaux (qui a des non linéarités importantes) et l'autre par un réservoir d'oscillateurs harmoniques.

b- Atome à 2 niveaux couplé au champ de rayonnement

Hamiltonien

L'atome A, à 2 niveaux $|e\rangle$ et $|f\rangle$ séparés de $\hbar \omega_0$, est couplé aux divers modes i du champ de rayonnement R, de fréquences ω_i et d'opérateurs de création et d'annihilation a_i^\dagger et a_i .

$$H = \hbar \omega_0 |e\rangle\langle e| + \sum_i \hbar \omega_i a_i^\dagger a_i + \sum_i \hbar g_i [|e\rangle\langle f| a_i + |f\rangle\langle e| a_i^\dagger] \quad (7.58)$$

g_i est une constante de couplage. On a fait l'approximation du "champ tournant" (consistant à négliger les termes $|e\rangle\langle f| a_i^\dagger$ et $|f\rangle\langle e| a_i$).

Cas où l'état initial du champ est un état de Fock

- L'état initial de A+R est

$$|\psi(0)\rangle = |f\rangle \otimes |N_1, \dots, N_i, \dots\rangle = |f; N_1, \dots, N_i, \dots\rangle \quad (7.59)$$

L'atome est dans f; chaque mode i contient N_i photons

- On a alors

$$W|\psi(0)\rangle = \sum_i \hbar g_i \sqrt{N_i} |e; N_1, \dots, N_i-1, \dots\rangle \quad (7.60)$$

et le coefficient A donné en (7.40) vaut

$$A = \langle \psi(0) | W (\mathbb{1}_A - |f\rangle\langle f|) (\mathbb{1}_R - |N_1, \dots, N_i, \dots\rangle\langle N_1, \dots, N_i, \dots|) W | \psi(0) \rangle \\ = \langle \psi(0) | W^2 | \psi(0) \rangle = \sum_i g_i^2 N_i \quad (7.61)$$

puisque $W|\psi(0)\rangle \propto |f\rangle$ et $|N_i\rangle$ tous 2 changés. On voit sur (7.61) que

chaque mode i contribue au coefficient A , proportionnellement au nombre N_i de photons dans ce mode.

Cas où l'état initial du champ est un état cohérent.

- l'atome est dans $|f\rangle$. Chaque mode i est dans un état cohérent $|\alpha_i\rangle$, état propre de a_i de valeur propre α_i :

$$|\psi(0)\rangle = |f\rangle \otimes |\alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots\rangle = |f; \{\alpha_i\}\rangle \quad (7.62)$$

$$a_i |\{\alpha_i\}\rangle = \alpha_i |\{\alpha_i\}\rangle \quad \langle \{\alpha_i\} | a_i^\dagger = \alpha_i^* \langle \{\alpha_i\} | \quad (7.63)$$

- On a alors, compte tenu de (7.58) et (7.63)

$$W|\psi(0)\rangle = \sum_i \hbar g_i \alpha_i |e; \{\alpha_i\}\rangle \quad (7.64)$$

et par suite, comme $\langle e | (\Pi_A - |f\rangle\langle f|) = \langle e |$

$$A = \left| \sum_i g_i \alpha_i \right|^2 \underbrace{\langle e; \{\alpha_i\} | (\Pi_R - |\{\alpha_i\}\rangle\langle \{\alpha_i\}|) | e; \{\alpha_i\}\rangle}_{\langle e; \{\alpha_i\} | e; \{\alpha_i\}\rangle - \langle e | e \rangle} = 0 \quad (7.65)$$

Ainsi, quelle que soit l'amplitude moyenne α_i du champ dans chaque mode i , la vitesse d'apparition des corrélations quantiques entre atome et rayonnement est nulle quand l'atome, dans l'état $|f\rangle$, interagit avec un champ dans un état cohérent.

Cas où l'atome est initialement dans l'état excité e

- Si, au lieu d'être dans l'état $|f\rangle$, l'atome est initialement dans l'état excité $|e\rangle$, des calculs analogues aux précédents, utilisant en plus $[a_i, a_j^\dagger] = \delta_{ij}$, montrent qu'il faut remplacer (7.61) et (7.65) par

$$|\psi(0)\rangle = |e; \{N_i\}\rangle \quad \rightarrow \quad A = \sum_i g_i^2 (N_i + 1) \quad (7.61)'$$

$$|\psi(0)\rangle = |e; \{\alpha_i\}\rangle \quad \rightarrow \quad A = \sum_i g_i^2 \quad (7.65)'$$

- L'examen de (7.61)' et (7.65)' montre que le terme $\sum_i \hbar^2 g_i^2$ représente la contribution du processus d'émission spontanée à l'apparition des corrélations entre A et R . Un tel processus est indépendant de l'état initial du champ et n'apparaît que pour un atome initialement excité.

Discussion physique

- Dans les traitements semiclassiques des interactions matière-rayonnement, le champ est décrit comme un champ classique, ayant une dépendance temporelle donnée. La résolution de l'équation de Schrödinger pour l'atome soumis à une telle perturbation dépendant du temps permet alors d'obtenir à chaque instant un vecteur d'état bien défini pour l'atome. L'état de l'atome reste donc pur à tout instant.

- Le résultat obtenu plus haut pour la vitesse d'apparition des corrélations quantiques entre l'atome et le champ, considérés tous deux comme des systèmes quantiques, permet de justifier de tels traitements semiclassiques. Nous avons vu en effet que, si le champ de rayonnement est initialement dans un état cohérent, les corrélations quantiques entre atome et rayonnement n'apparaissent que par suite du processus d'émission spontanée et peuvent donc être ignorées si un tel processus est négligeable.

Dans un tel cas, l'état de $A+R$ reste un état produit, et l'état de l'atome reste un état pur.

- Une autre démonstration peut être donnée du résultat précédent (voir références 3 et 4). On peut effectuer sur l'hamiltonien (7.58) une transformation unitaire revenant à traduire tous les opérateurs a_i du champ d'une quantité α_i . Le nouvel hamiltonien ainsi obtenu contient alors un terme décrivant l'interaction de l'atome avec un champ classique dans l'état décrit par les variables normales $\{\alpha_i\}$ et un autre terme décrivant l'interaction de l'atome avec le champ quantique dans un état initial vide de tout photon. Si l'émission spontanée est négligeable, ce dernier terme et peut être ignoré et l'hamiltonien restant se réduit alors à l'hamiltonien des théories semi-classiques.

Références

- (1) O. Kübler, H.D. Zeh *Annals of Physics* 76, 405 (1973)
- (2) E. Joos, H.D. Zeh *Z. Phys. B* 59, 223 (1985)
- (3) B.R. Mollow, *Phys. Rev.* A12, 1919 (1975)
- (4) C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, G. Grynberg
 "Processus d'interaction entre photons et atomes" Exercice 17
 Interéditions et Editions du CNRS, Paris 1988

① Introduction

Exemples d'arguments utilisés souvent pour montrer que la mécanique quantique permet de rendre compte de certains comportements classiques.

(i) Mouvement d'une particule macroscopique libre

- Le théorème d'Ehrenfest montre que le mouvement du centre du paquet d'ondes $\langle \vec{r} \rangle$ obéit aux équations classiques.
- L'étalement du paquet d'ondes est négligeable si la masse est suffisamment grande.

(ii) Observation d'une grosse molécule chirale dans un état droit ou gauche bien défini, et non dans une superposition linéaire des états droit et gauche, comme on s'y attend pour les états propres de l'hamiltonien qui doivent avoir une parité bien définie

L'effet tunnel d'une position à l'autre est de plus en plus difficile pour une molécule de plus en plus grosse et la période de l'oscillation de Rabi entre l'état droit et l'état gauche devient si longue qu'on peut considérer que les états droit et gauche sont stationnaires.

Quelques critiques de ces arguments.

- Si une particule est vraiment libre et si on attend suffisamment longtemps, le paquet d'ondes finira toujours par s'étaler. Peut-on imaginer un objet astronomique, comme une planète ou une étoile, dont le centre de masse est décrit par un paquet d'ondes qui s'étale indéfiniment?
- Rien dans les arguments précédents n'interdit à un système d'être dans une superposition de 2 états macroscopiquement différents. En particulier, pourquoi n'observe-t-on pas des molécules chirales "au milieu de leur oscillation de Rabi", dans une superposition des 2 états droit et gauche.
- Peut-on oublier l'interaction avec l'environnement? La notion de système isolé a-t-elle vraiment un sens pour un système macroscopique? Comment décrire la dynamique du système en présence de telles interactions?

Buts de ce cours

- Préciser quelques ordres de grandeur sur des exemples concrets et montrer que l'interaction avec l'environnement ne peut être ignorée pour des objets suffisamment peu microscopique.
- Utiliser les idées développées dans les cours antérieurs pour décrire l'effet de l'environnement. Comme les interactions dépendent essentiellement des distances relatives, la base privilégiée de l'objet est la base des états propres de la position. L'interaction avec l'environnement détruit donc les cohérences spatiales de l'objet. Elle explique la localisation de l'objet.
- On commence par étudier un système ayant un spectre continu,

une particule se déplaçant dans l'espace et interagissant, soit avec une autre particule éloignée par un potentiel dépendant de la distance (§2), soit subissant des collisions répétées avec un ensemble d'autres particules microscopiques, comme des atomes, des photons... (§3).

- On envisagera ensuite un système ayant un spectre discret, par exemple une molécule chirale dont les 2 états d'énergie les plus bas sont les superpositions linéaires symétrique et antisymétrique des états droit et gauche. On montrera comment la prise en compte de l'effet des collisions subies par une telle molécule permet de mieux comprendre l'origine de la stabilité des isomères optiques (cours suivant IX).

② Cas de 2 particules interagissant par un potentiel dépendant de la distance.

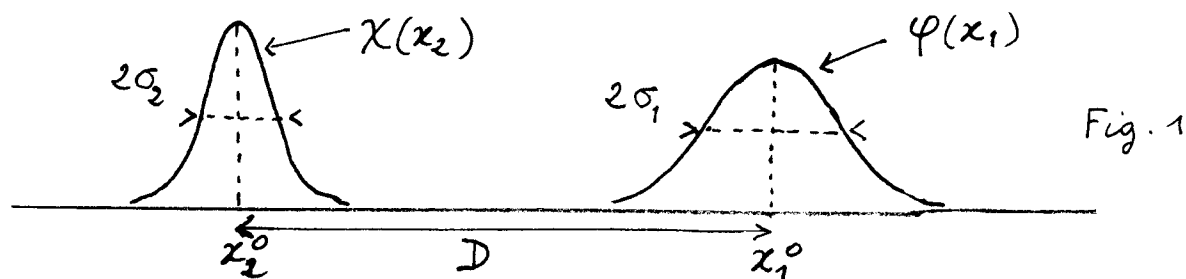
a. Notations

- On se limite au mouvement le long de l'axe Ox joignant les positions moyennes des 2 particules.

- A l'instant $t=0$, la particule 1 est dans l'état $|\varphi\rangle$, la particule 2 dans l'état $|\chi\rangle$

$$|\Psi(0)\rangle = |\varphi\rangle \otimes |\chi\rangle \quad (8.1)$$

La fonction d'onde $\varphi(x_1) = \langle x_1 | \varphi \rangle$ représentant $|\varphi\rangle$ est centrée en x_1^0 , a pour largeur $2\sigma_1$ et est symétrique par rapport à x_1^0 . De même, $\chi(x_2) = \langle x_2 | \chi \rangle$ est centrée en x_2^0 , a pour largeur $2\sigma_2$ et est symétrique par rapport à x_2^0 (Fig. 1)



- L'hamiltonien des 2 particules s'écrit

$$H = \frac{P_1^2}{2m_1} + \frac{P_2^2}{2m_2} + V(x_1 - x_2) \quad (8.2)$$

où $V(x_1 - x_2)$ est une interaction dépendant de la distance et qu'on peut développer en puissances de ξ_1/D et ξ_2/D , où ξ_1 et ξ_2 sont les écarts de chaque particule par rapport à sa position moyenne

$$\xi_1 = x_1 - x_1^0 \quad \xi_2 = x_2 - x_2^0 \quad (8.3)$$

et où $D = |x_2^0 - x_1^0|$ est la distance entre les 2 paquets d'ondes

$$\begin{aligned} V(x_1 - x_2) &= V(x_1^0 - x_2^0 + \xi_1 - \xi_2) \\ &= V_0 + (\xi_1 - \xi_2)V'_0 + \frac{1}{2}(\xi_1 - \xi_2)^2 V''_0 + \frac{1}{6}(\xi_1 - \xi_2)^3 V'''_0 + \dots \end{aligned} \quad (8.4)$$

$$V_0 = V(x_1^0 - x_2^0) \quad V'_0 = V'(x)|_{x=x_1^0 - x_2^0} \quad V''_0 = V''(x)|_{x=x_1^0 - x_2^0} \quad V'''_0 = V'''(x)|_{x=x_1^0 - x_2^0} \quad (8.5)$$

b - Vitesse d'apparition des corrélations quantiques entre les 2 particules

- A $t=0$, l'état des 2 particules est l'état produit (8.1). Sous l'effet de l'interaction $V(x_1-x_2)$, des corrélations quantiques vont apparaître entre les 2 particules et leur état ne sera plus un produit. D'après le cours VII, la valeur propre $\Pi_0(t)$ des opérateurs densités réduits de 1 et 2, qui tend vers 1 quand t tend vers zéro, vaut

$$\Pi_0(t) = 1 - At^2 \tag{8.6}$$

où

$$A = \frac{1}{\hbar^2} \langle 1\varphi 2X | V(x_1-x_2) [1 - |1\varphi\rangle\langle 1\varphi|] [1 - |2X\rangle\langle 2X|] V(x_1-x_2) |1\varphi 2X\rangle \tag{8.7}$$

Le temps $T = 1/\sqrt{A}$ caractérise le temps au bout duquel les corrélations quantiques entre 1 et 2 deviennent appréciables.

- Supposons les masses m_1 et m_2 suffisamment grandes pour que, pendant le temps $1/\sqrt{A}$, on puisse négliger le déplacement des particules sous l'effet de leur interaction et de leur mouvement propre (on suppose $\langle p_1 \rangle = \langle p_2 \rangle = 0$ à $t=0$). Les distributions de positions $\langle x_1 | \rho_1 | x_1 \rangle$ et $\langle x_2 | \rho_2 | x_2 \rangle$ n'ont pas bougé entre $t=0$ et $t = 1/\sqrt{A}$. Il n'en est pas de même pour les cohérences spatiales, par exemple pour $\langle x_1 | \rho_1 | x'_1 \rangle$ avec $x_1 \neq x'_1$, qui satisfait à l'inégalité suivante, caractéristique de tout opérateur densité

$$|\langle x_1 | \rho_1 | x'_1 \rangle| \leq \sqrt{\langle x_1 | \rho_1 | x_1 \rangle \langle x'_1 | \rho_1 | x'_1 \rangle} \tag{8.8}$$

l'égalité n'étant réalisée que si ρ_1 est un cas pur. Effectivement, à $t=0$, $\rho_1(0) = |1\varphi\rangle\langle 1\varphi|$, et on a bien

$$|\langle x_1 | \rho_1 | x'_1 \rangle| = |\langle x_1 | \varphi \rangle \langle \varphi | x'_1 \rangle| = \sqrt{|\varphi(x_1)|^2 |\varphi(x'_1)|^2} \tag{8.9}$$

Par contre, pour $t \sim 1/\sqrt{A}$, ρ_1 n'est plus un état pur, et $|\langle x_1 | \rho_1(t) | x'_1 \rangle|$ a diminué par rapport à (8.9). On peut donc dire, dans ce cas, que $1/\sqrt{A}$ caractérise le temps au bout duquel les longueurs de cohérence de 1 et 2 deviennent de l'ordre des largeurs σ_1 et σ_2 des fonctions d'ondes initiales.

- Le calcul de A à partir de (8.7) ne pose pas de problème particulier. Si on remplace les 2 opérateurs $V(x_1-x_2)$ par les développements (8.4) et qu'on utilise le fait que les valeurs moyennes dans $|1\varphi\rangle$ et $|2X\rangle$ des puissances impaires de ξ_1 et ξ_2 sont nulles, on obtient, à l'ordre le plus bas non nul en σ_1/D et σ_2/D , et après un calcul long mais sans difficulté

$$A = \frac{1}{\hbar^2} \langle \varphi | \xi_1^2 | \varphi \rangle \langle X | \xi_2^2 | X \rangle V_0''^2 \tag{8.10}$$

Comme $\langle \varphi | \xi_1^2 | \varphi \rangle \sim \sigma_1^2$ et $\langle X | \xi_2^2 | X \rangle = \sigma_2^2$ (voir Fig.1), on obtient pour le temps $T = 1/\sqrt{A}$

$$T = \frac{1}{\sqrt{A}} \sim \frac{\hbar}{\sigma_1 \sigma_2 V_0''} \tag{8.11}$$

c - Calcul non perturbatif à la limite $m_1, m_2 \rightarrow \infty$

- Le résultat (8.11) résulte d'une expression perturbative (8.7) qui n'est valable qu'aux temps courts. A la limite $m_1, m_2 \rightarrow \infty$, on peut négliger les 2 premiers termes de (8.2) et obtenir pour l'opérateur

densité' réduit de 1 une expression valable à tout instant .

- Si l'hamiltonien H se réduit à $V(x_1 - x_2)$, l'état de 1+2 à l'instant t s'écrit simplement :

$$|\Psi(t)\rangle = e^{-iV(\hat{x}_1 - \hat{x}_2)t/\hbar} |1\varphi 2\chi\rangle \quad (8.12)$$

(On a mis le symbole \wedge sur x_1 et x_2 pour rappeler que ce sont des opérateurs). On a alors

$$\begin{aligned} \langle x_1 | \rho_1(t) | x'_1 \rangle &= \langle x_1 | T_{x_2} | \Psi(t) \rangle \langle \Psi(t) | x'_1 \rangle = \\ &= \int dx_2 \langle x_1, x_2 | e^{-iV(\hat{x}_1 - \hat{x}_2)t/\hbar} |1\varphi 2\chi\rangle \langle 1\varphi 2\chi | e^{iV(\hat{x}_1 - \hat{x}_2)t/\hbar} | x'_1, x_2 \rangle \\ &= \int dx_2 |\chi(x_2)|^2 \varphi(x_1) \varphi^*(x'_1) e^{-i[V(x_1 - x_2) - V(x'_1 - x_2)]t/\hbar} \end{aligned} \quad (8.13)$$

L'utilisation des développements (8.4) donne alors pour l'exponentielle de (8.13)

$$\begin{aligned} e^{-i[V(x_1 - x_2) - V(x'_1 - x_2)]t/\hbar} &= \\ &= e^{-i[(\xi_1 - \xi'_1)V'_0 + \frac{1}{2}(\xi_1^2 - \xi'^2_1)V''_0]t/\hbar} e^{i(\xi_1 - \xi'_1)\xi_2 V''_0 t/\hbar} \end{aligned} \quad (8.14)$$

La 1^{ère} exponentielle de la 2^{ème} ligne de (8.14) est un facteur de phase. En changeant de variables ($x_1 \rightarrow \xi_1$, $x_2 \rightarrow \xi_2$) et en notant que $\varphi(x_1)\varphi^*(x'_1) = \langle \xi_1 | \rho_1(0) | \xi'_1 \rangle$, on déduit de (8.13) et (8.14) que

$$|\langle \xi_1 | \rho_1(t) | \xi'_1 \rangle| = |\langle \xi_1 | \rho_1(0) | \xi'_1 \rangle| \int d\xi_2 |\chi(\xi_2)|^2 e^{i(\xi_1 - \xi'_1)\xi_2 V''_0 t/\hbar} \quad (8.15)$$

La cohérence spatiale de 1 entre ξ_1 et ξ'_1 a un module qui décroît au cours du temps comme la transformée de Fourier de $|\chi(\xi_2)|^2$ évaluée à $(\xi_1 - \xi'_1)V''_0 t/\hbar$. Si l'on prend pour $|\chi(\xi_2)|^2$ une gaussienne

$$|\chi(\xi_2)|^2 = \frac{1}{\sigma_2 \sqrt{\pi}} e^{-\xi_2^2/\sigma_2^2} \quad (8.16)$$

(8.15) devient

$$|\langle \xi_1 | \rho_1(t) | \xi'_1 \rangle| = |\langle \xi_1 | \rho_1(0) | \xi'_1 \rangle| e^{-(\xi_1 - \xi'_1)^2 \sigma_2^2 V''_0{}^2 t^2 / 4\hbar^2} \quad (8.17)$$

On retrouve bien que la longueur de cohérence de 1 devient inférieure à $2\sigma_1$ quand $t \sim \hbar / V''_0 \sigma_1 \sigma_2$, ce qui coïncide avec (8.11) (l'exponentielle de (8.17) est alors de l'ordre de $1/e$ pour $|\xi_1 - \xi'_1| \sim 2\sigma_1$)

- Le calcul qui précède peut être interprété de la manière suivante. Si 2 est en x_2 , l'énergie de 1 est $V(x_1 - x_2)$ en x_1 , $V(x'_1 - x_2)$ en x'_1 . La cohérence de 1 entre x_1 et x'_1 évolue donc à la fréquence $[V(x_1 - x_2) - V(x'_1 - x_2)]/\hbar$. Cette fréquence change si la position de 2 varie dans un intervalle b_2 autour de x_2^0 et c'est le battement entre les exponentielles correspondant à ces diverses fréquences de Bohr possibles de $\langle x_1 | \rho_1(t) | x'_1 \rangle$ qui conduit à un amortissement de $\langle x_1 | \rho_1(t) | x'_1 \rangle$. La "mesure de la position de 1 par 2" produit en quelque sorte un élargissement inhomogène du spectre de fréquences de $\langle x_1 | \rho_1(t) | x'_1 \rangle$.

d. Quelques ordres de grandeur

Pour simplifier, nous prenons $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ (cas symétrique) et calculons le temps T donné par (8.11), temps au bout duquel la longueur de cohérence de 1 ou 2 commence à devenir inférieur à σ .

Interactions électrostatiques entre 2 charges élémentaires q

$$V_0 = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 D} \quad V''_0 = \frac{q^2}{2\pi\epsilon_0 D^3} \quad (8.18)$$

$$T \sim \frac{\hbar}{\sigma^2 V''_0} \sim \frac{\hbar 2\pi\epsilon_0 D^3}{q^2 \sigma^2} \quad (8.19)$$

$$\hbar = 10^{-34} \text{ J.s} \quad q = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \quad \epsilon_0 = 1/36\pi \cdot 10^9 \text{ MKSA}$$

$$\hookrightarrow T \sim 2 \cdot 10^{-7} \frac{D^3}{\sigma^2} \quad (\text{T en sec, D et } \sigma \text{ en m})$$

$$\text{Si } D = 1 \text{ cm} = 10^{-2} \text{ m}, \quad \sigma = 0.1 \text{ mm} = 10^{-4} \text{ m}, \quad T \sim 2 \cdot 10^{-5} \text{ sec}$$

- On en conclut que 2 charges élémentaires situées à une distance de 1 cm l'une de l'autre ne peuvent garder une longueur de cohérence de 0.1 mm au delà de 20 μ s.

- Distance parcourue pendant T sous l'effet de la force électrostatique

$$F = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 D^2} \quad \text{Accélération } a = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 D^2 m} \quad \ell = \frac{1}{2} a T^2 = \frac{q^2 T^2}{8\pi\epsilon_0 D^2 m}$$

$$\text{Si } m = 10^{-9} \text{ Kg (grain de poussière)} \rightarrow \ell \sim 4.6 \cdot 10^{-25} \text{ m}$$

- Etallement du paquet d'ondes, de largeur initiale σ , pendant T

$$\frac{\hbar}{m\sigma} T \sim 10^{-26} \text{ m}$$

On peut donc bien négliger tout déplacement des particules pendant le temps de destruction des cohérences

Interactions gravitationnelles entre 2 masses

$$V_0 = \frac{G m_1 m_2}{D} \quad V''_0 = \frac{2 G m_1 m_2}{D^3} \quad (8.20)$$

$$T \sim \frac{\hbar}{\sigma^2 V''_0} \sim \frac{\hbar}{2 G m_1 m_2} \frac{D^3}{\sigma^2} \quad G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ MKSA} \quad (8.21)$$

$$\text{1^{er} exemple} \quad m_1 = m_2 = 10^{-9} \text{ Kg} \quad \rightarrow \quad T \sim 7.5 \cdot 10^{-7} \frac{D^3}{\sigma^2}$$

Même ordre de grandeur que pour l'exemple pris plus haut

$$\text{Si } D = 10^{-2} \text{ m}, \quad \sigma = 10^{-4} \text{ m} \quad T \sim 8 \cdot 10^{-5} \text{ sec}$$

2^{ème} exemple Centres de masse de la terre et de la lune

$$m_1 = 6 \cdot 10^{24} \text{ Kg} \quad m_2 = 7.3 \cdot 10^{22} \text{ Kg}$$

$$T \sim 1.7 \cdot 10^{-72} \frac{D^3}{\sigma^2}$$

$$\text{Ici } D \text{ est fixé : } D = 3.8 \cdot 10^8 \text{ m}$$

$$\text{Si on prend } \sigma \sim 1 \text{ F} = 10^{-15} \text{ m}, \text{ on trouve } T = 10^{-16} \text{ s}!$$

Les centres de masse de la terre et de la lune ne peuvent garder une longueur de cohérence de 1 Fermi au delà de 10^{-16} sec.

③ Cas d'une particule de masse M subissant des collisions répétées avec d'autres particules microscopiques

a - Limite $M \rightarrow \infty$. Rappels de résultats concernant la vitesse de destruction des cohérences spatiales.

- Considérons une grosse particule de masse M , subissant de collisions répétées avec des photons, des électrons, des atomes, des molécules... Nous avons montré dans le cours 88-89 (cours IV) que, à la limite $M \rightarrow \infty$, les cohérences spatiales $\langle \vec{r}' | \rho | \vec{r}'' \rangle$ de la grosse particule cible sont détruites par les collisions suivant l'équation :

$$\frac{d}{dt} \langle \vec{r}' | \rho | \vec{r}'' \rangle = - \frac{D}{3\hbar^2} (\vec{r}' - \vec{r}'')^2 \langle \vec{r}' | \rho | \vec{r}'' \rangle \quad (8.22)$$

où D est un coefficient dont l'expression est

$$D = \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}_i} v_i n(\vec{k}_i) \sum_{\vec{k}_f} \sigma(\vec{k}_i \rightarrow \vec{k}_f) \hbar^2 (\vec{k}_i - \vec{k}_f)^2 \quad (8.23)$$

Dans (8.23), $\sigma(\vec{k}_i \rightarrow \vec{k}_f)$ est la section efficace de collision correspondant aux processus où le vecteur d'onde de la particule projectile passe de \vec{k}_i à \vec{k}_f ; $n(\vec{k}_i)$ est le nombre de particules projectiles par unité de volume dont le vecteur d'onde vaut \vec{k}_i , v_i la vitesse de ces particules. En fait, D est le coefficient de diffusion de l'impulsion de la particule cible sous l'effet des collisions avec les particules projectiles (voir cours 88-89, cours IV et V). L'interprétation du fait que le temps de destruction des cohérences spatiales entre \vec{r}' et \vec{r}'' est proportionnel à D et au carré de la distance $(\vec{r}' - \vec{r}'')^2$ a été redonné plus haut (voir cours I)

- Rappelons enfin que l'équation (8.22) n'est valable que si $|\vec{r}' - \vec{r}''|$ est plus petit que la longueur d'onde de de Broglie $1/k_i$ des particules projectiles. Si $|\vec{r}' - \vec{r}''| \gg 1/k_i$, la cohérence spatiale $\langle \vec{r}' | \rho | \vec{r}'' \rangle$ est entièrement détruite après une seule collision. Si $|\vec{r}' - \vec{r}''| \ll 1/k_i$, elle n'est que partiellement détruite après une collision, et c'est l'effet cumulatif des collisions successives qui détruit $\langle \vec{r}' | \rho | \vec{r}'' \rangle$ conformément à (8.22).

- Nous nous intéressons ici aux ordres de grandeur du temps T au bout duquel la cohérence spatiale d'une grosse particule entre 2 points distants de l est réduite de manière significative par les collisions. D'après (8.22)

$$\frac{1}{T} \sim \frac{D}{\hbar^2} l^2 \sim \Lambda l^2 \quad \text{ou} \quad \Lambda = \frac{D}{\hbar^2} \quad (8.24)$$

b - Quelques ordres de grandeur

- D'après (8.24) et (8.23), le coefficient Λ , qui s'exprime en $m^{-2}s^{-1}$, a pour ordre de grandeur

$$\Lambda \sim \frac{1}{\hbar^2} v n_0 \sigma_0 \hbar^2 k^2 \quad (8.25)$$

n_0 : nombre de particules projectiles / m^3

σ_0 : section efficace totale de collision

v : vitesse des projectiles = $\hbar k / m$

(m : masse des projectiles)

- Si le rayon a de la grosse particule est grand devant la longueur d'onde de de Broglie des projectiles, une bonne approximation pour σ_0 est la section efficace géométrique

$$\sigma_0 \sim \pi a^2 \quad (8.26)$$

- Considérons alors une grosse particule de rayon $a = 10^{-3} \text{ cm} = 10^{-5} \text{ m} = 10 \mu\text{m}$, dans un excellent vide de laboratoire, $n_0 = 10^6$ molécules de $\text{N}_2 / \text{cm}^3 = 10^{12}$ particules / m^3 , à une température $T = 300 \text{ K}$

$$\hbar^2 k^2 \sim m k_B T, \quad v = \hbar k / m \sim \sqrt{k_B T / m}$$

$$\text{de sorte que} \quad \Lambda \sim \frac{1}{\hbar^2} n_0 \pi a^2 (k_B T)^{3/2} \sqrt{m}$$

En utilisant la valeur de m pour une molécule de N_2 , $m = 14 \times 1.6 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$, on obtient

$$\Lambda \sim 10^{27} \text{ m}^{-2} \text{ s}^{-1}$$

Il s'ensuit que, au bout de 1 seconde, la cohérence spatiale du centre de masse est réduite à $\sqrt{10^{-27}} \text{ m} \sim 3 \cdot 10^{-14} \text{ m} = 30 \text{ Fermi}$, (ce qui est bien plus petit que la longueur d'onde de de Broglie thermique des molécules d'azote).

- La référence (1) contient également une estimation de Λ correspondant à la diffusion du rayonnement à 3° K , rayonnement relique du big-bang. Le processus de diffusion est un processus de diffusion Rayleigh (la particule est assimilée à une petite sphère de diélectrique). On trouve alors pour la même particule que celle étudiée plus haut

$$\Lambda \sim 10^{10} \text{ m}^{-2} \text{ s}^{-1}$$

ce qui implique que, au bout de 1 seconde, le rayonnement à 3° K réduit la longueur de cohérence spatiale à $\sqrt{10^{-10}} \text{ m} = 10^{-5} \text{ m} = 10 \mu\text{m}$.

- Ces 2 exemples montrent clairement à quel point il est difficile d'isoler de l'environnement une particule ayant seulement $10 \mu\text{m}$ de rayon

C - Compétition entre l'effet de l'étalement du paquet d'ondes et l'effet des collisions.

Dans ce qui précède, nous avons négligé le mouvement propre de la particule, décrit par le terme $P^2/2M$ de l'hamiltonien. Nous essayons maintenant d'estimer l'effet de ce terme afin de voir si l'effet de l'étalement du paquet d'ondes peut l'emporter sur celui des collisions.

Equation pilote utilisée

- Nous ferons l'approximation des vitesses de variation indépendante conduisant à l'équation d'évolution suivante pour ρ .

$$\frac{d}{dt} \rho = \frac{1}{i\hbar} \left[\frac{P^2}{2M}, \rho \right] + \left(\frac{d\rho}{dt} \right)_{\text{coll}} \quad (8.26)$$

où le dernier terme de (8.26) correspond à (8.22). Une telle approximation revient à supposer que, pendant une collision donnée, l'effet du mouvement de la particule est négligeable (temps de collision très court, vitesse de la particule cible très faible devant celle des projectiles). Entre 2 collisions, la particule cible est en vol libre.

- En réalité, nous savons que si la particule cible est en mouvement lent, la distribution des vitesses des particules projectiles est légèrement anisotrope dans son référentiel au repos, ce qui donne naissance à une force de friction opposée à la vitesse p/m de la particule cible (voir § 3 du cours IV du cours 88-89). L'équation pilote (8.26) ne tient pas compte de ce phénomène et conduit, pour la fonction de Wigner de la particule, à une équation de Fokker-Planck sans terme de friction.

Justification du fait que la friction peut être négligée pour une particule macroscopique

- Soit γ le coefficient de friction décrivant l'amortissement de $\langle p \rangle$

$$\frac{d}{dt} \langle p \rangle = -\gamma \langle p \rangle \quad (8.27)$$

Le temps γ^{-1} est le temps au bout duquel la particule cible atteint l'équilibre thermodynamique (on suppose que le gaz qui l'entoure est lui-même en équilibre à la température T). On sait que les coefficients de friction γ et de diffusion D sont reliés par l'équation

$$D = M \gamma k_B T \quad (8.28)$$

et que, à l'équilibre, la longueur de cohérence spatiale de la particule est la longueur d'onde de de Broglie thermique λ_T

$$\lambda_T = \frac{\hbar}{\sqrt{M k_B T}} \quad (8.29)$$

qui est extrêmement petite pour une particule macroscopique. Par exemple, pour une sphère de rayon $10 \mu\text{m}$ et de densité 1, on a $M = 4 \cdot 10^{-12} \text{ Kg}$ et $\lambda_T \approx 10^{-18} \text{ m}$ pour $T = 300 \text{ K}$!

- Etant donné la petitesse de λ_T , il est donc tout à fait raisonnable de prendre, pour décrire l'état de la particule à $t=0$, un paquet d'ondes de largeur σ telle que

$$\sigma \gg \lambda_T \quad (8.30)$$

A cette largeur en x , $\Delta x = \sigma$, correspond une largeur en p $\Delta p \sim \hbar/\sigma$. L'effet des collisions va être d'élargir cette distribution en p d'une manière qui devient appréciable au bout d'un temps $T_{\Delta p}$ tel que l'élargissement correspondant $\sqrt{D T_{\Delta p}}$ soit de l'ordre de $\Delta p = \hbar/\sigma$. On a donc

$$T_{\Delta p} \sim \frac{\hbar^2}{D \sigma^2} \quad (8.31)$$

Comparons alors les temps $T_{\Delta p}$ et γ^{-1} . D'après (8.29), (8.31) et (8.28)

$$\frac{T_{\Delta p}}{\gamma^{-1}} \sim \frac{\hbar^2 \gamma}{D \sigma^2} = \frac{\hbar^2}{M k_B T \sigma^2} = \frac{\lambda_T^2}{\sigma^2} \ll 1 \quad (8.32)$$

La petitesse de λ_T , due à la valeur élevée de M , entraîne donc que l'effet des collisions sur la distribution en impulsion $\mathcal{P}(p)$, et donc sur la longueur de cohérence spatiale qui lui est reliée (voir cours I), va se manifester bien avant que la friction ait eu un effet quelconque. Il est donc tout à fait légitime d'ignorer la friction pour une particule macroscopique partant d'un état initial satisfaisant (8.30).

Solution de l'équation pilote - Conclusion

- Cette solution a déjà été donnée dans le cours 88-89 (cours VII) avec $\gamma \neq 0$, pour un état initial de la particule correspondant à un paquet d'ondes ^(gauche) à 1 dimension, de largeur σ , centré en $x=0$ et d'impulsion moyenne p_0 . Nous nous contenterons ici de donner les résultats qui peuvent être déduits de cette solution à la limite $\gamma t \ll 1$, puisque nous ne tenons pas compte ici de la friction.

- Pour caractériser la cohérence spatiale entre x' et x'' , nous considérons la cohérence normalisée

$$\Gamma(x', x'') = \frac{|\langle x' | \rho(t) | x'' \rangle|}{\sqrt{\langle x' | \rho(t) | x' \rangle \langle x'' | \rho(t) | x'' \rangle}} \quad (8.33)$$

qui vaut 1 à $t=0$ (cas pur). A partir des résultats établis dans le cours VII du cours 88-89, on peut montrer que la solution de (8.26) donne pour $\Gamma(x', x'')$ à la limite

$$\Gamma_{\Delta p} \ll t \ll \gamma^{-1} \quad (8.34)$$

la valeur

$$\Gamma(x', x'') \sim e^{-\frac{Dt}{4\hbar^2} (x' - x'')^2} \quad (8.35)$$

alors qu'en l'absence de vol libre, la solution de 8.26, sans le 1^{er} terme, donne à 1 dimension

$$\Gamma(x', x'') \sim e^{-\frac{Dt}{\hbar^2} (x' - x'')^2} \quad (8.36)$$

La comparaison de (8.35) et (8.36) montre que l'effet des collisions prédomine toujours sur celui du vol libre aux temps longs ($t \gg T_{\Delta p}$). La destruction des cohérences spatiales normalisées est 4 fois plus lente en présence de vol libre qu'en absence de vol libre, mais la longueur de cohérence décroît toujours avec le temps, comme $2\hbar/\sqrt{Dt}$.

Remarque : Si, au lieu de caractériser la cohérence spatiale par (8.33), on utilise la cohérence spatiale globale à une distance u , $F(u) = \int dx \langle x + \frac{u}{2} | \rho(t) | x - \frac{u}{2} \rangle$, on trouve que $F(u) = F(x' - x'')$ a la même décroissance que celle donnée en (8.36), que l'on tienne compte ou non du vol libre. Ce résultat n'est pas surprenant puisque $F(u)$ est la transformée de Fourier de la distribution d'impulsion $P(p)$ (voir cours I), et que l'évolution de $P(p)$ est insensible au 1^{er} terme de (8.26) (le vol libre ne peut changer l'impulsion p).

- En ce qui concerne l'évolution de $\langle x \rangle$ et $\langle p \rangle$, la solution de (8.26) donne, à la limite (8.34), le résultat

$$\langle p \rangle(t) = p_0 \quad \langle x \rangle(t) = \frac{p_0}{m} t \quad (8.37)$$

qui est bien le résultat classique pour une particule libre de masse m et d'impulsion initiale p_0 .

Références

- (1) E. Joos, H. D. Zeh, Z. Phys. B59, 223 (1985)
- (2) E. Joos in "New techniques and ideas in quantum measurement theory", D. Greenberger ed., The New York Academy of Sciences, New York 1986, p. 6

Quelques questions pouvant être soulevées à propos du § 2

① - Le résultat du § 2 semble indiquer que toute interactions entre 2 particules 1 et 2 finit par détruire les cohérences spatiales de 1 et 2.

Or, dans un système atomique comme l'atome d'Hydrogène, l'électron e^- et le proton p^+ interagissent en permanence. Faut-il en conclure que les cohérences spatiales de e^- vont toujours être détruites au bout d'un certain temps, même dans un état stable comme l'état fondamental $1s$?

② - Dans le § 2 c, on a fait tendre m_1 et m_2 vers l'infini et trouvé que les cohérences spatiales de 1 et 2 sont toujours détruites au bout d'un certain temps.

Or, si l'on fait tendre seulement m_2 vers l'infini (et non m_1), il semble a priori correct de considérer que 1 évolue dans un potentiel extérieur créé par la particule 2 infiniment lourde et immobile. Si cela est bien correct, l'état de 1 peut rester pur quel que soit t . Ce résultat n'est-il pas contradictoire avec celui du § 2 c?

③ Si les 2 particules 1 et 2 en interaction sont macroscopiques, peut-on construire des états quasiclassiques produits qui évoluent en restant purs pendant des temps longs (sans qu'il apparaisse de corrélations quantiques entre 1 et 2)? Si oui, quels sont les ordres de grandeur des longueurs de cohérence de tels états?

Réponse à la question ①. Existence d'autres variables qui peuvent rester décorrelées

- L'état initial considéré dans le § 2 est un état produit vis à vis des variables de 1 et 2

$$\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \varphi(\vec{r}_1) \chi(\vec{r}_2) \quad (8.38)$$

Par ailleurs, on ne s'intéresse ensuite qu'à 1 ou à 2, et jamais aux grandeurs sensibles aux corrélations entre 1 et 2. Le but est de comprendre comment le comportement de 1 tout seul est modifié par son interaction avec 2.

- Or, pour un système de 2 particules 1 et 2 interagissant par un potentiel $V(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$, on peut s'intéresser aussi à d'autres problèmes où les observations sont directement sensibles aux corrélations entre 1 et 2 et ne peuvent s'exprimer en fonction des seuls opérateurs de moments réduits $p(1) = \text{Tr}_2 p(1,2)$ et $p(2) = \text{Tr}_1 p(1,2)$. Par exemple, l'absorption et l'émission de lumière par un atome d'hydrogène est déterminée par le couplage du moment dipolaire électrique $\vec{D} = q(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$ avec le champ électromagnétique et est donc sensible aux corrélations entre les positions de e^- et p^+

Pour un tel problème, les variables intéressantes sont, non pas \vec{r}_1 et \vec{r}_2 , mais

$$\begin{cases} \vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} \\ \vec{P} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 \end{cases} \quad (8.39.a)$$

$$\begin{cases} \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \\ \frac{\vec{p}}{m} = \frac{\vec{p}_1}{m_1} - \frac{\vec{p}_2}{m_2} \end{cases} \quad (8.39.b) \text{ avec } m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (8.39.c)$$

qui sont les variables du centre de masse (\vec{R}, \vec{P}) et celles de la particule (fictive) relative (\vec{r}, \vec{p}). Ecrit en fonction de ces variables, l'hamiltonien H s'écrit

$$H = \frac{\vec{P}_1^2}{2m_1} + \frac{\vec{P}_2^2}{2m_2} + V(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = \underbrace{\frac{\vec{P}^2}{2(m_1+m_2)}}_{H_{CM}} + \underbrace{\frac{\vec{p}^2}{2m}}_{H_{rel}} + V(\vec{r}) \quad (8.40)$$

et ne contient aucun terme d'interaction entre variables du centre de masse et variables de la particule relative.

Donc, si l'on part d'un état initial produit vis à vis de \vec{R} et \vec{r}

$$\Psi(\vec{R}, \vec{r}, t=0) = \Psi_{CM}(\vec{R}) \Psi_{rel}(\vec{r}) \quad (8.41)$$

la factorisation (8.41) demeure valable quel que soit t (en l'absence bien sûr de toute autre interaction avec le monde extérieur):

$$\Psi(\vec{R}, \vec{r}, t) = \Psi_{CM}(\vec{R}, t) \Psi_{rel}(\vec{r}, t) = \left[e^{-iH_{CM}t/\hbar} \Psi_{CM}(\vec{R}) \right] \left[e^{-iH_{rel}t/\hbar} \Psi_{rel}(\vec{r}) \right] \quad (8.42)$$

les cohérences spatiales de la particule relative (de même que celles du centre de masse) subsistent alors quel que soit t .

- Il faut bien voir que l'état initial (8.41) n'est pas un état produit vis à vis de \vec{r}_1 et \vec{r}_2 . L'électron et le proton sont déjà fortement corrélés dans l'état initial (8.41) et le calcul du § 2 ne peut être appliqué tel quel puisqu'il suppose un état initial de la forme (8.38).

On peut bien sûr calculer à partir de (8.42) l'opérateur densité réduit de 1

$$\begin{aligned} \langle \vec{r}_1 | \rho_1(t) | \vec{r}'_1 \rangle &= \int d^3r_2 \langle \vec{r}_1, \vec{r}_2 | \rho(t) | \vec{r}'_1, \vec{r}_2 \rangle = \\ &= \int d^3r_2 \Psi_{CM}^* \left(\frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}, t \right) \Psi_{rel}^* (\vec{r}_1 - \vec{r}_2, t) \Psi_{CM} \left(\frac{m_1 \vec{r}'_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}, t \right) \Psi_{rel} (\vec{r}'_1 - \vec{r}_2, t) \end{aligned} \quad (8.43)$$

On peut montrer aisément que, par suite de l'étalement du paquet d'ondes du centre de masse, $\langle \vec{r}_1 | \rho_1(t) | \vec{r}'_1 \rangle$ va finir par tendre vers 0 quand $t \rightarrow \infty$.

- En conclusion de ce §, il existe bien des variables qui peuvent rester décorrélées $\forall t$ et donc conserver leur cohérence spatiale $\forall t$, mais ce ne sont pas \vec{r}_1 et \vec{r}_2 .

Réponse à la question (2) - Limite $m_2 \rightarrow \infty$

- La vitesse d'apparition des corrélations quantiques dépend de l'état initial choisi. Comme nous l'avons vu dans le cours VII, ces corrélations apparaissent très vite pour certains états initiaux, alors qu'elles n'apparaissent pas du tout pour d'autres états initiaux.

- Dans le problème qui nous intéresse ici, le temps T d'apparition des corrélations quantiques est donné par (voir (8.11))

$$T \sim \frac{\hbar}{\sigma_1 \sigma_2 v_0} \quad (8.44)$$

Il est clair sur (8.44) que, si l'on fait tendre σ_2 vers 0, T va tendre vers l'infini et devenir plus long que le temps caractéristique $1/\omega_0$ d'évolution de 1 autour de 2. On peut alors négliger l'apparition des corrélations quantiques entre 1 et 2 et considérer que 1 et 2, partant de l'état (8.38), restent dans des états purs non corrélés. Encore faut-il vérifier que, pendant le temps d'évolution $1/\omega_0$ de 1 autour de 2, le paquet d'ondes de 2 ne s'étale pas trop, ce

qui va être le cas si l'on diminue trop σ_2 . Mais on fait tendre ici m_2 vers l'infini, en même temps que σ_2 vers 0 et l'étalement du paquet d'ondes de 2 pendant $1/\omega_0$ est négligeable si

$$\frac{\hbar}{m_2 \sigma_2} \frac{1}{\omega_0} < \sigma_2 \quad (8.45)$$

On peut donc faire tendre m_2 vers l'infini et σ_2 vers 0 en gardant

$$m_2 \sigma_2^2 > \frac{\hbar}{\omega_0} \quad (8.46)$$

Comme T ne dépend pas de m_2 , de même que ω_0 (si $m_2 \gg m_1$), on voit que, pour σ_2 suffisamment petit, on aura $T \gg 1/\omega_0$.

La particule 1 peut donc faire plusieurs tours autour de 2 avant que n'apparaissent des corrélations quantiques entre 1 et 2.

Conclusion : Si l'on fait tendre m_2 vers l'infini, on peut, en faisant tendre aussi σ_2 vers 0, réaliser des conditions où l'apparition de corrélations quantiques entre 1 et 2 est négligeable. La particule 1 reste alors décrite par une fonction d'onde et se comporte comme une particule évoluant dans un potentiel extérieur créé par une particule fixe en un point donné.

- Remarque : Que se passe-t-il si l'on fait tendre m_2 vers l'infini en gardant σ_2 constant ? On peut en effet toujours prendre pour 2 une fonction d'onde $\chi(\vec{r}_2)$ de largeur σ_2 non nulle, même si m_2 est très grand.

Si σ_2 est suffisamment grand (et si σ_1 n'est pas trop petit), le temps T donné par (8.44) peut être plus petit que $1/\omega_0$. Le calcul du § 2 est alors valable et montre que les corrélations quantiques apparaissent entre 1 et 2 avant que 1 n'ait eu le temps d'évoluer autour de 2. Les cohérences spatiales sont alors détruites.

Or, si $m_2 \rightarrow \infty$, on est tenté de considérer que 1 se déplace dans un potentiel extérieur créé par la distribution de charge statistique $q_2 |\chi(\vec{r}_2)|^2$. Montrons que cette intuition est fautive. A la limite $m_2 \rightarrow \infty$, l'hamiltonien H s'écrit

$$H = \frac{\vec{p}_1^2}{2m_1} + V(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \quad (8.47)$$

Le même type de calcul que celui fait dans le § 2c donne alors pour l'opérateur densité réduit de 1 à l'instant t

$$\begin{aligned} \rho_1(t) = \int d^3 r_2 \langle \vec{r}_2 | e^{-i \left[\frac{\vec{p}_1^2}{2m_1} + V(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \right] t / \hbar} | 1 \varphi \rangle \langle 2 \chi | & \times \\ \times \langle 1 \varphi \rangle \langle 2 \chi | e^{i \left[\frac{\vec{p}_1^2}{2m_1} + V(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \right] t / \hbar} | \vec{r}_2 \rangle & \end{aligned} \quad (8.48)$$

Comme \vec{r}_2 commute avec \vec{r}_1 et \vec{p}_1 (il n'y a plus de \vec{p}_2 dans H), cette expression se calcule aisément et devient

$$\rho_1(t) = \int d^3 r_2 |\chi(\vec{r}_2)|^2 e^{-i \left[\frac{\vec{p}_1^2}{2m} + V(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \right] t / \hbar} | 1 \varphi \rangle \langle 1 \varphi | e^{i \left[\frac{\vec{p}_1^2}{2m} + V(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \right] t / \hbar} \quad (8.49)$$

On voit sur (8.49) que $\rho_1(t)$ diffère de l'état pur obtenu à partir de $| 1 \varphi \rangle$ par évolution dans le potentiel extérieur

$$\int d^3 r_2 |\chi(\vec{r}_2)|^2 V(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \quad (8.50)$$

Pour l'évolution de 1, la charge 2 délocalisée dans l'état $\chi(\vec{r}_2)$ n'est pas équivalente à une distribution continue de charge. Pour

chaque position possible \vec{r}_2 de 2, il faut calculer l'opérateur devant \vec{r}_2 de 1, puis moyennée sur \vec{r}_2 , ce qui conduit à un mélange statistique pour $\rho_1(t)$. C'est ce qu'exprime (8.49).

Réponse à la question (3) : exemple d'états quasiclassiques pour 2 particules interagissant par un potentiel en $1/r$

- On va se limiter à des états quasiclassiques circulaires
L'interaction est attractive

$$V(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = - \frac{e^2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} \quad (8.51)$$

où $e^2 = \frac{|q_1 q_2|}{4\pi\epsilon_0}$ ou $e^2 = G m_1 m_2$ (8.52)

suivant qu'on considère des interactions électrostatiques ou gravitationnelles.

Pour simplifier, on suppose

$$m_2 \gg m_1 \quad (8.53)$$

mais on ne prend pas la limite $m_2 \rightarrow \infty$.

- La fonction d'onde d'un état circulaire $n, l=n-1$ est localisé sur un tore de rayon

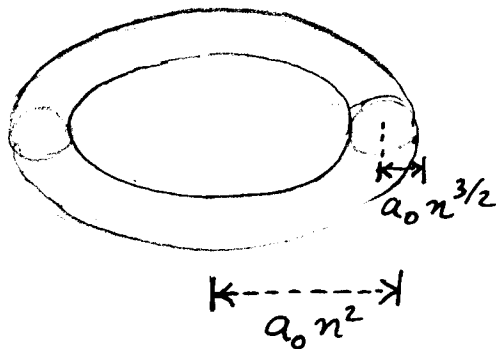
$$D = n^2 a_0 \quad (8.54)$$

et dont la section est un cercle de rayon $n^{3/2} a_0$ (voir Fig)

où

$$a_0 = \frac{\hbar^2}{m_1 e^2} \quad (8.55)$$

est le rayon de Bohr associé au système.



- Superposons δn états circulaires $n, l=n-1, m=n-1$, n variant dans un intervalle δn autour de n_0

Si $\delta n = \sqrt{n_0}$, la variation du rayon $a_0 n^2$ du tore, de l'ordre de $a_0 n_0 \delta n \sim a_0 n_0^{3/2}$ n'est pas supérieure au rayon $a_0 n_0^{3/2}$ de la section du tore. Comme L_z et l'angle azimutal φ sont des variables conjuguées, à la dispersion $\hbar \delta n_0 = \hbar \sqrt{n_0}$ de L_z correspond une dispersion $\hbar / \hbar \sqrt{n_0} = 1/\sqrt{n_0}$ de φ et donc une extension du paquet d'ondes le long du tore égale à $a_0 n^2 \delta \varphi \sim a_0 n^{3/2}$. Finalement l'état quasiclassique formé par la superposition de $\sqrt{n_0}$ états circulaires a la même extension dans les 3 directions donné par $\sigma_1 = a_0 n^{3/2}$ (8.56)

Ce paquet d'ondes tourne à la fréquence angulaire

$$\omega_0 = \frac{e^2}{\hbar a_0 n_0^3} \quad (8.57)$$

- Le paquet d'ondes de 2 a une largeur σ_2 telle que l'étalement de ce paquet d'ondes pendant $1/\omega_0$ soit négligeable devant σ_2

$$\frac{\hbar}{m_2 \sigma_2} \frac{1}{\omega_0} < \sigma_2 \quad (8.58)$$

ce qui donne, comme tenu de (8.55) et (8.57)

$$\sigma_2 > \sqrt{\frac{\hbar}{m_2 \omega_0}} = \sqrt{\frac{m_1}{m_2}} a_0 n^{3/2} \quad (8.59)$$

Nous prendrons $\sigma_2 \sim \sqrt{\frac{m_1}{m_2}} a_0 n^{3/2} \quad (8.60)$

- Reportons alors les expressions (8.56) et (8.60) de σ_1 et σ_2 dans (8.44). En utilisant $v_0'' = e^2/a_0^3 n_0^6$ puisque $v_0'' \approx e^2/D^3$ et $D = a_0 n^2$ on obtient

$$T \sim \frac{\hbar}{\frac{e^2}{a_0^3 n^6} a_0 n^{3/2} a_0 n^{3/2} \sqrt{\frac{m_1}{m_2}}} \sim \frac{1}{\omega_0} \sqrt{\frac{m_2}{m_1}} \gg \frac{1}{\omega_0} \quad (8.61)$$

compte tenu de (8.53).

On voit ainsi qu'on peut construire des paquets d'ondes quasi-classiques qui peuvent tourner plusieurs fois l'un autour de l'autre avant que n'apparaissent des corrélations quantiques entre eux.

- Ordres de grandeur de σ_1 et σ_2 pour des états quasi-classiques de particules macroscopiques. D'après (8.55) et (8.56)

$$\frac{\sigma_1}{a_0} = \frac{a_0 n^{3/2}}{a_0 n^2} = \frac{1}{\sqrt{n}} = \left(\frac{a_0}{D}\right)^{1/4}, \text{ ce qui donne}$$

$$\sigma_1 = D \left(\frac{a_0}{D}\right)^{1/4} \quad (8.62)$$

Reprenons l'exemple du § 2d : $D = 10^{-2} \text{ m}$, $q_1 = -q_2 = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
 $m_1 = 10^{-9} \text{ Kg}$ (nous prendrons $m_2 = 100 m_1$).

Pour un électron (de masse $\sim 10^{-30} \text{ Kg}$), le rayon de Bohr est de l'ordre de $1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ m}$. Le rayon de Bohr pour le problème étudié ici vaut donc

$$a_0 = 10^{-10} \times \frac{10^{-30}}{10^{-9}} = 10^{-31} \text{ m}$$

de sorte que

$$\sigma_1 = 10^{-2} \left(\frac{10^{-31}}{10^{-2}}\right)^{1/4} \sim 6 \cdot 10^{-10} \text{ m} \quad \sigma_2 = \frac{1}{10} \sigma_1 = 6 \cdot 10^{-11} \text{ m}$$

Les états quasi-classiques de particules macroscopiques doivent donc avoir une longueur de cohérence initiale extraordinairement petite si l'on veut que leur interaction ne détruise pas ensuite cette cohérence spatiale.

④ Quelques problèmes pouvant être posés à propos des isomères optiques

a. Description du système étudié

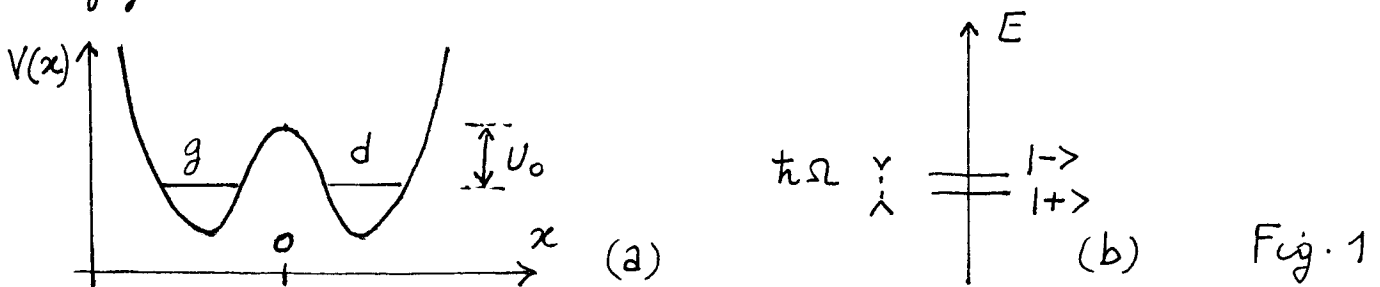
- Une molécule est dite chirale si elle n'est pas superposable à son image dans un miroir.

Exemple : molécule pyramidale formée de 3 atomes différents A B C dans un plan et d'un atome D au dessus de A B C.

- 2 molécules chirales, images l'une de l'autre dans 1 miroir, sont appelées isomères optiques (ou encore énantiomères). Une cellule ne contenant qu'un isomère et pas l'autre fait tourner dans un certain sens la polarisation d'un faisceau lumineux polarisé linéairement qui traverse cette cellule. Si la cellule est remplie de l'autre isomère, le plan de polarisation tourne dans l'autre sens. Ce phénomène physique est appelé activité optique.

- Description quantique

Reprenons l'exemple de la molécule pyramidale ABCD donné plus haut. Soit x la cote de D par rapport au plan ABC. L'énergie potentielle en fonction de x a l'allure représentée sur la figure 1a



La courbe est symétrique par rapport à $x=0$ et présente 2 minima. Les états liés dans chaque puits correspondent aux configurations des 2 isomères. Nous appellerons ces 2 états g et d .

La barrière de potentiel séparant les 2 états a pour hauteur U_0 (énergie d'activation). Par effet tunnel, l'atome D peut passer de l'état g à l'état d . Il s'ensuit que les 2 états propres de l'hamiltonien de la molécule ne sont pas les états d et g mais les états $|1+>$ et $|1->$

$$|\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|g\rangle \pm |d\rangle] \quad (9.1)$$

séparés par une énergie $\hbar\Omega$. Ω est la fréquence angulaire de l'oscillation de Rabi d'une molécule partant à l'instant $t=0$ de l'état d ou g et oscillant entre cet état et l'autre.

Notons enfin que la dégénérescence parfaite des états d et g est une conséquence de l'invariance de l'hamiltonien H par réflexion (conservation de la parité). C'est pour la même raison que les états propres (9.1) de H sont des états propres de l'opérateur parité.

b- Origine de la stabilité des isomères optiques. Réponse de Hund

- Les états g et d n'étant pas des états propres de H ne sont pas des états stationnaires. Pourquoi observe-t-on alors des isomères optiques, c'est à dire des molécules dans l'état g ou d ? La réponse donnée par Hund à ce problème, qu'il appelait le "paradoxe des isomères optiques" (référence (1)), est basée sur la longueur des temps d'effet tunnel. Pour une grosse molécule, ces temps $2\pi/\Omega$ sont astronomiquement longs et g et d peuvent être considérés comme pratiquement stationnaires.

- Pour expliquer pourquoi le monde vivant ne contient que des molécules d'une certaine chiralité, on peut invoquer des fluctuations favorisant un type de molécule au moment de l'apparition de la vie. Comme les réactions biologiques sont stéréospécifiques (sensibles à la forme des molécules), seul ce type de molécule est ensuite synthétisé par les organismes vivants, leur transformation spontanée (par effet tunnel) en l'autre isomère demandant un temps astronomiquement long, et pouvant par suite être négligé.

c- Insuffisances de la réponse précédente. Quelques autres questions

(i) L'effet tunnel varie très vite avec la taille de la molécule. La référence (2) mentionne des calculs prévoyant la possibilité d'obtenir, avec des molécules intermédiaires, des temps $2\pi/\Omega$ d'effet tunnel variant entre 10^{-6} sec. et quelques jours. La même référence propose des expériences où l'on essaierait d'observer des "battements quantiques" sur l'activité optique. A $t=0$, on prépare un échantillon d'un isomère donné. L'oscillation de Rabi entre cet isomère et l'autre produirait une modulation à la fréquence Ω de la rotation du plan de polarisation.

(ii) Nous avons mentionné plus haut que la dégénérescence entre les états g et d n'est parfaite que si la parité est conservée. Que se passe-t-il si l'on tient compte des interactions électrofaibles qui violent la parité? La référence (2) contient une estimation de la levée de dégénérescence $\hbar\delta$ entre les états g et d due à de telles interactions violant la parité. En présence de $\hbar\delta$, l'oscillation de Rabi due à l'effet tunnel n'est plus complète: le spin fictif associé au système à 2 états $\{g, d\}$ partant de la direction positive de Oz , précesse autour d'un champ magnétique qui n'est plus orienté suivant Ox mais qui fait avec Oz un angle θ tel que $\tan\theta = |\Omega/\delta|$. La fréquence de précession est également plus rapide (à la fréquence $\sqrt{\delta^2 + \Omega^2}$ au lieu de Ω). Si $|\delta| \gg \Omega$, les états propres de H deviennent très proches des états g et d . La référence (2) pose plusieurs questions intéressantes. Pourrait-on détecter des effets de violation de la parité sur des battements quantiques de l'activité optique? Les interactions électrofaibles jouent-elles un rôle dans la stabilité des isomères optiques?

(iii) Effet des collisions.
- A haute température, les chocs avec les molécules du milieu environnant peuvent faire franchir à l'isomère la barrière de potentiel de la figure 1 et le transformer en l'autre isomère. Un tel phénomène est appelé racémisation thermique, car il

transforme un milieu optiquement actif en un milieu racémique contenant en proportions égales les 2 isomères. L'efficacité d'un tel processus varie en $\exp(-U_0/k_B T)$. Il suffit d'abaisser la température pour le bloquer. Ainsi, avec $U_0 = 1\text{eV}$ et $T = 300\text{K}$, $\exp(-U_0/k_B T) \sim 10^{-17}$.

- A basse température, les collisions ne peuvent plus transférer de molécule de l'état g à l'état d . Dans la base $\{|g\rangle, |d\rangle\}$, ces collisions ne sont plus de type T_1 , mais de type T_2 . Comment l'oscillation de Rabi due à l'effet tunnel est-elle modifiée par de telles collisions? C'est ce point que nous allons aborder maintenant.

⑤ Modification par les collisions à basse température de l'oscillation de Rabi entre les états droit et gauche.

a. Equation pilote

Effet des collisions

- Chaque collision est supposée durer un temps suffisamment court pour qu'on puisse négliger tout effet tunnel pendant ce temps de collision.

- Dans l'état initial $|\Psi_i\rangle$ (avant la collision), la molécule chirale (cible) est supposée dans une superposition linéaire des états g et d , la molécule projectile dans un état $|\vec{k}\rangle$, d'impulsion $\hbar\vec{k}$

$$|\Psi_i\rangle = (c_g |g\rangle + c_d |d\rangle) \otimes |\vec{k}\rangle \tag{9.2}$$

Suivant que la molécule cible est dans l'état $|g\rangle$ ou $|d\rangle$, l'état du projectile est transformé en $S_g |\vec{k}\rangle$ ou $S_d |\vec{k}\rangle$, où S_g (resp. S_d) sont les matrices S de collision pour une molécule dans l'état g (resp. d). La molécule cible, quant à elle, ne change pas d'état, puisque la collision ne lui fournit pas l'énergie suffisante pour franchir la barrière de potentiel de la figure 1. L'état final (après la collision) des 2 molécules est donc

$$|\Psi_f\rangle = c_g |g\rangle \otimes |\chi_g\rangle + c_d |d\rangle \otimes |\chi_d\rangle \tag{9.3}$$

où

$$|\chi_g\rangle = S_g |\vec{k}\rangle \quad |\chi_d\rangle = S_d |\vec{k}\rangle \tag{9.4}$$

- Si l'on suppose que la molécule projectile, qui vient de subir une collision avec la particule cible, ne subira plus d'autre collision avec la particule cible (cette particule cible subira bien sûr d'autres collisions par la suite, mais avec d'autres particules projectiles), on peut renoncer aux corrélations apparues entre la molécule cible et la molécule projectile après la collision, et décrire l'état de la molécule cible après la collision par la trace sur la molécule projectile de $|\Psi_f\rangle\langle\Psi_f|$.

On trouve ainsi que la cohérence quantique entre $|g\rangle$ et $|d\rangle$, qui vaut $c_g c_d^*$ avant la collision, devient après la collision $c_g c_d^* T_2 |\chi_g\rangle\langle\chi_d| = c_g c_d^* \langle\chi_d|\chi_g\rangle$

$$c_g c_d^* \rightarrow c_g c_d^* \langle\chi_d|\chi_g\rangle \tag{9.5}$$

- A cause de l'unitarité des matrices S et de l'inégalité de Schwarz, $|\langle \chi_d | \chi_g \rangle| \leq 1$. La cohérence quantique entre g et d est donc réduite au cours d'une collision. En particulier, si la longueur d'onde de de Broglie des particules projectiles est petite devant la distance entre les 2 minima de potentiel de la figure 1, les états χ_d et χ_g qui sont localisés autour de ces 2 minima ont un recouvrement nul, et une seule collision suffit à détruire la cohérence entre g et d. Autrement, la cohérence est réduite par un facteur $\langle \chi_d | \chi_g \rangle$. Il suffit alors de sommer sur toutes les collisions pouvant se produire pendant le temps dt pour montrer que ρ_{gd} évolue suivant l'équation

$$\left(\frac{d}{dt} \rho_{gd}\right)_{coll} = -\gamma_c \rho_{gd} \tag{9.6}$$

où γ_c est un paramètre exprimable en fonction des matrices S de collision, de la densité et de la vitesse des particules projectiles (calcul analogue à celui du cours IV du cours 88-89). Comme les collisions ne font pas passer de g à d, on a

$$\left(\frac{d}{dt} \rho_{gg}\right)_{coll} = 0 \quad \left(\frac{d}{dt} \rho_{dd}\right)_{coll} = 0 \tag{9.7}$$

Effet tunnel

L'évolution de l'opérateur densité de la molécule chirale sous l'effet du seul effet tunnel est décrite par l'équation

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [H_T, \rho] \tag{9.8}$$

où l'hamiltonien tunnel H_T s'écrit dans la base $\{|g\rangle, |d\rangle\}$

$$H_T = \frac{\hbar\Omega}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{9.9}$$

Les états propres de H_T sont bien les états (9.1), séparés par $\hbar\Omega$.

Approximation des vitesses de variations indépendantes

- L'évolution globale de ρ s'obtient en ajoutant indépendamment l'effet des collisions et celui de H_T , ce qui donne

$$\frac{d}{dt} \rho = \frac{1}{i\hbar} [H_T, \rho] + \left(\frac{d\rho}{dt}\right)_{coll} \tag{9.10}$$

- En explicitant ces équations dans la base $\{|g\rangle, |d\rangle\}$, on obtient

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \rho_{gg} = -i\frac{\Omega}{2} (\rho_{dg} - \rho_{gd}) & (9.11.a) \\ \frac{d}{dt} \rho_{dd} = -i\frac{\Omega}{2} (\rho_{gd} - \rho_{dg}) & (9.11.b) \\ \frac{d}{dt} \rho_{gd} = -i\frac{\Omega}{2} (\rho_{dd} - \rho_{gg}) - \gamma_c \rho_{gd} & (9.11.c) \\ \frac{d}{dt} \rho_{dg} = i\frac{\Omega}{2} (\rho_{dd} - \rho_{gg}) - \gamma_c \rho_{dg} & (9.11.d) \end{cases}$$

Notons qu'on s'intéresse uniquement aux degrés de liberté interne de la molécule.

- On vérifie aisément sur (9.11.a) et (9.11.b) que

$$\frac{d}{dt} (\rho_{gg} + \rho_{dd}) = 0 \tag{9.12}$$

Si l'on utilise les nouvelles variables

$$\begin{cases} u = P_{gd} + P_{dg} & (9.13.a) \\ v = i(P_{gd} - P_{dg}) & (9.13.b) \\ w = P_{gg} - P_{dd} & (9.13.c) \end{cases}$$

le système (9.11) devient

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} u = -\gamma_c u & (9.14.a) \\ \frac{d}{dt} v = -\gamma_c v - \Omega w & (9.14.b) \\ \frac{d}{dt} w = +\Omega v & (9.14.c) \end{cases}$$

b- Etude des divers régimes

- Le problème que nous étudions est le suivant. A $t=0$, la molécule est dans l'état $|g\rangle$: $P_{gg} = 1, P_{dd} = 0, P_{gd} = 0, P_{dg} = 0$. Quelle est la probabilité de trouver à l'instant t la molécule dans l'état d .

Comme seul $w \neq 0$ à $t=0$ et que w et u ne sont pas conjugués (voir les équations (9.14)), il suffit, pour étudier l'évolution du système, de considérer les seules équations (9.14.b) et (9.14.c). Les constantes de temps apparaissant dans l'évolution du système sont donc les inverses des valeurs propres de la matrice 2×2

$$\begin{pmatrix} -\gamma_c & -\Omega \\ +\Omega & 0 \end{pmatrix} \quad (9.15)$$

valeurs propres qui sont égales à

$$\frac{-\gamma_c \pm \sqrt{\gamma_c^2 - 4\Omega^2}}{2} \quad (9.16)$$

Limite $\gamma_c \ll \Omega$ (effet des collisions faible devant celui de l'effet tunnel)

les 2 racines (9.16) sont alors à peu près égales à

$$\pm i\Omega - \frac{\gamma_c}{2} \quad (9.17)$$

L'évolution de la molécule est une oscillation de Rabi amortie avec un temps $\gamma_c/2$.

Limite $\gamma_c \gg \Omega$ (effet des collisions grand devant celui de l'effet tunnel)

Les 2 racines (9.16) sont alors réelles et valent

$$\begin{cases} -\gamma_c & (9.18.a) \\ -\Omega^2/\gamma_c & (9.18.b) \end{cases}$$

L'une ($-\Omega^2/2\gamma_c$) a un module beaucoup plus petit que l'autre ($-\gamma_c/2$)

c- Interprétations en termes de temps de transition à la limite $\Omega \ll \gamma_c$

- Après un régime transitoire durant un temps de l'ordre de γ_c^{-1} les éléments de matrice de ρ évoluent avec une constante de temps longue (inverse de $\Omega^2/2\gamma_c$).

- Dans l'équation (9.11.c), on peut alors négliger dP_{gd}/dt , qui

est de l'ordre de $\rho_{gd} \Omega^2 / 2\gamma_c$, devant $\gamma_c \rho_{gd}$, ce qui donne alors une équation permettant de réexprimer ρ_{gd} en fonction de ρ_{gg} et ρ_{dd} (élimination adiabatique des cohérences). On peut ainsi écrire

$$\rho_{gd} = - \frac{i\Omega}{2\gamma_c} (\rho_{dd} - \rho_{gg}) \tag{9.19.a}$$

et par suite

$$\rho_{dg} = \frac{i\Omega}{2\gamma_c} (\rho_{dd} - \rho_{gg}) \tag{9.19.b}$$

- En reportant les équations (9.19) dans les équations d'évolution des populations (9.11.a) et (9.11.b), on obtient

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d}{dt} \rho_{gg} &= \kappa (\rho_{dd} - \rho_{gg}) & (9.20.a) \\ \frac{d}{dt} \rho_{dd} &= \kappa (\rho_{gg} - \rho_{dd}) & (9.20.b) \end{aligned} \right.$$

où

$$\kappa = \frac{\Omega^2}{2\gamma_c} \tag{9.21}$$

apparaît comme un temps de transfert entre d et g.

- Ainsi, à la limite des temps de collisions élevés ($\gamma_c \gg \Omega$), l'oscillation de Rabi entre g et d est remplacé par des transitions incohérentes s'effectuant avec une probabilité de transition constante par unité de temps donnée par (9.21) qu'on peut écrire

$$\kappa = \frac{\Omega^2}{2\gamma_c} = \Omega \frac{\Omega}{2\gamma_c} \ll \Omega \tag{9.22}$$

On voit que κ est de l'ordre de Ω que multiplie un facteur de réduction $\Omega / 2\gamma_c \ll 1$.

d - Conclusions

- L'effet des collisions de faible énergie n'est donc pas, comme un raisonnement naïf pourrait le suggérer, d'accélérer le passage de g à d. Au contraire, il le ralentit ! Augmenter la pression du fluide environnant augmente donc la stabilité des isomères optiques. Nous reviendrons dans le paragraphe suivant sur ce comportement et l'interpréterons en termes de "mesures" répétées par l'environnement (effet Zeeman quantique)

- Le résultat précédent montre bien la difficulté des expériences suggérées dans la référence (2). Pour observer des battements quantiques d'activité optique avec des périodes longues, disons supérieures à 10^{-3} sec, il faudrait réaliser un isolement exceptionnel de l'environnement. Rappelons qu'à pression ordinaire ($n \sim 10^{19}$ particules/cm³), avec une section efficace de $(10 \text{ \AA})^2 \sim 10^{-14}$ cm² et une vitesse des projectile de l'ordre de 10^4 cm/s, la fréquence des collisions ($n\sigma v$) est de l'ordre de 10^9 sec⁻¹. Par ailleurs, utiliser des jets moléculaires dans un ultraviolet poserait le problème de la petitesse des temps d'observation qui sont limités par le temps de vol. Notons enfin que, plus la molécule est grosse, plus les sections efficaces sont élevées (γ_c croît) et plus l'effet tunnel devient difficile (Ω décroît). Les 2 effets se conjuguent dans le facteur de réduction $\Omega / 2\gamma_c$ apparaissant dans (9.22).

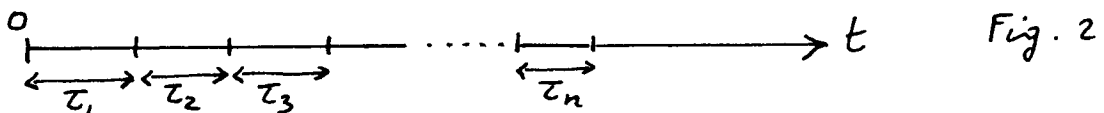
- L'analyse précédente montre finalement que la stabilité de

isomères optiques est due en fait au couplage avec l'environnement. C'est ce couplage qui localise spatialement les atomes dans la molécule et permet de la considérer comme un objet classique avec une forme géométrique bien définie dans l'espace, et non comme une superposition linéaire d'états où l'atome D occupe 2 positions différentes, au dessus et au dessous du plan ABC. C'est enfin le couplage avec l'environnement qui fait que le passage de g à d et de d à g peut être décrit en termes de temps de transitions (équations (9.20)) et non en termes d'oscillations cohérentes.

⑥ Autre analyse des phénomènes basé sur la théorie quantique de la mesure

a - Réinterprétation de l'évolution de la molécule en termes de mesures répétées par l'environnement

- L'analyse que nous avons donnée plus haut de l'effet d'une collision (passage de (9.2) à (9.3)) montre qu'une collision peut être considérée comme une opération de mesure de la molécule chirale par l'environnement.
- Nous supposons dans ce paragraphe que la longueur d'onde de de Broglie des particules projectiles est petite devant la distance entre les 2 minima de potentiel de la figure 1, de sorte que $|X_g\rangle$ et $|X_d\rangle$ sont orthogonaux dans (9.3). Les corrélations apparues entre la molécule chirale et la molécule projectile à l'issue de la collision sont alors parfaites. Les 2 états g et d de la molécule se sont corrélés avec 2 états orthogonaux de la molécule projectile. En mesurant cette dernière, on pourrait savoir si la molécule chirale est dans l'état g ou l'état d .
- La molécule chirale subit au cours du temps une succession de collisions avec des molécules projectiles différentes. On peut donc considérer que, au cours du temps, à des intervalles τ_1, τ_2, \dots (où τ_1, τ_2, \dots sont de l'ordre du temps entre collisions), des mesures sont effectuées sur la molécule chirale avec des "appareils de mesure différents", puisque ce sont des molécules projectiles différentes qui interviennent à chaque collision. De plus, ces mesures ne sont pas "lues" puisqu'on n'observe pas les molécules projectiles. Nous avons alors montré dans le cours II que l'évolution de la molécule peut être décrite simplement dans les termes suivants. Entre 2 mesures, la molécule évolue librement. Après une mesure non lue, son opérateur densité subit une réduction consistant à annuler tous les blocs non diagonaux entre états propres différents de l'observable mesuré (ici, ce sont les états $|g\rangle$ et $|d\rangle$). Cette démarche va nous permettre de calculer simplement l'état de la molécule partant à $t=0$ de l'état g , et subissant n mesures séparées par des intervalles $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ (Fig. 2)



b - Calcul de l'opérateur densité de la molécule après n mesures.

- Dans la base $\{|g\rangle, |d\rangle\}$, l'opérateur densité de la molécule

s'écrit avec les notations (9.13)

$$\rho = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+w & -iv \\ iv & 1-w \end{pmatrix} \quad (9.23)$$

(Dans le problème étudié ici, u est toujours nul)

- A $t=0$, $w=1$, $v=0$. Entre $t=0$ et $t=\tau_1$, v et w évoluent librement conformément aux équations (9.14.b) et (9.14.c) où l'on fait $\gamma_c = 0$

$$dv/dt = -\Omega w \quad dw/dt = \Omega v \quad (9.24)$$

A $t=\tau_1-\epsilon$, juste avant la 1^{ère} collision, on a donc

$$w(\tau_1-\epsilon) = \cos \Omega \tau_1 \quad v(\tau_1-\epsilon) = -\sin \Omega \tau_1 \quad (9.25)$$

Après la collision, les éléments non diagonaux sont réduits à 0 et les éléments diagonaux sont inchangés.

$$w(\tau_1+\epsilon) = \cos \Omega \tau_1 \quad v(\tau_1+\epsilon) = 0 \quad (9.26)$$

Entre $\tau_1+\epsilon$ et $\tau_1+\tau_2-\epsilon$, juste avant la 2^{ème} collision, v et w évoluent conformément à (9.24), en partant de (9.26). On en déduit

$$w(\tau_1+\tau_2-\epsilon) = \cos \Omega \tau_1 \cos \Omega \tau_2 \quad v(\tau_1+\tau_2-\epsilon) = -\cos \Omega \tau_1 \sin \Omega \tau_2 \quad (9.27)$$

La 2^{ème} collision détruit les cohérences, de sorte que

$$w(\tau_1+\tau_2+\epsilon) = \cos \Omega \tau_1 \cos \Omega \tau_2 \quad v(\tau_1+\tau_2+\epsilon) = 0 \quad (9.28)$$

et ainsi de suite ... Après la n ^{ème} collision, on a finalement

$$w(\tau_1+\tau_2+\dots+\tau_n+\epsilon) = \prod_{i=1}^n \cos \Omega \tau_i \quad v(\tau_1+\tau_2+\dots+\tau_n+\epsilon) = 0 \quad (9.29)$$

La probabilité de trouver la molécule dans l'état g après n collisions s'écrit donc, compte tenu de (9.23)

$$P_{gg}(\tau_1+\tau_2+\dots+\tau_n+\epsilon) = \frac{1}{2} \left[1 + \prod_{i=1}^n \cos \Omega \tau_i \right] \quad (9.30)$$

C - Limite des temps de collision élevés ($\Omega \tau_i \ll 1$)

- Si les temps entre collisions τ_i sont très courts devant $1/\Omega$, on peut développer les cosinus de (9.30) et obtenir

$$P_{gg}(\sum_{i=1}^n \tau_i + \epsilon) = 1 - \frac{\Omega^2}{4} \sum_{i=1}^n \tau_i^2 \quad (9.31)$$

- Supposons que les instants où se produisent les collisions forment un processus ponctuel de Poisson, de sorte que la distribution des τ_i est donnée par

$$P(\tau_i) = \frac{1}{\tau_0} e^{-\tau_i/\tau_0} \quad (9.32)$$

où τ_0 est le temps moyen entre 2 collisions successives. On a alors

$$\overline{\tau_i} \approx \frac{1}{n} (\tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_n) \approx \frac{1}{\tau_0} \int_0^\infty \tau e^{-\tau/\tau_0} d\tau = \tau_0 \quad (9.33)$$

$$\overline{\tau_i^2} \approx \frac{1}{n} (\tau_1^2 + \tau_2^2 + \dots + \tau_n^2) \approx \frac{1}{\tau_0} \int_0^\infty \tau^2 e^{-\tau/\tau_0} d\tau = 2\tau_0^2 \quad (9.34)$$

En reportant (9.33) et (9.34) dans (9.31), et en posant $t = n\tau_0$, on obtient

$$P_{gg}(t) = 1 - \frac{\Omega^2}{4} 2n\tau_0^2 = 1 - \frac{\Omega^2 \tau_0}{2} t \quad (9.35)$$

On trouve que $P_{gg}(t)$ commence par décroître linéairement avec t . En notant que $\tau_0 = 1/\gamma_c$ où γ_c est le temps de destruction des cohérences introduit dans le § 5 (rappelons que chaque collision

est supposée ici détruire la cohérence), on obtient

$$P_{gg}(t) \approx 1 - \kappa t \quad (9.36)$$

qui coïncide avec la solution des équations (9.20) au voisinage de $t=0$.

d - Effet Zénon quantique - Gel de l'évolution propre.

- Il est clair sur (9.35) que, si $\tau_0 \rightarrow 0$, $P_{gg}(t)$ n'évolue plus. Des mesures de plus en plus rapprochées empêchent le système d'évoluer. Un tel effet est appelé effet Zénon quantique.

- L'interprétation de cet effet est la suivante. La réduction du paquet d'ondes associé à la mesure reprojette en permanence l'état du système sur l'état initial et l'empêche d'évoluer. Le point important dans cet argument est la dépendance en t^2 de l'évolution propre entre 2 mesures rapprochées (voir les $\cos \Omega \tau_i$ de (9.30)). Pour bien comprendre ce point, il n'est pas inutile de rappeler la présentation habituelle de l'effet Zénon.

- Soit un système d'hamiltonien H , partant à $t=0$ d'un état $|\varphi\rangle$ (qui n'est pas état propre de H). La probabilité pour que le système soit resté dans l'état $|\varphi\rangle$ à l'instant τ est

$$P(\tau) = |\langle \varphi | e^{-iH\tau/\hbar} | \varphi \rangle|^2 \quad (9.37)$$

En développant l'exponentielle, on obtient

$$P(\tau) \approx \left| 1 - \frac{i\tau}{\hbar} \langle \varphi | H | \varphi \rangle - \frac{\tau^2}{2\hbar^2} \langle \varphi | H^2 | \varphi \rangle \right|^2 \sim 1 - \frac{\tau^2}{\hbar^2} (\Delta H)^2 \quad (9.38)$$

où

$$(\Delta H)^2 = \langle \varphi | H^2 | \varphi \rangle - (\langle \varphi | H | \varphi \rangle)^2 \quad (9.39)$$

est la variance de H dans l'état $|\varphi\rangle$. On voit bien que $P(\tau)$ varie quadratiquement avec τ au voisinage de $\tau=0$.

- Si l'on envisage n mesures successives (séparées toutes par le même intervalle τ pour simplifier) et qu'on applique la réduction du paquet d'ondes après chaque mesure, on trouve que la probabilité pour que le système soit toujours resté dans l'état $|\varphi\rangle$ après n mesures durant un temps $n\tau$ est

$$P(t) = P(n\tau) = [P(\tau)]^n \approx \left[1 - \frac{\tau^2}{\hbar^2} (\Delta H)^2 \right]^n \approx 1 - \frac{n\tau^2}{\hbar^2} (\Delta H)^2 = 1 - \frac{\tau t}{\hbar^2} (\Delta H)^2 \quad (9.40)$$

Il est clair sur (9.40) que c'est parce que $P(\tau)$ varie en $1 - \alpha\tau^2$ (et non en $1 - \alpha\tau$) au voisinage de $\tau=0$ que $P(t)$ tend vers 1 quand le temps τ entre 2 mesures tend vers 0.

Références

- (1) F. Hund, Z. Phys. 43, 805 (1927)
- (2) R.A. Harris, L. Stodolsky, Phys. Lett. 78B, 313 (1978)
- (3) R.A. Harris, L. Stodolsky, J. Chem. Phys. 74, 2145 (1981)
- (4) M. Simonius, Phys. Rev. Lett. 40, 980 (1978)

Le but de ce cours est de faire un bilan de l'information gagnée ou perdue lors d'une mesure. Auparavant, nous rappelons quelques résultats relatifs à l'entropie statistique d'un état quantique

① Entropie statistique associée à un état quantique

a. Information manquante associée à une loi de probabilité

- Loi de probabilité $\{P_m\}$, avec $m=1, 2, \dots, N$, associée à N événements aléatoires

$$\sum_{m=1}^N P_m = 1 \quad (10.1)$$

- L'événement attendu étant aléatoire, il nous manque une certaine information. On peut essayer de chiffrer cette information manquante. En postulant certaines propriétés générales (additivité, continuité...), Shannon a montré que l'information manquante associée à la loi de probabilité $\{P_m\}$ était donnée par

$$S(\{P_m\}) = -k \sum_m P_m \log P_m \quad (10.2)$$

où k est une constante arbitraire. Voir références 1, 2, 3 (§ 3.1) et 4 (complément I.G).

b. Entropie statistique de von Neumann

- En mécanique quantique, toute notre connaissance sur l'état d'un système est rassemblée dans l'opérateur densité D (hermitique, semipositif, de trace 1). Diagonalisons D sous la forme

$$D = \sum_m P_m |\varphi_m\rangle \langle \varphi_m| \quad (10.3)$$

$$\text{ou} \quad \langle \varphi_m | \varphi_p \rangle = \delta_{mp} \quad (10.4.2)$$

$$P_m \text{ réel, } \geq 0 \quad \sum_m P_m = 1 \quad (10.4.6)$$

plusieurs P_m pouvant être égaux (valeurs propres dégénérées).

- Von Neumann a introduit l'entropie statistique $S(D)$ associée à D (réf. 5)

$$\begin{aligned} S(D) &= -k \sum_m P_m \log P_m \\ &= -k \text{Tr} D \log D \end{aligned} \quad (10.5)$$

L'entropie statistique (10.5) coïncide avec l'information manquante de Shannon (10.2) associée à la loi de probabilité $\{P_m\}$.

On peut également considérer que $S(D)$ représente le désordre existant dans l'état D , ou encore l'information manquante sur le système dans l'état D . On pourrait essayer d'acquies cette information manquante au moyen de mesures. Il ne faut pas oublier cependant qu'une mesure perturbe en général l'état du système. Par exemple, si l'on mesure A , de valeurs propres a_α , l'état du système après une mesure non lue de A passe de D à $D' = \sum_\alpha \Pi_\alpha D \Pi_\alpha$ où Π_α est le projecteur sur le sous-espace propre a_α . $S(D)$ caractérise donc l'information manquante qu'on pourrait acquies en mesurant

une observable A qui ne perturbe pas D , c'est à dire pour laquelle $D' = D$, c'est à dire encore une observable diagonale dans la base $\{|\varphi_m\rangle\}$ (voir référence 3, § 3.2)

C - Quelques propriétés importantes de l'entropie statistique.

Lemme

$$\begin{cases} S(D) = -k \text{Tr} D \text{Log} D \leq -k \text{Tr} D \text{Log} D' \\ \text{égalité réalisée si et seulement si } D' = D \end{cases} \quad (10.6)$$

- Démonstration

$$D = \sum_m P_m |\varphi_m\rangle \langle \varphi_m| \quad D' = \sum_n P'_n |\varphi'_n\rangle \langle \varphi'_n| \quad (10.7)$$

$$\begin{aligned} k \text{Tr} (-D \text{Log} D + D \text{Log} D') &= -k \sum_m P_m \text{Log} P_m + k \text{Tr} \left[\left(\sum_m P_m |\varphi_m\rangle \langle \varphi_m| \right) \left(\sum_n \text{Log} P'_n |\varphi'_n\rangle \langle \varphi'_n| \right) \right] \\ &= -k \sum_m P_m \text{Log} P_m + \sum_m \sum_n P_m |\langle \varphi_m | \varphi'_n \rangle|^2 \text{Log} P'_n \\ &= k \sum_{m,n} P_m |\langle \varphi_m | \varphi'_n \rangle|^2 \text{Log} \frac{P'_n}{P_m} \end{aligned} \quad (10.8)$$

Or, $\text{Log} y \leq y - 1$ (10.9)

l'égalité étant réalisée si et seulement si $y = 1$. On en déduit, en posant $y = P'_n / P_m$

$$P_m \text{Log} \frac{P'_n}{P_m} \leq P_m \left(\frac{P'_n}{P_m} - 1 \right) = P'_n - P_m \quad (10.10)$$

ce qui donne

$$k \text{Tr} (-D \text{Log} D + D \text{Log} D') \leq \sum_{m,n} (P'_n - P_m) |\langle \varphi_m | \varphi'_n \rangle|^2 = \sum_n P'_n - \sum_m P_m = 0 \quad (10.11)$$

et démontre la 1^{ère} ligne de (10.6).

L'égalité dans (10.11) est réalisée si, pour tout couple m, n , on a, ou bien $\langle \varphi'_n | \varphi_m \rangle = 0$, ou bien $P'_n = P_m$, c'est à dire si

$$\langle \varphi'_n | \varphi_m \rangle (P'_n - P_m) = 0 \quad \forall n, m \quad (10.12a)$$

qu'on peut réécrire sous la forme

$$\langle \varphi'_n | D' - D | \varphi_m \rangle = 0 \quad \forall n, m \quad (10.12b)$$

Comme les $\{|\varphi_m\rangle\}$ et les $\{|\varphi'_n\rangle\}$ forment des bases, cette égalité n'est réalisée que si $D' = D$, ce qui démontre la 2^{ème} ligne de (10.6).

Maximum et minimum de $S(D)$

- Supposons l'espace des états de dimension finie W , et prenons pour D' l'opérateur de trace 1, proportionnel à l'opérateur unité : $D' = \frac{1}{W} \sum_m |\varphi_m\rangle \langle \varphi_m|$. On a alors, d'après (10.6)

$$S(D) \leq -k \text{Log} W \text{Tr} D = k \text{Log} W \quad (10.13)$$

On a donc

$$S_{\text{max}} = k \text{Log} W \quad (10.14)$$

Pour faire le raccord avec la thermodynamique, nous prendrons désormais $k = k_B$ (constante de Boltzmann) et Log désignera le logarithme népérien.

- Le minimum de $S(D)$ est réalisé pour un état pur (tous les P_m nuls sauf un qui vaut 1)

$$S_{\text{min}} = 0 \quad (10.15)$$

Additivité

- Le système étudié S est formé par la réunion de 2 systèmes S_1 et S_2

$$\text{Si } D(1,2) = D(1) \otimes D(2) \quad S[D(1,2)] = S[D(1)] + S[D(2)] \quad (10.16)$$

Pour démontrer (10.16), il suffit d'utiliser une base produit tensoriel d'une base $\{|\varphi_m(1)\rangle\}$ qui diagonalise $D(1)$ par une base $\{|\chi_n(2)\rangle\}$ qui diagonalise $D(2)$

$$\begin{aligned} S[D(1,2)] &= -k_B \sum_m \sum_n P_m^{(1)} P_n^{(2)} \text{Log}(P_m^{(1)} P_n^{(2)}) = -k_B \sum_m \sum_n P_m^{(1)} P_n^{(2)} [\text{Log} P_m^{(1)} + \text{Log} P_n^{(2)}] \\ &= -k_B \sum_m P_m^{(1)} \text{Log} P_m^{(1)} - k_B \sum_n P_n^{(2)} \text{Log} P_n^{(2)} = S[D(1)] + S[D(2)] \quad (10.17) \end{aligned}$$

- Le résultat (10.17) exprime que le désordre dans le tout est la somme de désordres dans les parties, si les parties sont statistiquement indépendantes.

Corrélations

- En général, $D(1,2)$ ne se factorise pas. A partir de $D(1,2)$, on peut calculer

$$D(1) = \text{Tr}_2 D(1,2) \quad D(2) = \text{Tr}_1 D(1,2) \quad (10.18)$$

On a alors

$$\begin{cases} S[D(1)] + S[D(2)] \geq S[D(1,2)] \\ \text{égalité réalisée si et seulement si } D(1,2) = D(1) \otimes D(2) \end{cases} \quad (10.19)$$

- Démonstration

$$S[D(1)] = -k_B \text{Tr} D(1) \text{Log} D(1) = -k_B \text{Tr} D(1,2) \text{Log} D(1) \otimes \mathbb{I}(2) \quad (10.20.a)$$

$$S[D(2)] = -k_B \text{Tr} D(2) \text{Log} D(2) = -k_B \text{Tr} D(1,2) \text{Log} \mathbb{I}(1) \otimes D(2) \quad (10.20.b)$$

Or, en utilisant la base factorisée qui diagonalise $D(1)$ et $D(2)$, on démontre que

$$\text{Log}[D(1) \otimes \mathbb{I}(2)] + \text{Log}[\mathbb{I}(1) \otimes D(2)] = \text{Log}[D(1) \otimes D(2)] \quad (10.21)$$

En ajoutant (10.20.a) et (10.20.b) et en utilisant (10.21), on obtient alors, compte tenu de (10.6)

$$\begin{aligned} S[D(1)] + S[D(2)] &= -k_B \text{Tr} D(1,2) \text{Log}[D(1) \otimes D(2)] \\ &\geq -k_B \text{Tr} D(1,2) \text{Log} D(1,2) = S[D(1,2)] \quad (10.22) \end{aligned}$$

ce qui démontre (10.19).

- L'inégalité (10.19) exprime physiquement que $D(1)$ et $D(2)$ contiennent ensemble moins d'information que $D(1,2)$, qui contient en plus l'information relative aux corrélations entre 1 et 2.

Concavité

- Soient D_a et D_b 2 opérateurs densités possibles d'un même système et soit λ un réel tel que $0 \leq \lambda \leq 1$. On a, pour tout λ , et quels que soient D_a et D_b

$$\begin{cases} S[\lambda D_a + (1-\lambda) D_b] \geq \lambda S[D_a] + (1-\lambda) S[D_b] \\ \text{égalité réalisée si et seulement si } D_a = D_b \end{cases} \quad (10.23)$$

- Démonstration. Posons

$$D' = \lambda D_a + (1-\lambda) D_b \quad (10.24)$$

et appliquons (10.6) avec $D = D_a$ puis $D = D_b$

$$-k_B \lambda \text{Tr } D_a \text{Log } D' \geq \lambda S(D_a) \quad (10.25.a)$$

$$-k_B (1-\lambda) \text{Tr } D_b \text{Log } D' \geq (1-\lambda) S(D_b) \quad (10.25.b)$$

Il suffit alors d'ajouter (10.25.a) et (10.25.b) et d'utiliser (10.24) pour obtenir (10.23)

- Physiquement, (10.23) exprime que la réunion en un seul mélange statistique de 2 états d'un même système augmente le désordre.

- Généralisation

$$\begin{cases} S(\sum_j \mu_j D_j) \geq \sum_j \mu_j S(D_j) \\ \mu_j \text{ réel, } 0 \leq \mu_j \leq 1, \sum_j \mu_j = 1 \end{cases} \quad (10.26)$$

Invariance de $S(D)$ dans une transformation unitaire de D

$$- \text{Si } D(t) = U(t) D(0) U^\dagger(t), \quad S[D(t)] = S[D(0)] \quad (10.27)$$

- Démonstration

$$\begin{aligned} S[D(t)] &= -k_B \text{Tr}(D(t) \text{Log } D(t)) = -k_B \text{Tr}(U(t) D(0) \text{Log } D(0) U^\dagger(t)) \\ &= -k_B \text{Tr}(U^\dagger(t) U(t) D(0) \text{Log } D(0)) = S[D(0)] \end{aligned} \quad (10.28)$$

- L'entropie d'un système ne change donc pas au cours d'une évolution unitaire de ce système.

- Que se passe-t-il si l'hamiltonien qui régit l'évolution unitaire de D est mal connu ?

Il faut alors moyenner sur plusieurs évolutions possibles de probabilités respectives p_j ($\sum_j p_j = 1$)

$$D(t) = \sum_j p_j U_j(t) D(0) U_j^\dagger(t) = \sum_j p_j D_j(t) \quad (10.29)$$

Comme $D_j(t) = U_j(t) D(0) U_j^\dagger(t)$, on a d'après (10.27)

$$S(D_j(t)) = S(D(0)) \quad (10.30)$$

L'inégalité (10.26) (concavité) entraîne alors, compte tenu de (10.29) et (10.30)

$$S(D(t)) = S(\sum_j p_j D_j(t)) \geq \sum_j p_j S(D(0)) \quad (10.31)$$

c'est à dire encore, comme $\sum_j p_j = 1$

$$S(D(t)) \geq S(D(0)) \quad (10.32)$$

Si un système isolé évolue sous l'effet d'un hamiltonien mal connu, l'entropie de ce système augmente au cours du temps

② Diverses entropies statistiques pouvant être introduites à propos d'une mesure idéale (voir référence 6)

a) Opérateurs densité du système avant et après la mesure.

$$- \text{Mesure de } A = \sum_\alpha a_\alpha \Pi_\alpha \quad (10.33)$$

(où Π_α est le projecteur sur le sous-espace propre a_α) sur un système

↳ dans l'état décrit par D . Probabilité de trouver a_α :

$$P(a_\alpha) = \text{Tr } \Pi_\alpha D \quad (10.34)$$

- Etat avant la mesure : D . On peut écrire

$$D = \sum_\alpha \sum_\beta \Pi_\alpha D \Pi_\beta \quad (10.35)$$

- Le système S et l'appareil de mesure M interagissent, puis se séparent. On ne s'intéresse plus à M .

Etat réduit de S après une mesure non lue de A

$$D \rightarrow D' = \sum_\alpha \Pi_\alpha D \Pi_\alpha \quad (10.36)$$

Les blocs non diagonaux de D , $\Pi_\alpha D \Pi_\beta$ avec $\alpha \neq \beta$, sont annulés

- On observe le résultat obtenu. C'est a_α . Etat après la mesure

$$D \rightarrow D_\alpha = \frac{\Pi_\alpha D \Pi_\alpha}{\text{Tr } \Pi_\alpha D} = \frac{\Pi_\alpha D \Pi_\alpha}{P(a_\alpha)} \quad (10.37)$$

Grâce à (10.37), on peut réécrire (10.36) sous la forme

$$D' = \sum_\alpha P(a_\alpha) D_\alpha \quad (10.38)$$

b) Entropies du système après la mesure

- Après une mesure non lue de A

$$S(D') = S\left(\sum_\alpha \Pi_\alpha D \Pi_\alpha\right) \quad (10.39)$$

- Après une mesure ayant donné le résultat a_α

$$S(D_\alpha) = S\left(\frac{\Pi_\alpha D \Pi_\alpha}{P(a_\alpha)}\right) \quad (10.40)$$

- Entropie moyenne après une mesure lue : Moyenne des $S(D_\alpha)$ pondérées par les probabilités $P(a_\alpha)$ de trouver a_α

$$\langle S(D_\alpha) \rangle = \sum_\alpha P(a_\alpha) S(D_\alpha) \quad (10.41)$$

c) Entropie statistique associée à la distribution de probabilité des résultats de mesure.

On considère la loi de probabilité $\{P(a_\alpha)\}$ associée aux divers résultats possibles a_α d'une mesure de A et on introduit l'entropie de Shannon S_A associée à une telle loi (voir (10.2))

$$S_A = -k_B \sum_\alpha P(a_\alpha) \log P(a_\alpha) \quad (10.42)$$

d) Relation entre $S(D')$, $\langle S(D_\alpha) \rangle$ et S_A . Additivité de l'information

- A partir de (10.38), on obtient, dans une base qui diagonalise les D_α

$$\begin{aligned} S(D') &= -k_B \text{Tr} \sum_\alpha P(a_\alpha) D_\alpha \log(P(a_\alpha) D_\alpha) \\ &= -k_B \sum_\alpha P(a_\alpha) \log P(a_\alpha) \underbrace{\text{Tr } D_\alpha}_{=1} - k_B \sum_\alpha P(a_\alpha) \text{Tr } D_\alpha \log D_\alpha \end{aligned} \quad (10.43)$$

c'est à dire encore, compte tenu de (10.42) et (10.41)

$$S(D') = S_A + \langle S(D_\alpha) \rangle \quad (10.44)$$

- Le résultat (10.44) montre que l'information totale manquante $S(D')$ sur l'état D après une mesure non lue de A est la somme de 2 termes :

- (i) l'information manquante S_A sur le résultat a_α de la mesure
- (ii) l'information manquante moyenne qui subsiste après la lecture d'un résultat de mesure a_α et qui est liée au fait que, si a_α est dégénérée, D_α n'est pas en général un état pur.

- Après la mesure, le fait de tirer les systèmes suivant les résultats obtenus a_α diminue l'entropie de $S(D')$ à $\langle S(D_\alpha) \rangle$. L'information S_A gagnée par l'observateur lui permet de diminuer l'entropie des systèmes. L'information est transformée en "negentropie".

③ Bilan d'informations au cours d'une mesure idéale

a. Perte d'informations après une mesure idéale non lue

- Montrons tout d'abord que

$$S(D') \geq S(D) \quad (10.45)$$

- Démonstration.

D'après (10.36), et compte tenu de l'invariance d'une trace dans une permutation circulaire

$$S(D') = -k_B \text{Tr} \left(\sum_{\alpha} \Pi_{\alpha} D \Pi_{\alpha} \text{Log} D' \right) = -k_B \text{Tr} \left(\sum_{\alpha} D \Pi_{\alpha} \text{Log} D' \Pi_{\alpha} \right) \quad (10.46)$$

Comme D' n'a pas de blocs non diagonaux

$$\sum_{\alpha} \Pi_{\alpha} \text{Log} D' \Pi_{\alpha} = \text{Log} D' \quad (10.47)$$

On transpose alors (10.46) en

$$S(D') = -k_B \text{Tr} D \text{Log} D' \quad (10.48)$$

L'inégalité (10.45) résulte alors simplement de (10.6).

- Le résultat (10.45) signifie physiquement que, en laissant interagir S et M puis en les séparant, on perd l'information associée aux corrélations quantiques non séparables apparues entre S et M à la suite de leur interaction.

L'entropie de $S+M$ reste constante au cours du temps. C'est le fait de prendre la trace sur M qui augmente l'entropie de S .

- On peut dire encore que $S(D') - S(D)$ représente la perte d'information associée à la disparition des blocs non-diagonaux de D . L'information contenue dans D sur les observables non compatibles avec A est détruite lors de l'interaction $S-M$.

b. L'état D' est un état d'entropie maximale

- Considérons tous les opérateurs denses \tilde{D} conduisant aux mêmes valeurs moyennes que D pour toutes les observables C compatibles avec A

$$\text{Tr} C \tilde{D} = \text{Tr} C D \quad \forall C \text{ avec } [C, A] = 0 \quad (10.49)$$

- Dans la base où A est diagonal, les observables C sont représentées par des matrices diagonales par blocs

$$\Pi_\alpha C \Pi_\beta = 0 \quad \text{si } \alpha \neq \beta \quad (10.50)$$

Par contre, $\Pi_\alpha C \Pi_\alpha$ est a priori quelconque. Pour que l'égalité (10.49) soit valable quel que soit C , il faut donc que \tilde{D} et D aient les mêmes blocs diagonaux. Les opérateurs densités \tilde{D} introduits plus haut sont donc tels que

$$\Pi_\alpha \tilde{D} \Pi_\alpha = \Pi_\alpha D \Pi_\alpha \quad \forall \alpha \quad (10.51)$$

d'où l'on déduit que

$$D' = \sum_\alpha \Pi_\alpha D \Pi_\alpha = \sum_\alpha \Pi_\alpha \tilde{D} \Pi_\alpha \quad (10.52)$$

- La démonstration donnée dans le § 3a plus haut s'applique donc à \tilde{D} et conduit à

$$S(D') \geq S(\tilde{D}) \quad (10.53)$$

L'état D' peut donc être également interprété comme l'état d'entropie maximale parmi tous les états \tilde{D} conduisant aux mêmes valeurs moyennes que D pour toutes les observables C compatibles avec A .

Si l'on ne s'intéresse qu'aux observables C compatibles avec A , l'opérateur densité D' est donc l'opérateur densité le "moins biaisé" conduisant aux mêmes valeurs moyennes que D .

C. Informations moyenne gagnée par la lecture

- La lecture du résultat de mesure renseigne, non pas sur l'état D (état avant la mesure), mais sur l'état D' (état réduit de S après l'interaction $S-M$).

- On voit sur (10.44) que l'entropie moyenne après sélection des résultats, $\langle S(D_\alpha) \rangle$, est plus petite que l'entropie après la mesure non lue $S(D')$

$$S(D') - \langle S(D_\alpha) \rangle = S_A \quad (10.54)$$

L'informations moyenne gagnée par la lecture des résultats est l'information S_A associée à la distribution $\{P(\alpha_\alpha)\}$ des probabilités des résultats de mesure.

- Notons enfin qu'on peut montrer que (voir référence 7 et appendice de la référence 6) :

$$S(D) \geq \langle S(D_\alpha) \rangle \quad (10.55)$$

L'informations manquante moyenne après sélection de résultats α_α , $\langle S(D_\alpha) \rangle$, est donc plus petite que l'informations manquante $S(D)$ avant la lecture.

Comme, d'après (10.44), on a

$$\langle S(D_k) \rangle = S(D') - S_A$$

X-8
(10.56)

on peut réécrire (10.55) sous la forme

$$S_A \geq S(D') - S(D)$$

(10.57)

qui exprime que l'information S_A gagnée par la lecture des résultats de mesure est toujours plus grande que la perte d'information $S(D') - S(D)$ sur les observables ne commutant pas avec A , perte d'information qui résulte de la disparition des blocs non diagonaux de A sous l'effet de l'interaction $S-M$.

Références

1. C.E. Shannon and W. Weaver, The mathematical theory of Communication (Univ. of Illinois Press, Urbana 1949)
2. L. Brillouin, La science et la théorie de l'information (Masson Paris 1959)
3. R. Balian, Du microscopique au macroscopique, cours de physique statistique de l'école polytechnique (Ellipses, Paris 1982)
4. B. Diu, C. Guthmann, D. Lederer, B. Roulet, Physique statistique (Hermann Paris 1989), Complément I.6
5. J. von Neumann, Mathematical foundations of quantum mechanics (Princeton 1955), reproduit dans J.A. Wheeler and W.H. Zurek, Quantum theory and measurement (Princeton, 1983).
6. R. Balian, Eur. J. Phys. 10, 208 (1989)
7. G. Lindblad, Comm. Math. Phys. 28, 245 (1972)