COLLEGE DE FRANCE

COURS DE PHYSIQUE
ATOMIQUE ET MOLECULAIRE

CLAUDE COHEN-TANNOUDJI

ANNEES SCOLAI_S

1987-1988

ANNEE 1987-88

TABLE DES MATIERES

Introduction générale

Résumé du cours 1986 - 87

Le cours de l'année 1986-1987 est le premier d'une série de deux cours consacrés à l'étude de « diverses formulations équivalentes de l'électrodynamique quantique ». Le but poursuivi est de préciser les motivations qui sont à l'origine de ces formulations, de comparer leurs avantages et inconvénients respectifs et d'analyser les éclairages physiques nouveaux qu'elles donnent sur les processus d'interaction entre matière et rayonnement.

Introduction générale

Le cours commence par des rappels généraux sur l'électrodynamique quantique. Les variables dynamiques décrivant l'état des deux systèmes en interaction, le champ électromagnétique d'une part, les particules chargées de l'autre, sont précisées. Une attention particulière est portée à l'identification des degrés de liberté réellement indépendants du champ. On montre en particulier que le champ électrique longitudinal n'est pas une variable indépendante dans la mesure où il peut être réexprimé en fonction des coordonnées des particules. L'approche lagrangienne et hamiltonienne est également présentée, ce qui permet d'introduire la notion de lagrangiens équivalents.

Le lagrangien standard

Le lagrangien le plus couramment utilisé en électrodynamique classique est le « lagrangien standard » dont l'expression est donnée ainsi que la décomposition en un lagrangien des particules, un lagrangien du rayonnement et un lagrangien d'interaction. Après avoir vérifié que les équations de Lagrange associées à un tel lagrangien coïncident bien avec les équations de Maxwell pour les champs et les équations de Newton-Lorentz pour les particules, on étudie les symétries de ce lagrangien, et notamment son invariance relativiste et son invariance de jauge.

Les difficultés du lagrangien standard tiennent au fait qu'il ne contient pas la dérivée temporelle du potentiel scalaire. Le moment conjugué du potentiel scalaire est donc nul, ce qui rend impossible l'application de la procédure de quantification canonique consistant à associer au couple formé par une variable dynamique et son moment conjugué deux opérateurs dont le commutateur vaut $i\hbar$. On expose alors deux solutions possibles à une telle difficulté.

Electrodynamique quantique en jauge de Coulomb

La première solution consiste à éliminer le potentiel scalaire U du lagrangien au moyen de l'équation de Lagrange relative à U, équation qui permet d'exprimer U en fonction des autres variables dynamiques du champ et des particules. On trouve alors que, dans le nouveau lagrangien ainsi obtenu, le potentiel vecteur longitudinal $\vec{A}_{\parallel}$ n'apparaît que dans une dérivée totale et peut donc être choisi arbitrairement sans que la dynamique du système global ne soit changée. Le choix le plus simple consiste à prendre $\vec{A}_{\parallel}$ nul, c'est-à-dire à choisir la jauge de Coulomb. Un autre avantage de ce choix est de faire apparaître l'interaction de Coulomb entre particules, qui est prépondérante à basse énergie, dans le lagrangien des particules.

I-2

A partir du lagrangien en jauge de Coulomb, il est facile d'obtenir les moments conjugués des diverses variables du champ et des particules, puis d'en déduire l'expression de l'hamiltonien du système global ainsi que celle des diverses grandeurs physiques importantes. La forme simple des équations de Hamilton-Jacobi satisfaites par les coordonnées du champ et leurs moments conjugués suggère également d'introduire des combinaisons linéaires de ces grandeurs qui possèdent la propriété importante d'évoluer indépendamment les unes des autres en l'absence de sources. Ce sont les variables normales du champ qui sont associées aux modes normaux de vibration du champ libre et qui deviennent, lors de la quantification canonique de la théorie, les opérateurs de création et d'annihilation de photons.

Formulation covariante

Une autre solution pour résoudre les difficultés liées au lagrangien standard consiste à choisir un nouveau lagrangien, dans lequel apparaissent toutes les dérivées temporelles des variables du champ, de sorte que toutes ces variables possèdent chacune un moment conjugué. Ce nouveau lagrangien n'est cependant pas équivalent au lagrangien standard et il faut donc imposer une condition supplémentaire pour sélectionner parmi toutes les solutions possibles des nouvelles équations du mouvement celles qui satisfont aussi aux équations de Maxwell. Une telle démarche, qui est utilisée dans les formulations covariantes de l'électro-dynamique quantique, est exposée tout d'abord dans le cas plus simple du champ libre ou du champ couplé à des sources extérieures.

On introduit pour cela le lagrangien de Fermi qui conduit bien aux équations de Maxwell lorsque la condition supplémentaire de Lorentz est imposée, et à partir duquel il est possible de calculer les moments conjugués des potentiels, l'hamiltonien et les variables normales. La quantification canonique de la théorie ainsi élaborée permet bien d'établir des relations de commutation covariantes pour les opérateurs associés aux potentiels. Des difficultés apparaissent cependant dans la construction de l'espace des états quantiques du champ. Les relations de commutation covariantes conduisent en effet à des états de photons scalaires de norme négative, ce qui est incompatible avec l'interprétation probabiliste de la mécanique quantique.

Une solution possible à la difficulté précédente est alors exposée. Elle consiste à introduire une deuxième métrique (indéfinie) dans l'espace des états quantiques et à renoncer à l'hermicité (au sens habituel) du potentiel scalaire, ce qui n'est pas grave dans la mesure où ce sont les champs électrique et magnétique, et non les potentiels, qui sont des grandeurs mesurables. On montre alors que pour toutes les grandeurs véritablement physiques et pour tous les états physiques, sélectionnés au moyen de la condition supplémentaire de Lorentz, l'interprétation probabiliste habituelle de la mécanique quantique demeure valable.

Toute la démarche précédente est illustrée sur un exemple très simple, celui du champ quantique couplé à des charges fixes. Le déplacement de l'état fondamental du champ est calculé, tout d'abord perturbativement puis de manière exacte, ce qui permet de retrouver l'interaction de Coulomb entre les deux particules et de l'interpréter comme étant due à un échange de photons scalaires entre les deux particules.

Transformation unitaire associée à un changement de lagrangien

Tout le reste du cours de cette année est consacré à l'étude de formulations équivalentes de l'électrodynamique quantique construites à partir de lagrangiens qui diffèrent du lagrangien standard en jauge de Coulomb par la dérivée totale d'une fonction des coordonnées généralisées du système champ + particules. Le problème général de la correspondance entre deux descriptions quantiques construites à partir de deux lagrangiens différant par une dérivée totale est donc analysé en premier lieu sur le cas simple d'un système à un seul degré de librerté. On montre que les deux descriptions quantiques se déduisent l'une de l'autre par une transformation unitaire. L'accent est mis sur le fait que la même grandeur physique n'est pas représentée par le même opérateur mathématique dans les deux points de vue. Réciproquement, le même opérateur mathématique n'a pas le même sens physique dans un point de vue et dans l'autre. L'équivalence des prédictions physiques des deux formulations est démontrée de manière générale.

I-3

Transformation de Göppert-Mayer pour des particules dans un champ extérieur

Le premier exemple choisi pour illustrer les considérations précédentes concerne des systèmes globalement neutres de particules chargées localisées autour d'un point et interagissant avec des champs électromagnétiques extérieurs de grande longueur d'onde. Une telle situation est fréquemment rencontrée en physique atomique et moléculaire puisque les dimensions des atomes et des molécules sont en général petites devant les longueurs d'onde des rayonnements (optiques ou microondes) utilisés dans les expériences. Dans le lagrangien standard, il est donc légitime de négliger la variation spatiale des champs extérieurs sur l'étendue du système des particules (approximation des grandes longueurs d'onde). L'interaction entre les particules et le rayonnement ne fait plus alors intervenir que le moment dipolaire électrique $\vec{d}$ du système de charges, le lagrangien d'interaction s'écrivant $\vec{d}.\vec{A}_e(\vec{O}, t)$, où $\vec{A}_e$ est le potentiel vecteur du champ extérieur évalué au centre $\vec{O}$ du système de charges.

La transformation de Göppert-Mayer consiste à ajouter au lagrangien standard la dérivée totale de la fonction $-\vec{d}.\vec{A}_e(\vec{O}, t)$, ce qui conduit à un nouveau lagrangien d'interaction $\vec{d}\vec{E}_e(\vec{O}, t)$ décrivant le couplage du moment dipolaire $\vec{d}$ avec le champ électrique $\vec{E}_e$ du rayonnement. On étudie également comment la transformation de Göppert-Mayer change l'hamiltonien d'interaction et remplace l'hamiltonien habituel en « $\vec{A}.\vec{p}$ » (couplage entre le potentiel vecteur $\vec{A}$ et l'impulsion $\vec{p}$ des particules) par un nouvel hamiltonien en « $\vec{E}.\vec{r}$ » (couplage entre le champ électrique $\vec{E}$ et la position $\vec{r}$ des particules).

Equivalence des points de vue $\vec{A}.\vec{p}$ et $\vec{E}.\vec{r}$. Illustration sur des processus à un ou deux photons

Pour démontrer de manière concrète l'équivalence entre la formulation standard habituelle et celle associée à la transformation de Göppert-Mayer, les amplitudes de transition sont calculées dans un point de vue puis dans l'autre pour des processus d'absorption résonnante à un ou deux photons. L'égalité entre les deux amplitudes est vérifiée par un calcul direct des éléments de matrice de l'opérateur d'évolution.

Les avantages du nouveau point de vue sont illustrés sur l'exemple important de la transition à deux photons 1 s $\longrightarrow$ 2 s de l'atome d'hydrogène. L'amplitude de transition apparaît dans les deux points de vue comme une somme de contributions relatives à chaque état intermédiaire. Bien que les sommes des deux séries soient identiques, on montre que la série obtenue dans le point de vue $\vec{E}.\vec{r}$ converge beaucoup plus vite et permet d'obtenir un résultat plus précis si on se limite à un petit nombre d'états intermédiaires.

La discussion précédente est enfin étendue à des processus non résonnants. On montre que les processus non résonnants à un photon se ramènent souvent à des processus résonnants à deux photons, ce qui permet de résoudre plusieurs paradoxes et de corriger plusieurs erreurs rencontrées dans la littérature au sujet de l'équivalence des deux points de vue pour le calcul des formes de raie. La discussion est illustrée sur l'exemple de la transition 2 s − 2 p de l'atome d'hydrogène (transition de Lamb).

La transformation de Power-Zienau-Woolley

La transformation de Göppert-Mayer est limitée à l'ordre le plus bas en a_0/λ (où a_0 caractérise les dimensions atomiques et λ la longueur d'onde du rayonnement) et est relative à des rayonnements extérieurs dont la dépendance temporelle est donnée. Ces deux restrictions sont levées par la transformation de Power-Zienau-Woolley qui permet d'obtenir un lagrangien d'interaction contenant le développement multipolaire complet de l'interaction entre un atome (ou une molécule) et le rayonnement, considéré comme un système ayant sa dynamique propre.

On montre tout d'abord qu'un système de charges localisées autour d'un point peut être décrit par des densités de polarisation et de magnétisation auxquelles sont associés des courants de polarisation et de magnétisation. On introduit également l'induction électrique qui est un champ transverse, coïncidant (à un facteur multiplicatif près) avec le champ électrique total en dehors du système de charges supposé globalement neutre.

La transformation de Power-Zienau-Woolley consiste à ajouter au lagrangien standard en jauge de Coulomb la dérivée totale de la fonction $-\int d^3r\ \vec{P}(\vec{r}).\vec{A}_\perp(\vec{r})$, où $\vec{P}(\vec{r})$ est la densité de polarisation et $\vec{A}_\perp(\vec{r})$ le potentiel vecteur transverse. Elle conduit à un nouveau lagrangien d'interaction faisant intervenir le couplage de la densité de polarisation $\vec{P}(\vec{r})$ au champ électrique $\vec{E}_\perp(\vec{r})$ et celui de la densité de magnétisation $\vec{M}(r)$ au champ magnétique $\vec{B}(r)$. Le développement multipolaire de l'interaction en découle immédiatement, de même que le calcul des nouveaux moments conjugués et du nouvel hamiltonien.

Les avantages du nouveau point de vue sont discutés en détail. Ils tiennent au fait que le nouveau moment conjugué du potentiel vecteur transverse est l'induction électrique. Le nouvel hamiltonien d'interaction ne fait donc plus intervenir que des champs transverses purement retardés en dehors des systèmes de charges, comme l'induction électrique ou le champ magnétique. Il en résulte des grandes simplifications pour le calcul des interactions électromagnétiques entre atomes neutres.

Equivalence de 2 points de vue se déduisant l'un de l'autre par une transformation unitaire

(1) Considérations générales

- Transformation unitaire $T(t)T^+(t) = T^+(t)T(t) = \mathbb{1}$
- Correspondance entre kets décrivant un même état physique dans un point de vue et dans l'autre

$$|\psi^{(2)}(t)\rangle = T(t)\,|\psi^{(1)}(t)\rangle$$

- Correspondance entre observables décrivant une même grandeur physique

$$G^{(2)} = T(t)\,G^{(1)}\,T^+(t)$$

- Evolution dans le temps

$$i\hbar \frac{d}{dt}|\psi^{(2)}(t)\rangle = H^{(2)}(t)\,|\psi^{(2)}(t)\rangle$$

$$i\hbar \frac{d}{dt}|\psi^{(1)}(t)\rangle = H^{(1)}(t)\,|\psi^{(1)}(t)\rangle$$

$$H^{(2)}(t) = T(t)\,H^{(1)}(t)\,T^+(t) + i\hbar\left(\frac{dT(t)}{dt}\right)T^+(t)$$

- Opérateur d'évolution

$$|\psi^{(2)}(t)\rangle = U^{(2)}(t,t_0)\,|\psi^{(2)}(t_0)\rangle$$

$$|\psi^{(1)}(t)\rangle = U^{(1)}(t,t_0)\,|\psi^{(1)}(t_0)\rangle$$

$$U^{(2)}(t,t_0) = T(t)\,U^{(1)}(t,t_0)\,T^+(t_0)$$

- Etat initial

$$|\varphi^{(1)}(t_i)\rangle$$

$$|\varphi^{(2)}(t_i)\rangle = T(t_i)\,|\varphi^{(1)}(t_i)\rangle$$

- Etat final

$$|\chi^{(1)}(t_f)\rangle$$

$$|\chi^{(2)}(t_f)\rangle = T(t_f)\,|\chi^{(1)}(t_f)\rangle$$

- Identité des amplitudes de transition

$$\langle\chi^{(1)}(t_f)|\,U^{(1)}(t_f,t_i)\,|\varphi^{(1)}(t_i)\rangle = \langle\chi^{(2)}(t_f)|\,U^{(2)}(t_f,t_i)\,|\varphi^{(2)}(t_i)\rangle$$

Attention à ne pas prendre le même ket pour décrire l'état initial (ou final) dans un point de vue et dans l'autre.

② Forme simplifiée de l'équivalence pour les matrices S

Si le problème physique peut être posé en termes de collisions, on peut dans certains cas ne pas transformer les vecteurs d'état représentant l'état initial et l'état final et obtenir cependant des amplitudes de transition identiques dans les 2 points de vue.

Physiquement, une telle simplification est due au fait qu'on peut négliger l'hamiltonien d'interaction dans le passé lointain et dans le futur lointain.

Matrice S dans le point de vue (1)

- Hamiltonien $H^{(1)} = H_0 + H_I$

  H_I : interaction entre systèmes physiques d'énergie H_0.

- Introduction formelle d'un nouvel hamiltonien

  $H^{(1)}(\lambda) = H_0 + \lambda H_I$ $\qquad \lambda$ réel, $0<\lambda<1$

- Description d'un processus de collision

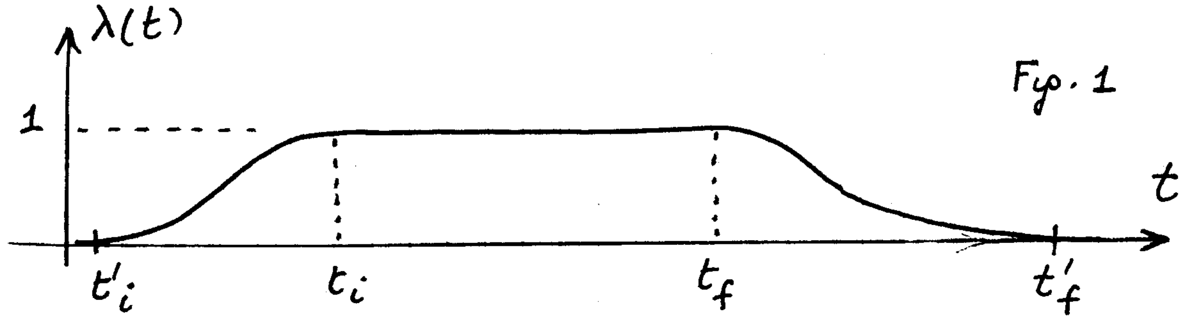


Fig. 1

Manière commode de "simuler" l'approche de 2 paquets d'ondes quasimonochromatiques, puis la séparation des 2 systèmes, tout en prenant comme états asymptotiques des états propres de H_0, comme $|\varphi_a\rangle$ ou $|\varphi_b\rangle$, d'énergies E_a et E_b.

Elément de matrice de l'opérateur d'évolution $U^{(1)}(t'_f, t'_i)$ associé à $H_0 + \lambda(t) H_I$ (en représentation d'interaction par rapport à H_0), pris entre $\langle\varphi_b|$ et $|\varphi_a\rangle$

Matrice S : limite de cet élément de matrice quand $t'_i \to -\infty$, $t'_f \to +\infty$

- Résultat du calcul pour la matrice S

$$\mathcal{S}^{(1)}_{ba} = \delta_{ba} - 2\pi i \, \delta(E_b - E_a) \, \mathcal{T}^{(1)}_{ba}$$

$$\mathcal{T}^{(1)}_{ba} = \langle\varphi_b|H_I|\varphi_a\rangle + \lim_{\varepsilon\to 0_+} \sum_c \frac{\langle\varphi_b|H_I|\varphi_c\rangle\langle\varphi_c|H_I|\varphi_a\rangle}{E_a - E_c + i\varepsilon} + \cdots$$

Matrice S dans le point de vue (2)

- Passage de (1) à (2) par $T = \exp(iF/\hbar)$ où $F = F^+$ indépendant de t

↳ $H^{(2)} = T H^{(1)} T^+$

- Introduction formelle de

$$T(\lambda) = \exp\left(\frac{i}{\hbar}\lambda F\right)$$

où λ est la même constante que dans $H^{(1)}(\lambda) = H_0 + \lambda H_I$

- $$H^{(2)}(\lambda) = T(\lambda) H^{(1)}(\lambda) T^+(\lambda) = T(\lambda)\left[H_0 + \lambda H_I\right]T^+(\lambda)$$

• Pour $\lambda = 0$, $T(0) = \mathbb{1}$ $\qquad H^{(2)}(0) = H_0 = H^{(1)}(0)$

• Pour $\lambda = 1$, $T(1) = T$ $\qquad H^{(1)}(1) = H^{(1)}$

$$H^{(2)}(1) = H^{(2)} = T H^{(1)} T^+$$

On peut donc écrire :

$$H^{(2)}(\lambda) = H_0 + \lambda H'_I(\lambda) \qquad \text{avec} \qquad H'_I(1) = H'_I$$

Attention, $H'_I \neq T H_I T^+$ car $T H_0 T^+ \neq H_0$

- Description de la collision dans le point de vue 2. Variations de λ avec t toujours données par la figure 1

• Etat initial à t'_i $\qquad \lambda(t'_i) = 0 \longrightarrow T(\lambda(t'_i)) = \mathbb{1}$

$$\hookrightarrow \quad |\varphi_a^{(2)}\rangle = |\varphi_a^{(1)}\rangle = |\varphi_a\rangle$$

• Etat final à t'_f $\qquad \lambda(t'_f) = 0 \longrightarrow T(\lambda(t'_f)) = \mathbb{1}$

$$\hookrightarrow \quad |\varphi_b^{(2)}\rangle = |\varphi_b^{(1)}\rangle = |\varphi_b\rangle$$

• Comme λ dépend de t dans $T(\lambda(t))$, l'évolution dans le point de vue (2) est décrite par l'hamiltonien

$$T(\lambda) H^{(1)}(\lambda) T^+(\lambda) + i\hbar\left[\frac{d}{dt} T(\lambda(t))\right] T^+(\lambda(t)) =$$

$$H_0 + \lambda(t) H'_I(\lambda(t)) - \dot{\lambda}(t) F$$

↳ $$U^{(1)}_{ba}(t'_f, t'_i) = U^{(2)}_{ba}(t'_f, t'_i)$$

Opérateur d'évolution associé à $H_0 + \lambda(t) H_I$

Opérateur d'évolution associé à $H_0 + \lambda(t) H'_I(\lambda(t)) - \dot{\lambda}(t) F$

- Comme $\lambda(t)$ varie très lentement, $\dot{\lambda}(t)$ est très petit. Dans de nombreux cas, il est possible de négliger le terme $-\dot{\lambda}(t)F$ devant $H_0 + \lambda(t) H'_I(\lambda(t))$

Quel est l'opérateur d'évolution associé à $H_0 + \lambda(t) H'_I(\lambda(t))$?

Comme $\lambda(t) H'_I(\lambda(t))$ varie très lentement de 0 à $H'_I(1) = H'_I$ entre t'_i et t_i, puis de H'_I à 0 entre t_f et t'_f, l'opérateur d'évolution associé à $H_0 + \lambda(t) H'_I(\lambda(t))$ tend (à la limite $t'_i \to -\infty$, $t'_f \to +\infty$) vers la matrice S associée à H'_I

- Donc, si le terme $-\dot{\lambda}(t)F$ peut être négligé, l'égalité du bas de la page I-6 entraîne

$$\mathcal{S}^{(1)}_{ba} = \mathcal{S}^{(2)}_{ba}$$

où
$$\mathcal{S}^{(2)}_{ba} = \delta_{ba} - 2\pi i\, \delta(E_b - E_a)\, \mathcal{T}^{(2)}_{ba}$$

avec
$$\mathcal{T}^{(2)}_{ba} = \langle \varphi_b | H'_I | \varphi_a \rangle + \lim_{\varepsilon \to 0_+} \sum_c \frac{\langle \varphi_b | H'_I | \varphi_c \rangle \langle \varphi_c | H'_I | \varphi_a \rangle}{E_a - E_c + i\varepsilon} + \cdots$$

On a donc
$$\boxed{\mathcal{T}^{(2)}_{ba} = \mathcal{T}^{(1)}_{ba} \quad \text{si} \quad E_b = E_a}$$

Résultat qui permet de simplifier considérablement les calculs, puisqu'on peut prendre dans les 2 points de vue, le même état propre de H_0 pour décrire l'état initial (ou final)

Quelques écueils à éviter

- Résultat valable seulement si le problème peut être posé en termes de collisions.
- Il faut prendre pour $|\varphi_a\rangle$ et $|\varphi_b\rangle$ des états stables, ou alors s'assurer que leur instabilité peut être négligée dans le problème étudié
  Sinon, il faut prendre les états finals stables résultant de la désintégration de $|\varphi_a\rangle$, ou $|\varphi_b\rangle$
- Les matrices $\mathcal{T}$ ne sont égales que sur la couche d'énergie ($E_a = E_b$). Si $E_b \neq E_a$ $\mathcal{T}^{(2)}_{ba} \neq \mathcal{T}^{(1)}_{ba}$

Références "Photons et Atomes – Introduction à l'Electrodynamique Quantique" – Chapitre IV, § D
C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, G. Grynberg
InterEditions – Editions du CNRS Paris 1987

Objet du cours 1987-88

Poursuivre l'étude de diverses formulations équivalentes de l'Electrodynamique Quantique.

Le cours portera plus particulièrement sur l'étude de transformations unitaires visant à soustraire du champ total le champ "lié" aux particules. L'objectif poursuivi est de faire apparaître ainsi, dans l'hamiltonien transformé, des termes d'interaction effective entre particules.

- Tentative d'élimination du champ transverse lié aux particules. Transformation de Pauli - Fierz - Kramers.

- Application à une charge localisée. Correction de masse et déplacement de Lamb dans le point de vue de Pauli - Fierz.

- Généralisation à plusieurs systèmes de charges localisées. Etablissement d'hamiltoniens d'interaction magnétiques.

- Transformation de Henneberger. Diffusion par un potentiel en présence d'un rayonnement laser.

- Elimination des potentiels longitudinaux et scalaires en électrodynamique quantique relativiste. Passage de la jauge de Lorentz à la jauge de Coulomb.

Appendice A : Formulaire sur l'électrodynamique en jauge de Coulomb

Variables dynamiques

Coordonnées et vitesses généralisées (formalisme lagrangien)

Particules α (de charges q_α et masses m_α) : $\{\vec{r}_\alpha, \dot{\vec{r}}_\alpha\}$

$$\rho(\vec{r}) = \sum_\alpha q_\alpha \delta(\vec{r}-\vec{r}_\alpha) \qquad \vec{J}(\vec{r}) = \sum_\alpha q_\alpha \dot{\vec{r}}_\alpha \delta(\vec{r}-\vec{r}_\alpha) \tag{A.1}$$

Champs (transverses) : $\{\vec{A}_\perp(\vec{r}), \dot{\vec{A}}_\perp(\vec{r})\}$ ou $\{\vec{\mathcal{A}}_\perp(\vec{k}), \dot{\vec{\mathcal{A}}}_\perp(\vec{k})\}$

- Transformée de Fourier spatiale $\vec{\mathcal{V}}(\vec{k})$ de $V(\vec{r})$ (lettres cursives)

$$\vec{\mathcal{V}}(\vec{k}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \int d^3r\, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}\, \vec{V}(\vec{r}) \tag{A.2}$$

Champ transverse : $\vec{\mathcal{V}}_\perp(\vec{k}) \perp$ à $\vec{k}$: $\vec{k}\cdot\vec{\mathcal{V}}_\perp = 0$ ou $\vec{\nabla}\cdot\vec{V} = 0$

Champ longitudinal : $\vec{\mathcal{V}}_{/\!/}(\vec{k}) /\!/$ à $\vec{k}$: $\vec{k}\times\vec{\mathcal{V}}_{/\!/} = \vec{0}$ ou $\vec{\nabla}\times\vec{V} = \vec{0}$

- Que valent $\vec{E}_{/\!/}$ et $\vec{B}_{/\!/}$? Fixés par 2 équations de Maxwell

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \longrightarrow i\vec{k}\cdot\vec{\mathcal{B}} = 0 \longrightarrow \vec{\mathcal{B}}_{/\!/} = \vec{0} \tag{A.3}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \longrightarrow i\vec{k}\cdot\vec{\mathcal{E}} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \longrightarrow \vec{\mathcal{E}}_{/\!/}(\vec{k}) = -i\frac{\vec{k}}{\varepsilon_0 k^2}\rho(\vec{k}) \longrightarrow \tag{A.4}$$

$$\longrightarrow \vec{E}_{/\!/}(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3r'\, \rho(\vec{r}\,',t)\frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3} = \text{Champ de Coulomb}$$

de la distribution de charges figée à l'instant t

- Que valent $\vec{A}_{/\!/}$ et U ?

- Dans un changement de jauge défini par F

$$\vec{A} \to \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}F \qquad \vec{\mathcal{A}} \to \vec{\mathcal{A}}' = \vec{\mathcal{A}} + i\vec{k}\mathcal{F} \tag{A.5}$$

$$\hookrightarrow \quad \vec{\mathcal{A}}'_\perp = \vec{\mathcal{A}}_\perp \qquad \vec{\mathcal{A}}'_{/\!/} = \vec{\mathcal{A}}_{/\!/} + i\vec{k}\mathcal{F} \tag{A.6}$$

$\vec{\mathcal{A}}_\perp$ est invariant de jauge. $\vec{\mathcal{A}}_{/\!/}$ peut être changé à volonté.

En jauge de Coulomb $\vec{\mathcal{A}}_{/\!/} = \vec{0}$ (A.7)

- Liens entre champs et potentiels

$$\begin{cases} \vec{E} = -\dot{\vec{A}} - \vec{\nabla}U \\ \vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \vec{\mathcal{E}} = -\dot{\vec{\mathcal{A}}} - i\vec{k}\,\mathcal{U} \\ \vec{\mathcal{B}} = i\vec{k}\times\vec{\mathcal{A}} \end{cases} \tag{A.8}$$

$$\hookrightarrow \quad \vec{\mathcal{E}}_{/\!/} = -\dot{\vec{\mathcal{A}}}_{/\!/} - i\vec{k}\,\mathcal{U} = -i\vec{k}\,\mathcal{U} \text{ (en jauge de Coulomb)} \tag{A.9}$$

$$\hookrightarrow \quad \mathcal{U} = \frac{i\vec{k}\cdot\vec{\mathcal{E}}_{/\!/}}{k^2} = \frac{1}{\varepsilon_0 k^2}\rho \longrightarrow U(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3r'\,\frac{\rho(\vec{r}\,',t)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \tag{A.10}$$

U : Potentiel de Coulomb de la distribution de charge

- Que valent $\vec{E}_\perp$ et $\vec{B}$? (en fonction de $\vec{A}_\perp$ et $\dot{\vec{A}}_\perp$)

$$\begin{cases} \vec{E}_\perp = -\dot{\vec{A}}_\perp \\ \vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}_\perp \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \vec{\mathcal{E}}_\perp = -\dot{\vec{\mathcal{A}}}_\perp \\ \vec{\mathcal{B}} = i\vec{k}\times\vec{\mathcal{A}}_\perp \end{cases} \tag{A.11}$$

– Energie du champ : $\frac{\varepsilon_0}{2}\int d^3r(\vec{E}^2+c^2\vec{B}^2) = \frac{\varepsilon_0}{2}\int d^3k(|\vec{\mathcal{E}}|^2+c^2|\vec{\mathcal{B}}|^2) = H_{long}+H_{trans}$ (A.12)

$$H_{long} = \frac{\varepsilon_0}{2}\int d^3k\,|\vec{\mathcal{E}}_{/\!/}|^2 = \frac{1}{2\varepsilon_0}\int d^3k\,\frac{\rho^*\rho}{k^2} = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\int d^3r\,d^3r'\,\frac{\rho(\vec{r})\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = V_{coul}$$

$$= \sum_\alpha \varepsilon^\alpha_{coul} + \sum_{\alpha\neq\beta}\frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{q_\alpha q_\beta}{|\vec{r}_\alpha-\vec{r}_\beta|} \qquad (A.13)$$

$$\varepsilon^\alpha_{coul} = \frac{1}{2\varepsilon_0}\int d^3k\,\frac{\rho^*_\alpha\rho_\alpha}{k^2} = \frac{q_\alpha^2}{2\varepsilon_0(2\pi)^3}\int\frac{d^3k}{k^2} = \frac{q_\alpha^2 k_c}{4\pi^2\varepsilon_0} \quad \text{(Coupure à } k_c\text{)} \qquad (A.14)$$

$$H_{trans} = \frac{\varepsilon_0}{2}\int d^3k\left(|\vec{\mathcal{E}}_\perp|^2+c^2|\vec{\mathcal{B}}|^2\right) = \frac{\varepsilon_0}{2}\int d^3k\left(|\dot{\vec{\mathcal{A}}}_\perp|^2+c^2k^2|\vec{\mathcal{A}}_\perp|^2\right) \qquad (A.15)$$

Coordonnées et moments conjugués (formalisme hamiltonien)

Particules α $\quad \{\vec{r}_\alpha, \vec{p}_\alpha\}$

$$\dot{\vec{r}}_\alpha = \frac{1}{m_\alpha}[\vec{p}_\alpha - q_\alpha\vec{A}_\perp(\vec{r}_\alpha)] \qquad (A.16)$$

Champs transverses $\quad \{\vec{A}_\perp(\vec{r}), \vec{\Pi}(\vec{r})\}$ ou $\{\vec{\mathcal{A}}_\perp(\vec{k}), \vec{\Pi}(\vec{k})\}$

$$\dot{\vec{A}}_\perp = \frac{1}{\varepsilon_0}\vec{\Pi} \longrightarrow \vec{\Pi}(\vec{r}) = -\varepsilon_0\vec{E}_\perp(\vec{r}) \qquad (A.17)$$

– Energie du champ transverse

$$H_{trans} = \frac{1}{2}\int d^3k\left(\frac{|\vec{\Pi}|^2}{\varepsilon_0}+\varepsilon_0\omega^2|\vec{\mathcal{A}}_\perp|^2\right) \qquad \omega = ck \qquad (A.18)$$

Somme d'hamiltoniens d'oscillateurs harmoniques

Hamiltonien

– Système global champ + particules

$$H = \sum_\alpha\frac{1}{2m_\alpha}[\vec{p}_\alpha - q_\alpha\vec{A}_\perp(\vec{r}_\alpha)]^2 + V_{coul} + H_{transv} \qquad (A.19)$$

$$= \text{Energie cinétique des particules} + \underbrace{\text{Energie du champ}}_{V_{coul}\,+\,H_{trans}}$$

– Décomposition de H en $H = H_P + H_R + H_I$ (A.20)

$$H_P = \sum_\alpha\frac{\vec{p}_\alpha^{\,2}}{2m_\alpha} + V_{coul} = \sum_\alpha\frac{\vec{p}_\alpha^{\,2}}{2m_\alpha} + \sum_\alpha\varepsilon^\alpha_{coul} + \sum_{\alpha\neq\beta}\frac{q_\alpha q_\beta}{8\pi\varepsilon_0|\vec{r}_\alpha-\vec{r}_\beta|} \qquad (A.21)$$

$$H_R = H_{trans} \qquad (A.22)$$

$$H_I = H_{I1} + H_{I2} = \text{Terme linéaire + terme quadratique (en champs)} \qquad (A.23)$$

$$H_{I1} = -\sum_\alpha\frac{q_\alpha}{m_\alpha}\vec{p}_\alpha\cdot\vec{A}_\perp(\vec{r}_\alpha) \qquad H_{I2} = \sum_\alpha\frac{q_\alpha^2}{2m_\alpha}\vec{A}_\perp^{\,2}(\vec{r}_\alpha) \qquad (A.24)$$

Hamiltonien d'interaction supplémentaire lié aux spins $\vec{S}_\alpha$

$$H^S_{I1} = -\sum_\alpha g_\alpha\frac{q_\alpha}{m_\alpha}\vec{S}_\alpha\cdot\vec{B}(\vec{r}_\alpha) \qquad g_\alpha : \text{Facteur } g \text{ de } \alpha \qquad (A.25)$$

Variables normales

En l'absence de particules, $H = H_{trans}$ a la structure d'une somme d'hamiltoniens d'oscillateurs harmoniques → Possibilité d'introduire, pour chaque $\vec{k}$, des combinaisons linéaires de $\vec{\mathcal{A}}_\perp$ et $\vec{\Pi}$ qui évoluent indépendamment les unes des autres. Variables normales décrivant les modes normaux de vibration du champ libre

Mode $(\vec{k}\vec{\varepsilon})$

Défini par un vecteur d'onde $\vec{k}$ et un vecteur polarisation $\vec{\varepsilon}$, unitaire, $\perp$ à $\vec{k}$ (2 vecteurs $\vec{\varepsilon}$ et $\vec{\varepsilon}'$ pour chaque $\vec{k}$, $\vec{\varepsilon}.\vec{\varepsilon}'=0$)

Définition des variables normales $\alpha_\varepsilon(\vec{k})$

$$\alpha_\varepsilon(\vec{k}) = \mathcal{N}(k)\left[\omega\,\mathcal{A}_\varepsilon(\vec{k}) + \frac{i}{\varepsilon_0}\Pi_\varepsilon(\vec{k})\right] \qquad \begin{cases}\mathcal{A}_\varepsilon(\vec{k}) = \vec{\varepsilon}.\vec{\mathcal{A}}_\perp(\vec{k})\\ \Pi_\varepsilon(\vec{k}) = \vec{\varepsilon}.\vec{\Pi}(\vec{k})\end{cases} \qquad (A.26)$$

$\mathcal{N}(k)$ constante de normalisation, qu'il est commode pour la suite de choisir égale à $\sqrt{\varepsilon_0/2\hbar\omega}$

Equation d'évolution des variables normales

$$\dot{\alpha}_\varepsilon(\vec{k},t) + i\omega\,\alpha_\varepsilon(\vec{k},t) = \frac{i}{\sqrt{2\varepsilon_0\hbar\omega}}\,j_\varepsilon(\vec{k},t) \qquad (A.27)$$

$$j_\varepsilon(\vec{k},t) = \vec{\varepsilon}.\vec{j}(\vec{k},t) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}}\int d^3r\,\vec{\varepsilon}.\vec{j}(\vec{r},t)\,e^{-i\vec{k}.\vec{r}} = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}}\sum_\alpha q_\alpha\,\vec{\varepsilon}.\dot{\vec{r}}_\alpha\,e^{-i\vec{k}.\vec{r}_\alpha} \qquad (A.28)$$

En l'absence de particules, $j_\varepsilon = 0 \longrightarrow \quad \alpha_\varepsilon(\vec{k},t) = \alpha_\varepsilon(\vec{k})\,e^{-i\omega t}$ (A.29)

Expression des grandeurs physiques en fonction des variables normales

$$\vec{A}_\perp(\vec{r}) = \int d^3k \sum_{\vec{\varepsilon}\perp\vec{k}} \mathcal{A}_\omega\left[\vec{\varepsilon}\,\alpha_\varepsilon(\vec{k})\,e^{i\vec{k}.\vec{r}} + \vec{\varepsilon}\,\alpha^*_\varepsilon(\vec{k})\,e^{-i\vec{k}.\vec{r}}\right] \qquad (A.30)$$

$$\vec{E}_\perp(\vec{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\vec{\Pi}(\vec{r}) = i\int d^3k \sum_{\vec{\varepsilon}\perp\vec{k}} \mathcal{E}_\omega\left[\vec{\varepsilon}\,\alpha_\varepsilon(\vec{k})\,e^{i\vec{k}.\vec{r}} - \vec{\varepsilon}\,\alpha^*_\varepsilon(\vec{k})\,e^{-i\vec{k}.\vec{r}}\right] \qquad (A.31)$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = i\int d^3k \sum_{\vec{\varepsilon}\perp\vec{k}} \mathcal{B}_\omega\left[(\vec{\kappa}\times\vec{\varepsilon})\,\alpha_\varepsilon(\vec{k})\,e^{i\vec{k}.\vec{r}} - (\vec{\kappa}\times\vec{\varepsilon})\,\alpha^*_\varepsilon(\vec{k})\,e^{-i\vec{k}.\vec{r}}\right] \qquad (A.32)$$

$$\mathcal{A}_\omega = \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0\,\omega\,(2\pi)^3}} \qquad \mathcal{E}_\omega = \omega\,\mathcal{A}_\omega \qquad \mathcal{B}_\omega = \frac{\mathcal{E}_\omega}{c} \qquad \omega = ck \qquad \vec{\kappa} = \frac{\vec{k}}{k} \qquad (A.33)$$

$$H_{trans} = H_R = \int d^3k \sum_{\vec{\varepsilon}\perp\vec{k}} \hbar\omega\,\alpha^*_\varepsilon(\vec{k})\,\alpha_\varepsilon(\vec{k}) \qquad (A.34)$$

$$\vec{P}_{trans} = \varepsilon_0\int d^3r\,\vec{E}_\perp\times\vec{B} = \int d^3k \sum_{\vec{\varepsilon}\perp\vec{k}} \hbar\vec{k}\,\alpha^*_\varepsilon(\vec{k})\,\alpha_\varepsilon(\vec{k}) \qquad (A.35)$$

$$\vec{P}_{total} = \vec{P}_{transv} + \sum_\alpha \vec{p}_\alpha \qquad (A.36)$$

Quantification canonique

– Les $\mathcal{A}_\varepsilon$ et Π_ε deviennent des opérateurs satisfaisant à

$$\left[\mathcal{A}_\varepsilon(\vec{k}),\,\Pi^+_{\varepsilon'}(\vec{k}')\right] = i\hbar\,\delta_{\varepsilon\varepsilon'}\,\delta(\vec{k}-\vec{k}') \qquad (A.37)$$

– Opérateurs de création et d'annihilation $a_\varepsilon(\vec{k})$, $a_\varepsilon^+(\vec{k})$ (définis à partir des opérateurs $\mathcal{A}_\varepsilon(\vec{k})$ et $\Pi_\varepsilon(\vec{k})$ par les mêmes formules que $\alpha_\varepsilon(\vec{k})$ et $\alpha_\varepsilon^*(\vec{k})$).

$$[a_\varepsilon(\vec{k}), a_{\varepsilon'}^+(\vec{k}')] = \delta_{\varepsilon\varepsilon'}\,\delta(\vec{k}-\vec{k}') \qquad (A.38)$$

Discrétisation des modes

– Conditions aux limites périodiques dans un cube de côté L.

$\vec{k} \longrightarrow \vec{k}_i$ avec $k_{i\,x,y,z} = \frac{2\pi}{L}\, n_{i\,x,y,z}$ $\quad n_i$ entiers $\gtrless 0$

– Mode $\vec{k}\vec{\varepsilon} \longrightarrow$ Mode $\vec{k}_i\vec{\varepsilon}_i$ également noté mode i

– $a_\varepsilon(\vec{k}) \longrightarrow a_{\vec{k}_i\vec{\varepsilon}_i}$ noté aussi a_i

$$[a_i, a_j^+] = \delta_{ij} \qquad (A.39)$$

– Developpement des grandeurs physiques en a_i, a_i^+

$$\vec{A}(\vec{r}) = \sum_i \mathcal{A}_{\omega_i}\left[\vec{\varepsilon}_i\, a_i\, e^{i\vec{k}_i\cdot\vec{r}} + \vec{\varepsilon}_i\, a_i^+\, e^{-i\vec{k}_i\cdot\vec{r}}\right] \qquad (A.40)$$

$$\vec{E}_\perp(\vec{r}) = i\sum_i \mathcal{E}_{\omega_i}\left[\vec{\varepsilon}_i\, a_i\, e^{i\vec{k}_i\cdot\vec{r}} - \varepsilon_i\, a_i^+\, e^{-i\vec{k}_i\cdot\vec{r}}\right] \qquad (A.41)$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = i\sum_i \mathcal{B}_{\omega_i}\left[\vec{\kappa}_i\times\vec{\varepsilon}_i\, a_i\, e^{i\vec{k}_i\cdot\vec{r}} - \vec{\kappa}_i\times\vec{\varepsilon}_i\, a_i^+ e^{-i\vec{k}_i\cdot\vec{r}}\right] \qquad (A.42)$$

$$\mathcal{A}_{\omega_i} = \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0\omega_i L^3}} \qquad \mathcal{E}_{\omega_i} = \omega_i\,\mathcal{A}_{\omega_i} \qquad \mathcal{B}_{\omega_i} = \frac{\mathcal{E}_{\omega_i}}{c} \qquad \vec{\kappa}_i = \vec{k}_i/k_i \qquad (A.43)$$

$$H_R = \sum_i \frac{\hbar\omega_i}{2}(a_i^+a_i + a_ia_i^+) = \sum_i \hbar\omega_i\left(a_i^+a_i + \frac{1}{2}\right) \qquad (A.44)$$

$$\vec{P}_{trans} = \vec{P}_R = \sum_i \frac{\hbar\vec{k}_i}{2}(a_i^+a_i + a_ia_i^+) = \sum_i \hbar\vec{k}_i\, a_i^+a_i \qquad (A.45)$$

Espace des états $\mathcal{E}$

– $\mathcal{E} = \mathcal{E}_P \otimes \mathcal{E}_R$ $\qquad$ $\mathcal{E}_P$ espace des états des particules $\quad$ (A.46)
$\qquad$ $\mathcal{E}_R$ " " " du rayonnement

$$\mathcal{E}_R = \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2 \otimes \cdots \otimes \mathcal{E}_i \otimes \cdots \qquad (A.47)$$

$\mathcal{E}_i$: espace des états du mode i (oscillateur harmonique de fréquence ω_i)

– Base de $\mathcal{E}$

$$\{\,|\,s\,;\,n_1,\ldots n_i\ldots\rangle\} \qquad (A.48)$$

Particules dans l'état $|s\rangle$ en présence de n_1 photons $\vec{k}_1\vec{\varepsilon}_1$, … n_i photons $\vec{k}_i\vec{\varepsilon}_i$, ….

Electrodynamique quantique en jauge de Coulomb
Photons réels et photons virtuels

(1) Amplitude de transition en électrodynamique quantique

- Hamiltonien en jauge de Coulomb.
- Amplitudes de transition - Calcul perturbatif.
- Représentation diagrammatique.
- Quelques résultats généraux.

(2) Exemples de processus physiques

- Absorption et émission de photons par un atome.
- Diffusion Compton par une particule
- "Bremsstrahlung".
- Emission et réabsorption de photons par une particule.
- Echange de photons entre 2 particules

(3) Exemples d'effets physiques associés à des photons virtuels

- Correction de masse pour une particule libre.
- Corrections radiatives à la diffusion par un potentiel
- Interactions magnétiques et effets de retard.

Hamiltonien (voir Appendice A) $\quad H = H_0 + H_I$

$$H_0 = H_P + H_R \qquad H_P = \sum_\alpha \frac{\vec{p}_\alpha^{\,2}}{2m_\alpha} + V_{Coul} \qquad H_R = \sum_i \hbar\omega_i \left(a_i^+ a_i + \frac{1}{2}\right)$$

$$H_I = H_{I1} + H_{I1}^S + H_{I2}$$

$$H_{I1} = -\sum_\alpha \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \vec{p}_\alpha \cdot \vec{A}_\perp(\vec{r}_\alpha) \qquad H_{I1}^S = \sum_\alpha -g_\alpha \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \vec{S}_\alpha \cdot \vec{B}(\vec{r}_\alpha)$$

$$H_{I2} = \sum_\alpha \frac{q_\alpha^2}{2m_\alpha} \vec{A}_\perp^{\,2}(\vec{r}_\alpha)$$

Amplitude de transition entre un état initial $|\psi_i\rangle$ à t_i et un état final $|\psi_f\rangle$ à t_f.

$$\langle \psi_f | U(t_f, t_i) | \psi_i \rangle$$

$U(t_f, t_i)$ Opérateur d'évolution associé à $H = H_0 + H_I$ (en représentation d'interaction par rapport à H_0)

Expression perturbative de U

$$U = \mathbb{1} + \sum_{n=1}^{\infty} U^{(n)}(t_f, t_i)$$

$$U^{(n)}(t_f,t_i) = \frac{1}{(i\hbar)^n} \int \cdots \int_{t_f \geq \tau_n \geq \tau_{n-1} \cdots \geq \tau_1 \geq t_i} d\tau_n \cdots\cdots d\tau_1$$

$$e^{iH_0\tau_n/\hbar}\, H_I\, e^{-iH_0(\tau_n-\tau_{n-1})/\hbar}\, H_I \cdots H_I\, e^{-iH_0(\tau_2-\tau_1)/\hbar}\, H_I\, e^{-iH_0\tau_1/\hbar}$$

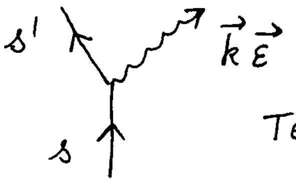
Produit alterné d'opérateurs H_I et d'opérateurs d'évolution libre

↳ Amplitude d'ordre n (en H_I) entre états propres de H_0

$$\langle \varphi_f | U^{(n)}(t_f,t_i) | \varphi_i \rangle \qquad H_0 |\varphi_f\rangle = E_f |\varphi_f\rangle \qquad H_0|\varphi_i\rangle = E_i|\varphi_i\rangle$$

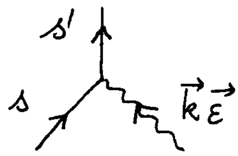
Représentations diagrammatiques

Eléments de matrice de H_{I1} ou H_{I1}^S (termes à 1 photon en a ou a^+)



(1.a)

Termes en a^+



(1.b)

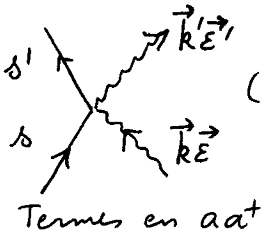
Termes en a

s : nombre quantique du système des particules

$s = \vec{p}, \mu$ pour une particule d'impulsion $\vec{p}$, d'état de spin μ

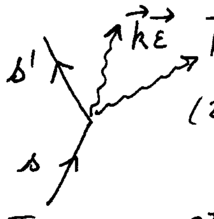
$s = \vec{K}, b$ pour un atome d'impulsion globale $\hbar\vec{K}$ (centre de masse), dans l'état interne b

Eléments de matrice de H_{I2} (termes à 2 pho en a^2, a^{+2}, aa^+, a^+a)



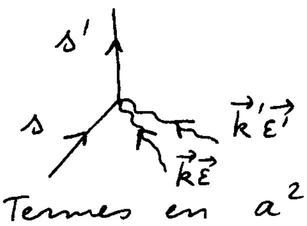
(2.a)

Termes en aa^+ ou a^+a



(2.b)

Termes en a^{+2}



(2.c)

Termes en a^2

Amplitudes

Juxtaposition de lignes de particules ou de photons (associées à des propagations libres) séparées par des "vertex" (associés aux éléments de matrice de H_I entre l'état arrivant au vertex et l'état partant du vertex). Voir par exemple diagrammes des §§ 2 et 3

Intégration sur tous les temps intermédiaires et sommation sur tous les états intermédiaires sous-entendues.

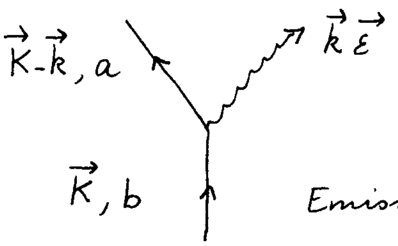
Quelques résultats généraux

- L'intégration sur les temps intermédiaires fait apparaître une fonction $\delta^{(T)}(E_f - E_i)$ (fonction delta de largeur $\hbar/T$ où $T = t_f - t_i$) exprimant la conservation de l'énergie non perturbée à $\hbar/T$ près entre l'état initial et l'état final.

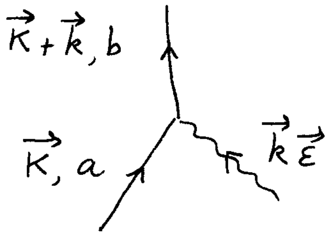
- L'énergie non perturbée peut par contre n'être pas conservée dans les états intermédiaires (Transitions "virtuelles")
  ↳ Dénominateur d'énergie d'autant plus grand que le défaut d'énergie est plus grand.
- Conservation de l'impulsion globale à chaque vertex (Invariance de H_{I1}, H^S_{I1} et H_{I2} par translation globale

Exemples de processus physiques

- Emission et absorption de photons par un atome



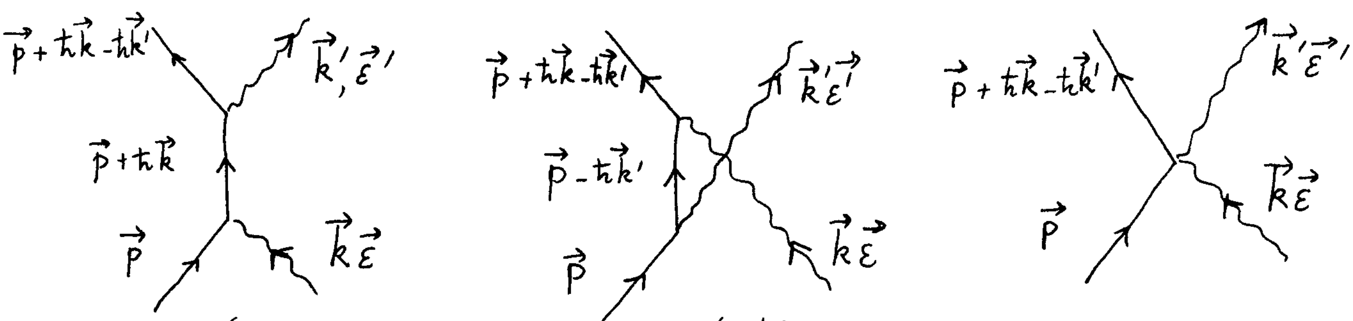
(3) Emission



(4) Absorption

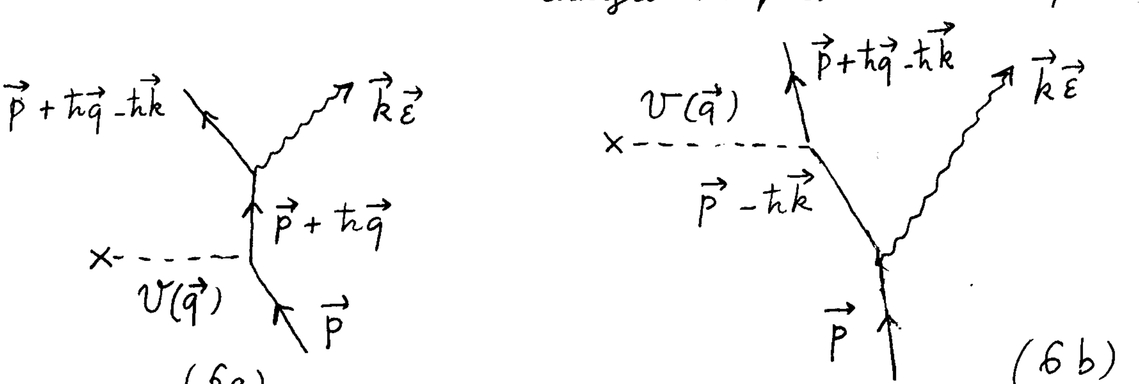
Une particule libre ne pourrait pas émettre ou absorber réellement un photon (impossibilité de conserver l'énergie et l'impulsion globales)

- Diffusion Compton par une particule chargée libre



(5a) (5b) (5c)

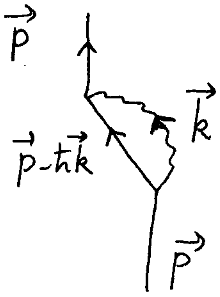
- "Bremsstrahlung" (Emission d'un photon par une particule chargée en présence d'un potentiel)



(6a) (6b)

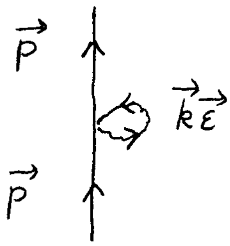
Le potentiel fournit l'impulsion nécessaire pour rendre l'émission d'un photon réel possible.

- Emission et réabsorption d'un photon par une particule chargée



(7a)

H_{I1} au $2^{\text{ème}}$ ordre

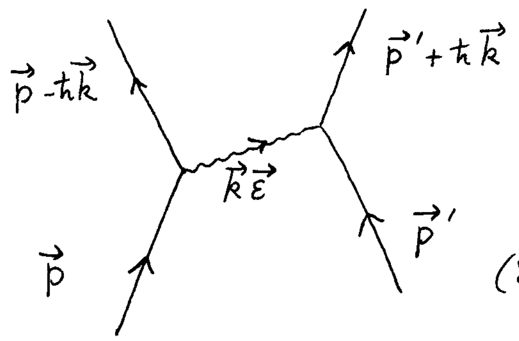


(7b)

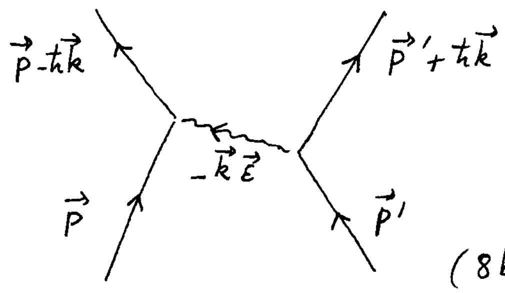
H_{I2} au 1^{er} ordre (termes en $a_{k\varepsilon}a^+_{k\varepsilon}$)

Le photon émis en (7a) ne peut rester indéfiniment (car l'énergie n'est pas conservée). Il doit être réabsorbé. Transition réelle de $|\vec{p};0\rangle$ à $|\vec{p};0\rangle$ avec une transition virtuelle vers l'état intermédiaire $|\vec{p}-\hbar\vec{k};\vec{k}\vec{\varepsilon}\rangle$

- Echange d'un photon entre 2 particules chargées



(8a)



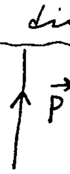
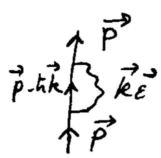
(8b)

Dans les 2 derniers exemples, un photon est émis et réabsorbé et n'apparait ni dans l'état initial ni dans l'état final.

De tels photons (émis et réabsorbés) sont appelés parfois photons "virtuels" par opposition aux photons "réels" qui apparaissent dans l'état initial ou final.

Correction de masse pour une particule libre

1 - Effet physique associé au diagramme (7a)

- Amplitude d'ordre 0  + Amplitude (7a) 

= Début du développement de $e^{-i\delta E_1 T/\hbar} = 1 - i\delta E_1 T/\hbar + \dots$

où δE_1 représente le déplacement de l'état $|\vec{p};0\rangle$ dû au couplage introduit par H_I au second ordre avec $|\vec{p}-\hbar\vec{k};\vec{k}\vec{\varepsilon}\rangle$

$$\delta E_1 = \sum_{\vec{k}\vec{\varepsilon}} \frac{|\langle\vec{p}-\hbar\vec{k};\vec{k}\vec{\varepsilon}\,|\,H_{I1}\,|\,\vec{p};0\rangle|^2}{\frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} - \frac{(\vec{p}-\hbar\vec{k})^2}{2m} - \hbar\omega}$$

Remarque : l'amplitude (7a) est proportionnelle à T car $\delta^{(T)}(E_i - E_f)$ se réduit à $\delta^{(T)}(0)$ puisque $|\varphi_i\rangle = |\varphi_f\rangle$ et $\delta^{(T)}(0)$ est proportionnel à T (Une fonction de largeur $\hbar/T$ et d'intégrale égale à 1 a une hauteur proportionnelle à T)

- Le diagramme (7a) est donc associé à une correction d'énergie de l'état $|\vec{p};0\rangle$

- Résultats du calcul de δE_1 (voir calcul de δE_1 page II-7)

$$\delta E_1 = -\frac{\vec{p}^{\,2}}{2m}\frac{\delta m_1}{m} \qquad \text{avec} \qquad \delta m_1 = \frac{q^2 k_c}{3\pi^2 \varepsilon_0 c^2}$$

k_c coupure dans l'intégrale (divergente) sur k apparaissant dans l'expression donnant δE_1

$$\delta m_1 c^2 = \frac{q^2 k_c}{3\pi^2 \varepsilon_0} = \frac{4}{3}\,\varepsilon_{Coul}$$

$$\frac{\delta m_1}{m} = \frac{4}{3}\frac{\alpha}{\pi}\frac{\hbar\omega_c}{mc^2} \qquad \text{avec} \qquad \alpha = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar c} = \frac{1}{137} \qquad \omega_c = c k_c$$

$$\frac{\delta m_1}{m} \ll 1 \qquad \text{si} \quad \hbar\omega_c \ll mc^2 \qquad \text{(Calcul non relativiste)}$$

- Interprétation de δE_1. Regroupement de δE_1 avec l'énergie non perturbée $\vec{p}^{\,2}/2m$ de l'état $|\vec{p}\rangle$

$$\frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} + \delta E_1 = \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m}\left(1 - \frac{\delta m_1}{m}\right) \simeq \frac{\vec{p}^{\,2}}{2(m+\delta m_1)}$$

δm_1 : Correction de masse pour la particule représentant l'inertie électromagnétique (équation de Abraham-Lorentz)

- Fonction d'onde perturbée associée à $|\vec{p};0\rangle$

$$|\widetilde{\vec{p};0}\rangle = \sqrt{Z}\,|\vec{p};0\rangle + \sum_{\vec{k}\vec{\varepsilon}} |\vec{p}-\hbar\vec{k};\vec{k}\vec{\varepsilon}\rangle \frac{\langle \vec{p}-\hbar\vec{k};\vec{k}\vec{\varepsilon}\,|H_{I1}|\,\vec{p};0\rangle}{\frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} - \frac{(\vec{p}-\hbar\vec{k})^2}{2m} - \hbar\omega}$$

Z : coefficient de normalisation

$$Z = 1 - \sum_{\vec{k}\vec{\varepsilon}} \frac{|\langle \vec{p}-\hbar\vec{k};\vec{k}\vec{\varepsilon}\,|H_{I1}|\,\vec{p};0\rangle|^2}{\left[\frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} - \frac{(\vec{p}-\hbar\vec{k})^2}{2m} - \hbar\omega\right]^2}$$

Image d'un nuage de photons virtuels "habillant" la particule.
Equivalent quantique du champ transverse lié à une particule classique en mouvement uniforme (voir cours III)

2 Effet physique associé au diagramme 7b

- $$\delta E_2 = \langle \vec{p};0\,|H_{I2}|\,\vec{p};0\rangle = \frac{q^2}{2m}\langle \vec{p};0\,|\vec{A}_\perp^{\,2}(\vec{r})|\,\vec{p};0\rangle$$
$$= \sum_{\vec{k}\vec{\varepsilon}} \frac{q^2}{2m}\mathcal{A}_\omega^2 = \sum_{\vec{k}\vec{\varepsilon}} \frac{q^2\,\mathcal{E}_\omega^2}{2m\omega^2}$$

- Interprétation physique de δE_2 : énergie cinétique de vibration de la charge sous l'effet des "fluctuations du vide"
- Calcul de δE_2 $\longrightarrow$ $\delta E_2 = \dfrac{q^2 \hbar}{8\pi^2 \varepsilon_0} \dfrac{k_c^2}{m}$

$$\delta E_2 = \delta m_2 c^2$$

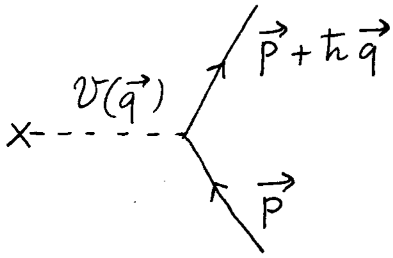
Pourquoi n'apparaît-il pas un terme en $-\dfrac{\vec{p}^{\,2}}{2m} \dfrac{\delta m_2}{\delta m}$ analogue à celui trouvé plus haut pour δm_1 ?

$\dfrac{\delta m_2}{m_2}$ est d'un ordre plus élevé en $\dfrac{1}{c}$ que $\dfrac{\delta m_1}{m_1}$

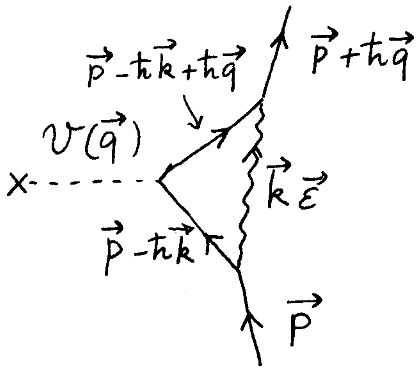
$$\frac{\delta m_1}{m} = \frac{4}{3} \frac{\alpha}{\pi} \frac{\hbar \omega_c}{mc^2} \qquad \frac{\delta m_2}{m} = \frac{1}{2} \frac{\alpha}{\pi} \left(\frac{\hbar \omega_c}{mc^2}\right)^2$$

Il faut pousser le calcul plus loin en $1/c$ pour voir apparaître un tel terme

Corrections radiatives à la diffusion par un potentiel



(9a)

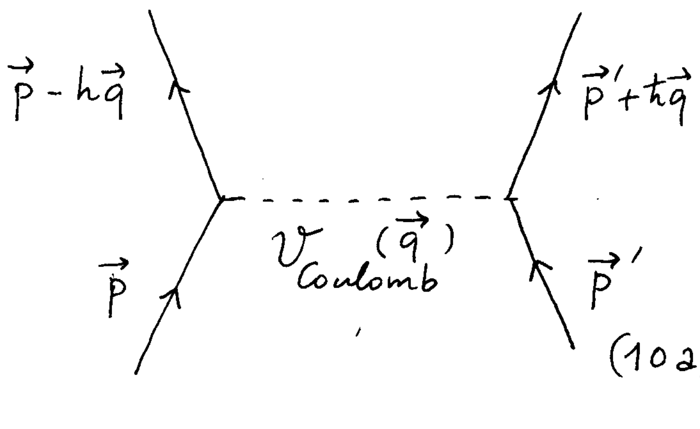


(9b)

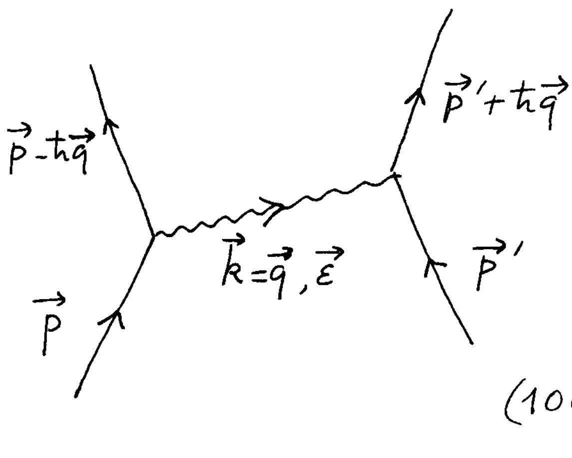
Le diagramme (9b) est un exemple de processus (faisant intervenir un photon virtuel) qui corrige l'amplitude de diffusion à l'ordre le plus bas associée au diagramme (9a)

Apparition d'un "facteur de forme" $f(\vec{q})$ qui corrige $\mathcal{V}(\vec{q})$. Justification de l'image de l'électron vibrant sous l'effet des fluctuations du vide et moyennant le potentiel $V(\vec{r})$ sur l'étendue de son mouvement de vibration (Welton).

Interactions magnétiques et effet de retard



(10a)



(10b)

L'amplitude associée à l'échange d'un photon transverse (diagramme 10-b) corrige l'amplitude associée à l'interaction de Coulomb instantanée entre les 2 particule (diagramme 10-a)

L'amplitude 10-b représente donc ~~physique~~ la contribution (d'ordre 2 en q) des effets de retard et des effets magnétique

---

Calcul de δE_1

- Numérateur de l'expression donnant δE_1 (bas page II-4)

$$\langle \vec{p}-\hbar\vec{k}\,;\vec{k}\vec{\varepsilon}\,|\,H_{I1}\,|\,\vec{p}\,;0\rangle = -\frac{q}{m}\mathcal{A}_\omega \langle \vec{p}-\hbar\vec{k}\,|\,\vec{\varepsilon}.\vec{p}\,e^{-i\vec{k}.\vec{r}}\,|\,\vec{p}\rangle$$

$$= -\frac{q}{m}\mathcal{A}_\omega\,\vec{\varepsilon}.(\vec{p}-\hbar\vec{k})\,\langle\vec{p}-\hbar\vec{k}\,|\,\vec{p}-\hbar\vec{k}\rangle = -\frac{q}{m}\mathcal{A}_\omega\,\vec{\varepsilon}.\vec{p} \qquad (\text{car } \vec{\varepsilon}.\vec{k}=0)$$

- Dénominateur

$$-\hbar\omega + 2\hbar\frac{\vec{k}.\vec{p}}{m} - \frac{\hbar^2k^2}{2m}$$

$2^{\text{ème}}$ terme plus petit que le 1^{er} par un facteur $\frac{p}{mc} \sim \frac{v}{c}$

$3^{\text{ème}}$ terme plus petit que le 1^{er} par un facteur $\frac{\hbar\omega}{mc^2}$

Dans le domaine non relativiste ($\hbar\omega \ll mc^2$, $v \ll c$), il est légitime de remplacer le dénominateur par $-\hbar\omega$

- $$\delta E_1 = -\sum_{\vec{k}\vec{\varepsilon}}\left(\frac{q}{m}\right)^2\frac{\hbar}{2\varepsilon_0\omega L^3}\frac{(\vec{\varepsilon}.\vec{p})^2}{\hbar\omega}$$

Si $L\to\infty$ $\qquad \sum_{\vec{k}\vec{\varepsilon}} \sim \frac{L^3}{(2\pi)^3}\int k^2\,dk\,d\Omega\sum_{\vec{\varepsilon}\perp\vec{k}}$

- Sommation sur les polarisations $\sum_{\vec{\varepsilon}\perp\vec{k}}\varepsilon_i\varepsilon_j p_i p_j$ avec $i,j = x,y,z$

$\varepsilon_i\varepsilon_j + \varepsilon'_i\varepsilon'_j + \kappa_i\kappa_j = \delta_{ij}$ $\qquad$ Relation de fermeture sur $\{\vec{\varepsilon},\vec{\varepsilon}',\vec{\kappa}=\vec{k}/k\}$

$$\hookrightarrow \sum_{\vec{\varepsilon}\perp\vec{k}}\varepsilon_i\varepsilon_j = \delta_{ij}-\kappa_i\kappa_j = \delta_{ij}-\frac{k_ik_j}{k^2}$$

- Intégration angulaire sur les angles polaires de $\vec{k}$ $\qquad \int d\Omega\left(\delta_{ij}-\frac{k_ik_j}{k^2}\right) = 4\pi\left(1-\frac{1}{3}\right)\delta_{ij} = \frac{8\pi}{3}\delta_{ij}$

$$\hookrightarrow \delta E_1 = -\frac{q^2}{m^2c^2}\frac{1}{6\pi^2\varepsilon_0}\vec{p}^{\,2}\int_0^{k_c}dk$$

$$\hookrightarrow \delta E_1 = -\frac{\vec{p}^{\,2}}{2m}\frac{q^2k_c}{3\pi^2\varepsilon_0 mc^2}$$

La transformation de Pauli - Fierz

① Champ transverse "lié" à une particule classique

- Particule libre en mouvement uniforme
- Particule diffusée par un potentiel. Champ lié et champ rayonné.

② Détermination de la transformation de Pauli - Fierz pour une particule quantique localisée

- Hypothèses simplificatrices. Approximations.
- Definition approchée adoptée pour le champ lié.
- Conditions imposées sur la transformation unitaire T.
- Calcul de T

③ Transformation de quelques observables

- Transformation des champs transverses
- Transformation des variables dynamiques de la particule

Particule classique libre   Particule α (q_α, m_α)

- Vitesse $\vec{v}_\alpha$ constante : $\vec{r}_\alpha(t) = \vec{r}_\alpha + \vec{v}_\alpha t$ (1.1)
- Equation d'évolution de la variable normale $\alpha_\varepsilon(\vec{k})$ du champ associé à cette particule (appendice A, (A.27) et (A.28))

$$\dot{\alpha}_\varepsilon(\vec{k},t) + i\omega\,\alpha_\varepsilon(\vec{k},t) = \frac{i}{\sqrt{2\varepsilon_0\hbar\omega(2\pi)^3}}\, q_\alpha\, \vec{\varepsilon}.\vec{v}_\alpha\, e^{-i\vec{k}.\vec{r}_\alpha(t)} \qquad (1.2)$$

Solution générale de cette équation = solution générale de l'équation sans second membre (varie en $e^{-i\omega t}$ et représente donc un champ libre) + solution particulière de l'équation avec second membre.

- Solution particulière correspondant au régime forcé en $\exp(-i\vec{k}.\vec{v}_\alpha t)$ (on remplace, dans (1.2), $\vec{r}_\alpha(t)$ par (1.1))

$$\beta_\varepsilon(\vec{k},t) = \frac{i\, q_\alpha}{\sqrt{2\varepsilon_0\hbar\omega(2\pi)^3}}\; \frac{\vec{\varepsilon}.\vec{v}_\alpha\, e^{-i\vec{k}.\vec{r}_\alpha(t)}}{i(\omega - \vec{k}.\vec{v}_\alpha)} \qquad (1.3)$$

Represente le champ obtenu quand, partant d'un champ nul à $t = -\infty$, on "branche" lentement le couplage entre la particule et le champ transverse.

$\beta_\varepsilon(\vec{k},t)$ donné en (1.3) représente donc la variable normale du champ transverse créé par la particule et qu'elle entraîne avec elle dans son mouvement uniforme → Champ transverse "lié"

Introduction de quelques approximations

(i) Ordre 1 en v_α/c → 0. On peut négliger $\vec{k}\cdot\vec{v}_\alpha$ devant ω au dénominateur de (1.3)

↳
$$\beta_\varepsilon(\vec{k},t) = \frac{q_\alpha}{\omega\sqrt{2\varepsilon_0\hbar\omega(2\pi)^3}}\ \vec{\varepsilon}\cdot\vec{v}_\alpha\ e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}_\alpha(t)} \qquad (1.4)$$

(ii) Si la particule passe près de l'origine, on peut, tant qu'elle reste à une distance l de O telle que $kl \ll 1$ ($l \ll \lambda$), remplacer dans (1.4) $\exp(-i\vec{k}\cdot\vec{r}_\alpha(t))$ par 1

(iii) Remplacement de $\vec{v}_\alpha$ par $[\vec{p}_\alpha - q_\alpha\vec{A}_\perp(\vec{r}_\alpha)]/m_\alpha$
Si on se limite à l'ordre 1 en q_α, on peut remplacer $\vec{v}_\alpha$ par $\vec{p}_\alpha/m_\alpha$ dans (1.4)

Avec (ii) et (iii), (1.4) devient
$$\beta_\varepsilon(\vec{k},t) = \frac{q_\alpha}{m_\alpha\omega\sqrt{2\varepsilon_0\hbar\omega(2\pi)^3}}\ \vec{\varepsilon}\cdot\vec{p}_\alpha \qquad (1.5)$$

Potentiel vecteur transverse associé aux variables normales (1.4)

– Noté $\vec{A}_{\perp P}$, car représente le potentiel vecteur transverse lié à la particule (à l'ordre 1 en v_α/c)

– Report de (1.4) dans la formule (A.30) de l'appendice A
$$\vec{A}_{P\perp}(\vec{r},t) = \frac{q_\alpha}{2\varepsilon_0 c^2}\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3k \sum_{\vec{\varepsilon}\perp\vec{k}} \vec{\varepsilon}\,(\vec{\varepsilon}\cdot\vec{v}_\alpha)\,\frac{e^{i\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{r}_\alpha(t))}}{k^2} + \text{c.c.} \qquad (1.6)$$

Représente la partie transverse du potentiel vecteur
$$\vec{A}_P(\vec{r},t) = \frac{q_\alpha\vec{v}_\alpha}{\varepsilon_0 c^2}\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3k\,\frac{e^{i\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{r}_\alpha(t))}}{k^2} = \frac{q_\alpha\vec{v}_\alpha}{4\pi\varepsilon_0 c^2|\vec{r}-\vec{r}_\alpha(t)|} \qquad (1.7)$$

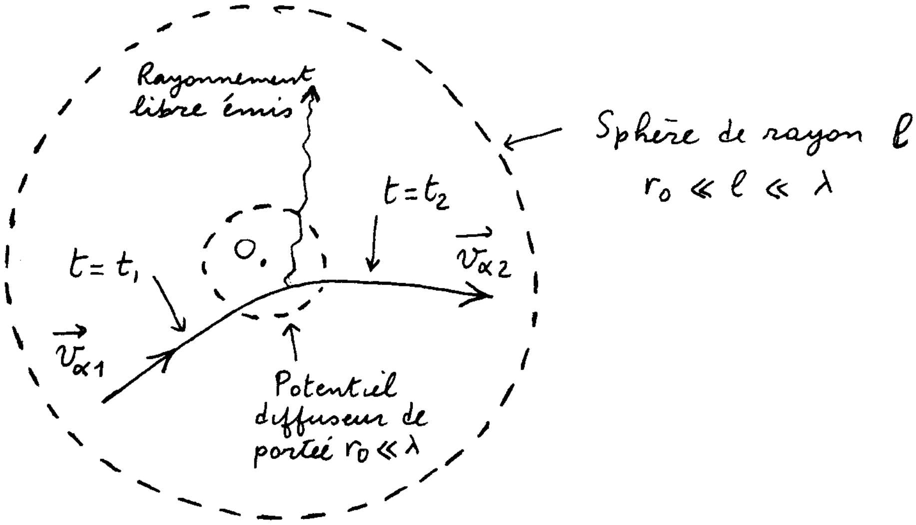
On reconnait bien en (1.7) le potentiel vecteur utilisé en électrocinétique pour décrire (au 1er ordre en v_α/c) le champ magnétique créé par la particule en mouvement et qu'elle entraîne avec elle.

– Si on fait en plus les approximations (ii) et (iii), l'équation (1.6) devient
$$\vec{A}_{P\perp}(\vec{r},t) = \frac{q_\alpha}{\varepsilon_0 m_\alpha c^2}\frac{1}{(2\pi)^3}\int_< d^3k \sum_{\vec{\varepsilon}\perp\vec{k}} \vec{\varepsilon}\,(\vec{\varepsilon}\cdot\vec{p}_\alpha)\,\frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}}{k^2} \qquad (1.8)$$

On a limité la somme sur k à $k \leq k_M$ avec $k_M l \ll 1$ (notation $\int_<$) de manière à pouvoir faire l'approximation (ii)

Particule diffusée par un potentiel

Hypothèses sur la diffusion



- Particule libre arrivant avec la vitesse initiale $\vec{v}_{\alpha 1}$, diffusée par le potentiel, émettant du rayonnement libre, et partant avec la vitesse finale $\vec{v}_{\alpha 2}$.
- On néglige la réaction du rayonnement libre émis par la particule sur son mouvement $\rightarrow$ $\vec{v}_\alpha(t)$ considérée comme une fonction donnée de t
- Portée r_0 du potentiel petite devant la longueur d'onde des modes considérés. La collision peut se dérouler entièrement dans une sphère de rayon $\ell \ll \lambda$, de sorte qu'on peut, avant ($t \leqslant t_1$) et après ($t \geqslant t_2$) la collision, remplacer $\exp(-i\vec{k}.\vec{r}_\alpha(t))$ par 1.

Equation du mouvement de la variable normale $\alpha_\varepsilon(\vec{k},t)$

$$\dot{\alpha}_\varepsilon(\vec{k},t) + i\omega\, \alpha_\varepsilon(\vec{k},t) = \frac{i}{\sqrt{2\varepsilon_0 \hbar\omega (2\pi)^3}}\, q_\alpha\, \vec{\varepsilon}.\vec{v}_\alpha(t) \qquad (1.9)$$

- Avant collision ($t \leqslant t_1$) : $\vec{v}_\alpha(t) = \vec{v}_{\alpha 1}$, pas de rayonnement libre

$$\hookrightarrow \quad \alpha_\varepsilon(\vec{k}) = \frac{q_\alpha}{\omega\sqrt{2\varepsilon_0\hbar\omega(2\pi)^3}}\, \vec{\varepsilon}.\vec{v}_{\alpha 1} \qquad (1.10)$$

Champ transverse lié à la particule incidente

- Après collision ($t \geqslant t_2$)

$$\alpha_\varepsilon(\vec{k},t) = \frac{q_\alpha}{\omega\sqrt{2\varepsilon_0\hbar\omega(2\pi)^3}}\, \vec{\varepsilon}.\vec{v}_{\alpha 2} + K\, e^{-i\omega t} \qquad (1.11)$$

Solution particulière de l'équation avec 2ème membre
Représente le champ transverse lié à la particule s'éloignant de O

Solution de l'équation sans 2ème membre
Représente le champ de rayonnement libre émis par la particule au cours de la collision

K : constante d'intégration déterminée par le raccord entre (1.10) et (1.11)

– Intégration de l'équation (1.9) entre t_1 et t_2

$$\alpha_\varepsilon(\vec{k},t_2) = \alpha_\varepsilon(\vec{k},t_1)\, e^{-i\omega(t_2-t_1)} + \frac{i q_\alpha}{\sqrt{2\varepsilon_0 \hbar\omega(2\pi)^3}} \int_{t_1}^{t_2} \vec{\varepsilon}\cdot\vec{v}_\alpha(t')\, e^{i\omega(t'-t_2)} dt' \qquad (1.12)$$

Intégration par parties du dernier terme de (1.12), puis comparaison avec (1.10) et (1.11)

↳ $$K = -\frac{q_\alpha}{\omega\sqrt{2\varepsilon_0\hbar\omega(2\pi)^3}} \int_{t_1}^{t_2} \vec{\varepsilon}\cdot\vec{\gamma}_\alpha(t')\, e^{i\omega t'} dt' \qquad (1.13)$$

où $\vec{\gamma}_\alpha(t') = d\vec{v}_\alpha(t')/dt'$ est l'accélération de la particule

Comme $\vec{\gamma}_\alpha(t') = \vec{0}$ pour $t \leq t_1$ et $t \geq t_2$, on peut dans (1.13) remplacer $\int_{t_1}^{t_2}$ par $\int_{-\infty}^{+\infty}$

↳ Le champ rayonné dans le mode $\vec{k}\vec{\varepsilon}$ est proportionnel à la composante de Fourier à la fréquence ω de la composante sur $\vec{\varepsilon}$ de l'accélération de la particule.

Récapitulation des résultats : Champ lié et champ rayonné

(i) Le champ rayonné dépend de l'accélération $\vec{\gamma}_\alpha$.

(ii) Le champ transverse lié dépend de $\vec{v}_\alpha$. Il n'est pas le même avant et après la collision.

(iii) Comme le champ lié change au cours de la collision, le champ rayonné n'est pas simplement égal à la variation du champ transverse (total) au cours de la collision

↳ Importance de soustraire le champ transverse lié pour déterminer le champ réellement émis.

Particule quantique localisée

Hypothèses simplificatrices. Approximations.

- 1 seule particule α (généralisation à plusieurs particules plus loin)
- Potentiel extérieur $V_e(\vec{r})$, de portée $r_0 \ll \lambda$
- La particule reste localisée près de O, à une distance de l'ordre de $l \ll \lambda$
- On ne tient compte dans le développement en modes que des modes $k \ll k_M$ avec $k_M l \ll 1$ (approximation des grandes longueurs d'onde) ($\int_< = \int_{k\leq k_M}$)

↳ Hamiltonien en jauge de Coulomb

$$H = \frac{1}{2m_\alpha}\left[\vec{p}_\alpha - q_\alpha \vec{A}_\perp(\vec{0})\right]^2 + \varepsilon^\alpha_{Coul} + q_\alpha V_e(\vec{r}_\alpha) + \int_< d^3k \sum_{\vec{\varepsilon}} \hbar\omega\left[a^+_\varepsilon(\vec{k})a_\varepsilon(\vec{k}) + \frac{1}{2}\right] \qquad (2.1)$$

$$A_\perp(\vec{0}) = \int_< d^3k \sum_\varepsilon \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0 \omega (2\pi)^3}} \left[\vec{\varepsilon}\, a_\varepsilon(\vec{k}) + \vec{\varepsilon}\, a_\varepsilon^+(\vec{k}) \right] \qquad (2.2)$$

Définition approchée adoptée pour le champ lié

- A chaque instant t, l'état dynamique d'une particule classique évoluant dans $V_e(\vec{r})$ est caractérisé par $\{\vec{r_\alpha}, \vec{p_\alpha}\}$
A cause de $V_e(\vec{r})$, $\vec{p_\alpha}$ change au cours du temps
- Variable normale du champ transverse lié à une particule en mouvement uniforme et d'état dynamique $\vec{r_\alpha}, \vec{p_\alpha}$ à t (mouvement uniforme "tangent" à t au mouvement réel étudié ici) : $\beta_\varepsilon(\vec{k})$ donné en (1.5)
Potentiel vecteur correspondant donné en (1.8)
- Dans le § 1b précédent, on n'a considéré le champ lié que dans les états asymptotiques ($t \leq t_1$ et $t \geq t_2$) où la particule est libre.
Ici, même lorsque la particule n'est pas libre ($r \leq r_0$), nous prenons (1.5) et (1.8) pour définir le champ lié à la particule d'état dynamique $\vec{r_\alpha}, \vec{p_\alpha}$ (champ lié au mouvement uniforme tangent à chaque instant t)
- En théorie quantique, $\vec{r_\alpha}$ et $\vec{p_\alpha}$ deviennent des opérateurs. $\beta_\varepsilon(\vec{k})$ et $\vec{A}_{p\perp}(\vec{r})$ deviennent des opérateurs de particule (ne dépendant que de $\vec{p_\alpha}$).

Conditions imposées sur la transformation unitaire T.

Point de vue (1)	Transfo unitaire	Point de vue (2)
Coulomb	$\xrightarrow{\quad\quad}$ $TT^+ = T^+T = 1\!\!1$	Pauli - Fierz

- Dans le point de vue (1), $a_\varepsilon(\vec{k})$ est un opérateur d'annihilation associé au champ transverse total
- Dans le point de vue (2), au même champ total est associé l'opérateur $T a_\varepsilon(\vec{k}) T^+$.
- Supposons que T soit tel que

$$\begin{cases} T a_\varepsilon(\vec{k}) T^+ = a_\varepsilon(\vec{k}) + \beta_\varepsilon(\vec{k}) = a_\varepsilon(\vec{k}) + \dfrac{q_\alpha \ \vec{\varepsilon}\cdot\vec{p_\alpha}}{m_\alpha \omega \sqrt{2\varepsilon_0 \hbar \omega (2\pi)^3}} \\ T a^+_\varepsilon(\vec{k}) T^+ = a^+_\varepsilon(\vec{k}) + \beta_\varepsilon(\vec{k}) = a_\varepsilon(\vec{k}) + \dfrac{q_\alpha \ \vec{\varepsilon}\cdot\vec{p_\alpha}}{m_\alpha \omega \sqrt{2\varepsilon_0 \hbar \omega (2\pi)^3}} \end{cases} \qquad (2.3)$$

Au champ total est (alors) associé dans le point de vue (2) l'opérateur $a_\varepsilon(\vec{k}) + \beta_\varepsilon(\vec{k})$. Comme, avec la définition prise plus haut, $\beta_\varepsilon(\vec{k})$ représente le champ lié (on verra plus loin que cette propriété reste valable dans le point de vue (2)), on en déduit que, dans le point de vue (2), $a_\varepsilon(\vec{k})$ est associé au champ libre (champ total - champ lié)

Calcul de T

- Les opérateurs $\beta_\varepsilon(\vec{k})$, $\beta_{\varepsilon'}(\vec{k}')$ ... commutent entre eux (puisqu'ils ne dépendent que de l'opérateur atomique $\vec{p}_\alpha$) et commutent avec les opérateurs de rayonnement a_ε et a_ε^+.
- La transformation $a_\varepsilon \to a_\varepsilon + \beta_\varepsilon$, $a_\varepsilon^+ \to a_\varepsilon^+ + \beta_\varepsilon$ conserve donc les relations de commutation entre les a et a^+. C'est donc bien une transformation unitaire T qui est une translation des a et a^+, donnée par

$$T = \exp\left\{\int_< d^3k \sum_{\vec{\varepsilon}} \beta_\varepsilon(\vec{k})\left[a_\varepsilon(\vec{k}) - a_\varepsilon^+(\vec{k})\right]\right\} \tag{2.4}$$

Pour démontrer que (2.4) redonne bien (2.3), il suffit d'utiliser l'identité de Glauber

$$e^{A+B} = e^A\, e^B\, e^{-\frac{1}{2}[A,B]} \tag{2.5}$$

valable si A et B commutent avec $[A,B]$, et l'identité

$$[a, f(a^+)] = \frac{\partial f(a^+)}{\partial a^+} \tag{2.6}$$

Autre expression de T

- Comme $\beta_\varepsilon(\vec{k})$ est proportionnel à $\vec{p}_\alpha$, on peut mettre $\vec{p}_\alpha$ en facteur dans l'argument de l'exponentielle de (2.4)

$\hookrightarrow$
$$T = \exp\left[\frac{i}{\hbar}\frac{q_\alpha}{m_\alpha}\vec{p}_\alpha\cdot\vec{Z}(\vec{0})\right] \tag{2.7}$$

où
$$\vec{Z}(\vec{r}) = \int_< d^3k \sum_{\vec{\varepsilon}} \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0\omega(2\pi)^3}}\left[\vec{\varepsilon}\,\frac{a_\varepsilon(\vec{k})}{i\omega}e^{i\vec{k}.\vec{r}} - \vec{\varepsilon}\,\frac{a_\varepsilon^+(\vec{k})}{i\omega}e^{-i\vec{k}.\vec{r}}\right] \tag{2.8}$$

est un opérateur champ, appelé parfois "vecteur de Hertz"

- Pour le champ libre, $\dot{a} = -i\omega a$, $\dot{a}^+ = i\omega a^+$, de sorte que

$$\begin{aligned}\dot{\vec{Z}}(\vec{r}) &= -\int_< d^3k \sum_{\vec{\varepsilon}} \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0\omega(2\pi)^3}}\left[\vec{\varepsilon}\,a_\varepsilon(\vec{k})e^{i\vec{k}.\vec{r}} + \vec{\varepsilon}\,a_\varepsilon^+(\vec{k})\,e^{-i\vec{k}.\vec{r}}\right] \\ &= -\vec{A}_\perp(\vec{r})\end{aligned} \tag{2.9}$$

Pour le champ libre, $\vec{Z}$ est donc pour $\vec{A}_\perp$ ce que $\vec{A}_\perp$ est pour $\vec{E}_\perp$ ($\dot{\vec{A}}_\perp = -\vec{E}_\perp$).

Transformation du potentiel vecteur transverse

- L'opérateur mathématique

$$\vec{A}_\perp(\vec{r}) = \int_< d^3k \sum_{\vec{\varepsilon}} \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0\omega(2\pi)^3}}\left[\vec{\varepsilon}\,a_\varepsilon(\vec{k})e^{i\vec{k}.\vec{r}} + \vec{\varepsilon}\,a_\varepsilon^+(\vec{k})e^{-i\vec{k}.\vec{r}}\right] \tag{2.10}$$

représente dans le point de vue (1) le potentiel vecteur transverse

$$\vec{A}_\perp(\vec{r}) = \vec{A}_\perp^{(1)}(\vec{r}) \tag{2.11}$$

- Dans le point de vue (2), l'opérateur représentant le potentiel vecteur transverse, noté $\vec{A}_\perp^{(2)}$ est le transformé de $\vec{A}^{(1)}$ par T

$$\vec{A}_\perp^{(2)}(\vec{r}) = T\,\vec{A}_\perp^{(1)}(\vec{r})\,T^+ \qquad (2.12)$$

D'après (2.3) (2.10 et (2.11)

$$\vec{A}_\perp^{(2)}(\vec{r}) = \vec{A}_\perp(\vec{r}) + \vec{A}_{\perp P}(\vec{r}) \qquad (2.13)$$

où $\vec{A}_{\perp P}(\vec{r})$ est l'opérateur obtenu en remplaçant dans (2.10) a_ε par β_ε et a_ε^+ par β_ε^+, c'est à dire encore (1.8).

- L'opérateur (1.8) représente dans le point de vue (1) le potentiel vecteur transverse lié

$$\vec{A}_{\perp P}(\vec{r}) = \vec{A}_{\perp P}^{(1)}(\vec{r}) \qquad (2.14)$$

Comme T commute avec $\vec{p}_\alpha$, et donc avec $\vec{A}_{\perp P}$

$$\vec{A}_{\perp P}^{(2)}(\vec{r}) = T\,\vec{A}_{\perp P}^{(1)}(\vec{r})\,T^+ = \vec{A}_{\perp P}^{(1)}(\vec{r}) = \vec{A}_{\perp P}(\vec{r}) \qquad (2.15)$$

- On peut donc écrire (2.13) sous la forme

$$\vec{A}_\perp(\vec{r}) = \vec{A}_\perp^{(2)}(\vec{r}) - \vec{A}_{\perp P}(\vec{r}) = \vec{A}_\perp^{(2)}(\vec{r}) - \vec{A}_{\perp P}^{(2)}(\vec{r}) \qquad (2.16)$$

Dans le point de vue (2), l'opérateur $\vec{A}_\perp(\vec{r})$ écrit en (2.10) représente donc le potentiel vecteur total moins le potentiel vecteur lié, c'est à dire le potentiel vecteur libre.

Transformation du champ électrique transverse

$$\vec{E}_\perp(\vec{r}) = i\int_< d^3k \sum_{\vec{\varepsilon}} \left[\vec{\varepsilon}\, a_\varepsilon(\vec{k})\, e^{i\vec{k}.\vec{r}} - \vec{\varepsilon}\, a_\varepsilon^+(\vec{k})\, e^{-i\vec{k}.\vec{r}}\right] = \vec{E}_\perp^{(1)}(\vec{r}) \qquad (2.17)$$

$$\hookrightarrow \quad \vec{E}_\perp^{(2)}(\vec{r}) = T\,\vec{E}_\perp^{(1)}(\vec{r})\,T^+ = \vec{E}_\perp(\vec{r}) + \vec{E}_{\perp P}(\vec{r}) \qquad (2.18)$$

où

$$\vec{E}_{\perp P}(\vec{r}) = i\int_< d^3k \left[\vec{\varepsilon}\, \beta_\varepsilon(\vec{k})\, e^{i\vec{k}.\vec{r}} - \vec{\varepsilon}\, \beta_\varepsilon(\vec{k})\, e^{-i\vec{k}.\vec{r}}\right] = \vec{0} \qquad (2.19)$$

Interprétation : le champ électrique transverse lié est d'ordre 2 en v_α/c, et n'apparait donc pas dans le calcul d'ordre 1 fait ici.

Transformation de la position de la particule

- Dans le point de vue (1), la position de la particule α, notée $\vec{r}_\alpha^{(1)}$, est représentée par l'opérateur $\vec{r}_\alpha$ (multiplication par $\vec{r}_\alpha$)

$$\vec{r}_\alpha^{(1)} = \vec{r}_\alpha \qquad (2.20)$$

- Dans le point de vue (2), la position de la particule α, notée $\vec{r}_\alpha^{(2)}$, est représentée par

$$\vec{r}_\alpha^{(2)} = T\,\vec{r}_\alpha^{(1)}\,T^+ = T\,\vec{r}_\alpha\,T^+ \qquad (2.21)$$

- Comme $\vec{p}_\alpha$ commute avec $\vec{Z}(\vec{0})$ dans (2.7), T est aussi un opérateur de translation pour $\vec{r}_\alpha$

$$T\,\vec{r}_\alpha\,T^+ = \vec{r}_\alpha + \frac{q_\alpha}{m_\alpha}\vec{Z}(\vec{0}) \tag{2.22}$$

$$\hookrightarrow \quad \vec{r}_\alpha^{(2)} = \vec{r}_\alpha + \frac{q_\alpha}{m_\alpha}\vec{Z}(\vec{0}) \tag{2.23}$$

Le dernier terme de (2.23) a la même forme dans les 2 points de vue puisque $\vec{Z}(\vec{0})$ commute avec T et sera noté $\vec{\xi}_\alpha$

$$\vec{\xi}_\alpha = \frac{q_\alpha}{m_\alpha}\vec{Z}(\vec{0}) = \vec{\xi}_\alpha^{(1)} = \vec{\xi}_\alpha^{(2)} \tag{2.24}$$

- Interprétation de $\vec{\xi}_\alpha$.

A l'ordre le plus bas en q_α, on ne peut considérer que le champ libre pour calculer $\quad m_\alpha \ddot{\vec{\xi}}_\alpha = q_\alpha \ddot{\vec{Z}}(\vec{0})$

Or, pour le champ libre, d'après (2.9)

$$m_\alpha \ddot{\vec{\xi}}_\alpha = q_\alpha \ddot{\vec{Z}}(\vec{0}) = -q_\alpha \dot{\vec{A}}_\perp(\vec{0}) = q_\alpha \vec{E}_\perp(\vec{0}) \tag{2.25}$$

$\vec{\xi}_\alpha$ représente donc le mouvement de vibration de la particule si elle n'était soumise qu'au champ libre (champ incident, fluctuations du vide).

- Dans le point de vue (2), l'opérateur $\vec{r}_\alpha$ s'écrit d'après (2.23), (2.24)

$$\vec{r}_\alpha = \vec{r}_\alpha^{(2)} - \xi_\alpha = \vec{r}_\alpha^{(2)} - \xi_\alpha^{(2)} \tag{2.26}$$

et représente donc la <u>position "moyenne"</u> autour de laquelle la particule effectue le mouvement de vibration $\vec{\xi}_\alpha^{(2)}$. Cette position moyenne sera notée $\vec{r}_\alpha^{\,\prime(2)}$

$$\vec{r}_\alpha = \vec{r}_\alpha^{\,\prime(2)} \tag{2.27}$$

<u>Transformation de l'impulsion de la particule</u>

- Comme $\vec{p}_\alpha$ commute avec T

$$\vec{p}_\alpha = \vec{p}_\alpha^{(1)} = \vec{p}_\alpha^{(2)} \tag{2.28}$$

- Nous verrons plus loin, après avoir calculé l'hamiltonien total $H^{(2)}$ dans le point de vue (2) que

$$m_\alpha \dot{\vec{r}}_\alpha^{\,\prime(2)} = \frac{1}{i\hbar}\left[\vec{r}_\alpha^{\,\prime(2)}, H^{(2)}\right] = \frac{1}{i\hbar}\left[\vec{r}_\alpha, H^{(2)}\right] = \vec{p}_\alpha = \vec{p}_\alpha^{(2)} \tag{2.29}$$

$\vec{p}_\alpha/m_\alpha$ représente donc, dans le point de vue (2), la <u>vitesse du mouvement moyen</u> de la particule.

<u>Références</u>

- W. Pauli and M. Fierz, Nuovo Cimento <u>15</u>, 167 (1938)
- "Photons et Atomes - Les processus d'interaction"
  Tome II, Complément B_{II}
  C.C-T, J. Dupont-Roc, G. Grynberg
  Interéditions - Editions du CNRS, à paraître en 1988

La transformation de Pauli-Fierz (suite)

④ Etude du nouvel hamiltonien

a) Calcul de l'hamiltonien transformé

b) Discussion physique
- Sens physique de $\vec{P_\alpha}$ dans le nouveau point de vue
- Correction de masse
- Nouveaux termes d'interaction charge-rayonnement
- Interprétation des autres termes

c) Disparition des termes d'interaction linéaires en q_α.

⑤ Généralisation à 2 particules localisées

a) Nouvelle expression de la transformation

b) Nouvel hamiltonien

c) Interprétation physique des nouveaux termes
Interactions magnétiques et effets de retard.

Calcul de $H^{(2)} = T H^{(1)} T^+$ ($H^{(1)}$ étant donné par (2.1))

Transformé du terme d'énergie cinétique

- D'après (2.13) et (2.28)

$$T \frac{1}{2m_\alpha}\left[\vec{P_\alpha} - q_\alpha \vec{A}_\perp(\vec{0})\right]^2 T^+ = \frac{1}{2m_\alpha}\left[\vec{P_\alpha} - q_\alpha \vec{A}_\perp(\vec{0}) - q_\alpha \vec{A}_{\perp P}(\vec{0})\right]^2 \qquad (4.1)$$

- Calcul de $q_\alpha \vec{A}_{\perp P}(\vec{0})$. D'après (1.8)

$$q_\alpha\left(\vec{A}_{\perp P}(\vec{0})\right)_i = \frac{q_\alpha^2}{\varepsilon_0 m_\alpha c^2}\frac{1}{(2\pi)^3}\int_0^{k_M} k^2 dk \int d\Omega \sum_{\vec{\varepsilon}\perp\vec{k}} \frac{\varepsilon_i \varepsilon_j P_{\alpha j}}{k^2} \qquad (4.2)$$

avec $i,j = x,y,z$. Mêmes types de calculs que page II-7

$$\sum_{\vec{\varepsilon}\perp\vec{k}} \varepsilon_i \varepsilon_j = \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \qquad \int d\Omega \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}\right) = \frac{8\pi}{3}$$

$$\hookrightarrow \quad q_\alpha \vec{A}_{\perp P}(\vec{0}) = \vec{P_\alpha}\frac{q_\alpha^2 k_M}{3\pi^2 \varepsilon_0 m_\alpha c^2} = \vec{P_\alpha}\frac{\delta m_{1\alpha}}{m_\alpha} \qquad (4.3)$$

où $\delta m_{1\alpha}$ est la correction de masse étudiée page (II.5) pour la particule α (on prend $k_c = k_M$)

- δm_1 est d'ordre 2 en q_α. Si l'on ne garde que les termes jusqu'à l'ordre 2 inclus, on peut négliger les termes en $\delta m_{1\alpha}^2$ et en $q_\alpha \delta m_{1\alpha} \vec{A}_\perp(\vec{0})$

$$\hookrightarrow \quad T\frac{1}{2m_\alpha}\left[\vec{P_\alpha} - q_\alpha \vec{A}_\perp(\vec{0})\right]^2 T^+ \simeq \frac{\vec{P_\alpha}^2}{2m_\alpha} - \frac{q_\alpha}{m_\alpha}\vec{P_\alpha}\cdot\vec{A}_\perp(\vec{0}) + \frac{q_\alpha^2}{2m_\alpha}\vec{A}_\perp^2(\vec{0}) - \frac{\vec{P_\alpha}^2}{2m_\alpha}\frac{2\delta m_{1\alpha}}{m_\alpha} \qquad (4.4)$$

Transformé du terme d'énergie potentielle

- D'après (2.23) et (2.24)

$$T\, V_e(\vec{r}_\alpha)\, T^+ = V_e\left(\vec{r}_\alpha + \frac{q_\alpha}{m_\alpha}\vec{Z}(\vec{0})\right) \tag{4.5}$$

- Par ailleurs $\quad T\,\varepsilon^\alpha_{Coul}\,T^+ = \varepsilon^\alpha_{Coul}$ $\quad$ (4.6)

Transformé de $\quad H_R = \int_< d^3k \sum_{\vec{\varepsilon}} \hbar\omega \left[a^+_\varepsilon(\vec{k})\, a_\varepsilon(\vec{k}) + \frac{1}{2}\right]$

- D'après (2.3),

$$T H_R T^+ = \int_< d^3k \sum_{\vec{\varepsilon}} \hbar\omega \left\{ \left[a^+_\varepsilon(\vec{k}) + \beta_\varepsilon(\vec{k})\right]\left[a_\varepsilon(\vec{k}) + \beta_\varepsilon(\vec{k})\right] + \frac{1}{2}\right\}$$

$$= H_R + \int_< d^3k \sum_{\vec{\varepsilon}} \hbar\omega \left[a^+_\varepsilon(\vec{k}) + a_\varepsilon(\vec{k})\right]\beta_\varepsilon(\vec{k}) + \int_< d^3k \sum_{\vec{\varepsilon}} \hbar\omega\, \beta_\varepsilon(k)\,\beta_\varepsilon(\vec{k}) \tag{4.7}$$

- En utilisant (1.5), on trouve que le 2ème terme de (4.5) vaut $q_\alpha \vec{P}_\alpha \cdot \vec{A}_\perp(\vec{0})/m_\alpha$ et que le 3ème vaut

$$\int_< d^3k \sum_{\vec{\varepsilon}} (\vec{\varepsilon}\cdot\vec{P}_\alpha)^2 \frac{q_\alpha^2}{m_\alpha^2} \frac{\hbar}{2\varepsilon_0\,\omega(2\pi)^3} \frac{1}{\hbar\omega}$$

c'est à dire d'après le cours II (page II-7) $\dfrac{\vec{P}_\alpha^{\,2}}{2m_\alpha}\dfrac{\delta m_{1\alpha}}{m_\alpha}$

$$\hookrightarrow \quad T H_R T^+ = H_R + \frac{q_\alpha}{m_\alpha}\vec{P}_\alpha\cdot\vec{A}_\perp(\vec{0}) + \frac{\vec{P}_\alpha^{\,2}}{2m_\alpha}\frac{\delta m_{1\alpha}}{m_\alpha} \tag{4.8}$$

Récapitulation $\quad$ On ajoute (4.4), (4.5), (4.6), (4.8)

A l'ordre 2 inclus en $\vec{P}_\alpha$, on peut écrire

$$\frac{\vec{P}_\alpha^{\,2}}{2m_\alpha}\left(1 - \frac{\delta m_{1\alpha}}{m_\alpha}\right) \sim \frac{\vec{P}^{\,2}}{2m_\alpha^*} \qquad \text{où} \qquad m_\alpha^* = m_\alpha + \delta m_{1\alpha} \tag{4.9}$$

est la masse corrigée

$$\hookrightarrow \quad H^{(2)} = \frac{\vec{P}_\alpha^{\,2}}{2m_\alpha^*} + \varepsilon^\alpha_{Coul} + V_e\left(\vec{r}_\alpha + \frac{q_\alpha}{m_\alpha}\vec{Z}(\vec{0})\right) + H_R + \frac{q_\alpha^2}{2m_\alpha}\vec{A}_\perp^{\,2}(\vec{0}) \tag{4.10}$$

Interprétation de $\vec{P}_\alpha$ dans le nouveau point de vue (2)

$$\dot{\vec{r}}_\alpha = \frac{1}{i\hbar}\left[\vec{r}_\alpha, H^{(2)}\right] = \frac{\partial H^{(2)}}{\vec{P}_\alpha} = \frac{\vec{P}_\alpha}{m_\alpha^*} \tag{4.11}$$

Comme $\vec{r}_\alpha$ représente dans le point de vue (2) la position moyenne de la particule (voir § 3 plus haut), l'équation (4.11) montre que $\vec{P}_\alpha$ est la quantité de mouvement associée au mouvement moyen de la particule α ayant une masse corrigée m_α^*.

$\hookrightarrow$ $\vec{P}_\alpha^{\,2}/2m_\alpha^*$ est donc l'énergie cinétique du mouvement moyen

---

Correction de masse

- La correction de masse $\delta m_{1\alpha}$ associée au processus (7a) de la page (II-4) dans le point de vue de Coulomb (1), apparait maintenant <u>directement</u> dans l'hamiltonien des particules

– Origine de la correction en $-\frac{\vec{P}_\alpha^2}{2m_\alpha}\frac{\delta m_{1\alpha}}{m_\alpha}$

Dernier terme de (4.4) + Dernier terme de (4.8)

Négatif
Energie d'interaction
$-q_\alpha \vec{P}_\alpha \cdot \vec{A}_{\perp P}(\vec{0})/m_\alpha$
entre la particule et son champ transverse lié

Positif
Energie du champ transverse lié

Le 1er terme est 2 fois plus grand en module que le second, ce qui explique le signe – global.

<u>Nouveaux termes d'interaction</u>

– Développement du 3ème terme de (4.10) en puissances de q_α

$$V_e\left(\vec{r}_\alpha + \frac{q_\alpha}{m_\alpha}\vec{Z}(\vec{0})\right) = V_e(\vec{r}_\alpha) + \frac{q_\alpha}{m_\alpha}\vec{Z}(\vec{0})\cdot\vec{\nabla} V_e(\vec{r}_\alpha) + + \frac{1}{2}\frac{q_\alpha^2}{m_\alpha^2}\sum_{\substack{i\,j=\\x,y,z}} Z_i(\vec{0})Z_j(\vec{0})\,\nabla_i\nabla_j\, V_e(\vec{r}_\alpha) + \cdots \tag{4.12}$$

C'est uniquement dans (4.11) qu'apparaissent des termes contenant <u>à la fois</u> des opérateurs de particules et des opérateurs de rayonnement, donc des termes d'interaction

– Interprétation du terme en $q_\alpha \vec{Z}\cdot\vec{\nabla} V_e/m_\alpha$

Terme linéaire en $\vec{Z}$, donc en a et a^+. Décrit donc des absorptions ou émissions d'<u>un</u> photon

Or, $-\vec{\nabla} V_e(\vec{r}_\alpha)$ est la force extérieure (due à V_e) agissant sur la particule, proportionnelle à <u>l'accélération</u> de son mouvement dans le potentiel extérieur.

↳ Le nouveau terme d'interaction à 1 photon dépend donc de l'<u>accélération</u> de la particule dans le potentiel extérieur et du vecteur de Hertz.

– Interprétation du dernier terme de (4.12)

Si le champ de rayonnement est dans l'état vide, le terme en $\vec{Z}\cdot\vec{\nabla} V_e$ a une valeur moyenne nulle. Le dernier a une valeur moyenne non nulle (provenant des termes $i=j$ par suite de l'isotropie du vide) qui vaut

$$\frac{1}{6}\frac{q_\alpha^2}{m_\alpha^2}\langle\vec{Z}^2(\vec{0})\rangle_{\text{vide}}\;\Delta V_e(\vec{r}_\alpha) \tag{4.13}$$

Interprétation : correction à l'énergie potentielle due au moyennage par l'électron du potentiel extérieur sur l'étendue de son mouvement de vibration sous l'effet de fluctuations du vide)

Image de Welton pour le Lamb-shift.

Interprétation des autres termes (dans le point de vue 2)

- H_R : énergie du rayonnement libre (non lié), c'est à dire des photons réels

- Terme $q_\alpha^2 \vec{A}_\perp^2(\vec{0})/2m_\alpha$. Pour un rayonnement libre, $\vec{A}_\perp(\vec{0}) = -\dot{\vec{Z}}(\vec{0})$

$$\hookrightarrow \quad \frac{q_\alpha^2}{2m_\alpha}\vec{A}_\perp^2(\vec{0}) = \frac{q_\alpha^2}{2m_\alpha}\dot{\vec{Z}}^2(\vec{0}) = \frac{m_\alpha}{2}\dot{\vec{\xi}}_\alpha^2 \qquad (4.14)$$

Energie cinétique du mouvement de vibration de la particule dans le champ de rayonnement libre.

Disparition des termes d'interaction linéaires en q_α

- A l'ordre 0 en q_α, chacun des 2 systèmes, la particule et le champ de rayonnement, évolue librement.

- A l'ordre 1 en q_α, chaque système répond linéairement à la perturbation exercée sur lui par le mouvement libre de l'autre

  Par exemple, le mouvement libre de la particule (non perturbé par le rayonnement) fait apparaître un champ transverse linéaire en q_α, le champ lié $\vec{A}_{\perp P}$

  De même, le mouvement libre du champ (non perturbé par la particule) induit un mouvement de vibration forcé $\vec{\xi}_\alpha$ de la particule, linéaire en q_α

- La transformation T revient à soustraire à chaque observable d'un système la réponse linéaire de cette observable à la perturbation exercée par le mouvement libre de l'autre système. C'est ce qu'expriment les relations (2.16) et (2.26)

  Dans le nouveau point de vue (2), les observables décrivent donc les écarts des différentes grandeurs physiques par rapport aux réponses linéaires.

- Il ne doit donc plus exister dans $H^{(2)}$ de termes d'interaction linéaires en q_α, car, s'il en restait, ces termes donneraient naissance à des réponses linéaires qui ne doivent plus apparaître après la transformation T.

- C'est bien ce qu'on vérifie sur les 2 derniers termes de (4.12), qui représentent l'hamiltonien d'interaction dans le point de vue (2).

  (Ne pas oublier que le "potentiel" extérieur V_e est lui même en q_α, car V_e est en fait une énergie potentielle provenant de l'interaction de q_α avec un potentiel extérieur U_e : $V_e = q_\alpha U_e$).

Généralisation à 2 particules localisées

- 2 particules A et B, de positions $\vec{r}_A$ et $\vec{r}_B$, localisées autour de 2 points $\vec{R}_A$ et $\vec{R}_B$ $\quad (|\vec{r}_A - \vec{R}_A|, |\vec{r}_B - \vec{R}_B| \ll 1/k_M)$

$$H^{(1)} = H_A + H_B + V_{AB}^{Coul} + H_R \tag{5.1}$$

$$H_\alpha = \frac{1}{2m_\alpha}\left[\vec{p}_\alpha - q_\alpha \vec{A}(\vec{R}_\alpha)\right]^2 + \varepsilon^\alpha_{Coul} + V_e(\vec{r}_\alpha) \qquad (\alpha = A, B) \tag{5.2}$$

$$H_R = \int_< d^3k \sum_{\vec{\varepsilon}} \hbar\omega \left[a^+_\varepsilon(\vec{k}) a_\varepsilon(\vec{k}) + \frac{1}{2}\right] \tag{5.3}$$

$$V_{AB}^{Coul} = \frac{q_A q_B}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r}_A - \vec{r}_B|} \tag{5.4}$$

- Variables normales du champ transverse lié aux 2 particule

(généralisation de 1.4 avec $e^{-i\vec{k}.\vec{r}_\alpha}$ remplacé par $e^{-i\vec{k}.\vec{R}_\alpha}$ et $\vec{v}_\alpha$ remplacé par $\vec{p}_\alpha/m_\alpha$)

$$\beta_\varepsilon(\vec{k}) = \left[\beta_\varepsilon(\vec{k})\right]_A + \left[\beta_\varepsilon(\vec{k})\right]_B \tag{5.5}$$

$$\left[\beta_\varepsilon(\vec{k})\right]_\alpha = \frac{q_\alpha}{m_\alpha \omega} \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_0 \hbar\omega (2\pi)^3}} \vec{\varepsilon}.\vec{p}_\alpha \exp(-i\vec{k}.\vec{R}_\alpha) \qquad (\alpha = A, B) \tag{5.6}$$

- Potentiel vecteur transverse lié (généralisation de 1.6 avec $\vec{r}_\alpha$ remplacé par $\vec{R}_\alpha$ et $\vec{v}_\alpha$ remplacé par $\vec{p}_\alpha/m_\alpha$)

$$\vec{A}_{\perp P}(\vec{r}) = \left[\vec{A}_{\perp P}(\vec{r})\right]_A + \left[\vec{A}_{\perp P}(\vec{r})\right]_B \tag{5.7}$$

$$\left[\vec{A}_{\perp P}(\vec{r})\right]_\alpha = \frac{q_\alpha}{2 m_\alpha \varepsilon_0 c^2} \int_< \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sum_{\vec{\varepsilon}} \frac{\vec{\varepsilon}(\vec{\varepsilon}.\vec{p}_\alpha)}{k^2} e^{i\vec{k}.(\vec{r}-\vec{R}_\alpha)} + c.c. \qquad (\alpha = A, B) \tag{5.8}$$

- Nouvelle transformation

$$T = \exp\left[\frac{i}{\hbar} \sum_{\alpha = A, B} \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \vec{p}_\alpha . \vec{Z}(\vec{R}_\alpha)\right] \tag{5.9}$$

- Transformé de $\vec{A}_\perp(\vec{r})$

$$T \vec{A}_\perp(\vec{r}) T^+ = \vec{A}_\perp(\vec{r}) + \left[\vec{A}_{\perp P}(\vec{r})\right]_A + \left[\vec{A}_{\perp P}(\vec{r})\right]_B \tag{5.10}$$

- Transformé de $\vec{r}_\alpha$

$$T \vec{r}_\alpha T^+ = \vec{r}_\alpha + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \vec{Z}(\vec{R}_\alpha) \qquad (\alpha = A, B) \tag{5.11}$$

Nouvel hamiltonien

- D'après (5.1-4), (5.10) et (5.11)

$$\begin{aligned} H^{(2)} &= T H^{(1)} T^+ \\ &= \sum_\alpha \frac{1}{2m_\alpha}\left[\vec{p}_\alpha - q_\alpha \vec{A}_\perp(\vec{R}_\alpha) - q_\alpha \left(\vec{A}_{\perp P}(\vec{R}_\alpha)\right)_A - q_\alpha \left(\vec{A}_{\perp P}(\vec{R}_\alpha)\right)_B\right]^2 \\ &\quad + \sum_\alpha \varepsilon^\alpha_{Coul} + \sum_\alpha V_e(\vec{r}_\alpha + \vec{\xi}_\alpha) + V_{AB}^{Coul}(\vec{r}_A + \vec{\xi}_A - \vec{r}_B - \vec{\xi}_B) \\ &\quad + \int_< d^3k \sum_{\vec{\varepsilon}} \hbar\omega \left\{\left[a^+_\varepsilon(\vec{k}) + \left(\beta^+_\varepsilon(\vec{k})\right)_A + \left(\beta^+_\varepsilon(\vec{k})\right)_B\right]\left[a_\varepsilon(\vec{k}) + \left(\beta_\varepsilon(\vec{k})\right)_A + \left(\beta_\varepsilon(\vec{k})\right)_B\right] + \frac{1}{2}\right\} \end{aligned} \tag{5.12}$$

- On trouve tout d'abord des (sommes de) termes identiques à ceux trouvés plus haut pour une seule particule, les uns pour A les autres pour B

- Termes "croisés" nouveaux faisant intervenir à la fois A et B

$$-\frac{q_A}{m_A}\vec{P}_A\cdot\left[\vec{A}_{\perp P}(\vec{R}_A)\right]_B - \frac{q_B}{m_B}\vec{P}_B\cdot\left[\vec{A}_{\perp P}(\vec{R}_B)\right]_A \qquad (5.13)$$

$$\int_< d^3k\,\hbar\omega\sum_{\vec{\varepsilon}}\left\{\left[\beta_\varepsilon^+(\vec{k})\right]_A\left[\beta_\varepsilon(\vec{k})\right]_B + h.c\right\} \qquad (5.14)$$

En utilisant (5.5) et (5.8), on trouve que le terme (5.14) est la moitié de l'opposé du terme (5.13)

Physiquement, (5.13) représente l'interaction de la particule A avec la valeur prise en $\vec{R}_A$ du potentiel vecteur transverse lié à la particule B + $A \rightleftarrows B$

- Somme de (5.13) et (5.14)

$$H'_{AB} = -\frac{1}{2}\frac{q_A q_B}{m_A m_B \varepsilon_0 c^2}\int_< d^3k\sum_{\vec{\varepsilon}}\frac{(\vec{\varepsilon}\cdot\vec{P}_A)(\vec{\varepsilon}\cdot\vec{P}_B)}{k^2}\left[\exp i\vec{k}\cdot(\vec{R}_A-\vec{R}_B) + c.c.\right] \qquad (5.15)$$

- Résultat du calcul de l'intégrale sur $\vec{k}$ et de la somme sur $\vec{\varepsilon}$ (voir détails des calculs page IV-7]

$$H'_{AB} = -\frac{q_A q_B}{8\pi\varepsilon_0 m_A m_B c^2}\left\{\frac{\vec{P}_A\cdot\vec{P}_B}{|\vec{R}_A-\vec{R}_B|} + \frac{\left[\vec{P}_A\cdot(\vec{R}_A-\vec{R}_B)\right]\left[\vec{P}_B\cdot(\vec{R}_A-\vec{R}_B)\right]}{|\vec{R}_A-\vec{R}_B|^3}\right\} \qquad (5.16)$$

Discussion physique

- Retour aux 2 diagrammes 8a et 8b de la page II.4
Amplitude correspondante

$$-2\pi i\,\delta^{(T)}\left(E_{\vec{p}} + E_{\vec{p}'} - E_{\vec{p}-\hbar\vec{k}} - E_{\vec{p}'+\hbar\vec{k}}\right)\ \times$$

(8.a) →
$$\left\{\frac{\langle A,\vec{p}-\hbar\vec{k};B,\vec{p}'+\hbar\vec{k}|H_{I1}^B|A;\vec{p}-\hbar\vec{k};B,\vec{p}';\vec{k}\vec{\varepsilon}\rangle\langle A;\vec{p}-\hbar\vec{k};B,\vec{p}';\vec{k}\vec{\varepsilon}|H_{I1}^A|A,\vec{p};B,\vec{p}'\rangle}{\frac{\vec{p}^2}{2m_A}+\frac{\vec{p}'^2}{2m_B}-\frac{(\vec{p}-\hbar\vec{k})^2}{2m_A}-\frac{\vec{p}'^2}{2m_B}-\hbar\omega}\right.$$

(8.b) →
$$\left.+\frac{\langle A,\vec{p}-\hbar\vec{k};B,\vec{p}'+\hbar\vec{k}|H_{I1}^A|A,\vec{p};B,\vec{p}'+\hbar\vec{k};-\vec{k}\vec{\varepsilon}\rangle\langle A,\vec{p};B,\vec{p}'+\hbar\vec{k};-\vec{k}\vec{\varepsilon}|H_{I1}^B|A,\vec{p};B,\vec{p}'\rangle}{\frac{\vec{p}^2}{2m_A}+\frac{\vec{p}'^2}{2m_A}-\frac{\vec{p}^2}{2m_A}-\frac{(\vec{p}'+\hbar\vec{k})^2}{2m_A}-\hbar\omega}\right\} \qquad (5.17)$$

- Les 2 dénominateurs sont égaux à $-\hbar\omega$, (à des corrections près en $\hbar\omega/m_A c^2$, $\hbar\omega/m_B c^2$, $p/m_A c$, $p'/m_B c \ll 1$)

- 1er numérateur

$$\frac{\hbar}{2\varepsilon_0\omega L^3}(\vec{\varepsilon}\cdot\vec{P}_A)(\vec{\varepsilon}\cdot\vec{P}_B)\exp i\vec{k}\cdot(\vec{R}_B-\vec{R}_A) \qquad (5.18)$$

- 2ème dénominateur

$$\frac{\hbar}{2\varepsilon_0 \omega L^3} (\vec{\varepsilon}\cdot\vec{p}_A)(\vec{\varepsilon}\cdot\vec{p}_B) \exp i\vec{k}.(\vec{R}_A - \vec{R}_B) \qquad (5.19)$$

- En remplaçant dans (5.17) les 2 dénominateurs par $-\hbar\omega$ et en utilisant (5.18) et (5.19), on trouve que (5.17) peut s'écrire sous la forme

$$-2\pi i\, \delta^{(T)}(E_{\vec{p}} + E_{\vec{p}'} - E_{\vec{p}'+\hbar\vec{k}} - E_{\vec{p}-\hbar\vec{k}}) \langle A, \vec{p}-\hbar\vec{k}; B, \vec{p}'+\hbar\vec{k} | H'_{AB} | A, \vec{p}; B, \vec{p}' \rangle \qquad (5.20)$$

où H'_{AB} est donné par (5.15) ou (5.16)

- H'_{AB} représente donc un hamiltonien effectif décrivant le couplage entre les 2 particules lié à l'échange d'un photon transverse entre les 2 particules

Effets magnétiques : interaction courant-courant
+ Effets de retard venant corriger l'interaction de Coulomb instantanée V_{AB}^{Coul}

Démonstration de (5.16)

- $$H'_{AB} = -\frac{q_A q_B}{m_A m_B \varepsilon_0 c^2} \sum_{ij} (p_A)_i (p_B)_j\, S_{ij}(\vec{R}_A - \vec{R}_B) \qquad (5.21)$$

$$S_{ij}(\vec{\rho}) = \int_< \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sum_{\vec{\varepsilon}} \varepsilon_i \varepsilon_j \frac{e^{i\vec{k}.\vec{\rho}}}{k^2} = \int_< \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}\right) \frac{e^{i\vec{k}.\vec{\rho}}}{k^2}$$

$$= \frac{\delta_{ij}}{4\pi\rho} + \frac{\partial}{\partial\rho_i}\frac{\partial}{\partial\rho_j} \int_< \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\vec{k}.\vec{\rho}}}{k^4} \qquad (5.22)$$

- Régularisation de $\frac{1}{k^4}$: $\frac{1}{k^4} \to \frac{1}{(k^2+\eta^2)^2} \qquad \eta \to 0$

$$\frac{\partial}{\partial\rho_i}\frac{\partial}{\partial\rho_j} \int_< \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\vec{k}.\vec{\rho}}}{(k^2+\eta^2)^2} = \frac{\partial}{\partial\rho_i}\frac{\partial}{\partial\rho_j} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{(2\pi)^2} \frac{(-ik)e^{ik\rho}}{\rho(k^2+\eta^2)^2} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial\rho_i}\frac{\partial}{\partial\rho_j} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{(2\pi)^2} \frac{(-ik)e^{ik\rho}}{\rho(k+i\eta)^2(k-i\eta)^2} \qquad (5.23)$$

- Intégration par les résidus

$$\hookrightarrow \quad \frac{\partial}{\partial\rho_i}\frac{\partial}{\partial\rho_j} \left\{ \frac{1}{8\pi\eta} e^{-\eta\rho} \right\} = \frac{\partial}{\partial\rho_i}\frac{\partial}{\partial\rho_j} \left(\frac{1}{8\pi\eta} - \frac{\rho}{8\pi} + O(\eta) \right)$$

$$= \frac{1}{8\pi}\left(-\frac{\delta_{ij}}{\rho} + \frac{\rho_i\rho_j}{\rho^3} \right) \qquad (5.24)$$

- Finalement, on obtient à partir de (5.22), (5.23), (5.24)

$$S_{ij}(\vec{\rho}) = \frac{1}{8\pi}\left(\frac{\delta_{ij}}{\rho} + \frac{\rho_i\rho_j}{\rho^3} \right) \qquad (5.25)$$

Etude de quelques applications de la transformation de Pauli-Fierz

① Rayonnement de freinage d'une charge q_α dans un potentiel extérieur V_e ("Bremsstrahlung")

a) Bilan d'énergie et d'impulsion

b) Amplitude d'émission d'un photon à l'ordre 1 en V_e et 1 en q_α

c) Forme de l'amplitude d'émission pour des photons émis de très basse fréquence.

d) Probabilité d'émission par unité de temps. Section efficace

② Corrections radiatives à la diffusion par un potentiel V_e

a) Identification des termes correctifs à l'ordre 1 en V_e et 2 en q_α

b) Calcul de ces termes correctifs

c) Corrections à la section efficace de diffusion élastique

③ La "catastrophe infrarouge". Etude à l'ordre le plus bas en q_α

a) Divergences à basse fréquence des probabilités de transition calculées plus haut.

b) Reexamen des grandeurs mesurées expérimentalement compte tenu de la sensibilité des détecteurs

c) Disparition des divergences pour les grandeurs significatives expérimentalement.

Bilan d'énergie (potentiel V_e indépendant du temps)

Etat initial Particule $E_1 = \vec{P}_1^{\,2}/2m_\alpha$, $\vec{P}_1$

Etat final Particule $E_2 = \vec{P}_2^{\,2}/2m_\alpha$, $\vec{P}_2$

\+ Photon $\vec{k}\vec{\varepsilon}$ $E = \hbar\omega$ $\vec{p} = \hbar\vec{k}$

Conservation de l'énergie
$$E_1 = E_2 + \hbar\omega \tag{1.1}$$

De (1.1), on déduit, comme E_2 est positif
$$\hbar\omega \leq E_1 \quad\longrightarrow\quad \hbar|\vec{k}| \leq \frac{P_1^2}{2m_\alpha c} = P_1\frac{v_1}{2c} \ll |\vec{P}_1| \tag{1.2}$$

A la limite non relativiste pour les particules, on peut donc négliger l'impulsion du photon devant celle des particules

Bilan d'impulsion

A cause de V_e, il n'y a plus conservation globale de l'impulsion : $\vec{P}_1 \neq \vec{P}_2 + \hbar\vec{k}$

L'impulsion perdue par la particule

$$\vec{P}_1 - \vec{P}_2 = \hbar\vec{\varphi} \qquad (1.3)$$

est encaissée par le potentiel extérieur puisque $\underbrace{\hbar\vec{k}}_{\text{(l'impulsion emportée par le photon)}}$ est négligeable

<u>Illustration sur une figure</u> (à 1 dimension, $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{k}$ étant parallèles ou antiparallèles)

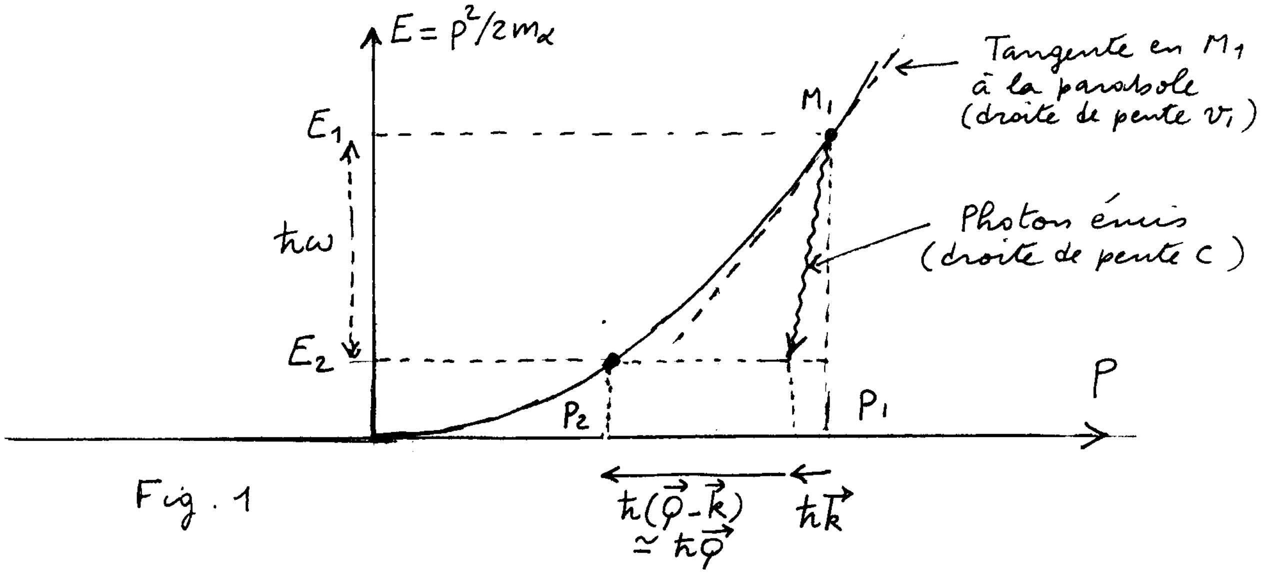


Fig. 1

L'energie perdue par la particule est transformée en rayonnement.

L'impulsion perdue par la particule est pratiquement totalement encaissée par le potentiel puisque l'impulsion du rayonnement émis est négligeable.

Amplitude d'émission d'un photon dans le point de vue Pauli-Fierz

- <u>Hamiltonien d'interaction</u>. Provient de $V_e(\vec{r}_\alpha + \frac{q_\alpha}{m_\alpha}\vec{Z}(\vec{0})) =$

$$V_e(\vec{r}_\alpha + \vec{\xi}_\alpha) = V_e(\vec{r}_\alpha) + \underbrace{\vec{\xi}_\alpha \cdot \vec{\nabla} V_e(\vec{r}_\alpha)}_{H_{I1}^{PF}} + \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{\substack{i\\ =x,y,z}}\sum_{j} \xi_{\alpha i}\xi_{\alpha j}\nabla_i\nabla_j V_e(\vec{r}_\alpha)}_{H_{I2}^{PF}} + \cdots \qquad (1.4)$$

avec
$$\vec{\xi}_\alpha = \frac{q_\alpha}{m_\alpha}\vec{Z}(\vec{0}) \qquad (1.5)$$

- Le terme d'interaction à 1 photon H_{I1}^{PF} du point de vue de Pauli-Fierz relie l'état initial $|\psi_{in}\rangle = |\vec{P}_1; 0\rangle$, d'énergie $E_{in} = E_1$ à l'état final $|\psi_{fin}\rangle = |\vec{P}_2; \vec{k}\vec{\varepsilon}\rangle$ d'énergie $E_2 + \hbar\omega$

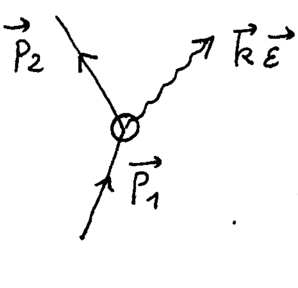


Fig. 2

Le rond symbolise l'élément de matrice de H_{I1}^{PF}

Ordre 1 en V_e et 1 en q_α

- Calcul de l'élément de matrice de H_{I1}^{PF}

$$\langle \vec{p}_2 ; \vec{k}\vec{\varepsilon} \,|\, H_{I1}^{PF} \,|\, \vec{p}_1 ; 0 \rangle = \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \langle \vec{k}\vec{\varepsilon} \,|\, \vec{Z}(\vec{0}) \,|\, 0 \rangle \cdot \langle \vec{p}_2 \,|\, \vec{\nabla} V_e \,|\, \vec{p}_1 \rangle \qquad (1.6)$$

(Etats de la particule et du photon discrétisés dans un cube L^3)

$$\langle \vec{k}\vec{\varepsilon} \,|\, \vec{Z}(\vec{0}) \,|\, 0 \rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0 \omega L^3}} \langle \vec{k}\vec{\varepsilon} \,|\, \frac{\vec{\varepsilon}\cdot a^+_{\vec{k}\vec{\varepsilon}}}{-i\omega} \,|\, 0 \rangle = i \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0 \omega^3 L^3}} \, \vec{\varepsilon} \qquad (1.7)$$

$$\langle \vec{p}_2 \,|\, \vec{\nabla} V_e \,|\, \vec{p}_1 \rangle = \int d^3r \, \frac{e^{-i\vec{p}_2\cdot\vec{r}/\hbar}}{\sqrt{L^3}} \vec{\nabla} V_e(\vec{r}) \frac{e^{i\vec{p}_1\cdot\vec{r}/\hbar}}{\sqrt{L^3}} = \frac{1}{L^3} \int d^3r \, e^{i\vec{\varphi}\cdot\vec{r}} \vec{\nabla} V_e(\vec{r}) \qquad (1.8)$$

Or, d'après les propriétés de la transformée de Fourier

$$\int d^3r \, e^{i\vec{\varphi}\cdot\vec{r}} \vec{\nabla} V_e(\vec{r}) = -i\vec{\varphi} \, \mathcal{V}_e(\vec{\varphi}) \qquad (1.9.a)$$

où $\mathcal{V}_e(\vec{\varphi}) = \int d^3r \, e^{i\vec{\varphi}\cdot\vec{r}} V_e(\vec{r})$ (1.9.b)

$$\hookrightarrow \langle \vec{p}_2 \,|\, \vec{\nabla} V_e \,|\, \vec{p}_1 \rangle = -\frac{i}{L^3} \vec{\varphi} \, \mathcal{V}_e(\vec{\varphi}) \qquad (1.10)$$

Finalement

$$\langle \vec{p}_2 ; \vec{k}\vec{\varepsilon} \,|\, H_{I1}^{PF} \,|\, \vec{p}_1 ; 0 \rangle = \frac{1}{L^3} \mathcal{V}_e(\vec{\varphi}) \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0 \omega^3 L^3}} \, \vec{\varepsilon}\cdot\vec{\varphi} \qquad (1.11)$$

- Amplitude de transition (associée au processus de la figure 2)

$$\mathcal{A}(\vec{p}_1 \to \vec{p}_2 + \vec{k}\vec{\varepsilon}) = -2\pi i \, \delta^{(T)}(E_1 - E_2 - \hbar\omega) \frac{1}{L^3} \mathcal{V}_e(\vec{\varphi}) \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0 \omega^3 L^3}} \, \vec{\varepsilon}\cdot\vec{\varphi} \qquad (1.12)$$

Remarque. Le calcul peut être aussi fait dans le point de vue de Coulomb. On peut vérifier que les termes d'ordre 2 du développement de Born, associés aux 2 diagrammes 6a et 6b de la page II-3, redonnent bien l'amplitude (1.12). Mais il faut alors faire un calcul d'ordre 2 alors que le point de vue de Pauli-Fierz permet ici d'obtenir le résultat dès l'ordre 1.

Limite des très basses fréquences ($\hbar\omega \ll E_1$)

- Si le photon émis a une fréquence ω très faible devant $E_1/\hbar$

$$E_2 = E_1 - \hbar\omega \simeq E_1 \qquad (1.13)$$

et par suite

$$|\vec{p}_2| \simeq |\vec{p}_1| \qquad (1.14)$$

Pour une direction donnée $\vec{n}_2 = \vec{p}_2/p_2$ de la particule diffusée, on peut alors considérer que $\vec{p}_1 - \vec{p}_2 = \hbar\vec{\varphi}$ ne dépend plus du photon $\vec{k}\vec{\varepsilon}$ émis et a la même valeur que pour une diffusion purement élastique (sans émission de photons)

Pour $\vec{p}_1$ et $\vec{n}_2 = \vec{p}_2/p_2$ fixés

$$(\vec{\varphi})_{\substack{\text{inélastique} \\ \text{avec } \hbar\omega \ll E_1}} \simeq (\vec{\varphi})_{\text{élastique}} \simeq \frac{\vec{p}_1 - \vec{p}_2}{\hbar} \qquad (1.15)$$

- Or l'amplitude de diffusion élastique $\vec{P_1} \to \vec{P_2}$ vaut à l'ordre 1 en V_e et 0 en q_α

$$\mathcal{A}_{el}^{(0)}(\vec{P_1} \to \vec{P_2}) = -2\pi i\, \delta^{(T)}(E_2 - E_1) \langle \vec{P_2} | V_e | \vec{P_1} \rangle$$
$$= -2\pi i\, \delta^{(T)}(E_2 - E_1) \frac{1}{L^3} \mathcal{V}_e(\vec{\varphi}_{el}) \qquad (1.16)$$

- Comparons alors (1.12) et (1.16). Si $\hbar\omega$ est suffisamment faible, on peut négliger la différence entre $\delta^{(T)}(E_1 - E_2 - \hbar\omega)$ et $\delta^{(T)}(E_1 - E_2)$, de même que la différence entre $\vec{\varphi} = (\vec{\varphi})_{inel}$ qui figure dans (1.12) et $\vec{\varphi}_{el}$ qui figure dans (1.16). On obtient alors

Si $\hbar\omega \ll E_1$

$$\mathcal{A}(\vec{P_1} \to \vec{P_2} + \vec{k}\vec{\varepsilon}) = \mathcal{A}_{el}^{(0)}(\vec{P_1} \to \vec{P_2})\; q_\alpha\, \eta_1(\vec{k}, \vec{\varepsilon}) \qquad (1.17)$$

où

$$q_\alpha\, \eta_1(\vec{k}, \vec{\varepsilon}) = \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0 \omega^3 L^3}}\; \vec{\varepsilon} \cdot \vec{\varphi}_{el} \qquad (1.18)$$

Ainsi, l'amplitude d'émission d'un photon de très basse fréquence, la particule passant de $\vec{P_1}$ à $\vec{P_2}$ est proportionnelle à l'amplitude de diffusion élastique $\vec{P_1} \to \vec{P_2}$ calculée à l'ordre 0 en q_α. (particule soumise au seul potentiel V_e)

Probabilité de transition $\vec{P_1} \to \vec{P_2} + \vec{k}\vec{\varepsilon}$ par unité de temps

- $$[\delta^{(T)}(E_{in} - E_{fin})]^2 = \frac{1}{\pi^2} \frac{\sin^2 (E_{in} - E_{fin}) T/2\hbar}{(E_{in} - E_{fin})^2} \simeq \frac{T}{2\pi\hbar} \delta^{(T)}(E_{in} - E_{fin}) \qquad (1.19)$$

- $$W(\vec{P_1} \to \vec{P_2} + \vec{k}\vec{\varepsilon}) = \frac{|\mathcal{A}(\vec{P_1} \to \vec{P_2} + \vec{k}\vec{\varepsilon})|^2}{T}$$
$$= \frac{2\pi}{\hbar} \delta^{(T)}(E_1 - E_2 - \hbar\omega) \frac{|\mathcal{V}_e(\vec{\varphi})|^2}{L^6} \frac{q_\alpha^2}{m_\alpha^2} \frac{\hbar}{2\varepsilon_0 \omega^3 L^3} (\vec{\varepsilon} \cdot \vec{\varphi})^2 \qquad (1.20)$$

- Sommation sur les états finals du photon
Nombre d'états dans l'angle solide $d\Omega$ autour de $\vec{\kappa} = \vec{k}/k$ et dans l'intervalle $[\omega, \omega + d\omega]$, avec la polarisation $\vec{\varepsilon}$
$$\frac{L^3}{(2\pi)^3} k^2 dk\, d\Omega = \frac{L^3}{(2\pi)^3} \frac{1}{c^3} \omega^2 d\omega\, d\Omega \qquad (1.21)$$

- Sommation sur les états finals de la particule
$E_2 = p_2^2/2m_\alpha \qquad m_\alpha dE_2 = p_2 dp_2$
Nombre d'état dans l'angle solide $d\Omega_2$ autour de $\vec{n}_2 = \vec{P_2}/p_2$ et dans l'intervalle d'énergie $[E_2, E_2 + dE_2]$
$$\frac{L^3}{(2\pi)^3} k_2^2 dk_2\, d\Omega_2 = \frac{L^3}{(2\pi\hbar)^3} p_2^2 dp_2\, d\Omega_2 = \frac{L^3}{(2\pi)^3} \frac{m_\alpha p_2}{\hbar^3} dE_2\, d\Omega_2 \qquad (1.22)$$

- Probabilité de transition par unité de temps pour que la particule soit diffusée dans dE_2, $d\Omega_2$ avec émission d'un photon de polarisation $\vec{\varepsilon}$ dans $d\omega$, $d\Omega$.
  Intégrale de $W(\vec{p}_1 \to \vec{p}_2 + \vec{k}\vec{\varepsilon})$ dans le volume correspondant : La fonction $\delta^{(T)}$ fait disparaître l'intégrale sur E_2 à condition de remplacer E_2 par $E_1 - \hbar\omega$. Il vient

$$dW(\vec{p}_1 \to \vec{p}_2 + \vec{k}\vec{\varepsilon}) =$$
$$= \frac{2\pi}{\hbar} \frac{|\mathcal{V}_e(\vec{\rho})|^2}{L^6} \frac{q_\alpha^2}{m_\alpha^2} \frac{\hbar}{2\varepsilon_0 \omega^3 L^3} (\vec{\varepsilon}\cdot\vec{\rho})^2 \frac{L^3 m_\alpha p_2}{(2\pi)^3 \hbar^3} \frac{L^3}{(2\pi)^3} \frac{1}{c^3} \omega^2 d\Omega_2 d\omega d\Omega \qquad (1.23)$$

c'est à dire encore

$$dW(\vec{p}_1 \to \vec{p}_2 + \vec{k}\vec{\varepsilon}) = \frac{\mathcal{C}}{L^3} \frac{q_\alpha^2}{m_\alpha} (\vec{\varepsilon}\cdot\vec{\rho})^2 |\mathcal{V}_e(\vec{\rho})|^2 p_2 \frac{d\omega}{\omega} d\Omega d\Omega_2 \qquad (1.24)$$

où
$$\mathcal{C} = \frac{1}{(2\pi)^5} \frac{1}{2\varepsilon_0 \hbar^3 c^3} \qquad (1.25)$$

Section efficace différentielle de diffusion avec émission d'un photon $\vec{k}\vec{\varepsilon}$

- Flux incident $\qquad \phi_{inc} = \dfrac{p_i}{m_\alpha} \dfrac{1}{L^3}$ $\qquad (1.26)$

- Section efficace

$$d\sigma(\vec{p}_1 \to \vec{p}_2 + \vec{k}\vec{\varepsilon}) = \frac{dW(\vec{p}_1 \to \vec{p}_2 + \vec{k}\vec{\varepsilon})}{\phi_{inc}}$$
$$= \mathcal{C} q_\alpha^2 (\vec{\varepsilon}\cdot\vec{\rho})^2 |\mathcal{V}_e(\vec{\rho})|^2 \frac{p_2}{p_1} \frac{d\omega}{\omega} d\Omega d\Omega_2 \qquad (1.27)$$

Plus de dépendance en L comme il se doit pour une grandeur physique comme $d\sigma$

- Cas d'une charge $q_\alpha = Zq$ (q charge du proton) diffusée par le potentiel créé par une charge $Z'q$ à l'origine

$$q_\alpha = Zq \qquad (1.28)$$
$$V_e(\vec{r}) = \frac{ZZ'q^2}{4\pi\varepsilon_0 r} \longrightarrow \mathcal{V}_e(\vec{\rho}) = \frac{ZZ'q^2}{\varepsilon_0 \rho^2} \qquad (1.29)$$

$\hookrightarrow$
$$d\sigma(\vec{p}_1 \to \vec{p}_2 + \vec{k}\vec{\varepsilon}) = Z^4 Z'^2 \frac{\alpha^3}{\pi^2} \hbar^2 \frac{[\vec{\varepsilon}\cdot(\vec{p}_1 - \vec{p}_2)]^2}{|\vec{p}_1 - \vec{p}_2|^4} \frac{p_2}{p_1} \frac{d\omega}{\omega} d\Omega d\Omega_2 \qquad (1.30)$$

où $\qquad \alpha = \dfrac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 \hbar c} = \dfrac{1}{137}$

On vérifie que $d\sigma$ est bien homogène à 1 surface

Diffusion élastique $\vec{P}_1 \to \vec{P}_2$ (sans émission de photons)

- Revenons à (1.4)

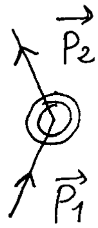
- $V_e(\vec{r}_\alpha)$ relie l'état initial $|\vec{P}_1;0\rangle$ à l'état final $|\vec{P}_2;0\rangle$

↳ Amplitude de diffusion à l'ordre 1 en V_e et 0 en q_α déjà calculée en (1.16)

- H_{I1}^{PF} relie $|\vec{P}_1;0\rangle$ à $|\vec{P}_2;0\rangle$ au 2ème ordre (création d'un photon $\vec{k}\vec{\varepsilon}$ puis absorption de ce photon)

  A l'ordre 1 en V_e, H_{I1}^{PF} n'intervient donc pas

- H_{I2}^{PF} relie directement $|\vec{P}_1;0\rangle$ à $|\vec{P}_2;0\rangle$



Le double rond symbolise H_{I2}^{PF}

Seul terme d'ordre 1 en V_e et 2 en q_α

Fig. 3

Remarque Dans le point de vue de Coulomb, les termes correctifs à l'ordre 1 en V_e et 2 en q_α sont plus compliqués à calculer. 3 diagrammes (si on néglige la polarisation du vide et les créations de paires $e^+ - e^-$, ce que nous faisons ici aussi)

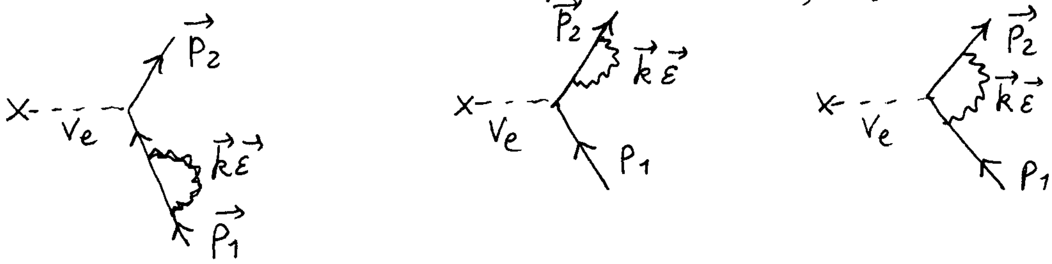


Fig. 4

3 diagrammes avec 3 vertex alors que dans le point de vue de Pauli-Fierz, 1 seul diagramme avec 1 seul vertex.

Calcul des termes correctifs

Calcul de $\langle\vec{P}_2;0|\,H_{I2}^{PF}\,|\vec{P}_1;0\rangle$

$$\langle\vec{P}_2;0|\,H_{I2}^{PF}\,|\vec{P}_1;0\rangle = \frac{1}{2}\frac{q_\alpha^2}{m_\alpha^2}\sum_{\substack{i,j\\ =x,y,z}} \langle\vec{P}_2;0|\,Z_i(\vec{0})Z_j(\vec{0})\nabla_i\nabla_j V_e(\vec{r}_\alpha)|\vec{P}_1;0\rangle \quad (2.1)$$

$$\langle\vec{P}_2|\nabla_i\nabla_j\, V_e(\vec{r}_\alpha)|P_1\rangle = i\,\varphi_i\, i\,\varphi_j\,\langle\vec{P}_2|\,V_e(\vec{r}_\alpha)\,|\vec{P}_1\rangle = -\frac{1}{L^3}\mathcal{V}_e(\vec{\varphi})\,\varphi_i\varphi_j \quad (2.2)$$

$$\langle 0|\,Z_i(\vec{0})Z_j(\vec{0})|0\rangle = \sum_{\vec{k}\vec{\varepsilon}}\frac{\hbar}{2\varepsilon_0\omega L^3}\,\frac{1}{\omega^2}\,\varepsilon_i\,\varepsilon_j \quad (2.3)$$

$$\hookrightarrow\quad \langle\vec{P}_2;0|\,H_{I2}^{PF}|\vec{P}_1;0\rangle = -\frac{1}{L^3}\mathcal{V}_e(\vec{\varphi})\sum_{\vec{k}\vec{\varepsilon}}\frac{\hbar}{2\varepsilon_0\omega^3L^3}(\vec{\varepsilon}\cdot\vec{\varphi})^2\,\frac{q_\alpha^2}{2m_\alpha^2} \quad (2.4)$$

Amplitude de diffusion $P_1 \to P_2$ à l'ordre 1 en V_e et à l'ordre 2 inclus en q_α

$$\mathcal{A}(\vec{P}_1\to\vec{P}_2) = -2\pi i\,\delta^{(T)}(E_1-E_2)\,\langle\vec{P}_2;0|\,V_e(\vec{r}_\alpha) + H_{I2}^{PF}\,|P_1;0\rangle \quad (2.5)$$

A partir de (1.16) et de (2.4), on obtient

$$\mathcal{A}(\vec{P}_1 \to \vec{P}_2) = -2\pi i\, \delta^{(T)}(E_1 - E_2) \frac{\mathcal{V}_e(\vec{\varphi})}{L^3} \left[1 - \frac{q_\alpha^2}{2m_\alpha^2} \sum_{\vec{k}\vec{\varepsilon}} \frac{\hbar}{2\varepsilon_0 \omega^3 L^3} (\vec{\varepsilon}\cdot\vec{\varphi})^2 \right] \quad (2.6)$$

Dans (1.16), $\vec{\varphi} = \vec{P}_1 - \vec{P}_2 = \vec{\varphi}_{el}$ est le même qu'ici. On peut donc écrire

$$\mathcal{A}(\vec{P}_1 \to \vec{P}_2) = \mathcal{A}^{(0)}_{el}(\vec{P}_1 \to \vec{P}_2)\ f(\vec{\varphi}) \quad (2.7)$$

où
$$f(\vec{\varphi}) = 1 - \frac{q_\alpha^2}{2m_\alpha^2} \sum_{\vec{k}\vec{\varepsilon}} \frac{\hbar}{2\varepsilon_0 \omega^3 L^3} (\vec{\varepsilon}\cdot\vec{\varphi})^2 \quad (2.8)$$

est un "facteur de forme" qui vient corriger l'amplitude de diffusion élastique calculée à l'ordre 0 en q_α (et toujours à l'ordre 1 en V_e)

Ce facteur de forme diffère de 1 par un terme en q_α^2 décrivant les corrections radiatives en $\alpha = q^2/4\pi\varepsilon_0\hbar c$

Corrections à la section efficace

Les amplitude $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}^{(0)}_{el}$ diffèrent d'après (2.7) d'un facteur $f(\vec{\varphi})$. On en déduit que les sections efficaces $d\sigma$ (ordre 1 en V_e et 2 inclus en q_α) et $d\sigma^{(0)}_{el}$ (ordre 1 en V_e et 0 en q_α) diffèrent d'un facteur $|f(\vec{\varphi})|^2$

$$d\sigma(\vec{P}_1 - \vec{P}_2) = d\sigma^{(0)}_{el}(\vec{P}_1 \to \vec{P}_2)\ |f(\vec{\varphi})|^2 \quad (2.9)$$

A l'ordre 2 inclus en q_α, on a

$$|f(\varphi)|^2 \simeq 1 - \frac{q_\alpha^2}{m_\alpha^2} \sum_{\vec{k}\vec{\varepsilon}} \frac{\hbar}{2\varepsilon_0 \omega^3 L^3} (\vec{\varepsilon}\cdot\vec{\varphi})^2$$
$$= 1 - q_\alpha^2 \sum_{\vec{k}\vec{\varepsilon}} |\eta_1(\vec{k}, \vec{\varepsilon})|^2 \quad (2.10)$$

où η_1 est donné en (1.18)

Les corrections radiatives diminuent donc la section efficace de diffusion élastique

---

Divergences des probabilités de transition aux basses fréquences

- D'après (1.24), la probabilité par unité de temps d'émission d'un photon $\hbar\omega$, $dW(\vec{P}_1 \to \vec{P}_2 + \vec{k}\vec{\varepsilon})$ dans l'intervalle $d\omega$, varie en $d\omega/\omega$

  La probabilité d'émission d'un photon $\omega \geqslant \delta$ diverge donc en $\mathrm{Log}\,\delta$ quand $\delta \to 0$

- De même, le calcul de $\sum_{\vec{k}\vec{\varepsilon}}$ dans la 1ère ligne de (2.10) fait apparaître dans le terme correctif $|f(\varphi)|^2$ des probabilités de transition une divergence logarithmique vis à vis de la borne inférieure de l'intégrale sur k.

Reexamen des grandeurs mesurées expérimentalement

– Si $\hbar\omega$ est plus petit que la sensibilité dE du détecteur mesurant l'énergie E_2 de la particule diffusée, la mesure de E_2 ne permettra pas de savoir si un photon très mou a été émis ou non au cours de la diffusion.

↳ La grandeur mesurée est donc en fait la probabilité pour que la particule ait été diffusée de $\vec{P_1}$ à $\vec{P_2}$ avec émission de 0 ou 1 (ou 2 ou 3...) photons très mous ($\hbar\omega < dE$)

– Dans le calcul d'ordre 2 en q_α fait ici, il faut donc ajouter les probabilités de diffusion avec émission de 0 ou 1 photon

$$W_{\text{mesuré}}(\vec{P_1}\to\vec{P_2}) = \frac{1}{T}\left[|\mathcal{A}(\vec{P_1}\to\vec{P_2})|^2 + \sum_{\substack{\vec{k}\vec{\varepsilon} \\ \omega\leq\omega_m \simeq dE/\hbar}} |\mathcal{A}(\vec{P_1}\to\vec{P_2}+\vec{k}\vec{\varepsilon})|^2\right] \qquad (3.1)$$

Disparition des divergences à l'ordre 2 en q_α

– Comme ω est très petit dans le dernier terme de (3.1), on peut utiliser (1.17) qui montre que ce dernier terme est proportionnel à $|\mathcal{A}^{(0)}_{el}(\vec{P_1}\to\vec{P_2})|^2$. Il en est de même pour le premier d'après (2.7). On peut donc mettre en facteur dans (3.1) $|\mathcal{A}^{(0)}_{el}(\vec{P_1}\to\vec{P_2})|^2/T$ qui n'est autre que la probabilité de transition par unité de temps $W^{(0)}_{el}(\vec{P_1}\to\vec{P_2})$ calculée à l'ordre 0 en q_α.

On obtient ainsi, compte tenu de (1.17), (1.18), (2.7) et (2.10)

$$W_{\text{mesuré}}(\vec{P_1}\to\vec{P_2}) = W^{(0)}_{el}(\vec{P_1}\to\vec{P_2}) \times$$
$$\left[1 - q_\alpha^2 \sum_{\vec{k}\vec{\varepsilon}} |\eta_1(\vec{k},\vec{\varepsilon})|^2 + q_\alpha^2 \sum_{\substack{\vec{k}\vec{\varepsilon} \\ \omega\leq\omega_m\simeq dE/\hbar}} |\eta_1(\vec{k},\vec{\varepsilon})|^2\right] \qquad (3.2)$$

Les divergences logarithmiques aux bornes inférieures des 2 sommes ~~sur~~ $\vec{k}\vec{\varepsilon}$ qui apparaissent dans (3.2) se compensent exactement.

Il n'y a plus de divergence infrarouge sur $W_{\text{mesuré}}$.

La diminution de la section efficace de diffusion élastique due aux corrections radiatives provenant des modes basse fréquence compense exactement la section efficace de diffusion avec émission d'un photon appartenant à ces modes basse fréquence.

Etude de quelques applications de la transformation de Pauli-Fierz (suite

④ La "catastrophe infrarouge" - Etude à tous les ordres en q_α

a) Amplitude de transition à l'ordre 1 en V_e et à tous les ordres en q_α.

b) Séparation des modes en 2 catégories

c) Approximation sur les amplitudes d'émission.

d) Calcul de grandeurs significatives expérimentalement. Disparition de toute divergence infrarouge.

e) Valeur moyenne de l'énergie rayonnée à basse fréquence

Appendice : Utilisation de $T' = \exp\left[\frac{i}{\hbar}\frac{q_\alpha}{m_\alpha^*}\vec{p}_\alpha\cdot\vec{Z}(\vec{0})\right]$ plutot que $T = \exp\left[\frac{i}{\hbar}\frac{q_\alpha}{m_\alpha}\vec{p}_\alpha\cdot\vec{Z}(\vec{0})\right]$ - Motivations de ce changement et intérêt pour un calcul à tous les ordres en q_α.

Amplitudes de transition

Autre écriture de $V_e(\vec{r}_\alpha + \vec{\xi}_\alpha)$

D'après (1.9.a) $$v_e(\vec{k}) = \int d^3r\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\, V_e(\vec{r}) \tag{4.1.a}$$

$$\hookrightarrow \quad V_e(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3k\, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}\, v_e(\vec{k}) \tag{4.1.b}$$

Comme $\vec{r}_\alpha$ et $\vec{\xi}_\alpha = \frac{q_\alpha}{m_\alpha}\vec{Z}(\vec{0})$ commutent,

$$V_e(\vec{r}_\alpha+\vec{\xi}_\alpha) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3k\, e^{-i\vec{k}\cdot(\vec{r}_\alpha+\vec{\xi}_\alpha)}\, v_e(\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3k\, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}_\alpha}\, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{\xi}_\alpha}\, v_e(\vec{k}) \tag{4.2}$$

Amplitude de probabilité à l'ordre 1 en V_e et à tous les ordres en q_α pour que la particule soit diffusée de $\vec{p}_1$ à $\vec{p}_2 = \vec{p}_1 - \hbar\vec{\varphi}$ avec émission de .... n_i photons du mode i $(\vec{k}_i\vec{\varepsilon}_i)$ ... n_j photons du mode j

Etat initial $$|\psi_{in}\rangle = |\vec{p}_1; \cdots 0_i \cdots 0_j \cdots\rangle = |\vec{p}_1; \{0_i\}\rangle \tag{4.3}$$

Etat final $$|\psi_{fin}\rangle = |\vec{p}_2; \cdots n_i \cdots n_j \cdots\rangle = |\vec{p}_2; \{n_i\}\rangle \tag{4.4}$$

$$\vec{p}_1 - \vec{p}_2 = \hbar\vec{\varphi} \tag{4.5.a}$$

$$E_{in} = E_1 = \vec{p}_1^{\,2}/2m_\alpha \qquad E_{fin} = E_2 + \sum_i n_i\hbar\omega_i = \frac{\vec{p}_2^{\,2}}{2m_\alpha} + \sum_i n_i\hbar\omega_i \tag{4.5.b}$$

$$\mathcal{A}(\vec{p}_1 \to \vec{p}_2 + \{n_i\vec{k}_i\vec{\varepsilon}_i\}) = -2\pi i\, \delta^{(T)}(E_{fin}-E_{in})\, \langle\psi_{fin}|\, V_e(\vec{r}_\alpha+\vec{\xi}_\alpha)\,|\psi_{in}\rangle \tag{4.6}$$

$$< \Psi_{fin} | V_e(\vec{r}_\alpha + \vec{\xi}_\alpha) | \Psi_{in} > = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k < \Psi_{fin} | e^{-i\vec{k}.\vec{r}_\alpha} e^{-i\vec{k}.\vec{\xi}_\alpha} | \Psi_{in} > \mathcal{V}_e(\vec{k}) =$$

$$= \int d^3k \underbrace{\frac{1}{(2\pi)^3} < \vec{P}_2 | e^{-i\vec{k}.\vec{r}_\alpha} | \vec{P}_1 >}_{\frac{1}{L^3}\delta(\vec{\varphi} - \vec{k})} < \{n_i\} | e^{-i\vec{k}.\vec{\xi}_\alpha} | \{0_i\} > \mathcal{V}_e(\vec{k})$$

$$= \frac{\mathcal{V}_e(\vec{\varphi})}{L^3} < \{n_i\} | e^{-i\vec{\varphi}.\vec{\xi}_\alpha} | \{0_i\} > \qquad (4.7)$$

$$\mathcal{A}(\vec{P}_1 \to \vec{P}_2 + \{n_i \vec{k}_i \vec{\varepsilon}_i\}) = -2\pi i \, \delta^{(T)}(E_{fin} - E_{in}) \frac{\mathcal{V}_e(\vec{\varphi})}{L^3} < \{n_i\} | e^{-i\vec{\varphi}.\vec{\xi}_\alpha} | \{0_i\} > \qquad (4.8)$$

<u>2 catégories de modes</u>

- 2 fréquences : ω_m très basse, ω_M très élevée (avec toutefois $k_M |\vec{r}_\alpha| \ll 1$)
- Modes "basse fréquence" repérés avec un indice λ (grec minuscule)
  $$\omega_\lambda \leqslant \omega_m$$
  Modes "haute fréquence" repérés avec un indice Λ (grec majuscule)
  $$\omega_m \leqslant \omega_\Lambda \leqslant \omega_M$$
- On peut distinguer dans le développement en modes du vecteur de Hertz $\vec{Z}(\vec{r})$ les contributions des 2 types de modes

$$\vec{Z}^{b.f}(\vec{r}) = \sum_\lambda \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0 \omega_\lambda L^3}} \left[\vec{\varepsilon}_\lambda \frac{a_\lambda}{i\omega_\lambda} e^{i\vec{k}_\lambda.\vec{r}} - \vec{\varepsilon}_\lambda \frac{a_\lambda^+}{i\omega_\lambda} e^{-i\vec{k}_\lambda.\vec{r}} \right] \qquad (4.9)$$

$$\vec{Z}^{h.f}(\vec{r}) = \sum_\Lambda \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0 \omega_\Lambda L^3}} \left[\vec{\varepsilon}_\Lambda \frac{a_\Lambda}{i\omega_\Lambda} e^{i\vec{k}_\Lambda.\vec{r}} - \vec{\varepsilon}_\Lambda \frac{a_\Lambda^+}{i\omega_\Lambda} e^{-i\vec{k}_\Lambda.\vec{r}} \right] \qquad (4.10)$$

- Comme $\vec{Z}^{b.f}(\vec{0})$ commute avec $\vec{Z}^{h.f}(\vec{0})$,

$$e^{-i\vec{\varphi}.\vec{\xi}_\alpha} = e^{-i\vec{\varphi}.\vec{\xi}_\alpha^{b.f}} e^{-i\vec{\varphi}.\vec{\xi}_\alpha^{h.f}} \qquad (4.11)$$

avec $\vec{\xi}_\alpha^{b.f} = \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \vec{Z}^{b.f}(\vec{0}) \qquad \vec{\xi}_\alpha^{h.f} = \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \vec{Z}^{h.f}(\vec{0}) \qquad (4.12)$

<u>Amplitude de probabilité</u> à l'ordre 1 en V_e et à tous les ordres en q_α pour que la particule soit diffusée de $\vec{P}_1$ à $\vec{P}_2$ avec émission de 0 photon haute fréquence et de ... n_λ photons basse fréquence du mode λ ...

D'après (4.8), (4.11), (4.12)

$$\mathcal{A}(\vec{P}_1 \to \vec{P}_2 + \{0 \vec{k}_\Lambda \vec{\varepsilon}_\Lambda\} + \{n_\lambda \vec{k}_\lambda \vec{\varepsilon}_\lambda\}) = -2\pi i \, \delta^{(T)}(E_1 - E_2 - \sum_\lambda n_\lambda \hbar\omega_\lambda) \times$$

$$\times \frac{\mathcal{V}_e(\vec{\varphi})}{L^3} < \{0_\Lambda\} | e^{-i\vec{\varphi}.\vec{\xi}_\alpha^{h.f}} | \{0_\Lambda\} > < \{n_\lambda\} | e^{-i\vec{\varphi}.\vec{\xi}_\alpha^{b.f}} | \{0_\lambda\} > \qquad (4.13)$$

Dans (4.13), $\hbar\vec{\varphi} = \vec{P}_1 - \vec{P}_2$. Pour $\vec{P}_1$ et $\vec{n}_2 = \vec{P}_2 / P_2$ fixés, $\vec{\varphi}$ est déterminé par la conservation de l'énergie

$$(\vec{P}_1^{\,2} - \vec{P}_2^{\,2}) / 2m_\alpha = \sum_\lambda n_\lambda \hbar\omega_\lambda \qquad (4.14)$$

Donc $\vec{\varphi}$ dépend en principe des $\{n_\lambda\}$

Cependant, comme $\omega_\lambda \leq \omega_m$ et que $\hbar\omega_m$ est très petit, on peut négliger l'énergie $\sum_\lambda n_\lambda \hbar\omega_\lambda$ rayonnée à basse fréquence, ce qui permet d'écrire

$$|\vec{P_1}| \sim |\vec{P_2}| \tag{4.15}$$

et de remplacer dans (4.13) $\vec{\varphi}$ par $\vec{\varphi}_{el}$ correspondant à la diffusion <u>élastique</u> de la particule de $\vec{P_1}$ à $\vec{P_2}$. <u>$\vec{\varphi}_{el}$ est indépendant des $\{n_\lambda\}$</u>.

De plus, comme la fonction $\delta^{(T)}$ de (4.13) agit sur des fonctions lentement variables de l'énergie, on peut la remplacer par $\delta^{(T)}(E_1-E_2)$ puisque $\sum_\lambda n_\lambda \hbar\omega_\lambda$ est négligeable.

Finalement, ces 2 approximations permettent de réécrire (4.13) sous la forme

$$\mathcal{A}(\vec{P_1} \to \vec{P_2} + \{0\, \vec{k}_\Lambda \vec{\varepsilon}_\Lambda\} + \{n_\lambda \vec{k}_\lambda \vec{\varepsilon}_\lambda\}) =$$

$$= \mathcal{A}_{el}(\vec{P_1} \to \vec{P_2} + \{0\, \vec{k}_\Lambda \vec{\varepsilon}_\Lambda\}) \; \langle \{n_\lambda\} | e^{-i\vec{\varphi}\cdot\vec{\xi}_\alpha^{\,b.f}} | \{0_\lambda\} \rangle \tag{4.16}$$

où

$$\mathcal{A}_{el} = -2\pi i\, \delta^{(T)}(E_1-E_2) \, \frac{v_e(\vec{\varphi})}{L^3} \langle \{0_\Lambda\} | e^{-i\vec{\varphi}\cdot\vec{\xi}_\alpha^{\,h.f}} | \{0_\Lambda\} \rangle \tag{4.17}$$

est l'amplitude de diffusion élastique dans V_e, sans émission d'aucun photon haute fréquence et calculée en <u>ignorant</u> complètement les photons basse fréquence.

<u>Remarques</u>

(i) Même si $\hbar\omega_\lambda$ est très petit, $\sum_\lambda n_\lambda \hbar\omega_\lambda$ peut devenir non négligeable si n_λ est suffisamment grand et l'expression (4.16) cesse alors d'être valable. Nous calculerons plus loin (cf § e) la valeur moyenne de l'énergie totale rayonnée à basse fréquence et montrerons qu'elle est très inférieure à $\hbar\omega_m$. Les processus pour lesquels $\sum_\lambda n_\lambda \hbar\omega_\lambda$ n'est pas négligeable ont donc une probabilité extrêmement faible et peuvent être ignorés.

(ii) Le raisonnement conduisant de (4.13) à (4.13) peut être généralisé à des processus au cours desquels des photons haute fréquence peuvent être émis. Ainsi

$$\mathcal{A}(\vec{P_1} \to \vec{P_2} + 1 \text{ photon } \vec{k}_\Lambda \vec{\varepsilon}_\Lambda + \{n_\lambda \vec{k}_\lambda \vec{\varepsilon}_\lambda\}) =$$

$$= \mathcal{A}(\vec{P_1} \to \vec{P_2} + 1 \text{ photon } \vec{k}_\Lambda \vec{\varepsilon}_\Lambda) \; \langle \{n_\lambda\} | e^{-i\vec{\varphi}\cdot\vec{\xi}_\alpha^{\,b.f}} | \{0_\lambda\} \rangle \tag{4.18}$$

où

$$\mathcal{A}(\vec{P_1} \to \vec{P_2} + 1 \text{ photon } \vec{k}_\Lambda \vec{\varepsilon}_\Lambda) = -2\pi i\, \delta^{(T)}(E_1 - E_2 - \hbar\omega_\Lambda) \times$$

$$\times \frac{v_e(\vec{\varphi})}{L^3} \langle \vec{k}_\Lambda \vec{\varepsilon}_\Lambda | e^{-i\vec{\varphi}\cdot\vec{\xi}_\alpha^{\,h.f}} | \{0_\Lambda\} \rangle \tag{4.19}$$

est l'amplitude de diffusion avec émission d'un photon $\vec{k}_\Lambda \vec{\varepsilon}_\Lambda$ calculée en ignorant les photons basse fréquence. Dans (4.18) et (4.19), $\vec{\varphi}$ est défini pour $\vec{P}_1$ et $\vec{n}_2 = \vec{P}_2 / P_2$ fixés par $(P_1^2 - P_2^2)/2m_\alpha = \hbar\omega_\Lambda$.

Grandeurs mesurées expérimentalement

- Compte tenu de la résolution finie en énergie avec laquelle la particule diffusée est observée, on ne peut pas savoir si des photons basse fréquence ont été émis ou non au cours de la diffusion.
La quantité mesurée est donc

$$W_{mesuré} = \sum_{\{n_\lambda\}} W(\vec{p}_1 \to \vec{p}_2 + \{0\vec{k}_\Lambda\vec{\varepsilon}_\Lambda\} + \{n_\lambda \vec{k}_\lambda \vec{\varepsilon}_\lambda\}) \qquad (4.20)$$

où W est la probabilité de transition par unité de temps égale au carré du module de (4.13) divisé par T. En utilisant (4.16), on trouve

$$W(\vec{p}_1 \to \vec{p}_2 + \{0\vec{k}_\Lambda\vec{\varepsilon}_\Lambda\} + \{n_\lambda \vec{k}_\lambda \vec{\varepsilon}_\lambda\}) =$$
$$= W_{el}(\vec{p}_1 \to \vec{p}_2 + \{0\vec{k}_\Lambda\vec{\varepsilon}_\Lambda\}) \, |\langle\{n_\lambda\}| e^{-i\vec{\varphi}.\vec{\xi}_\alpha^{b.f}} |\{0_\lambda\}\rangle|^2 \qquad (4.21)$$

où

$$W_{el} = \frac{1}{T} |\mathcal{A}_{el}(\vec{p}_1 \to \vec{p}_2 + \{0\vec{k}_\Lambda\vec{\varepsilon}_\Lambda\})|^2 \qquad (4.22)$$

est la probabilité de diffusion élastique par unité de temps $\vec{p}_1 \to \vec{p}_2$ sans émission d'aucun photon haute fréquence et calculée en ignorant complètement les modes basse fréquence (à la différence de $W_{el}^{(0)}$ apparaissant en (3.2), W_{el} est maintenant valable à tous les ordres en q_α).

- Compte tenu de (4.20) et (4.21)

$$W_{mesuré}(\vec{p}_1 \to \vec{p}_2 + \{0\vec{k}_\Lambda\vec{\varepsilon}_\Lambda\}) =$$
$$W_{el}(\vec{p}_1 \to \vec{p}_2 + \{0\vec{k}_\Lambda\vec{\varepsilon}_\Lambda\}) \times \sum_{\{n_\lambda\}} |\langle\{n_\lambda\}| e^{-i\vec{\varphi}.\vec{\xi}_\alpha^{b.f}} |\{0_\lambda\}\rangle|^2 \qquad (4.23)$$

Or

$$\sum_{\{n_\lambda\}} |\langle\{n_\lambda\}| e^{-i\vec{\varphi}.\vec{\xi}_\alpha^{b.f}} |\{0_\lambda\}\rangle|^2 =$$
$$\langle\{0_\lambda\}| e^{i\vec{\varphi}.\vec{\xi}_\alpha^{b.f}} \sum_{\{n_\lambda\}} |\{n_\lambda\}\rangle\langle\{n_\lambda\}| \, e^{-i\vec{\varphi}.\vec{\xi}_\alpha^{b.f}} |\{0_\lambda\}\rangle \qquad (4.24)$$

Tous les opérateurs apparaissant dans (4.24) n'agissent que dans le sous espace des photons basse fréquence. Dans ce sous-espace, $\sum_{\{n_\lambda\}} |\{n_\lambda\}\rangle\langle\{n_\lambda\}| = \mathbb{1}$ (relation de fermeture) et la deuxième ligne de (4.24) se réduit à $\langle\{0_\lambda\}|\{0_\lambda\}\rangle = 1$, de sorte que

$$W_{mesuré}(\vec{p}_1 \to \vec{p}_2 + \{0\vec{k}_\Lambda\vec{\varepsilon}_\Lambda\}) = W_{el}(\vec{p}_1 \to \vec{p}_2 + \{0\vec{k}_\Lambda\vec{\varepsilon}_\Lambda\}) \qquad (4.25)$$

La grandeur mesurée expérimentalement peut donc être calculée en ignorant complètement les modes basse fréquence. Elle ne contient plus aucune divergence infrarouge

Un calcul analogue peut être fait à partir des équations (4.18) et (4.19). Il montre qu'on peut ignorer tous les mode basse fréquence pour les grandeurs significatives expérimentalement impliquant l'émission de un (ou plusieurs) photons haute fréquence.

Valeur moyenne de l'énergie rayonnée à basse fréquence

– L'équation (4.21) montre que, si la particule est diffusée élastiquement de $\vec{P}_1$ à $\vec{P}_2$, la probabilité pour qu'elle émette un ensemble $\{n_\lambda\}$ de photons basse fréquence est

$$|\langle\{n_\lambda\}|\,e^{-i\vec{\varphi}\cdot\vec{\xi}_\alpha^{\,b.f}}\,|\{0_\lambda\}\rangle|^2 \qquad (4.26)$$

l'énergie rayonnée dans ce processus étant

$$E_{\{n_\lambda\}} - E_{\{0_\lambda\}} = \sum_\lambda n_\lambda \hbar\omega_\lambda \qquad (4.27)$$

– Energie moyenne rayonnée

$$\langle E_{ray}^{b.f}\rangle = \sum_{\{n_\lambda\}} \left(E_{\{n_\lambda\}} - E_{\{0_\lambda\}}\right) |\langle\{n_\lambda\}|e^{-i\vec{\varphi}\cdot\vec{\xi}_\alpha^{\,b.f}}|\{0_\lambda\}\rangle|^2 =$$

$$= \sum_{\{n_\lambda\}} \langle\{0_\lambda\}|e^{i\vec{\varphi}\cdot\vec{\xi}_\alpha^{\,b.f}}|\{n_\lambda\}\rangle\langle\{n_\lambda\}|\left[H_R^{b.f}, e^{-i\vec{\varphi}\cdot\vec{\xi}_\alpha^{\,b.f}}\right]|\{0_\lambda\}\rangle \qquad (4.28)$$

où

$$H_R^{b.f} = \sum_\lambda \hbar\omega_\lambda\left(a_\lambda^+ a_\lambda + \frac{1}{2}\right) \qquad (4.29)$$

$$\hookrightarrow \quad \langle E_{ray}^{b.f}\rangle = \langle\{0_\lambda\}|\,e^{i\vec{\varphi}\cdot\vec{\xi}_\alpha^{\,b.f}}\, H_R^{b.f}\, e^{-i\vec{\varphi}\cdot\vec{\xi}_\alpha^{\,b.f}} - H_R^{b.f}\,|\{0_\lambda\}\rangle \qquad (4.30)$$

– En utilisant le développement de $\vec{\xi}_\alpha^{\,b.f}$ en a_λ et a_λ^+, on obtient

$$e^{i\vec{\varphi}\cdot\vec{\xi}_\alpha^{\,b.f}} = \exp\left\{\sum_\lambda\left(\gamma_\lambda^* a_\lambda - \gamma_\lambda a_\lambda^+\right)\right\} \qquad (4.31)$$

où

$$\gamma_\lambda = \frac{q_\alpha}{m_\alpha}\sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0\omega_\lambda^3 L^3}}\;\vec{\varepsilon}_\lambda\cdot\vec{\varphi} \qquad (4.32)$$

L'opérateur (4.31) est un opérateur de translation de a_λ et a_λ^+

$$e^{i\vec{\varphi}\cdot\vec{\xi}_\alpha^{\,b.f}}\, a_\lambda\, e^{-i\vec{\varphi}\cdot\vec{\xi}_\alpha^{\,b.f}} = a_\lambda + \gamma_\lambda \qquad (4.33)$$

– L'équation (4.33) et son adjointe, donnent alors pour (4.30)

$$\langle E_{ray}^{b.f}\rangle = \sum_\lambda \hbar\omega_\lambda\gamma_\lambda^*\gamma_\lambda = \sum_\lambda \hbar\omega_\lambda q_\alpha^2 \frac{(\vec{\varepsilon}_\lambda\cdot\delta\vec{v})^2}{2\varepsilon_0\hbar\omega_\lambda^3 L^3} \qquad (4.34)$$

où

$$\delta\vec{v} = \frac{\vec{P}_1 - \vec{P}_2}{m_\alpha} = \frac{\hbar\vec{\varphi}}{m_\alpha} \qquad (4.35)$$

$$\hookrightarrow \quad \langle E_{ray}^{b.f}\rangle = \frac{L^3}{(2\pi)^3}\int_0^{k_m} k^2 dk \int d\Omega \sum_{\vec{\varepsilon}\perp\vec{k}} \frac{q_\alpha^2}{2\varepsilon_0\omega_\lambda^2 L^3}\sum_{i,j}\varepsilon_i\varepsilon_j\,\delta v_i\,\delta v_j \qquad (4.36)$$

$$\int d\Omega \sum_{\vec{\varepsilon}} \varepsilon_i\varepsilon_j = \int d\Omega\left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}\right) = \frac{8\pi}{3}\delta_{ij} \qquad (4.37)$$

$$\hookrightarrow \quad \langle E_{ray}^{b.f}\rangle = \frac{q_\alpha^2}{2\varepsilon_0 c^2}\frac{1}{3\pi^2} k_m (\delta\vec{v})^2 = \frac{2\alpha}{3\pi}\frac{(\delta\vec{v})^2}{c^2}\hbar\omega_m \qquad (4.38)$$

Comme $\alpha = q_\alpha^2/4\pi\varepsilon_0\hbar c = 1/137 \ll 1$ et que $(\delta\vec{v})^2 \ll c^2$, on en déduit que $\langle E_{ray}^{b.f}\rangle \ll \hbar\omega_m$. Il est donc légitime de négliger $\sum_\lambda n_\lambda\hbar\omega_\lambda$ devant E_1 et E_2 dans (4.13)

Remarque

Retour à la formule (1.13) page III.4 donnant la variable normale classique du champ rayonné dans le mode $\vec{k}\vec{\varepsilon}$ par une particule classique diffusée de $\vec{v}_1$ à $\vec{v}_2$ par un potentiel (la réaction du rayonnement émis étant négligeable).

A la limite des très basses fréquences $\omega\tau_c \ll 1$ (où τ_c est le temps de collision), on peut remplacer dans (1.13)

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{\varepsilon}.\vec{\gamma}_\alpha(t')\, e^{i\omega t'} dt' = \int_{t_1}^{t_2} \vec{\varepsilon}.\vec{\gamma}_\alpha(t')\,dt' = \vec{\varepsilon}.(\vec{v}_2-\vec{v}_1) = \vec{\varepsilon}.\delta\vec{v}$$

En reportant alors la valeur de $\alpha_\varepsilon(\vec{k}) = -q_\alpha \vec{\varepsilon}.\delta\vec{v}/\sqrt{2\varepsilon_0 \hbar\omega^3(2\pi)^3}$ dans l'expression de l'énergie du champ classique $\int d^3k \sum_{\vec{\varepsilon}} \hbar\omega\, \alpha_\varepsilon^*(\vec{k})\alpha_\varepsilon(\vec{k})$, et en sommant sur $\vec{k}$ et $\vec{\varepsilon}$ avec $|\vec{k}| < k_m$, on retrouve exactement (4.38)

Le calcul quantique à tous les ordres en q_α présenté ici redonne donc bien le résultat classique en valeur moyenne.

Appendice

1 - Rappels du cours IV

- $$T = \exp\left[\frac{i}{\hbar}\frac{q_\alpha}{m_\alpha}\vec{p}_\alpha.\vec{Z}(\vec{0})\right] \tag{A.1}$$

- $$T\frac{1}{2m_\alpha}\left[\vec{p}_\alpha - q_\alpha\vec{A}_\perp(\vec{0})\right]^2 T^+ = \frac{1}{2m_\alpha}\left[\vec{p}_\alpha - q_\alpha\vec{A}_\perp(\vec{0}) - q_\alpha\vec{A}_{\perp P}(\vec{0})\right]^2$$
$$= \frac{1}{2m_\alpha}\left[\vec{p}_\alpha\left(1-\frac{\delta m_{1\alpha}}{m_\alpha}\right) - q_\alpha\vec{A}_\perp(\vec{0})\right]^2 \tag{A.2}$$

car
$$q_\alpha\vec{A}_{\perp P}(\vec{0}) = \frac{\delta m_{1\alpha}}{m_\alpha}\vec{p}_\alpha \tag{A.3}$$

avec
$$\delta m_{1\alpha} = \frac{q_\alpha^2 k_M}{3\pi^2\varepsilon_0 c^2} \tag{A.4}$$

- $$TH_R T^+ = H_R + \frac{q_\alpha}{m_\alpha}\vec{p}_\alpha.\vec{A}_\perp(\vec{0}) + \frac{\vec{p}_\alpha^{\,2}}{2m_\alpha}\frac{\delta m_{1\alpha}}{m_\alpha} \tag{A.5}$$

2 - Critique du cours IV

- Dans le cours IV, on a négligé dans (A.2) le double produit de $-\frac{\delta m_{1\alpha}}{m_\alpha}\vec{p}_\alpha$ avec $-q_\alpha\vec{A}_\perp(\vec{0})$ avec l'argument que c'est un terme d'ordre 3 en q_α (En effet, d'après (A.4), $\delta m_{1\alpha}$ est d'ordre 2 en q_α).

  Mais ce terme est un terme d'interaction puisqu'y figurent à la fois $\vec{p}_\alpha$ et $\vec{A}_\perp(\vec{0})$. Dans un calcul <u>à tous les ordres en q_α</u>, comme celui fait dans le § 4, il faudrait en tenir compte et considérer l'effet de ce terme en plus de celui de $V_c(\vec{r}_\alpha + \vec{\xi}_\alpha)$

- Notons qu'on a aussi négligé les termes provenant du carré de $-\frac{\delta m_{1\alpha}}{m_\alpha}\vec{p}_\alpha$, qui sont d'ordre 4 en q_α mais ne dépendent que de la particule.

3- Meilleure solutions

- Utilisation de $$T' = \exp\left[\frac{i}{\hbar}\frac{q_\alpha}{m_\alpha^*}\vec{p}_\alpha\cdot\vec{Z}(\vec{0})\right] \qquad (A.6)$$

avec $$m_\alpha^* = m_\alpha + \delta m_{1\alpha} \qquad (A.7)$$

plutôt que (A.1)

- $$T'\frac{1}{2m_\alpha}\left[\vec{p}_\alpha - q_\alpha\vec{A}_\perp(\vec{0})\right]^2 T'^+ = \frac{1}{2m_\alpha}\left[\vec{p}_\alpha\left(1-\frac{\delta m_{1\alpha}}{m_\alpha^*}\right) - q_\alpha\vec{A}_\perp(\vec{0})\right]^2 \qquad (A.8)$$

Le m_α qui apparait dans le crochet de (A.2) ne peut en effet provenir que de T, puisque $\delta m_{1\alpha}$ ne dépend pas de m_α. Pour passer de (A.2) à (A.8), il suffit donc de remplacer à l'intérieur du crochet de (A.2), m_α par m_α^*.

Comme $$1-\frac{\delta m_{1\alpha}}{m_\alpha^*} = \frac{m_\alpha^* - \delta m_{1\alpha}}{m_\alpha^*} = \frac{m_\alpha}{m_\alpha^*} \qquad (A.9)$$

on obtient, sans faire aucune approximation

$$T'\frac{1}{2m_\alpha}\left[\vec{p}_\alpha - q_\alpha\vec{A}_\perp(\vec{0})\right]^2 T'^+ = \frac{\vec{p}_\alpha^{\,2}}{2m_\alpha^*}\frac{m_\alpha}{m_\alpha^*} - \frac{q_\alpha}{m_\alpha^*}\vec{p}_\alpha\cdot\vec{A}_\perp(\vec{0}) + \frac{q_\alpha^2}{2m_\alpha}\vec{A}_\perp^{\,2}(\vec{0}) \qquad (A.10)$$

- De même, comme H_R ne dépend pas de m_α, les m_α qui apparaissent dans (A.5) ne peuvent provenir que de T. Pour passer de TH_RT^+ à $T'H_RT'^+$, il suffit donc de remplacer dans (A.5) m_α par m_α^*

$$T'H_RT'^+ = H_R + \frac{q_\alpha}{m_\alpha^*}\vec{p}_\alpha\cdot\vec{A}_\perp(\vec{0}) + \frac{\vec{p}_\alpha^{\,2}}{2m_\alpha^*}\frac{\delta m_{1\alpha}}{m_\alpha^*} \qquad (A.11)$$

- En ajoutant (A.10) et (A.11) et en notant que le coefficient de $\frac{\vec{p}_\alpha^{\,2}}{2m_\alpha^*}$ est $\frac{m}{m_\alpha^*} + \frac{\delta m_{1\alpha}}{m_\alpha^*} = 1$, on obtient

$$T'\left\{\frac{1}{2m_\alpha}\left[\vec{p}_\alpha - q_\alpha\vec{A}_\perp(\vec{0})\right]^2 + H_R\right\}T'^+ = \frac{\vec{p}_\alpha^{\,2}}{2m_\alpha^*} + H_R + \frac{q_\alpha^2}{2m_\alpha}\vec{A}_\perp^{\,2}(\vec{0}) \qquad (A.12)$$

Aucune approximation n'a été faite dans le calcul. Aucun terme d'interaction n'apparait.

- Les termes d'interaction ne peuvent alors vraiment provenir que de la transformée de $V_e(\vec{r}_\alpha)$

$$T'V_e(\vec{r}_\alpha)T'^+ = V_e(\vec{r}_\alpha + \vec{\xi}'_\alpha) \qquad (A.13)$$

avec $$\vec{\xi}'_\alpha = \frac{q_\alpha}{m_\alpha^*}\vec{Z}(\vec{0}) \qquad (A.14)$$

Tous les calculs du § 4 ne sont donc valables à tous les ordres en q_α que si m_α est remplacé par m_α^* dans $\vec{\xi}_\alpha$.

Diffusion par un potentiel en présence d'un rayonnement laser

① Champ laser décrit comme un champ extérieur

- Hamiltonien de la particule.
- Transformation unitaire
- Hamiltonien transformé
- Diffusion élastique (traitement à l'ordre 1 en V_e et à tous les ordres en q_α)
- Diffusion inélastique avec absorption ou émission stimulée de n photons laser (ordre 1 en V_e, tous les ordres en q_α)

② Description quantique du champ laser

- Amplitude de diffusion à n photons laser
- Raccord avec la théorie semiclassique
- Limite des très basses fréquences - Formule de Kroll - Watson

③ Exemple de résultats expérimentaux.

Introduction

L'absorption et l'émission induite (réelles) de photons incidents sont impossibles pour une particule chargée libre.
Deviennent possibles en présence d'un potentiel qui peut absorber ou fournir de l'impulsion.

Exemples d'application : chauffage d'un plasma par un laser (processus de "Bremsstrahlung inverse").
Chauffage radiofréquence dans un piège de Paul

Hamiltonien d'une particule couplée à un champ laser traité comme un champ extérieur $\vec{A}_e(\vec{r},t)$

- On néglige les couplages avec les autres modes du champ (émission spontanée négligée)
- Approximation des grandes longueurs d'onde

$$\vec{A}_e(\vec{r}_\alpha,t) \longrightarrow \vec{A}_e(\vec{0},t) = A_0 \cos\omega t \ \vec{e}_z \tag{1.1}$$

$$\vec{E}_e(\vec{0},t) = -\dot{\vec{A}}_e(\vec{0},t) = \omega A_0 \sin\omega t \ \vec{e}_z \tag{1.2}$$

$$\vec{Z}_e(\vec{0},t) = -\int^t \vec{A}_e(\vec{0},t')\,dt' = -\frac{A_0}{\omega} \sin\omega t \ \vec{e}_z \tag{1.3}$$

- Hamiltonien dans le point de vue de Coulomb

$$H(t) = \frac{1}{2m_\alpha}\left[\vec{P}_\alpha - q_\alpha \vec{A}_e(\vec{0},t)\right]^2 + V_e(\vec{r}_\alpha) \qquad (1.4)$$

Ne dépend que des variables $\vec{r}_\alpha$ et $\vec{P}_\alpha$ de la particule puisque le champ est traité classiquement

V_e : Potentiel diffuseur.

Transformation unitaire

- Equivalent de la transformation de Pauli-Fierz

$$T(t) = \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\frac{q_\alpha}{m_\alpha}\vec{P}_\alpha \cdot \vec{Z}_e(\vec{0},t)\right\} = \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\vec{P}_\alpha \cdot \vec{\xi}_\alpha(t)\right\} \qquad (1.5)$$

$$\vec{\xi}_\alpha(t) = \frac{q_\alpha}{m_\alpha}\vec{Z}_e(\vec{0},t) = -\frac{q_\alpha A_0}{m_\alpha \omega}\sin\omega t\,\vec{e}_z \qquad (1.6)$$

- Pour se débarrasser du terme en $q_\alpha^2 A_e^2(\vec{0},t)/2m_\alpha$ de (1.4) qui est une fonction classique de t, on peut prendre

$$T(t) = \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\vec{P}_\alpha\cdot\vec{\xi}_\alpha(t)\right\} \times \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\frac{q_\alpha^2}{2m_\alpha}\int^t dt'\,\vec{A}_e^{\,2}(\vec{0},t')\right\} \qquad (1.7)$$

Hamiltonien transformé

$$H'(t) = T(t)\,H(t)\,T^+(t) + i\hbar\left(\frac{dT(t)}{dt}\right)T^+(t) \qquad (1.8)$$

$$T(t)\,\vec{r}_\alpha\,T^+(t) = \vec{r}_\alpha + \vec{\xi}_\alpha(t) \qquad T(t)\,\vec{P}_\alpha\,T^+(t) = \vec{P}_\alpha \qquad (1.9)$$

$$\hookrightarrow\ T(t)\,H(t)\,T^+(t) = \frac{1}{2m_\alpha}\left[\vec{P}_\alpha - q_\alpha\vec{A}_e(\vec{0},t)\right]^2 + V_e(\vec{r}_\alpha + \vec{\xi}_\alpha(t)) \qquad (1.10)$$

$$\frac{d}{dt}T(t) = \left[\frac{i}{\hbar}\vec{P}_\alpha\cdot\dot{\vec{\xi}}_\alpha(t) + \frac{i}{\hbar}\frac{q_\alpha^2}{2m_\alpha}\vec{A}_e^{\,2}(\vec{0},t)\right]T(t) \qquad (1.11)$$

$$\dot{\vec{\xi}}_\alpha(t) = \frac{q_\alpha}{m_\alpha}\dot{\vec{Z}}_e(\vec{0},t) = -\frac{q_\alpha}{m_\alpha}\vec{A}_e(\vec{0},t) \qquad (1.12)$$

$$\hookrightarrow\ i\hbar\left(\frac{dT(t)}{dt}\right)T^+(t) = \frac{q_\alpha}{m_\alpha}\vec{P}_\alpha\cdot\vec{A}_e(\vec{0},t) - \frac{q_\alpha^2}{2m_\alpha}\vec{A}_e^{\,2}(\vec{0},t) \qquad (1.13)$$

$$\hookrightarrow\ H'(t) = \frac{\vec{P}_\alpha^{\,2}}{2m_\alpha} + V_e(\vec{r}_\alpha + \vec{\xi}_\alpha(t)) \qquad (1.14)$$

Développement du nouveau potentiel $V_e(\vec{r}_\alpha + \vec{\xi}_\alpha(t))$ en série de Fourier

$$\mathcal{V}_e(\vec{k}) = \int d^3r\, e^{i\vec{k}.\vec{r}}\, V_e(\vec{r}) \qquad V_e(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3k\, e^{-i\vec{k}.\vec{r}}\,\mathcal{V}_e(\vec{k}) \qquad (1.15)$$

$$V_e(\vec{r}_\alpha + \vec{\xi}_\alpha(t)) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3k\,\mathcal{V}_e(\vec{k})\,e^{-i\vec{k}.\vec{r}_\alpha}\,e^{-i\vec{k}.\vec{\xi}_\alpha(t)} \qquad (1.16)$$

$$\exp(-i\vec{k}.\vec{\xi}_\alpha(t)) = \exp\left(i\frac{q_\alpha}{m_\alpha}\frac{A_0}{\omega}\vec{k}.\vec{e}_z\sin\omega t\right) = \exp\left(i\vec{k}.\vec{\xi}_0\sin\omega t\right) \qquad (1.17)$$

avec

$$\vec{\xi}_0 = \frac{q_\alpha}{m_\alpha}\frac{A_0}{\omega}\vec{e}_z \qquad (1.18)$$

Or
$$e^{i\alpha\sin\varphi} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(\alpha)\, e^{in\varphi} \tag{1.19}$$

$$\hookrightarrow\quad \exp(-i\vec{k}\cdot\vec{\xi}_\alpha(t)) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(\vec{k}\cdot\vec{\xi}_0)\, e^{in\omega t} \tag{1.20}$$

$$\hookrightarrow\quad V_e(\vec{r}_\alpha + \vec{\xi}_\alpha(t)) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tilde{V}_n(\vec{r}_\alpha)\, e^{in\omega t} \tag{1.21}$$

$$\tilde{V}_n(\vec{r}_\alpha) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3k\, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}_\alpha}\, \mathcal{V}_e(\vec{k})\, J_n(\vec{k}\cdot\vec{\xi}_0) \tag{1.22}$$

A l'ordre 1 en V_e, $\tilde{V}_0(\vec{r}_\alpha)$ ne change pas l'énergie de la particule $\rightarrow$ diffusion élastique. Quant à $\tilde{V}_n(\vec{r}_\alpha)e^{in\omega t}$, il change l'énergie de la particule de $n\hbar\omega$ $\rightarrow$ diffusion inélastique avec absorption de n photons.

Diffusion élastique

– Potentiel $V_e(\vec{r})$ créé par une charge q placée en $\vec{O}$

$$V_e(\vec{r}) = \frac{q q_\alpha}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r} \quad\longrightarrow\quad \mathcal{V}_e(\vec{k}) = \frac{q q_\alpha}{\varepsilon_0 k^2} \tag{1.23}$$

–
$$\tilde{V}_0(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3k\, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}\, \frac{q q_\alpha}{\varepsilon_0 k^2}\, J_0(\vec{k}\cdot\vec{\xi}_0) \tag{1.24}$$

La transformée de Fourier $\tilde{\mathcal{V}}_0(\vec{k})$ de $\tilde{V}_0(\vec{r})$ est donc

$$\tilde{\mathcal{V}}_0(\vec{k}) = q q_\alpha \frac{J_0(\vec{k}\cdot\vec{\xi}_0)}{\varepsilon_0 k^2} \tag{1.25}$$

– Soit $\tilde{\rho}_0(\vec{r})$ la distribution de charge donnant naissance au potentiel $\tilde{V}_0(\vec{r})/q_\alpha$. D'après l'équation de Poisson

$$\Delta \frac{\tilde{V}_0(\vec{r})}{q_\alpha} + \frac{\tilde{\rho}_0(\vec{r})}{\varepsilon_0} = 0 \tag{1.26}$$

ce qui donne par transformée de Fourier, en compte tenu de (1.25)

$$\tilde{\rho}_0(\vec{k}) = \varepsilon_0 k^2 \frac{\mathcal{V}_0(\vec{k})}{q_\alpha} = q\, J_0(\vec{k}\cdot\vec{\xi}_0) \tag{1.27}$$

On en déduit $\tilde{\rho}_0(\vec{r})$ par transformée de Fourier inverse

$$\tilde{\rho}_0(\vec{r}) = \frac{q}{(2\pi)^3}\int d^3k\, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}\, J_0(\vec{k}\cdot\vec{\xi}_0) \tag{1.28}$$

c'est à dire en utilisant la T.F. de J_0 et le fait que, d'après (1-18), $\vec{\xi}_0$ est parallèle à $\vec{e}_z$

$$\tilde{\rho}_0(\vec{r}) = q\,\delta(x)\,\delta(y)\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}\dfrac{1}{\sqrt{\xi_0^2 - z^2}} & \text{si } |z| < \xi_0\\ 0 & \text{si } |z| > \xi_0\end{cases} \tag{1.29}$$

– Interprétation physique.

Sous l'effet de l'excitation laser, la particule effectue le mouvement de vibration $-\vec{\xi}_0 \sin\omega t$ (voir (1.6) et (1.18)).

Dans son référentiel au repos, la particule "voit" donc la charge q créant $V_e(\vec{r})$ osciller le long de Oz avec l'amplitude ξ_0.

L'équation (1.29) donne la distribution de charge statique apparente associée à cette charge oscillante. Cette distribution est bien sûr localisée sur Oz. Elle représente la densité de probabilité de trouver la charge q en un point z de l'axe Oz, qui diverge bien sûr aux points de rebroussement $+\xi_0$ et $-\xi_0$ puisque la vitesse de la charge q est nulle en ces points.

Diffusion inélastique $\qquad \vec{P}_1 \to \vec{P}_2 = \vec{P}_1 - \hbar\vec{\varphi}$

- D'après la théorie des perturbations dépendant du temps, l'amplitude de diffusion de $\vec{P}_1$ vers $\vec{P}_2 = \vec{P}_1 - \hbar\vec{\varphi}$ avec absorption de n photons laser vaut

$$\frac{1}{i\hbar} \langle \vec{P}_2 | \tilde{V}_n(\vec{r}_\alpha) | \vec{P}_1 \rangle \int_{-T/2}^{+T/2} dt \; e^{i(E_2 - E_1 - n\hbar\omega)t/\hbar} \qquad (1.30)$$

c'est à dire encore, d'après (1.22)

$$-2\pi i \, \delta^{(T)}(E_2 - E_1 - n\hbar\omega) \, \frac{\tilde{\mathcal{V}}_{-n}(\vec{\varphi})}{L^3} =$$

$$= -2\pi i \, \delta^{(T)}(E_2 - E_1 - n\hbar\omega) \, \frac{\mathcal{V}_e(\vec{\varphi})}{L^3} \, J_{-n}(\vec{\varphi} \cdot \vec{\xi}_0) \qquad (1.31)$$

- Cette formule est valable à l'ordre 1 en $\mathcal{V}_e$ et à tous les ordres en q_α. Les amplitudes des processus d'émission induite s'obtiennent à partir de (1.31) en remplaçant n par $-n$.

- Si $A_0 \to 0$, $\vec{\xi}_0 \to \vec{0}$. Comme $J_n(0)$ s'annule sauf si $n = 0$, on retrouve bien que seule la diffusion élastique subsiste en l'absence de laser.

Description quantique du champ laser

- Retour au cours précédent (pages VI-1 et VI-2)
  Extension de la formule (4.8) à un processus où

$$|\psi_{in}\rangle = |\vec{P}_1 ; \{n_i \vec{k}_i \vec{\varepsilon}_i\}\rangle \qquad |\psi_{fin}\rangle = |\vec{P}_2 ; \{n'_i \vec{k}'_i \vec{\varepsilon}'_i\}\rangle \qquad (2.1)$$

- Amplitude de diffusion

$$\mathcal{A}\left(\vec{P}_1 + \{n_i \vec{k}_i \vec{\varepsilon}_i\} \to \vec{P}_2 + \{n'_i \vec{k}'_i \vec{\varepsilon}'_i\}\right) =$$

$$-2\pi i \, \delta^{(T)}(E_{in} - E_{fin}) \, \frac{\mathcal{V}_e(\vec{\varphi})}{L^3} \langle \{n'_i\} | e^{-i\vec{\varphi}\cdot\vec{\xi}_\alpha} | \{n_i\} \rangle \qquad (2.2)$$

$$E_{in} = E_1 + \sum_i n_i \hbar\omega_i \qquad E_{fin} = E_2 + \sum_i n'_i \hbar\omega'_i \qquad (2.3)$$

$$E_1 = \vec{P}_1^{\,2}/2m_\alpha \qquad E_2 = \vec{P}_2^{\,2}/2m_\alpha \qquad \vec{P}_1 - \vec{P}_2 = \hbar\vec{\varphi} \qquad (2.4)$$

- La formule (2.2) tient compte de tous les modes et des processus aussi bien spontanés que stimulés

- Nous allons supposer maintenant que tous les modes sont vides, dans l'état initial et l'état final, sauf l'un d'entre eux $\vec{k}\vec{\varepsilon}$, qui contient n_1 photons dans l'état initial, n_2 photons dans l'état final. Le processus étudié est donc $\vec{p}_1 + n_1 \vec{k}\vec{\varepsilon} \rightarrow \vec{p}_2 + n_2 \vec{k}\vec{\varepsilon}$

Selon que $n_2 < n_1$ ou $n_2 > n_1$, il y a absorption de $n_1 - n_2$ photons ou émission de $n_2 - n_1$ photons, l'amplitude correspondante étant

$$\mathcal{A}(\vec{p}_1 + n_1 \vec{k}\vec{\varepsilon} \longrightarrow \vec{p}_2 + n_2 \vec{k}\vec{\varepsilon}) =$$

$$-2\pi i\, \delta^{(T)}(E_2 - E_1 - (n_1 - n_2)\hbar\omega)\ \frac{v_e(\vec{\varphi})}{L^3}\ \langle n_2 | e^{-i\vec{\varphi}\cdot\vec{\xi}_\alpha} | n_1 \rangle \qquad (2.5)$$

Dans (2.5), il suffit de ne garder dans $\vec{\xi}_\alpha = q_\alpha \vec{Z}(\vec{0})/m_\alpha$ que la contribution du mode $\vec{k}\vec{\varepsilon}$

$$\vec{\xi}_\alpha = \frac{q_\alpha}{m_\alpha}\sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0 \omega^3 L^3}}\ i(a^+ - a)\,\vec{\varepsilon} \qquad (2.6)$$

a et a^+ étant des notations simplifiées pour $a_{k\varepsilon}$ et $a^+_{k\varepsilon}$.

Raccord avec la théorie semiclassique

- Supposons le mode $\vec{k}\vec{\varepsilon}$ dans un état cohérent $|\alpha\rangle$ (avec α réel). La valeur moyenne du potentiel vecteur libre en $\vec{0}$ s'écrit

$$\langle \alpha | \vec{A}_e(\vec{0},t) | \alpha \rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0 \omega L^3}}\ \vec{\varepsilon}(\alpha e^{-i\omega t} + \alpha e^{i\omega t}) = 2\alpha\sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0 \omega L^3}}\ \vec{\varepsilon}\cos\omega t \qquad (2.7)$$

De même, le nombre moyen $\langle N \rangle$ et la variance $\Delta N = \langle N^2 \rangle - \langle N \rangle^2$ du nombre de photons dans le mode valent

$$\langle N \rangle = \langle \alpha | a^+ a | \alpha \rangle = \alpha^2 \qquad \Delta N = \alpha^2 = \langle N \rangle \qquad (2.8)$$

- Pour faire le raccord avec la théorie semiclassique, nous choisissons α de manière que $\vec{A}_e(\vec{0},t)$ soit égal en valeur moyenne au champ classique (1.1)

$$\langle \alpha | \vec{A}_e(\vec{0},t) | \alpha \rangle = A_0 \cos\omega t\ \vec{e}_z \qquad (2.9)$$

ce qui donne, compte tenu de (2.7)

$$\vec{\varepsilon} = \vec{e}_z \qquad 2\alpha\sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0 \omega L^3}} = A_0 \qquad (2.10)$$

- Seul compte finalement $\alpha/\sqrt{L^3}$ (ou encore $\alpha^2/L^3 = \langle N \rangle / L^3$, c'est à dire la densité d'énergie par unité de volume). On peut faire tendre L^3 et α vers l'infini en gardant $\alpha/\sqrt{L^3}$ constant et donné par (2.10)

Dans l'amplitude (2.5), on peut donc considérer que n_2 et n_1 sont très grands

Calcul de $\langle n_2 | \exp(-i\vec{\varphi}\cdot\vec{\xi}_\alpha) | n_1 \rangle$

- En utilisant (2.6) et (2.10), on obtient

$$-i\vec{\varphi}\cdot\vec{\xi}_\alpha = \frac{q_\alpha}{m_\alpha}\sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0 \omega^3 L^3}}\ (a^+ - a)\ \vec{e}_z\cdot\vec{\varphi} = \frac{q_\alpha}{m_\alpha}\frac{A_0}{2\alpha\omega}(a^+ - a)\ \vec{e}_z\cdot\vec{\varphi} \qquad (2.11)$$

ce qui donne, compte tenu de (1.18)

$$\exp(-i\vec{\varphi}\cdot\vec{\xi}_\alpha) = \exp\left[\frac{\lambda}{2\alpha}(a^+ - a)\right] \qquad (2.12)$$

avec

$$\lambda = \vec{\xi}_0 \cdot \vec{\varphi} \qquad (2.13)$$

- Or, si n_2 et n_1 sont tous deux très grands et proches de $\langle N \rangle$, on peut montrer que (voir référence 7)

$$\langle n_2 | \exp\left[\frac{\lambda}{2\alpha}(a^+ - a)\right] | n_1 \rangle \simeq J_{n_2 - n_1}\left(\frac{2\lambda\sqrt{\langle N \rangle}}{2\alpha}\right) = J_{n_2-n_1}(\lambda) = J_{n_2-n_1}(\vec{\xi}_0 \cdot \vec{\varphi}) \tag{2.14}$$

En reportant (2.14) dans (2.5), on retrouve bien (1.31) puisque $n = n_1 - n_2$ représente le nombre de photons absorbés

<u>Remarque</u>. Avec l'approximation (2.14), qui redonne le résultat de la théorie semiclassique, le spectre de transitions multiphotoniques est symétrique : Comme $J_n^2 = J_{-n}^2$, la probabilité d'absorber n photons est égale à la probabilité d'en émettre n. Avec la forme exacte de la probabilité $|\langle n_2 | \exp(-i\vec{\varphi}\,\vec{\xi}_\alpha) | n_1 \rangle|^2$, un tel résultat n'est plus vrai. Le calcul du § 4e du cours précédent (voir page VI-5) s'applique ici. Il montre que l'énergie moyenne perdue par la particule est égale à l'énergie rayonnée par la particule classique dans le mode $\vec{k}\vec{\varepsilon}$ lorsqu'elle est diffusée de $\vec{p}_1$ à $\vec{p}_2$.

Limite des très basses fréquences - Formule de Kroll et Watson

Hamiltonien

En ne retenant que la contribution du mode $\vec{k}\vec{\varepsilon}$, l'hamiltonien quantique de Pauli-Fierz s'écrit

$$H' = \frac{\vec{P}_\alpha^{\,2}}{2m_\alpha} + H_R + V_e(\vec{r}_\alpha + \vec{\xi}_\alpha) \tag{2.15}$$

(La contribution du mode $\vec{k}\vec{\varepsilon}$ au terme $q_\alpha^2 \vec{A}_\perp^2(\vec{0})/2m_\alpha$ peut être regroupé avec $\hbar\omega a^+a$ pour donner un terme de la forme $\hbar(\omega+\delta)a^+a$, où δ est une correction de fréquence du mode. Nous supposerons désormais δ réinclus dans ω_0).

Développement de Born

- Matrice ($\mathcal{S}$)

$$\mathcal{S}_{21} = \langle \vec{p}_2 ; n_2 | \mathcal{S} | \vec{p}_1 ; n_1 \rangle \tag{2.16}$$

- Matrice de transition ($\mathcal{T}$)

$$\mathcal{S}_{21} = \delta_{21} - 2\pi i\, \delta^{(T)}(E_2 + n_2\hbar\omega - E_1 - n_1\hbar\omega)\, \mathcal{T}_{21} \tag{2.17}$$

$$\mathcal{T}_{21} = \langle \vec{p}_2 ; n_2 | V_e(\vec{r}_\alpha + \vec{\xi}_\alpha) | \vec{p}_1 ; n_1 \rangle +$$

$$+ \sum_{\vec{p}} \sum_n \langle \vec{p}_2 ; n_2 | V_e(\vec{r}_\alpha + \vec{\xi}_\alpha | \vec{p}, n \rangle \frac{1}{E_{\vec{p}_1 n_1} - E_{\vec{p} n} + i\varepsilon} \langle \vec{p}, n | V_e(\vec{r}_\alpha + \vec{\xi}_\alpha) | \vec{p}_1, n_1 \rangle + \cdots \tag{2.18}$$

Terme d'ordre k : k éléments de matrice de $V_e(\vec{r}_\alpha + \vec{\xi}_\alpha)$ séparés par $(k-1)$ dénominateurs d'énergie

$$\left[E_{\vec{p}_1 n_1} - E_{\vec{p} n} + i\varepsilon\right]^{-1} = \left[E_{\vec{p}_1} - E_{\vec{p}} + (n_1 - n)\hbar\omega + i\varepsilon\right]^{-1} \tag{2.19}$$

- Soit $\Delta\omega$ l'intervalle sur lequel les variations de $\mathcal{T}_{21}$ avec ω sont appréciables. Nous allons faire un développement de $\mathcal{T}_{21}$ en puissances de $\omega/\Delta\omega$ ($\Delta\omega$ est supposé grand : Pas de diffusion résonnante)

Terme d'ordre 0 en $\omega/\Delta\omega$ de $\mathcal{C}_{21}$

– Réécrivons le terme d'ordre 2 en V_e de $\mathcal{C}_{21}$ (2ème ligne de (2.18)) en utilisant

$$V_e(\vec{r}_\alpha+\vec{\xi}_\alpha)=\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3k\, e^{-i\vec{k}.\vec{r}_\alpha}\, e^{-i\vec{k}.\vec{\xi}_\alpha}\, \mathcal{V}_e(\vec{k}) \tag{2.20}$$

Il vient

$$\mathcal{C}^{(2)}_{21}=\sum_{\vec{p}}\sum_{n}\int d^3k\int d^3k'\,\frac{\mathcal{V}_e(\vec{k})}{(2\pi)^3}\,\frac{\mathcal{V}_e(\vec{k}')}{(2\pi)^3}\,\frac{1}{E_{\vec{p}_1}-E_{\vec{p}}+(n_1-n)\hbar\omega+i\varepsilon}\times$$
$$\times\, \langle\vec{p}_2|e^{-i\vec{k}'.\vec{r}_\alpha}|\vec{p}\rangle\langle\vec{p}\,|\,e^{-i\vec{k}.\vec{r}_\alpha}|\vec{p}_1\rangle\langle n_2|e^{-i\vec{k}'.\vec{\xi}_\alpha}|n\rangle\langle n|e^{-i\vec{k}.\vec{\xi}_\alpha}|n_1\rangle \tag{2.21}$$

– Dans (2.21), n_1, n_2 et n sont très grands, mais $|n_1-n|$ est de l'ordre de quelques unités. A l'ordre 0 en $\omega/\Delta\omega$, on peut négliger $(n_1-n)\hbar\omega$ dans le dénominateur d'énergie de (2.21). Il est possible alors d'utiliser la relation de fermeture $\sum_n |n\rangle\langle n|=1$ qui fait apparaître $\langle n_2|\exp[-i(\vec{k}+\vec{k}').\vec{\xi}_\alpha]|n_1\rangle$.

Par ailleurs, le produit des 2 éléments de matrice de $e^{-i\vec{k}.\vec{r}_\alpha}$ et $e^{-i\vec{k}'.\vec{r}_\alpha}$ n'est différent de zéro que si $\vec{p}=\vec{p}_1-\hbar\vec{k}$ et $\vec{p}_2=\vec{p}-\hbar\vec{k}'$, ce qui entraîne $\vec{p}_1-\vec{p}_2=\hbar\vec{\varphi}=\hbar(\vec{k}+\vec{k}')$. On peut donc remplacer $\langle n_2|\exp[-i(\vec{k}+\vec{k}').\vec{\xi}_\alpha|n_1\rangle$ par $\langle n_2|\exp(-i\vec{\varphi}.\vec{\xi}_\alpha)|n_1\rangle$ et le sortir des sommes sur $\vec{k}$ et $\vec{k}'$, de sorte que, à l'ordre 0 en $\omega/\Delta\omega$, (2.21) devient

$$\mathcal{C}^{(2)}_{21}=\langle n_2|e^{-i\vec{\varphi}.\vec{\xi}_\alpha}|n_1\rangle\times$$
$$\times\sum_{\vec{p}}\langle\vec{p}_2|\underbrace{\int d^3k'\,\frac{\mathcal{V}_e(\vec{k}')}{(2\pi)^3}\,e^{-i\vec{k}'.\vec{r}_\alpha}}_{V_e(\vec{r}_\alpha)}|\vec{p}\rangle\,\frac{1}{E_{\vec{p}_1}-E_{\vec{p}}+i\varepsilon}\,\langle\vec{p}\,|\underbrace{\int d^3k\,\frac{\mathcal{V}_e(\vec{k})}{(2\pi)^3}\,e^{-i\vec{k}.\vec{r}_\alpha}}_{V_e(\vec{r}_\alpha)}|\vec{p}_1\rangle \tag{2.22}$$

On reconnait dans la 2ème ligne de (2.22) le terme d'ordre 2 en V_e dans le développement de la matrice de transition décrivant la diffusion de la particule (incidente) en l'absence de rayonnement incident.

– La démonstration se généralise à tous les ordres en V_e, le fait de négliger les termes en $\hbar\omega$ au dénominateurs permettant de factoriser les éléments de matrice de $e^{-i\vec{k}.\vec{\xi}_\alpha}$, $e^{-i\vec{k}'.\vec{\xi}_\alpha}$, $e^{-i\vec{k}''.\vec{\xi}_\alpha}$ .... en $\langle n_2|\exp[-i(\vec{k}+\vec{k}'+\vec{k}''+\dots).\vec{\xi}_\alpha]\, n_1\rangle=\langle n_2|\exp(-i\vec{\varphi}.\vec{\xi}_\alpha)|n_1\rangle$. On obtient ainsi, à l'ordre 0 en $\omega/\Delta\omega$, mais à tous les ordres en V_e et q_α

$$\langle\vec{p}_2,n_2|\mathcal{C}|\vec{p}_1,n_1\rangle=\langle n_2|e^{-i\vec{\varphi}.\vec{\xi}_\alpha}|n_1\rangle\langle\vec{p}_2|\mathcal{C}|\vec{p}_1\rangle$$
$$\simeq J_{n_2-n_1}(\vec{\varphi}.\vec{\xi}_0)\,\langle\vec{p}_2|\mathcal{C}|\vec{p}_1\rangle \tag{2.23}$$

où $\langle\vec{p}_2|\mathcal{C}|\vec{p}_1\rangle$ est la matrice de transition en l'absence de laser. Comme $E_{\vec{p}_2}\neq E_{\vec{p}_1}$ si $n_1\neq n_2$, $\langle\vec{p}_2|\mathcal{C}|\vec{p}_1\rangle$ n'est pas sur la couche d'énergie si $\langle\vec{p}_2,n_2|\mathcal{C}|\vec{p}_1,n_1\rangle$ est sur la couche d'énergie et si $n_1\neq n_2$.

Terme d'ordre 1 en $\omega/\Delta\omega$ de $\mathcal{C}_{21}$

– On peut développer les dénominateurs d'énergie (2.19) en puissance de $(n_1-n)\hbar\omega/(E_{\vec{p}_1}-E_{\vec{p}}+i\varepsilon)$, ce qui fait apparaître $(n_1-n)\hbar\omega$ au numérateurs. On peut ensuite remplacer les éléments de matrice de $e^{-i\vec{k}.\vec{\xi}_\alpha}$ ... par des fonctions de Bessel et utiliser la relation

$$\sum_s s\, J_{\ell-s}(x)\, J_s(y) = \frac{\ell y}{x+y}\, J_\ell(x+y) \qquad (2.24)$$

– Il apparait alors que le terme correctif en $\omega/\Delta\omega$, revient à remplacer au second membre de (2.23) $\vec{P_1}$ et $\vec{P_2}$ par $\vec{P_1}+\hbar\vec{\gamma}$ et $\vec{P_2}+\hbar\vec{\gamma}$ où $\vec{\gamma}$, qui est d'ordre 1 en $\omega/\Delta\omega$ et qui est parallèle à $\vec{\xi}_0$, est tel que $E_{\vec{P_1}+\hbar\vec{\gamma}} = E_{\vec{P_2}+\hbar\vec{\gamma}}$ si $E_{\vec{P_1}} + n_1\hbar\omega = E_{\vec{P_2}} + n_2\hbar\omega$

On obtient ainsi à l'ordre 1 inclus en $\omega/\Delta\omega$ et à tous les ordres en q_α et V_e

$$\langle \vec{P_2}, n_2 | \mathcal{C} | \vec{P_1}, n_1 \rangle \simeq J_{n_2-n_1}(\vec{\varphi}.\vec{\xi}_0)\, \langle \vec{P_2}+\hbar\vec{\gamma} | \mathcal{C} | \vec{P_1}+\hbar\vec{\gamma} \rangle \qquad (2.25)$$

C'est la formule de Kroll et Watson (référence 4) qui relie la matrice de transition inélastique à n_1-n_2 photons, à la matrice de transition élastique en l'absence de laser, les 2 matrices de transition étant évaluées sur la couche d'énergie

Pour le calcul d'ordre 2 en $\omega/\Delta\omega$ voir la référence 5.

Exemples de résultats expérimentaux

Figure et légende extraites de la référence 6.

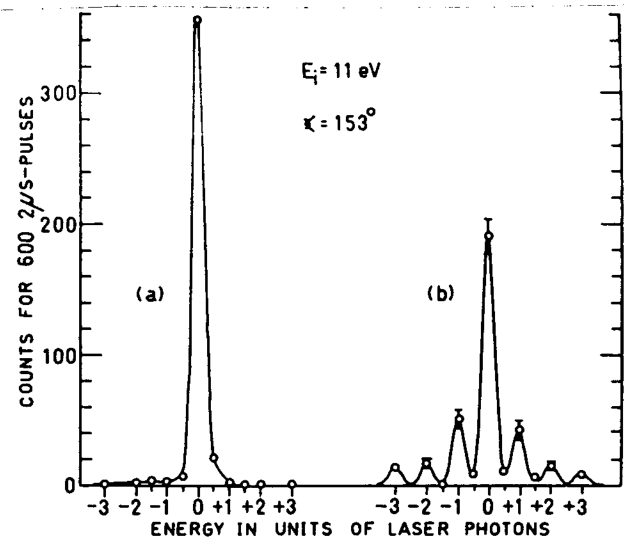


FIG. 1. Energy-loss spectrum of e^--Ar scattering. (a) Without laser field. The circles show the measured experimental points and the estimated outline of the process is drawn with a solid line, which was obtained by tracing out the elastic peak with a ratemeter and scaled to fit the maximum counts. (b) With laser field. The circles with error bars show the measured points and the estimated outline of the multiphoton (emission and absorption) processes are drawn in with solid lines obtained by scaling down the elastic peak as in (a).

Références

1 – W.D. Henneberger, Phys. Rev. Lett. 21, 838 (1968)

2 – Y. Gontier and N.K. Rahman, Lettere al Nuov. Cim. 9, 537 (1974)

3 – C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc et G. Grynberg, "Photons et Atomes, Introduction à l'Electrodynamique quantique", Interéditions et Editions du CNRS (1987), exercice 4 du Complément E_{IV}, p. 346

4 – N.M. Kroll and K.M. Watson, Phys. Rev. A8, 804 (1973)

5 – M.H. Mittleman, Phys. Rev A 19, 134 (1979)

6 – A. Weingartshofer, J.K. Holmes, G. Caudle, E.M. Clarke and H. Krüger, Phys. Rev. Lett. 39, 269 (1977)

7 – N. Polonsky et C. Cohen-Tannoudji, J. de Physique 26, 409 (1965)

Calcul non relativiste du déplacement de Lamb

(1) Points de vue utilisés - Hamiltoniens

(2) Point de vue de Coulomb

- Calcul à l'ordre 2 inclus en q_α.
- Interprétation des divers termes

(3) Point de vue de Pauli-Fierz

- Calcul à l'ordre 2 inclus en q_α
- Discussion physique. Justification de l'image de Welton - Effet des modes basse fréquence

(4) Point de vue de Goppert-Mayer

- Calcul à l'ordre 2 inclus en q_α.
- Interprétation des divers termes. Importance de l'énergie propre dipolaire

---

Hamiltonien de Coulomb (à l'approximation non relativiste et des grandes longueurs d'onde)

$$H_{Coul} = \frac{1}{2m_\alpha}\left[\vec{p}_\alpha - q_\alpha \vec{A}_\perp(\vec{0})\right]^2 + \varepsilon^\alpha_{Coul} + V_e(\vec{r}_\alpha) + H_R$$

$$= H_P + H_R + H_{I1} + H_{I2} \tag{1.1}$$

$$H_P = \frac{\vec{p}_\alpha^{\,2}}{2m_\alpha} + V_e(\vec{r}_\alpha) + \varepsilon^\alpha_{Coul} \qquad \varepsilon^\alpha_{Coul} = \frac{q_\alpha^2 k_M}{4\pi^2\varepsilon_0} \tag{1.2}$$

$$H_{I1} = -\frac{q_\alpha}{m_\alpha}\vec{p}_\alpha\cdot\vec{A}_\perp(\vec{0}) \qquad H_{I2} = \frac{q_\alpha^2}{2m_\alpha}\vec{A}_\perp^{\,2}(\vec{0}) \tag{1.3}$$

Transformation de Göppert-Mayer

$$T_{GM} = \exp\left[-\frac{i}{\hbar} q_\alpha \vec{r}_\alpha\cdot\vec{A}_\perp(\vec{0})\right] \tag{1.4}$$

$$T_{GM} = \exp\left\{\sum_j (\lambda_j^* a_j - \lambda_j a_j^+)\right\} \tag{1.5a}$$

$$\lambda_j = \frac{i}{\sqrt{2\varepsilon_0\hbar\omega_j L^3}}\, q_\alpha\, \vec{\varepsilon}_j\cdot\vec{r}_\alpha \tag{1.5b}$$

$$T_{GM}\,\vec{r}_\alpha\,T_{GM}^+ = \vec{r}_\alpha \qquad T_{GM}\,\vec{p}_\alpha\,T_{GM}^+ = \vec{p}_\alpha + q_\alpha\vec{A}_\perp(\vec{0}) \tag{1.6}$$

$$T_{GM}\,a_j\,T_{GM}^+ = a_j + \lambda_j \qquad T_{GM}\,a_j^+\,T_{GM}^+ = a_j^+ + \lambda_j^* \tag{1.7}$$

T_{GM} est un opérateur de translation pour l'impulsion $\vec{p}_\alpha$ et pour les opérateurs a_j et a_j^+, mais non pour $\vec{r}_\alpha$.
C'est aussi l'opérateur unitaire associé à un changement de jauge

Hamiltonien de Goppert-Mayer ,

$$H_{GM} = T_{GM}\, H_{Coul}\, T_{GM}^{+} = \frac{1}{2m_\alpha}\vec{p}_\alpha^{\,2} + \varepsilon^{\alpha}_{Coul} + V_e(\vec{r}_\alpha) + \sum_j \hbar\omega_j\left[(a_j^+ + \lambda_j^*)(a_j + \lambda_j) + \frac{1}{2}\right] \tag{1.8}$$

$$H_{GM} = H_P + H_R + H'_{I1} + \varepsilon^{\alpha}_{dip} \tag{1.9}$$

$$H'_{I1} = \sum_j \hbar\omega_j\,(\lambda_j a_j^+ + \lambda_j^* a_j) = -\,q_\alpha\,\vec{r}_\alpha\cdot\vec{E}_\perp(\vec{0}) \tag{1.10}$$

$$\varepsilon^{\alpha}_{dip} = \sum_j \hbar\omega_j\,\lambda_j^*\lambda_j = \sum_{\vec{k}\vec{\varepsilon}} \frac{q_\alpha^2}{2\varepsilon_0 L^3}(\vec{\varepsilon}\cdot\vec{r}_\alpha)^2 \tag{1.11}$$

Disparition du terme quadratique en $q_\alpha^2\vec{A}_\perp^2(\vec{0})/2m_\alpha$
Apparition de l'énergie propre dipolaire

Transformation de Pauli-Fierz

$$T_{PF} = \exp\left[\frac{i}{\hbar}\frac{q_\alpha}{m_\alpha^*}\vec{p}_\alpha\cdot\vec{Z}(\vec{0})\right] \tag{1.12}$$

$$T_{PF} = \exp\left[\sum_j \beta_j^* a_j - \beta_j a_j^+\right] \tag{1.13.a}$$

$$\beta_j = \frac{q_\alpha}{m_\alpha^*\sqrt{2\varepsilon_0\hbar\omega^3L^3}}\;\vec{\varepsilon}\cdot\vec{p}_\alpha \tag{1.13.b}$$

$$T_{PF}\,\vec{r}_\alpha\,T_{PF}^+ = \vec{r}_\alpha + \vec{\xi}_\alpha = \vec{r}_\alpha + \frac{q_\alpha}{m_\alpha^*}\vec{Z}(\vec{0}) \qquad T_{PF}\,\vec{p}_\alpha\,T_{PF}^+ = \vec{p}_\alpha \tag{1.14}$$

$$T_{PF}\,a_j\,T_{PF}^+ = a_j + \beta_j \qquad T_{PF}\,a_j^+\,T_{PF}^+ = a_j^+ + \beta_j^* \tag{1.15}$$

Dans (1.12) $\quad m_\alpha^* = m_\alpha + \delta m \qquad \delta m = \dfrac{q_\alpha^2 k_M}{3\pi^2\varepsilon_0 c^2} = \dfrac{4}{3}\dfrac{\varepsilon^\alpha_{Coul}}{c^2}$ (1.16)

T_{PF} est un opérateur de translation pour la position $\vec{r}_\alpha$ et pour les opérateurs a_j et a_j^+, mais non pour $\vec{p}_\alpha$

La transformation T_{PF} n'est pas une transformation de jauge

Hamiltonien de Pauli-Fierz

$$H_{PF} = T_{PF}\,H_{Coul}\,T_{PF}^+$$

$$= \frac{\vec{p}_\alpha^{\,2}}{2m_\alpha^*} + V_e\left(\vec{r}_\alpha + \frac{q_\alpha}{m_\alpha^*}\vec{Z}(\vec{0})\right) + \varepsilon^\alpha_{Coul} + H_R + \frac{q_\alpha^2}{2m_\alpha}\vec{A}_\perp^2(\vec{0}) \tag{1.17}$$

Apparition de la masse corrigée dans l'énergie cinétique
Disparition des termes d'interaction H_{I1} : toute l'interaction est dans $V_e(\vec{r}_\alpha + \vec{\xi}_\alpha)$

Buts de ce cours

Calculer le déplacement de Lamb dans ces 3 points de vue. Les 3 résultats sont bien sur identiques mais les éclairages physiques sont différents

On se limitera au deplacement de Lamb de l'état fondamental $|a\rangle$ de H_P

$$H_P|a\rangle = E_a|a\rangle \tag{1.18}$$

Expression de $(\delta E_a)_{coul}$ (déplacement radiatif de $|a\rangle$ dans le point de vue de Coulomb)

- A l'ordre 2 inclus en q_α, il faut ajouter l'effet de H_{I2} à l'ordre 1 et celui de H_{I1} à l'ordre 2.

$$(\delta E_a)_{coul} = \langle a;0|H_{I2}|a;0\rangle + \sum_b \sum_{k\varepsilon} \frac{|\langle b;\vec{k}\vec{\varepsilon}\,|H_{I1}|a;0\rangle|^2}{E_a - E_b - \hbar\omega} \qquad (2.1)$$

- $$\langle a;0|H_{I2}|a;0\rangle = \frac{q_\alpha^2}{2m_\alpha^2}\langle 0|\vec{A}_\perp^2(\vec{0})|0\rangle = \sum_{\vec{k}\vec{\varepsilon}} \frac{q_\alpha^2}{2m_\alpha}\frac{\hbar}{2\varepsilon_0\omega L^3} = \sum_{\vec{k}\vec{\varepsilon}} \frac{q_\alpha^2\,\mathcal{E}_\omega^2}{2m_\alpha\,\omega^2} \qquad (2.2.a)$$

$$\langle a;0|H_{I2}|a;0\rangle = \delta m_{2\alpha} c^2 \qquad \frac{\delta m_{2\alpha}}{m_\alpha} = \frac{\alpha}{2\pi}\left(\frac{\hbar\omega_M}{m_\alpha c^2}\right)^2 \qquad (2.2.b)$$

(voir page (II-6))

- $$H_{I1} = -\frac{q_\alpha}{m_\alpha}\vec{p}_\alpha\cdot\vec{A}_\perp(\vec{0}) = -\frac{q_\alpha}{m_\alpha}\sum_{\vec{k}\vec{\varepsilon}}\sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0\omega L^3}}(\vec{\varepsilon}\cdot\vec{p}_\alpha)(a_{k\varepsilon} + a^+_{k\varepsilon}) \qquad (2.3)$$

$$\langle b;\vec{k}\vec{\varepsilon}\,|H_{I1}|a;0\rangle = -\frac{q_\alpha}{m_\alpha}\,\vec{\varepsilon}\cdot\vec{p}_{ba}\sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0\omega L^3}} \qquad (2.4.a)$$

$$\vec{p}_{ba} = \langle b|\vec{p}|a\rangle \qquad (2.4.b)$$

- Dernier terme de (2.1)

$$-\frac{L^3}{(2\pi)^3}\sum_b\int_0^{k_M} k^2 dk\int d\Omega\sum_{\vec{\varepsilon}\perp\vec{k}}\frac{q_\alpha^2\hbar}{m_\alpha^2\,2\varepsilon_0\omega L^3}\;\frac{\sum_{i,j=x,y,z}\varepsilon_i\varepsilon_j(p_i)_{ab}(p_j)_{ba}}{\omega+\omega_{ba}} \qquad (2.5)$$

$$\int d\Omega\sum_{\vec{\varepsilon}\perp\vec{k}}\varepsilon_i\varepsilon_j = \int d\Omega\left(\delta_{ij} - \frac{k_ik_j}{k^2}\right) = \frac{8\pi}{3} \qquad (2.6)$$

$$\hookrightarrow\ (2.5) = -\frac{q_\alpha^2}{6\pi^2\varepsilon_0 m_\alpha^2 c^2}\sum_b\sum_i\langle a|p_i|b\rangle\langle b|p_i|a\rangle\int_0^{k_M}\frac{k\,dk}{k+k_{ba}} \qquad (2.7)$$

$$\int_0^{k_M}\frac{k\,dk}{k+k_{ba}} = k_M - k_{ba}\int_0^{k_M}\frac{dk}{k+k_{ba}} = k_M - k_{ba}\,\mathrm{Log}\,\frac{k_M+k_{ba}}{k_{ba}} \simeq k_M - k_{ba}\,\mathrm{Log}\,\frac{k_M}{k_{ba}} \qquad (2.8)$$

- Terme en k_M de (2.5)

$$-\frac{q_\alpha^2}{6\pi^2\varepsilon_0 m_\alpha^2 c^2}k_M\langle a|\vec{p}^{\,2}|a\rangle = -\frac{\delta m_{1\alpha}}{m_\alpha}\langle a|\frac{\vec{p}^{\,2}}{2m_\alpha}|a\rangle \qquad (2.9)$$

- Terme en $\mathrm{Log}\,k_M$ de (2.5)

$$\frac{q_\alpha^2}{6\pi^2\varepsilon_0 m_\alpha^2 c^2}\sum_b\sum_i\langle a|p_i|b\rangle\langle b|p_i|a\rangle\left(\mathrm{Log}\,\frac{K_M}{k_{ba}}\right)\frac{E_b-E_a}{\hbar c} \qquad (2.10)$$

- Introduction du logarithme de Bethe $\mathrm{Log}\,K_0$ défini par

$$\sum_b\sum_i\langle a|p_i|b\rangle\langle b|p_i|a\rangle(\mathrm{Log}\,k_{ba})(E_b-E_a) = \sum_b\sum_i\langle a|p_i|b\rangle\langle b|p_i|a\rangle(\mathrm{Log}\,K_0)(E_b-E_a) \qquad (2.11)$$

$$\hookrightarrow\ (2.5) = \frac{q_\alpha^2}{6\pi^2\varepsilon_0 m_\alpha^2 c^3\hbar}\,\mathrm{Log}\,\frac{K_M}{K_0}\sum_b\sum_i\langle a|p_i|b\rangle\langle b|p_i|a\rangle(E_b-E_a) \qquad (2.12)$$

$$\sum_b\sum_i\langle a|p_i|b\rangle\langle b|p_i|a\rangle(E_b-E_a) = \sum_i\langle a|p_i[H_p,p_i]|a\rangle = -\sum_i\langle a|[H_p,p_i]p_i|a\rangle$$
$$= \frac{1}{2}\langle a|\sum_i[p_i,[H_p,p_i]]|a\rangle = \frac{\hbar^2}{2}\langle a|\Delta V_e(\vec{r}_\alpha)|a\rangle \qquad (2.13)$$

↳ Terme en Log k_M (avec $\alpha = q_\alpha^2/4\pi\varepsilon_0\hbar c$, $\lambda\!\!\!^{-}_c = \hbar/m_\alpha c$)

$$\frac{q_\alpha^2\hbar}{12\pi^2\varepsilon_0 m_\alpha^2 c^3}\,\mathrm{Log}\,\frac{k_M}{k_0}\,\langle a|\Delta V_e|a\rangle = \frac{\alpha}{3\pi}\,\lambda\!\!\!^{-}_c{}^2\,\mathrm{Log}\,\frac{k_M}{k_0}\,\langle a|\Delta V_e|a\rangle \tag{2.14}$$

Récapitulation (2.2.b) + (2.9) + (2.14)

$$(\delta E_a)_{Coul} = \delta m_{2\alpha}c^2 + -\frac{\delta m_{1\alpha}}{m_\alpha}\langle a|\frac{\vec{P}^2}{2m_\alpha}|a\rangle + \frac{\alpha}{3\pi}\lambda\!\!\!^{-}_c{}^2\,\mathrm{Log}\,\frac{k_M}{k_0}\langle a|\Delta V_e|a\rangle \tag{2.15}$$

Discussion physique

- Terme $\delta m_{2\alpha}c^2$: Energie cinétique de vibration de l'électron dans les fluctuations du vide (voir cours II, page II-6)
- Terme $-\frac{\delta m_{1\alpha}}{m_\alpha}\langle a|\frac{\vec{P}^2}{2m_\alpha}|a\rangle$

  Modification de l'energie cinétique due à la correction de masse $\delta m_{1\alpha}$.

  Si on mettait $m_\alpha^* = m_\alpha + \delta m_{1\alpha}$ dans H_P, on n'obtiendrait pas un tel terme.

- Terme en Log $\frac{k_M}{k_0}$: Déplacement de Lamb de $|a\rangle$

  Formule établie la première fois par Bethe

  Moyennage de V_e sur un mouvement de vibration d'amplitude de l'ordre de $\lambda\!\!\!^{-}_c\sqrt{\alpha}\sqrt{\mathrm{Log}(k_M/k_0)}$ où $\lambda\!\!\!^{-}_c$ est la longueur d'onde de Compton et α la constante de structure fine.

Point de vue de Pauli-Fierz

$$V_e(\vec{r}_\alpha+\vec{\xi}_\alpha) = V_e(\vec{r}_\alpha) + \vec{\xi}_\alpha\cdot\vec{\nabla}V_e(\vec{r}_\alpha) + \frac{1}{2}\sum_i\sum_j \xi_{\alpha i}\xi_{\alpha j}\nabla_i\nabla_j V_e(\vec{r}_\alpha) + \cdots ;$$
$$= V_e(\vec{r}_\alpha) + H_{I1}^{PF} + H_{I2}^{PF} + \cdots \tag{2.1}$$

$$H_{I1}^{PF} = \vec{\xi}_\alpha\cdot\vec{\nabla}V_e(\vec{r}_\alpha) = \frac{q_\alpha}{m_\alpha^*}\vec{Z}(\vec{0})\cdot\vec{\nabla}V_e = \frac{q_\alpha}{m_\alpha^*}\sum_i Z_i(0)(\nabla_i V_e) \tag{2.2}$$

$$H_{I2}^{PF} = \frac{q_\alpha^2}{2m_\alpha^{*2}}\sum_i\sum_j Z_i(\vec{0})Z_j(\vec{0})\,\nabla_i\nabla_j V_e \tag{2.3}$$

$V_e(\vec{r}_\alpha)$ se regroupe avec $\frac{\vec{P}^2}{2m_\alpha^*}$ pour donner H_P (avec m_α^* au lieu de m_α)

Pour calculer $(\delta E_a)_{PF}$, il faut calculer l'effet de H_{I2}^{PF} à l'ordre 1 et celui de H_{I1}^{PF} à l'ordre 2 (ainsi que celui du dernier terme de 1.17 à l'ordre 1)

Effet de H_{I2}^{PF} à l'ordre 1 $\qquad \delta E'_a = \langle a;0|\,H_{I2}^{PF}\,|a;0\rangle \quad (2.4)$

$$\delta E'_a = \frac{1}{2}\frac{q_\alpha^2}{m_\alpha^2}\sum_{i,j=x,y,z}\langle 0|Z_i(\vec{0})Z_j(\vec{0})|0\rangle\langle a|\nabla_i\nabla_j V_e(\vec{r}_\alpha)|a\rangle \tag{2.5}$$

$$\langle 0|Z_i(\vec{0})Z_j(\vec{0})|0\rangle = \delta_{ij}\,\frac{1}{3}\,\langle 0|\vec{Z}^2(\vec{0})|0\rangle \tag{2.6}$$

$$\langle 0|\vec{Z}^2(\vec{0})|0\rangle = \sum_{\vec{k}\vec{\varepsilon}} \frac{\hbar}{2\varepsilon_0\omega^3L^3}\,\vec{\varepsilon}^{\,2} = \frac{L^3}{(2\pi)^3}\int_{k_m}^{k_M} k^2 dk\, d\Omega\, \frac{\hbar}{\varepsilon_0 c^3k^3L^3} \qquad (2.7)$$

L'intégrale sur k doit être faite entre des bornes k_M et k_m pour éviter la divergence logarithmique à la borne inférieure

$$\hookrightarrow \quad \langle 0|\vec{Z}^2|0\rangle = \frac{\hbar}{2\varepsilon_0\pi^2c^3}\,\mathrm{Log}\,\frac{k_M}{k_m} \qquad (2.8)$$

$$\hookrightarrow \quad \delta E'_a = \frac{1}{6}\,\frac{q_\alpha^2}{m_\alpha^2}\,\langle 0|\vec{Z}^2|0\rangle\langle a|\Delta V_e(\vec{r}_\alpha)|a\rangle =$$

$$= \frac{\hbar q_\alpha^2}{12\varepsilon_0\pi^2m_\alpha^2c^3}\,\mathrm{Log}\,\frac{k_M}{k_m}\,\langle a|\Delta V_e(\vec{r}_\alpha)|a\rangle = \frac{\alpha}{3\pi}\,\lambda\!\!\!^{-}_c{}^2\,\mathrm{Log}\,\frac{k_M}{k_m}\,\langle a|\Delta V_e(\vec{r}_\alpha)|a\rangle \qquad (2.9)$$

<u>Effet de H_{I1}^{PF} à l'ordre 2</u>
$(\hbar\omega_{ba} = E_b - E_a)$

$$\delta E''_a = \sum_{\vec{k}\vec{\varepsilon}}\sum_b \frac{|\langle b;\vec{k}\vec{\varepsilon}\,|H_{I1}^{PF}|a;0\rangle|^2}{-\hbar(\omega_{ba}+\omega)} \qquad (2.10)$$

$$\langle b;\vec{k}\vec{\varepsilon}\,|H_{I1}^{PF}|a;0\rangle = \frac{q_\alpha}{m_\alpha}\langle b|\vec{\nabla}V_e(\vec{r}_\alpha)|a\rangle\cdot\langle\vec{k}\vec{\varepsilon}\,|\vec{Z}(\vec{0})|0\rangle \qquad (2.11)$$

$$= i\,\frac{q_\alpha}{m_\alpha}\sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0\omega^3L^3}}\,\langle b|\vec{\varepsilon}\cdot\vec{\nabla}V_e(\vec{r}_\alpha)|a\rangle$$

$$|\langle b;\vec{k}\vec{\varepsilon}\,|H_{I1}^{PF}|a;0\rangle|^2 = \frac{q_\alpha^2}{m_\alpha^2}\,\frac{\hbar}{2\varepsilon_0\omega^3L^3}\sum_{i\,j=x,y,z}\langle b|\varepsilon_i(\nabla_iV_e)|a\rangle\langle a|\varepsilon_j(\nabla_jV_e)|b\rangle \qquad (2.12)$$

$$\delta E''_a = -\frac{L^3}{(2\pi)^3}\sum_b\int_{k_m}^{k_M}k^2dk\int d\Omega\sum_{\vec{\varepsilon}}\sum_{i,j}\frac{q_\alpha^2}{m_\alpha^2}\,\frac{\hbar}{2\varepsilon_0c^3k^3L^3}\;\times$$

$$\times\;\frac{\varepsilon_i\varepsilon_j\,\langle b|(\nabla_iV_e)|a\rangle\langle a|(\nabla_jV_e)|b\rangle}{c\,(k+k_{ba})} \qquad (2.13)$$

$$\int d\Omega\sum_{\vec{\varepsilon}}\varepsilon_i\varepsilon_j = \int d\Omega\left(\delta_{ij}-\frac{k_ik_j}{k^2}\right) = \frac{8\pi}{3}\,\delta_{ij}$$

$$\hookrightarrow \quad \delta E''_a = -\frac{q_\alpha^2}{6\varepsilon_0\pi^2m_\alpha^2c^4}\sum_b\sum_i\langle b|(\nabla_iV_e)|a\rangle\langle a|(\nabla_iV_e)|b\rangle\int_{k_m}^{k_M}\frac{dk}{k(k+k_{ba})} \qquad (2.14)$$

$$\frac{1}{k(k+k_{ba})} = \frac{1}{k_{ba}}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+k_{ba}}\right) \qquad (2.15)$$

$$\int_{k_m}^{k_M}\frac{dk}{k(k+k_{ba})} = \frac{1}{k_{ba}}\left[\mathrm{Log}\,\frac{k_M}{k_m}-\mathrm{Log}\,\frac{k_M+k_{ba}}{k_m+k_{ba}}\right] \simeq \frac{1}{k_{ba}}\,\mathrm{Log}\,\frac{k_{ba}}{k_m} \qquad (2.16)$$

car $k_{ba} \ll k_M$ et $k_m \ll k_{ba}$

$$\hookrightarrow \quad \delta E''_a = -\frac{\hbar q_\alpha^2}{6\varepsilon_0\pi^2m_\alpha^2c^3}\sum_b\sum_i\frac{\langle b|(\nabla_iV_e)|a\rangle\langle a|(\nabla_iV_e)b\rangle}{E_b-E_a}\,\mathrm{Log}\,\frac{k_{ba}}{k_m} \qquad (2.17)$$

<u>Introduction de K'_0</u>. Dans $\sum_b\sum_i$, $\mathrm{Log}\,k_{ba}$ varie lentement avec b devant les autres facteurs. On introduit K'_0 défini par

$$\sum_b\frac{\langle b|(\nabla_iV_e)|a\rangle\langle a|(\nabla_iV_e)|b\rangle}{E_b-E_a}\,\mathrm{Log}\,k_{ba} = \mathrm{Log}\,K'_0\sum_b\frac{\langle b|(\nabla_iV_e)|a\rangle\langle a|(\nabla_iV_e)|b\rangle}{E_b-E_a} \qquad (2.18)$$

où $\hbar cK'_0$ est de l'ordre de E_I (énergie d'ionisation)

<u>Raccord avec le calcul précédent</u>

$$[p_i, H_P] = -i\hbar\, \partial H_P/\partial r_i = -i\hbar (\nabla_i V_e) \tag{2.19}$$

$$\langle b|p_i|a\rangle (E_b - E_a) = -i\hbar \langle b|(\nabla_i V_e)|a\rangle \tag{2.20}$$

On en deduit que

$$\sum_{bi} \frac{\langle b|(\nabla_i V_e)|a\rangle\langle a|(\nabla_i V_e)|b\rangle}{E_b - E_a} \mathrm{Log}\, k_{ba} = -\frac{1}{\hbar^2}\sum_{bi} \langle b|p_i|a\rangle\langle a|p_i|b\rangle (E_b - E_a)\, \mathrm{Log}\, k_{ba} \tag{2.21}$$

ce qui montre, par comparaison avec (2.11) que $K_0' = K_0$

$$\hookrightarrow \quad (\delta E''_a)_{PF} = -\frac{\hbar q_\alpha^2}{6\varepsilon_0 \pi^2 m_\alpha^2 c^3} \mathrm{Log}\frac{K_0}{k_m} \sum_b \frac{\langle b|(\nabla_i V_e)|a\rangle\langle a|(\nabla_i V_e)|b\rangle}{E_b - E_a} \tag{2.22}$$

Par ailleurs, en utilisant de nouveau (2.20), on obtient

$$\begin{aligned}
\sum_{b,i} \frac{\langle b|(\nabla_i V_e)|a\rangle\langle a|(\nabla_i V_e)|b\rangle}{E_b - E_a} &= \frac{1}{i\hbar}\sum_{b,i} \langle b|p_i|a\rangle\langle a|\nabla_i V_e|b\rangle \\
&= -\frac{1}{i\hbar}\sum_{b,i} \langle b|\nabla_i V_e|a\rangle\langle a|p_i|b\rangle \\
&= \frac{1}{2i\hbar}\sum_i \langle a|(\nabla_i V_e)p_i - p_i(\nabla_i V_e)|a\rangle \\
&= \frac{1}{2i\hbar}\sum_i \langle a|[(\nabla_i V_e), p_i]|a\rangle = \frac{1}{2}\langle a|\Delta V_e|a\rangle
\end{aligned} \tag{2.23}$$

$$\hookrightarrow \quad (\delta E''_a)_{PF} = -\frac{\hbar q_\alpha^2}{12\varepsilon_0 \pi^2 m_\alpha^2 c^3} \mathrm{Log}\frac{K_0}{k_m} \langle a|\Delta V_e(\vec{r}_\alpha)|a\rangle \tag{2.24}$$

<u>Récapitulation</u> On ajoute (2.9), (2.24) et la valeur moyenne du dernier terme de 1.17 qui n'est autre que (2.2.b)

$$\begin{aligned}
(\delta E_a)_{PF} &= \delta m_{2\alpha} c^2 + \frac{\hbar q_\alpha^2}{12\varepsilon_0 \pi^2 m_\alpha^2 c^3} \mathrm{Log}\frac{K_M}{K_0} \langle a|\Delta V_e|a\rangle \\
&= \delta m_{2\alpha} c^2 + \frac{\alpha}{3\pi} \lambda\!\!\!{}^-_c{}^2\, \mathrm{Log}\frac{K_M}{K_0} \langle a|\Delta V_e|a\rangle
\end{aligned} \tag{2.25}$$

qui ne présente plus de dépendance en k_m (disparition de la divergence infrarouge

---

<u>Discussion physique</u> . Confirmation de l'image de Welton

- l'expression de $(\delta E'_a)_{PF}$ coincide exactement avec le résultat correspondant à cette image et calculé en prenant pour amplitude de vibration dans le mode ω la valeur $\xi_\omega = q_\alpha \mathcal{E}_\omega / m_\alpha^* \omega^2$ correspondant à une particule <u>libre</u>.
  Cette valeur de ξ_ω est correcte pour $\hbar\omega \gg E_I$.
  Par contre, pour $\hbar\omega \lesssim E_I$, le fait que l'électron soit lié entraine que l'amplitude de vibration est moins grande. C'est cet effet de liaison atomique qui fait disparaitre la divergence en k_m et qui est décrit par $(\delta E''_a)_{PF}$.
- L'avantage du point de vue de Pauli-Fierz est d'incorporer directement la correction de masse δm_α dans l'hamiltonien atomique.

Calcul de $(\delta E_a)_{GM}$ dans le point de vue de Göppert-Mayer

$$(\delta E_a)_{GM} = \langle a;0|\mathcal{E}^{\alpha}_{dip}|a;0\rangle + \sum_b \sum_{\vec{k}\vec{\varepsilon}} q_\alpha^2 \frac{|\langle b;\vec{k}\vec{\varepsilon}\,|\,\vec{r}_\alpha\cdot\vec{E}_\perp(0)\,|a;0\rangle|^2}{E_a - E_b - \hbar\omega} \tag{4.1}$$

$$(\delta E'_a)_{GM} = \langle a;0|\mathcal{E}^{\alpha}_{dip}|a;0\rangle = \frac{q_\alpha^2}{2\varepsilon_0 L^3}\frac{L^3}{(2\pi)^3}\int_0^{k_M} k^2 dk \int d\Omega \sum_{\vec{\varepsilon}}\sum_{i,j}\varepsilon_i\varepsilon_j\langle a|r_{\alpha i}r_{\alpha j}|a\rangle$$

$$= \frac{q_\alpha^2 k_M^2}{18\varepsilon_0\pi^2}\sum_b(\vec{r}_\alpha)_{ab}\cdot(\vec{r}_\alpha)_{ba} \tag{4.2}$$

Calcul du 2ème terme $(\delta E''_a)_{GM}$ de (4.1) $\qquad \vec{E}_\perp(\vec{0}) = i\sum_{\vec{k}\vec{\varepsilon}}\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0 L^3}}\,\vec{\varepsilon}\,(a_{k\varepsilon}-a^+_{k\varepsilon})$ (4.3)

$$\langle b;\vec{k}\vec{\varepsilon}\,|\vec{r}_\alpha\cdot\vec{E}_\perp(\vec{0})|a;0\rangle = -i\sum_j\varepsilon_j(r_{\alpha j})_{ba}\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0 L^3}} \tag{4.4}$$

$$(\delta E''_a)_{GM} = -\frac{q_\alpha^2}{2\varepsilon_0 L^3}\sum_b\frac{L^3}{(2\pi)^3}\int_0^{k_M}k^2dk\,\frac{\hbar c k}{\hbar c(k+k_{ba})}\int d\Omega\sum_{i,j}\sum_{\vec{\varepsilon}}\varepsilon_i\varepsilon_j(r_{\alpha i})_{ab}(r_{\alpha j})_{ba}$$

$$= -\frac{q_\alpha^2}{6\varepsilon_0\pi^2}\sum_b(\vec{r}_\alpha)_{ab}\cdot(\vec{r}_\alpha)_{ba}\int_0^{k_M}\frac{k^3dk}{k+k_{ba}} \tag{4.5}$$

$$\frac{k^3}{k+k_{ba}} = \frac{k^2(k+k_{ba}) - k_{ba}(k+k_{ba})k + k_{ba}^2(k+k_{ba}) - k_{ba}^3}{k+k_{ba}} = k^2 - k_{ba}k + k_{ba}^2 - \frac{k_{ba}^3}{k+k_{ba}} \tag{4.6}$$

Terme en k_M^3 de $(\delta E''_a)_{GM}$ $\qquad -\frac{q_\alpha^2}{6\varepsilon_0\pi^2}\sum_b(\vec{r}_\alpha)_{ab}\cdot(\vec{r}_\alpha)_{ba}\frac{k_M^3}{3} = -(\delta E'_a)_{GM}$ (4.7)

Se compense exactement avec $(\delta E'_a)_{GM} = \langle a;0|\mathcal{E}^\alpha_{dip}|a;0\rangle$ (voir (4.2))

Terme en k_M^2 de $(\delta E''_a)_{GM}$ $\quad = +\frac{q_\alpha^2}{6\varepsilon_0\pi^2}\frac{k_M^2}{2}\sum_b(\vec{r}_\alpha)_{ab}\cdot(\vec{r}_\alpha)_{ba}k_{ba}$ (4.8)

Or $\qquad [r_{\alpha i}, H_P] = i\hbar\,\partial H_P/\partial p_{\alpha i} = i\hbar\, p_{\alpha i}/m_\alpha$ (4.9)

$\hookrightarrow \quad (\vec{r}_\alpha)_{ab}(E_b-E_a) = i\hbar(\vec{p}_\alpha)_{ab}/m_\alpha \longrightarrow \quad k_{ba}(\vec{r}_\alpha)_{ab} = i(\vec{p}_\alpha)_{ab}/m_\alpha c$ (4.10)

$$\sum_b(\vec{r}_\alpha)_{ab}\cdot(\vec{r}_\alpha)_{ba} = \frac{i}{m_\alpha c}(\vec{p}_\alpha\cdot\vec{r}_\alpha)_{aa} = -\frac{i}{m_\alpha c}(\vec{r}_\alpha\cdot\vec{p}_\alpha)_{aa} = -\frac{i}{2m_\alpha c}\sum_j([r_{\alpha j},p_{\alpha j}])_{aa} = \frac{3\hbar}{2m_\alpha c} \tag{4.11}$$

$\hookrightarrow \quad (4.8) = \frac{q_\alpha^2\hbar k_M^2}{8\varepsilon_0\pi^2 m_\alpha c} = \frac{\alpha}{2\pi}\frac{(\hbar\omega_M)^2}{m_\alpha c^2} = \delta m_{2\alpha}c^2$ (4.12)

On retrouve le terme $\langle a;0|H_{I2}|a;0\rangle$ de $(\delta E_a)_{Coul}$ donné en (2.7.b)

Termes en k_M et $\log k_M$ de $(\delta E''_a)_{GM}$ (Contribution des 2 derniers termes de (4.6))

$$-\frac{q_\alpha^2}{6\varepsilon_0\pi^2}\int_0^{k_M}dk\sum_b\left(k_{ba}^2 - \frac{k_{ba}^3}{k+k_{ba}}\right)(\vec{r}_\alpha)_{ab}\cdot(\vec{r}_\alpha)_{ba} =$$

$$= -\frac{q_\alpha^2}{6\varepsilon_0\pi^2 m_\alpha^2 c^2}\sum_b(\vec{p}_\alpha)_{ab}\cdot(\vec{p}_\alpha)_{ba}\int_0^{k_M}dk\left(1-\frac{k_{ba}}{k+k_{ba}}\right) \tag{4.13}$$

Comme $1 - \frac{k_{ba}}{k+k_{ba}} = \frac{k}{k+k_{ba}}$, l'expression (4.13) coïncide avec l'expression (2.7) donnant la contribution de H_{I1} à l'ordre 2 dans le point de vue de Coulomb.

Finalement, $(\delta E_a)_{GM} = (\delta E_a)_{Coul}$. On retrouve bien le même résultat dans les 2 points de vue, à condition bien sur de ne pas oublier la contribution de l'énergie propre dipolaire

Généralisations de la transformation de Pauli-Fierz

① Généralisation à une particule sans spin non localisée

- Hamiltonien de Coulomb (sans approximation des grandes longueurs d'onde)
- Comment généraliser la transformation de Pauli-Fierz ?
- Transformation unitaire découplant au 1er ordre la particule du champ transverse
- Transformation de quelques états et de quelques observables
- Hamiltonien dans le nouveau point de vue
- Exemple d'application : diffusion Compton

Hamiltonien de Coulomb pour une particule (sans spin) non localisée (et non relativiste)

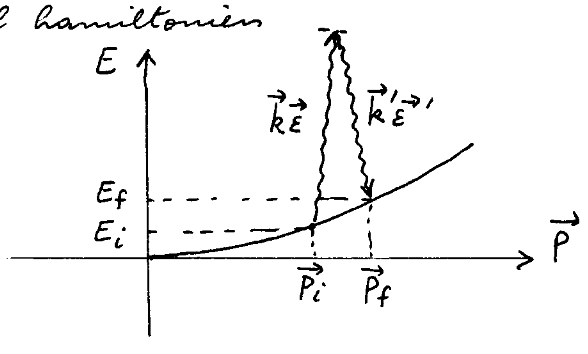
$$H = \frac{1}{2m_\alpha}\left[\vec{p}_\alpha - q_\alpha \vec{A}_\perp(\vec{r}_\alpha)\right]^2 + \varepsilon^\alpha_{Coul} + V_e(\vec{r}_\alpha) + H_R \qquad (1.1)$$

Différence avec les cours précédents : $\vec{A}_\perp(\vec{r}_\alpha)$ au lieu de $\vec{A}_\perp(\vec{0})$.

Exemple de problème physique nécessitant l'utilisation d'un tel hamiltonien

Charge libre non localisée échangeant de l'impulsion avec le rayonnement par des processus de diffusion Compton.
On ne peut pas négliger l'impulsion $\hbar\vec{k}$ des photons

$$\vec{P}_f = \vec{P}_i + \hbar\vec{k} - \hbar\vec{k}'$$



Propriétés intéressantes de la transformation de Pauli-Fierz (utilisée dans les cours précédents)

1 - Translation simple de $a_\varepsilon(\vec{k})$

$$T\, a_\varepsilon(\vec{k})\, T^+ = a_\varepsilon(\vec{k}) + \beta_\varepsilon(\vec{k},\vec{p}_\alpha) \qquad (1.2)$$

$$\beta_\varepsilon(\vec{k},\vec{p}_\alpha) = \frac{q_\alpha}{m_\alpha}\frac{\vec{\varepsilon}\cdot\vec{p}_\alpha}{\sqrt{2\varepsilon_0\hbar\omega^3(2\pi)^3}} \qquad (1.3)$$

2- Translation simple de $\vec{r}_\alpha$

$$T\,\vec{r}_\alpha\,T^+ = \vec{r}_\alpha + \frac{q_\alpha}{m_\alpha}\vec{Z}(\vec{0}) \qquad T\,\vec{p}_\alpha\,T^+ = \vec{p}_\alpha \tag{1.4}$$

3- Disparition de tout terme d'interaction particule - champ transverse linéaire en q_α dans THT^+

La forme simple et compacte de (1.2) et (1.4) permet d'obtenir pour $H' = THT^+$ une expression simple et compacte.

Difficultés apparaissant quand on ne fait plus l'approximation des grandes longueurs d'onde.

- La variable normale classique du champ lié dépend, non seulement de $\vec{p}_\alpha$ mais aussi de $\vec{r}_\alpha$ (on ne remplace plus $\exp(i\vec{k}\vec{r}_\alpha)$ par 1 dans l'équation du mouvement de $\beta_\varepsilon(\vec{k})$).

$$\beta_\varepsilon(\vec{k},\vec{p}_\alpha) \longrightarrow \beta_\varepsilon(\vec{k},\vec{p}_\alpha,\vec{r}_\alpha) \tag{1.5}$$

Il est alors impossible de trouver une transformation unitaire telle que
$$T\,a_\varepsilon(\vec{k})\,T^+ = a_\varepsilon(\vec{k}) + \beta_\varepsilon(\vec{k},\vec{r}_\alpha,\vec{p}_\alpha) \tag{1.6}$$
En effet, T doit conserver les relations de commutation entre a et a^+. Or, même si les a et les β^+ commutent entre eux, il n'en est pas de même pour les β et β^+ à cause de la non-commutation de $\vec{r}_\alpha$, $\vec{p}_\alpha$. L'équation (1.6) n'a donc pas de solution avec $TT^+ = T^+T = \mathbb{1}$

- De même, on ne peut généraliser simplement (1.4) quand on tient compte des corrections introduites par l'effet Doppler et la force de Lorentz magnétique sur le mouvement de vibration de la particule.

Solution choisie pour généraliser T

- Comme les propriétés 1 et 2 précédente ne peuvent être conservées, on va se concentrer sur la propriété 3, c'est à dire chercher T avec $TT^+ = T^+T = \mathbb{1}$, de façon à faire disparaître dans THT^+ tous les termes d'interaction particule - champ transverse linéaires en q_α.
- On conserve ainsi l'avantage consistant à faire apparaître dans l'hamiltonien des particules tous les effets associés à l'émission et à la réabsorption d'un photon virtuel.
- Par contre, la formulation mathématique de la théorie sera plus complexe : les expressions simples (1.2) et (1.4) ne seront plus valables. Il faudra ajouter des termes d'ordre croissant en q_α au second membre de (1.6). Idem pour (1.4). De même, l'hamiltonien $H' = THT^+$ ne sera plus donné par une expression compacte, mais par une série infinie de termes d'ordre croissant en q_α.

Construction de T

- Classification des termes de l'hamiltonien de Coulomb (1.1) par ordre croissant en q_α

$$H = H_0 + H_1 + H_2 \tag{1.7}$$

$$H_0 = \frac{\vec{p}_\alpha^{\,2}}{2m_\alpha} + H_R \qquad (1.8) \qquad\qquad H_1 = -\frac{q_\alpha}{m_\alpha}\vec{p}_\alpha\cdot\vec{A}_\perp(\vec{r}_\alpha) \qquad (1.9)$$

$$H_2 = V_e(\vec{r}_\alpha) + \frac{q_\alpha^2}{2m_\alpha}\vec{A}_\perp^{\,2}(\vec{r}_\alpha) + \varepsilon^\alpha_{coul} \qquad (1.10)$$

($V_e(\vec{r}_\alpha)$ est considéré comme un terme d'ordre 2 car c'est en général une interaction de Coulomb entre q_α et une autre charge)

– $$T = e^{iF/\hbar} \qquad \text{avec} \quad F = F^+ \qquad (1.11)$$

$$e^{iA}\,B\,e^{-iA} = B + i\,[A,B] + \frac{i^2}{2!}\,[A,[A,B]] + \cdots \qquad (1.12)$$

– On verra plus loin que F peut être choisi d'ordre 1 en q_α. On peut donc ordonner $H' = T H T^+$ en puissances de q_α

$$\begin{aligned} H' = \; & H_0 + \\ & + H_1 + \frac{i}{\hbar}[F,H_0] + \\ & + H_2 + \frac{i}{\hbar}[F,H_1] + \frac{i^2}{2!\hbar^2}[F,[F,H_0]] + \\ & \quad + \frac{i}{\hbar}[F,H_2] + \frac{i^2}{2!\hbar^2}[F,[F,H_1]] + \frac{i^3}{3!\hbar^3}[F,[F,[F,H_0]]] + \cdots \end{aligned} \qquad (1.13)$$

– Condition imposée à F $$H_1 + \frac{i}{\hbar}[F,H_0] = 0 \qquad (1.14)$$

– La forme simple de H_1 et H_0, respectivement linéaire et quadratique en a et a^+ suggère de rechercher F sous forme d'une superposition linéaire de a et a^+

$$\frac{iF}{\hbar} = \int d^3k \sum_\varepsilon \left\{ \beta^+_\varepsilon(\vec{k},\vec{r}_\alpha,\vec{p}_\alpha)\,a_\varepsilon(\vec{k}) - \beta_\varepsilon(\vec{k},\vec{r}_\alpha,\vec{p}_\alpha)\,a^+_\varepsilon(\vec{k}) \right\} \qquad (1.15)$$

– L'annulation du coefficient de $a^+_\varepsilon(\vec{k})$ dans (1.14) donne alors

$$-\frac{q_\alpha}{m_\alpha}\sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0\omega(2\pi)^3}}\;\vec{\varepsilon}\cdot\vec{p}_\alpha\,e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}_\alpha} + \hbar\omega\,\beta_\varepsilon(\vec{k},\vec{r}_\alpha,\vec{p}_\alpha) + \left[\frac{\vec{p}_\alpha^{\,2}}{2m_\alpha}, \beta_\varepsilon(\vec{k},\vec{r}_\alpha,\vec{p}_\alpha)\right] = 0 \qquad (1.16)$$

Multiplions (1.16) à droite par $e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}_\alpha}$ et posons

$$X = \beta_\varepsilon(\vec{k},\vec{r}_\alpha,\vec{p}_\alpha)\,e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}_\alpha} \qquad (1.17)$$

L'équation pour X s'écrit

$$-\frac{q_\alpha}{m_\alpha}\sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0\omega(2\pi)^3}}\;\vec{\varepsilon}\cdot\vec{p}_\alpha + \hbar\omega X + \frac{\vec{p}_\alpha^{\,2}}{2m_\alpha}X - X\underbrace{e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}_\alpha}\frac{\vec{p}_\alpha^{\,2}}{2m_\alpha}e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}_\alpha}}_{(\vec{p}_\alpha+\hbar\vec{k})^2/2m_\alpha} = 0 \qquad (1.18)$$

↳ X ne dépend donc que de $\vec{p}_\alpha$ et s'écrit

$$X = \frac{q_\alpha}{m_\alpha}\sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0\omega(2\pi)^3}}\;\frac{\vec{\varepsilon}\cdot\vec{p}_\alpha}{\hbar\omega + \frac{\vec{p}_\alpha^{\,2}}{2m_\alpha} - \frac{(\vec{p}_\alpha+\hbar\vec{k})^2}{2m_\alpha}} \qquad (1.19)$$

ce qui donne finalement pour $\beta_\varepsilon(\vec{k},\vec{r}_\alpha,\vec{p}_\alpha)$ compte tenu de (1.17)

$$\beta_\varepsilon(\vec{k},\vec{r}_\alpha,\vec{p}_\alpha) = \frac{q_\alpha}{m_\alpha}\sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0\omega(2\pi)^3}}\;\frac{\vec{\varepsilon}\cdot\vec{p}_\alpha}{\hbar\omega + \frac{\vec{p}_\alpha^{\,2}}{2m_\alpha} - \frac{(\vec{p}_\alpha+\hbar\vec{k})^2}{2m_\alpha}}\,e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}_\alpha} \qquad (1.20)$$

Si l'on remplace $e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}_\alpha}$ par 1, et le dénominateur par $\hbar\omega$ (ordre 1 en $\vec{p}_\alpha/m_\alpha c$ et 0 en $\hbar\omega/m_\alpha c^2$), on retrouve (1.3) et T coïncide avec la transformation de Pauli-Fierz habituelle

- Comme H est non relativiste, il est inutile de conserver les termes d'ordre supérieur à 1 en $\vec{P}_\alpha/mc$ et $\hbar\omega/m_\alpha c^2$ dans le developpement du dénominateur de 1.20). A cet ordre, on peut écrire

$$\frac{1}{\hbar\omega+\frac{\vec{P}_\alpha^{\,2}}{2m_\alpha}-\frac{(\vec{P}_\alpha+\hbar\vec{k})^2}{2m_\alpha}}=\frac{1}{\hbar\omega-\frac{\hbar\vec{k}\cdot\vec{P}_\alpha}{m_\alpha}-\frac{\hbar^2k^2}{2m_\alpha}}\simeq\frac{1}{\hbar\omega}\left(1+\frac{\vec{k}\cdot\vec{P}_\alpha}{m_\alpha\omega}+\frac{\hbar k}{2m_\alpha c}\right) \qquad (1.21)$$

En remarquant que

$$\left(\frac{\vec{k}\cdot\vec{P}_\alpha}{m_\alpha\omega}+\frac{\hbar k}{2m_\alpha c}\right)e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}_\alpha}=\frac{\vec{k}\cdot\vec{P}_\alpha}{2m_\alpha\omega}e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}_\alpha}+e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}_\alpha}\frac{\vec{k}\cdot\vec{P}_\alpha}{2m_\alpha\omega} \qquad (1.22)$$

on peut mettre $\beta_\varepsilon(\vec{k},\vec{r}_\alpha,\vec{P}_\alpha)$ sous la forme approchée

$$\beta_\varepsilon(\vec{k},\vec{r}_\alpha,\vec{P}_\alpha)=\frac{q_\alpha}{m_\alpha}\frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_0\hbar\omega^3(2\pi)^3}}\left\{\vec{\varepsilon}\cdot\vec{P}_\alpha\,e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}_\alpha}+\vec{\varepsilon}\cdot\vec{P}_\alpha\left[\frac{\vec{k}\cdot\vec{P}_\alpha\,e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}_\alpha}+e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}_\alpha}\,\vec{k}\cdot\vec{P}_\alpha}{2m_\alpha\omega}\right]\right\} \qquad (1.23)$$

et écrire finalement F sous la forme

$$F=\frac{q_\alpha}{m_\alpha}\left\{\vec{P}_\alpha\cdot\vec{Z}(\vec{r}_\alpha)+\vec{\nabla}_\alpha\cdot\left[(\vec{P}_\alpha\cdot\vec{Y}(\vec{r}_\alpha))\frac{\vec{P}_\alpha}{2m_\alpha}+\frac{\vec{P}_\alpha}{2m_\alpha}(\vec{P}_\alpha\cdot\vec{Y}(\vec{r}_\alpha))\right]\right\} \qquad (1.24)$$

où $\vec{Z}$ est le vecteur de Hertz et $\vec{Y}$ un autre champ défini par

$$\vec{Y}(\vec{r})=\int d^3k\sum_\varepsilon\sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0\omega(2\pi)^3}}\left[\vec{\varepsilon}\,\frac{a_\varepsilon(\vec{k})}{(i\omega)^2}e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}+\vec{\varepsilon}\,\frac{a_\varepsilon^+(\vec{k})}{(-i\omega)^2}e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}\right] \qquad (1.25)$$

$\vec{Y}$ est en fait (au signe près) l'intégrale de $\vec{Z}$ $(\dot{\vec{Y}}=-\vec{Z})$ et est comme $\vec{Z}$ un champ transverse

---

Transformation des états

- Supposons $V_e=0$ et considérons, dans le point de vue (1), l'état propre de H qui tend vers l'état propre $|\vec{p};0\rangle$ de H_0 quand $q_\alpha\to 0$. Cet état sera noté $|\varphi^{(1)}_{\vec{p},0}\rangle$. A l'ordre 1 en q_α, cet état s'obtient par la théorie des perturbations au 1er ordre avec H_{I1}

$$|\varphi^{(1)}_{\vec{p},0}\rangle=|\vec{p};0\rangle+\int d^3k\sum_\varepsilon|\vec{p}-\hbar\vec{k};\vec{k}\vec{\varepsilon}\rangle\frac{\langle\vec{p}-\hbar\vec{k};\vec{k}\vec{\varepsilon}\,|\,H_{I1}\,|\,\vec{p};0\rangle}{\frac{\vec{p}^{\,2}}{2m_\alpha}-\hbar\omega-\frac{(\vec{p}-\hbar\vec{k})^2}{2m_\alpha}} \qquad (1.26)$$

c'est à dire encore, compte tenu de (1.9) et du fait que $e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}_\alpha}|\vec{p}\rangle=|\vec{p}-\hbar\vec{k}\rangle$

$$|\varphi^{(1)}_{\vec{p},0}\rangle=|\vec{p};0\rangle-\frac{q_\alpha}{m_\alpha}\int d^3k\sum_\varepsilon\sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0\omega(2\pi)^3}}\;\frac{\vec{\varepsilon}\cdot\vec{p}}{\frac{\vec{p}^{\,2}}{2m_\alpha}-\hbar\omega-\frac{(\vec{p}-\hbar\vec{k})^2}{2m_\alpha}}\,|\vec{p}-\hbar\vec{k};\vec{k}\vec{\varepsilon}\rangle \qquad (1.27)$$

Cet état représente physiquement une charge q_α dans l'état $|\vec{p}\rangle$ "habillée" d'un nuage de photons virtuels qu'elle émet et réabsorbe

- Soit $|\varphi^{(2)}_{\vec{p},0}\rangle$ le ket représentant le <u>même état physique</u> dans le point de vue (2). A l'ordre 1 en q_α

$$|\varphi^{(2)}_{\vec{p},0}\rangle=T\,|\varphi^{(1)}_{\vec{p},0}\rangle=\left(1+\frac{iF}{\hbar}\right)|\varphi^{(1)}_{\vec{p},0}\rangle\simeq|\varphi^{(1)}_{\vec{p},0}\rangle+\frac{iF}{\hbar}|\vec{p};0\rangle \qquad (1.28)$$

En utilisant (1.15) et (1.20), on obtient pour le dernier terme de (1.28)

$$\frac{iF}{\hbar}|\vec{p};0\rangle = -\frac{q_\alpha}{m_\alpha}\int d^3k \sum_\varepsilon \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0\omega(2\pi)^3}}\ \frac{\vec{\varepsilon}.\vec{p_\alpha}}{\hbar\omega + \frac{\vec{p_\alpha}^2}{2m_\alpha} - \frac{(\vec{p_\alpha}+\hbar\vec{k})^2}{2m_\alpha}}\ |\vec{p}-\hbar\vec{k};\vec{k}\vec{\varepsilon}\rangle \quad (1.29)$$

Or, $|\vec{p}-\hbar\vec{k}\rangle$ est état propre de l'opérateur $\vec{p_\alpha}$, de valeur propre $\vec{p}-\hbar\vec{k}$. De plus, $\vec{\varepsilon}.\vec{k}=0$. On déduit alors de (1.29)

$$\frac{iF}{\hbar}|\vec{p};0\rangle = -\frac{q_\alpha}{m_\alpha}\int d^3k \sum_\varepsilon \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0\omega(2\pi)^3}}\ \frac{\vec{\varepsilon}.\vec{p}}{\hbar\omega + \frac{(\vec{p}-\hbar\vec{k})^2}{2m_\alpha} - \frac{\vec{p}^2}{2m_\alpha}}\ |\vec{p}-\hbar\vec{k};\vec{k}\vec{\varepsilon}\rangle \quad (1.30)$$

Finalement, en ajoutant (1.27) et (1.30) pour obtenir, d'après (1.28), $|\varphi^{(2)}_{\vec{p},0}\rangle$, on constate que le dernier terme de (1.27) se compense avec (1.30), de sorte que

$$|\varphi^{(2)}_{\vec{p},0}\rangle = |\vec{p};0\rangle \quad (1.31)$$

L'état physique habillé de photons du point de vue (1), qui est état propre de H (à l'ordre 1 en q_α), en dehors de la zone d'action de V_e, est donc représenté beaucoup plus simplement dans le point de vue (2) par un ket de la forme $|\vec{p};0\rangle$. Dans le point de vue (2), les kets $|\vec{p};0\rangle$ représentent donc des états asymptotiques corrects pour la diffusion par V_e, puisqu'ils représentent des états propres du reste de l'hamiltonien en dehors de la zone d'action du potentiel. C'est ce qui explique pourquoi le point de vue (2) est beaucoup plus commode que le point de vue (1) pour l'étude des processus de collision.

Transformation des opérateurs

Nous ne calculerons pas ici $T\vec{r_\alpha}T^+$, $T\vec{p_\alpha}T^+$, $Ta_\varepsilon(\vec{k})T^+$. Disons simplement que :

$$TGT^+ = G + \left[\frac{iF}{\hbar}, G\right] + \frac{1}{2!}\left[\frac{iF}{\hbar},\left[\frac{iF}{\hbar},G\right]\right] + \cdots \quad (1.32)$$

où $G = \vec{r_\alpha}, \vec{p_\alpha}, a_\varepsilon(\vec{k})\ldots$. On retrouve bien qu'à l'ordre 1 en q_α, $\left[\frac{iF}{\hbar},G\right]$ est la réponse linéaire de l'observable G d'un système à la perturbation exercée par l'autre. Mais les autres termes (d'ordre 2, 3 -- en q_α) du développement (1.32) ne sont pas nuls.

Ainsi, T est bien un opérateur de translation pour $\vec{r_\alpha}$, $\vec{p_\alpha}$, $a_\varepsilon(\vec{k})$... Mais l'amplitude de la translation ne se réduit pas à la seule réponse linéaire comme c'était le cas à l'approximation des grandes longueurs d'onde.

Structure de l'hamiltonien transformé H' et approximations

Développement de H' en puissances de q_α

$$H' = H_0 + H'_1 + H'_2 + H'_3 + H'_4 + \cdots \quad (1.33)$$

$\frac{iF}{\hbar}$ a été choisi pour avoir $H'_1 = 0 \rightarrow$ Condition (1.14) : $\left[\frac{iF}{\hbar}, H_0\right] = -H_1$

On obtient alors $$H' = H_0 + H'_2 + H'_3 + H'_4 + \cdots \quad (1.34)$$

$$H'_2 = H_2 + \left[\frac{iF}{\hbar},H_1\right] + \frac{1}{2!}\left[\frac{iF}{\hbar},\left[\frac{iF}{\hbar},H_0\right]\right] = H_2 + \frac{1}{2}\left[\frac{iF}{\hbar},H_1\right] \quad (1.35)$$

$$H'_3 = \left[\frac{iF}{\hbar},H_2\right] + \frac{1}{3}\left[\frac{iF}{\hbar},\left[\frac{iF}{\hbar},H_1\right]\right] \quad (1.36.a) \qquad H'_4 = \frac{1}{2}\left[\frac{iF}{\hbar},\left[\frac{iF}{\hbar},H_2\right]\right] + \frac{1}{8}\left[\frac{iF}{\hbar},\left[\frac{iF}{\hbar},\left[\frac{iF}{\hbar},H_1\right]\right]\right] \quad (1.36.b)$$

Terme d'ordre 2 en q_α : en plus de H_2, il y a le terme provenant du commutateur de $iF/\hbar$ et H_1.

$iF/\hbar$ et H_1 sont tous deux des combinaisons linéaires de a et a^+ avec des coefficients de $\vec{r}_\alpha$ et $\vec{p}_\alpha$ $\rightarrow$ 2 contributions dans $\frac{1}{2}\left[\frac{iF}{\hbar}, H_1\right]$

1 - Terme provenant de $[a, a^+] = 1$ $\rightarrow$ opérateur dépendant uniquement de $\vec{r}_\alpha$ et $\vec{p}_\alpha$, c-à-d opérateur de particule s'ajoutant à $\vec{p}_\alpha^{\,2}/2m_\alpha + V_e(\vec{r}_\alpha)$

2 - Terme provenant de la non commutation de $\vec{p}_\alpha$ et $e^{\pm i\vec{k}.\vec{r}_\alpha}$ $\rightarrow$ opérateur quadratique en a et a^+ et dépendant de $\vec{r}_\alpha$ et $\vec{p}_\alpha$. Nouvel hamiltonien d'interaction particule - champ transverse quadratique en q_α.

Termes prépondérants d'ordre 3 et 4 en q_α

Pour des particules chargées non relativistes, l'énergie de Coulomb $V_e(\vec{r}_\alpha)$ est beaucoup plus importante que l'interaction avec le champ transverse. On negligera donc les seconds termes de (1.36.a) et (1.36.b), et on remplacera H_2 par $V_e(\vec{r}_\alpha)$ dans les premiers termes. On ne conservera donc que les termes

$$\left[\frac{iF}{\hbar}, V_e(\vec{r}_\alpha)\right] \quad (1.37.a) \qquad \frac{1}{2}\left[\frac{iF}{\hbar},\left[\frac{iF}{\hbar}, V_e(\vec{r}_\alpha)\right]\right] \quad (1.37.b)$$

Développement en puissances de $p_\alpha/m_\alpha c$ et $\hbar k/m_\alpha c$

Toutes les corrections relativistes, ne figurant pas dans l'hamiltonien de départ (1.1), sont au moins d'ordre $1/c^2$. Par ailleurs, F a été développé à l'ordre 1 inclus en $1/c$ (voir (1.21)).

Tous les termes de H'_2 d'ordre 0 et 1 en $1/c$ sont donc corrects. Par contre, pour les termes d'ordre 2 en $1/c$ de H'_2, il faut s'assurer, avant de les garder, qu'ils ne seraient pas modifiés par les termes d'ordre supérieur en $1/c$ de H et F, et eventuellement, les corriger et les compléter.

Nouvel hamiltonien des particules à l'ordre 2 en q_α.

Le commutateur de a et a^+ dans $\frac{1}{2}\left[\frac{iF}{\hbar}, H_1\right]$ donne, d'après (1.15) et (1.9)

$$\frac{1}{2}\int d^3k \sum_{\varepsilon}\left\{\beta^+_{\varepsilon}(\vec{k}, \vec{r}_\alpha, \vec{p}_\alpha)\left[-\frac{q_\alpha}{m_\alpha}\sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0\omega(2\pi)^3}}\,(\vec{\varepsilon}.\vec{p}_\alpha)\,e^{-i\vec{k}.\vec{r}_\alpha}\right] + \text{c.c.}\right\} \quad (1.38)$$

Remplaçons β^+_{ε} par l'adjoint de (1.23). La contribution du dernier terme de (1.23) est impair en $\vec{k}$ et s'annule dans l'intégrale sur $\vec{k}$. Il reste donc

$$-\frac{1}{2}\,\frac{q_\alpha^2}{m_\alpha^2}\sum_{\vec{k}\vec{\varepsilon}}\frac{(\vec{\varepsilon}.\vec{p}_\alpha)^2}{2\varepsilon_0\omega^3(2\pi)^3} + \text{c.c.} = -\frac{\vec{p}_\alpha^{\,2}}{2m_\alpha}\,\frac{\delta m_{1\alpha}}{m_\alpha} \quad (1.39)$$

qui n'est autre que la correction à l'énergie cinétique due à la correction de masse m_α.

Seule différence : comme on ne fait plus ici l'approximation des grandes longueurs d'onde, on peut prendre une coupure k_c plus élevée dans l'intégrale sur k donnant $\delta m_{1\alpha}$ ($k_c a_0$ peut être grand devant 1. Par contre, $\hbar\omega_c$ doit rester petit devant $m_\alpha c^2$ pour la validité du traitement non relativiste).

Nouvel hamiltonien d'interaction à l'ordre 2 en q_α

En plus de $\frac{q_\alpha^2}{2m_\alpha}\vec{A}_\perp^2(\vec{r}_\alpha)$ qui figure dans H_2 (voir (1.10)), il faut considérer le terme de $\frac{1}{2}\left[\frac{iF}{\hbar}, H_1\right]$ qui provient de la non commutation de $\vec{p}_\alpha$ et $e^{\pm i\vec{k}.\vec{r}_\alpha}$.

Nous négligerons la contribution du dernier terme de (1.24) qui donne naissance à des termes en $1/c^2$ dans le nouvel hamiltonien d'interaction particule - champs transverse. La contribution du 1er terme donne, après un calcul que nous ne détaillerons pas ici, le résultat

$$-\frac{q_\alpha^2}{2m_\alpha^2}\vec{p}_\alpha\cdot\left[\vec{\nabla}_\alpha\times\left(\vec{A}_\perp(\vec{r}_\alpha)\times\vec{Z}(\vec{r}_\alpha)\right)\right] \tag{1.40}$$

Finalement, à l'ordre 2 en q_α et 1 en $1/c$, le nouvel hamiltonien d'interaction s'écrit

$$H_I' = \frac{q_\alpha^2}{2m_\alpha}\vec{A}_\perp^2(\vec{r}_\alpha) - \frac{q_\alpha^2}{2m_\alpha^2}\vec{p}_\alpha\cdot\left[\vec{\nabla}_\alpha\times\left(\vec{A}_\perp(\vec{r}_\alpha)\times\vec{Z}(\vec{r}_\alpha)\right)\right] \tag{1.41}$$

Le 2ème terme représente des corrections en $p_\alpha/m_\alpha c$ au 1er terme. Corrections à l'énergie cinétique du mouvement de vibration dues au mouvement lent de la particule (effet Doppler, aberration, force magnétique due au champ magnétique du rayonnement.

Termes prépondérants en q^3 et q^4

Pour ces termes (1.37.a) et (1.37.b), on peut se contenter du 1er terme de (1.24). On obtient alors

$$H_3' = \left[\frac{i}{\hbar}\frac{q_\alpha}{m_\alpha}\vec{p}_\alpha.\vec{Z}(\vec{r}_\alpha), V_e(\vec{r}_\alpha)\right] = \frac{q_\alpha}{m_\alpha}\vec{Z}(\vec{r}_\alpha).\vec{\nabla}V_e(\vec{r}_\alpha) \tag{1.42}$$

$$H_4' = \left[\frac{i}{\hbar}\frac{q_\alpha}{m_\alpha}\vec{p}_\alpha.\vec{Z}(\vec{r}_\alpha), \left[\frac{i}{\hbar}\frac{q_\alpha}{m_\alpha}\vec{p}_\alpha.\vec{Z}(\vec{r}_\alpha), V_e(\vec{r}_\alpha)\right]\right] = \frac{q_\alpha^2}{2m_\alpha^2}\sum_{ij} Z_i(\vec{r}_\alpha)Z_j(\vec{r}_\alpha)\nabla_i\nabla_j V_e(\vec{r}_\alpha) \tag{1.43}$$

On retrouve des termes analogues à ceux obtenus dans le cours précédents, à la différence près que $\vec{Z}(\vec{0})$ est remplacé par $\vec{Z}(\vec{r}_\alpha)$. En particulier, H_3' est un terme d'interaction à 1 photon décrivant le couplage avec le vecteur de Hertz de l'accélération de la particule.

Diffusion Compton

Etats initial et final $\quad |\psi_{in}\rangle = |\vec{p}_1, \vec{k}_1\vec{\varepsilon}_1\rangle \qquad |\psi_{fin}\rangle = |\vec{p}_2, \vec{k}_2\vec{\varepsilon}_2\rangle$ (1.44)

On prendra $\vec{p}_1 = \vec{0}$: électron initialement immobile

Normalisation des états de la particule et du photon dans une boite L^3.

Probabilité de transition par unité de temps

$$W(\vec{p}_1+\vec{k}_1\vec{\varepsilon}_1\to\vec{p}_2+\vec{k}_2\vec{\varepsilon}_2) = \frac{2\pi}{\hbar}\left|\langle\vec{p}_2,\vec{k}_2\vec{\varepsilon}_2|H_I'|\vec{p}_1,\vec{k}_1\vec{\varepsilon}_1\rangle\right|^2\delta(E_{\vec{p}_1}+\hbar\omega_1-E_{\vec{p}_2}-\hbar\omega_2) \tag{1.45}$$

Comme $\vec{p}_\alpha|\vec{p}_1\rangle = \vec{p}_1|\vec{p}_1\rangle = \vec{0}$ puisque $\vec{p}_1 = \vec{0}$, le 2ème terme de (1.41) ne contribue pas ($\vec{p}_\alpha$ commute avec le champ transverse $\vec{\nabla}\times(\vec{A}_\perp\times\vec{Z})$). On peut donc remplacer H_I' par $q_\alpha^2\vec{A}_\perp^2(\vec{r}_\alpha)/2m_\alpha$ dans (1.45).

$$\frac{q_\alpha^2}{2m_\alpha}\langle\vec{p}_2,\vec{k}_2\vec{\varepsilon}_2|\vec{A}_\perp^2(\vec{r}_\alpha)|\vec{p}_1,\vec{k}_1\vec{\varepsilon}_1\rangle = \frac{q_\alpha^2}{2m_\alpha}\frac{\hbar}{2\varepsilon_0 L^3\sqrt{\omega_1\omega_2}}(\vec{\varepsilon}_1.\vec{\varepsilon}_2)\times$$

$$\times\underbrace{\langle\vec{k}_2\vec{\varepsilon}_2|a^+_{\vec{k}_2\vec{\varepsilon}_2}a_{\vec{k}_1\vec{\varepsilon}_1}+a_{\vec{k}_1\vec{\varepsilon}_1}a^+_{\vec{k}_2\vec{\varepsilon}_2}|\vec{k}_1\vec{\varepsilon}_1\rangle}_{2}\;\underbrace{\langle\vec{p}_2|e^{i(\vec{k}_1-\vec{k}_2)\vec{r}_\alpha}|\vec{p}_1\rangle}_{\delta_{\vec{p}_1+\hbar\vec{k}_1,\,\vec{p}_2+\hbar\vec{k}_2}} \tag{1.46}$$

$$\langle \vec{p}_2, \vec{k}_2 \vec{\varepsilon}_2 | H'_I | \vec{p}_1, \vec{k}_1 \vec{\varepsilon}_1 \rangle = \frac{q_\alpha^2}{2m_\alpha} \frac{\hbar}{\varepsilon_0 \sqrt{\omega_1 \omega_2} L^3} \vec{\varepsilon}_1 \cdot \vec{\varepsilon}_2 \; \delta_{\vec{p}_1 + \hbar \vec{k}_1, \vec{p}_2 + \hbar \vec{k}_2} \quad (1.47)$$

Sommation sur les états finals - Section efficace

- On n'observe pas l'électron diffusé. Il faut donc sommer sur $\vec{p}_2$

$$\sum_{\vec{p}_2} w(\vec{p}_1 + \hbar \vec{k}_1 \to \vec{p}_2 + \hbar \vec{k}_2) =$$

$$= \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{\vec{p}_2} \frac{q_\alpha^4}{4m_\alpha^2} \frac{\hbar^2}{\varepsilon_0^2 L^6 \omega_1 \omega_2} (\vec{\varepsilon}_1 \cdot \vec{\varepsilon}_2)^2 \delta_{\vec{p}_1 + \hbar \vec{k}_1, \vec{p}_2 + \hbar \vec{k}_2} \; \delta\left(\frac{\vec{p}_1^{\,2}}{2m_\alpha} + \hbar\omega_1 - \frac{\vec{p}_2^{\,2}}{2m_\alpha} - \hbar\omega_2\right)$$

$$= \frac{2\pi}{\hbar} \frac{q_\alpha^4}{4m_\alpha^2} \frac{\hbar^2}{\varepsilon_0^2 L^6 \omega_1 \omega_2} (\vec{\varepsilon}_1 \cdot \vec{\varepsilon}_2)^2 \frac{1}{\hbar} \delta\left[\omega_2 + \frac{(\vec{p}_1 + \hbar\vec{k}_1 - \hbar\vec{k}_2)^2}{2\hbar m_\alpha} - \omega_1 - \frac{\vec{p}_1^{\,2}}{2\hbar m_\alpha}\right] \quad (1.48)$$

- Probabilité par unité de temps pour que le photon soit diffusé dans l'angle solide $d\Omega_2$ autour de $\kappa_2 = \vec{k}_2 / k_2$

$$dW = d\Omega_2 \frac{L^3}{(2\pi)^3} \int \frac{\omega_2^2 \, d\omega_2}{c^3} \sum_{\vec{p}_2} w(\vec{p}_1 + \hbar\vec{k}_1 \to \vec{p}_2 + \hbar\vec{k}_2) \quad (1.49)$$

- Flux du photon incident $\dfrac{c}{L^3}$

$$\hookrightarrow \quad \frac{d\sigma}{d\Omega_2} = \frac{L^3}{c} \frac{dW}{d\Omega_2} = \frac{L^6}{c^4 (2\pi)^3} \int \omega_2^2 \, d\omega_2 \sum_{\vec{p}_2} w(\vec{p}_1 + \hbar\vec{k}_1 \to \vec{p}_2 + \hbar\vec{k}_2) \quad (1.50)$$

Calcul explicite de $d\sigma / d\Omega_2$

- La fonction δ de (1.48) s'annule pour $\omega_2 = \tilde{\omega}_2$ avec

$$\tilde{\omega}_2 \simeq \omega_1 \left[1 - \frac{\hbar\omega_1}{m_\alpha c^2}(1 - \cos\theta)\right] \quad (1.51)$$

On a utilisé $\vec{p}_1 = \vec{0}$ et posé $\vec{k}_1 \cdot \vec{k}_2 = k_1 k_2 \cos\theta$ (θ angle entre $\vec{k}_1$ et $\vec{k}_2$)

On peut donc écrire cette fonction δ sous la forme

$$\frac{\delta(\omega_2 - \tilde{\omega}_2)}{1 + \frac{\hbar\omega_1}{m_\alpha c^2} - \frac{\hbar\omega_2}{m_\alpha c^2}\cos\theta} \simeq \delta(\omega_2 - \tilde{\omega}_2)\left[1 - \frac{\hbar\omega_1}{m_\alpha c^2}(1 - \cos\theta)\right] \simeq \delta(\omega_2 - \tilde{\omega}_2) \frac{\tilde{\omega}_2}{\omega_1} \quad (1.52)$$

- On obtient alors pour $\dfrac{d\sigma}{d\Omega_2}$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_2} = \frac{L^6}{(2\pi)^3} \frac{1}{c^4} \frac{2\pi}{\hbar} \frac{q^4}{4m_\alpha^2} \frac{\hbar^2}{\varepsilon_0^2 L^6 \omega_1} \frac{(\vec{\varepsilon}_1 \cdot \vec{\varepsilon}_2)^2}{\hbar} \int \omega_2 \, d\omega_2 \, \delta(\omega_2 - \tilde{\omega}_2) \frac{\tilde{\omega}_2}{\omega_1}$$

$$= r_0^2 \left(\frac{\tilde{\omega}_2}{\omega_1}\right)^2 (\vec{\varepsilon}_1 \cdot \vec{\varepsilon}_2)^2 \quad (1.53)$$

où $r_0 = q_\alpha^2 / 4\pi\varepsilon_0 m_\alpha c^2$ est le rayon classique de l'électron

- Comme nous n'avons pas gardé tous les termes en $1/c^2$ dans le calcul de H'_I, on peut remplacer $\tilde{\omega}_2 / \omega_1$ par 1, ce qui donne

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_2} = r_0^2 (\vec{\varepsilon}_1 \cdot \vec{\varepsilon}_2)^2 \quad (1.54)$$

- Moyenne sur les 2 polarisations initiales $\vec{\varepsilon}_1$ possibles et sommation sur les 2 polarisations finales $\vec{\varepsilon}_2$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_2} = \frac{r_0^2}{2}(1 + \cos^2\theta) \quad (1.55)$$

Généralisations de la transformation de Pauli-Fierz (suite)

② Généralisation à des particules avec spin. Modèle simple de spins situés en des points fixes

- Modèle étudié - Hamiltonien
- Transformation unitaire éliminant les termes d'interaction linéaires en charge.
- Nouvel hamiltonien de spin et nouvel hamiltonien d'interaction. Interaction dipôle-dipôle et interaction de contact.
- Cas où les spins interagissent en plus avec un champ magnétique statique. Termes supplémentaires dans l'hamiltonien transformé.
- Nouvel hamiltonien d'interaction à un photon.
- Corrections radiatives à la précession de Larmor.

③ Généralisation à des particules avec spins non localisées Principe du calcul et quelques résultats

- Hamiltonien.
- Transformation unitaire éliminant les termes d'interaction linéaires en charge.
- Nouvel hamiltonien des particules à l'ordre 2 en q_α.
- Cohérence des développements en $1/c$.

Hamiltonien

$$H = H_R + H_{IS} = H_R - \sum_\alpha \gamma_\alpha \vec{S}_\alpha \cdot \vec{B}(\vec{r}_\alpha) \tag{2.1}$$

1er terme : hamiltonien du rayonnement (ordre 0 en q_α)

$$H_R = \int d^3k \sum_\varepsilon \hbar\omega \left[a_\varepsilon^+(\vec{k}) a_\varepsilon(\vec{k}) + \frac{1}{2} \right] \tag{2.2}$$

2ème terme H_{IS} : interaction du moment magnétique de spin $\gamma_\alpha S_\alpha$ où

$$\gamma_a = g_\alpha \frac{q_\alpha}{2m_\alpha} \qquad (g_\alpha : \text{facteur } g) \tag{2.3}$$

avec le champ magnétique du rayonnement évalué en $\vec{r}_\alpha$ (ordre 1 en q_α)

$$B(\vec{r}_\alpha) = i \int d^3k \sum_\varepsilon \frac{1}{c} \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0 (2\pi)^3}} \, \vec{\kappa} \times \vec{\varepsilon} \left[a_\varepsilon(\vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}_\alpha} - a_\varepsilon^+(\vec{k}) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}_\alpha} \right] \tag{2.4}$$

Transformation unitaire

- $$T = e^{iF_S/\hbar} \tag{2.5}$$

  On verra plus loin que F_S peut être pris linéaire en q_α.
- Développement de $H' = T H T^+$ en puissances de q_α

$$H' = H_R + \\ + H_{IS} + \left[\frac{iF_S}{\hbar}, H_R\right] + \\ + \left[\frac{iF_S}{\hbar}, H_{IS}\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{iF_S}{\hbar},\left[\frac{iF_S}{\hbar}, H_R\right]\right] + \cdots \tag{2.6}$$

– Annulation des termes en q_α de H'

$$H_{IS} + \left[\frac{iF_S}{\hbar}, H_R\right] = 0 \tag{2.7}$$

Comme H_{IS} et H_R sont respectivement linéaire et quadratique en q_α, on peut choisir F_S comme combinaison linéaire de a et a^+

$$\frac{iF_S}{\hbar} = \sum_\alpha \int d^3k \sum_\varepsilon \left[\beta'^{+}_\varepsilon(\vec{k},\alpha)\, a_\varepsilon(k) - \beta'_\varepsilon(\vec{k},\alpha)\, a^+_\varepsilon(\vec{k})\right] \tag{2.8}$$

L'annulation du coefficient de $a^+_\varepsilon(\vec{k})$ dans (2.7) donne

$$i\gamma_\alpha \frac{1}{c}\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0(2\pi)^3}}\ \vec{S}_\alpha\cdot(\vec{\kappa}\times\vec{\varepsilon})\, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}_\alpha} + \hbar\omega\, \beta'_\varepsilon(\vec{k},\alpha) = 0 \tag{2.9}$$

c'est à dire

$$\beta'_\varepsilon(\vec{k},\alpha) = \frac{1}{\hbar}\gamma_\alpha\sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0\omega^3(2\pi)^3}}\ \vec{S}_\alpha\cdot(-i\vec{k}\times\vec{\varepsilon})\, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}_\alpha} \tag{2.10}$$

On en déduit, compte tenu de (2.8)

$$F_S = \sum_\alpha \gamma_\alpha\, \vec{S}_\alpha\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{Z}(\vec{r}_\alpha)\right) \tag{2.11}$$

<u>Termes d'ordre 2 en q_α dans le nouvel hamiltonien</u>

$$H'_2 = \left[\frac{iF_S}{\hbar}, H_{IS}\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{iF_S}{\hbar}, \underbrace{\left[\frac{iF_S}{\hbar}, H_R\right]}_{= -H_{IS}}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{iF_S}{\hbar}, H_{IS}\right] \tag{2.12}$$

c'est à dire encore, d'après (2.1) et (2.11)

$$H'_2 = -\frac{i}{2\hbar}\sum_\alpha\sum_\beta \gamma_\alpha\gamma_\beta \sum_{i,j = x,y,z} \left[(\vec{S}_\alpha)_i\left(\vec{\nabla}\times\vec{Z}(\vec{r}_\alpha)\right)_i,\ (\vec{S}_\beta)_j\left(\vec{B}(\vec{r}_\beta)\right)_j\right] \tag{2.13}$$

<u>Commutateur des opérateurs de rayonnement</u>

$$\left[\left(\vec{\nabla}\times\vec{Z}(\vec{r}_\alpha)\right)_i, \left(\vec{Z}(\vec{r}_\beta)\right)_j\right] = \int d^3k \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0\omega^3(2\pi)^3}} \int d^3k' \frac{1}{c}\sqrt{\frac{\hbar\omega'}{2\varepsilon_0(2\pi)^3}} \sum_{\vec{\varepsilon}}\sum_{\vec{\varepsilon}'} \\ (-1)\,(i\vec{k}\times\vec{\varepsilon})_i\,(\vec{\kappa}'\times\vec{\varepsilon}')_j\ \underbrace{\left[a_\varepsilon(\vec{k}), a^+_{\varepsilon'}(\vec{k}')\right]}_{\delta_{\varepsilon\varepsilon'}\,\delta(\vec{k}-\vec{k}')} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}_\alpha}\, e^{-i\vec{k}'\cdot\vec{r}_\beta} + \text{c.c}$$

$$= -\frac{i\hbar}{c^2}\int d^3k \frac{1}{\varepsilon_0(2\pi)^3} \underbrace{\sum_{\vec{\varepsilon}} (\vec{\kappa}\times\vec{\varepsilon})_i\,(\vec{\kappa}\times\vec{\varepsilon})_j}_{\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}}\, e^{i\vec{k}\cdot(\vec{r}_\alpha - \vec{r}_\beta)}$$

$$= -\frac{i\hbar}{\varepsilon_0 c^2}\underbrace{\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3k\left(\delta_{ij} - \frac{k_ik_j}{k^2}\right) e^{i\vec{k}\cdot(\vec{r}_\alpha-\vec{r}_\beta)}}_{\delta^\perp_{ij}(\vec{r}_\alpha - \vec{r}_\beta)} = -i\hbar\,\delta^\perp_{ij}(\vec{r}_\alpha-\vec{r}_\beta) \tag{2.14}$$

$\delta^\perp_{ij}(\vec{r}_\alpha - \vec{r}_\beta)$: "fonction delta-transverse" (voir Photons et Atomes – Complément A_I)

$$\delta^\perp_{ij}(\vec{\rho}) = \frac{2}{3}\delta_{ij}\,\delta(\vec{\rho}) + \frac{1}{4\pi\rho^3}\left(\frac{3\rho_i\rho_j}{\rho^2} - \delta_{ij}\right) \tag{2.15}$$

Commutateur des opérateurs de spin

$$[(\vec{S}_\alpha)_i , (\vec{S}_\beta)_j] = i\hbar\, \delta_{\alpha\beta} \sum_k \varepsilon_{ijk} (\vec{S}_\alpha)_k \qquad (2.16)$$

$$\hookrightarrow \quad H'_2 = -\frac{i}{2\hbar} \sum_\alpha \sum_\beta \sum_i \sum_j \gamma_\alpha \gamma_\beta \Big\{ S_{\alpha i} S_{\beta j} \left[(\vec{\nabla}\times\vec{Z}(\vec{r}_\alpha))_i , (\vec{B}(\vec{r}_\beta))_j \right] + $$
$$ + (\vec{\nabla}\times\vec{Z}(\vec{r}_\alpha))_i (\vec{B}(\vec{r}_\beta))_j \left[S_{\alpha i}, S_{\beta j} \right] \Big\} \qquad (2.17)$$

Le 1er terme est un nouvel hamiltonien de spin $H'_2(\text{spin})$

Le 2ème terme est un nouvel hamiltonien d'interaction $H'_2(\text{interaction})$

Nouvel hamiltonien de spin . D'après (2.14) et (2.17)

$$H'_2(\text{spin}) = -\frac{1}{2\varepsilon_0 c^2} \sum_\alpha \sum_\beta \sum_i \sum_j \gamma_\alpha \gamma_\beta S_{\alpha i} S_{\beta j}\, \delta^\perp_{ij}(\vec{r}_\alpha - \vec{r}_\beta)$$
$$= \sum_{\alpha\neq\beta} H'_2(\alpha,\beta) + \sum_\alpha H'_2(\alpha) \qquad (2.18)$$

$\boxed{\alpha \neq \beta}$

$$H'_2(\alpha,\beta) + H'_2(\beta,\alpha) = -\frac{2\gamma_\alpha\gamma_\beta}{3\varepsilon_0 c^2}\, \vec{S}_\alpha\cdot\vec{S}_\beta\ \delta(\vec{r}_\alpha - \vec{r}_\beta) +$$
$$+ \frac{\gamma_\alpha\gamma_\beta}{4\pi\varepsilon_0 c^2} \left\{ \frac{\vec{S}_\alpha\cdot\vec{S}_\beta}{|\vec{r}_\alpha-\vec{r}_\beta|^3} - 3\,\frac{[\vec{S}_\alpha\cdot(\vec{r}_\alpha-\vec{r}_\beta)][\vec{S}_\beta\cdot(\vec{r}_\alpha-\vec{r}_\beta)]}{|\vec{r}_\alpha-\vec{r}_\beta|^5} \right\} \qquad (2.19)$$

1er terme : interaction de contact de Fermi entre les 2 spins

2ème terme : interaction dipôle - dipôle entre les 2 spins

$\boxed{\alpha = \beta}$

$$H'_2(\alpha) = -\frac{\gamma_\alpha^2}{2\varepsilon_0 c^2} \sum_i \sum_j S_{\alpha i} S_{\alpha j}\, \delta^\perp_{ij}(\vec{0}) \qquad (2.20)$$

$$\delta^\perp_{ij}(\vec{0}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^{k_c} k^2 dk \int d\Omega \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}\right) = \frac{k_c^3}{9\pi^2}\, \delta_{ij} \qquad (2.21)$$

$$H'_2(\alpha) = -\frac{\gamma_\alpha^2 k_c^3}{18\,\varepsilon_0 \pi^2 c^2}\, \vec{S}_\alpha^{\,2} \qquad (2.22)$$

Terme d'energie propre des moments magnétiques

Couplage de chaque spin avec son champs magnétique propre

Nouvel hamiltonien d'interaction

$$H'_2(\text{interaction}) = -\frac{i}{2\hbar} \sum_\alpha \sum_\beta \sum_i \sum_j i\hbar\, \delta_{\alpha\beta} \sum_k \varepsilon_{ijk} (\vec{\nabla}\times\vec{Z}(\vec{r}_\alpha))_i (\vec{B}(\vec{r}_\beta))_j\, S_{\alpha k}\, \gamma_\alpha \gamma_\beta$$
$$= \sum_\alpha \frac{\gamma_\alpha^2}{2} \left[\vec{\nabla}\times\vec{Z}(\vec{r}_\alpha)\right]\cdot\left[\vec{B}(\vec{r}_\alpha)\times\vec{S}_\alpha\right]$$
$$= \sum_\alpha \frac{\gamma_\alpha^2}{2}\, \vec{S}_\alpha\cdot\left[(\vec{\nabla}\times\vec{Z}(\vec{r}_\alpha)) \times \vec{B}(\vec{r}_\alpha) \right] \qquad (2.23)$$

Terme à 2 photons, quadratique en a et a^+ .

Couplage avec un champ magnétique statique $\vec{B}_0$

Il faut ajouter à l'hamiltonien H donné en (2.1)

$$H_S = -\sum_\alpha \gamma_\alpha \vec{S}_\alpha \cdot \vec{B}_0 \tag{2.24}$$

H_S est d'ordre 1 en γ_α et d'ordre 1 vis à vis des courants extérieurs créant $\vec{B}_0$.

Transformée de H_S par $T = \exp(iF_S/\hbar)$

$$T H_S T^+ = e^{iF_S/\hbar} H_S e^{-iF_S/\hbar}$$
$$= H_S + \left[\frac{iF_S}{\hbar}, H_S\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{iF_S}{\hbar},\left[\frac{iF_S}{\hbar}, H_S\right]\right] + \cdots \tag{2.25}$$

Terme $\left[\frac{iF_S}{\hbar}, H_S\right]$ D'après (2.11) et (2.24)

$$\left[\frac{iF_S}{\hbar}, H_S\right] = \frac{i}{\hbar}\sum_\alpha\sum_\beta \left[\gamma_\alpha \vec{S}_\alpha\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{Z}(\vec{r}_\alpha)), -\gamma_\beta \vec{S}_\beta\cdot\vec{B}_0\right]$$
$$= -\frac{i}{\hbar}\sum_\alpha\sum_\beta\sum_i\sum_j \gamma_\alpha\gamma_\beta \underbrace{\left[S_{\alpha i}, S_{\beta j}\right]}_{i\hbar\sum_k \varepsilon_{ijk}\delta_{\alpha\beta} S_{\alpha k}} (\vec{\nabla}\times\vec{Z}(\vec{r}_\alpha))_i B_{0j}$$
$$= \sum_\alpha \gamma_\alpha^2 (\vec{B}_0\times\vec{S}_\alpha)\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{Z}(\vec{r}_\alpha)) \tag{2.26}$$

Nouvel hamiltonien d'interaction à 1 photon (linéaire en a et a^+)

Manifestement lié à la précession du spin autour de $\vec{B}_0$. Le spin ne peut rayonner et émettre de photons réels que parce qu'il tourne autour de $\vec{B}_0$ et est donc accéléré.

Terme $\frac{1}{2}\left[\frac{iF_S}{\hbar},\left[\frac{iF_S}{\hbar}, H_S\right]\right]$. D'après (2.11) et (2.26),

$$\frac{1}{2}\left[\frac{iF_S}{\hbar},\left[\frac{iF_S}{\hbar}, H_S\right]\right] = \frac{1}{2}\sum_\alpha\sum_\beta \frac{i\gamma_\alpha}{\hbar}\gamma_\beta^2 \left[\vec{S}_\alpha\cdot\vec{\nabla}\times\vec{Z}(\vec{r}_\alpha), (\vec{B}_0\times\vec{S}_\beta)\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{Z}(\vec{r}_\beta))\right] \tag{2.27}$$

- Comme $\vec{\nabla}\times\vec{Z}(\vec{r}_\alpha)$ commute avec $\vec{\nabla}\times\vec{Z}(\vec{r}_\beta)$, le commutateur (2.27) ne fait intervenir que les commutateurs entre $\vec{S}_\alpha$ et $\vec{S}_\beta$ qui sont nuls si $\alpha\neq\beta$
- Contribution du spin α à (2.27)

$$\frac{i\gamma_\alpha^3}{2\hbar}\left[\vec{S}_\alpha\cdot\vec{\nabla}\times\vec{Z}(\vec{r}_\alpha), (\vec{B}_0\times\vec{S}_\alpha)\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{Z}(\vec{r}_\alpha))\right] \tag{2.28}$$

$$\left[S_{\alpha i}, (\vec{B}_0\times\vec{S}_\alpha)_j\right] = \sum_{k\ell}\varepsilon_{jk\ell} B_{0k}\left[S_{\alpha i}, S_{\alpha \ell}\right] = i\hbar\sum_{k\ell n}\varepsilon_{jk\ell}\varepsilon_{i\ell n} B_{0k} S_{\alpha n}$$
$$= i\hbar\sum_{kn}\left[\delta_{jn}\delta_{ik} - \delta_{ij}\delta_{nk}\right] S_{\alpha n} B_{0k} = -i\hbar\left[\delta_{ij}\vec{S}_\alpha\cdot\vec{B}_0 - B_{0i} S_{\alpha j}\right] \tag{2.29}$$

- Contribution du spin α à (2.27)

$$\frac{\gamma_\alpha^3}{2}\sum_{ij}(\vec{\nabla}\times\vec{Z}(\vec{r}_\alpha))_i (\vec{\nabla}\times\vec{Z}(\vec{r}_\alpha))_j \left[\delta_{ij}\vec{S}_\alpha\cdot\vec{B}_0 - S_{\alpha j} B_{0i}\right] \tag{2.30}$$

– Valeur moyenne dans le vide de l'opérateur à 2 photons de (2.30)

$$\langle 0 | (\vec{\nabla} \times \vec{Z}(\vec{r}_\alpha))_i \, (\vec{\nabla} \times \vec{Z}(\vec{r}_\alpha))_j | 0 \rangle =$$

$$= \int d^3k \, d^3k' \, \frac{1}{c^2} \, \frac{\hbar}{2\varepsilon_0 (2\pi)^3 \sqrt{\omega\omega'}} \sum_{\vec{\varepsilon}} \sum_{\vec{\varepsilon}'} (\vec{k}' \times \vec{\varepsilon}')_i (\vec{k} \times \vec{\varepsilon})_j \, \delta_{\varepsilon\varepsilon'} \, \delta(\vec{k} - \vec{k}') \, e^{i(\vec{k}' - \vec{k}) \cdot \vec{r}_\alpha}$$

$$= \int d^3k \, \frac{\hbar}{2\varepsilon_0 (2\pi)^3 c^2 \omega} \underbrace{\sum_{\vec{\varepsilon}} (\vec{k} \times \vec{\varepsilon})_i (\vec{k} \times \vec{\varepsilon})_j}_{= \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}} = \frac{\hbar k_M^3}{12 \varepsilon_0 \pi^2 c^3} \, \delta_{ij} \qquad (2.31)$$

– Valeur moyenne dans le vide de (2.30)

$$\frac{1}{2} \gamma_\alpha^3 \frac{\hbar k_M^2}{12 \varepsilon_0 \pi^2 c^3} \sum_{ij} \delta_{ij} \left[\delta_{ij} \, \vec{S}_\alpha \cdot \vec{B}_0 - S_{\alpha j} B_{0i} \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \gamma_\alpha^3 \frac{\hbar k_M^2}{12 \varepsilon_0 \pi^2 c^3} \left[3 \vec{S}_\alpha \cdot \vec{B}_0 - S_{\alpha z} B_0 \right] = \frac{\gamma_\alpha^3 \hbar k_M^2}{12 \varepsilon_0 \pi^2 c^3} S_{\alpha z} B_0 \qquad (2.32)$$

On a supposé $\vec{B}_0$ parallèle à Oz.

– Combiné avec $H_S = -\gamma_\alpha S_{\alpha z} B_0$, (2.32) donne

$$-\gamma_\alpha \left[1 - \frac{\gamma_\alpha^2 \hbar k_M^2}{12 \varepsilon_0 \pi^2 c^3} \right] S_{\alpha z} B_0 \qquad (2.33)$$

<u>Discussion physique</u> : le terme correctif dans le crochet de (2.33) représente une correction radiative à la fréquence de Larmor du spin $\omega_L = -\gamma_\alpha B_0 = -g_\alpha \frac{q_\alpha}{2m_\alpha} B_0$

$$\omega_L \rightarrow \omega_L + \delta\omega_L \qquad (2.34)$$

$$\frac{\delta\omega_L}{\omega_L} = - \frac{\gamma_\alpha^2 \hbar k_M^2}{12 \varepsilon_0 \pi^2 c^3} = - \frac{g_\alpha^2}{4} \frac{q_\alpha^2 \hbar k_M^2}{12 \varepsilon_0 m_\alpha^2 c^3 \pi^2} = - \frac{g_\alpha^2}{4} \frac{\alpha}{3\pi} \left(\frac{\hbar \omega_M}{m_\alpha c^2} \right)^2 \qquad (2.35)$$

Modification du moment magnétique de spin. Réduction de ce moment magnétique causée par la vibration angulaire du spin dans les fluctuations du vide

<u>Remarque</u> : Effet en $(\hbar\omega_M / m_\alpha c^2)^2$, donc plus petit que $\delta m_{1\alpha} / m_\alpha$ (qui est en $\hbar\omega_M / m_\alpha c^2$), donc plus petit que la variation de la fréquence cyclotron $\omega_c = -q_\alpha B_0 / m_\alpha$ d'une particule de charge q_α et de masse m_α tournant dans un champ magnétique

---

<u>Hamiltonien</u> pour des particules non localisées avec spins (sans champs magnétique statique)

$$H = \sum_\alpha \frac{1}{2m_\alpha} \left[\vec{P}_\alpha - q_\alpha \vec{A}_\perp(\vec{r}_\alpha) \right]^2 + \sum_\alpha \varepsilon_{Coul}^\alpha + \sum_\alpha V_e(\vec{r}_\alpha) + H_R$$

$$- \sum_\alpha g_\alpha \frac{q_\alpha}{2m_\alpha} \vec{S}_\alpha \cdot \vec{\nabla} \times \vec{A}_\perp(\vec{r}_\alpha) \qquad (3.1)$$

- Eléments nouveaux par rapport à l'hamiltonien du § 1
$\sum_\alpha$ dans la 1ère ligne (plusieurs particules) – Terme d'interaction lié au spin dans la 2ème ligne. Sera noté H_1^{sp}

$$H_1^{sp} = - \sum_\alpha g_\alpha \frac{q_\alpha}{2m_\alpha} \vec{S}_\alpha \cdot \vec{\nabla} \times \vec{A}_\perp(\vec{r}_\alpha) \qquad (3.2)$$

-
$$H = H_0 + H_1 + H_2 \qquad (3.3)$$

$$H_0 = \sum_\alpha \frac{\vec{P}_\alpha^{\,2}}{2m_\alpha} + H_R \qquad (3.4)$$

$$H_1 = H_1^{orb} + H_1^{sp} \qquad (3.5)$$

$$H_1^{orb} = - \sum_\alpha q_\alpha \frac{\vec{P}_\alpha}{m_\alpha} \cdot \vec{A}_\perp(\vec{r}_\alpha) \qquad (3.6)$$

$$H_2 = \sum_\alpha \frac{q_\alpha^2}{2m_\alpha} \vec{A}_\perp^{\,2}(\vec{r}_\alpha) + \sum_\alpha V_e(\vec{r}_\alpha) + \sum_\alpha \varepsilon_{Coul}^\alpha \qquad (3.7)$$

Transformation unitaire $\quad T = e^{iF/\hbar}$

- Comme dans les paragraphes précédents, F doit satisfaire à

$$\left[\frac{iF}{\hbar}, H_0\right] + H_1 = 0 \qquad (3.8)$$

pour que le nouvel hamiltonien THT^+ ne contienne plus de terme d'interaction linéaire en q_α

- Comme $H_1 = H_1^{orb} + H_1^{sp}$, on peut choisir

$$F = F^{orb} + F^{sp} \qquad (3.9)$$

et satisfaire (3.8) au moyen des 2 conditions

$$\left[\frac{iF^{orb}}{\hbar}, H_0\right] + H_1^{orb} = 0 \qquad (3.10)$$

$$\left[\frac{iF^{sp}}{\hbar}, H_0\right] + H_1^{sp} = 0 \qquad (3.11)$$

Nous connaissons déjà la solution de (3.10) qui s'écrit, à l'ordre le plus bas en $p_\alpha/m_\alpha c$ (voir (1.24)) :

$$F^{orb} = \sum_\alpha \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \vec{p}_\alpha \times \vec{Z}(\vec{r}_\alpha) \qquad (3.12)$$

De même, (2.11) représente la solution de (3.11) à l'ordre le plus bas en $p_\alpha/m_\alpha c$

$$F^{sp} = \sum_\alpha g_\alpha \frac{q_\alpha}{2m_\alpha} \vec{S}_\alpha \cdot \vec{\nabla} \times \vec{Z}(\vec{r}_\alpha) \qquad (3.13)$$

Nouvel hamiltonien des particules

- le nouvel hamiltonien à l'ordre 2 en q_α est la somme de H_2 et de

$$\frac{1}{2}\left[\frac{iF}{\hbar}, H_1\right] = \frac{i}{2\hbar}\left[F^{orb} + F^{sp}, H_1^{orb} + H_1^{sp}\right] \qquad (3.14)$$

- Comme F^{orb} et F^{sp} sont, de même que H_1^{orb} et H_1^{sp}, des combinaisons linéaires de a et a^+, les commutateurs $[a, a^+] = 1$ vont faire apparaître dans (3.14) un nouvel hamiltonien de particules

3 types de contributions apparaissent

1ère contribution
$$\frac{i}{2\hbar}\left[F^{orb}, H_1^{orb}\right] = \frac{i}{2\hbar}\sum_\alpha\sum_\beta\left[F_\alpha^{orb}, H_{1\beta}^{orb}\right] \tag{3.15}$$

$\boxed{\alpha=\beta}$ $\rightarrow$ Correction d'énergie cinétique de la particule α due à la correction de masse $\delta m_{1\alpha}$ (voir § 1 précédent)
$$-\sum_\alpha \frac{\delta m_{1\alpha}}{m_\alpha}\frac{\vec{P}_\alpha^{\,2}}{2m_\alpha} \tag{3.16}$$

$\boxed{\alpha\neq\beta}$ $\rightarrow$ Interaction courant-courant étudiée dans le cours
$$-\sum_{\alpha<\beta}\frac{q_\alpha q_\beta}{8\pi\varepsilon_0 m_\alpha m_\beta c^2}\left\{\frac{\vec{P}_\alpha\cdot\vec{P}_\beta}{|\vec{r}_\alpha-\vec{r}_\beta|} + \frac{[\vec{P}_\alpha\cdot(\vec{r}_\alpha-\vec{r}_\beta)][\vec{P}_\beta\cdot(\vec{r}_\alpha-\vec{r}_\beta)]}{|\vec{r}_\alpha-\vec{r}_\beta|^3}\right\} \tag{3.17}$$

2ème contribution
$$\frac{i}{2\hbar}\left[F^{orb}, H_1^{sp}\right] + \frac{i}{2\hbar}\left[F^{sp}, H_1^{orb}\right] \tag{3.18}$$

Termes croisés spin-orbite

On trouve que les termes $\alpha=\beta$ sont nuls. Les termes $\alpha\neq\beta$ représentent l'interaction spin-autre orbite

Interaction spin β - orbite α
$$-\frac{g_\alpha g_\beta}{2m_\beta c^2}\,\vec{S}_\beta\cdot\vec{\nabla}_\beta\times\left\{\frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\vec{P}_\alpha}{m_\alpha}\frac{q_\alpha}{|\vec{r}_\alpha-\vec{r}_\beta|} + \frac{q_\alpha}{|\vec{r}_\alpha-\vec{r}_\beta|}\frac{\vec{P}_\alpha}{m_\alpha}\right]\right\} \tag{3.19}$$

3ème contribution
$$\frac{i}{2\hbar}\left[F^{sp}, H_1^{sp}\right] = \frac{i}{2\hbar}\sum_\alpha\sum_\beta\left[F_\alpha^{sp}, H_{1\beta}^{sp}\right] \tag{3.20}$$

$\boxed{\alpha=\beta}$ $\rightarrow$ Energie propre de spin calculée plus haut (voir (2.22))

$\boxed{\alpha\neq\beta}$ $\rightarrow$ Interaction dipôle-dipôle + interaction de contact de Fermi calculées plus haut (voir (2.19))

Cohérence du calcul en $1/c$

- Les termes obtenus en (3.16), (3.17), (3.19), (2.22), (2.19) sont en $1/c^2$. Comme les expressions de F^{orb} et F^{sp} utilisées pour obtenir ces résultats sont celles d'ordre le plus bas en $1/c$, de tels résultats ne sont pas modifiés par les corrections relativistes en $1/c^2$ à H_0 et H_1

  Les expressions (3.16), (3.17), (3.19), (2.22), (2.19) sont donc correctes

- Par contre, au même ordre en $1/c^2$, il faut ajouter à ces termes les corrections relativistes en $1/c^2$ aux hamiltoniens des particules qui figurent dans H_0 et H_2. Ce sont :

(i) La correction masse-vitesse
$$-\sum_\alpha\frac{\vec{P}_\alpha^{\,4}}{8m_\alpha^3c^2} \tag{3.21}$$

(ii) Le terme de Darwin
$$\sum_\alpha\frac{\hbar^2}{8m_\alpha^2c^2}\,\Delta V_e(\vec{r}_\alpha) \tag{3.22}$$

(iii) Le couplage spin orbite de chaque particule
$$\sum_\alpha\frac{g_\alpha-1}{2m_\alpha c^2}\,\vec{S}_\alpha\cdot\left[\left(\vec{\nabla}_\alpha V_e(\vec{r}_\alpha)\right)\times\frac{\vec{P}_\alpha}{m_\alpha}\right] \tag{3.23}$$