

COLLEGE DE FRANCE

COURS DE PHYSIQUE
ATOMIQUE ET MOLECULAIRE

CLAUDE COHEN-TANNOUJJI

ANNEES SCOLAIRES : 1986-1987

TABLE DES MATIERES

<u>INTRODUCTION GENERALE</u>	I-1
<u>LE LAGRANGIEN STANDARD DE L'ELECTRODYNAMIQUE</u>	
<u>CLASSIQUE</u>	II-1
1- Expression du lagrangien standard	II-2
2- Propriétés du lagrangien standard	II-2
3- Difficultés du lagrangien standard	II-3
4- Solutions possibles à ces difficultés	II-3
<u>ELECTRODYNAMIQUE EN JAUGE DE COULOMB</u>	II-3
1- Eliminations des variables dynamiques redondantes	II-3
2- Lagrangien en jauge de Coulomb	III-1
3- Moments conjugués - Hamiltonien	III-2
4- Variables normales	III-3
5- Quantification canonique	III-4
6- Récapitulation et conclusion	III-4
<u>FORMULATION COVARIANTE (champ libre ou couplé à des sources extérieurs)</u>	IV-1
A- <u>Electrodynamique classique en jauge de Coulomb</u>	IV-2
1- Formulation lagrangienne	IV-2
2- Formulation hamiltonienne	IV-3
3- Variables normales	IV-3
B- <u>Difficulté posées par la quantification du champ libre</u>	IV-4
1- Quantification canonique	IV-4
2- Problèmes d'interprétation physique	IV-4

C- <u>Quantification covariante avec une métrique indéfinie</u>	V-1
1- Introduction d'un 2ème produit scalaire et d'une 2ème norme	V-1
2- Pourquoi introduire une 2ème métrique non définie positive ?	V-2
3- Détermination de la nouvelle métrique	V-3
4- Construction des kets physiques	V-3
D- <u>Champ quantique couplé à 2 charges fixes</u>	V-3
1- Hamiltonien	V-3
2- Déplacement énergétique de l'état fondamental. Réinterprétation de la loi de Coulomb	V-4
3- Nouvel état fondamental du champ	V-4
 <u>TRANSFORMATION UNITAIRE ASSOCIEE A UN CHANGEMENT DE LAGRANGIEN</u>	
1- Changement de lagrangien en théorie classique	VI-1
2- Les 2 descriptions quantiques associées aux 2 lagrangiens	VI-2
3- Correspondance entre les 2 descriptions quantiques	VI-3
 <u>TRANSFORMATION DE GÖPPERT-MAYER POUR DES PARTICULES DANS UN CHAMP EXTERIEUR</u>	
1- Particules dans un champ extérieur	VII-1
2- Transformation de Göppert-Mayer	VII-2
3- Généralisations	VII-3
 <u>EQUIVALENCE DES POINTS DE VUE $\vec{A}.\vec{p}$ et $\vec{E}.\vec{r}$</u>	
<u>ILLUSTRATIONS SUR DES PROCESSUS A UN OU DEUX PHOTONS</u>	
1- Amplitudes de transition	VIII-1
2- Vérification directe de l'égalité entre les amplitudes de transition calculées dans un point de vue et dans l'autre	VIII-2
3- Résolution de quelques paradoxes	VIII-3

<u>LA TRANSFORMATION DE POWER-ZIENAU-WOOLLEY</u>	IX-1
A- <u>Description des systèmes localisés de charges</u>	IX-1
1- Densité de polarisation associée à un système de charges	IX-1
2- Induction électrique	IX-1
3- Courant de polarisation et de magnétisation	IX-2
B- <u>Changement de lagrangien</u>	IX-3
1- Transformation de Power-Zienau-Woolley	IX-3
2- Ancien et nouveau lagrangiens	IX-3
3- Développement multipolaire	IX-3
4- Equivalence avec un changement de jauge - La jauge de Poincaré	IX-4
C- <u>Nouveaux moments conjugués. Nouvel hamiltonien</u>	X-1
1- Nouveau moment conjugué de \vec{r}_d	X-1
2- Nouveau moment conjugué de \vec{A}_1	X-1
3- Nouvel hamiltonien - Discussion physique	X-2
D- <u>Electrodynamique quantique dans le nouveau point de vue</u>	X-3
1- Quantification canonique	X-3
2- Expression de quelques grandeurs physiques	X-3
E- <u>Cas de 2 systèmes séparés de charges globalement neutres</u>	X-4
1- Nouvel hamiltonien	X-4
2- Disparition des interactions coulombiennes entre les 2 systèmes	X-4

ERRATUM

dernière page

Introduction générale

27.1.87

Thème choisi

Etude de diverses formulations équivalentes de l'Electrodynamique Quantique.

On analysera les motivations qui sont à l'origine de ces formulations, leurs avantages et inconvénients respectifs et les éclairages physiques qu'elles donnent sur les processus d'interaction entre matière et rayonnement

L'accent sera mis sur les interprétations physiques et l'enchaînement des idées, le détail des calculs pouvant être trouvé dans le livre

"Photons et Atomes - Introduction à l'Electrodynamique Quantique" par C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, G. Grynberg InterEditions, Paris 1987, à paraître.

Le système étudié en Electrodynamique : Particules + Champ

- Evolution couplé
Dynamique quantique correspondant à celle décrite par les équations de Maxwell - Lorentz
- Cas particuliers plus simple
Particules quantiques couplés à un "champ extérieur"
Champ quantique couplé à des "sources extérieures"
(L'un des 2 sous-systèmes a une évolution temporelle donnée)

Description des 2 sous-systèmes - Variables dynamiques

① Particules

- Description non relativiste
Nombre fixe de particules indexés par α et décrites par leurs positions \vec{r}_α et leurs vitesses \vec{v}_α (ou leurs impulsions \vec{p}_α)
Etat quantique décrit par des fonctions d'onde de Schrödinger ou des spineurs de Pauli
- Description relativiste
Théorie classique : champ de matière relativiste couplé au champ de Maxwell (exemple du champ de Dirac).
Théorie quantique : les excitations élémentaires du champ de matière quantifié décrivent les particules qui sont en nombre indéterminé (par exemple, les électrons et les positrons sont les excitations élémentaires du champ de Dirac quantifié).

② Description du champ électromagnétique par les champs \vec{E} et \vec{B}

- a) Etat du champ à un instant t_0 donné
- Défini par la donnée des champs \vec{E} et \vec{B} en tout point \vec{r}

$$\{ \vec{E}(\vec{r}, t_0), \vec{B}(\vec{r}, t_0) \} \text{ pour tout } \vec{r} \quad (1)$$

(Les équations de Maxwell pour \vec{E} et \vec{B} sont du 1^{er} ordre en t)

- On a l'impression qu'il faut se donner en chaque point \vec{r} 6 composantes réelles $E_x, E_y, E_z, B_x, B_y, B_z$
En fait, ces 6 composantes ne sont pas réellement indépendantes, comme nous allons le voir.

b) Passage de l'espace réel à l'espace réciproque

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k \vec{E}(\vec{k}, t) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \quad (2)$$

$$\vec{E}(\vec{k}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3r \vec{E}(\vec{r}, t) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} \quad (3)$$

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}^*(\vec{r}, t) \implies \vec{E}(\vec{k}, t) = \vec{E}^*(-\vec{k}, t) \quad (4)$$

Equations de Maxwell dans l'espace réciproque

$$i\vec{k} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \quad (5a)$$

$$i\vec{k} \cdot \vec{B} = 0 \quad (5b)$$

$$i\vec{k} \times \vec{E} = -\dot{\vec{B}} \quad (5c)$$

$$i\vec{k} \times \vec{B} = \frac{1}{c^2} \dot{\vec{E}} + \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \vec{J} \quad (5d)$$

c) Champs vectoriels longitudinaux et transverses

- Champ longitudinal $\vec{V}_{||}(\vec{k})$

$$\vec{k} \times \vec{V}_{||}(\vec{k}) = \vec{0} \quad \forall \vec{k} \quad \text{ou} \quad \vec{V}_{||}(\vec{k}) \text{ parallèle à } \vec{k} \quad \forall \vec{k} \quad (6)$$

- Champ transverse $\vec{V}_{\perp}(\vec{k})$

$$\vec{k} \cdot \vec{V}_{\perp}(\vec{k}) = 0 \quad \forall \vec{k} \quad \text{ou} \quad \vec{V}_{\perp}(\vec{k}) \text{ perpendiculaire à } \vec{k} \quad \forall \vec{k} \quad (7)$$

- Signification géométrique claire dans l'espace réciproque (dans l'espace réel, $\vec{\nabla} \times \vec{V}_{||} = \vec{0}$, $\vec{\nabla} \cdot \vec{V}_{\perp} = 0$ pour tout \vec{r})

d) Parties longitudinales des champs \vec{E} et \vec{B}

$$(5b) \rightarrow \vec{B}_{||} = \vec{0} \quad (8)$$

$$(5a) \rightarrow \vec{E}_{||}(\vec{k}) = -\frac{i\vec{k}}{\epsilon_0 k^2} \rho(\vec{k}) \quad (9)$$

Par transformation de Fourier, le produit de $-i\vec{k}/\epsilon_0 k^2$ et $\rho(\vec{k})$ devient un produit de convolution des T.F. de ces 2 fonctions

$$\vec{E}_{||}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \rho(\vec{r}') \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (10)$$

La partie longitudinale du champ \vec{E} à l'instant t est le champ électrostatique créé par la distribution de charges $\rho(\vec{r}, t)$ figée à cet instant. Donc, la partie longitudinale de \vec{E} est connue si l'on connaît les positions des particules. Ce n'est pas une variable indépendante.

e) Conclusion sur le nombre de degrés de liberté indépendants en chaque point \vec{k} de l'espace réciproque

- Les variables indépendantes sont les 2 composantes transverses

de $\vec{E}(\vec{k})$ et $\vec{B}(\vec{k})$ (c.à.d \perp à \vec{k}) en chaque point \vec{k}
 soit en tout 4 composantes complexes

- A cause des contraintes de réalité (4), les 4 composantes en \vec{k} sont reliées aux 4 composantes en $-\vec{k}$. Donc, pour l'ensemble des points \vec{k} et $-\vec{k}$, 4 composantes complexes indépendantes. Soit en tout 2 composantes complexes (ou 4 composantes réelles) indépendantes en chaque point \vec{k}

- Interprétation quantique : fonction d'onde, dans l'espace réciproque, d'une particule de spin 1 dont l'hélicité (projection du spin \vec{S} sur \vec{k}) ne prend que les valeurs $+\hbar$ et $-\hbar$ (la valeur 0 étant exclue à cause de la transversalité)

③ Description du champ électromagnétique par les potentiels \vec{A} et U

a) Importance de cette description

Dans la formulation lagrangienne ou hamiltonienne, et en théorie quantique, ce sont les potentiels vecteur \vec{A} et scalaire U et non les champs \vec{E} et \vec{B} qui apparaissent.

Comme les équations de Lagrange sont du 2^{ème} ordre en t vis à vis de \vec{A} et U , l'état du champ est défini à t_0 par la donnée de

$$\{ \vec{A}(\vec{r}, t_0), \dot{\vec{A}}(\vec{r}, t_0), U(\vec{r}, t_0), \dot{U}(\vec{r}, t_0) \} \text{ pour tout } \vec{r} \quad (11)$$

Il semble y avoir 8 degrés de liberté réels en chaque point. Or, on a vu plus haut qu'il n'y a que 4 degrés de liberté réels indépendants. Il est donc clair qu'il y a de nombreuses variables redondantes dans la description du champ par \vec{A} et U .

b) Liens entre champs et potentiels

$$\begin{cases} \vec{E} = -\dot{\vec{A}} - \vec{\nabla} U & (12a) \\ \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} & (12b) \end{cases}$$

$$\text{ou } \begin{cases} \vec{E} = -\dot{\vec{A}} - i\vec{k} U & (13a) \\ \vec{B} = i\vec{k} \times \vec{A} & (13b) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{E}_{\parallel} = -\dot{\vec{A}}_{\parallel} - i\vec{k} U & (14a) \\ \vec{E}_{\perp} = -\dot{\vec{A}}_{\perp} & (14b) \end{cases}$$

c) Changement de jauge

- les potentiels $\{ \vec{A}, U \}$ et $\{ \vec{A}', U' \}$ avec

$$\begin{cases} \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} F & (15a) \\ U' = U - \frac{\partial F}{\partial t} & (15b) \end{cases}$$

$$\text{ou } \begin{cases} \vec{A}' = \vec{A} + i\vec{k} F & (16a) \\ U' = U - \dot{F} & (16b) \end{cases}$$

où F est une fonction quelconque décrivant les mêmes champs physiques \vec{E} et \vec{B}

- De (16a) il découle que

$$\vec{A}'_{\perp} = \vec{A}_{\perp} \quad (17) \quad \text{ou} \quad \vec{A}'_{\perp} = \vec{A}_{\perp} \quad (18)$$

Comme les champs \vec{E} et \vec{B} , \vec{A}_{\perp} est invariant de jauge

- Par contre, dans un changement de jauge, $\vec{A}_{||}$ et u changent puisque, d'après (16)

$$\vec{A}'_{||} = \vec{A}_{||} + i\vec{k}\Phi \quad u' = u - \dot{\Phi} \quad (19)$$

C'est cette possibilité de changer $\vec{A}_{||}$ et u sans changer les champs physiques \vec{E} et \vec{B} qui est à l'origine de la redondance de la description par les potentiels.

L'approche lagrangienne et hamiltonienne

① Lagrangien - Action

Système discret

- Coordonnées et vitesses généralisées: x_j, \dot{x}_j ($j=1,2,\dots,N$)
- Lagrangien: fonction des x_j et \dot{x}_j : $L(x_j, \dot{x}_j)$
- Action correspondant à un mouvement $x_j(t)$

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(x_j(t), \dot{x}_j(t)) dt \quad (20)$$

Système continu

- Coordonnées et vitesses généralisées: $A_j(\vec{r}), \dot{A}_j(\vec{r})$ ($j=1,2,\dots,N$)
- Lagrangien L et densité de lagrangien \mathcal{L}

$$L = \int d^3r \mathcal{L}(A_j, \dot{A}_j, \partial_i A_j) \quad (21) \quad \{\partial_i = \partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z\}$$

- Action correspondant à un mouvement $A_j(\vec{r}, t)$

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3r \mathcal{L}(A_j(\vec{r}, t), \dot{A}_j(\vec{r}, t), \partial_i A_j(\vec{r}, t)) \quad (22)$$

② Principe de moindre action

- Parmi tous les mouvements possibles partant d'un état initial donné (défini par $x_j(t_1)$ ou $A_j(\vec{r}, t_1)$) et aboutissant à un état final donné à t_2 (défini par $x_j(t_2)$ ou $A_j(\vec{r}, t_2)$), le mouvement effectivement suivi est celui qui rend l'action extrémale

- Traduction mathématique de ce principe: équations de Lagrange caractérisant le mouvement effectivement suivi

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} \right) = \frac{\partial L}{\partial x_j} \quad (23)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_j} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_j} - \sum_{i=x,y,z} \partial_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_i A_j)} \quad (24)$$

③ Lagrangiens équivalents

Système discret: Les 2 actions correspondant à 2 lagrangiens différant par une dérivée totale, L et $L' = L + df/dt$, diffèrent par une constante $f(t_2) - f(t_1)$, indépendante du chemin suivi, et ont donc même extrema. L et L' sont équivalents

Attention: f peut dépendre des x_j . $S' - S$ vaut alors $f(x_j(t_2), t_2) - f(x_j(t_1), t_1)$ qui ne dépend pas du chemin suivi car $x_j(t_2)$ et $x_j(t_1)$ sont fixés. Par contre, f ne peut pas

dépendre des vitesses \dot{x}_j car df/dt dépendrait alors des accélérations \ddot{x}_j et $L' = L + df/dt$ ne serait plus alors un lagrangien (qui ne doit dépendre que des x_j et \dot{x}_j).

Système continu L et $L' = L + \sum_{i=x,y,z} \partial_i f_i + \partial f_0 / \partial t$

sont équivalents si les f_i s'annulent à l'infini (transformation de $\int d^3r \partial_i f_i$ en une intégrale de surface). Là aussi, f_0 ne doit pas dépendre des \dot{A}_j .

④ Moments conjugués

Système discret $P_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j}$ (25)

Système continu $\Pi_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_j}$ (26)

⑤ Hamiltonien

Système discret $H = \sum_j \dot{x}_j P_j - L$ (27)

Equations de Hamilton-Jacobi $\begin{cases} \dot{x}_j = \frac{\partial H}{\partial P_j} \\ \dot{P}_j = -\frac{\partial H}{\partial x_j} \end{cases}$ (28)

Système continu

$H = \int d^3r \sum_j \Pi_j(\vec{r}) \dot{A}_j(\vec{r}) - L = \int d^3r \mathcal{H}$ (29)

\mathcal{H} densité d'hamiltonien $\mathcal{H} = \sum_j \Pi_j(\vec{r}) \dot{A}_j(\vec{r}) - \mathcal{L}$ (30)

Equations de Hamilton - Jacobi

$\begin{cases} \dot{A}_j = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \Pi_j} \\ \dot{\Pi}_j = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial A_j} + \sum_{i=x,y,z} \partial_i \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial (\partial_i A_j)} \end{cases}$ (31)

⑥ Quantification canonique

Système discret : x_m et P_n , composantes cartésiennes de la position \vec{x} et de l'impulsion \vec{p}

$[x_m, x_n] = [P_m, P_n] = 0$ $[x_m, P_n] = i\hbar \delta_{mn}$ (32)

Système continu : A_m et Π_n composantes cartésiennes de $\vec{A}(\vec{r})$ et $\vec{\Pi}(\vec{r})$, les 3 composantes du champ étant indépendantes

$\begin{cases} [A_m(\vec{r}), A_n(\vec{r}')] = [\Pi_m(\vec{r}), \Pi_n(\vec{r}')] = 0 \\ [A_m(\vec{r}), \Pi_n(\vec{r}')] = i\hbar \delta_{mn} \delta(\vec{r} - \vec{r}') \end{cases}$ (33)

Remarque : Il est possible également dans certains cas de quantifier un champ avec des relations d'anticommutation entre champs et moments conjugués. Les équations de Heisenberg des champs quantiques $i\hbar \dot{\psi} = [\psi, H]$ doivent garder la même forme que les équations d'évolution des champs classiques.

① Comment sont-elles obtenues ?

A partir d'une formulation donnée, on peut

- changer de jauge
- changer de lagrangien en ajoutant une dérivée totale au lagrangien
- changer d'hamiltonien en effectuant directement sur l'hamiltonien une transformation unitaire.

Ces diverses transformations ne sont pas toujours nécessairement équivalentes.

Par exemple, certaines transformations de jauge se ramènent à des changements de lagrangien, mais il existe des changements de lagrangien qui ne sont pas équivalents à des changements de jauge et réciproquement.

De même, à tout changement de lagrangien est associé une transformation unitaire sur l'hamiltonien, mais il existe des transformations unitaires sur l'hamiltonien qui ne sont pas associées à des changements de lagrangien.

② Pourquoi rechercher des formulations équivalentes ?

- Essayer de trouver un nouveau point de vue où les calculs sont plus simples et plus directs, où les objets mathématiques de la théorie (vecteurs, opérateurs) ont un sens physique plus clair, où les phénomènes physiques que l'on désire étudier sont plus directement accessibles.
- Acquérir une compréhension plus profonde de l'électrodynamique quantique en l'abordant à partir de plusieurs points de vue différents.

Exemple 1 : Systèmes localisés de charges et transformations de Goppert-Mayer, Power, Zienau et Woolley.

- Apparition des moments multipolaires dans l'hamiltonien d'interaction.
- Convergence plus rapide de la sommation sur les états intermédiaires dans un processus du 2^{ème} ordre.
- Le moment conjugué du potentiel vecteur est l'induction électrique qui, à l'extérieur du système de charges coïncide avec le champ électrique total.

Exemple 2 : Transformation de Pauli-Fierz-Kramers

- Tentative de séparer du champ total le champ transverse lié aux particules.
- Dans le nouveau point de vue, les corrections radiatives apparaissent plus clairement, les opérateurs de champ décrivent le champ libre ou le champ effectivement rayonné par les particules, l'interaction entre particules.

et champs fait intervenir l'accélération des particules et non leur vitesse.

③ Les difficultés et les erreurs souvent commises.

Il ne faut pas oublier que dans 2 points de vue différents

- l'état du système n'est pas représenté par le même ket. Réciproquement, un même ket représente 2 états physiques différents suivant le point de vue utilisé.
- une grandeur physique n'est pas représentée par le même opérateur. Réciproquement, un même opérateur n'a pas le même sens physique dans un point de vue et dans l'autre.
- les calculs doivent être menés jusqu'au bout (par exemple, sommation sur tous les états intermédiaires, utilisation de fonctions d'ondes exactes et non approchées ...) pour retrouver l'équivalence des prédictions physiques.

Plan du cours

- Le Lagrangien standard de l'électrodynamique quantique
Les difficultés soulevées par la quantification
- Solutions possibles aux difficultés précédentes
 - 1 - Élimination des variables dynamiques redondantes et choix de la jauge de Coulomb
 - 2 - Changement de Lagrangien - Sélection des états physiques au moyen de la condition supplémentaire de Lorentz

Avantages et inconvénients de ces 2 solutions

Comment apparaît l'interaction de Coulomb dans ces 2 points de vue?

- Formulations équivalentes déduites de l'électrodynamique quantique non relativiste en jauge de Coulomb et adaptées à des systèmes de charges localisées
 - Comment obtenir des formulations équivalentes à partir de la formulation en jauge de Coulomb?
 - Densités de polarisation et de magnétisation. Induction électrique
 - Transformation de Goppert-Mayer pour un champ externe
 - Transformation de Power - Zienau - Woolley
 - Illustrations sur des processus à 1 ou 2 photons de l'équivalence entre les divers points de vue

Dans le cours 1987-88, seront discutées les formulations équivalentes déduites de la formulation en jauge de Coulomb visant à éliminer le champ transverse lié aux particules (Pauli-Fierz-Kramers) ainsi que les formulations équivalentes déduites de l'électrodynamique quantique relativiste en jauge de Lorentz.

Le lagrangien standard de l'électrodynamique classique

II-1

① Expression du lagrangien standard

- Lagrangien des particules, du rayonnement, d'interaction
- Equations de Lagrange
- Expression de L en fonction des potentiels dans l'espace réciproque.
Intérêt de cette forme de L

② Propriétés du lagrangien standard

- Invariance dans des transformations simples
Constantes du mouvement
- Invariance relativiste
- Invariance de jauge - lien avec la conservation de la charge.

③ Difficultés du lagrangien standard

- Redondance des potentiels
- \dot{U} n'apparaît pas

④ Solutions possibles à ces difficultés

- Elimination de la variable dont la dérivée n'apparaît pas dans le lagrangien.
Illustration sur un exemple plus simple $L(x, \dot{x}, x_2)$
- Changement de lagrangien

Electrodynamique quantique en jauge de Coulomb

① Elimination des variables dynamiques redondantes

- Elimination de U au moyen de l'équation de Lagrange pour U .
- Arbitraire existant sur $A_{||}$.
Choix de la jauge de Coulomb ($A_{||} = 0$)

Expressions de L_p, L_R, L_I (1)

$$L_p = \sum_{\alpha} \frac{1}{2} m_{\alpha} \dot{\vec{r}}_{\alpha}^2$$

$$L_R = \frac{\epsilon_0}{2} \int d^3r [\vec{E}^2(\vec{r}) - c^2 \vec{B}^2(\vec{r})]$$

$$L_I = \sum_{\alpha} [q_{\alpha} \dot{\vec{r}}_{\alpha} \cdot \vec{A}(\vec{r}_{\alpha}) - q_{\alpha} U(\vec{r}_{\alpha})]$$

$$= \int d^3r [\vec{j}(\vec{r}) \cdot \vec{A}(\vec{r}) - \rho(\vec{r}) U(\vec{r})]$$

Densités de charge et de courant

$$\rho(\vec{r}) = \sum_{\alpha} q_{\alpha} \delta(\vec{r} - \vec{r}_{\alpha})$$

$$\vec{j}(\vec{r}) = \sum_{\alpha} q_{\alpha} \dot{\vec{r}}_{\alpha} \delta(\vec{r} - \vec{r}_{\alpha})$$

Autre écriture possible

$$L = \sum_{\alpha} \frac{1}{2} m_{\alpha} \dot{\vec{r}}_{\alpha}^2 + \int d^3r \mathcal{L}(\vec{r})$$

$$\mathcal{L}(\vec{r}) = \epsilon_0 [(-\vec{\nabla} \cdot \vec{A} - \dot{U})^2 - c^2 (\vec{\nabla} \times \vec{A})^2]$$

$$+ \vec{j} \cdot \vec{A} - \rho U$$

$$L(\vec{r}_{\alpha}, \dot{\vec{r}}_{\alpha}, A_j, \dot{A}_j, \partial_i A_j, U, \dot{U}, \partial_i U)$$

Equations de Lagrange (2)

Pour \vec{r}_{α} $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_{\alpha}} = \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_{\alpha}}$

$$\hookrightarrow m_{\alpha} \ddot{\vec{r}}_{\alpha} = q_{\alpha} \vec{E}(\vec{r}_{\alpha}) + q_{\alpha} \dot{\vec{r}}_{\alpha} \times \vec{B}(\vec{r}_{\alpha})$$

Equation de Newton-Lorentz

Pour U $\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{U}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial U} - \sum_i \partial_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_i U)}$

$$\hookrightarrow \vec{\nabla} \cdot (-\vec{A} - \vec{\nabla} U) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Pour A_j $\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_j} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_j} - \sum_i \partial_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_i A_j)}$

$$\hookrightarrow \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \frac{1}{c^2} (-\ddot{\vec{A}} - \vec{\nabla} \dot{U}) + \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \vec{j}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \vec{j}$$

Equations de Maxwell

L dans l'espace réciproque (3)

$$L = \sum_{\alpha} \frac{1}{2} m_{\alpha} \dot{\vec{r}}_{\alpha}^2$$

$$+ \frac{\epsilon_0}{2} \int d^3k [\vec{E}^*(\vec{k}) \cdot \vec{E}(\vec{k}) - c^2 \vec{B}^*(\vec{k}) \cdot \vec{B}(\vec{k})]$$

$$+ \int d^3k [\vec{j}^*(\vec{k}) \cdot \vec{A}(\vec{k}) - \rho^*(\vec{k}) U(\vec{k})]$$

Conditions de réalité

$$\vec{A}(\vec{k}) = \vec{A}^*(-\vec{k}) \quad U(\vec{k}) = U^*(-\vec{k})$$

$$\vec{E}^*(-\vec{k}) \cdot \vec{E}(-\vec{k}) = \vec{E}(\vec{k}) \cdot \vec{E}^*(\vec{k})$$

$$\hookrightarrow L = \sum_{\alpha} \frac{1}{2} m_{\alpha} \dot{\vec{r}}_{\alpha}^2 + \int d^3k \bar{\mathcal{L}}$$

$$\bar{\mathcal{L}} = \epsilon_0 [|\dot{\vec{A}}(\vec{k}) + i\vec{k} U(\vec{k})|^2 - c^2 |\vec{k} \times \vec{A}(\vec{k})|^2]$$

$$+ [\vec{j}^*(\vec{k}) \cdot \vec{A}(\vec{k}) + \vec{j}(\vec{k}) \cdot \vec{A}^*(\vec{k}) - \rho^*(\vec{k}) U(\vec{k}) - \rho(\vec{k}) U^*(\vec{k})]$$

$\int d^3k$ Intégrale sur un demi espace réciproque

Constantes du mouvement (4)

$$\vec{P} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \dot{\vec{r}}_{\alpha} + \epsilon_0 \int d^3r \vec{E}(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{r})$$

$$\vec{J} = \sum_{\alpha} \vec{r}_{\alpha} \times m_{\alpha} \dot{\vec{r}}_{\alpha} + \epsilon_0 \int d^3r \vec{r} \times [\vec{E}(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{r})]$$

$$\mathcal{H} = \sum_{\alpha} \frac{1}{2} m_{\alpha} \dot{\vec{r}}_{\alpha}^2 + \frac{\epsilon_0}{2} \int d^3r [\vec{E}^2(\vec{r}) + c^2 \vec{B}^2(\vec{r})]$$

Ecriture covariante

$$\mathcal{L}_R = -\epsilon_0 \frac{c^2}{4} \sum_{\mu} \sum_{\nu} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

$$\mathcal{L}_I = -\sum_{\mu} j^{\mu} A_{\mu}$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_{\mu} A_{\nu} - \partial_{\nu} A_{\mu}$$

$$\partial_{\mu} = \left\{ \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla} \right\} \quad A^{\mu} = \left\{ \frac{U}{c}, \vec{A} \right\} \quad j^{\mu} = \{c\rho, \vec{j}\}$$

Changement de jauge $\vec{A}, U \rightarrow \vec{A}', U'$

$$\mathcal{L}_R + \mathcal{L}_I \rightarrow \mathcal{L}_R + \mathcal{L}_I + \mathcal{L}_1$$

$$\mathcal{L}_1 = \vec{j} \cdot \vec{\nabla} F + \rho \frac{\partial F}{\partial t}$$

$$= \underbrace{\vec{\nabla} \cdot (\vec{j} F)}_{\text{Quadrivariance}} + \frac{\partial}{\partial t} (\rho F) - \underbrace{(\vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t}) F}_{=0}$$

Cas simple $L(x, \dot{x}, x_2)$

$$\frac{\partial L(x, \dot{x}, x_2)}{\partial x_2} = 0 \iff x_2 = g(x, \dot{x})$$

$$\hat{L}(x, \dot{x}) = L(x, \dot{x}, g(x, \dot{x}))$$

$$\frac{\partial \hat{L}(x, \dot{x})}{\partial x} = \frac{\partial L(x, \dot{x}, x_2)}{\partial x} \Big|_{x_2=g(x, \dot{x})} + \frac{\partial L(x, \dot{x}, x_2)}{\partial x_2} \Big|_{x_2=g(x, \dot{x})} \times \frac{\partial g(x, \dot{x})}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \hat{L}(x, \dot{x})}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L(x, \dot{x}, x_2)}{\partial \dot{x}} \Big|_{x_2=g(x, \dot{x})} + \frac{\partial L(x, \dot{x}, x_2)}{\partial x_2} \Big|_{x_2=g(x, \dot{x})} \times \frac{\partial g(x, \dot{x})}{\partial \dot{x}}$$

Comme $\frac{\partial L(x, \dot{x}, x_2)}{\partial x_2} \Big|_{x_2=g(x, \dot{x})} = 0$

l'équation de Lagrange pour \hat{L} s'écrit

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \hat{L}(x, \dot{x})}{\partial \dot{x}} \Big|_{x_2=g(x, \dot{x})} = \frac{\partial \hat{L}(x, \dot{x})}{\partial x} \Big|_{x_2=g(x, \dot{x})}$$

On peut enlever la restriction $x_2 = g(x, \dot{x})$ en ajoutant $\frac{\partial L(x, \dot{x}, x_2)}{\partial x_2} = 0$

(5) Equation de Lagrange pour u (6)

$$\frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial u^*} = -\epsilon_0 i \vec{k} \cdot [\vec{\mathcal{A}} + i \vec{k} u] - \rho = 0$$

$$\hookrightarrow u = \frac{1}{k^2} [ik \mathcal{A}_{||} + \frac{\rho}{\epsilon_0}]$$

$$\mathcal{A}_{||} = \vec{k} \cdot \vec{\mathcal{A}} \quad \vec{k} = \vec{k}/k$$

Nouveau lagrangien

$$L(\vec{r}_\alpha, \dot{\vec{r}}_\alpha, \vec{\mathcal{A}}_\perp, \dot{\vec{\mathcal{A}}}_\perp, \mathcal{A}_{||}, \dot{\mathcal{A}}_{||}) =$$

$$\sum_\alpha \frac{1}{2} m_\alpha \dot{\vec{r}}_\alpha^2 - \int d^3k \frac{\rho^* \rho}{\epsilon_0}$$

$$+ \epsilon_0 \int d^3k [\dot{\vec{\mathcal{A}}}_\perp^* \cdot \dot{\vec{\mathcal{A}}}_\perp - c^2 k^2 \vec{\mathcal{A}}_\perp^* \cdot \vec{\mathcal{A}}_\perp]$$

$$+ \int d^3k [\vec{j}^* \cdot \vec{\mathcal{A}}_\perp + \vec{j} \cdot \vec{\mathcal{A}}_\perp^*]$$

$$+ \int d^3k \underbrace{[\dot{\mathcal{A}}_{||}^* \dot{\mathcal{A}}_{||} + \mathcal{A}_{||} \dot{\mathcal{A}}_{||}^* - \frac{i}{k} (\rho^* \dot{\mathcal{A}}_{||} - \rho \dot{\mathcal{A}}_{||}^*)]}_{\bar{\mathcal{L}}_{||}}$$

$\mathcal{A}_{||}$ et $\dot{\mathcal{A}}_{||}$ n'apparaissent que dans $\bar{\mathcal{L}}_{||}$

Conservation de l'électricité (7)

$$\dot{\rho} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0 \quad \dot{\rho} + i k \cdot \vec{j} = 0$$

$$\hookrightarrow \dot{\rho} = -i k j_{||}$$

Equation de Lagrange pour $\mathcal{A}_{||}$

$$\frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial \dot{\mathcal{A}}_{||}^*} = \frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial \dot{\mathcal{A}}_{||}} \longrightarrow \dot{\rho} = -i k j_{||}$$

Ne donne rien de nouveau

Transformation de $\bar{\mathcal{L}}_{||}$ (en utilisant $\dot{\rho} = -i k j_{||}$)

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{L}}_{||} &= \frac{i}{k} [-\dot{\rho}^* \mathcal{A}_{||} + \dot{\rho} \mathcal{A}_{||}^* - \rho^* \dot{\mathcal{A}}_{||} + \rho \dot{\mathcal{A}}_{||}^*] \\ &= \frac{i}{k} \frac{d}{dt} [\rho \mathcal{A}_{||}^* - \rho^* \mathcal{A}_{||}] \end{aligned}$$

$\mathcal{A}_{||}$ n'apparaît que dans une dérivée totale et peut être choisi arbitrairement

Choisis le plus simple $\mathcal{A}_{||} = 0$

Jauge de Coulomb

② Lagrangien en jauge de Coulomb

- a) Expression du nouveau lagrangien $L = L_P + L_R + L_I$
- b) Discussion physique - Apparition de l'interaction de Coulomb dans le lagrangien des particules

③ Moments conjugués - Hamiltonien

- a) Moment conjugué \vec{P}_α de \vec{r}_α
- b) Moment conjugué $\pi_\epsilon(\vec{k})$ de $A_\epsilon(\vec{k})$
- c) Hamiltonien dans l'espace réel et dans l'espace réciproque
- d) Expression des diverses grandeurs physiques en fonction des coordonnées et des moments conjugués.

④ Variables normales

- a) Equations de Hamilton.
- b) Définition des variables normales - Equations du mouvement des variables normales
- c) Expression des diverses grandeurs physiques en fonction des variables normales

⑤ Quantification canonique

- a) Relations de commutation canoniques dans l'espace réciproque
- b) Opérateurs associés aux variables normales : opérateurs de création et d'annihilation
- c) Relations de commutation dans l'espace réel
- d) Equations quantiques du mouvement.

⑥ Récapitulation et conclusion

- Expression de L après élimination de U du lagrangien standard et choix de $\vec{A}_{||} = \vec{0}$ (jauge de Coulomb)

$$\begin{aligned}
 L = & \sum_{\alpha} \frac{1}{2} m_{\alpha} \dot{\vec{r}}_{\alpha}^2 - \int d^3k \frac{\rho^*(\vec{k}) \rho(\vec{k})}{\epsilon_0 k^2} && \leftarrow L_P \\
 & + \epsilon_0 \int d^3k \left[\dot{\vec{A}}_{\perp}^*(\vec{k}) \cdot \dot{\vec{A}}_{\perp}(\vec{k}) - c^2 k^2 \vec{A}_{\perp}^*(\vec{k}) \cdot \vec{A}_{\perp}(\vec{k}) \right] && \leftarrow L_R \\
 & + \int d^3k \left[\vec{j}^*(\vec{k}) \cdot \vec{A}_{\perp}(\vec{k}) + \vec{j}(\vec{k}) \cdot \vec{A}_{\perp}^*(\vec{k}) \right] && \leftarrow L_I
 \end{aligned}$$

- Transformation de $\int d^3k \rho^* \rho / \epsilon_0 k^2$

(III-2)

$$\rho(\vec{r}) = \sum_{\alpha} q_{\alpha} \delta(\vec{r} - \vec{r}_{\alpha}) \longrightarrow \rho^*(\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{\alpha} q_{\alpha} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}_{\alpha}}$$

$$\int d^3k \frac{\rho^* \rho}{\epsilon_0 k^2} = \sum_{\alpha} \frac{q_{\alpha}^2}{2\epsilon_0 (2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{k^2} + \sum_{\alpha} \sum_{\beta \neq \alpha} \frac{q_{\alpha} q_{\beta}}{2\epsilon_0 (2\pi)^3} \int d^3k \frac{e^{i\vec{k} \cdot (\vec{r}_{\alpha} - \vec{r}_{\beta})}}{k^2}$$

$$= \sum_{\alpha} E_{\text{Coul}}^{\alpha} + \sum_{\alpha} \sum_{\beta \neq \alpha} \frac{q_{\alpha} q_{\beta}}{8\pi\epsilon_0 |\vec{r}_{\alpha} - \vec{r}_{\beta}|} = V_{\text{Coulombs}}$$

$$E_{\text{Coul}}^{\alpha} = \frac{q_{\alpha}^2}{2\epsilon_0 (2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{k^2} = \frac{q_{\alpha}^2 k_C}{4\pi^2 \epsilon_0} = \text{Energie de Coulomb propre de } \alpha$$

(k_C : coupure)

$\hookrightarrow L_p = \sum_{\alpha} \frac{1}{2} m_{\alpha} \dot{\vec{r}}_{\alpha}^2 - V_{\text{Coulombs}} = \text{Energie cinétique} - \text{Energie potentielle coulombienne}$

- Lagrangien du champ

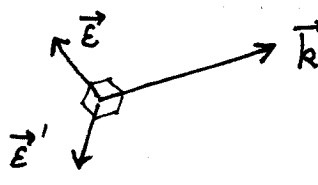
$$L_R = \epsilon_0 \int d^3r [\dot{\vec{A}}_{\perp}^* \cdot \dot{\vec{A}}_{\perp} - c^2 k^2 \vec{A}_{\perp}^* \cdot \vec{A}_{\perp}] = \epsilon_0 \int d^3r [\vec{E}_{\perp}^2 - c^2 \vec{B}^2]$$

= Energie électrique transverse - Energie magnétique

- Lagrangien d'interaction

$$L_I = \int d^3r (\vec{j}^* \cdot \vec{A}_{\perp} + \vec{j} \cdot \vec{A}_{\perp}^*) = \int d^3r \vec{j}(\vec{r}) \cdot \vec{A}_{\perp}(\vec{r}) = \sum_{\alpha} q_{\alpha} \dot{\vec{r}}_{\alpha} \cdot \vec{A}_{\perp}(\vec{r}_{\alpha})$$

- Moment conjugué de \vec{r}_{α} : $\vec{P}_{\alpha} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_{\alpha}} = m_{\alpha} \dot{\vec{r}}_{\alpha} + q_{\alpha} \vec{A}_{\perp}(\vec{r}_{\alpha})$

-  $\mathcal{A}_E(\vec{k}) = \vec{E} \cdot \vec{A}_{\perp}(\vec{k})$ $\mathcal{A}_{E'}(\vec{k}) = \vec{E}' \cdot \vec{A}_{\perp}(\vec{k})$

\mathcal{A}_E et $\mathcal{A}_{E'}$: composantes de \vec{A}_{\perp} sur 2 vecteurs unitaires \perp dans le plan \perp à \vec{k}

- Moment conjugué de \mathcal{A}_E : $\vec{\pi}_E = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathcal{A}}_E^*} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathcal{A}}_E^*} = \epsilon_0 \dot{\mathcal{A}}_E = -\epsilon_0 \vec{E}_{\perp E}$

$$\vec{\pi}(\vec{k}) = \vec{E} \pi_E(\vec{k}) + \vec{E}' \pi_{E'}(\vec{k}) = \epsilon_0 \dot{\vec{A}}_{\perp}(\vec{k}) = -\epsilon_0 \vec{E}_{\perp}(\vec{k})$$

Par T.F. $\rightarrow \vec{\pi}(\vec{r}) = \epsilon_0 \dot{\vec{A}}_{\perp}(\vec{r}) = -\epsilon_0 \vec{E}_{\perp}(\vec{r})$

- Hamiltonien $H = \sum_{\alpha} \vec{P}_{\alpha} \cdot \dot{\vec{r}}_{\alpha} + \int d^3k (\vec{\pi} \cdot \dot{\vec{A}}_{\perp}^* + \vec{\pi}^* \cdot \dot{\vec{A}}_{\perp}) - L$

$$H = \sum_{\alpha} \frac{1}{2m_{\alpha}} [\vec{P}_{\alpha} - q_{\alpha} \vec{A}_{\perp}(\vec{r}_{\alpha})]^2 + V_{\text{Coul}} + \epsilon_0 \int d^3k \left[\frac{\vec{\pi}^* \cdot \vec{\pi}}{\epsilon_0^2} + c^2 k^2 \vec{A}_{\perp}^* \cdot \vec{A}_{\perp} \right]$$

$$= \sum_{\alpha} \frac{1}{2m_{\alpha}} [\vec{P}_{\alpha} - q_{\alpha} \vec{A}_{\perp}(\vec{r}_{\alpha})]^2 + V_{\text{Coul}} + \frac{\epsilon_0}{2} \int d^3r \left[\frac{\vec{\pi}^2}{\epsilon_0^2} + c^2 (\vec{\nabla} \times \vec{A}_{\perp})^2 \right]$$

= Energie cinétique + V_{Coulombs} + Energie des champs transversees

- Vitesse $\vec{v}_{\alpha} = \dot{\vec{r}}_{\alpha} = \frac{1}{m_{\alpha}} [\vec{P}_{\alpha} - q_{\alpha} \vec{A}_{\perp}(\vec{r}_{\alpha})]$

- Champ électrique total $\vec{E} = \vec{E}_{\parallel} + \vec{E}_{\perp} = -\frac{i}{\epsilon_0} \rho \frac{\vec{k}}{k^2} - \frac{1}{\epsilon_0} \vec{\pi}$

$\hookrightarrow \vec{E}_{\perp}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\alpha} q_{\alpha} \frac{\vec{r} - \vec{r}_{\alpha}}{|\vec{r} - \vec{r}_{\alpha}|^3} - \frac{1}{\epsilon_0} \vec{\pi}(\vec{r})$

- Champ magnétique $\vec{B} = i\vec{k} \times \vec{A}_{\perp}$ $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}_{\perp}$

- Impulsion totale $\vec{P} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \dot{\vec{r}}_{\alpha} + \vec{P}_{long} + \vec{P}_{transv}$

$$\begin{aligned} \vec{P}_{long} &= \epsilon_0 \int d^3r \vec{E}_{||}(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{r}) = \epsilon_0 \int d^3k \vec{E}_{||}^*(\vec{k}) \times \vec{B}(\vec{k}) = i \int d^3k \rho^* \frac{\vec{k}}{k^2} \times (i\vec{k} \times \vec{A}_{\perp}) \\ &= \int d^3k \rho^*(\vec{k}) \vec{A}_{\perp}(\vec{k}) = \int d^3r \rho(\vec{r}) \vec{A}_{\perp}(\vec{r}) = \sum_{\alpha} q_{\alpha} \vec{A}_{\perp}(\vec{r}_{\alpha}) \end{aligned}$$

En jauge de Coulomb, $\sum_{\alpha} (\vec{P}_{\alpha} - m_{\alpha} \dot{\vec{r}}_{\alpha}) = \sum_{\alpha} q_{\alpha} \vec{A}_{\perp}(\vec{r}_{\alpha}) = \vec{P}_{long}$

$$\begin{aligned} \vec{P}_{trans} &= \epsilon_0 \int d^3r \vec{E}_{\perp}(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{r}) = - \int d^3r \vec{\pi}(\vec{r}) \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}_{\perp}(\vec{r})) \\ &= - \int d^3k \vec{\pi}^*(\vec{k}) \times (i\vec{k} \times \vec{A}_{\perp}(\vec{k})) = -i \int d^3k \vec{k} (\vec{\pi}^*(\vec{k}) \cdot \vec{A}_{\perp}(\vec{k})) \end{aligned}$$

$\hookrightarrow \vec{P} = \sum_{\alpha} \vec{P}_{\alpha} + \vec{P}_{transv}$

- Equations de Hamilton

H_R = somme d'hamiltoniens d'oscillateurs harmoniques (1 par mode $\vec{k} \vec{E}$)

$$\begin{cases} \dot{\mathcal{A}}_E = \frac{\delta H}{\delta \Pi_E^*} = \epsilon_0 \Pi_E \\ \dot{\Pi}_E = -\frac{\delta H}{\delta \mathcal{A}_E^*} = -\epsilon_0 \omega^2 \mathcal{A}_E + j_E \end{cases} \quad j_E = \vec{E} \cdot \vec{j} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} q_{\alpha} \vec{E} \cdot \dot{\vec{r}}_{\alpha} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}_{\alpha}}$$

- Variables normales $\alpha_E(\vec{k})$: Combinaison linéaire de \mathcal{A}_E et Π_E évoluant en $e^{-i\omega t}$ en l'absence de source ($j_E = 0$)

$$\alpha_E(\vec{k}) = N(k) \left[\omega \mathcal{A}_E(\vec{k}) + \frac{i}{\epsilon_0} \Pi_E(\vec{k}) \right] \quad N : \text{coef}^t \text{ de normalisation}$$

Equations de Hamilton $\rightarrow \dot{\alpha}_E + i\omega \alpha_E = \frac{iN}{\epsilon_0} j_E$

Choix de N : $N = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{2\hbar\omega}}$ pour avoir ensuite un commutateur le plus simple possible entre les opérateurs a_E et a_E^+ associés à α_E et α_E^*

- Equation d'évolution de α_E $\dot{\alpha}_E + i\omega \alpha_E = \frac{i}{\sqrt{2\epsilon_0 \hbar \omega}} j_E$

- Expression de \mathcal{A}_E et Π_E en fonction de α_E et α_E^*

$$\alpha_E(\vec{k}) = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{2\hbar\omega}} \left[\omega \mathcal{A}_E(\vec{k}) + \frac{i}{\epsilon_0} \Pi_E(\vec{k}) \right] \quad \alpha_E^*(-\vec{k}) = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{2\hbar\omega}} \left[\omega \mathcal{A}_E(\vec{k}) - \frac{i}{\epsilon_0} \Pi_E(\vec{k}) \right]$$

Pas de relation entre $\alpha_E(\vec{k})$ et $\alpha_E^*(-\vec{k})$

$$\hookrightarrow \mathcal{A}_E(\vec{k}) = \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 \omega}} \left[\alpha_E(\vec{k}) + \alpha_E^*(-\vec{k}) \right] \quad \Pi_E(\vec{k}) = -i \sqrt{\frac{\epsilon_0 \hbar \omega}{2}} \left[\alpha_E(\vec{k}) - \alpha_E^*(-\vec{k}) \right]$$

- Expression de H_R et \vec{P}_{transv} en fonction de α_E et α_E^*

$$H_R = \frac{\epsilon_0}{2} \int d^3k \sum_{\vec{E} \perp \vec{k}} \left[\frac{\Pi_E^* \Pi_E}{\epsilon_0} + \omega^2 \mathcal{A}_E^* \mathcal{A}_E \right] = \int d^3k \sum_{\vec{E} \perp \vec{k}} \hbar \omega \alpha_E^*(\vec{k}) \alpha_E(\vec{k})$$

$$\vec{P}_{transv} = -i \int d^3k \vec{k} \sum_{\vec{E} \perp \vec{k}} \Pi_E^* \mathcal{A}_E = \int d^3k \sum_{\vec{E} \perp \vec{k}} \hbar \vec{k} \alpha_E^*(\vec{k}) \alpha_E(\vec{k})$$

- Expression des champs $\vec{A}_\perp(\vec{r})$, $\vec{\Pi}(\vec{r}) = -\epsilon_0 \vec{E}_\perp(\vec{r})$, $\vec{B}(\vec{r})$

$$\begin{aligned} \vec{A}_\perp(\vec{r}) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k \sum_{\vec{E} \perp \vec{k}} \vec{E} \mathcal{A}_E(\vec{k}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \\ &= \int d^3k \sum_{\vec{E} \perp \vec{k}} \mathcal{A}_\omega \vec{E} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} [\alpha_E(\vec{k}) + \alpha_E^*(-\vec{k})] \\ &= \int d^3k \sum_{\vec{E} \perp \vec{k}} \mathcal{A}_\omega [\vec{E} \alpha_E(\vec{k}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} + \vec{E} \alpha_E^*(\vec{k}) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}}] \end{aligned}$$

$$\mathcal{A}_\omega = \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 \omega (2\pi)^3}}$$

$$\vec{\Pi}(\vec{r}) = -i\epsilon_0 \int d^3k \sum_{\vec{E} \perp \vec{k}} \mathcal{E}_\omega [\vec{E} \alpha_E(\vec{k}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} - \vec{E} \alpha_E^*(\vec{k}) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}}]$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = i \int d^3k \sum_{\vec{E} \perp \vec{k}} \mathcal{B}_\omega [(\vec{k} \times \vec{E}) \alpha_E(\vec{k}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} - (\vec{k} \times \vec{E}) \alpha_E^*(\vec{k}) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}}]$$

$$\mathcal{A}_\omega = \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 \omega (2\pi)^3}} \quad \mathcal{E}_\omega = \omega \mathcal{A}_\omega \quad \mathcal{B}_\omega = \frac{\mathcal{E}_\omega}{c} \quad \vec{\kappa} = \frac{\vec{k}}{k}$$

Pour un champ libre, α_E varie en $e^{-i\omega t}$, α_E^* en $e^{i\omega t}$ et des développements précédents sont des développements en ondes planes progressives \vec{k} , \vec{E} , $\omega = ck$

- Relations de commutation canoniques du champ

Dans un demi-espace réciproque, les $\mathcal{A}_E(\vec{k})$ et $\mathcal{P}_E(\vec{k})$ sont des variables indépendantes

$$\hookrightarrow [\mathcal{A}_E(\vec{k}), \mathcal{P}_{E'}(\vec{k}')] = i\hbar \delta_{EE'} \delta(\vec{k} - \vec{k}')$$

tous les autres commutateurs étant nuls. Pour avoir les commutateurs dans tout l'espace réciproque, on utilise

$$\mathcal{A}_E^+(\vec{k}) = \mathcal{A}_E(-\vec{k}) \quad \mathcal{P}_E^+(\vec{k}) = \mathcal{P}_E(-\vec{k})$$

- Opérateurs de création et d'annihilation a_E et a_E^+

$$\alpha_E(\vec{k}) \rightarrow a_E(\vec{k}) \quad \alpha_E^*(\vec{k}) \rightarrow a_E^+(\vec{k})$$

Les relations de commutation canonique entraînent

$$[a_E(\vec{k}), a_{E'}^+(\vec{k}')] = \delta_{EE'} \delta(\vec{k} - \vec{k}')$$

Tous les opérateurs champ s'expriment en fonction des a_E et a_E^+

- Evolution temporelle

Point de vue de Schrödinger

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = H |\psi(t)\rangle$$

" " " Heisenberg

$$i\hbar \frac{d}{dt} G(t) = [G(t), H]$$

Les équations de Maxwell-Lorentz demeurent valables entre opérateurs.

Formulation covariante (Champ libre ou couplé à des sources extérieures)

IV-1

$L = L_R + L_I$. On n'a pas besoin de L_P . Les sources sont décrites par des fonctions données de \vec{r} et t : $J^\mu(\vec{r}, t)$ avec $\partial_\mu J^\mu = 0$. Plus tard, on précisera L_P (Lagrangien du champ de Dirac ψ) et l'expression de J^μ ($J^\mu = qc \psi \gamma^\mu \psi$).

A - Electrodynamique classique en jauge de Lorentz

① Formulation lagrangienne.

- Choix d'un nouveau lagrangien.
- Equations de Lagrange associées.
- Condition supplémentaire pour retrouver les équations de Maxwell.
- Arbitraire de jauge.

② Formulation hamiltonienne.

- Moments conjugués des potentiels.
- Hamiltonien.
- Equations de Hamilton-Jacobi.

③ Variables normales.

- Définition et équations d'évolution.
- Développement des potentiels en variables normales.
- Expression de l'énergie totale et de l'impulsion totale en fonction des variables normales.
- Forme de la condition supplémentaire.
- Arbitraire de jauge.

B - Difficultés posées par la quantification du champ libre

① Quantification canonique

- Relations de commutation canoniques.
- Opérateurs de création et d'annihilation.
- Relations de commutation covariantes pour les potentiels libres dans le point de vue de Heisenberg.

② Problèmes d'interprétation physique

- Forme de la condition supplémentaire pour le champ quantique libre.
- Problèmes posés par la construction de l'espace des états.

$$A_\mu = \sum_\nu g_{\mu\nu} A^\nu \quad g_{00} = +1 \quad g_{ii} = -1 \quad i = x, y, z$$

$$A_5 = \frac{U}{c}$$

$$A^0 = A_0 = A_5 = U/c$$

$$A^1 = -A_1 = A_x$$

$$A^2 = -A_2 = A_y$$

$$A^3 = -A_3 = A_z$$

- Rappel de l'expression du lagrangien standard

$$L^{st} = \int d^3r (\mathcal{L}_R^{st} + \mathcal{L}_I^{st}) = \int d^3r \left[-\frac{\epsilon_0 c^2}{4} \sum_{\mu\nu} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \sum_\mu j_\mu A^\mu \right]$$

- Choix d'un nouveau lagrangien (où \dot{U} apparait)

On garde $\mathcal{L}_I = -\sum_\mu j_\mu A^\mu$. On change \mathcal{L}_R^{st}

$$\mathcal{L}_R^{st} \rightarrow \mathcal{L}_R = -\epsilon_0 c^2 \left[\frac{1}{4} \sum_{\mu\nu} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \lambda \left(\sum_\mu \partial_\mu A^\mu \right)^2 \right]$$

λ peut être quelconque. Calculs + simplés avec $\lambda = 1/2$

↳ Lagrangien de Fermi $\mathcal{L}_R^F = -\epsilon_0 c^2 \left[\sum_{\mu\nu} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \left(\sum_\mu \partial_\mu A^\mu \right)^2 \right]$

\mathcal{L}_R^F et \mathcal{L}_R^{st} ne sont pas équivalents (ne diffèrent pas d'une quadrivalence)

- Autre lagrangien L_R équivalent à L_R^F

$$\mathcal{L}_R = \mathcal{L}_R^F + \frac{\epsilon_0 c^2}{2} \sum_{\mu\nu} \partial_\mu [A^\mu \partial_\nu A^\nu - A^\nu \partial_\nu A^\mu]$$

$$= -\frac{\epsilon_0 c^2}{2} \sum_{\mu\nu} (\partial_\mu A^\nu)(\partial_\nu A^\mu) = \frac{\epsilon_0}{2} \left[\dot{\vec{A}}^2 - \frac{\dot{U}^2}{c^2} - c^2 \sum_{ij} (\partial_i A_j)^2 + (\vec{\nabla} U)^2 \right]$$

- Expression du nouveau lagrangien $L_R + L_I$ dans l'espace réciproque

$$L_R = \int d^3k \bar{\mathcal{L}}_R$$

$$L_I = \int d^3k \mathcal{L}_I$$

$$\bar{\mathcal{L}}_R = \epsilon_0 \left[\dot{\vec{A}}^* \cdot \dot{\vec{A}} - \omega^2 \vec{A}^* \cdot \vec{A} - \dot{A}_5^* \dot{A}_5 + \omega^2 A_5^* A_5 \right] \quad \mathcal{L}_I = -\sum_\mu \left[j_\mu^* A^\mu + j_\mu A^{\mu*} \right]$$

- Equations de Lagrange

• Pour le lagrangien standard, ce sont les équations de Maxwell

$$\begin{cases} \square \vec{A} = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \vec{J} - \vec{\nabla} \Lambda \\ \square U = \frac{1}{\epsilon_0} \rho + \frac{\partial}{\partial t} \Lambda \end{cases}$$

$$\square = \sum_\mu \partial_\mu \partial^\mu = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$$

$$\Lambda = \sum_\mu \partial_\mu A^\mu = \frac{1}{c^2} \frac{\partial U}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A}$$

• Pour le nouveau lagrangien, on trouve

$$\begin{cases} \square \vec{A} = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \vec{J} \\ \square U = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \end{cases}$$

Différent des équations de Maxwell sauf si $\Lambda = 0$ (jauge de Lorentz)

- Condition supplémentaire $\Lambda = 0$: compatible avec les équations du mouvement qui entraînent

$$\square \Lambda = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} (\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t}) = 0$$

A $t=0$, on peut choisir $\Lambda = 0$ et $\dot{\Lambda} = 0$ car

$$\dot{\Lambda} = \frac{1}{c^2} \ddot{U} + \vec{\nabla} \cdot \dot{\vec{A}} = \left[\frac{\rho}{\epsilon_0} + \Delta U \right] + \vec{\nabla} \cdot \dot{\vec{A}} = \vec{\nabla} \cdot [\dot{\vec{A}} + \vec{\nabla} U] + \frac{\rho}{\epsilon_0} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{E} + \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$\dot{\Lambda} = 0$ si à $t=0$ on choisit $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho / \epsilon_0$

- Arbitraire de jauge $A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu f$
 $\partial_\mu A^\mu = 0 \rightarrow \partial_\mu A'^\mu = 0$ si $\partial_\mu \partial^\mu f = \square f = 0$

- Moments conjugués des potentiels

$\pi_j = \partial \bar{\mathcal{L}} / \partial \dot{A}_j^* = \partial \bar{\mathcal{L}}_R / \partial \dot{A}_j^* = \epsilon_0 \dot{A}_j$ $\pi_s = \partial \bar{\mathcal{L}} / \partial \dot{A}_s^* = \partial \bar{\mathcal{L}}_R / \partial \dot{A}_s^* = -\epsilon_0 \dot{A}_s$

- Hamiltonien

$H = \int d^3k [\vec{\pi} \cdot \vec{A}^* + \vec{\pi}^* \cdot \vec{A} - \pi_s \dot{A}_s^* - \pi_s^* \dot{A}_s] - L_R - L_I = H_R + H_I$

$H_R = \int d^3k \bar{\mathcal{H}}_R = \epsilon_0 \int d^3k \left[\frac{\vec{\pi}^* \cdot \vec{\pi}}{\epsilon_0^2} + \omega^2 \vec{A}^* \cdot \vec{A} - \frac{\pi_s^* \pi_s}{\epsilon_0^2} - \omega^2 A_s^* A_s \right]$

$H_I = -L_I = \int d^3k [j^\mu A_\mu + j^\mu A_\mu^*] = \int d^3r j^\mu(\vec{r}) A_\mu(\vec{r})$

- Equation de Hamilton - Jacobi

$\begin{cases} \dot{A}_j = \partial \bar{\mathcal{H}} / \partial \pi_j^* = \partial \bar{\mathcal{H}}_R / \partial \pi_j^* = \pi_j / \epsilon_0 \\ \dot{A}_s = \partial \bar{\mathcal{H}} / \partial \pi_s^* = \partial \bar{\mathcal{H}}_R / \partial \pi_s^* = -\pi_s / \epsilon_0 \end{cases}$ $\begin{cases} \dot{\pi}_j = -\partial \bar{\mathcal{H}} / \partial A_j^* = -\epsilon_0 \omega^2 A_j + j_j \\ \dot{\pi}_s = -\partial \bar{\mathcal{H}} / \partial A_s^* = \epsilon_0 \omega^2 A_s - c\rho \end{cases}$

- Variables normales - Définition et équations d'évolution

$\alpha_j = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{2\hbar\omega}} (\omega A_j + \frac{i}{\epsilon_0} \pi_j) \rightarrow \dot{\alpha}_j + i\omega \alpha_j = \frac{i}{\sqrt{2\epsilon_0\hbar\omega}} j_j$

$\alpha_s = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{2\hbar\omega}} (\omega A_s - \frac{i}{\epsilon_0} \pi_s) \rightarrow \dot{\alpha}_s + i\omega \alpha_s = \frac{i}{\sqrt{2\epsilon_0\hbar\omega}} c\rho$

En l'absence de sources, α_j et α_s varient en $e^{-i\omega t}$.

- Développement des potentiels en variables normales

$A_j(\vec{k}, t) = \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0\omega}} [\alpha_j(\vec{k}, t) + \alpha_j^*(-\vec{k}, t)]$ $A_s(\vec{k}, t) = \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0\omega}} [\alpha_s(\vec{k}, t) + \alpha_s^*(-\vec{k}, t)]$

$\begin{cases} A_j(\vec{r}, t) = \int d^3k \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0\omega(2\pi)^3}} [\alpha_j(\vec{k}, t) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} + \alpha_j^*(\vec{k}, t) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}] \\ A_s(\vec{r}, t) = \int d^3k \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0\omega(2\pi)^3}} [\alpha_s(\vec{k}, t) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} + \alpha_s^*(\vec{k}, t) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}] \end{cases}$

En l'absence de sources, développements en ondes planes progressives

Passage de $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z, \alpha_s$ à $\alpha_E, \alpha_{E'}, \alpha_\ell = \vec{k} \cdot \vec{\alpha}, \alpha_s$

- Expression de H_R et \vec{P}_R

$H_R = \int d^3k \hbar\omega [\alpha_E^* \alpha_E + \alpha_{E'}^* \alpha_{E'} + \alpha_\ell^* \alpha_\ell - \alpha_s^* \alpha_s]$

$\vec{P}_R = \int d^3k \hbar\vec{k} [\alpha_E^* \alpha_E + \alpha_{E'}^* \alpha_{E'} + \alpha_\ell^* \alpha_\ell - \alpha_s^* \alpha_s]$

- Forme de la condition supplémentaire

$\Lambda = \sum_\mu \partial_\mu A^\mu = \int d^3k \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0\omega(2\pi)^3}} [ik\alpha_\ell + \frac{\dot{\alpha}_s}{c}] e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} + c.c.$

Equation du mouvement de $\alpha_s \rightarrow ik\alpha_\ell + \frac{\dot{\alpha}_s}{c} = ik[\alpha_\ell - \alpha_s + \frac{1}{k\sqrt{2\epsilon_0\hbar\omega}} \rho] = ik\beta$

Equations du mouvement de α_ℓ et α_s + équation $\dot{\beta} + i\vec{k}\cdot\vec{j} = 0 \rightarrow \dot{\beta} + i\omega\beta = 0$
 β varie en $e^{-i\omega t}$

$$\sum_{\mu} \partial_{\mu} A^{\mu} = 0 \quad \forall \vec{r}, t \iff \beta(\vec{k}) = \alpha_{\rho}(\vec{k}) - \alpha_s(\vec{k}) + \frac{\rho(\vec{k})}{k\sqrt{2\epsilon_0\hbar\omega}} = 0 \quad \forall \vec{k}$$

- Cas du champ libre ($j^{\mu} = 0$) $\rightarrow \alpha_{\rho}(\vec{k}) = \alpha_s(\vec{k}) \quad \forall \vec{k}$

$$\begin{cases} \alpha_d = i(\alpha_{\rho} - \alpha_s) / \sqrt{2} \\ \alpha_g = (\alpha_{\rho} + \alpha_s) / \sqrt{2} \end{cases} \quad \text{Condition supplémentaire : } \alpha_d(\vec{k}) = 0 \quad \forall \vec{k}$$

Arbitraire de jauge $\vec{A} \rightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}f \quad A_s \rightarrow A'_s = A_s - \frac{\partial f}{\partial t}$ avec $\square f = 0$

$$f = \int d^3k \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0\omega(2\pi)^3}} \mathcal{F}(\vec{k}) e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} + c.c. \quad \text{avec } \omega = ck, \mathcal{F} \text{ quelconque}$$

$$\alpha'_{\rho} = \alpha_{\rho} \quad \alpha'_{\epsilon} = \alpha_{\epsilon} \quad \alpha'_{\rho} = \alpha_{\rho} + ik\mathcal{F} \quad \alpha'_{\epsilon} = \alpha_{\epsilon} + ik\mathcal{F}$$

$$\hookrightarrow \alpha'_d = \alpha_d \quad \alpha'_g = \alpha_g + i\sqrt{2}k\mathcal{F} \quad \text{Seul } \alpha_g \text{ change}$$

- Quantification canonique Dans un 1/2 espace réciproque,

$$[A_i(\vec{k}), \pi_j^+(\vec{k}')] = i\hbar \delta_{ij} \delta(\vec{k} - \vec{k}') \quad [A_s(\vec{k}), \pi_s^+(\vec{k}')] = \delta(\vec{k} - \vec{k}')$$

Dans l'autre 1/2 espace, $A_j(\vec{k}) = A_j^+(-\vec{k}), A_s(\vec{k}) = A_s^+(-\vec{k}) \dots$

- Opérateurs de création et d'annihilation

$$a_j(\vec{k}) = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{2\hbar\omega}} [\omega A_j(\vec{k}) + \frac{i}{\epsilon_0} \pi_j(\vec{k})] \quad a_s(\vec{k}) = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{2\hbar\omega}} [\omega A_s(\vec{k}) - \frac{i}{\epsilon_0} \pi_s(\vec{k})]$$

$$\hookrightarrow \begin{cases} [a_i(\vec{k}), a_j^+(\vec{k}')] = \delta_{ij} \delta(\vec{k} - \vec{k}') \\ [a_s(\vec{k}), a_s^+(\vec{k}')] = -\delta(\vec{k} - \vec{k}') \end{cases} \rightarrow [a_{\mu}(\vec{k}), a_{\nu}^+(\vec{k}')] = -g_{\mu\nu} \delta(\vec{k} - \vec{k}')$$

- Relations de commutation covariante des potentiels libres (Heisenberg)

$$A_{\mu}(x^{\nu}) = \int d^3k \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0\omega(2\pi)^3}} [a_{\mu}(\vec{k}) e^{-ik_{\nu}x^{\nu}} + a_{\mu}^+(\vec{k}) e^{ik_{\nu}x^{\nu}}]$$

$$\hookrightarrow [A_{\mu}(\vec{r}, t), A_{\nu}(\vec{r}', t')] = \frac{i\hbar}{\epsilon_0 c} g_{\mu\nu} D(\vec{r} - \vec{r}', t - t')$$

$$D(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi r} [\delta(r - ct) - \delta(r + ct)]$$

- Condition supplémentaire pour le champ quantique libre

$$\text{Etat physique } |\psi\rangle : [a_{\rho}(\vec{k}) - a_s(\vec{k})] |\psi\rangle = 0 \quad \forall \vec{k}$$

$$\hookrightarrow \langle \psi | \partial_{\mu} A^{\mu}(\vec{r}, t) | \psi \rangle = 0 \quad \forall \vec{r}, t$$

- Construction de l'espace des états

• Vide $|0\rangle \quad a_{\mu}(\vec{k}) |0\rangle = 0 \quad \forall \vec{k}, \mu$

• Photons transverses et longitudinaux
 $|n_{\epsilon}, n_{\epsilon'}, n_{\rho}\rangle = \frac{(a_{\epsilon}^+)^{n_{\epsilon}} (a_{\epsilon'}^+)^{n_{\epsilon'}} (a_{\rho}^+)^{n_{\rho}}}{\sqrt{n_{\epsilon}! n_{\epsilon'}! n_{\rho}!}} |0\rangle$

• Etat à 1 photon scalaire $|\psi\rangle = \int d^3k g(\vec{k}) a_s^+(\vec{k}) |0\rangle$

$$\hookrightarrow \langle \psi | \psi \rangle = \iint d^3k d^3k' g^*(\vec{k}') g(\vec{k}) \langle 0 | a_s(\vec{k}') a_s^+(\vec{k}) | 0 \rangle = -\langle 0 | 0 \rangle \int d^3k |g(\vec{k})|^2 < 0 !$$

Formulation covariante (suite)
(Champ libre ou couplé à des sources extérieures)

V-1

C - Quantification covariante avec une métrique indéfinie

- ① Introduction d'un 2^{ème} produit scalaire et d'une 2^{ème} norme
- ② Pourquoi introduire une 2^{ème} métrique non définie positive ?
 - a - Nouvelle condition d'hermiticité imposée aux potentiels
 - b - Opérateurs a_μ et \bar{a}_μ - Développement des potentiels en a_μ et \bar{a}_μ
 - c - Relations de commutation.
 - d - Comment choisir la nouvelle métrique pour résoudre les difficultés posées par la construction de l'espace des états.
- ③ Détermination de la nouvelle métrique
- ④ Construction des kets physiques

D - Champ quantique couplé à 2 charges fixes

- ① Hamiltonien.
- ② Déplacement énergétique de l'état fondamental - Réinterprétation de la loi de Coulomb.
 - a - Calcul perturbatif.
 - b - Discussion physique - Echange de photons scalaires.
 - c - Calcul exact.
- ③ Nouvel état fondamental du champ.

Définition du 2^{ème} produit scalaire $\langle \phi | \psi \rangle$

- Produit scalaire et norme habituels dans l'espace des états
 $\langle \phi | \psi \rangle = \langle \psi | \phi \rangle^*$ $\langle \psi | \psi \rangle > 0$ nul si et seulement si $|\psi\rangle = 0$
- Opérateur linéaire M hermitique unitaire
 $M = M^\dagger = M^{-1}$ $M^2 = \mathbb{1}$ valeurs propres $m_i = +1, -1$
- Nouveau produit scalaire (notations de Dirac "rondes")
 $\langle \phi | \psi \rangle = \langle \phi | M | \psi \rangle$ $\langle \phi | \psi \rangle = \langle \psi | \phi \rangle^*$ car $M = M^\dagger$
- Nouveau "bra" associé au nouveau produit scalaire
 $\langle \psi | = \langle \psi | M$ (par contre $|\psi\rangle = |\psi\rangle$)

Nouvelle norme $\langle \psi | \psi \rangle = \langle \psi | M | \psi \rangle$ réelle

$M |m_i\rangle = m_i |m_i\rangle \rightarrow \langle \psi | \psi \rangle = \sum_i m_i |\langle m_i | \psi \rangle|^2$
 Comme $m_i = +1$ ou -1 , $\langle \psi | \psi \rangle$ peut être négatif
 Métrique non définie positive (indéfinie).

Nouvel adjoint \bar{A} d'un opérateur linéaire A

V-2

- $\langle \phi | A | \psi \rangle = \langle \phi | M A | \psi \rangle$ d'après $\langle \phi | = \langle \phi | M$
- Nouvel adjoint \bar{A} défini par : $\langle \phi | A | \psi \rangle = \langle \psi | \bar{A} | \phi \rangle^* \quad \forall \phi, \psi$
 $\hookrightarrow \quad | \psi' \rangle = A | \psi \rangle \iff \langle \psi' | = \langle \psi | \bar{A}$
- Relation entre le nouvel adjoint \bar{A} et l'adjoint habituel A^\dagger de A
 $\langle \phi | \bar{A} | \psi \rangle = \langle \phi | M \bar{A} | \psi \rangle$
 $= \langle \psi | A | \phi \rangle^* = \langle \psi | M A | \phi \rangle^* = \langle \phi | A^\dagger M^\dagger | \psi \rangle$
 $\hookrightarrow M \bar{A} = A^\dagger M^\dagger \rightarrow \bar{A} = M A^\dagger M$ car $M = M^\dagger$ et $M^2 = \mathbb{1}$
- Hermiticité dans la nouvelle métrique : $A = \bar{A}$

Valeurs et vecteurs propres : Notion indépendante de la métrique

$$A | \psi \rangle = \lambda | \psi \rangle \rightarrow A | \psi \rangle = \lambda | \psi \rangle$$

Nouvelle valeur moyenne $\langle A \rangle_\psi = \frac{\langle \psi | A | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle}$ (si $\langle \psi | \psi \rangle \neq 0$)

- Réelle si $A = \bar{A}$
- Attention : pas d'interprétation probabiliste attachée à $\langle A \rangle_\psi$
 $A = \bar{A}$ n'entraîne pas $A = A^\dagger$ et les valeurs propres de $A = \bar{A}$ ne sont pas forcément réelles.

Nouvelle condition imposée aux potentiels : $A_\mu = \bar{A}_\mu$ (au lieu de $A_\mu = A_\mu^\dagger$)

- Pour des grandeurs non véritablement physiques comme A_5 , il n'est pas grave d'avoir $A_5 \neq A_5^\dagger$ et des valeurs propres non réelles (A_5 n'est pas mesurable). Par contre, on doit avoir $\vec{E} = \vec{E}^\dagger$, $\vec{B} = \vec{B}^\dagger$, $\vec{A}_\perp = \vec{A}_\perp^\dagger$
- $A_\mu = \bar{A}_\mu$ entraîne que $\langle A_\mu \rangle$ est réel. Possibilité d'associer aux équations quantiques du mouvement des équations classiques entre grandeurs réelles.

Définition de a_μ et \bar{a}_μ : idem que pour a_μ et a_μ^\dagger en remplaçant \mathcal{A}_μ^\dagger et π_μ^\dagger par $\bar{\mathcal{A}}_\mu$ et $\bar{\pi}_\mu$.

$$\hookrightarrow A_\mu(\vec{r}) = \int d^3k \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 \omega(2\pi)^3}} [a_\mu(\vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} + \bar{a}_\mu(\vec{k}) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}]$$

$$H_R = \int d^3k \hbar \omega \left[(\bar{a}_E a_E + \frac{1}{2}) + (\bar{a}_{E1} a_{E1} + \frac{1}{2}) + (\bar{a}_L a_L + \frac{1}{2}) - (\bar{a}_5 a_5 + \frac{1}{2}) \right]$$

Relations de commutation (idem qu'avant en prenant les nouveaux adjoints)

$$[\mathcal{A}_i(\vec{k}), \bar{\pi}_j(\vec{k}')] = i\hbar \delta_{ij} \delta(\vec{k}-\vec{k}') \quad [\mathcal{A}_5(\vec{k}), \bar{\pi}_5(\vec{k}')] = \delta(\vec{k}-\vec{k}')$$

$$\hookrightarrow \begin{cases} [a_i(\vec{k}), \bar{a}_j(\vec{k}')] = \delta_{ij} \delta(\vec{k}-\vec{k}') \\ [a_5(\vec{k}), \bar{a}_5(\vec{k}')] = -\delta(\vec{k}-\vec{k}') \end{cases} \rightarrow [a_\mu(\vec{k}), \bar{a}_\nu(\vec{k}')] = -g_{\mu\nu} \delta(\vec{k}-\vec{k}')$$

\hookrightarrow Mêmes relations de commutation covariantes entre $A_\mu(\vec{r}, t)$ et $A_\nu(\vec{r}', t')$

Comment choisir M ?

- Si l'on trouve M tel que $\bar{a}_j = M a_j^\dagger M = a_j^\dagger$ $\bar{a}_5 = M a_5^\dagger M = -a_5^\dagger$

$$[a_5(\vec{k}), \bar{a}_5(\vec{k}')] = -\delta(\vec{k}-\vec{k}') \rightarrow [a_5(\vec{k}), a_5^\dagger(\vec{k}')] = +\delta(\vec{k}-\vec{k}')$$

Bon signe rétabli pour $[a_5, a_5^\dagger]$ sans toucher à $[a_i, a_j^\dagger]$

- Construction habituelle possible pour l'espace des états des photons scalaires

$$|n_s\rangle = \frac{(a_s^\dagger)^{n_s}}{\sqrt{n_s!}} |0_s\rangle \quad \langle n_s | m_s \rangle = \delta_{n_s m_s}$$

$$a_s^\dagger |n_s\rangle = \sqrt{n_s+1} |n_s+1\rangle \quad a_s |n_s\rangle = \sqrt{n_s} |n_s-1\rangle \quad a_s |0_s\rangle = 0$$

- H_R devient défini positif

$$H_R = \int d^3k \hbar \omega \left[(a_E^\dagger a_E + \frac{1}{2}) + (a_{E'}^\dagger a_{E'} + \frac{1}{2}) + (a_L^\dagger a_L + \frac{1}{2}) + (a_S^\dagger a_S + \frac{1}{2}) \right]$$

- Possibilité d'avoir des états à nouvelle norme négative

$[a_s, \bar{a}_s] = -\delta(\vec{k}-\vec{k}')$ entraîne que les états à 1 photon scalaire sont dans ce cas

- Prise à payer : $A_s = \bar{A}_s$ et $\bar{a}_s = -a_s^\dagger \rightarrow A_s = -A_s^\dagger$
 Les valeurs propres de A_s sont imaginaires pures ! Pas grave car A_s n'est pas mesurable (par contre on a toujours $\vec{A}_\perp = \vec{A}_\perp^\dagger$)

Détermination de M pour que $\bar{a}_j = a_j^\dagger$ et $\bar{a}_s = -a_s^\dagger$

- M défini par $M |n_s\rangle = (-1)^{n_s} |n_s\rangle$

- $M a_s^\dagger |n_s\rangle = (-1)^{n_s+1} \sqrt{n_s+1} |n_s+1\rangle = -a_s^\dagger M |n_s\rangle \quad \forall n_s$

$$\rightarrow M a_s^\dagger = -a_s^\dagger M \quad \rightarrow \bar{a}_s = M a_s^\dagger M = -a_s^\dagger$$

- $\langle n'_s | n_s \rangle = \langle n_s | M | n_s \rangle = (-1)^{n_s} \delta_{n'_s n_s}$

Opérateurs a_d et a_g : $a_d = i(a_E - a_S)/\sqrt{2}$ $a_g = (a_E + a_S)/\sqrt{2}$

- $[a_d(\vec{k}), a_d^\dagger(\vec{k}')] = \delta(\vec{k}-\vec{k}') = [a_g(\vec{k}), a_g^\dagger(\vec{k}')] \quad [a_d, a_g^\dagger] = [a_d^\dagger, a_g] = 0$

$$\bar{a}_d = -i(\bar{a}_E - \bar{a}_S)/\sqrt{2} = -i(a_E^\dagger + a_S^\dagger)/\sqrt{2} = -i a_g^\dagger \rightarrow [a_d, \bar{a}_d] = 0$$

- Condition supplémentaire (champ libre) $a_d |\psi\rangle = 0$

Etats physiques (champ libre) $|n_E, n_{E'}, 0_d, n_g\rangle = \frac{(a_E^\dagger)^{n_E} (a_{E'}^\dagger)^{n_{E'}} (a_g^\dagger)^{n_g}}{\sqrt{n_E! n_{E'}! n_g!}} |0\rangle$

- Dans un état physique, les anciennes et nouvelles valeurs moyennes des grandeurs véritablement physiques coïncident.
 - Rôle des "photons g" : arbitraire de jauge.

Hamiltonien

- Densité de charge $\rho_e(\vec{r}) = q_1 \delta(\vec{r}-\vec{r}_1) + q_2 \delta(\vec{r}-\vec{r}_2) \quad \rho_e(\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} [q_1 e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}_1} + q_2 e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}_2}]$

$$H = H_R + V \quad V = \int d^3r c \rho_e(\vec{r}) A_s(\vec{r}) = c q_1 A_s(r_1) + c q_2 A_s(r_2) \\ = \int d^3k c \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 \omega}} [a_s(\vec{k}) \rho_e^*(\vec{k}) + \bar{a}_s(\vec{k}) \rho_e(\vec{k})]$$

Calcul perturbatif du déplacement ΔE de l'état fondamental $|0\rangle$ du champ

$$\Delta E = \langle 0 | V | 0 \rangle + \langle 0 | V \frac{\varphi}{E_0 - H_R} V | 0 \rangle + \dots \quad \varphi = \mathbb{1} - |0\rangle \langle 0|$$

Expression valable même si est non hermitique ($V = \bar{V} \quad V = -V^\dagger$)

$$\Delta E = 0 + \int d^3k \frac{\langle 0 | V | \vec{k} s \rangle \langle \vec{k} s | V | 0 \rangle}{-\hbar \omega} \quad |\vec{k} s\rangle = a_s^\dagger(\vec{k}) |0\rangle$$

$$\begin{cases} \langle 0|V|\vec{k}s\rangle = c \int d^3k' \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0\omega'}} \langle 0|a_s(\vec{k}') a_s^\dagger(\vec{k})|0\rangle \rho_e^*(\vec{k}') = c \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0\omega}} \rho_e^*(\vec{k}) \\ \langle \vec{k}s|V|0\rangle = c \int d^3k' \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0\omega'}} \langle 0|a_s(\vec{k}) \bar{a}_s(\vec{k}')|0\rangle \rho_e(\vec{k}') = -c \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0\omega}} \rho_e(\vec{k}) \end{cases}$$

$$\hookrightarrow \Delta E = \int d^3k \frac{\rho_e^*(\vec{k})\rho_e(\vec{k})}{2\epsilon_0 k^2} = V_{\text{Coul}} = \epsilon_{\text{Coul}}^1 + \epsilon_{\text{Coul}}^2 + \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}$$

Emission virtuelle d'un photon scalaire par une charge et reabsorption de ce photon par la même charge ou par l'autre

Autre manière d'écrire $H = H_R + V$ $H = \int d^3k H_S(\vec{k})$

$$H_S(\vec{k}) = \hbar\omega \left[-\bar{a}_s(\vec{k})a_s(\vec{k}) + \lambda^*(\vec{k})a_s(\vec{k}) + \lambda(\vec{k})\bar{a}_s(\vec{k}) + \frac{1}{2} \right] \quad \lambda(\vec{k}) = \frac{c}{\hbar\omega} \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0\omega}} \rho_e(\vec{k})$$

Translation sur a_s et \bar{a}_s $b_s(\vec{k}) = a_s(\vec{k}) - \lambda(\vec{k})$ $\bar{b}_s(\vec{k}) = \bar{a}_s(\vec{k}) - \lambda^*(\vec{k})$

$$[b_s(\vec{k}), \bar{b}_s(\vec{k}')] = [a_s(\vec{k}), \bar{a}_s(\vec{k}')] = -\delta(\vec{k} - \vec{k}')$$

Opérateur de translation $T = \exp\left\{ \int d^3k [\lambda(\vec{k})\bar{a}_s(\vec{k}) - \lambda^*(\vec{k})a_s(\vec{k})] \right\}$

$T\bar{T} = \bar{T}T = \mathbb{1}$ Unitaire dans le nouveau sens

$$\bar{T}a_s(\vec{k})T = a_s(\vec{k}) - \lambda(\vec{k}) \quad \bar{T}\bar{a}_s(\vec{k})T = \bar{a}_s(\vec{k}) - \lambda^*(\vec{k})$$

Démonstration à partir de $e^A e^B = e^{A+B} e^{\frac{1}{2}[A,B]}$, identité valable si $[[A,B],A] = [[A,B],B] = 0$

Diagonalisation exacte de H

$$\begin{aligned} \hbar\omega \bar{T} \left[-\bar{a}_s(\vec{k})a_s(\vec{k}) + \frac{1}{2} \right] T &= \hbar\omega \left[-(\bar{a}_s - \lambda^*)(a_s - \lambda) + \frac{1}{2} \right] = \\ \hbar\omega \left[-\bar{a}_s a_s + \lambda^* a_s + \lambda \bar{a}_s - \lambda^* \lambda + \frac{1}{2} \right] &= H_S(\vec{k}) - \hbar\omega \lambda^*(\vec{k})\lambda(\vec{k}) \end{aligned}$$

$H = H_R + V = \int d^3k H_S(\vec{k})$ a le même spectre que H_R décalé de $\int d^3k \hbar\omega \lambda^*(\vec{k})\lambda(\vec{k}) = \int d^3k \frac{\rho_e^*(\vec{k})\rho_e(\vec{k})}{2\epsilon_0 k^2} = V_{\text{Coul}}$

Nouvel état fondamental du champ $|\tilde{0}_s\rangle = |0_\epsilon 0_{\epsilon'} 0_\ell \tilde{0}_s\rangle$

$|\tilde{0}_s\rangle = \bar{T}|0_s\rangle \quad a_s|0_s\rangle = 0 \rightarrow [a_s(\vec{k}) - \lambda(\vec{k})]|\tilde{0}_s\rangle = 0$

$|\tilde{0}_s\rangle$: état cohérent

Condition supplémentaire $[a_\ell(\vec{k}) - a_s(\vec{k}) + \frac{\rho(\vec{k})}{k\sqrt{2\epsilon_0\hbar\omega}}]|\psi\rangle = 0$ (Cours précédent)

$\hookrightarrow [a_\ell(\vec{k}) - a_s(\vec{k}) + \lambda(\vec{k})]|\psi\rangle = 0$

le nouveau vide est physique car $a_\ell|0_\ell\rangle = 0 \quad (a_s - \lambda)|\tilde{0}_s\rangle$

Nouvelle valeur moyenne de $U(\vec{r}) = c A_s(\vec{r})$ dans $|\tilde{0}_s\rangle$

$$\begin{aligned} \frac{\langle \tilde{0}_s|U(\vec{r})|\tilde{0}_s\rangle}{\langle \tilde{0}_s|\tilde{0}_s\rangle} &= c \int d^3k \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0\omega(2\pi)^3}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \frac{\langle \tilde{0}_s|a_s(\vec{k})|\tilde{0}_s\rangle}{\langle \tilde{0}_s|\tilde{0}_s\rangle} + c.c. \\ &= c \int d^3k \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0\omega(2\pi)^3}} \lambda(\vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} + c.c. = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \frac{\rho_e(\vec{k})}{\epsilon_0 k^2} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \frac{\rho_e(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = U_{\text{Coul}}(\vec{r}) \end{aligned}$$

Relations indépendantes de toute métrique

- Relation de commutation canoniques entre $A_S(\vec{r})$ et $\Pi_S(\vec{r}')$ et leurs transformées de Fourier $\mathcal{A}_S(\vec{k})$ et $\Pi_S(\vec{k}')$.

$$[A_S(\vec{r}), \Pi_S(\vec{r}')] = i\hbar \delta(\vec{r} - \vec{r}')$$

$$\xrightarrow{\text{T.F.}} [\mathcal{A}_S(\vec{k}), \Pi_S(\vec{k}')] = \frac{1}{(2\pi)^3} \iint d^3r d^3r' [A_S(\vec{r}), \Pi_S(\vec{r}')] e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} + \vec{k}'\cdot\vec{r}')} = i\hbar \delta(\vec{k} + \vec{k}')$$

$$[\mathcal{A}_S(\vec{k}), \Pi_S(-\vec{k}')] = i\hbar \delta(\vec{k} - \vec{k}')$$

- Définition de l'opérateur a_S associé à α_S (varie en $e^{-i\omega t}$)

$$a_S(\vec{k}) = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{2\hbar\omega}} \left[\omega \mathcal{A}_S(\vec{k}) - \frac{i}{\epsilon_0} \Pi_S(\vec{k}) \right]$$

Espace des états

- Les opérateurs précédents agissent dans l'espace des états quantiques du rayonnement qui doit être, d'après les postulats de la M.P. un espace de Hilbert, donc muni d'une norme définie positive

- Chaque opérateur G possède un adjoint G^+ .

Les opérateurs hermitiques ($G = G^+$) ont des valeurs propres réelles et les postulats habituels de la mesure peuvent leur être appliqués.

Quelle condition imposer à l'opérateur potentiel scalaire $A_S(\vec{r})$?

Choix habituel

$$\begin{cases} A_S(\vec{r}) = A_S^+(\vec{r}) \\ \mathcal{A}_S(-\vec{k}) = \mathcal{A}_S^+(\vec{k}) \end{cases}$$

Conséquences de ce choix

$$\downarrow [\mathcal{A}_S(\vec{k}), \Pi_S^+(\vec{k}')] = i\hbar \delta(\vec{k} - \vec{k}')$$

$$\downarrow a_S^+(\vec{k}) = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{2\hbar\omega}} \left[\omega \mathcal{A}_S^+(\vec{k}) + \frac{i}{\epsilon_0} \Pi_S^+(\vec{k}) \right]$$

$$\downarrow [a_S(\vec{k}), a_S^+(\vec{k}')] = -\delta(\vec{k} - \vec{k}')$$

$$\downarrow A_S(\vec{r}) = \int d^3k \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0\omega(2\pi)^3}} \left[a_S(\vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} + a_S^+(\vec{k}) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \right]$$

$$\downarrow [A_\mu(\vec{r}, t), A_\nu(\vec{r}', t')] = \frac{i\hbar}{\epsilon_0 c} g_{\mu\nu} D(\vec{r} - \vec{r}', t - t')$$

$$\downarrow H_R^S = - \int d^3k \hbar\omega a_S^+(\vec{k}) a_S(\vec{k})$$

Conclusions

- A_S est hermitique et on peut lui appliquer les postulats de la mesure
- le signe - de $[a_S, a_S^+]$ interdit de considérer a_S comme un opérateur d'annihilation, a_S^+ comme un opérateur de création. Difficultés sérieuses pour construire l'espace des états de photons scalaires

Autre choix

$$\begin{cases} A_S(\vec{r}) = -A_S^+(\vec{r}) \\ \mathcal{A}_S(-\vec{k}) = -\mathcal{A}_S^+(\vec{k}) \end{cases}$$

Conséquences de ce choix

$$\downarrow [\mathcal{A}_S(\vec{k}), \Pi_S^+(\vec{k}')] = -i\hbar \delta(\vec{k} - \vec{k}')$$

$$\downarrow a_S^+(\vec{k}) = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{2\hbar\omega}} \left[\omega \mathcal{A}_S^+(\vec{k}) + \frac{i}{\epsilon_0} \Pi_S^+(\vec{k}) \right]$$

$$\downarrow [a_S(\vec{k}), a_S^+(\vec{k}')] = +\delta(\vec{k} - \vec{k}')$$

$$\downarrow A_S(\vec{r}) = \int d^3k \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0\omega(2\pi)^3}} \left[a_S(\vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} - a_S^+(\vec{k}) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \right]$$

$$\downarrow [A_\mu(\vec{r}, t), A_\nu(\vec{r}', t')] = \frac{i\hbar}{\epsilon_0 c} g_{\mu\nu} D(\vec{r} - \vec{r}', t - t')$$

$$\downarrow H_R^S = + \int d^3k \hbar\omega a_S^+(\vec{k}) a_S(\vec{k})$$

Conclusions

- Le signe + est rétabli pour $[a_S, a_S^+]$ et la construction de l'espace des états des photons scalaires redevient possible
- A_S est antihermitique et a donc des valeurs propres imaginaires pures, les postulats de la mesure ne peuvent pas être appliqués à A_S .

Autre manière de présenter le choix $A_S = -A_S^\dagger$

Introduction d'une 2ème métrique dans l'espace de Hilbert

Rien n'empêche d'introduire dans l'espace de Hilbert précédent une deuxième métrique, éventuellement indéfinie (non définie positive)

Chaque opérateur G possède un 2ème adjoint $\bar{G} = M G^\dagger M$

Condition imposée sur A_S $A_S(\vec{r}) = \bar{A}_S(\vec{r})$ $\mathcal{A}_S(-\vec{k}) = \bar{\mathcal{A}}_S(\vec{k})$
 A_S est hermitique pour la nouvelle métrique (équivalent quantique de $A_S = A_S^*$)

Conséquences de cette condition

- ↓ $[\mathcal{A}_S(\vec{k}), \bar{\mathcal{A}}_S(\vec{k}')] = i\hbar \delta(\vec{k}-\vec{k}')$
- ↓ $\bar{a}_S(\vec{k}) = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{2\hbar\omega}} \left[\omega \bar{\mathcal{A}}_S(\vec{k}) + \frac{i}{\epsilon_0} \bar{\Pi}_S(\vec{k}) \right]$
- ↓ $[a_S(\vec{k}), \bar{a}_S(\vec{k}')] = -\delta(\vec{k}-\vec{k}')$
- ↓ $A_S(\vec{r}) = \int d^3k \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0\omega(2\pi)^3}} \left[a_S(\vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} + \bar{a}_S(\vec{k}) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \right]$
- ↓ $[A_\mu(\vec{r}, t), A_\nu(\vec{r}', t')] = \frac{i\hbar}{\epsilon_0 c} g_{\mu\nu} D(\vec{r}-\vec{r}', t-t')$
- ↓ $H_R^S = -\int d^3k \hbar\omega \bar{a}_S(\vec{k}) a_S(\vec{k})$

Choix de M $\bar{a}_S(\vec{k}) = M a_S^\dagger(\vec{k}) M = -a_S^\dagger(\vec{k})$

$A_S = -A_S^\dagger \iff A_S = \bar{A}_S$

$M |n_S\rangle = (-1)^{n_S} |n_S\rangle$

Avantages de cette présentation ($A_S = \bar{A}_S$, plutôt que $A_S = -A_S^\dagger$)

- Comme $A_S = \bar{A}_S$, la nouvelle valeur moyenne de A_S

$\langle A_S \rangle = \frac{\langle \Psi | A | \Psi \rangle}{\langle \Psi | \Psi \rangle}$

est réelle.

Possibilité d'associer à l'opérateur A_S un nombre réel $\langle A_S \rangle$

Possibilité d'associer aux équations quantiques du mouvement des équations entre nombre réels auxquelles on impose d'avoir la même forme que les équations classiques

Attention : $\langle A_S \rangle$ n'a pas la signification physique d'une vraie valeur moyenne puisque A_S a des valeurs propres imaginaires pures

- Autre avantage de la présentation $A_S = \bar{A}_S$ (plutôt que $A_S = -A_S^\dagger$)

$[a_\mu(\vec{k}), \bar{a}_\nu(\vec{k}')] = -g_{\mu\nu} \delta(\vec{k}-\vec{k}')$

Forme covariante des commutateurs $[a_\mu, \bar{a}_\nu]$ alors que

$[a_\mu(\vec{k}), a_\nu^\dagger(\vec{k}')] = \delta_{\mu\nu} \delta(\vec{k}-\vec{k}')$

Transformation unitaire associée à un changement de lagrangien

VI-1

① Changement de lagrangien en théorie classique

Coordonnées et vitesses généralisées - Etat dynamique
Premier lagrangien
Nouveau lagrangien équivalent
Grandeurs physiques
Hamiltonien

② Les 2 descriptions quantiques associées aux 2 lagrangiens

Notations
2 opérateurs fondamentaux
Quantification à partir du premier lagrangien.
Quantification à partir du second lagrangien

③ Correspondance entre les 2 descriptions quantiques

Opérateurs associés à $x, p_L, p_{L'}$
Transformation unitaire faisant passer d'un point de vue à l'autre.
Lien entre les 2 opérateurs associés à une même grandeur physique
Transformation du vecteur d'état
Relation entre les 2 hamiltoniens
Correspondance entre les 2 équations de Schrödinger
Equivalence des prédictions physiques.

Etude sur un cas simple, à une dimension, permettant des notations précises et non ambiguës

Coordonnées et vitesses : x, \dot{x}

Premier lagrangien : $L(x, \dot{x})$

Moment conjugué de x par rapport à L : $p_L = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}$

Equation de Lagrange $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L}{\partial x}$

Hamiltonien associé à L : $H_L = \dot{x} p_L - L$

Nouveau lagrangien L' équivalent à L

$L'(x, \dot{x}) = L(x, \dot{x}) + \frac{d}{dt} F(x, t) = L(x, \dot{x}) + \dot{x} \frac{\partial F(x, t)}{\partial x} + \frac{\partial F(x, t)}{\partial t}$

Moment conjugué de x par rapport à L'

$p_{L'} = \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + \frac{\partial F}{\partial x} = p_L + \frac{\partial F}{\partial x}$

p_L et $p_{L'}$ représentent 2 grandeurs physiques différentes, c'est à dire 2 fonctions différentes de x et \dot{x}

Etat dynamique : x, \dot{x}

Caractérisé par $\{x, P_L\}$ avec L , par $\{x, P_{L'}\}$ avec L'

P_L et $P_{L'}$ étant liés par $P_{L'} = P_L + \frac{\partial F}{\partial x}$

Grandeur physique : $G(x, \dot{x})$; ne dépend que de l'état dynamique x, \dot{x}

Exemple : énergie cinétique $\frac{1}{2} m \dot{x}^2$

Dans le formalisme hamiltonien, $G(x, \dot{x})$ exprimé en fonction de x, P_L

$L \rightarrow G$ décrit par $G_L(x, P_L)$

$L' \rightarrow G$ décrit par $G_{L'}(x, P_{L'})$

$G_L(x, \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}) = G(x, \dot{x}) \qquad G_{L'}(x, \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}}) = G(x, \dot{x})$

Pour un même état dynamique, même valeur de la grandeur physique, prévisions physiques identiques.

$\hookrightarrow G_L(x, P_L) = G_{L'}(x, P_L + \frac{\partial F}{\partial x})$

Hamiltonien

$L \rightarrow H_L(x, P_L) = \dot{x} P_L - L$

$L' \rightarrow H_{L'}(x, P_{L'}) = \dot{x} P_{L'} - L' = \dot{x} (P_L + \frac{\partial F}{\partial x}) - (L + \dot{x} \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial t})$
 $= \dot{x} P_L - L - \frac{\partial F}{\partial t} = H_L(x, P_L) - \frac{\partial F}{\partial t}$

Si $\partial F / \partial t \neq 0$, $H_{L'}(x, P_{L'}) \neq H_L(x, P_L)$ quand $P_{L'} = P_L + \frac{\partial F}{\partial x}$
 $\hookrightarrow H_L$ et $H_{L'}$ représentent 2 grandeurs physiques différentes.

Si $\partial F / \partial t = 0$, H_L et $H_{L'}$ représentent tous deux l'énergie.

Notations

Indice (1) : description quantique construite sur L . Point de vue (1)

Indice (2) : " " " " " " L' . " " " (2)

Exemple : position représentée par l'opérateur $X^{(1)}$ dans le point de vue (1), $X^{(2)}$ dans le point de vue (2)

Etat quantique : $|\psi^{(1)}\rangle$, $|\psi^{(2)}\rangle$

2 opérateurs fondamentaux

X : opérateur multiplication par x

P : opérateur $\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \qquad \rightarrow [X, P] = i\hbar$

Quantification à partir de L

$x \rightarrow X^{(1)} = X \qquad P_L \rightarrow P_L^{(1)} = P$

$G(x, \dot{x}) = G_L(x, P_L) \longrightarrow G^{(1)} = G_L(X, P)$

$H_L(x, P_L) \longrightarrow H_L^{(1)}(X, P)$

Quantifications à partir de L'

VI-3

$$x \rightarrow X^{(2)} = X \quad P_{L'} \rightarrow P_{L'}^{(2)} = P$$

$$G(x, \dot{x}) = G_{L'}(x, P_{L'}) \rightarrow G^{(2)} = G_{L'}(X, P)$$

$$H_{L'}(x, P_{L'}) \rightarrow H_{L'}^{(2)} = H_{L'}(X, P)$$

En général, $G_L(X, P)$ et $G_{L'}(X, P)$ sont 2 opérateurs différents :
 $G^{(1)} \neq G^{(2)}$. De même $|\psi^{(1)}\rangle \neq |\psi^{(2)}\rangle$

Une même grandeur physique, un même état physique sont en général représentés par des objets mathématiques différents dans le point de vue (1) et le point de vue (2)

Réciproquement, un même objet mathématique décrit des objets physiques différents suivant qu'il est considéré dans un point de vue ou dans l'autre

Opérateurs associés à $x, P_L, P_{L'}$

- Grandeur physique x $x \rightarrow X^{(1)} = X$ $x \rightarrow X^{(2)} = X$

Même opérateur X dans les 2 points de vue

- P_L et $P_{L'}$ sont 2 grandeurs physiques différentes reliées par $P_{L'} = P_L + \frac{\partial F}{\partial x}$

- Grandeur physique P_L

$$P_L \rightarrow P_L^{(1)} = P$$

$$P_L \rightarrow P_L^{(2)} = ?$$

Pour trouver $P_L^{(2)}$, on écrit $P_L = P_{L'} - \frac{\partial F}{\partial x}$ qui donne dans le point de vue (2) :

$$P_L^{(2)} = P_{L'}^{(2)} - \frac{\partial F}{\partial x} = P - \frac{\partial F}{\partial x}$$

- Grandeur physique $P_{L'}$

$$P_{L'} \rightarrow P_{L'}^{(1)} = ?$$

$$P_{L'} \rightarrow P_{L'}^{(2)} = P$$

Pour trouver $P_{L'}^{(1)}$, on écrit $P_{L'} = P_L + \frac{\partial F}{\partial x}$ qui donne dans le point de vue (1) :

$$P_{L'}^{(1)} = P_L^{(1)} + \frac{\partial F}{\partial x} = P + \frac{\partial F}{\partial x}$$

- Récapitulation

Point de vue (1)

$$X^{(1)} = X$$

$$P_L^{(1)} = P$$

$$P_{L'}^{(1)} = P + \frac{\partial F}{\partial x}$$

Point de vue (2)

$$X^{(2)} = X$$

$$P_L^{(2)} = P - \frac{\partial F}{\partial x}$$

$$P_{L'}^{(2)} = P$$

Transformation unitaire faisant passer d'un point de vue à l'autre [VI-4]

$$X^{(2)} = T X^{(1)} T^\dagger \quad P_L^{(2)} = T P_L^{(1)} T^\dagger \quad P_{L'}^{(2)} = T P_{L'}^{(1)} T^\dagger$$

$$\text{avec } T = \exp[iF(X)/\hbar]$$

Liens entre les 2 opérateurs représentant une même grandeur physique

$$G_L(x, P_L) = G_{L'}(x, P_L + \frac{\partial F}{\partial x}) \Rightarrow G_L(x, P) = G_{L'}(x, P + \frac{\partial F}{\partial x}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T G_L(x, P) T^\dagger = T G_{L'}(x, P + \frac{\partial F}{\partial x}) T^\dagger = G_{L'}(T x T^\dagger, T(P + \frac{\partial F}{\partial x}) T^\dagger) = G_{L'}(x, P)$$

$$\text{Or } G_L(x, P) = G^{(1)}, \quad G_{L'}(x, P) = G^{(2)}$$

$$\text{Donc } T G^{(1)} T^\dagger = G^{(2)}$$

Transformations des vecteurs d'état

Préservation des équations aux valeurs propres des observables représentant des grandeurs physiques

$|\psi^{(1)}\rangle$ état propre de $G^{(1)} \rightarrow |\psi^{(2)}\rangle$ état propre de $G^{(2)} = T G^{(1)} T^\dagger$ avec la même valeur propre

$$\hookrightarrow |\psi^{(2)}\rangle = T |\psi^{(1)}\rangle$$

Relation entre les 2 hamiltoniens

$$H_{L'}(x, P_{L'}) = H_{L'}(x, P_L + \frac{\partial F}{\partial x}) = H_L(x, P_L) - \frac{\partial F}{\partial t}$$

$$\hookrightarrow H_{L'}(x, P + \frac{\partial F}{\partial x}) = H_L(x, P) - \frac{\partial F}{\partial t}$$

$$\hookrightarrow T H_{L'}(x, P + \frac{\partial F}{\partial x}) T^\dagger = T H_L(x, P) T^\dagger - T \frac{\partial F}{\partial t} T^\dagger$$

$$\hookrightarrow H_{L'}(x, T(P + \frac{\partial F}{\partial x}) T^\dagger) = T H_L(x, P) T^\dagger - \frac{\partial F}{\partial t}$$

$$\hookrightarrow H^{(2)} = T H^{(1)} T^\dagger - \frac{\partial F}{\partial t}$$

Préservation de l'équation de Schrödinger

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi^{(2)}\rangle = i\hbar \frac{d}{dt} T |\psi^{(1)}\rangle = i\hbar \left(\frac{dT}{dt}\right) |\psi^{(1)}\rangle + T i\hbar \frac{d}{dt} |\psi^{(1)}\rangle$$

$$= -\frac{\partial F}{\partial t} T |\psi^{(1)}\rangle + T H |\psi^{(1)}\rangle = \left(-\frac{\partial F}{\partial t} + T H T^\dagger\right) T |\psi^{(1)}\rangle = H^{(2)} |\psi^{(2)}\rangle$$

Correspondance entre les opérateurs d'évolution

$$|\psi^{(2)}(t)\rangle = T(t) |\psi^{(1)}(t)\rangle = T(t) U^{(1)}(t, t_0) |\psi^{(1)}(t_0)\rangle =$$

$$= T(t) U^{(1)}(t, t_0) T^\dagger(t_0) |\psi^{(2)}(t_0)\rangle = U^{(2)}(t, t_0) |\psi^{(2)}(t_0)\rangle$$

$$\hookrightarrow U^{(2)}(t, t_0) = T(t) U^{(1)}(t, t_0) T^\dagger(t_0)$$

Equivalence des prédictions physiques

$$\text{Etat initial } |\varphi^{(1)}(t_0)\rangle \quad |\varphi^{(2)}(t_0)\rangle = T(t_0) |\varphi^{(1)}(t_0)\rangle$$

$$\text{Etat final } |\chi^{(1)}(t)\rangle \quad |\chi^{(2)}(t)\rangle = T(t) |\chi^{(1)}(t)\rangle$$

$$\langle \chi^{(2)}(t) | U^{(2)}(t, t_0) | \varphi^{(2)}(t_0) \rangle = \langle \chi^{(1)}(t) | U^{(1)}(t, t_0) | \varphi^{(1)}(t_0) \rangle$$

1 - Particules dans un champ extérieur

- Lagrangien . Phénomènes négligés
- Moments conjugués - Hamiltonien
- Description quantique
- Cas d'un système globalement neutre
Approximation des grandes longueurs d'onde

2 - Transformations de Göppert - Mayer

- Changement de lagrangien . Nouveau lagrangien
- Equivalence avec un changement de jauge
- Nouveaux moments conjugués - Nouvel hamiltonien
- Transformation unitaire associé
- Avantages du nouveau point de vue

3 - Généralisations

- Champ considéré non plus comme un champ extérieur mais comme un système dynamique (cours IX et X)
- Cas d'un système non globalement neutre : ion couplé à un champ extérieur

Lagrangien décrivant la dynamique des particules dans $\vec{A}_e(\vec{r}, t), U_e(\vec{r}, t)$

$$L = \sum_{\alpha} \frac{1}{2} m_{\alpha} \dot{\vec{r}}_{\alpha}^2 - V_{\text{coul}} + \sum_{\alpha} q_{\alpha} [\dot{\vec{r}}_{\alpha} \cdot \vec{A}_e(\vec{r}_{\alpha}, t) - U_e(\vec{r}_{\alpha}, t)]$$

Phénomènes négligés : interactions magnétiques, effets de retard, champ transverse rayonné par les particules...

Moments conjugués

$$\vec{P}_{\alpha L} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_{\alpha}} = m_{\alpha} \dot{\vec{r}}_{\alpha} + q_{\alpha} \vec{A}_e(\vec{r}_{\alpha}, t)$$

Hamiltonien

$$H_L = \sum_{\alpha} \vec{P}_{\alpha L} \cdot \dot{\vec{r}}_{\alpha} - L = \sum_{\alpha} \frac{1}{2m_{\alpha}} [\vec{P}_{\alpha L} - q_{\alpha} \vec{A}_e(\vec{r}_{\alpha}, t)]^2 + V_{\text{coul}} + \sum_{\alpha} q_{\alpha} U_e(\vec{r}_{\alpha}, t)$$

$$\vec{r}_\alpha^{(1)} = \vec{r}_\alpha \quad \text{multiplication par } \vec{r}_\alpha \quad \vec{P}_{\alpha L}^{(1)} = \vec{P}_\alpha = \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla}_\alpha$$

$$H_L^{(1)} = H_{PL}^{(1)} + h_{IL}^{(1)}$$

$$\begin{cases} H_{PL}^{(1)} = \sum_{\alpha} \frac{\vec{P}_\alpha^2}{2m_\alpha} + V_{\text{coul}}(\dots \vec{r}_\alpha \dots) \\ h_{IL}^{(1)} = \sum_{\alpha} \left[-\frac{q_\alpha}{m_\alpha} \vec{P}_\alpha \cdot \vec{A}_e(\vec{r}_\alpha, t) + \frac{q_\alpha^2}{2m_\alpha} \vec{A}_e^2(\vec{r}_\alpha, t) + q_\alpha U_e(\vec{r}_\alpha, t) \right] \end{cases}$$

Système localisé près de l'origine 0

- Globalement neutre $\sum_{\alpha} q_\alpha = 0$

- Localisé dans un volume d'extension linéaire $a \ll \lambda$

Développement de $\vec{A}_e(\vec{r}_\alpha, t)$ et $U_e(\vec{r}_\alpha, t)$ en puissances de \vec{r}_α

\hookrightarrow Moments multipolaires

- Approximation dipolaire électrique. On ne garde que le moment dipolaire électrique

$$\vec{d} = \sum_{\alpha} q_\alpha \vec{r}_\alpha$$

$$\hookrightarrow \sum_{\alpha} q_\alpha \dot{\vec{r}}_\alpha \cdot \vec{A}_e(\vec{r}_\alpha, t) \simeq \sum_{\alpha} q_\alpha \dot{\vec{r}}_\alpha \cdot \vec{A}_e(\vec{0}, t) = \dot{\vec{d}} \cdot \vec{A}_e(\vec{0}, t)$$

$$\sum_{\alpha} q_\alpha U_e(\vec{r}_\alpha, t) \simeq \left(\sum_{\alpha} q_\alpha \right) U_e(\vec{0}, t) + \sum_{\alpha} q_\alpha \vec{r}_\alpha \cdot \vec{\nabla} U_e(\vec{0}, t) = \vec{d} \cdot \vec{\nabla} U_e(\vec{0}, t)$$

- Lagrangien

$$L = \sum_{\alpha} \frac{1}{2} m_\alpha \dot{\vec{r}}_\alpha^2 - V_{\text{coul}} + \dot{\vec{d}} \cdot \vec{A}_e(\vec{0}, t) - \vec{d} \cdot \vec{\nabla} U_e(\vec{0}, t)$$

- Hamiltonien

$$H_L = \sum_{\alpha} \frac{1}{2m_\alpha} \left[\vec{P}_{\alpha L} - q_\alpha \vec{A}_e(\vec{0}, t) \right]^2 + V_{\text{coul}} + \vec{d} \cdot \vec{\nabla} U_e(\vec{0}, t)$$

- Moment conjugué

$$\vec{P}_{\alpha L} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_\alpha} = m_\alpha \dot{\vec{r}}_\alpha + q_\alpha \vec{A}_e(\vec{0}, t)$$

Changement de Lagrangien

$$L \rightarrow L' = L + \frac{d}{dt} f(\{\vec{r}_\alpha\}, t)$$

$$f(\{\vec{r}_\alpha\}, t) = -\sum_{\alpha} q_\alpha \vec{r}_\alpha \cdot \vec{A}_e(\vec{0}, t) = -\vec{d} \cdot \vec{A}_e(\vec{0}, t)$$

Nouveau Lagrangien

$$L' = \sum_{\alpha} \frac{1}{2} m_\alpha \dot{\vec{r}}_\alpha^2 - V_{\text{coul}} + \dot{\vec{d}} \cdot \vec{A}_e(\vec{0}, t) - \vec{d} \cdot \vec{\nabla} U_e(\vec{0}, t) - \dot{\vec{d}} \cdot \vec{A}_e(\vec{0}, t) - \vec{d} \cdot \dot{\vec{A}}_e(\vec{0}, t)$$

$$= \sum_{\alpha} \frac{1}{2} m_\alpha \dot{\vec{r}}_\alpha^2 - V_{\text{coul}} + \vec{d} \cdot \left[-\dot{\vec{A}}_e(\vec{0}, t) - \vec{\nabla} U_e(\vec{0}, t) \right]$$

$$= \sum_{\alpha} \frac{1}{2} m_\alpha \dot{\vec{r}}_\alpha^2 - V_{\text{coul}} + \vec{d} \cdot \vec{E}_e(\vec{0}, t)$$

Equivalence avec un changement de jauge : $\chi(\vec{r}, t) = -\vec{r} \cdot \vec{A}_e(\vec{0}, t)$

$$\begin{cases} A'_e(\vec{r}, t) = A_e(\vec{r}, t) + \vec{\nabla} \chi(\vec{r}, t) = \vec{A}_e(\vec{r}, t) - \vec{A}_e(\vec{0}, t) \\ U'_e(\vec{r}, t) = U_e(\vec{r}, t) - \frac{\partial}{\partial t} \chi(\vec{r}, t) = U_e(\vec{r}, t) + \vec{r} \cdot \dot{\vec{A}}_e(\vec{0}, t) \end{cases}$$

$$\hookrightarrow \begin{cases} \vec{A}'_e(\vec{0}, t) = \vec{0} \\ \vec{\nabla} U'_e(\vec{0}, t) = \vec{\nabla} U_e(\vec{0}, t) + \dot{\vec{A}}_e(\vec{0}, t) = -\vec{E}_e(\vec{0}, t) \end{cases}$$

Le lagrangien L' trouvé plus haut peut s'écrire comme l'ancien L avec \vec{A}_e et V_e remplacés par \vec{A}'_e et V'_e

$$L' = \sum_{\alpha} \frac{1}{2} m_{\alpha} \dot{\vec{r}}_{\alpha}^2 - V_{\text{coul}} + \sum_{\alpha} q_{\alpha} \dot{\vec{r}}_{\alpha} \cdot \underbrace{\vec{A}'_e(\vec{0}, t)}_{\vec{0}} - \underbrace{\sum_{\alpha} q_{\alpha} \vec{r}_{\alpha} \cdot \vec{\nabla} U'_e(\vec{0}, t)}_{\vec{d} \cdot \vec{E}_e(\vec{0}, t)}$$

Nouveau moment conjugué - Nouvel hamiltonien

$$\vec{P}_{\alpha L'} = \frac{\partial L'}{\partial \dot{\vec{r}}_{\alpha}} = m_{\alpha} \dot{\vec{r}}_{\alpha}$$

$$H_{L'} = \sum_{\alpha} \vec{P}_{\alpha L'} \cdot \dot{\vec{r}}_{\alpha} - L' = \sum_{\alpha} \frac{\vec{P}_{\alpha L'}^2}{2m_{\alpha}} + V_{\text{coul}} - \vec{d} \cdot \vec{E}_e(\vec{0}, t)$$

$$H_{L'}^{(2)} = H_{PL'}^{(2)} + h_{IL'}^{(2)} \quad \begin{cases} H_{PL'}^{(2)} = \sum_{\alpha} \frac{\vec{P}_{\alpha}^2}{2m_{\alpha}} + V_{\text{coul}} \\ h_{IL'}^{(2)} = -\vec{d} \cdot \vec{E}_e(\vec{0}, t) \end{cases}$$

Transformation unitaire faisant passer d'un point de vue à l'autre

$$T(t) = \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \vec{d} \cdot \vec{A}_e(\vec{0}, t) \right\} = \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \sum_{\alpha} q_{\alpha} \vec{r}_{\alpha} \cdot \vec{A}_e(\vec{0}, t) \right\}$$

Avantages du nouveau point de vue

- L'opérateur $\vec{P}_{\alpha} = (\hbar/i) \vec{\nabla}_{\alpha}$ décrit la grandeur physique $\vec{P}_{\alpha L'} = m_{\alpha} \dot{\vec{r}}_{\alpha}$ c'est à dire la quantité de mouvement
- L'opérateur $H_{PL'}^{(2)}$ décrit la grandeur physique énergie cinétique + énergie potentielle des particules (énergie totale)
↳ Sens physique clair des états propres de $H_{PL'}^{(2)}$
- L'opérateur $h_{IL'}^{(2)}$ a une forme plus simple que $h_{IL}^{(1)}$
Ne contient qu'un seul terme et est linéaire en q_{α}
S'exprime en fonction du champ \vec{E}_e et non des potentiels
- Amplitude de transition entre un état d'énergie totale E_a à t_i et un état d'énergie totale E_b à t_f : plus facile à calculer dans le point de vue (2) car $H_{PL'}^{(2)}$ représente bien dans ce point de vue l'énergie totale

$$\langle b | U^{(2)}(t_f, t_i) | a \rangle \quad H_{PL'}^{(2)} | a \rangle = E_a | a \rangle \quad H_{PL'}^{(2)} | b \rangle = E_b | b \rangle$$

Dans le point de vue (1), la même amplitude vaut $\langle b | T(t_f) U^{(1)}(t_f, t_i) T^{\dagger}(t_i) | a \rangle$ car l'état d'énergie totale E_a à t_i est $T^{\dagger}(t_i) | a \rangle$ et non $| a \rangle$, et l'état d'énergie totale E_b à t_f est $T^{\dagger}(t_f) | b \rangle$ et non $| b \rangle$

Pour vérifier explicitement l'identité des amplitudes de transition dans les 2 points de vue, à chaque ordre en q_{α} , il faut développer en puissances de q_{α} , $U^{(2)}$, $U^{(1)}$ et aussi $T^{\dagger}(t_i)$ et $T(t_f)$.

Charge totale, masse totale et centre de masse de l'ion

$$Q = \sum_{\alpha} q_{\alpha} \quad M = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \quad \vec{R} = \frac{1}{M} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{r}_{\alpha}$$

Hamiltonien dans le point de vue habituel

$$H^{(1)} = \sum_{\alpha} \frac{1}{2m_{\alpha}} [\vec{P}_{\alpha} - q_{\alpha} \vec{A}_e(\vec{r}_{\alpha}, t)]^2 + V_{\text{coul}} + \sum_{\alpha} q_{\alpha} U_e(\vec{r}_{\alpha}, t)$$

Approximation des grandes longueurs d'onde

VII-4

$$\vec{A}_e(\vec{r}_\alpha, t) \rightarrow \vec{A}_e(\vec{R}, t) \quad U_e(\vec{r}_\alpha, t) \rightarrow U_e(\vec{R}, t) + (\vec{r}_\alpha - \vec{R}) \cdot \vec{\nabla} U_e(\vec{R}, t)$$

$$\hookrightarrow H^{(1)} = \sum_{\alpha} \frac{1}{2m_{\alpha}} [\vec{P}_{\alpha} - q_{\alpha} \vec{A}_e(\vec{R}, t)]^2 + V_{\text{Coul}} + \varphi U_e(\vec{R}, t) + \sum_{\alpha} q_{\alpha} (\vec{r}_{\alpha} - \vec{R}) \cdot \vec{\nabla} U_e(\vec{R}, t)$$

Transformation unitaire

$$T(t) = \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \sum_{\alpha} q_{\alpha} (\vec{r}_{\alpha} - \vec{R}) \cdot \vec{A}_e(\vec{R}, t) \right\} = \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \vec{d} \cdot \vec{A}_e(\vec{R}, t) \right\}$$

$$\vec{d} = \sum_{\alpha} q_{\alpha} (\vec{r}_{\alpha} - \vec{R}) \quad : \text{Moment dipolaire par rapport au centre de masse}$$

Nouvel hamiltonien

$$H^{(2)} = T(t) H^{(1)} T^{\dagger}(t) + i\hbar \frac{dT(t)}{dt} T^{\dagger}(t)$$

Transformé de \vec{P}_{α}

$$T(t) \vec{P}_{\alpha} T^{\dagger}(t) = \vec{P}_{\alpha} + T(t) \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla}_{\vec{r}_{\alpha}} T^{\dagger}(t)$$

$$= \vec{P}_{\alpha} + q_{\alpha} \vec{A}_e(\vec{R}, t) - \left(\sum_{\alpha} q_{\alpha} \right) \frac{m_{\alpha}}{M} \vec{A}_e(\vec{R}, t) + \text{Termes en } \vec{\nabla}_{\vec{r}_{\alpha}} \vec{A}_e(\vec{R}, t)$$

↑ Termes nouveaux provenant de la dépendance de \vec{R} en \vec{r}_{α}
↑ Négligeables (ordre supérieur en q_0/λ)

$$\hookrightarrow T(t) \vec{P}_{\alpha} T^{\dagger}(t) = \vec{P}_{\alpha} + q_{\alpha} \vec{A}_e(\vec{R}, t) - \frac{\varphi}{M} m_{\alpha} \vec{A}_e(\vec{R}, t)$$

Calcul de $T(t) H(t) T^{\dagger}(t)$

$$T(t) H(t) T^{\dagger}(t) = \sum_{\alpha} \frac{1}{2m_{\alpha}} \left[\vec{P}_{\alpha} - \frac{\varphi}{M} m_{\alpha} \vec{A}_e(\vec{R}, t) \right]^2 + V_{\text{Coul}} + \varphi U_e(\vec{R}, t) + \vec{d} \cdot \vec{\nabla} U_e(\vec{R}, t)$$

$$= \sum_{\alpha} \frac{\vec{P}_{\alpha}^2}{2m_{\alpha}} - \frac{\varphi}{M} \vec{P} \cdot \vec{A}_e(\vec{R}, t) + \frac{\varphi^2}{2M} \vec{A}_e^2(\vec{R}, t) + V_{\text{Coul}} + \varphi U_e(\vec{R}, t) + \vec{d} \cdot \vec{\nabla} U_e(\vec{R}, t)$$

$$\vec{P} = \sum_{\alpha} \vec{P}_{\alpha} \quad : \text{Impulsion du centre de masse}$$

Calcul de $i\hbar \frac{dT(t)}{dt} T^{\dagger}(t) = \vec{d} \cdot \dot{\vec{A}}_e(\vec{R}, t)$

Récapitulation $-\vec{d} \cdot \vec{E}_e(\vec{R}, t)$

$$H^{(2)} = \sum_{\alpha} \frac{\vec{P}_{\alpha}^2}{2m_{\alpha}} + V_{\text{Coul}} + \underbrace{\vec{d} \cdot [\vec{\nabla} U_e(\vec{R}, t) + \dot{\vec{A}}_e(\vec{R}, t)]}_{-\vec{d} \cdot \vec{E}_e(\vec{R}, t)} + \underbrace{-\frac{\varphi}{M} \vec{P} \cdot \vec{A}_e(\vec{R}, t) + \frac{\varphi^2}{2M} \vec{A}_e^2(\vec{R}, t) + \varphi U_e(\vec{R}, t)}_{\text{Termes nouveaux}}$$

Discussion physique

- Les champs et potentiels sont évalués en \vec{R} .
- Les termes nouveaux décrivent l'interaction avec les potentiels extérieurs \vec{A}_e et U_e d'une particule fictive de masse M , de charge φ , de position \vec{R} , d'impulsion \vec{P} .

Equivalence des points de vue $\vec{A} \cdot \vec{p}$ et $\vec{E} \cdot \vec{r}$
Illustration sur des processus à un ou deux photons

VIII-9

1 - Amplitude de transition

- Hypothèses sur le système atomique et sur le champ incident
- Etat initial et état final
- Matrice S

2 - Vérification directe de l'égalité entre les amplitudes de transition calculées dans un point de vue et dans l'autre

- Processus à 1 photon
- Processus à 2 photons
- Application à la transition 1s-2s de l'hydrogène

3 - Résolution de quelques paradoxes

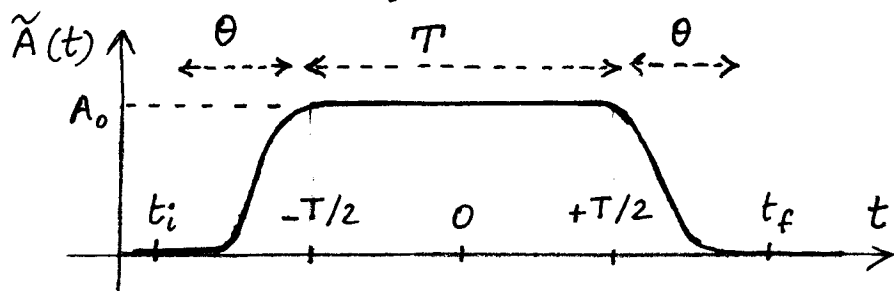
- Processus non résonnants à 1 photon
- Quelques autres pièges à éviter

Atome en \vec{O} $H_p = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(\vec{r})$

Etats d'énergie $|a\rangle, |b\rangle, |r\rangle \dots$ d'énergies $E_a, E_b, E_r \dots$

Champ extérieur incident en \vec{O} (On suppose $V_e = 0$)

$\vec{A}_e(\vec{O}, t) = \vec{e}_z A(t) = \vec{e}_z \tilde{A}(t) \cos \omega t$ $\tilde{A}(t)$: enveloppe



$T \gg 1/\omega$

$T \gg \theta$

$\theta \gg 1/\omega$

$\vec{E}_e(\vec{O}, t) = -\dot{\vec{A}}_e(\vec{O}, t) = \vec{e}_z [\omega \tilde{A}(t) \sin \omega t - \dot{\tilde{A}}(t) \cos \omega t]$

Le 2^{ème} terme, en $\dot{\tilde{A}}$, est négligeable puisque $\theta \gg 1/\omega$

Etat initial à t_i et état final à t_f

Comme $\tilde{A}(t_i) = \tilde{A}(t_f) = 0$, \vec{p} et H_p ont le même sens physique (quantité de mouvement et énergie totale) dans les 2 points de vue $\vec{A} \cdot \vec{p}$ et $\vec{E} \cdot \vec{r}$ à $t = t_i$ et $t = t_f$

$|\psi(t_i)\rangle = |a\rangle$ Energie totale E_a

$|\psi(t_f)\rangle = |b\rangle$ Energie totale E_b

Transition a-b $E_b - E_a = \hbar \omega_0$

Matrice S (Elément de matrice de U en représentation interaction) VIII-2

$$S_{ba} = \lim_{\substack{t_2 \rightarrow +\infty \\ t_1 \rightarrow -\infty}} \langle b | e^{iH_0 t_2 / \hbar} U(t_2, t_1) e^{-iH_0 t_1 / \hbar} | a \rangle$$

$$H = H_0 + V \quad H_0 = H_P = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(\vec{r})$$

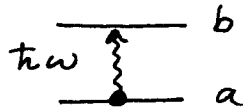
- Dans le point de vue $\vec{A} \cdot \vec{p}$, $V = -\frac{q}{m} \vec{p} \cdot \vec{A}_e(\vec{0}, t) + \frac{q^2}{2m} \vec{A}_e^2(\vec{0}, t)$

(Le 2^{ème} terme en q^2 est un nombre n'agissant pas sur les particules)

- Dans le point de vue $\vec{E} \cdot \vec{r}$, $V = -q \vec{r} \cdot \vec{E}_e(\vec{0}, t)$

Processus à 1 photon

ω voisin de ω_{ba}



Point de vue $\vec{A} \cdot \vec{p}$

$$S_{ba} = \frac{2\pi}{i\hbar} M_{ba} \frac{A_0}{2} \delta^{(T)}(\omega - \omega_{ba}) \quad M_{ba} = -\frac{q}{m} \langle b | \vec{e}_z \cdot \vec{p} | a \rangle = -\frac{q}{m} (P_z)_{ba}$$

$\delta^{(T)}$: Fonction delta de largeur $\sim 1/T$

Point de vue $\vec{E} \cdot \vec{r}$

$$S'_{ba} = \frac{2\pi}{i\hbar} M'_{ba} \frac{A_0}{2} \delta^{(T)}(\omega - \omega_{ba}) \quad M'_{ba} = -i\omega q \langle b | \vec{e}_z \cdot \vec{r} | a \rangle = -i\omega q (Z)_{ba}$$

Vérification directe de l'équivalence entre les 2 points de vue

- Basée sur l'identité $(P_z)_{ba} = i\omega_{ba} m (Z)_{ba}$
elle-même déduite de

$$[Z, H_P] = i\hbar \frac{\partial H_P}{\partial P_z} = i\hbar \frac{P_z}{m}$$

- On en déduit $M_{ba} = \frac{\omega_{ba}}{\omega} M'_{ba}$

- A résonance ($\omega_{ba} = \omega$), $M_{ba} = M'_{ba} \rightarrow S_{ba} = S'_{ba}$

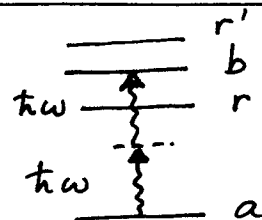
Hors résonance ($\omega_{ba} \neq \omega$), $\delta^{(T)}(\omega - \omega_{ba}) = 0 \rightarrow S_{ba} = 0 = S'_{ba}$

↳ Dans tous les cas, $S_{ba} = S'_{ba}$

Processus à 2 photons

ω voisin de $\omega_{ba}/2$

Pas de niveau intermédiaire résonnant à 1 photon



Point de vue $\vec{A} \cdot \vec{p}$

$$S_{ba} = \frac{2\pi}{i\hbar} Q_{ba} \left(\frac{A_0}{2}\right)^2 \delta^{(T)}(2\omega - \omega_{ba}) \quad Q_{ba} = \left(\frac{q}{m}\right)^2 \sum_r \frac{(P_z)_{br} (P_z)_{ra}}{\hbar(\omega - \omega_{ra})}$$

r: niveaux atomiques "relais"

Point de vue $\vec{E} \cdot \vec{r}$

$$S'_{ba} = \frac{2\pi}{i\hbar} \varphi'_{ba} \left(\frac{A_0}{2}\right)^2 \delta^{(T)}(2\omega - \omega_{ba}) \quad \varphi'_{ba} = -\omega^2 q^2 \sum_r \frac{(Z)_{br} (Z)_{ra}}{\hbar(\omega - \omega_{ra})}$$

Vérification directe de l'identité entre les 2 points de vue

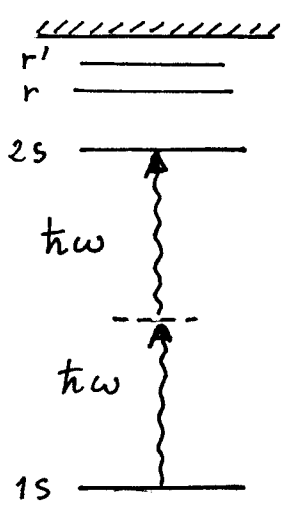
- Basée sur les identités $[Z, P_3] = i\hbar$, $(P_3)_{br} = i\omega_{br} m (Z)_{br} \dots$ qui permettent de démontrer que

$$\varphi_{ba} = \varphi'_{ba} \quad \text{si} \quad \omega_{ba} = 2\omega$$

- A résonance ($\omega_{ba} = 2\omega$), $\varphi_{ba} = \varphi'_{ba} \rightarrow S_{ba} = S'_{ba}$
- Hors résonance ($\omega_{ba} \neq 2\omega$), $\delta^{(T)}(2\omega - \omega_{ba}) = 0 \rightarrow S_{ba} = 0 = S'_{ba}$
- ↳ Dans tous les cas, $S_{ba} = S'_{ba}$

Application à la transition 1s - 2s de H (F. Bassani, J.J. Forney, A. Quattropani, Phys. Rev. Lett. 39, 1070 (1977))

Contribution des divers niveaux relais à $\varphi_{2s-1s} = \varphi'_{2s-1s}$ (en unités de $-q^2 \omega^2 a_0^2 / 3 E_I$)



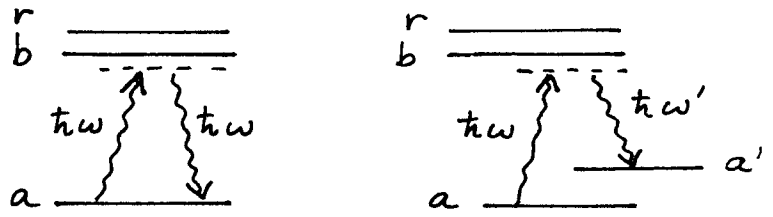
	Point de vue $\vec{A} \cdot \vec{p}$	Point de vue $\vec{E} \cdot \vec{r}$
Tous les niveaux relais (y compris le continuum)	11,8	11,8
1 niveau r : 2p	0	17,9
2 niveaux r : 2p, 3p	2,7	14,8
3 niveaux r : 2p, 3p, 4p	3,6	14,1
10 niveaux r : 2p, 3p...11p	4,5	13,5

- Chaque niveau relais ne contribue pas de la même façon dans chaque point de vue. Entre t_i et t_f , $\vec{A}_E \neq \vec{0}$, et un même état mathématique $|r\rangle$ ne décrit pas le même état physique dans les 2 points de vue. Par contre, la somme des contributions de tous les niveaux r est la même.
- (Contribution de r) $\vec{A} \cdot \vec{p}$ / (Contribution de r) $\vec{E} \cdot \vec{r}$ = $(\omega_{br} \omega_{ra}) / \omega^2$
D'autant plus grande en module que r est plus haut
↳ Convergence plus lente de la série dans le point de vue $\vec{A} \cdot \vec{p}$
Calculs plus rapides et plus précis dans le point de vue $\vec{E} \cdot \vec{r}$

Processus non résonnants à 1 photon

- Si $|a\rangle$ est l'état fondamental, $|b\rangle$ un niveau excité de largeur naturelle Γ , et si ω diffère de ω_{ba} tout en étant voisin de ω_{ba} , on est tenté de remplacer $\delta^{(T)}(\omega - \omega_{ba})$ dans S_{ba} et S'_{ba} par une lorentzienne de largeur Γ
↳ Résultats différents dans les 2 points de vue ($M_{ba} \neq M'_{ba}$ si $\omega \neq \omega_{ba}$)

- Erreur du raisonnement précédent : Pour avoir une résolution Γ meilleure que Γ , il faut attendre un temps $T \gg \Gamma^{-1}$. L'état $|b\rangle$ s'est certainement désexcité et ne peut être le véritable état final du processus. Le processus réel est un processus de diffusion à 2 photons (Rayleigh ou Raman), l'énergie globale étant conservée à l'issue du processus.



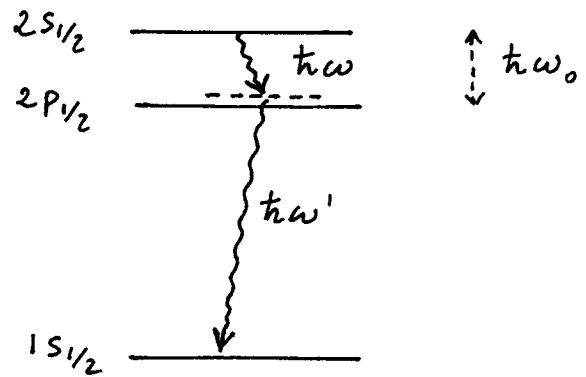
Le processus non résonnant à 1 photon est englobé dans un processus résonnant à 2 photons pour lequel les prédictions des 2 points de vue sont identiques.

- Même si b est très proche de résonance, nécessité de sommer sur tous les autres niveaux relais possibles pour retrouver le même résultat dans les 2 points de vue.

Exemple célèbre de la transition de Lamb $2S_{1/2} \rightarrow 2P_{1/2}$

Forme de raie pour $\omega \neq \omega_0$. Résultats différents dans les 2 points de vue si on affecte une largeur Γ à $2P_{1/2}$.

En réalité, le processus est à 2 photons : émission stimulée d'un photon $\hbar\omega$, émission spontanée d'un photon $\hbar\omega'$.



L'état $2P_{1/2}$ est un état intermédiaire particulier parmi tous les états np possibles. Il faut sommer sur tous ces états pour retrouver le même résultat dans les 2 points de vue.

Série convergant beaucoup plus vite dans le point de vue \vec{E}, \vec{r} .

Quelques autres pièges à éviter

- Nécessité d'utiliser des fonctions d'ondes exacte pour retrouver le même résultat dans les 2 points de vue.
- Dans les processus d'absorption de 2 photons de fréquences différentes ω, ω' , il faut ajouter les amplitudes associées aux 2 ordres temporels possibles : ω puis ω' , ω' puis ω .

Idem pour un processus de diffusion $a, \vec{k}\vec{E} \rightarrow a', \vec{k}'\vec{E}'$ (absorption $\vec{k}\vec{E}$ puis émission $\vec{k}'\vec{E}'$, émission $\vec{k}'\vec{E}'$ puis absorption $\vec{k}\vec{E}$, processus simultanés associés à $H_{I2} = -q^2 A^2 / 2m$)

- Cas où $\vec{A}_e(\vec{0}, t)$ n'est pas branché lentement et débranché lentement sur un intervalle de temps $\Theta \gg 1/\omega$.

Une impulsion "carrée" de \vec{A}_e n'est pas équivalente à une impulsion "carrée" de \vec{E}_e .

$$\vec{E}_e(\vec{0}, t) = -\dot{\vec{A}}_e(\vec{0}, t)$$

Un branchement soudain de \vec{A}_e donne naissance à une impulsion de champ \vec{E}_e (Ne pas oublier le terme en \ddot{A})

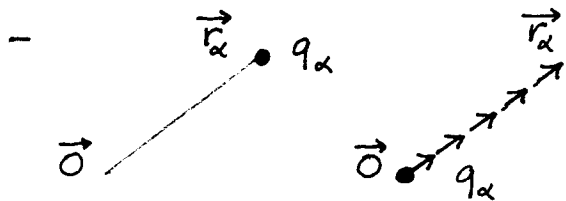
A - Description des systèmes localisés de charges

- ① Densité de polarisation associée à un système de charges
- ② Induction électrique
- ③ Courant de polarisation et de magnétisation

B - Changement de Lagrangien

- ① Transformation de Power-Zienau-Woolley
- ② Ancien et nouveau Lagrangiens
- ③ Développement multipolaire
- ④ Equivalence avec un changement de jauge - La jauge de Poincaré

Densité de polarisation associée à des charges q_α proches de $\vec{0}$



Une charge q_α en \vec{r}_α est équivalente à une charge q_α en $\vec{0}$

+
n dipôles $q_\alpha \vec{r}_\alpha / n$ alignés le long de $\vec{0} \vec{r}_\alpha$

- Densité de polarisation associée aux n dipôles (limite $n \rightarrow \infty$)

$$\vec{P}(\vec{r}) = \sum_\alpha \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{p=0}^{n-1} \frac{q_\alpha \vec{r}_\alpha}{n} \delta(\vec{r} - \frac{p+1}{n} \vec{r}_\alpha) = \sum_\alpha \int_0^1 du q_\alpha \vec{r}_\alpha \delta(\vec{r} - u \vec{r}_\alpha)$$

$\vec{P}(\vec{r}) = \sum_\alpha \int_0^1 du q_\alpha \vec{r}_\alpha \delta(\vec{r} - u \vec{r}_\alpha)$	$\vec{P}(\vec{k}) = \sum_\alpha \int_0^1 du \frac{q_\alpha \vec{r}_\alpha}{(2\pi)^{3/2}} e^{-iu \vec{k} \cdot \vec{r}_\alpha}$
---	--

(si $|\vec{k} \cdot \vec{r}_\alpha| \ll 1$, $\vec{P}(\vec{k}) \approx \vec{d} / (2\pi)^{3/2}$ avec $\vec{d} = \sum_\alpha q_\alpha \vec{r}_\alpha$, $\vec{P}(\vec{r}) \approx \vec{d} \delta(\vec{r})$)

- Calcul de $\vec{\nabla} \cdot \vec{P}(\vec{r})$

$$i \vec{k} \cdot \vec{P} = \sum_\alpha \int_0^1 du \frac{q_\alpha}{(2\pi)^{3/2}} i \vec{k} \cdot \vec{r}_\alpha e^{-iu \vec{k} \cdot \vec{r}_\alpha} = \sum_\alpha \frac{-q_\alpha}{(2\pi)^{3/2}} e^{-iu \vec{k} \cdot \vec{r}_\alpha} \Big|_0^1 = - \sum_\alpha \frac{q_\alpha}{(2\pi)^{3/2}} e^{-i \vec{k} \cdot \vec{r}_\alpha} + \sum_\alpha \frac{q_\alpha}{(2\pi)^{3/2}}$$

$\hookrightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{P}(\vec{r}) = -\rho(\vec{r}) + \rho_0(\vec{r})$ avec

{	$\rho(\vec{r}) = \sum_\alpha q_\alpha \delta(\vec{r} - \vec{r}_\alpha)$	Distrib. de charges
	$\rho_0(\vec{r}) = (\sum_\alpha q_\alpha) \delta(\vec{r})$	Distrib. de référence (toutes les charges en 0)

Induction électrique

- $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \rho(\vec{r}) / \epsilon_0$ \vec{E} : champ total + $\vec{\nabla} \cdot \vec{P}(\vec{r}) = -\rho(\vec{r}) + \rho_0(\vec{r})$

$\hookrightarrow \vec{\nabla} \cdot [\epsilon_0 \vec{E}(\vec{r}) + \vec{P}(\vec{r})] = \rho_0(\vec{r})$

- Induction électrique $\vec{D}(\vec{r})$

$\vec{D}(\vec{r}) = \epsilon_0 \vec{E}(\vec{r}) + \vec{P}(\vec{r})$	\rightarrow	$\vec{\nabla} \cdot \vec{D}(\vec{r}) = \rho_0(\vec{r})$
---	---------------	---

La divergence de \vec{D} est liée à la distribution de charges de référence qui est connue et statique

$$\hookrightarrow \vec{D}_{||}(\vec{r}) = \epsilon_0 \vec{E}_0(\vec{r}) = \epsilon_0 \frac{(\sum_{\alpha} q_{\alpha})}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3}$$

$\vec{E}_0(\vec{r})$: champ coulombien créé par la distribution de charge de référence

- Cas d'un système globalement neutre

$$\sum_{\alpha} q_{\alpha} = 0 \rightarrow \rho_0(\vec{r}) = 0 \rightarrow \nabla \cdot \vec{D}(\vec{r}) = 0 \rightarrow \vec{D} = \vec{D}_{\perp} \rightarrow$$

$$\rightarrow \vec{D}_{||} = \epsilon_0 \vec{E}_{||} + \vec{P}_{||} = 0 \rightarrow \vec{E}_{||}(\vec{r}) = -\vec{P}_{||}(\vec{r}) / \epsilon_0$$

Courant de polarisation et de magnétisation

- Comme ρ_0 est statique $\nabla \cdot \dot{\vec{P}} + \dot{\rho} = \dot{\rho}_0 = 0$

En comparant avec $\nabla \cdot \vec{J} + \dot{\rho} = 0$, on obtient $\nabla \cdot (\vec{J} - \dot{\vec{P}}) = 0$

$\hookrightarrow \vec{J} = \dot{\vec{P}} +$ courant de divergence nulle (c.à.d. rotationnel d'un vecteur)

$\vec{J}(\vec{r}) = \vec{J}_p(\vec{r}) + \vec{J}_M(\vec{r})$	$\vec{J}_p(\vec{r}) = \dot{\vec{P}}(\vec{r})$	$\vec{J}_M(\vec{r}) = \nabla \times \vec{M}(\vec{r})$
--	---	---

$\vec{J}_p(\vec{r})$: courant de polarisation

$\vec{J}_M(\vec{r})$: courant de magnétisation

$\vec{M}(\vec{r})$: densité de magnétisation

- Calcul de $\vec{J}_M(\vec{r})$ et de $\vec{M}(\vec{r})$ (et de leurs T.F. $\vec{J}_M(\vec{k})$ et $\vec{M}(\vec{k})$)

$$\begin{aligned} \vec{J}_M(\vec{k}) &= \vec{J}(\vec{k}) - \dot{\vec{P}}(\vec{k}) \\ &= \sum_{\alpha} \frac{q_{\alpha}}{(2\pi)^{3/2}} \dot{\vec{r}}_{\alpha} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}_{\alpha}} - \sum_{\alpha} \int_0^1 du \frac{q_{\alpha}}{(2\pi)^{3/2}} \dot{\vec{r}}_{\alpha} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}_{\alpha}} + \sum_{\alpha} \int_0^1 du \frac{q_{\alpha}}{(2\pi)^{3/2}} \dot{\vec{r}}_{\alpha} (i\vec{k} \cdot \dot{\vec{r}}_{\alpha} u) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}_{\alpha}} \end{aligned}$$

Intégration par parties du 2^{ème} terme

$$\vec{J}_M(\vec{k}) = i \sum_{\alpha} \int_0^1 u du \frac{q_{\alpha}}{(2\pi)^{3/2}} [(\vec{k} \cdot \dot{\vec{r}}_{\alpha}) \dot{\vec{r}}_{\alpha} - (\dot{\vec{r}}_{\alpha} \cdot \dot{\vec{r}}_{\alpha}) \vec{k}] e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}_{\alpha}} = i\vec{k} \times \vec{M}(\vec{k})$$

$\vec{M}(\vec{k}) = \sum_{\alpha} \int_0^1 u du \frac{q_{\alpha}}{(2\pi)^{3/2}} (\dot{\vec{r}}_{\alpha} \times \vec{r}_{\alpha}) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}_{\alpha}}$	$\vec{M}(\vec{r}) = \sum_{\alpha} \int_0^1 u du q_{\alpha} (\dot{\vec{r}}_{\alpha} \times \vec{r}_{\alpha}) \delta(\vec{r} - u\vec{r}_{\alpha})$
--	--

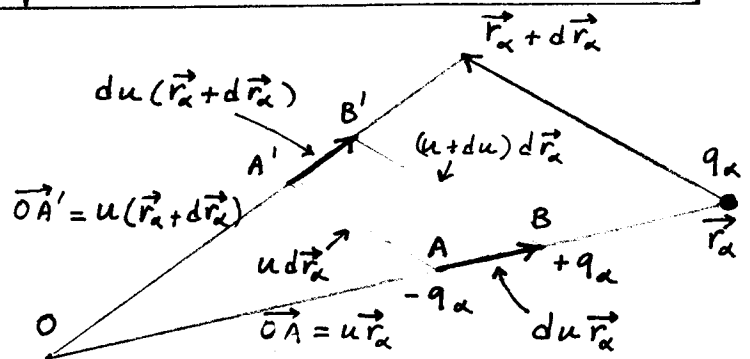
- Interprétation physique

- Quand q_{α} se déplace de \vec{r}_{α} à $\vec{r}_{\alpha} + d\vec{r}_{\alpha}$, le dipôle élémentaire AB se déplace de AB à A'B' \rightarrow Courants de signes opposés sur BB' et AA' égaux à q_{α}/dt

Fermons la boucle de courant BB'A'AB

\hookrightarrow moment magnétique élémentaire

$$d\vec{M} = \frac{q_{\alpha}}{dt} \vec{AB} \times \vec{AA}' = q_{\alpha} \dot{\vec{r}}_{\alpha} \times \vec{r}_{\alpha} u du$$



- Densités de courant à mettre en A'B' et AB pour compenser les courants introduits plus haut pour fermer la boucle BB'A'AB

$$\begin{aligned} d\vec{J} &= q_{\alpha} \left[\frac{(\dot{\vec{r}}_{\alpha} + d\dot{\vec{r}}_{\alpha}) du}{dt} \delta[\vec{r} - u(\dot{\vec{r}}_{\alpha} + d\dot{\vec{r}}_{\alpha})] - \frac{\dot{\vec{r}}_{\alpha} du}{dt} \delta(\vec{r} - u\dot{\vec{r}}_{\alpha}) \right] \\ &= q_{\alpha} du \frac{d}{dt} [\dot{\vec{r}}_{\alpha} \delta(\vec{r} - u\dot{\vec{r}}_{\alpha})] = d\vec{J}_p \end{aligned}$$

- Dans le cours VII, on assimilait la distribution de charges à un dipôle \vec{d} localisé en $\vec{r} = \vec{0}$ (ce qui revient à prendre $\vec{P}(\vec{r}) = \vec{d} \delta(\vec{r})$), et on ajoutait à L la dérivée totale dF_{GM}/dt ou $F_{GM} = -\vec{d} \cdot \vec{A}_\perp(\vec{0})$
- On va ajouter maintenant à L dF/dt où

$$F = - \int d^3r \vec{P}(\vec{r}) \cdot \vec{A}_\perp(\vec{r}) = - \int d^3k \vec{P}^*(\vec{k}) \cdot \vec{A}_\perp(\vec{k})$$
 qui se réduit bien à $-\vec{d} \cdot \vec{A}_\perp(\vec{0})$, si on assimile $\vec{P}(\vec{r})$ à $\vec{d} \delta(\vec{r})$ (calcul d'ordre le plus bas en a_0/λ)
- De plus, \vec{A}_\perp est considéré maintenant, non plus comme un champ extérieur, mais comme un champ ayant sa dynamique propre.

Ancien Lagrangien (en jauge de Coulomb)

$$L = L_p + L_R + L_I \quad L_p = \sum_\alpha \frac{1}{2} m_\alpha \dot{\vec{r}}_\alpha^2 - V_{\text{Coul}}$$

$$L_R = \epsilon_0 \int d^3k [\dot{\vec{A}}_\perp^*(\vec{k}) \cdot \dot{\vec{A}}_\perp(\vec{k}) - c^2 k^2 \vec{A}_\perp^*(\vec{k}) \cdot \vec{A}_\perp(\vec{k})]$$

$$L_I = \int d^3k [\vec{j}^*(\vec{k}) \cdot \vec{A}_\perp(\vec{k}) + \vec{j}(\vec{k}) \cdot \vec{A}_\perp^*(\vec{k})] = \int d^3r \vec{j}(\vec{r}) \cdot \vec{A}_\perp(\vec{r})$$

Nouveau Lagrangien

$$L' = L + \frac{dF}{dt} = L_p + L_R + L'_I$$

$$L'_I = L_I + \frac{dF}{dt} = \int d^3r \vec{j}(\vec{r}) \cdot \vec{A}_\perp(\vec{r}) - \int d^3r [\dot{\vec{P}}(\vec{r}) \cdot \vec{A}_\perp(\vec{r}) + \vec{P}(\vec{r}) \cdot \dot{\vec{A}}_\perp(\vec{r})]$$

$$= \int d^3r [\vec{j}(\vec{r}) - \dot{\vec{P}}(\vec{r})] \cdot \vec{A}_\perp(\vec{r}) + \int d^3r \vec{P}(\vec{r}) \cdot [-\dot{\vec{A}}_\perp(\vec{r})] = \int d^3r \vec{j}_M(\vec{r}) \cdot \vec{A}_\perp(\vec{r}) + \int d^3r \vec{P}(\vec{r}) \cdot \vec{E}_\perp(\vec{r})$$

Integration par parties $\int d^3r [\vec{\nabla} \times \vec{M}(\vec{r})] \cdot \vec{A}_\perp(\vec{r}) = \int d^3r \vec{M}(\vec{r}) \cdot \vec{\nabla} \times \vec{A}_\perp(\vec{r}) = \int d^3r \vec{M}(\vec{r}) \cdot \vec{B}(\vec{r})$

$$\hookrightarrow \boxed{L'_I = \int d^3r [\vec{M}(\vec{r}) \cdot \vec{B}(\vec{r}) + \vec{P}(\vec{r}) \cdot \vec{E}_\perp(\vec{r})]}$$

Ne fait plus intervenir que les champs \vec{E}_\perp et \vec{B} et les densités \vec{P} et \vec{M}

Développement multipolaire

- Développement en série de Taylor de $\vec{E}_\perp(\vec{r})$ et $\vec{B}(\vec{r})$ au voisinage de $\vec{r} = \vec{0}$
- Contribution de \vec{E}_\perp

Ordre 0 $\int d^3r \vec{P}(\vec{r}) \cdot \vec{E}_\perp(\vec{0}) = \vec{d} \cdot \vec{E}_\perp(\vec{0})$ avec $\vec{d} = \int d^3r \vec{P}(\vec{r}) = \sum_\alpha q_\alpha \vec{r}_\alpha$

Ordre 1 $\sum_{ij} \int d^3r P_j(\vec{r}) x_i \partial_i E_{\perp j}(\vec{0}) = \sum_{ij} q_{ij} \partial_i E_{\perp j}(\vec{0})$

$$q_{ij} = \int d^3r \sum_\alpha \int_0^1 du x_i r_{\alpha j} \delta(\vec{r} - u \vec{r}_\alpha) = \sum_\alpha \int_0^1 u du r_{\alpha i} r_{\alpha j} = \frac{1}{2} \sum_\alpha q_\alpha (r_{\alpha i} r_{\alpha j} - \frac{1}{3} \delta_{ij} r_\alpha^2)$$

(On a retiré au tenseur $r_{\alpha i} r_{\alpha j}$ sa trace qui ne contribue pas à L'_I car E_\perp est de divergence nulle) q_{ij} : tenseur moment quadripolaire

- Contribution de \vec{B} à l'ordre 0

$$\int d^3r \vec{M}(\vec{r}) \cdot \vec{B}(\vec{0}) = \vec{m} \cdot \vec{B}(\vec{0}) \quad \vec{m} : \text{moment magnétique orbital}$$

$$\vec{m} = \int d^3r \sum_\alpha \int_0^1 u du q_\alpha \vec{r}_\alpha \times \dot{\vec{r}}_\alpha \delta(\vec{r} - u \vec{r}_\alpha) = \sum_\alpha \frac{1}{2} q_\alpha (\vec{r}_\alpha \times \dot{\vec{r}}_\alpha)$$

Changement de jauge
(défini par $\chi(\vec{r}, t)$)

$$L' = L + \frac{d}{dt} \sum_{\alpha} q_{\alpha} \chi(\vec{r}_{\alpha}, t)$$

IX-4

Transformation de P.Z.W

$$L' = L - \frac{d}{dt} \int d^3r \vec{P}(\vec{r}) \cdot \vec{A}_{\perp}(\vec{r}) = L - \frac{d}{dt} \left[\sum_{\alpha} q_{\alpha} \int_0^1 du \vec{r}_{\alpha} \cdot \vec{A}_{\perp}(u \vec{r}_{\alpha}) \right]$$

équivalente à un changement de jauge avec $\chi(\vec{r}) = - \int_0^1 du \vec{r} \cdot \vec{A}_{\perp}(u \vec{r})$

Cette équivalence n'est valable que si les charges q_{α} sont repérées par rapport à un seul point de référence 0 (N'est plus valable pour 2 systèmes séparés, repérés par rapport à 2 points distincts \vec{R}_A et \vec{R}_B).

Potentiel vecteur dans la nouvelle jauge

$$\vec{A}'_{\parallel}(\vec{r}) = \vec{A}_{\parallel}(\vec{r}) + \vec{\nabla} \chi(\vec{r}) = \vec{0} - \vec{\nabla} \int_0^1 du \vec{r} \cdot \vec{A}_{\perp}(u \vec{r}) \quad \vec{A}'_{\perp}(\vec{r}) = \vec{A}_{\perp}(\vec{r})$$

- Une identité utile : $u \frac{\partial}{\partial u} f(u \vec{r}) = (\vec{r} \cdot \vec{\nabla}) f(u \vec{r})$

- Calcul de $\vec{r} \cdot \vec{A}'(\vec{r})$

$$\begin{aligned} \vec{r} \cdot \vec{A}'(\vec{r}) &= \vec{r} \cdot (\vec{A}'_{\perp}(\vec{r}) + \vec{A}'_{\parallel}(\vec{r})) = \vec{r} \cdot \vec{A}_{\perp}(\vec{r}) - \int_0^1 du (\vec{r} \cdot \vec{\nabla}) (\vec{r} \cdot \vec{A}_{\perp}(u \vec{r})) \\ &= \vec{r} \cdot \vec{A}_{\perp}(\vec{r}) - \int_0^1 du \frac{1}{u} u \frac{\partial}{\partial u} [u \vec{r} \cdot \vec{A}_{\perp}(u \vec{r})] = 0 \end{aligned}$$

Alors que $\vec{A}_{\perp}(\vec{r}) \perp \vec{r} \neq \vec{r}$ dans l'ancienne jauge, $\vec{A}'(\vec{r}) \perp \vec{r} \neq \vec{r}$ dans la nouvelle jauge

- Autre manière d'écrire $\vec{A}'(\vec{r}) = \vec{A}_{\perp}(\vec{r}) + \vec{\nabla} \chi(\vec{r})$

$$\vec{\nabla} \chi(\vec{r}) = - \vec{\nabla} \int_0^1 du \vec{r} \cdot \vec{A}_{\perp}(u \vec{r}) = - \int_0^1 du \vec{A}_{\perp}(u \vec{r}) - \sum_{i=1,2,3} \int_0^1 du r_i \vec{\nabla} A_{\perp i}(u \vec{r})$$

$$- \int_0^1 du \vec{A}_{\perp}(u \vec{r}) = -u \vec{A}_{\perp}(u \vec{r}) \Big|_0^1 + \int_0^1 du u \frac{\partial}{\partial u} \vec{A}_{\perp}(u \vec{r}) = -\vec{A}_{\perp}(\vec{r}) + \int_0^1 du (\vec{r} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A}_{\perp}(u \vec{r})$$

$$\begin{aligned} \hookrightarrow \vec{A}'(\vec{r}) &= \int_0^1 du [(\vec{r} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A}_{\perp}(u \vec{r}) - \sum_i r_i \vec{\nabla} A_{\perp i}(u \vec{r})] = - \int_0^1 du \vec{r} \times [\vec{\nabla} \times \vec{A}_{\perp}(u \vec{r})] \\ &= - \int_0^1 du u \vec{r} \times [\vec{\nabla}_{u \vec{r}} \times \vec{A}_{\perp}(u \vec{r})] = - \int_0^1 u du \vec{r} \times \vec{B}(u \vec{r}) \end{aligned}$$

Potentiel scalaire dans la nouvelle jauge

$$U'(\vec{r}) = U(\vec{r}) - \frac{\partial \chi}{\partial t} = U_{\text{Coul}} + \int_0^1 du \vec{r} \cdot \dot{\vec{A}}_{\perp}(u \vec{r})$$

$$= - \int_0^1 du \vec{r} \cdot \vec{E}_{\parallel}(u \vec{r}) - \int_0^1 du \vec{r} \cdot \vec{E}_{\perp}(u \vec{r}) = - \int_0^1 du \vec{r} \cdot \vec{E}(u \vec{r})$$

La jauge de Poincaré

$$\boxed{U'(\vec{r}) = - \int_0^1 du \vec{r} \cdot \vec{E}(u \vec{r}) \quad \left| \quad \vec{A}'(\vec{r}) = - \int_0^1 u du \vec{r} \times \vec{B}(u \vec{r}) \right.}$$

U' et \vec{A}' s'expriment en fonction des champs \vec{E} et \vec{B}
Ces formules généralisent celles relatives à des champs \vec{E}_0 et \vec{B}_0 uniformes

$$U_0 = - \int_0^1 du \vec{r} \cdot \vec{E}_0 = - \vec{r} \cdot \vec{E}_0$$

$$\vec{A}_0 = - \int_0^1 u du \vec{r} \times \vec{B}_0 = - \frac{1}{2} \vec{r} \times \vec{B}_0$$

C - Nouveaux moments conjugués. Nouvel hamiltonien

- ① Nouveau moment conjugué de \vec{r}_α
- ② Nouveau moment conjugué de \vec{A}_\perp
- ③ Nouvel hamiltonien - Discussion physique.

D - Electrodynamique quantique dans le nouveau point de vue

- ① Quantification canonique
- ② Expression de quelques grandeurs physiques

E - Cas de 2 systèmes séparés de charges globalement neutres

- ① Nouvel hamiltonien.
- ② Disparition des interactions coulombiennes entre les 2 systèmes

Nouveau moment conjugué de \vec{r}_α

$$\int d^3r \vec{M}(\vec{r}) \cdot \vec{B}(\vec{r}) = \int d^3r \left[\sum_\alpha \int_0^1 u du q_\alpha (\vec{r}_\alpha \times \dot{\vec{r}}_\alpha) \delta(\vec{r} - u\vec{r}_\alpha) \right] \cdot \vec{B}(\vec{r}) = \sum_\alpha \dot{\vec{r}}_\alpha \cdot \int_0^1 u du q_\alpha [\vec{B}(u\vec{r}_\alpha) \times \vec{r}_\alpha]$$

$$\vec{P}_{\alpha L'} = \frac{\partial L'}{\partial \dot{\vec{r}}_\alpha} = m_\alpha \dot{\vec{r}}_\alpha + q_\alpha \int_0^1 u du \vec{B}(u\vec{r}_\alpha) \times \vec{r}_\alpha$$

Ecart entre $\vec{P}_{\alpha L'}$ et $m_\alpha \dot{\vec{r}}_\alpha$: d'autant plus petit que le système est plus localisé. S'exprime en fonction du champ \vec{B} .

$$\vec{P}_{\alpha L'} \text{ peut aussi s'écrire } \vec{P}_{\alpha L'} = m_\alpha \dot{\vec{r}}_\alpha + q_\alpha \vec{A}'(\vec{r}_\alpha)$$

\vec{A}' : potentiel vecteur dans la nouvelle jauge (de Poincaré)

Nouveau moment conjugué de $\vec{A}_\perp(\vec{r})$

- Dans la jauge de Coulomb (ancien L)

$$\vec{\Pi}_L(\vec{k}) = \frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial \dot{\vec{A}}_\perp^*} = \frac{\partial \bar{\mathcal{L}}_R}{\partial \dot{\vec{A}}_\perp^*} = \epsilon_0 \dot{\vec{A}}_\perp = -\epsilon_0 \vec{E}_\perp(\vec{k}) \rightarrow \vec{\Pi}_L(\vec{r}) = -\epsilon_0 \vec{E}_\perp(\vec{r})$$

Ancien moment conjugué de $\vec{A}_\perp = -\epsilon_0 \times$ Champ électrique transverse

- Dans le nouveau point de vue (nouveau L)

$$L'_I = \int d^3r [\vec{P}(\vec{r}) \cdot \vec{E}_\perp(\vec{r}) + \vec{M}(\vec{r}) \cdot \vec{B}(\vec{r})]$$

$$\int d^3r \vec{P}(\vec{r}) \cdot \vec{E}_\perp(\vec{r}) = - \int d^3k [\vec{P}^*(\vec{k}) \cdot \dot{\vec{A}}_\perp(\vec{k}) + \vec{P}(\vec{k}) \cdot \dot{\vec{A}}_\perp^*(\vec{k})]$$

$$\vec{\Pi}_{L'} = \frac{\partial \bar{\mathcal{L}}'}{\partial \dot{\vec{A}}_\perp^*} = \frac{\partial \bar{\mathcal{L}}'_R}{\partial \dot{\vec{A}}_\perp^*} + \frac{\partial \bar{\mathcal{L}}'_I}{\partial \dot{\vec{A}}_\perp^*} = \epsilon_0 \dot{\vec{A}}_\perp - \vec{P}_\perp = -[\epsilon_0 \vec{E}_\perp + \vec{P}_\perp] = -\vec{D}_\perp$$

$$\hookrightarrow \vec{\Pi}_{L'}(\vec{r}) = -[\epsilon_0 \vec{E}_\perp(\vec{r}) + \vec{P}_\perp(\vec{r})] = -\vec{D}_\perp(\vec{r})$$

Nouveau moment conjugué de $\vec{A}_\perp = -$ Induction électrique transverse

- Cas d'un système globalement neutre $\vec{D} = \vec{D}_\perp$

$$\sum_\alpha q_\alpha = 0 \rightarrow \vec{\Pi}_{L'}(\vec{r}) = - [\epsilon_0 \vec{E}(\vec{r}) + \vec{P}(\vec{r})]$$

En dehors du système de charges, $\vec{P} = \vec{0}$, et $\vec{\Pi}_{L'}$ coïncide avec le champ électrique total.

$\vec{\Pi}_{L'}$: meilleure approximation possible du champ électrique total par un champ transverse.

- Si $\sum_\alpha q_\alpha \neq 0$, la différence entre $\vec{\Pi}_{L'}$ et $-\epsilon_0 \vec{E}$ est, en dehors des charges, le champ coulombien statique créé par la distribution de référence.

Nouvel hamiltonien

$$H_{L'} = \sum_\alpha \vec{r}_\alpha \cdot \vec{p}_{\alpha L'} + \int d^3k (\vec{\mathcal{A}}_\perp \cdot \vec{\Pi}_{L'}^* + \vec{\mathcal{A}}_\perp^* \cdot \vec{\Pi}_{L'}) - L'$$

$H_{L'}$ doit être exprimé en fonction de $\vec{r}_\alpha, \vec{p}_{\alpha L'}, \vec{\mathcal{A}}_\perp, \vec{\Pi}_{L'}$

$$H_{L'} = \sum_\alpha \frac{1}{2m_\alpha} \left[\vec{p}_{\alpha L'} - \int_0^1 u du q_\alpha \vec{B}(u\vec{r}_\alpha) \times \vec{r}_\alpha \right]^2 + \int d^3k \left[\frac{(\vec{\Pi}_{L'} + \vec{P}_\perp)(\vec{\Pi}_{L'} + \vec{P}_\perp)^*}{\epsilon_0} + \epsilon_0 \omega^2 \vec{\mathcal{A}}_\perp^* \cdot \vec{\mathcal{A}}_\perp \right] + \sum_\alpha \epsilon_{coul}^\alpha + \sum_{\alpha < \alpha'} \frac{q_\alpha q_{\alpha'}}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}_\alpha - \vec{r}_{\alpha'}|}$$

- Séparation en une partie $H_{PL'}$ ne dépendant que de \vec{r}_α et $\vec{p}_{\alpha L'}$, une partie $H_{RL'}$ ne dépendant que des $\vec{\mathcal{A}}_\perp$ et $\vec{\Pi}_{L'}$, et une partie $H_{IL'}$ dépendant des 2 types de variables à la fois

$$H_{PL'} = \sum_\alpha \frac{\vec{p}_{\alpha L'}^2}{2m_\alpha} + \sum_\alpha \epsilon_{coul}^\alpha + \sum_{\alpha < \alpha'} \frac{q_\alpha q_{\alpha'}}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}_\alpha - \vec{r}_{\alpha'}|} + \int d^3k \frac{|\vec{P}_\perp|^2}{\epsilon_0}$$

$$H_{RL'} = \int d^3k \left[\frac{\vec{\Pi}_{L'}^* \cdot \vec{\Pi}_{L'}}{\epsilon_0} + \epsilon_0 \omega^2 \vec{\mathcal{A}}_\perp^* \cdot \vec{\mathcal{A}}_\perp \right]$$

$$H_{IL'} = \int d^3k \frac{1}{\epsilon_0} \left[\vec{\Pi}_{L'}^* \cdot \vec{P}_\perp + \vec{\Pi}_{L'} \cdot \vec{P}_\perp^* \right]$$

$$- \sum_\alpha \int_0^1 u du q_\alpha (\vec{r}_\alpha \times \frac{\vec{p}_{\alpha L'}}{m_\alpha}) \cdot \vec{B}(u\vec{r}_\alpha) + \sum_\alpha \frac{q_\alpha^2}{2m_\alpha} \left[\int_0^1 u du \vec{r}_\alpha \times \vec{B}(u\vec{r}_\alpha) \right]^2$$

Discussion physique

$H_{RL'}$ Somme d'hamiltoniens d'oscillateur harmonique. Représente l'énergie du champ magnétique et de l'induction électrique transverse.

$H_{PL'}$ Terme nouveau: $\int d^3k \frac{|\vec{P}_\perp|^2}{\epsilon_0} = \int d^3r \frac{\vec{P}^2(\vec{r})}{2\epsilon_0}$
Energie propre dipolaire

Correction à l'énergie propre coulombienne, dont il faut X-3 tenir compte lorsqu'on calcule les corrections radiatives dans le nouveau point de vue.

Comme $\vec{P}_{\alpha L'} = m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha} + \int_0^1 u du q_{\alpha} \vec{B}(u \vec{r}_{\alpha}) \times \vec{r}_{\alpha} \neq m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha}$, le premier terme ne représente pas l'énergie cinétique.

$$H_{IL'} - 1^{\text{er}} \text{ terme} : \frac{1}{\epsilon_0} \int d^3r \vec{\Pi}_{L'} \cdot \vec{P} = - \frac{1}{\epsilon_0} \int d^3r \vec{D}_{\perp}(\vec{r}) \cdot \vec{P}(\vec{r})$$

Interaction de la densité de polarisation avec l'induction électrique

$$- 2^{\text{im}} \text{ terme} : - \int d^3r \vec{M}'(\vec{r}) \cdot \vec{B}(\vec{r}) \quad \vec{M}'(\vec{r}) = \sum_{\alpha} \int_0^1 u du q_{\alpha} (\vec{r}_{\alpha} \times \frac{\vec{P}_{\alpha L'}}{m_{\alpha}}) \delta(\vec{r} - u \vec{r}_{\alpha})$$

Interaction avec le champ magnétique d'une densité de magnétisation exprimée en fonction des variables conjuguées $\vec{r}_{\alpha}, \vec{P}_{\alpha L'}$

$$- 3^{\text{im}} \text{ terme} : \text{énergie diamagnétique.}$$

Quantification canonique

$$\vec{r}_{\alpha}^{(2)} = \vec{r}_{\alpha} \text{ (multiplication par } \vec{r}_{\alpha} \text{)}$$

$$\vec{P}_{\alpha L'}^{(2)} = \vec{P}_{\alpha} = \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla}_{\alpha}$$

$$[\mathcal{A}_{\perp E}^{(2)}(\vec{k}), \mathcal{A}_{L'E'}^{(2)\dagger}(\vec{k}')] = i\hbar \delta_{EE'} \delta(\vec{k} - \vec{k}')$$

$$\vec{A}_{\perp}^{(2)}(\vec{r}) = \vec{A}_{\perp}(\vec{r}) \quad \vec{\Pi}_{L'}^{(2)}(\vec{r}) = \vec{\Pi}(\vec{r})$$

$$\begin{cases} \vec{A}_{\perp}(\vec{r}) = \int d^3k \sum_{\epsilon} \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 \omega (2\pi)^3}} [\vec{\epsilon} a_{\epsilon}(\vec{k}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} + \vec{\epsilon} a_{\epsilon}^{\dagger}(\vec{k}) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}}] \\ \vec{\Pi}(\vec{r}) = -i\epsilon_0 \int d^3k \sum_{\epsilon} \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 \omega (2\pi)^3}} [\vec{\epsilon} a_{\epsilon}(\vec{k}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} - \vec{\epsilon} a_{\epsilon}^{\dagger}(\vec{k}) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}}] \end{cases}$$

$$[a_{\epsilon}(\vec{k}), a_{\epsilon'}^{\dagger}(\vec{k}')] = \delta_{\epsilon\epsilon'} \delta(\vec{k} - \vec{k}')$$

Expression de quelques grandeurs physiques

$$\vec{v}_{\alpha}^{(1)} = \frac{1}{m_{\alpha}} [\vec{P}_{\alpha} - q_{\alpha} \vec{A}_{\perp}(\vec{r}_{\alpha})]$$

$$\vec{v}_{\alpha}^{(2)} = \frac{1}{m_{\alpha}} [\vec{P}_{\alpha} - q_{\alpha} \int_0^1 u du \vec{B}(u \vec{r}_{\alpha}) \times \vec{r}_{\alpha}]$$

$$\vec{E}^{(1)}(\vec{r}) = -\frac{1}{\epsilon_0} \vec{\Pi}(\vec{r}) + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\alpha} q_{\alpha} \frac{\vec{r} - \vec{r}_{\alpha}}{|\vec{r} - \vec{r}_{\alpha}|^3}$$

$$\begin{aligned} \vec{E}^{(2)}(\vec{r}) &= -\frac{1}{\epsilon_0} \vec{\Pi}(\vec{r}) - \frac{1}{\epsilon_0} \vec{P}(\vec{r}) + \underbrace{\vec{E}_0(\vec{r})}_{= \frac{(\sum_{\alpha} q_{\alpha})}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3}} \end{aligned}$$

Transformation unitaire

$$H^{(2)} = T H^{(1)} T^{\dagger}$$

$$T = \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \int d^3k \vec{P}^*(\vec{k}) \cdot \mathcal{A}_{\perp}(\vec{k}) \right\}$$

Systeme S_A (charges $q_\alpha, q_{\alpha'} \dots$) et systeme S_B ($q_\beta, q_{\beta'} \dots$) centres en \vec{R}_A, \vec{R}_B [X-4]

$$\vec{P}(\vec{r}) = \vec{P}_A(\vec{r}) + \vec{P}_B(\vec{r}) \quad \vec{s}_\alpha = \vec{r}_\alpha - \vec{R}_A \quad \vec{s}_\beta = \vec{r}_\beta - \vec{R}_B$$

$$\begin{cases} \vec{P}_A(\vec{r}) = \sum_\alpha \int_0^1 du q_\alpha \vec{s}_\alpha \delta(\vec{r} - \vec{R}_A - u \vec{s}_\alpha) \\ \vec{P}_B(\vec{r}) = \sum_\beta \int_0^1 du q_\beta \vec{s}_\beta \delta(\vec{r} - \vec{R}_B - u \vec{s}_\beta) \end{cases} + \text{Formules analogues pour } \vec{M}_A, \vec{M}_B$$

$$L' = L + \frac{dF}{dt} \quad F = - \int d^3r [\vec{P}_A(\vec{r}) + \vec{P}_B(\vec{r})] \cdot \vec{A}_L(\vec{r})$$

Nouvel hamiltonien

$$\begin{aligned} H_{L'} &= \sum_\alpha \frac{1}{2m_\alpha} \left[\vec{P}_{\alpha L'} - q_\alpha \int_0^1 u du \vec{B}(\vec{R}_A + u \vec{s}_\alpha) \times \vec{s}_\alpha \right]^2 \\ &+ \sum_\beta \frac{1}{2m_\beta} \left[\vec{P}_{\beta L'} - q_\beta \int_0^1 u du \vec{B}(\vec{R}_B + u \vec{s}_\beta) \times \vec{s}_\beta \right]^2 \\ &+ \int d^3k \left[\frac{1}{\epsilon_0} (\vec{\Pi}_{L'} + \vec{P}_{LA} + \vec{P}_{LB})^* \cdot (\vec{\Pi}_{L'} + \vec{P}_{LA} + \vec{P}_{LB}) + \epsilon_0 \omega^2 \vec{\mathcal{A}}_L^* \cdot \vec{\mathcal{A}}_L \right] \\ &+ \sum_\alpha \epsilon_{Coul}^\alpha + \sum_\beta \epsilon_{Coul}^\beta + \sum_{\alpha < \alpha'} \frac{q_\alpha q_{\alpha'}}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}_\alpha - \vec{r}_{\alpha'}|} + \sum_{\beta < \beta'} \frac{q_\beta q_{\beta'}}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}_\beta - \vec{r}_{\beta'}|} + \sum_{\alpha, \beta} \frac{q_\alpha q_\beta}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}_\alpha - \vec{r}_\beta|} \end{aligned}$$

$$H_{L'} = H_{RL'} + H_{IL'}^A + H_{IL'}^B + H_{PL'}^A + H_{PL'}^B + V^{AB}$$

$H_{RL'}$ sans changement. $H_{PL'}^A$ et $H_{PL'}^B$ ont même structure que pour un seul systeme de charge - Idem pour $H_{IL'}^A$ et $H_{IL'}^B$

Terme nouveau : $V^{AB} = \frac{1}{2\epsilon_0} \int d^3k \left[\vec{P}_{LA}^* \cdot \vec{P}_{LB} + \vec{P}_{LA} \cdot \vec{P}_{LB}^* \right] + \underbrace{\sum_{\alpha, \beta} \frac{q_\alpha q_\beta}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}_\alpha - \vec{r}_\beta|}}_{V_{Coul}^{AB}}$

$$\begin{aligned} \text{Or } V_{Coul}^{AB} &= V_{Coul}^{Tot} - V_{Coul}^{AA} - V_{Coul}^{BB} \\ &= \frac{\epsilon_0}{2} \int d^3r \left[(\vec{E}_{\parallel A} + \vec{E}_{\parallel B})^2 - \vec{E}_{\parallel A}^2 - \vec{E}_{\parallel B}^2 \right] \\ &= \epsilon_0 \int d^3r \vec{E}_{\parallel A} \cdot \vec{E}_{\parallel B} \end{aligned}$$

Par ailleurs, d'après les résultats du cours IX, comme A et B sont globalement neutres

$$\epsilon_0 \vec{E}_{\parallel A} = -\vec{P}_{\parallel A} \quad \epsilon_0 \vec{E}_{\parallel B} = -\vec{P}_{\parallel B}$$

$$\hookrightarrow V_{Coul}^{AB} = \epsilon_0 \int d^3r \vec{E}_{\parallel A} \cdot \vec{E}_{\parallel B} = \frac{1}{\epsilon_0} \int d^3r \vec{P}_{\parallel A} \cdot \vec{P}_{\parallel B}$$

$$\hookrightarrow V^{AB} = \frac{1}{\epsilon_0} \int d^3r \left[\vec{P}_{LA} \cdot \vec{P}_{LB} + \vec{P}_{\parallel A} \cdot \vec{P}_{\parallel B} \right] = \frac{1}{\epsilon_0} \int d^3r \vec{P}_A \cdot \vec{P}_B$$

Si S_A et S_B sont séparés, $\int d^3r \vec{P}_A \cdot \vec{P}_B = 0$ et $V^{AB} = 0$

\hookrightarrow Disparition de toute interaction coulombienne entre S_A et S_B

Interpretation physique

S_A et S_B interagissent uniquement via des champs retardés \vec{B} et $\vec{\Pi}_{L'} = -\vec{D}$. Comme S_A et S_B sont séparés, l'induction créée par S_A en S_B coincide (au facteur $-\epsilon_0$ près) avec le champ électrique total (longitudinal + transverse) créé par S_A en S_B .

Erratum - Cours 86-87

- Page II-3 - Transparent 6, 7^{ème} ligne : $\rho^* \rho / \epsilon_0 k^2$ au lieu de $\rho^* \rho / \epsilon_0$
- Page III-2 - 8^{ème} ligne : $\frac{\epsilon_0}{2} \int d^3r [\vec{E}_L^2 - c^2 \vec{B}^2]$ au lieu de $\epsilon_0 \int d^3r [\vec{E}_L^2 - c^2 \vec{B}^2]$
- avant dernière ligne : $\vec{E}(\vec{r})$ au lieu de $\vec{E}_L(\vec{r})$
- Page III-3 - 11^{ème} ligne : $\pi_\epsilon / \epsilon_0$ au lieu de $\epsilon_0 \pi_\epsilon$
- Page IV-2 - 16^{ème} ligne $(\partial_\mu A^\nu)(\partial^\mu A_\nu)$ au lieu de $(\partial_\mu A^\nu)(\partial_\nu A^\mu)$
- Page V-3 - avant dernière ligne : rajouter V entre si et et
- Page VI-2 - Remplacer $H_L^{(1)}(X, P)$ par $H_L^{(1)} = H_L(X, P)$
- Page IX-1 - 9 lignes avant la fin : $\sum_\alpha q_\alpha / (2\pi)^{3/2}$ au lieu de $\sum_\alpha q_\alpha$