

22.1.85

Introduction générale

I-1

A Résumé du cours 1983-84

Le cours a été consacré à la poursuite de l'étude des forces radiatives exercées par des faisceaux laser sur des atomes. Ont été abordés plus particulièrement les points suivants : mises en évidence expérimentale récentes de l'existence de ces forces, possibilités ouvertes dans les domaines du refroidissement et du piégeage radiatifs, fluctuations des forces radiatives, équations cinétiques classiques et quantiques décrivant le mouvement d'un atome dans une onde lumineuse.

Le cours commence par un rappel des principaux résultats établis au cours de l'année antérieure et concernant les forces radiatives moyennes qui décrivent le mouvement du centre du paquet d'ondes atomique. Les expressions de la force de pression de radiation résonnante et de la force dipolaire sont analysées et interprétées en termes d'échanges d'impulsion entre atomes et photons.

ÉTUDE EXPÉRIMENTALE DES FORCES RADIATIVES

La *force de pression de radiation* peut être utilisée pour changer la direction ou le module de la vitesse d'un atome.

Les expériences de déflexion d'un jet atomique entrent dans la première catégorie. Un faisceau laser irradie à angle droit un jet atomique. Lorsque la fréquence du laser coïncide avec une fréquence atomique, les atomes absorbent de manière résonnante les photons laser, et l'impulsion qu'ils acquièrent ainsi fait dévier leur trajectoire. Les expériences correspondantes sont passées en revues et analysées. Les applications possibles de la déflexion résonnante d'un jet atomique sont discutées : études spectroscopiques, séparation isotopique, lien entre le profil de déflexion et la statistique du nombre de photons de fluorescence émis par un atome pendant un intervalle de temps donné.

Lorsque le jet atomique et le faisceau laser se propagent dans le même sens ou dans des sens opposés, l'effet de la pression de radiation est d'accélérer ou de ralentir les atomes. L'accélération n'est pas très intéressante, car il est plus simple d'ioniser les atomes et de leur appliquer une différence de potentiel. Par contre, le ralentissement des atomes, et éventuellement leur immobilisation, sont beaucoup plus importants par les perspectives qu'ils ouvrent en spectroscopie (élimination de tout effet Doppler lié à la vitesse atomique).

Sont d'abord passées en revue les expériences où la fréquence du laser et celle des atomes sont fixes. La pression de radiation ne ralentit alors qu'une classe d'atomes, ceux dont la vitesse est telle qu'elle leur permet par effet Doppler d'être en résonance avec l'irradiation laser. De plus, dès qu'ils sont suffisamment ralentis, ces atomes sortent de résonance et ne subissent plus l'effet du laser. On décrit alors un nouveau dispositif imaginé par Phillips, Metcalf et Prodan aux USA, et permettant d'augmenter considérablement l'efficacité du ralentissement. L'idée consiste à appliquer aux atomes un champ magnétique inhomogène spatialement, produisant donc un déplacement Zeeman de la fréquence atomique qui varie le long de la trajectoire atomique. Cette variation d'effet Zeeman est alors ajustée pour compenser la variation d'effet Doppler due au ralentissement de l'atome, et permettre ainsi à ce dernier de rester constamment en résonance avec le laser. La distribution initiale des vitesses atomiques est alors comprimée vers les faibles vitesses sous forme d'un pic très étroit. Une autre possibilité, de plus en plus utilisée, consiste à balayer temporellement la fréquence du laser pour compenser la variation d'effet Doppler due au ralentissement des atomes. Les premiers résultats obtenus avec cette nouvelle méthode sont passés en revue et discutés.

Les *forces dipolaires*, qui dérivent d'un potentiel et sont dirigées suivant le gradient d'intensité lumineuse, ont été utilisées pour focaliser des jets atomiques. Les expériences correspondantes sont décrites. Une autre application intéressante des forces dipolaires, qui n'a pu être encore réalisée, est le piégeage d'atomes neutres dans le puits de potentiel associé à ces forces. La profondeur de ce puits est calculée, ainsi que les valeurs optimales des paramètres déterminant cette profondeur.

REFROIDISSEMENT RADIATIF D'ATOMES LIBRES

On commence par décrire un mécanisme simple de refroidissement des degrés de liberté de translation d'un atome libre. L'idée consiste à soumettre cet atome à deux ondes laser progressives se propageant en sens inverse, et dont la fréquence est légèrement désaccordée en dessous de la fréquence

atomique. Par suite de l'effet Doppler, l'atome se rapproche de résonance pour l'onde vers laquelle il se dirige. Le ralentissement produit par cette onde l'emporte donc sur l'accélération produite par l'autre onde, et l'atome est globalement ralenti quelle que soit sa vitesse. D'autres mécanismes de refroidissement radiatif (pompage optique, polarisation nucléaire dynamique) sont également mentionnés.

Pour des vitesses faibles, le taux d'amortissement de la vitesse atomique moyenne est proportionnel à la vitesse. Le coefficient de « friction » correspondant est calculé à la limite des intensités lumineuses faibles, et exprimé en fonction de l'énergie de recul, de la largeur naturelle du niveau excité atomique et du nombre de photons absorbés par unité de temps.

Une étude détaillée du bilan des échanges discrets d'impulsion entre atomes et photons permet également de calculer la dispersion de la variation d'impulsion atomique autour de sa valeur moyenne. La diffusion correspondante de l'impulsion atomique est due, d'une part au caractère aléatoire de la direction des photons réémis spontanément par l'atome, d'autre part aux fluctuations du nombre de photons absorbés par unité de temps.

Les résultats ainsi obtenus permettent alors d'estimer la température la plus basse pouvant être atteinte compte tenu de la compétition entre le refroidissement radiatif et l'échauffement dû à la diffusion d'impulsion. Pour des atomes de Sodium, des températures de l'ordre de $1,5 \cdot 10^{-4} \text{K}$ sont ainsi prévues.

EQUATIONS CINÉTIQUES CLASSIQUES POUR UN ATOME DANS UNE ONDE LUMINEUSE

Pour décrire de manière plus précise le mouvement d'un atome dans une onde lumineuse, il faut déterminer l'évolution temporelle des fonctions de distribution donnant la répartition des valeurs possibles des diverses grandeurs atomiques. Les concepts essentiels sont introduits dans cette partie au moyen d'une approche simple traitant classiquement les degrés de liberté de translation de l'atome.

Un certain nombre de notions concernant les processus stochastiques de mémoire très courte (processus de Markov) sont d'abord rappelées : probabilités de transition élémentaires, équation pilote pour la fonction de distribution. La limite où la probabilité de transition élémentaire correspond à des sauts de faible amplitude est ensuite étudiée. On montre que l'équation pilote peut alors être remplacée par une équation de Fokker-Planck dont les coefficients sont reliés aux moments d'ordre un et deux de la variable stochastique (vitesses de variation moyennes et coefficients de diffusion).

à σ une fonction $w(\vec{r}, \vec{p})$ de \vec{r} et \vec{p} , qui présente beaucoup d'analogies avec la fonction de distribution de la position \vec{r} et de l'impulsion \vec{p} d'une particule classique. La fonction de Wigner $w(\vec{r}, \vec{p})$ n'est cependant pas une vraie distribution de probabilité dans la mesure où elle peut prendre des valeurs négatives, mais plutôt une distribution de « quasiprobabilité ».

La discussion précédente est ensuite généralisée au cas d'une particule ayant des degrés de liberté internes, par exemple un atome à deux niveaux e et g couplé à une onde lumineuse. L'état interne et externe de la particule est alors décrit par quatre fonctions de Wigner $w_{ab}(\vec{r}, \vec{p})$, où les nombres quantiques internes a et b peuvent prendre chacun deux valeurs e ou g . Les équations d'évolution couplées de ces quatre fonctions sont établies. Elles décrivent l'évolution couplée des degrés de liberté internes et externes et peuvent être considérées comme des équations de Bloch optiques généralisées. On montre notamment que la conservation de l'impulsion globale lors des processus d'absorption, d'émission induite et d'émission spontanée de photons par l'atome apparaît explicitement dans ces équations.

La trace par rapport aux degrés de liberté internes de l'opérateur densité en représentation de Wigner est une fonction de Wigner réduite, $w(\vec{r}, \vec{p}) = w_{ee}(\vec{r}, \vec{p}) + w_{gg}(\vec{r}, \vec{p})$, donnant la quasiprobabilité de trouver la particule au point \vec{r} avec l'impulsion \vec{p} , quel que soit son état interne. Une méthode opératorielle nouvelle, permettant de déduire des équations de Bloch optiques généralisées l'équation d'évolution de $w(\vec{r}, \vec{p})$, est alors présentée. Elle consiste à éliminer adiabatiquement, (à un ordre donné par rapport aux infiniments petits du problème) les variables internes rapides. Il est possible ainsi d'établir que $w(\vec{r}, \vec{p})$ obéit à une équation de Fokker-Planck, ce qui permet, tout en gardant une description entièrement quantique du mouvement de l'atome, d'utiliser les interprétations physiques associées aux équations cinétiques classiques étudiées plus haut. Un tel traitement a également l'avantage de faire apparaître les tenseurs de diffusion et de friction au même ordre de perturbation, et de fournir des expressions explicites de ces deux tenseurs en termes de fonctions de corrélation des forces radiatives. Le lien entre fluctuations et dissipation apparaît ainsi clairement. La méthode est également directement applicable à des systèmes plus complexes qu'un atome à deux niveaux.

FLUCTUATIONS DES FORCES RADIATIVES

La trace du tenseur de diffusion apparaissant dans l'équation de Fokker-Planck décrivant l'évolution de $w(\vec{r}, \vec{p})$ est calculée. Les divers termes ainsi obtenus sont analysés et interprétés physiquement. Ils sont associés à trois

Les notions précédentes sont alors appliquées au refroidissement radiatif d'atomes libres. L'impulsion atomique apparaît comme une variable markovienne dont la fonction de distribution satisfait à une équation de Fokker-Planck. La solution stationnaire de cette équation est une gaussienne, ce qui permet de donner un sens précis à la température limite étudiée plus haut. Le lien avec la description par équation de Langevin est également souligné.

Un autre exemple important est celui d'atomes piégés dans un puits de potentiel optique. C'est alors l'ensemble des 2 variables position et impulsion x et p qui est markovien. L'équation de Fokker-Planck décrivant l'évolution de la fonction de distribution de x et p est établie. A la limite des frictions élevées (devant la fréquence d'oscillation dans le puits), l'impulsion évolue beaucoup plus vite que la position et a le temps d'atteindre un équilibre local avant que la position n'ait eu le temps de changer. Il est alors possible d'éliminer adiabatiquement l'impulsion et d'obtenir une équation de Fokker-Planck réduite pour la seule position. Une autre limite intéressante est celle des frictions faibles. C'est alors l'énergie qui joue le rôle d'une variable lente, pour laquelle il est possible d'établir une équation de Fokker-Planck réduite.

Les équations précédentes sont enfin utilisées pour évaluer, au moyen d'une méthode due à Kramers, la probabilité de sortie de l'atome hors du puits de potentiel. Le paramètre qui caractérise la stabilité du puits est le rapport entre la profondeur U_0 du puits et l'énergie résiduelle E résultant de la compétition entre le refroidissement radiatif et l'échauffement dû à la diffusion d'impulsion. Le puits est stable si U_0 est très grand devant E . Le problème de la réalisation éventuelle de puits optiques stables fait d'ailleurs l'objet d'un séminaire spécial de Jean DALIBARD, où un certain nombre de dispositifs nouveaux proposés par notre laboratoire sont présentés.

DESCRIPTION QUANTIQUE DU MOUVEMENT D'UN ATOME DANS UNE ONDE LUMINEUSE

Lorsque les degrés de liberté (internes et externes) de la particule sont traités quantiquement l'état de la particule est décrit par un opérateur densité. L'objet de la dernière partie du cours est d'étudier l'évolution de cet opérateur densité sous l'effet de l'interaction entre l'atome et le rayonnement, et de montrer qu'il est possible de déduire de cette équation d'évolution des équations cinétiques quantiques tout à fait analogues aux équations cinétiques classiques étudiées plus haut.

On commence par étudier le cas d'une particule sans degrés de liberté internes. Plusieurs représentations possibles de l'opérateur densité σ de la particules sont passées en revue, dont la représentation de Wigner qui associe

types de fluctuations : fluctuations de la direction d'émission des photons spontanés, fluctuations de la pression de radiation liées aux fluctuations du nombre de photons absorbés par l'atome, fluctuations des forces dipolaires, dont la contribution (à la différence des deux autres types de fluctuations) ne tend pas vers une limite finie quand l'intensité lumineuse croît indéfiniment.

Une interprétation physique des forces dipolaires et de leurs fluctuations en terme d'atome « habillé » par les photons laser est alors présentée. Les états propres du système atome plus photons laser en interaction ont une énergie qui varie d'un point à l'autre de l'espace. Le gradient de cette énergie apparaît comme une force associée à chaque niveau d'énergie de l'atome habillé. On montre que la force dipolaire moyenne n'est autre que la moyenne des forces associées aux divers niveaux de l'atome habillé, pondérées par les probabilités d'occupation de ces niveaux. L'émission spontanée provoque des transitions radiatives entre ces divers niveaux et change ainsi de manière aléatoire la force agissant sur l'atome, ce qui permet de comprendre qualitativement et quantitativement les fluctuations des forces dipolaires.

① Thème choisi

Piégeage et refroidissement de particules chargées
Applications

② Liens avec les cours précédents (82-83 et 83-84)

Comme dans les cours précédents, l'objectif des expériences qui seront décrites cette année est de ralentir, refroidir, piéger une particule atomique, de manière à pouvoir l'observer dans des conditions aussi pures que possible et pendant des temps aussi longs que possible [élimination des perturbations liés aux parois d'une enceinte, aux collisions, l'élimination des élargissements Doppler des 1^{er} et 2^{em} ordres, des élargissements liés au temps de transit fini dans la zone d'observation, contrôle aussi quantitatif que possible des perturbations liés aux potentiels de piégeage ...]

Les cours des 2 années antérieures portaient sur des systèmes neutres (atomes), et les forces permettant de contrôler le mouvement du centre de masse provenaient d'échanges d'impulsion lors de cycles absorption-émission spontané et absorption-émission induite de photons par l'atome (ou encore, du couplage du moment dipolaire électrique de l'atome avec les gradients de phase et d'amplitude de l'onde laser). Avec des particules chargées (électrons, ions ...), il est possible d'agir directement sur la charge du système au moyen de champs électriques et magnétiques statiques. En particulier, il est plus facile de piéger une particule chargée que des atomes neutres (aucun piège laser n'a encore fonctionné pour des atomes neutres, alors qu'on sait piéger des électrons, des positrons, des ions ...)

Il est clair cependant que les pièges à électrons ou ions ne peuvent contenir un trop grand nombre de particules à cause des répulsions électrostatiques entre ces particules. Les perturbations liés aux effets de charge d'espace peuvent également devenir gênantes pour les applications spectroscopiques. Pour ces applications, il est en fait préférable d'opérer sur un seul électron, ou un seul ion. Par contre, les pièges pour atomes neutres, s'ils arrivent à être réalisés, pourraient en principe contenir un plus grand nombre de particules.

③ Les grands domaines d'application

- Différents suivant le type de particules chargées étudiés
- Particules élémentaires comme les leptons (électron e^- , positron e^+ , muons positif et négatif μ^+ et μ^- ...)
 - Ions

Etude des leptons

I-5

- Mesure du moment magnétique de spin de e^- , e^+

$$\vec{M}_s = g \frac{e}{2m} \vec{S} \quad (I-1)$$

g : Facteur g , e et m charge et masse, \vec{S} spin
L'équation de Dirac prévoit $g = 2$, mais les corrections radiatives font que g est légèrement supérieur à 2

- Mesure de l'anomalie $g-2$

$$a = \frac{g-2}{2} \quad g = 2(1+a) \quad (I-2)$$

Tests de l'électrodynamique quantique qui permet de calculer a sous forme d'un développement en puissance de la constante de structure fine $\alpha = e^2/4\pi\epsilon_0\hbar c \approx 1/137$

- Comparaison des anomalies $a(e^+)$ et $a(e^-)$ de e^+ et e^-
- Tests de CPT (Conjugaison de charge, parité, renversement du temps)
- Comparaison de $a(e)$ et $a(\mu)$ [anomalies des électrons et des muons]. Sensibilité de $a(\mu)$ aux autres interactions (fortes, faibles)

Etude des ions

- Spectroscopie de masse (mesure de rapports de masse par mesure de rapports de fréquence cyclotron)
- Spectroscopie optique, microonde à ultra haute résolution
- Refroidissement laser d'ions piégés
- Standards de fréquence
- Ions négatifs
- Mesures de durées de vie

④ Les problèmes qui seront abordés cette année

Essentiellement, les problèmes relatifs aux leptons piégés (l'étude des ions sera abordée dans un cours ultérieur)

- Le piège Penning (combinaison d'un potentiel électrostatique quadrupolaire et d'un champ magnétique uniforme)
Etude classique et quantique du mouvement d'un électron sous un tel piège. Intérêt de ce piège.
- Refroidissement des mouvements de vibration, cyclotron et magnétron.
Comment détecter le mouvement de vibration de l'électron?
Détection d'un électron unique piégé.
- Comment détecter les transitions de spin?
Utilisation d'une "bouteille magnétique".
Mesure de la fréquence cyclotron.
Mesure de l'anomalie $a(e)$ par effet Stern et Gerlach "continu"

- Analyse d'un processus de mesure portant sur un électron unique. Etude du rapport signal sur bruit
Temps minimum de mesure
- Extension aux positrons. Comparaison de $a(e^-)$ et $a(e^+)$
l'anomalie $a(\mu)$ du muon
- Améliorations possibles et perspectives. Utilisation d'effets relativistes pour éliminer la bouteille magnétique.
Sensibilité des corrections radiatives aux effets de paroi.

C - Bref historique sur le moment magnétique de spin de e^-

L'apparition du spin dans la théorie quantique

1925 Uhlenbeck et Goudsmit postulent l'existence du spin et du moment magnétique associé pour expliquer l'effet Zeeman anormal et les doublets de structure fine

1927 Equation de Dirac. Justification théorique du spin et de $g = 2$

1927-30 Réfutation par Bohr et Pauli de toute une série de propositions d'expériences ayant pour but de mesurer le moment magnétique de spin de l'électron libre et basées sur des généralisations de l'expérience de Stern et Gerlach ou sur des mesures magnétométriques.

Le congrès Solvay de 1930
Le "théorème" de Bohr interdisant les mesures "classiques" du moment magnétique de spin de l'électron libre, et extrapolé (abusivement) par certains physiciens comme faisant perdre toute signification physique à la notion de moment magnétique de spin d'un électron libre

Période très intéressante pour l'histoire des Sciences, car elle révèle bien les difficultés de mise en place de la nouvelle mécanique quantique, les blocages intellectuels qui se sont produits, les problèmes de langage...

Les premières expériences de physique atomique et les premiers calculs

1947 - Expérience de Nafe, Nelson, Rabi sur la structure hyperfine de l'état fondamental de H et D. Mise en évidence d'un désaccord (0,2%) entre expérience et théorie

- Breit attribue ce désaccord au fait que $g \neq 2$.

- Détermination plus précise de a_e par Kusch et Foley qui mesurent des rapports de facteurs de Landé g_J de 2 niveaux différents d'un atome donné (Ga, In, Na).
 g_J est exprimé en fonction du facteur g orbital, $g_L = 1$, et du facteur g de spin, $g_S = 2(1+a_e)$. Les résultats sont

$$a_e = (1.19 \pm 0.05) \cdot 10^{-3} \quad \Delta a/a \approx 5 \cdot 10^{-2}$$

$$g_e = 2(1.00119 \pm 0.00005) \quad \Delta g/g \approx 5 \cdot 10^{-5}$$

les incertitudes qui subsistent, sont liés aux corrections relativistes et aux interactions entre l'électron de valence et les autres électrons.

1948 - Premier calcul de a_e , à l'ordre 1 en α , par Schwinger I-7

$$a_e = \frac{\alpha}{2\pi} = 0.0016$$

- Début de l'électrodynamique quantique moderne

- Weldon propose l'image de l'électron vibrant dans les fluctuations du vide (vibration de la charge et oscillation du spin), qui conduit au bon ordre de grandeur pour le déplacement de Lamb, mais au mauvais signe pour $g-2$. Pourquoi $g-2$ est-il positif?

1949 - Amélioration de la précision des mesures par Gardner et Purcell qui comparent la fréquence cyclotron d'un électron libre dans un champ B_0 à la fréquence NMR des protons dans le même champ, ce qui donne μ_B/μ_p . Par ailleurs, Koenig, Prodell et Kusch, réalisent d'expériences sur H le rapport μ_e/μ_p . La combinaison des 2 expériences donne μ_e/μ_B et par suite a_e

$$a_e = (1.146 \pm 0.012) 10^{-3} \quad \Delta a/a \approx 10^{-2}$$

Amélioration de ces 2 mesures par Franken et Liche (1956)

- Les expériences deviennent juste sensibles aux corrections en $(\alpha/\pi)^2$. Comparaison avec les calculs des termes en α^2 par Karplus et Kroll (1950), Peterman, Sommerfield (1957). Découverte d'erreurs dans les premiers calculs des termes en α^2

Les expériences sur des électrons liés dans des atomes semblent atteindre leurs limites, dans la mesure où, même sur un atome aussi simple que H, les corrections relativistes au facteur g deviennent de l'ordre de α^2

Pour aller plus loin, il est clair qu'il faut passer à des expériences où a_e est mesuré sur des électrons libres ou faiblement liés.

Les premières expériences (ou projets) sur des e^- libres ou faiblement liés

1953 Faisant suite à la mise en évidence expérimentale de l'effet Mott de polarisation partielle d'un faisceau de e^- par diffusion de Coulomb, l'expérience de Louisell, Pidd, Crane montre qu'un champ magnétique fait tourner le spin de l'électron entre 2 diffusions de Mott (la 1^{ère} diffusion sert à polariser le spin, la 2^{ème} à l'analyser; le champ B_0 est appliqué parallèlement au faisceau de e^-).

Bien que peu précise (elle donne $g = 2.00 \pm 0.01$), cette expérience montre pour la première fois qu'il est possible de mesurer g sur un électron libre. Elle allait être le point de départ de la très belle série d'expériences de précision effectuées à Michigan pendant 3 décennies.

1953 Bloch propose une expérience de résonance sur des e^- piégés dans des champs statiques. Combinaison d'un champ B_0 intense et d'un puits de potentiel électrostatique très faible dans la direction de B_0 permettant de piéger des e^- . L'application pendant un certain temps d'un gradient de champ magnétique le long de B_0 permet d'éjecter tous les e^- hors du piège sauf ceux se trouvant dans le niveau de Landau le plus bas ($n=0$) et le niveau de spin $m_s = -1/2$. L'application de microonde permet alors d'induire des transitions vers les niveaux $n=1, m_s = -1/2$ et $n=0, m_s = +1/2$. Le passage à résonance est détecté en vidant

de nouveau le piège et en comptant les e⁻ éjectés. On peut
essayer ainsi mesurer la fréquence cyclotron ω_c et la fréquence de
Larmor ω_L du spin et en déduire $g_e = 2\omega_L/\omega_c$.

Autres propositions analogues de Dicke (datée de 1947-49 et non
publiée), de Tolhoek et de Groot (1951)

Bien que n'ayant pu être réalisées, ces propositions sont les
premières à introduire l'idée d'effectuer des résonances sur des e⁻
piégés dans des configurations de champs externes statiques. Elles
généralisent en quelque sorte les expériences de Kusch et Foley.
Au lieu de considérer les niveaux d'énergie d'un électron dans
le champ coulombien d'un noyau, on étudie les niveaux de cet
électron dans un potentiel externe, dans un domaine d'énergies
de liaison beaucoup plus faibles. On minimise ainsi les effets
relativistes et on peut contrôler à volonté les effets de liaison.

1958 Première détermination par Dehmelt de l'anomalie a_e
d'électrons libres, produits dans une décharge et orientés
par collisions d'échange avec des atomes de sodium pompés
optiquement. Les transitions de spin sont induites par un
champ magnétique de radiofréquence et détectées par la
variation de polarisation qu'elles produisent sur les atomes de
sodium.

Mesure de $g_e/g_J(\text{Na})$ à $30 \cdot 10^{-6}$ près. Comme g_J est connue
à $20 \cdot 10^{-6}$ près, on en déduit
 $a_e = (1.116 \pm 0.040) \cdot 10^{-3}$ $\Delta a/a \approx 4 \cdot 10^{-2}$

1961 Amélioration spectaculaire de l'expérience de Louisell, Pidd, Crane
par Schupp, Pidd et Crane. L'idée consiste à mesurer, non pas
la rotation du spin dans le champ B_0 entre le polariseur et
l'analyseur, mais la rotation différentielle du spin par
rapport à la direction de la vitesse. On mesure ainsi directement
 $g-2$ au lieu de g . De plus, on stocke les électrons dans une
bouteille magnétique où ils effectuent de nombreuses révolutions
ce qui augmente la précision. Le résultat est

$a_e = (1.1609 \pm 0.0024) \cdot 10^{-3}$ $\Delta a/a \approx 2 \cdot 10^{-3}$

Les développements ultérieurs qui ont permis à ce jour d'atteindre
une précision $\Delta a/a \approx 4 \cdot 10^{-8}$ (soit un gain d'environ 5 ordres
de grandeur!) seront décrits dans le cours de cette année

Bibliographie sommaire (articles de revue et références in)

O. DARRIGOL Histoire de la question: peut-on polariser des e⁻ libres? Preprint 1984
H.R. CRANE The g factor of the electron, Scientific Americ. 218, Janvier 1968
A. RICH, J.C. WESLEY The current status of the lepton g factors p. 72
Rev. Mod. Phys. 44, 250 (1972)
J.H. FIELD, E. PICASSO, E. PICASSO Tests of fundamental physical theories from
measurements on free charged leptons Sov. Phys. Usp. 22, 199 (1979)

Pour les mesures les plus récentes, voir articles de CONTI, NEWMAN, RICH
et SWEETMAN - SCHWINBERG, VAN DYCK, DEHMELT - GABRIELSE DEHMELT
dans Precision Measurement and Fundamental Constants II, N.B.S
Special Publication 617, edited by B.N. TAYLOR and W.D. PHILLIPS (1984)

Introduction

Le but de ce chapitre est de déterminer les fréquences propres du mouvement d'un électron dans un piège de Penning ainsi que les niveaux d'énergie de cet électron.

Nous commençons (§ 1) par rappeler les résultats relatifs au mouvement d'un électron dans un seul champ magnétique uniforme \vec{B}_0 , parallèle à Oz . Deux fréquences importantes apparaissent : la fréquence cyclotron ω_c de la charge et la fréquence de précession de Larmor ω_L du spin. L'étude quantique de ce problème conduit au diagramme d'énergie de Landau-Rabi.

Avec un seul champ \vec{B}_0 , le mouvement n'est pas confiné dans la direction Oz de \vec{B}_0 . L'idée la plus simple consiste alors à appliquer un potentiel électrostatique ϕ en z^2 , de manière à introduire une force de rappel ramenant l'électron en $z=0$. A cause de $\Delta\phi=0$, le potentiel ϕ est nécessairement quadrupolaire [ϕ est en $z^2 - (x^2+y^2)/2$]. La combinaison de ce potentiel ϕ et du champ \vec{B}_0 constitue un piège de Penning. Nous étudions en détail dans le § 2 le mouvement d'un électron dans un tel piège, à la fois classiquement et quantiquement. Nous déterminons les niveaux d'énergie, les fréquences de Bohr, et discutons quelles fréquences il faut mesurer pour remonter au facteur g et à l'anomalie a_e .

Etant donné la précision avec laquelle g et a_e sont actuellement déterminés, il est important d'évaluer les conséquences sur les fréquences de Bohr de l'électron d'une imperfection du piège. Ce problème est abordé dans le § 3.

Plan

- ① Electron dans un champ magnétique uniforme - Rappels.
 - a - Etude classique (Transparent 1)
 - b - Etude quantique - Niveaux de Rabi-Landau (2 à 6)
- ② Electron dans un piège de Penning - Geonium
 - a - Définition et paramètres d'un piège de Penning (7 à 9)
 - b - Etude classique - Fréquence cyclotron modifiée, fréquence magnétron, fréquence de vibrations axiale (10 à 14)
 - c - Etude quantique - Niveaux d'énergie et observables du "geonium" (15 à 22)
 - d - Principe de la détermination de l'anomalie a_e (23)
- ③ Piège de Penning imparfait
 - a - Caractérisation de l'imperfection (24 à 26)
 - b - Modification des fréquences des mouvements (27 à 29)
 - c - Principe de la détermination de a_e (30)

Bibliographie : page II-9

Electron dans un champ uniforme \vec{B}_0

Equation du mouvement $m_e \ddot{\vec{r}} = q \dot{\vec{r}} \times \vec{B}_0$ (1)

$$\left\{ \begin{array}{l} m_e \ddot{x} = q B_0 \dot{y} \\ m_e \ddot{y} = -q B_0 \dot{x} \\ m_e \ddot{z} = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \dot{p} = i \omega_c p \\ p = x + i y \end{array} \right.$$

$\omega_c = -\frac{q B_0}{m_e}$ Fréquence cyclotron ($q < 0, B_0 > 0 \rightarrow \omega_c > 0$)

Solution

$p = p_0 + \sigma e^{i(\omega_c t - \varphi_0)}$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = x_0 + \sigma \cos(\omega_c t - \varphi_0) \\ y = y_0 + \sigma \sin(\omega_c t - \varphi_0) \end{array} \right.$$

Dans le plan xOy , cercle de centre x_0, y_0 fixe, de rayon σ , parcouru à la vitesse angulaire uniforme ω_c
 $z = z_0 + v_{0z} t$ Mvt uniforme sur Oz

Lien entre $(x, y), (x_0, y_0), (v_x, v_y)$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_0 = x - \frac{v_y}{\omega_c} \\ y_0 = y + \frac{v_x}{\omega_c} \end{array} \right.$$

Etude quantique

(2)

Hamiltonien de Pauli

$H = \frac{1}{2m_e} [\vec{P} - q \vec{A}(\vec{r})]^2 - g \frac{q}{2m} \vec{S} \cdot \vec{B}_0$

Les 2 parties, orbitale et de spin, commutent et peuvent être étudiées séparément

Choix d'une jauge (\vec{B}_0 uniforme)

$\vec{A} = -\frac{1}{2} \vec{r} \times \vec{B}_0 \quad \vec{A} = \left\{ -\frac{y B_0}{2}, \frac{x B_0}{2}, 0 \right\}$

Hamiltonien orbital

$H_{\text{orbital}} = H_z + H_{xy}$

$H_z = \frac{P_z^2}{2m_e}$

$H_{xy} = \frac{1}{2m_e} \left\{ \left[P_x + \frac{q}{2} y B_0 \right]^2 + \left[P_y - \frac{q}{2} x B_0 \right]^2 \right\} = \frac{1}{2m_e} (P_x^2 + P_y^2) + \frac{m_e (\omega_c)^2}{2} (x^2 + y^2) + \frac{\omega_c}{2} (x P_y - y P_x)$

Hamiltonien d'oscillateur harmonique à 2 dimensions avec couplage supplémentaire proportionnel à L_z

Opérateurs d'annihilation a_x, a_y (3)

$$\left\{ \begin{array}{l} a_x = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\beta x + \frac{i}{\beta \hbar} P_x \right) \\ a_y = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\beta y + \frac{i}{\beta \hbar} P_y \right) \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} [a_x, a_x^\dagger] = 1 \\ [a_y, a_y^\dagger] = 1 \\ [a_x, a_y^\dagger] = 0 \end{array} \right.$$

- Quelle que soit la constante β
 $L_z = x P_y - y P_x = i \hbar (a_x a_y^\dagger - a_x^\dagger a_y)$

- Si l'on choisit $\beta = \sqrt{\frac{m_e \omega_c}{\hbar}}$
 $\frac{1}{2m_e} (P_x^2 + P_y^2) + \frac{m_e (\omega_c)^2}{2} (x^2 + y^2) = \frac{\hbar \omega_c}{2} (N_x + N_y + 1)$
 avec $N_x = a_x^\dagger a_x \quad N_y = a_y^\dagger a_y$

Quanta circulaires droits et gauche

$$\left\{ \begin{array}{l} a_d = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_x - i a_y) \\ a_g = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_x + i a_y) \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} [a_d, a_d^\dagger] = 1 \\ [a_g, a_g^\dagger] = 1 \\ [a_d, a_g^\dagger] = 0 \end{array} \right.$$

$L_z = i \hbar (a_x a_y^\dagger - a_x^\dagger a_y) = \hbar (N_d - N_g)$
 avec $N_d = a_d^\dagger a_d \quad N_g = a_g^\dagger a_g$
 (Résultat valable pour tout β)

Par ailleurs, $N_x + N_y = N_d + N_g$

Expression finale de H_{xy} (4)

Avec le choix $\beta = \sqrt{\frac{m_e \omega_c}{\hbar}}$
 $H_{xy} = \frac{\hbar \omega_c}{2} (N_d + N_g + 1) + \frac{\hbar \omega_c}{2} (N_d - N_g) = \hbar \omega_c (N_d + \frac{1}{2})$

Hamiltonien d'oscillateur harmonique à une dimension (associé aux "quanta circulaires droits")

Valeurs propres: $(n + \frac{1}{2}) \hbar \omega_c \quad n = 0, 1, 2, \dots$

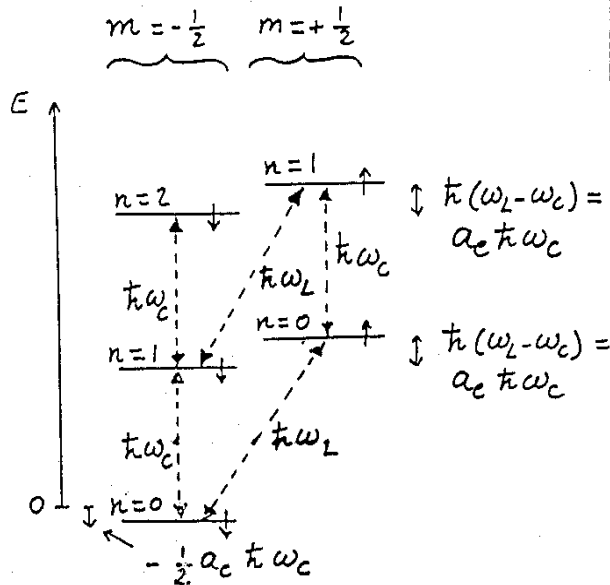
Niveaux de Landau

Valeurs propres de l'hamiltonien

$H = \underbrace{H_z}_{\frac{P_z^2}{2m_e}} + \underbrace{H_{xy}}_{(n + \frac{1}{2}) \hbar \omega_c} + \underbrace{H_{\text{spin}}}_{m \hbar \omega_L}$

P_z : valeur propre continue
 n : Nombre quantique de Landau
 $m = \pm \frac{1}{2}$ Nombre quantique de spin
 $\omega_L = \frac{g}{2} \omega_c = (1 + \frac{g-2}{2}) \omega_c = (1 + a_0) \omega_c$
 ω_L = Fréquence de Larmor

Niveaux de Rabi-Landau
(sous espace $p_3 = 0$)



L'écart entre les 2 niveaux $n, m = -\frac{1}{2}$ et $n-1, m = +\frac{1}{2}$ est proportionnel à $a_e = \frac{q-2}{2}$

(5) Expression des observables 6

(en fonction de a_d, a_g, a_d^+, a_g^+)

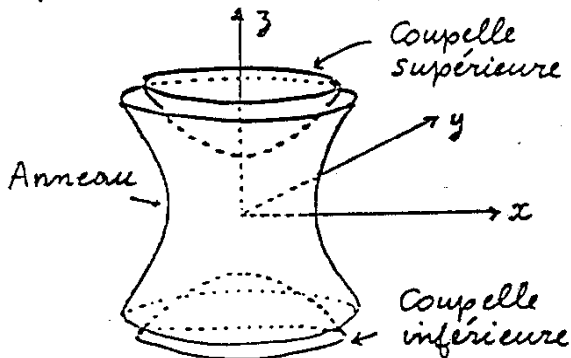
$$\begin{cases} x = (1/2\beta)(a_d + a_d^+ + a_g + a_g^+) \\ y = (i/2\beta)(a_d - a_d^+ - a_g + a_g^+) \\ v_x = -(i\omega_c/2\beta)(a_d - a_d^+) \\ v_y = (\omega_c/2\beta)(a_d + a_d^+) \\ x_0 = x - \frac{1}{\omega_c} v_y = (1/2\beta)(a_g + a_g^+) \\ y_0 = y + \frac{1}{\omega_c} v_x = (i/2\beta)(a_g^+ - a_g) \end{cases}$$

Les coordonnées x_0 et y_0 du centre du cercle sont associées à la position et à l'impulsion de l'oscillateur g qui n'apparaît pas dans l'hamiltonien

La dégénérescence $n_g = 0, 1, 2, \dots$ de chaque niveau de Landau n_d traduit le fait que l'énergie ne dépend de la position du centre du cercle

Potentiel électrostatique quadrupolaire

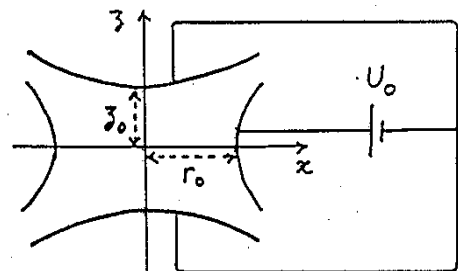
$\phi(x, y, z) = A(x^2 + y^2 - 2z^2) = A(r^2 - 3z^2)$
Symétrie de révolution autour de Oz
Satisfait bien l'équation de Poisson
 $\Delta\phi = A(2+2-4) = 0$ ($\phi \sim r^2 \propto \frac{1}{2}(\theta, \varphi)$)



Equipotentiels : Hyperboloïdes de révolution autour de Oz

- 1 électrode en forme d'anneau
- 2 électrodes en forme de coupelle

(7) Paramètres importants de $\phi(x, y, z)$ 8



Différence de potentiel U_0

$U_0 = \phi(r_0, 0, 0) - \phi(0, 0, z_0) = A(r_0^2 + 2z_0^2)$

Fréquence de vibration le long de Oz

$\phi(0, 0, z) = 2|q|A z^2 = \frac{1}{2} m_e \omega_z^2 z^2$

$\omega_z^2 = \frac{4|q|A}{m_e} = \frac{4|q|U_0}{m_e(r_0^2 + 2z_0^2)}$

$\omega_z^2 = \frac{19|U_0}{m_e z_0^2}$ si $r_0^2 = 2z_0^2$

Energie potentielle de l'électron

$V(x, y, z) = q\phi(x, y, z) = qA(x^2 + y^2 - 2z^2)$

$V(x, y, z) = \frac{1}{2} m_e \omega_z^2 [z^2 - \frac{x^2 + y^2}{2}]$

Principe du piège de Penning (9)

- Le potentiel électrostatique seul ne peut piéger l'électron
- S'il y a bien un creux de potentiel en $z=0$ le long de Oz , il y a une bosse en $x=y=0$ le long de Ox et Oy ($\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$)
- Pour confiner latéralement le mouvement dans le plan xOy , on ajoute un champ magnétique uniforme \vec{B}_0 parallèle à Oz , de façon à compenser la force électrique centrifuge par une force magnétique centripète
- Problème à résoudre : Mouvement classique et quantique de l'électron dans un champ \vec{E} quadrupolaire et un champ \vec{B}_0 uniforme

Mouvement classique

Equation $\ddot{\vec{r}} = -\frac{1}{m_e} \vec{\nabla} V + \frac{q}{m_e} \vec{r} \times \vec{B}_0$

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} &= +\frac{\omega_z^2}{2} x - \omega_c y \\ \ddot{y} &= +\frac{\omega_z^2}{2} y + \omega_c x \\ \ddot{z} &= -\omega_z^2 z \end{aligned} \right\} \ddot{\rho} = \frac{\omega_z^2}{2} \rho + i\omega_c \dot{\rho}$$

$\rho = x + iy$

Fréquences du mouvement transversal

Solutions pour ρ de la forme: $\rho_0 e^{i\omega t}$

$\hookrightarrow \omega^2 - \omega_c \omega + \frac{\omega_z^2}{2} = 0$

$\Delta = \omega_c^2 - 2\omega_z^2 > 0$ (car, en général, $\omega_c \gg \omega_z$) \rightarrow 2 racines réelles

Fréquence cyclotron modifiée par E

$$\omega'_c = \frac{\omega_c}{2} + \frac{\omega_c}{2} \sqrt{1 - \frac{2\omega_z^2}{\omega_c^2}}$$

Très proche de ω_c

Fréquence magnétron

$$\omega_m = \frac{\omega_c}{2} - \frac{\omega_c}{2} \sqrt{1 - \frac{2\omega_z^2}{\omega_c^2}}$$

Très petite devant ω_c et ω_z

Les 2 fréquences ω'_c et ω_m (11)

Autre écriture

$$\begin{cases} \omega'_c = \frac{1}{2}(\omega_c + \tilde{\omega}_c) \\ \omega_m = \frac{1}{2}(\omega_c - \tilde{\omega}_c) \end{cases} \quad \tilde{\omega}_c^2 = \omega_c^2 - 2\omega_z^2$$

Somme et produit

$$\begin{cases} \omega'_c + \omega_m = \omega_c & (1) \\ \omega'_c \omega_m = \frac{\omega_z^2}{2} & (2) \end{cases}$$

Fréquence δ_e définie par :

$$\delta_e = \frac{\omega_z^2}{2\omega'_c}$$

D'après (2) $\rightarrow \delta_e = \omega_m$

D'après (1) $\rightarrow \delta_e = \omega_c - \omega'_c$

Propriété importante du piège

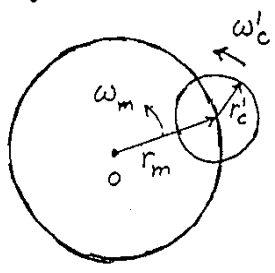
Les 3 fréquences du mouvement de la charge q dans le piège, $\omega_z, \omega'_c, \omega_m$ sont indépendantes du point où l'on se trouve

Solution des équations classiques (12)

$$z = z_0 \cos(\omega_z t - \varphi_0)$$

$$\rho = r_c e^{i(\omega'_c t - \varphi'_c)} + r_m e^{i(\omega_m t - \varphi_m)}$$

- Oscillation le long de Oz à la fréquence ω_z
- Dans le plan xOy , cercle de rayon r_c parcouru à la vitesse angulaire uniforme ω'_c , dont le centre, situé à une distance r_m de O , tourne à la vitesse angulaire uniforme ω_m autour de O



Ordres de grandeur

(13)

$B_0 = 1,8 \text{ Tesla}$ $z_0 = 6,7 \text{ mm}$ $U_0 = 9,2 \text{ V}$

$\omega_c / 2\pi \approx 51 \text{ GHz}$

$\omega_z / 2\pi \approx 60 \text{ MHz}$

$\omega_m / 2\pi \approx 35 \text{ KHz}$

Enfinement, par rapport à ce qui se passe pour un seul champ \vec{B}_0 uniforme, l'effet du champ électrique quadrupolaire est de

- 1 - Diminuer très légèrement la fréquence cyclotron $\omega_c \rightarrow \omega'_c < \omega_c$
- 2 - Faire tourner très lentement le centre de l'orbite cyclotron à la fréquence ω_m autour de 0
- 3 - Faire osciller lentement l'orbite cyclotron à la fréquence ω_z le long de Oz

Allure du mouvement

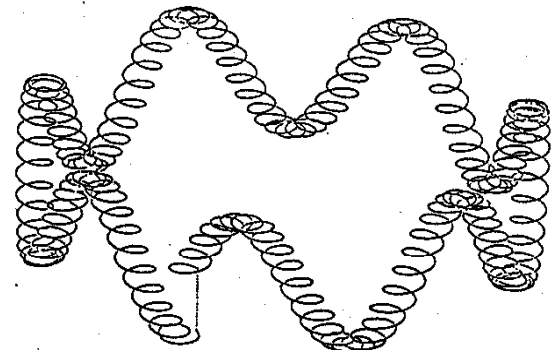
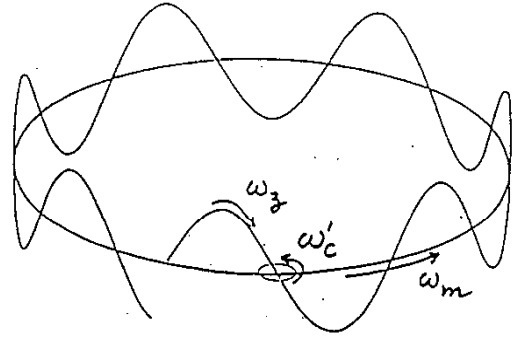


Figure extraite de : P. EKSTROM, D. WINELAND Scientific American 243, 91 (Aout 1980)

Etude quantique

(15)

Hamiltonien orbital

$H_{orb} = \frac{1}{2m_e} [\vec{p} - q\vec{A}(\vec{r})]^2 + V(\vec{r})$

$\vec{A}(\vec{r}) = -\frac{1}{2}\vec{r} \times \vec{B}_0$ $V(\vec{r}) = \frac{m_e \omega_z^2}{2} [z^2 - \frac{x^2 + y^2}{2}]$

$H_{orb} = H_z + H_{xy}$

Hamiltonien H_z

$H_z = \frac{P_z^2}{2m_e} + \frac{1}{2} m_e \omega_z^2 z^2 = \hbar \omega_z (N_z + \frac{1}{2})$

$N_z = a_z^+ a_z$ $[a_z, a_z^+] = 1$

$a_z = \frac{1}{\sqrt{2}} [\beta_3 z + \frac{i}{\hbar \beta_3} P_z]$ $\beta_3 = \sqrt{\frac{m_e \omega_z}{\hbar}}$

Hamiltonien H_{xy}

$H_{xy} = \frac{1}{2m_e} [P_x^2 + P_y^2] + \frac{1}{2} m_e \left[\left(\frac{\omega_c}{2} \right)^2 - \frac{\omega_z^2}{2} \right] (x^2 + y^2) + \frac{\omega_c}{2} L_z$

$\left[\frac{\tilde{\omega}_c}{2} \right]^2$

Nouveau choix pour a_x, a_y, a_d, a_g (16)

$\tilde{a}_x = \frac{1}{\sqrt{2}} (\tilde{\beta} x + \frac{i}{\tilde{\beta} \hbar} P_x)$
 $\tilde{a}_y = \frac{1}{\sqrt{2}} (\tilde{\beta} y + \frac{i}{\tilde{\beta} \hbar} P_y)$

avec $\tilde{\beta} = \sqrt{\frac{m_e \tilde{\omega}_c}{\hbar}}$ au lieu de $\beta = \sqrt{\frac{m_e \omega_c}{\hbar}}$

$\tilde{a}_d = \frac{1}{\sqrt{2}} (\tilde{a}_x - i \tilde{a}_y)$ $\tilde{a}_g = \frac{1}{\sqrt{2}} (\tilde{a}_x + i \tilde{a}_y)$

- Comme l'expression de L_z ne dépend pas de β , on a toujours $L_z = i\hbar (\tilde{a}_x \tilde{a}_y^+ - \tilde{a}_x^+ \tilde{a}_y) = \hbar (\tilde{a}_d^+ \tilde{a}_g - \tilde{a}_g^+ \tilde{a}_d)$ et donc $\frac{\omega_c}{2} L_z = \frac{\hbar \omega_c}{2} (\tilde{N}_d - \tilde{N}_g)$

- Avec ce nouveau choix de $\tilde{\beta}$, on a $\frac{1}{2m_e} (P_x^2 + P_y^2) + \frac{m_e}{2} \left(\frac{\tilde{\omega}_c}{2} \right)^2 (x^2 + y^2) = \frac{\hbar \tilde{\omega}_c}{2} (\tilde{N}_d + \tilde{N}_g + 1)$

Enfinement,

$H_{orb} = \frac{\hbar \tilde{\omega}_c}{2} (\tilde{N}_d + \tilde{N}_g + 1) + \frac{\hbar \omega_c}{2} (\tilde{N}_d - \tilde{N}_g)$
 $= \hbar \omega'_c (\tilde{N}_d + \frac{1}{2}) - \hbar \omega_m (\tilde{N}_g + \frac{1}{2})$

Valeurs propres de H_{orb} (17)

$$H_{orb} = \hbar \omega_3 (N_3 + \frac{1}{2}) + \hbar \omega'_c (\tilde{N}_d + \frac{1}{2}) - \hbar \omega_m (\tilde{N}_g + \frac{1}{2})$$

Trois oscillateurs indépendants
 Noter le signe - pour ω_m
 "Instabilité" du mouvement magnétron
 Valeurs propres de $\tilde{N}_d, N_3, \tilde{N}_g$:
 entiers $n, k, s \geq 0$

$$H_{orb} |n, k, s\rangle = [(n + \frac{1}{2}) \hbar \omega'_c + (k + \frac{1}{2}) \hbar \omega_3 - (s + \frac{1}{2}) \hbar \omega_m] |n, k, s\rangle$$

Valeurs propres de $H_{tot} = H_{orb} + H_{spin}$

$$H_{spin} |m\rangle = m \hbar \omega_L |m\rangle$$

$$m = \pm \frac{1}{2} \quad \hbar \omega_L = \frac{q}{2} \hbar \omega_c = (1 + a_e) \hbar \omega_c$$

$$H |n, m, k, s\rangle = [(n + \frac{1}{2}) \hbar \omega'_c + m \hbar \omega_L + (k + \frac{1}{2}) \hbar \omega_3 - (s + \frac{1}{2}) \hbar \omega_m] |n, m, k, s\rangle$$

Récapitulation (18)

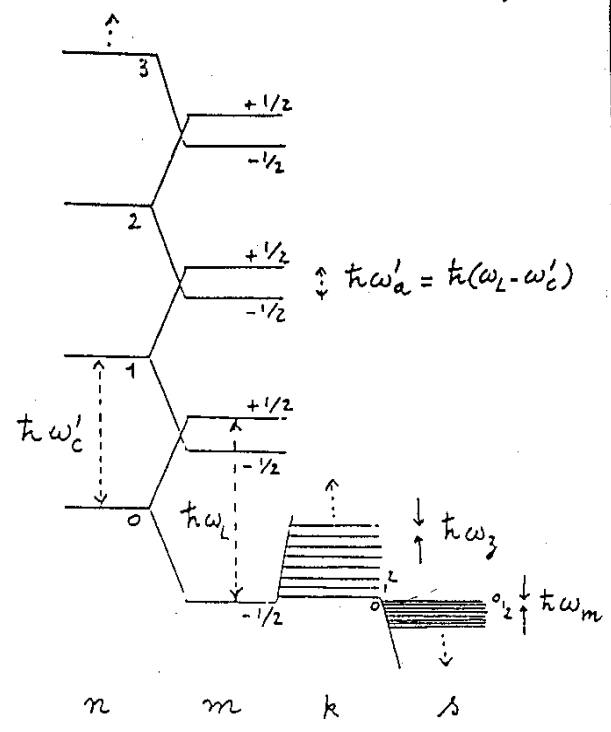
- Spectre de H entièrement discret
- 4 nombres quantiques
 $n, k, s = 0, 1, 2, 3 \dots$
 $m = -1/2, +1/2$
- 4 fréquences
 $\omega'_c, \omega_L = (1 + a_e) \omega_c, \omega_3, \omega_m$
- Par rapport au cas du seul champ \vec{B}_0 , l'effet de \vec{E} est de
 - 1- Rendre discret le spectre de H_3
 - 2- Diminuer légèrement l'énergie des quanta d ($\omega_c \rightarrow \omega'_c < \omega_c$)
 - 3- Lever la dégénérescence g (H dépend maintenant de H_g)

Geonium

Nom donné au système formé par un électron lié à une telle configuration de champs \vec{E}, \vec{B}_0
 "Electron lié à la terre"

Allure du spectre du geonium (19)

(à comparer avec le spectre des niveaux de Landau - Rabi)



Quelques observables (20)

$$x = (1/2\tilde{\beta}) (\tilde{a}_d + \tilde{a}_d^\dagger + \tilde{a}_g + \tilde{a}_g^\dagger)$$

$$y = (i/2\tilde{\beta}) (\tilde{a}_d - \tilde{a}_d^\dagger - \tilde{a}_g + \tilde{a}_g^\dagger)$$

$$z = (1/\sqrt{2}\beta_3) (a_3 + a_3^\dagger)$$

$$p_x = (i\hbar\tilde{\beta}/2) (\tilde{a}_d^\dagger + \tilde{a}_g^\dagger - \tilde{a}_d - \tilde{a}_g)$$

$$p_y = (\hbar\tilde{\beta}/2) (\tilde{a}_d^\dagger - \tilde{a}_g^\dagger + \tilde{a}_d - \tilde{a}_g)$$

$$p_z = (i\hbar\beta_3/\sqrt{2}) (a_3^\dagger - a_3)$$

$$\pi_i = m_e v_i = p_i - q A_i \quad i = x, y, z$$

$$\pi_x = (im_e/2\tilde{\beta}) [\omega'_c (\tilde{a}_d^\dagger - \tilde{a}_d) - \omega_m (\tilde{a}_g^\dagger - \tilde{a}_g)]$$

$$\pi_y = (m_e/2\tilde{\beta}) [\omega'_c (\tilde{a}_d^\dagger + \tilde{a}_d) + \omega_m (\tilde{a}_g^\dagger + \tilde{a}_g)]$$

$$\pi_z = (im_e/\sqrt{2}\beta_3) \omega_3 (a_3^\dagger - a_3)$$

$$\tilde{\beta} = \sqrt{\frac{m_e \tilde{\omega}_c}{\hbar}} \quad \beta_3 = \sqrt{\frac{m_e \omega_3}{\hbar}}$$

π_x et π_y dépendent maintenant non seulement de \tilde{a}_d et \tilde{a}_d^\dagger mais aussi de \tilde{a}_g et \tilde{a}_g^\dagger

Valeur moyenne de quelques observables dans l'état $|n, m, k, s\rangle$ (21)

Extension transversale

$$\langle x^2 + y^2 \rangle = \frac{\hbar}{m_e \omega_c} [(2n+1) + (2s+1)]$$

$$\frac{\hbar}{m_e \omega_c} = \frac{\hbar}{m_e c} \frac{c}{\omega_c} = \lambda_{\text{Compton}} \tilde{\lambda}_{\text{cyclotron}}$$

Extension longitudinale

$$\langle z^2 \rangle = \frac{\hbar}{m_e \omega_3} (k + \frac{1}{2})$$

Energie cinétique $T = (\pi_x^2 + \pi_y^2 + \pi_z^2) / 2m_e$

$$\langle T \rangle = (n + \frac{1}{2}) \hbar \omega_c' \frac{\omega_c'}{\omega_c} + (k + \frac{1}{2}) \hbar \omega_3 \frac{1}{2} + (s + \frac{1}{2}) \hbar \omega_m \frac{\omega_m}{\omega_c}$$

Energie potentielle $V = \frac{m_e \omega_3^2}{2} [z^2 - \frac{x^2 + y^2}{2}]$

$$\langle V \rangle = -(n + \frac{1}{2}) \hbar \omega_c' \frac{\omega_m}{\omega_c} + (k + \frac{1}{2}) \hbar \omega_3 \frac{1}{2} - (s + \frac{1}{2}) \hbar \omega_m \frac{\omega_c'}{\omega_c}$$

Discussion physique (22)

- Dans l'état $|n\rangle$, l'énergie du mouvement cyclotron est surtout cinétique. L'énergie potentielle représente une petite correction < 0

- Pour le mouvement magnétron, c'est l'inverse. Dans l'état $|s\rangle$, l'énergie est surtout potentielle et négative, l'énergie cinétique représentant une petite correction > 0

Quand le nombre quantique s augmente, le rayon de l'orbite magnétron augmente comme \sqrt{s} , $\langle V \rangle$ prend des valeurs de plus en plus négatives, $\langle T \rangle$, qui est positif, augmente très lentement, l'énergie globale $\langle T \rangle + \langle V \rangle$ étant de plus en plus négative

Mouvement magnétron instable (plus exactement métastable)

Que faut-il mesurer pour obtenir l'anomalie a_e ? (23)

Détermination expérimentale des 3 fréquences

$$\omega_c' \quad \omega_a' \quad \omega_3$$

En déduire

$$\omega_c = \omega_c' + \frac{\omega_c - \omega_c'}{\delta_e} = \omega_c' + \frac{\omega_3^2}{2\omega_c'}$$

$$\omega_a - \omega_c = \omega_a - \omega_c' + \omega_c' - \omega_c = \omega_a' - \frac{\omega_3^2}{2\omega_c'}$$

$$\hookrightarrow a_e = \frac{\omega_a}{\omega_c} = \frac{\omega_a' - \frac{\omega_3^2}{2\omega_c'}}{\omega_c' + \frac{\omega_3^2}{2\omega_c'}}$$

Mesure de contrôle

Mesurer ω_m et vérifier que

$$\omega_m = \frac{\omega_3^2}{2\omega_c'}$$

Si non, défauts dans le piège

Piège idéal (24)

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{2} m_e \omega_3^2 (z^2 - \frac{x^2 + y^2}{2}) = \frac{1}{2} m_e \omega_3^2 (\frac{3z^2}{2} - \frac{r^2}{2}) \approx r^2 Y_2^0(\theta, \varphi)$$

\vec{B}_0 aligné suivant Oz et uniforme

Piège de Penning imparfait

1. Termes supplémentaires dans V

$$(\sum_{l \neq 2} \sum_m + \sum_{l=2, m \neq 0}) A_{lm} (\frac{r}{3_0})^l Y_l^m(\theta, \varphi)$$

- Valeurs de l autres que $l=2$
- Pour $l=2$, valeurs de m autres que $m=0$ (pas de symétrie de révolution autour de Oz)

2. Défauts sur \vec{B}_0

- Champ \vec{B}_0 non orienté sur un axe de symétrie de V
- Champ \vec{B}_0 non homogène

Problème

Est-il néanmoins possible de déterminer a_e ?

Potentieux multipolaires $l \neq 2$ (25)

Termes en l de l'ordre de $(r/3_0)^l$
 r : extension de la zone occupée par e^-
 $r/3_0 < 10^{-2} \rightarrow$ Décroissance rapide avec l

Terme $l=0$ Constante inobservable

Termes $l=1$
 Champ électrique uniforme

On prend pour nouvelle origine le point où $\vec{E} = \vec{0}$

De toute façon, les termes impairs $l=1, 3, 5, \dots$ sont très petits si le piège n'est pas trop dissymétrique: vis à vis de l'inversion / 0

Termes pairs $l=4, 6, \dots$

Introduisent des anharmonicités que l'on peut observer et utiliser pour éliminer ces termes au moyen d'électrodes de compensation

Termes $l=2, m \neq 0$ (26)

L'ensemble des termes $l=2$, avec $-2 \leq m \leq 2$ peut être réécrit

$$V = \frac{1}{2} \sum_{k,l} A_{kl} x_k x_l$$

avec $A_{kl} = A_{lk}$, $\text{Tr}(A) = 0$ (car $\Delta V = 0$)

Diagonalisation de (A)

$$V = \frac{1}{2} m_c \omega_3^2 \left[z^2 - \frac{1}{2}(1+\epsilon)x^2 - \frac{1}{2}(1-\epsilon)y^2 \right]$$

On ne gardera que ces termes $l=2$. Les défauts de V sont alors décrits par un seul paramètre ϵ

Défauts de \vec{B}

- Inhomogénéité de \vec{B} négligeable sur l'étendue de la zone occupée
- Par contre, \vec{B} peut être désaligné vis à vis des axes principaux du potentiel V

$$\vec{B} \begin{cases} B_z = B_0 \cos \theta \\ B_x = B_0 \sin \theta \cos \varphi \\ B_y = B_0 \sin \theta \sin \varphi \end{cases} \quad \begin{matrix} 2 \text{ angles} \\ \theta, \varphi \end{matrix}$$

Mouvement classique dans le (27)

piège imparfait ($\epsilon, \theta, \varphi$)

$$m_c \ddot{\vec{r}} = -q \vec{\nabla} V + q \dot{\vec{r}} \times \vec{B}$$

- Comme $\vec{\nabla} V$ est linéaire en \vec{r} et que \vec{B} est indépendant de \vec{r} , 3 équations différentielles linéaires homogènes du 2^{ème} ordre

- Recherche de solutions de la forme $\vec{r} = \vec{r}_0 e^{-i\omega t}$

\hookrightarrow 3 équations algébriques, linéaires et homogènes en x_0, y_0, z_0

- Fréquences ω du mouvement déterminées par

Déterminant de ce système = 0

Etude quantique

Même résultat car l'hamiltonien est une fonction quadratique des x_i et p_j (oscillateurs couplés)

\hookrightarrow 3 modes normaux de vibration

Les 3 nouvelles fréquences $\bar{\omega}_c, \bar{\omega}_3, \bar{\omega}_m$ (28)

L'annulation du déterminant donne une équation du 3^{ème} degré en ω^2 (Si ω est solution, $-\omega$ l'est aussi)

Si ϵ et θ petits, 3 racines réelles $\bar{\omega}_c^2, \bar{\omega}_3^2, \bar{\omega}_m^2$ proches de $\omega_c'^2, \omega_3^2, \omega_m^2$ (qui correspondent à $\epsilon = \theta = 0$)

$$\bar{\omega}_c^2 \gg \bar{\omega}_3^2 \gg \bar{\omega}_m^2$$

Fonctions symétriques des racines

$$\bar{\omega}_c^2 \bar{\omega}_3^2 \bar{\omega}_m^2 = \frac{1}{4} \omega_3^6 (1 - \epsilon^2)$$

$$\bar{\omega}_c^2 \bar{\omega}_3^2 + \bar{\omega}_c^2 \bar{\omega}_m^2 + \bar{\omega}_3^2 \bar{\omega}_m^2 =$$

$$\omega_c^2 \omega_3^2 \left[1 - \frac{3}{2} \sin^2 \theta - \frac{1}{2} \epsilon \sin^2 \theta \cos 2\varphi \right]$$

$$- \frac{3}{4} \omega_3^4 \left(1 + \frac{1}{3} \epsilon^2 \right)$$

$$\boxed{\bar{\omega}_c^2 + \bar{\omega}_3^2 + \bar{\omega}_m^2 = \omega_c^2}$$

ω_c est toujours donné par

$$\omega_c = - \frac{q B_0}{m_c}$$

Comparaison avec le piège parfait (29)

- A partir de $\bar{\omega}_c$ et $\bar{\omega}_3$ formons
$$\bar{\delta}_e = \frac{\bar{\omega}_3^2}{2\bar{\omega}_c}$$
- $\bar{\delta}_e$ reste une très bonne approximation pour $\omega_c - \bar{\omega}_c$ [Pour le piège parfait on a $\delta_e = \omega_c - \omega'_c$]
Par développement limité, on obtient en effet
$$\omega_c - \bar{\omega}_c = \bar{\delta}_e \left[1 + \frac{9}{8} \frac{\bar{\omega}_3^2}{\bar{\omega}_c^2} \left(\theta^2 - \frac{2}{9} \epsilon^2 \right) \right] + \dots$$

 $\sim 10^{-6}$ $\nearrow \frac{\bar{\omega}_3^2}{\bar{\omega}_c^2}$ $\nwarrow \left(\theta^2 - \frac{2}{9} \epsilon^2 \right)$ $\sim 10^{-4}$
- Les défauts θ^2 et ϵ^2 , typiquement de l'ordre de 10^{-4} , apparaissent avec le facteur $\bar{\omega}_3^2 / \bar{\omega}_c^2 \approx 10^{-6} \ll 1$
- Par contre, $\bar{\delta}_e$ diffère en général beaucoup de $\bar{\omega}_m$ (alors que pour le piège parfait $\delta_e = \omega_m$)
Les asymétries sont mieux moyennées par les mouvements cyclotron et vibration que par le mouvement magnétron

Comment déterminer a_e ? (30)

- La fréquence de Larmor du spin reste
$$\omega_L = \frac{g}{2} \omega_c = (1 + a_e) \omega_c$$
- On peut mesurer expérimentalement $\bar{\omega}_c, \bar{\omega}_3, \bar{\omega}_a = \omega_L - \bar{\omega}_c, \bar{\omega}_m$
- Puis en déduire ω_c par
$$\omega_c^2 = \bar{\omega}_c^2 + \bar{\omega}_3^2 + \bar{\omega}_m^2$$
- La détermination précédente de ω_c est exacte. On peut aussi se contenter de
$$\omega_c \approx \bar{\omega}_c + \bar{\delta}_e = \bar{\omega}_c + \frac{\bar{\omega}_3^2}{2\bar{\omega}_c}$$
 (termes correctifs très petits)
- De $\bar{\omega}_c, \bar{\omega}_a, \omega_c$, on tire alors
$$a_e = \frac{\omega_a}{\omega_c} = \frac{\bar{\omega}_a - (\omega_c - \bar{\omega}_c)}{\bar{\omega}_c + (\omega_c - \bar{\omega}_c)}$$
- Il est toujours intéressant de comparer $\bar{\omega}_m$ et $\bar{\delta}_e$ pour évaluer l'importance des défauts du piège

Bibliographie

- § 1 c. Cohen-Tannoudji, B. Diu, F. Laloe, *Mécanique Quantique* Hermann 1973, Complément Ev1
- § 2 A.A. Sokolov, Yu G. Pavlenko *Optics Spectry* 22, 1 (1967)
G. Gräff, E. Klempt *Z. Naturforsch* 22a, 1960 (1967)
G. Gräff, E. Klempt, G. Werth *Z. Phys* 222, 201 (1969)
W. Itano, D. Wineland *Phys. Rev.* A25, 35 (1982)
- § 3 L.S. Brown, G. Gabrielse *Phys. Rev.* A25, 2423 (1982)

Introduction

Le but de ce chapitre est d'étudier les divers processus couplant l'électron dans le piège de Penning au monde extérieur, et introduisant ainsi un amortissement du mouvement de cet électron et un bruit.

Le vide dans l'enceinte est supposé, suffisant pour qu'on puisse négliger les collisions avec le gaz résiduel.

Le premier processus étudié est l'émission spontanée de rayonnement, qui n'est appréciable que pour le mouvement cyclotron (§1)

Un phénomène beaucoup plus important est lié aux charges induites par l'électron sur les électrodes. La variation de ces charges induites quand l'électron est en mouvement lent fait apparaître un courant dans les circuits extérieurs et par suite, une dissipation d'énergie par effet Joule dans les résistances de ces circuits, de même qu'un bruit associé aux fluctuations thermiques du voltage dans les résistances. Enfin, l'interaction de l'électron avec les charges qu'il induit sur les électrodes peut modifier légèrement ses fréquences propres. Ces divers effets sont étudiés qualitativement (§2), puis quantitativement (§3).

Plan

- ① Relaxation par émission spontanée de rayonnement
 - a - Amortissement radiatif du mouvement de la charge (1 à 3)
 - b - Amortissement radiatif du mouvement du spin (4)
- ② Couplage aux circuits électriques extérieurs. Etude qualitative
 - a - Charges induites par l'électron sur les coupelles (5)
 - b - Courant induit par le mouvement de vibration (6)
 - c - Amortissement du mouvement de vibration (7)
 - d - Déplacement de fréquence (8)
 - e - Fluctuations introduites sur le mouvement de vibration (9)
 - f - Couplages des mouvements cyclotron et magnétron (10 à 12)
- ③ Couplage aux circuits électriques extérieurs. Etude quantitative
 - a - Théorème d'électrostatique sur la variation des charges induites (13 à 14)
 - b - Charges induites sur l'électrode anneau (15)
 - c - Charges et courant induits sur les coupelles (16 à 17)
 - d - Calcul du déplacement de la fréquence de vibration (18 à 20)
 - e - Circuit électrique équivalent à l'électron vibrant le long de Oz (21 à 23)
 - f - Temps d'amortissement du mouvement de vibration (24)
 - g - Bruit de tension associé à la résistance du circuit extérieur (25 à 29)
 - h - Etendue du mouvement de vibration (30)

Amortissement radiatif du mouvement cyclotron (1)

- Energie rayonnée par unité de temps (sur une orbite de rayon ρ parcourue à $\omega'_c \approx \omega_c$)

$$\frac{dW}{dt} = \frac{2}{3c^3} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} (\ddot{\vec{r}})^2 = \frac{2}{3c^3} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \rho^2 \omega_c^4$$

- Energie de e^- sur cette orbite (essentiellement cinétique)

$$W = \frac{1}{2} m_e \omega_c^2 \rho^2$$

- Temps d'amortissement τ_c

$$\frac{1}{\tau_c} = \frac{1}{W} \frac{dW}{dt} = \frac{4}{3m_e c^3} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \omega_c^2$$

Valeur numérique

$$\omega_c / 2\pi = 51 \text{ GHz} \rightarrow \tau_c \approx 0.8 \text{ sec}$$

Temps suffisamment court pour que le mouvement cyclotron se mette en équilibre thermique avec le rayonnement à T^*K

Equilibre thermodynamique (2)

Enceinte du piège à $T = 4^*K$

$$\hookrightarrow \frac{\hbar \omega_c}{kT} = 0.61$$

Populations des niveaux n

$$P_n = e^{-n\hbar\omega_c/kT} [1 - e^{-\hbar\omega_c/kT}]$$

$$P_0 = 0.457 \quad P_1 = 0.248$$

$$P_3 = 0.135 \quad P_4 = 0.073$$

Seuls, les 4 premiers niveaux cyclotron sont appréciablement occupés

Ordre de grandeur de l'extension du mouvement cyclotron

$$\langle n | x^2 + y^2 | n \rangle = (2n+1) \frac{\hbar}{m_e \omega_c}$$

Rayon moyen

$$\left[\sum_n P_n \langle n | x^2 + y^2 | n \rangle \right]^{1/2} \approx 300 \text{ \AA}$$

Remarques

(i) Calcul de τ_c fait en évaluant l'énergie rayonnée dans l'espace libre

Or, l'électron est dans une "cavité" dont les dimensions ne sont pas grandes devant la longueur d'onde cyclotron $\lambda_{cycl} \approx 6 \text{ mm}$

Possibilité de modifications de τ_c dues à la cavité

(ii) $\lambda_{Magnétron} \gg$ Dimensions $\lambda_{Vibration} \gg$ de la cavité

Donc, très peu de rayonnement à ces fréquences sortant de la cavité. De toutes façons, même dans l'espace libre, on aurait

$$\tau_{Magnétron} \approx \left(\frac{\omega_c}{\omega_m}\right)^3 \tau_{cyclotron}$$

$$\tau_{Vibration} \approx \left(\frac{\omega_c}{\omega_3}\right)^2 \tau_{cyclotron}$$

"Amortissement" tout à fait négligeable

Amortissement radiatif de la precession de Larmor du spin (4)

Calcul dans l'espace libre par la règle d'or de Fermi

$$\frac{1}{\tau_{spin}} = \frac{2\pi}{\hbar} \frac{q^2 \hbar^2}{4m^2 c^2} \frac{1}{2\epsilon_0 L^3} \frac{8\pi}{3} \frac{\omega_c^2 L^3}{\hbar c^3 (2\pi)^3} \rho(E_f = E_i)$$

$$\approx \frac{1}{\tau_{cyclotron}} \frac{\hbar}{m_e c} \frac{\omega_c}{c}$$

$$\hookrightarrow \tau_{spin} \approx \tau_{cyclotron} \frac{\tau_{cyclotron}}{\lambda_{Compton}} \approx 3 \cdot 10^9$$

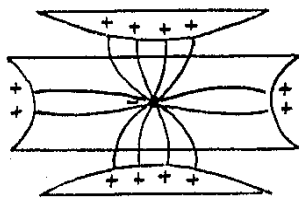
Amortissement radiatif tout à fait négligeable pour le spin

Finalement, la "relaxation radiative" n'est appréciable que pour le mouvement cyclotron

Charges induites sur les coupelles en fonction de la position de e⁻ sur O₃ (5)

Etat 1

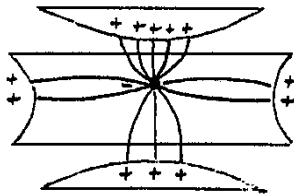
Electron (q < 0) au centre du piège (z = 0)



Charges positives égales induites sur les 2 coupelles (et aussi sur l'anneau)

Etat 2

Electron sur O₃ (z > 0) Plus proche de la coupelle supérieure



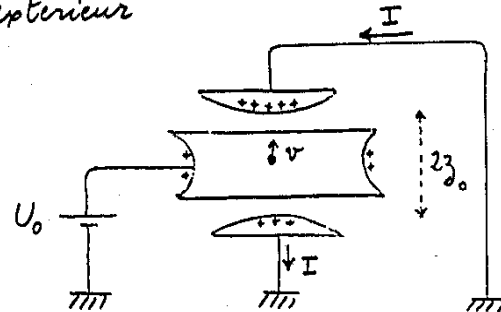
Plus de lignes de champ vont vers la coupelle supérieure que vers la coupelle inférieure. La charge de la coupelle supérieure augmente, celle de la coupelle inférieure diminue

Electron en mouvement lent le long de O₃ (6)

Vibration axiale à la fréquence $\frac{\omega_z}{2\pi}$
 Mouvement lent car la période $2\pi/\omega_z$ est grande devant $2z_0/c$

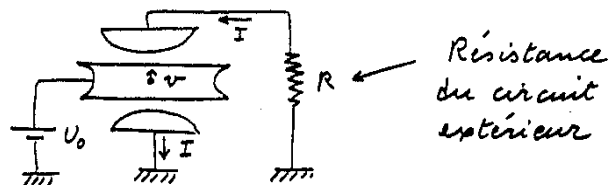
Régime quasi-statique

Chaque coupelle se charge et se décharge alternativement en opposition de phase avec l'autre
 → Un courant I alternatif passe de l'une à l'autre dans le circuit extérieur



Conséquences du couplage au circuit extérieur (7)

① Amortissement



Le courant I, circulant dans R, provoque un effet Joule
 L'énergie ainsi dissipée est prise sur l'énergie du mouvement de e⁻ qui donne naissance à I
 Comme l'émission spontanée et les collisions sont négligeables, la dissipation dans R est le seul processus d'amortissement du mouvement de vibration

② Déplacement de fréquence (8)

L'électrode dont l'électron se rapproche l'attrie plus que celle dont il s'éloigne car, d'une part elle est plus proche, d'autre part elle porte une charge induite positive plus grande

Il apparaît ainsi une force globale due aux charges induites, proportionnelle à z (pour z << z₀) et de signe opposé à une force de rappel.

La fréquence de vibration doit donc être légèrement diminuée par suite des charges induites

Remarque : Ne pas confondre les charges induites par q et les charges produites par la d.d.p. U₀, responsables de la force de rappel $-m\omega_z^2 z$

③ Fluctuations

- La résistance R, couplée à un thermostat T, est le siège de courants fluctuants
- On peut associer à R une source de voltage fluctuant qui, appliqué entre les 2 coupelles, fait apparaître une force aléatoire agissant sur e⁻

Théorème de Nyquist

Lien entre fluctuations et dissipation

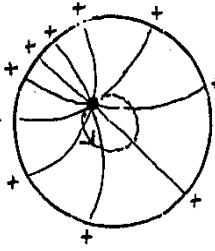
- Compétition entre l'amortissement du mouvement de e⁻ par dissipation dans R et l'échauffement produit par la force aléatoire.

Atteinte d'un régime d'équilibre thermodynamique à T°K

⑨ Couplage des mouvements cyclotron et magnétron aux électrodes ⑩

- Ce sont les charges induites sur l'électrode anneau qui jouent alors un rôle important.

Ces charges, positives, sont plus nombreuses au point le plus proche de l'électron et tournent en même temps que lui



Les courants associés au mouvement de rotation de e⁻ circulent dans la seule électrode

anneau, la résistance négligeable. Amortissement négligeable

Déplacement de fréquence ⑪

- Augmentation de la force centrifuge (attraction de e⁻ par les charges > 0 qu'il induit sur la partie de l'électrode dont il est le plus proche).

- Effet équivalent à une augmentation du potentiel quadrupolaire en $-m\omega_z^2(x^2+y^2)/4$ produit par U₀

$\omega_z \rightarrow \omega_z + \Delta\omega_z$

$\Delta\omega_z$ du même ordre (au signe près) que la variation de fréquence $\Delta\omega_z$ du mouvement axial

- Comme $\omega'_c = \omega_c - \frac{\omega_z^2}{2\omega_c}$

$\Delta\omega'_c \approx -\frac{\omega_z}{\omega_c} \Delta\omega_z$

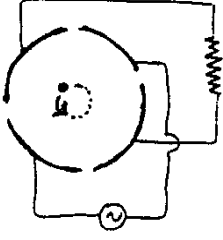
Effet plus petit que sur la fréquence de vibration axiale par un facteur $\frac{\omega_z}{\omega_c}$

Autre montage possible ⑫

Electrode anneau coupée en plusieurs secteurs (par exemple 4 quadrants). Un courant circule alors dans le circuit reliant 2 secteurs opposés, et qui peut contenir des résistances).

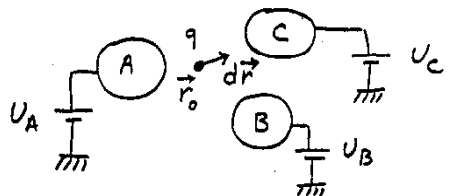
Montage utilisé pour des fréquences cyclotron plus basses, par exemple pour des ions ($\omega_c \sim \frac{1}{m}$)

On utilise alors 2 quadrants opposés pour l'excitation, les 2 autres pour la détection



Problème d'électrostatique (13)

Soient n conducteurs A, B, C, \dots à des potentiels U_A, U_B, U_C, \dots . Une charge q est placée en \vec{r}_0 . On attend l'équilibre



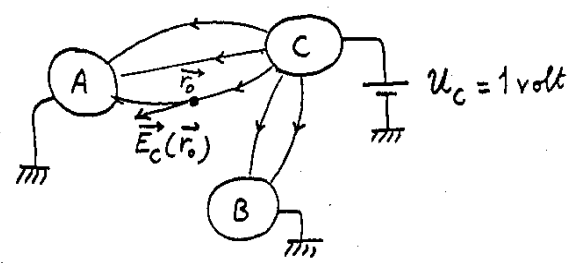
On déplace la charge de \vec{r}_0 à $\vec{r}_0 + d\vec{r}$ et on attend le nouvel équilibre. Les charges portées par A, B, C, \dots ont varié de dq_A, dq_B, dq_C, \dots

Peut-on exprimer dq_A, dq_B, dq_C, \dots en fonction de q et $d\vec{r}$?

On démontre que

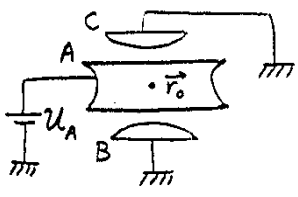
$$dq_C = q d\vec{r} \cdot \vec{E}_C(\vec{r}_0) / U_C$$

où $\vec{E}_C(\vec{r}_0)$ est le champ qui existerait en \vec{r}_0 , en l'absence de la charge q , et si tous les conducteurs étaient au potentiel nul sauf le conducteur C au potentiel $U_C = 1$ volt. Par exemple,



$\vec{E}_A(\vec{r}_0), \vec{E}_B(\vec{r}_0), \vec{E}_C(\vec{r}_0), \dots$ ne dépendent que de la géométrie et non des potentiels U_A, U_B, U_C, \dots effectivement appliqués. dq_A, dq_B, dq_C, \dots ne dépendent donc que de la géométrie et de $d\vec{r}$, et non de U_A, U_B, U_C, \dots

Application au piège de Penning (15)



$U_A = 1$
 $U_B = U_C = 0$
 \vec{r}_0 : Centre du piège
 $(x_0 = y_0 = z_0 = 0)$

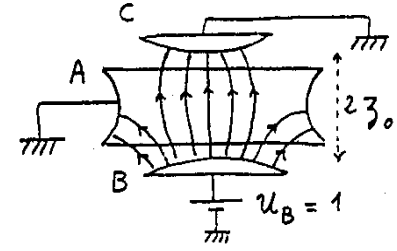
Expression de dq_A

Par définition même, \vec{E}_A est le champ créé par le potentiel quadripolaire du piège de Penning en $z^2 - (x^2 + y^2)/2$. \vec{E}_A étant nul au centre, on a $dq_A = 0 \neq d\vec{r}$

Un déplacement quelconque de \vec{r}_0 à partir du centre $\vec{r}_0 = \vec{0}$, ne change donc pas la charge globale portée par l'électrode anneau A . Il peut y avoir néanmoins un réarrangement de ces charges

Variation des charges des coupelles pour un mouvement de vibration (16)

- Mouvement de vibration $d\vec{r}$ parallèle à Oz $\{0, 0, dz\}$
- Symétrie du problème $\vec{E}_B(\vec{r}_0) = -\vec{E}_C(\vec{r}_0) \rightarrow dq_B = -dq_C$
- Définition de \vec{E}_B



Si B et C formaient un condensateur plan, de séparation $2z_0$, et si A n'existait pas, on aurait

$$\vec{E}_B(\vec{r}_0) = \frac{U_B}{2z_0}$$

Expression de \vec{E}_B (17)

Comme les lignes de champ sont moins resserrées en \vec{r}_0 , et que certaines vont vers A, on a

$$\vec{E}_B(\vec{r}_0) = \alpha \frac{U_B}{2z_0}$$

α : Coefficient sans dimension, plus petit que 1, dépendant de la géométrie

Calcul de $dq_B = -dq_C$

$$dq_B = q d\vec{r} \cdot \frac{\vec{E}_B(\vec{r}_0)}{U_B} = \alpha q \frac{dz}{2z_0}$$

Courants arrivant en B et C

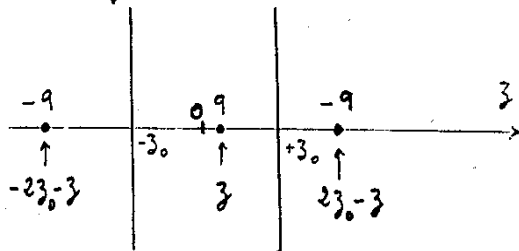
$$I_B = -I_C = \frac{dq_B}{dt} = \alpha q \frac{dz}{2z_0} \frac{dz}{dt} = \alpha \frac{qv}{2z_0}$$

Courants proportionnels à la charge q , à la vitesse v de cette charge, et inversement proportionnels à l'espacement $2z_0$.

Calcul approché du déplacement de fréquence (18)

- Le déplacement de fréquence provient de l'interaction de e^- avec le champ produit par les charges induites par e^- sur les électrodes (effet non pris en compte dans le cours II)

- Calcul approximatif de ce déplacement en remplaçant les 2 coupelles par un condensateur plan et en utilisant la méthode des images électriques



Effet des deux premières images électriques (19)

Si l'électron se déplace de z le long de Oz , ces 2 images sont en $2z_0/z$ et $-2z_0/z$

Force exercée sur la charge q

$$F = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{[2(z_0 - z)]^2} - \frac{1}{[2(z_0 + z)]^2} \right]$$

$$= \frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 z_0^2} \left[\frac{1}{(1 - \frac{z}{z_0})^2} - \frac{1}{(1 + \frac{z}{z_0})^2} \right]$$

$$\approx \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 z_0^3} z \quad \text{si } z \ll z_0$$

L'effet de toutes les autres images électriques revient à multiplier l'expression précédente par

$$\left(1 + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{7^3} + \dots \right)$$

Force totale agissant sur e^- (20)

$$F = -m_e \omega_z^2 z + \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 z_0^3} z$$

Force de rappel du piège produite par U_0

Force due aux charges induites par e^-

$$F = -m_e \omega_z^2 \left[1 - \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 m_e z_0^3 \omega_z^2} \right] z$$

Variation de fréquence

$$\frac{\delta\omega_z}{\omega_z} = - \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 m_e z_0^3 \omega_z^2}$$

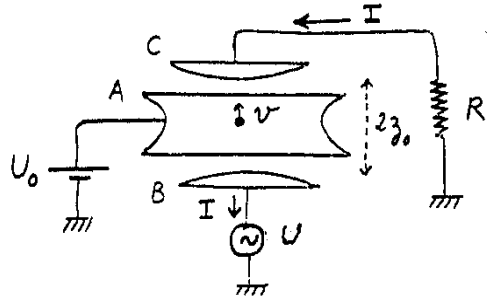
Application numérique

$$\omega_z / 2\pi = 60 \text{ MHz} \quad 2z_0 = 6,7 \text{ mm}$$

$$\rightarrow \frac{\delta\omega_z}{\omega_z} \approx -6 \cdot 10^{-9}$$

Effet négligeable

Circuit équivalent à l'électron (21)



Une tension U est appliquée entre B et C. Le champ qu'elle crée met l'électron en mouvement, ce qui donne alors naissance à un courant $I = \alpha \frac{qV}{2z_0}$ dans le circuit extérieur contenant la résistance R

Problème : Relier I à U et déterminer l'impédance équivalente à l'électron

Force totale agissant sur l'électron

$$F = -m_e \omega_3^2 z + q \alpha \frac{(U - RI)}{2z_0} \quad (22)$$

Force de rappel due à U_0 Force électrique due à la tension entre B et C associée à U (voir transparent 17 pour l'apparition de α)

On néglige la force due aux charges induites par e^- , dont le seul effet est de faire varier ω_3

Equation de la dynamique

$$m_e \ddot{z} = -m_e \omega_3^2 z + q \alpha \frac{U - RI}{2z_0}$$

De $\dot{z} = \frac{2z_0}{\alpha q} I$ et $z = \frac{2z_0}{\alpha q} \int I dt$

on déduit alors

$$U = \ell \dot{I} + \frac{1}{C} \int I dt + RI$$

avec $\ell = \frac{4 m_e z_0^2}{\alpha^2 q^2}$ $C = \frac{1}{\ell \omega_3^2}$

L'électron est équivalent à un circuit ℓC série, résonnant à ω_3

Ordre de grandeur de ℓ

$\alpha = 0,5$ $2z_0 = 6,7 \text{ mm}$

$\ell = 6400 \text{ Henry}$
Valeur considérable

Equivalence des énergies

$$\frac{1}{2} \ell I^2 \longleftrightarrow \frac{1}{2} m_e v^2$$

$$\frac{1}{2C} \left(\int I dt \right)^2 \longleftrightarrow \frac{1}{2} m_e \omega_3^2 z^2$$

Cas d'un nuage de N électrons

On ne s'intéresse qu'au mouvement du centre de masse

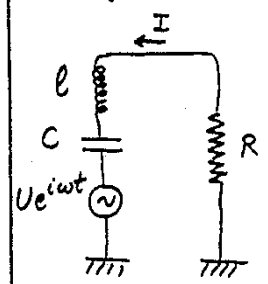
$m \rightarrow N m$ $q \rightarrow N q$

$$\ell = \frac{4 m_e z_0^2}{\alpha^2 q^2} \longrightarrow \frac{\ell}{N}$$

$$C = \frac{1}{\ell \omega_3^2} \longrightarrow N C$$

(23)

Largeur de la résonance (24)



$$I = \frac{U e^{i\omega t}}{R + j(\ell\omega - \frac{1}{C\omega})}$$

$$\ell C \omega_3^2 = 1$$

Au voisinage de $\omega = \omega_3$

$$|I|^2 = \frac{|U|^2}{R^2 + 4\ell^2(\omega - \omega_3)^2}$$

↳ Largeur

à mi-hauteur $\Delta\omega = \frac{R}{\ell}$

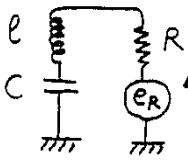
Temps d'amortissement du mouvement de vibration

$$\tau_{\text{vibration}} = \frac{\ell}{R} = \frac{4 m_e z_0^2}{\alpha^2 q^2 R}$$

Application numérique

$R = 10^5 \Omega \rightarrow \tau_{\text{vibration}} = 0,06 \text{ sec}$

Bruit introduit par la résistance R à la température T (25)



$e_R(t)$: Tension aléatoire associée à R et décrivant le bruit introduit par les mécanismes responsables de la dissipation dans R

$e_R(t)$: Fonction aléatoire stationnaire de temps de corrélation τ_c très court $\tau_c \ll \gamma^{-1}$

Densité spectrale $J_R(\omega)$ de $e_R(t)$

Transformée de Fourier de la fonction de corrélation de $e_R(t)$

$$J_R(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau e^{-i\omega\tau} \overline{e_R(t)e_R(t+\tau)}$$

Fonction paire de ω , variant très lentement à l'échelle de γ^{-1}

Intérêt de la densité spectrale (26)

$$\overline{e_R(t)e_R(t+\tau)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega e^{i\omega\tau} J_R(\omega)$$

Le bruit de tension vaut $\overline{e_R(t)^2}$

$$\overline{e_R(t)^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega J_R(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\nu J_R(\omega) = 2 \int_0^{\infty} d\nu J_R(\omega) \quad (\text{car } J_R \text{ est paire})$$

$2J_R(\omega)d\nu$ représente la contribution de l'intervalle spectral $\nu - \nu + d\nu$ au bruit de tension $\overline{e_R(t)^2}$

Méthode heuristique suivie ici pour déterminer $J_R(\omega)$

Soit $I(t)$ le courant aléatoire stationnaire produit par $e_R(t)$

On écrit que le système parvient à l'équilibre thermodynamique à T

$$\frac{1}{2} \ell \overline{I(t)^2} = \frac{1}{2} kT$$

$$\frac{1}{2C} \left(\int I dt \right)^2 = \frac{1}{2} kT \quad (\text{si } \hbar\omega_3 \ll kT)$$

Equation du circuit (27)

$$e_R(t) = \ell \dot{I}(t) + \frac{1}{C} \int I dt + RI(t)$$

$\tilde{e}_R(\omega)$ } Transformées de Fourier de $\{ e_R(t) \}$
 $\tilde{I}(\omega)$ } de Fourier de $\{ I(t) \}$

$$\tilde{I}(\omega) = \frac{\tilde{e}_R(\omega)}{Z(\omega)} \quad Z(\omega) = R + i\ell\omega + \frac{1}{iC\omega}$$

Densité spectrale $J_I(\omega)$ de $I(t)$

La densité spectrale d'une fonction aléatoire stationnaire est proportionnelle au carré du module de la transformée de Fourier de cette fonction (Wiener-Khintchine)

$$\hookrightarrow J_I(\omega) = J_R(\omega) / |Z(\omega)|^2$$

Comme $1/|Z(\omega)|^2$ n'est important qu'au voisinage de $\omega = \pm\omega_3$ et que $\tau_c^{-1} \gg \gamma$, on a (pour $\omega > 0$)

$$J_I(\omega) = \frac{1}{R^2 + 4\ell^2(\omega - \omega_3)^2} J_R(\omega_3)$$

Bruit de courant $\overline{I(t)^2}$ (28)

$$\overline{I(t)^2} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\omega J_I(\omega) =$$

$$\frac{J_R(\omega_3)}{\pi} \int_0^{\infty} d\omega \frac{1}{R^2 + 4\ell^2(\omega - \omega_3)^2} = \frac{J_R(\omega_3)}{2R\ell}$$

Condition d'équilibre thermodynamique

$$\frac{1}{2} \ell \overline{I(t)^2} = \frac{1}{2} kT$$

$$\hookrightarrow J_R(\omega_3) = 2RkT$$

Même condition obtenue par

$$\frac{1}{2C} \left(\int I dt \right)^2 = \frac{1}{2} kT$$

Théorème de Nyquist ($\hbar\omega_3 \ll kT$)

$$\overline{e_R(t)^2} = \int_0^{\infty} d\nu 2J_R(\omega)$$

Densité de bruit de tension dans $\nu - \nu + d\nu$

$$4RkT d\nu$$

Puissance de bruit $\frac{\overline{e_R^2}}{R}$ dans $\nu - \nu + d\nu$

$$4kT d\nu$$

Cas des températures très basses (29)

D'après la correspondance des énergies (Transparent 23), $\frac{1}{2} e \bar{I}^2 + \frac{1}{2C} (\int I dt)^2$ représente l'énergie moyenne de l'oscillateur harmonique associé à la vibration axiale en équilibre à T

Si kT n'est pas grand devant $\hbar\omega_3$, cette énergie moyenne vaut

$$\frac{\hbar\omega_3}{2} + \frac{\hbar\omega_3}{e^{\hbar\omega_3/kT} - 1} = \frac{\hbar\omega_3}{2} \coth \frac{\hbar\omega_3}{2kT}$$

La méthode heuristique suivie ici consiste à évaluer $2 \frac{1}{2} e \bar{I}^2$ à cette énergie. On obtient alors

$$2 J_R(\omega) = 4R \frac{\hbar\omega}{2} \coth \frac{\hbar\omega}{2kT}$$

qui se réduit à

$$2 J_R(\omega) = 4RkT \text{ pour } \hbar\omega \ll kT$$

mais devient

$$2 J_R(\omega) = 2R\hbar\omega \text{ pour } \hbar\omega \gg kT$$

Etendue du mouvement de vibration axiale (30)

Au bout d'un temps de l'ordre de γ^{-1} , le mouvement de vibration axiale atteint l'équilibre thermodynamique à la température T de la résistance R

Si $kT \gg \hbar\omega_3$, on a

$$\frac{1}{2} m_e \omega_3^2 \bar{z}^2 = \frac{1}{2} kT$$

$$\hookrightarrow \sqrt{\bar{z}^2} = \sqrt{\frac{kT}{m_e \omega_3^2}}$$

Application numérique

$$T = 4^\circ \quad \omega_3 / 2\pi = 60 \text{ MHz}$$

$$\frac{\hbar\omega_3}{kT} = 7.5 \cdot 10^{-4} \ll 1$$

$$\sqrt{\bar{z}^2} = 0.02 \text{ nm}$$

Références

1 - Couplage de l'électron aux circuits externes

D.J. WINELAND, H.G. DEHMELT *Journal of Applied Physics* 46, 919 (1975)

2 - Démonstration du théorème d'électrostatique du § 3 a

M.D. SIRKIS, N. HOLONYAK JR *Am. J. Physics* 34, 943 (1966)

3 - Lien entre fluctuations et dissipation

P. MARTIN "Many Body Physics" Les Houches 67
(eds C. De Witt et Balian Gordon and Breach 1968)

C. COHEN-TANNODJI Cours au Collège de France 1977-78

Introduction

Après avoir étudié les fréquences propres, les niveaux d'énergie et les couplages dissipatifs d'un électron dans un piège de Penning, nous abordons maintenant les diverses méthodes d'étude spectroscopique d'un tel système (mesure de ses fréquences de Bohr).

La vibration axiale à ω_z est la plus simple à exciter et à détecter (§1). Elle permet notamment l'observation d'un électron unique piégé.

Une méthode simple pour étudier les autres mouvements (cyclotron, magnétron et de spin), consiste à les coupler à la vibration axiale. L'idée générale d'une telle méthode, reposant sur l'utilisation d'une bouteille magnétique, est présentée au paragraphe 2, puis analysée quantitativement au paragraphe 3.

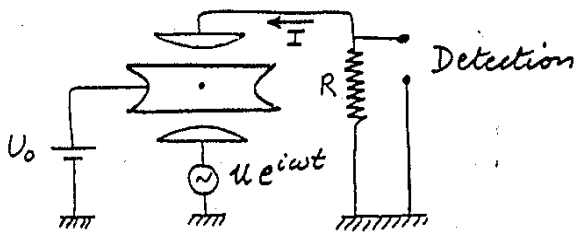
Plan

- ① Excitation et détection de la vibration axiale.
 - a - Schéma de principe (1 à 2)
 - b - Détection d'un électron unique piégé (3)
 - c - Améliorations du tube de Penning (4 à 6)
 - d - Exemple de résonance. Détection des variations de γ_z (7 à 8)
- ② Détection des autres résonances par couplage avec la vibration axiale. Principe de la méthode utilisant une bouteille magnétique (9 à 13)
- ③ Etude quantitative de la bouteille magnétique
 - a - Hamiltonien et principe du calcul (14 à 15)
 - b - Etude de la partie orbitale de la perturbation W introduite par la bouteille magnétique (16 à 20)
 - c - Etude de la partie de spin de W (21 à 22)
 - d - Récapitulation. Partie diagonale de l'hamiltonien global (23)
 - e - Premier effet de la bouteille magnétique : variation de la fréquence de vibration dépendant des autres nombres quantiques n, m, s (24 à 27)
 - f - Second effet de la bouteille magnétique : variation des fréquences cyclotron et de spin dépendant du nombre quantique de vibration k (28 à 29)
 - g - Troisième effet de la bouteille magnétique : contamination des fonctions d'onde (30)

Bibliographie : page IV-9

Excitation et détection de la vibration axiale

Schéma de principe



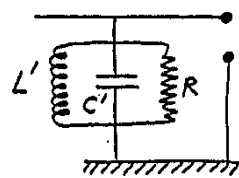
Une tension alternative $u e^{i\omega t}$ est appliquée entre les 2 coupelles et met en vibration forcé l'électron (ou les électrons) dans le piège

L'impédance du circuit l, c équivalent à l'électron (ou $l/N, Nc$ équivalent aux N électrons) et de la résistance R varie de manière résonnante avec $\omega - \omega_3$, sur une largeur $\Delta\omega = R/l$ (ou $\Delta\omega = NR/l$)

Ces variations résonnantes de I sont détectées sur le voltage aux bornes de R

(1) Impédance de détection

En fait, ce n'est pas une simple résistance R , mais un circuit parallèle L', C', R résonnant à ω_3



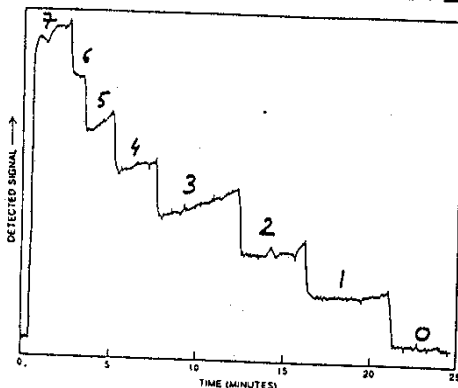
et de largeur beaucoup plus grande que celle du circuit l, c, R (ou $l/N, Nc, R$)

Détection du nombre d'électrons

Exactement à résonance, l'impédance du circuit l, c (ou $l/N, Nc$) est la même, et vaut zéro. Le signal ne dépend pas du nombre N d'électrons.

Par contre, comme la largeur de la résonance $\Delta\omega = NR/l$ dépend de N , le signal dépend de N si ω est légèrement différent de ω_3

Détection d'un électron unique



Les plateaux successifs du signal de détection correspondent à des nombres décroissants d'électrons 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0

L'amplitude de vibration est voisine de la valeur maximale tolérable, ce qui explique la perte des e^- . Pour une amplitude plus faible, l'électron peut rester piégé beaucoup plus longtemps

Figure extraite de (1). Voir aussi (2)

(3) Améliorations du tube de Penning

- Les premières résonances observées avaient une largeur trop grande
Explication: anharmonicité due aux termes $l > 2$ du potentiel.
 La fréquence de vibration dépend alors de l'amplitude de vibrations

- Construction de nouveaux pièges avec 2 électrodes supplémentaires permettant, par réglage de leur potentiel, de réduire appréciablement les termes $l > 2$ [voir (3)]

Autres améliorations

- Utilisation d'une source à émission de champ au lieu d'un filament chaud pour injecter les e^-
- $T = 4^\circ K$ au lieu de $77^\circ K$
- Ultravide
- Aimant supraconducteur

Allure du piège

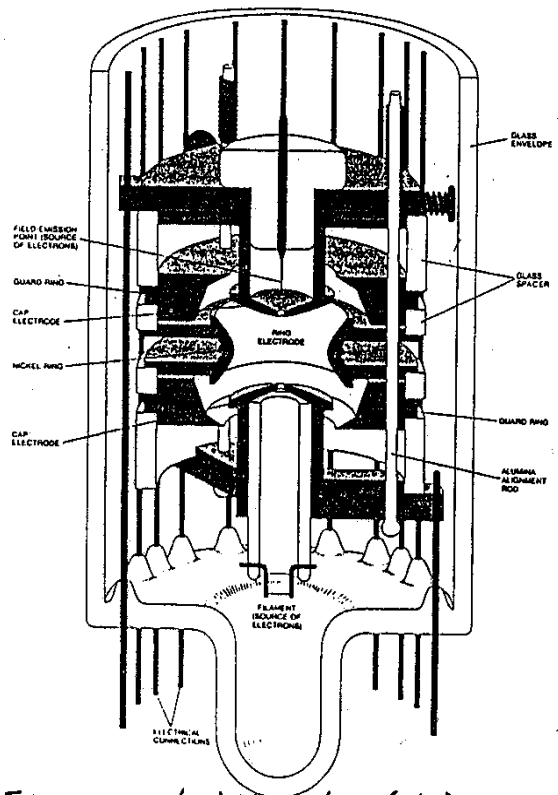


Figure extraite de (1)

(5) Principe du réglage des électrodes (6) de compensation

1^{ère} méthode

Observation de la position de la résonance des électrons et de son déplacement quand on augmente l'étendue du mouvement de vibration par injection d'un bruit blanc entre les coupelles

Réglage du potentiel des électrodes de compensation qui minimise un tel déplacement

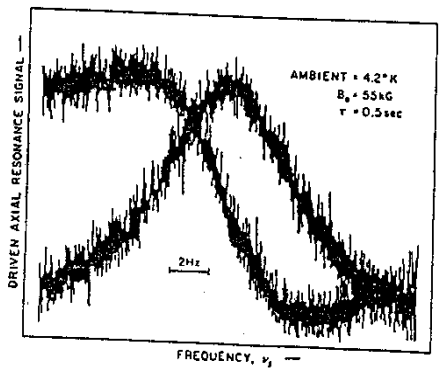
2^{ème} méthode

Rendre aussi fine que possible la résonance d'un seul électron

Des réductions par un facteur 100 de la largeur ont été ainsi obtenues [voir (3)]

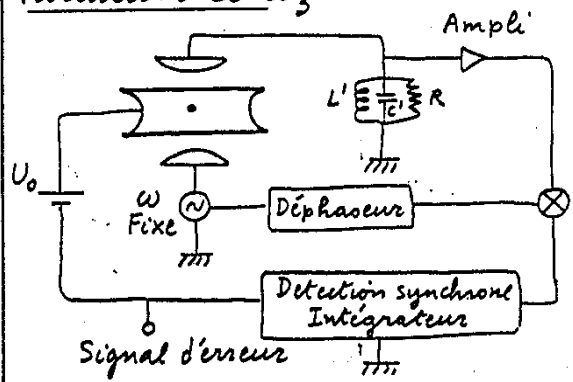
Exemple de résonance

Figure extraite de (4)



Utilisation d'une détection synchrone pour séparer les composantes en phase et en quadrature du signal

(7) Montage pour mesurer les (8) variations de ω_3



- Excitation à ω fixe
- Réglage en courbe de dispersion de la détection synchrone
- Verrouillage sur le centre de la résonance en ajoutant une tension d'erreur à U_0 (pour rendre ω_3 égal à la fréquence fixe ω)
- L'enregistrement du signal d'erreur donne les variations de $\omega_3 - \omega$

Comment détecter les autres résonances ? (9)

- Les mouvements cyclotron, magnétron, et de spin n'induisent pas de courant dans le circuit des coupelles.

- Idée d'une détection indirecte

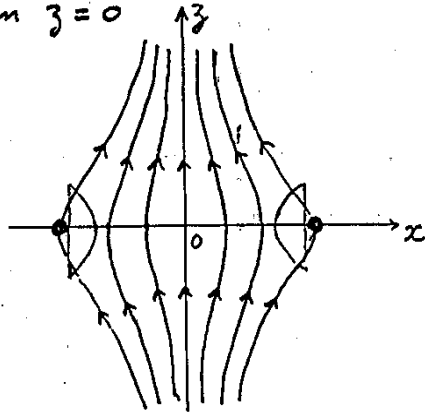
Couplage de ces mouvements au mouvement de vibration axiale, de manière qu'une variation des nombres quantiques cyclotron (n), magnétron (s) et de spin (m), se traduise par une variation de la fréquence axiale ω_z

Méthode utilisée

Champ magnétique inhomogène introduisant une énergie potentielle effective supplémentaire, variant en z^2 , et dépendant de n, m, s [voir (4)].

Bouteille magnétique (10)

Fil de nickel entouré autour de l'électrode anneau, qui attire les lignes de force du champ \vec{B}_0 et les rend moins resserrées autour de Oz dans le plan $z=0$



Sur l'axe Oz , le champ est plus petit en $z=0$ qu'en $z \neq 0$
Composante inhomogène en z^2

Composante inhomogène \vec{b} du champ magnétique (11)

$$\begin{cases} b_x(x, y, z) = -\eta z x \\ b_y(x, y, z) = -\eta z y \\ b_z(x, y, z) = \eta \left(z^2 - \frac{x^2 + y^2}{2} \right) \end{cases}$$

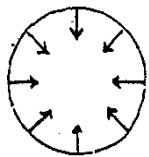
η : Constante de dimensions Tesla/m²

Ajouté au champ homogène \vec{B}_0 , un tel champ donne bien une configuration de bouteille magnétique

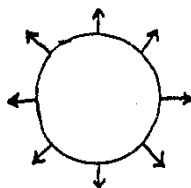
Il satisfait $\vec{\nabla} \cdot \vec{b} = 0$

Sur l'axe Oz ($x=y=0$), on a bien un champ en ηz^2

Dans un plan $z=z_0$, b_x et b_y forment un champ radial



$z = z_0 > 0$



$z = z_0 < 0$

Couplage du spin à un tel champ (12)

Pour simplifier, supposons que l'électron vibre sur l'axe Oz .

L'énergie de couplage de son moment magnétique avec \vec{b} s'écrit

$$-\frac{g}{2} \frac{q\hbar}{m_e} m \eta z^2$$

$m = \pm \frac{1}{2}$ Nombre quantique de spin

Cette énergie s'ajoute à l'énergie électrostatique $m_e \omega_z^2 z^2 / 2$ pour donner une énergie potentielle effective globale $m_e \omega_z'^2 z^2 / 2$ avec

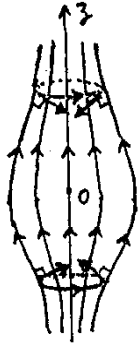
$$\omega_z'^2 = \omega_z^2 + g \frac{|q|\hbar}{m_e} \eta m$$

La nouvelle fréquence de vibration ω_z' n'est plus la même suivant que le spin est dans l'état $m = +\frac{1}{2}$ ou $m = -\frac{1}{2}$

Couplage au champ inhomogène des mouvements cyclotron et magnétron

En dehors de l'axe Oz, les lignes de champ sont inclinées par rapport à Oz, et la force de Lorentz, moyennée sur une orbite cyclotron, ou sur une fraction d'orbite magnétron (de façon que z varie peu), tend à ramener la particule vers z=0

Principe même du confinement par bouteille magnétique



Exemple d'une orbite cyclotron pure centrée sur Oz (rm=0 rc≠0)
La force de Lorentz, perpendiculaire aux lignes de champ est bien une force de rappel supplémentaire pour le mouvement sur Oz

Hamiltonien en l'absence de bouteille (Rappels du cours II)

$$H_0 = \frac{1}{2m_e} (\vec{p} - q\vec{A})^2 + q\phi - \frac{g}{2} \frac{q}{m_e} \vec{S} \cdot \vec{B}_0$$

$$\vec{A} = -\frac{1}{2} \vec{r} \times \vec{B}_0 \quad \phi = \frac{1}{2} m_e \omega_z^2 (z^2 - \frac{x^2+y^2}{2})$$

$$H_0 = \hbar \omega_c' (\tilde{N}_d + \frac{1}{2}) + \hbar \omega_z (N_z + \frac{1}{2}) - \hbar \omega_m (\tilde{N}_g + \frac{1}{2}) - \frac{g}{2} \frac{q}{m_e} \vec{S} \cdot \vec{B}_0$$

$$\vec{\pi} = m_e \vec{v} = \vec{p} - q\vec{A}$$

Hamiltonien en présence de bouteille

\vec{a} : potentiel vecteur dont dérive le champ inhomogène \vec{b}

\vec{a} et \vec{b} sont tous 2 d'ordre 1 en η

$$H = \frac{1}{2m_e} [\vec{p} - q\vec{A} - q\vec{a}]^2 + q\phi - \frac{g}{2} \frac{q}{m_e} \vec{S} \cdot (\vec{B}_0 + \vec{b})$$

$$= H_0 + W$$

A l'ordre 1 en η (et si $\vec{\nabla} \cdot \vec{a} = 0$)

$$W = \underbrace{-q \vec{a} \cdot \vec{v}}_{W_{orb}} - \underbrace{\frac{g}{2m_e} \vec{S} \cdot \vec{b}}_{W_{spin}}$$

Principe du calcul

- Calculer le déplacement produit par W au 1^{er} ordre sur les niveaux d'énergie $|n, m, k, s\rangle$ de H_0
- Calculer les nouvelles fréquences de Bohr associées aux transitions de vibration.

$|n, m, k, s\rangle \rightarrow |n, m, k+1, s\rangle$
et déterminer leur dépendance en n, m, s, introduite par W.

Analogie avec le couplage rotation-vibration des molécules

Termes de perturbation dans l'hamiltonien introduisant des corrections en $J(J+1)(v+\frac{1}{2})$ aux énergies des niveaux rovibroniques $|v, J\rangle$, et rendant la fréquence de vibration dépendante de J, et la fréquence de rotation dépendante de v

Etude de $W_{orb} = -q \vec{a} \cdot \vec{v}$

Choix d'une jauge pour \vec{a}

$$\vec{a}(\vec{r}) = - \int_0^1 u du \vec{r} \times \vec{b}(u\vec{r})$$

Généralisation à un champ inhomogène \vec{b} de la formule bien connue $\vec{A} = -\frac{1}{2} \vec{r} \times \vec{B}_0$ valable pour un champ uniforme \vec{B}_0

On peut vérifier sur cette expression que $\vec{\nabla} \times \vec{a} = \vec{b}$

Composantes de \vec{a} (déduites des expressions précédentes de \vec{a} et \vec{b})

$$\begin{cases} a_x(x, y, z) = -\frac{\eta}{2} [z^2 - \frac{x^2+y^2}{4}] y \\ a_y(x, y, z) = \frac{\eta}{2} [z^2 - \frac{x^2+y^2}{4}] x \\ a_z(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

On peut également vérifier directement sur ces expressions que $\vec{\nabla} \times \vec{a} = \vec{b}$, et aussi que $\vec{\nabla} \cdot \vec{a} = 0$

Expression de $W_{orb} = -q \vec{a} \cdot \vec{v}$ (17)

$$W_{orb} = -q(a_x v_x + a_y v_y + a_z v_z) = -\eta(z^2 - \frac{x^2+y^2}{4}) \frac{q}{2}(x v_y - y v_x)$$

On voit apparaître la composante z du moment magnétique orbital

$$\vec{M}^{orb} = \frac{q}{2} \vec{r} \times \vec{v}$$

$$W_{orb} = -\eta(z^2 - \frac{x^2+y^2}{4}) M_{z3}^{orb}$$

Remarque

$$W_{orb} \neq -b_3 M_{z3}^{orb} \quad \text{car}$$

$$b_3 = \eta(z^2 - \frac{x^2+y^2}{2}) \neq \eta(z^2 - \frac{x^2+y^2}{4})$$

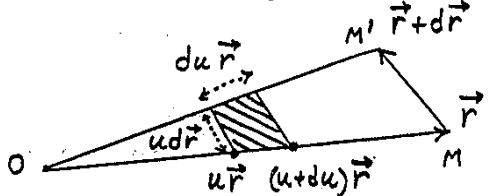
L'explication est que l'inhomogénéité du champ \vec{b} n'est pas négligeable sur l'étendue de l'orbite de e^-

L'hamiltonien d'interactions magnétique orbital est local vis à vis de \vec{a} , mais non local vis à vis de \vec{b}

Autre manière de voir la (18)

non-localité de W_{orb} vis à vis de \vec{b}

$$W_{orb} = -q \vec{a} \cdot \vec{v} = q \int_0^1 u du [\vec{r} \times \vec{b}(u\vec{r})] \cdot \vec{v} \\ = -q \int_0^1 u du (\vec{r} \times \vec{v}) \cdot \vec{b}(u\vec{r}) = -q \int_0^1 \frac{(\vec{r} du \times u d\vec{r}) \cdot \vec{b}(u\vec{r})}{dt}$$



Aire de la zone hachurée

$$|\vec{r} du \times u d\vec{r}|$$

Flux de \vec{b} à travers cette zone

$$d^2\phi = (\vec{r} du \times u d\vec{r}) \cdot \vec{b}(u\vec{r})$$

$$\hookrightarrow W_{orb} = -q \frac{d\phi}{dt}$$

$d\phi$: Flux de \vec{b} à travers la zone balayée par \vec{r} entre t et $t+dt$ (Triangle OMM'). Ce flux dépend de toutes les valeurs de \vec{b} dans cette zone

Partie intéressante de (19)

$$W_{orb} = -\eta(z^2 - \frac{x^2+y^2}{4}) \frac{q}{2}(x v_y - y v_x)$$

pour le problème étudié ici

① On s'intéresse à une modification de la fréquence de vibration axiale

Les variables de vibration axiale n'apparaissent que dans la 1^{ère} parenthèse (termes en z^2)

↳ Il est inutile de garder le terme en $-(x^2+y^2)/4$

② On fait un calcul de perturbation au 1^{er} ordre en W sur les énergies

↳ Seule importe la partie de W_{orb} diagonale dans la base $\{|n, m, k, s\rangle\}$

Enfinement, pour le problème étudié ici, il suffit de calculer

$$-\eta(z^2)_{diag} \left[\frac{q}{2}(x v_y - y v_x) \right]_{diag} \\ (M_{z3}^{orb})_{diag}$$

Calcul de $(z^2)_{diag}$ et $(M_{z3}^{orb})_{diag}$ (20)

Il suffit de partir des expressions de x, y, z, v_x, v_y , en fonction de $\tilde{a}_d, \tilde{a}_d^+, \tilde{a}_g, \tilde{a}_g^+, a_3, a_3^+$ (voir transparent 20 du cours II), et de ne garder dans les expressions de z^2 et M_{z3} que les termes diagonaux en $a_3^+ a_3 = N_3 = a_3 a_3^+ - 1$, $\tilde{a}_d^+ \tilde{a}_d = \tilde{N}_d = \tilde{a}_d \tilde{a}_d^+ - 1$, $\tilde{a}_g^+ \tilde{a}_g = \tilde{N}_g = \tilde{a}_g \tilde{a}_g^+ - 1$

Résultats du calcul

$$(z^2)_{diag} = \frac{\hbar}{m_e \omega_3} (N_3 + \frac{1}{2})$$

$$(M_{z3}^{orb})_{diag} = \frac{q}{m_e \tilde{\omega}_c} [\hbar \omega'_c (\tilde{N}_d + \frac{1}{2}) + \hbar \omega_m (\tilde{N}_g + \frac{1}{2})]$$

Partie intéressante de W_{orb}

$$\frac{\eta |q|}{m_e^2 \omega_3^2 \tilde{\omega}_c} \hbar \omega_3 (N_3 + \frac{1}{2}) \times \\ \times [\hbar \omega'_c (\tilde{N}_d + \frac{1}{2}) + \hbar \omega_m (\tilde{N}_g + \frac{1}{2})]$$

Etude de $W_{spin} = -g \frac{q}{2m} \vec{S} \cdot \vec{b}(\vec{r})$ (21)

Interaction du moment magnétique de spin de e^- avec le champ \vec{b} au point \vec{r} où se trouve e^- (L'interaction est ici locale car le moment magnétique de spin est très localisé)

On ne s'intéresse qu'à la partie diagonale de W_{spin}

$\rightarrow W_{spin} \rightarrow -g \frac{q}{2m} S_3 (b_3)_{diag}$

et on ne garde que le terme en z^2 dans b_3 , de manière à ne calculer que les termes couplant le spin à la vibration axiale

$\rightarrow -g \frac{q}{2m_e} S_3 \eta (z^2)_{diag} =$
 $\frac{g}{2} \frac{\eta |q|}{m_e^2 \omega_z^2 \tilde{\omega}_c} \hbar \omega_z (N_3 + \frac{1}{2}) \tilde{\omega}_c S_3$

Remarque

(22)

Que donneraient les termes en $x^2 + y^2$ de b_3 si on les gardait dans (Worb)diag et (Wspin)diag?

Ils donneraient des termes en $\tilde{N}_d \tilde{N}_g, \tilde{N}_d S_3, \tilde{N}_g S_3, \tilde{N}_d^2, \tilde{N}_g^2$

- couplant entre eux les mouvements cyclotron et magnétron (Termes en $\tilde{N}_d \tilde{N}_g$)
- couplant les mouvements cyclotron et magnétron au mouvement du spin (Termes $\tilde{N}_d S_3$ et $\tilde{N}_g S_3$)
- rendant légèrement anharmoniques les mouvements cyclotron et magnétron (Termes \tilde{N}_d^2 et \tilde{N}_g^2)

Re'capitulation

(23)

Partie diagonale de $H_0 + W$

$(\tilde{N}_d + \frac{1}{2}) \hbar \omega'_c + (N_3 + \frac{1}{2}) \hbar \omega_z$
 $-(\tilde{N}_g + \frac{1}{2}) \hbar \omega_m + \omega_L S_3$
 $+ \lambda \hbar \omega_z (N_3 + \frac{1}{2}) \times$
 $\times [(\tilde{N}_d + \frac{1}{2}) \hbar \omega'_c + (\tilde{N}_g + \frac{1}{2}) \hbar \omega_m + \frac{g}{2} \tilde{\omega}_c S_3]$
 + Termes en $\tilde{N}_d^2, \tilde{N}_g^2, \tilde{N}_d \tilde{N}_g, \tilde{N}_d S_3, \tilde{N}_g S_3$

où $\lambda = \frac{\eta |q|}{m_e^2 \omega_z^2 \tilde{\omega}_c}$

- 2 premières lignes

Hamiltonien H_0

- Lignes suivantes

Partie diagonale de W

Nouvel hamiltonien de vibration (24)

$\hbar \omega_z (N_3 + \frac{1}{2}) \{ 1 + \lambda [(\tilde{N}_d + \frac{1}{2}) \hbar \omega'_c + (\tilde{N}_g + \frac{1}{2}) \hbar \omega_m + \frac{g}{2} \tilde{\omega}_c S_3] \}$

La nouvelle fréquence de vibration pour la transition $|n, k, m, s\rangle \rightarrow |n, k+1, m, s\rangle$ dépend de n, m, s

$\omega'_3 = \omega_z \{ 1 + \lambda [(n + \frac{1}{2}) \hbar \omega'_c + (s + \frac{1}{2}) \hbar \omega_m + (1 + a_c) \hbar \tilde{\omega}_c m] \}$

Dans le terme correctif en λ , on peut remplacer ω'_c et $\tilde{\omega}_c$ par ω_c , et négliger a_c et $\hbar \omega_m / 2$

$\delta \nu_3 = \nu'_3 - \nu_3$

$\delta \nu_3 = \lambda \hbar \omega_c \nu_3 [n + m + \frac{1}{2} + \frac{\nu_m}{\nu_c} s]$

Ordres de grandeur

(25)

Pour $\delta n = 1$ (transition entre 2 niveaux cyclotron consécutifs) ou $\delta m = 1$ (basculement du spin), la variation de fréquence de vibrations vaut

$$\delta \nu_3 = \delta_0 = \lambda \hbar \omega_c \nu_3 = \eta \frac{|q| \hbar}{2 m_e} \frac{1}{2 \pi^2 m_e \nu_3}$$

Pour $\eta = 120 \text{ G/cm}^2 = 120 \text{ Tesla/m}^2$ et $\nu_3 = 60 \text{ MHz}$, on trouve $\delta_0 = 1 \text{ Hz}$

La variation de s doit être beaucoup plus importante que $\Delta s = 1$ pour produire un effet détectable sur $\delta \nu_3$

Limite classique

(26)

Etats cohérents pour les oscillateurs d et g . Les distributions de n et s sont très piquées autour de \bar{n} et \bar{s} qui sont simplement reliés aux rayons moyens r_c et r_m des orbites cyclotron et magnétron

$$r_c^2 = (2\bar{n} + 1) \frac{\hbar}{m_e \omega_c} \quad r_m^2 = (2\bar{s} + 1) \frac{\hbar}{m_e \omega_c}$$

avec $\frac{\hbar}{m_e \omega_c} = \lambda_{\text{Compton}}$ $\lambda_{\text{cyclotron}} = r_0^2$ (voir transparent 21 du cours II)

L'expression donnant $\delta \nu_3$ s'écrit alors (en négligeant $m + \frac{1}{2}$)

$$\delta \nu_3 = \frac{\delta_0}{2} \left[\left(\frac{r_c}{r_0} \right)^2 + \frac{\gamma_m}{\gamma_c} \left(\frac{r_m}{r_0} \right)^2 \right]$$

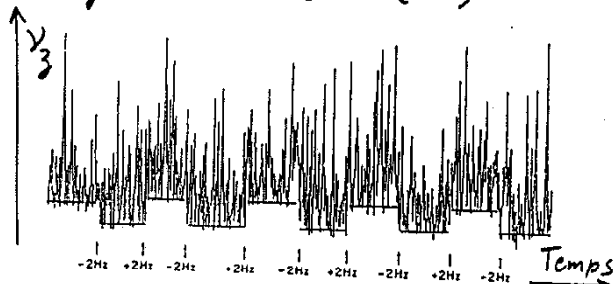
La mesure de $\delta \nu_3$ permet de suivre les variations de r_c et r_m

Exemple de résultats expérimentaux

(27)

Bouteille magnétique pour laquelle $\delta_0 = 2 \text{ Hz}$

Figure extraite de (4)



Le bruit en forme "d'herbe" représente les variations de ν_3 associées aux transitions aléatoires de e^- entre les 4 premiers niveaux cyclotrons (relaxation radiative)

Les sauts de $\pm 2 \text{ Hz}$ sont obtenus par action sur la tension U_0 du piège et simulent des basculements du spin (les vraies résonances de spin seront étudiées plus loin). Les 2 bases différentes de l'herbe correspondent à $n=0, m=-\frac{1}{2}$ et $n=0, m=\frac{1}{2}$

Autre effet produit par la bouteille magnétique

(28)

L'introduction du champ magnétique inhomogène \vec{b} élargit et déplace les résonances cyclotron et de spin dont la position dépend du champ magnétique.

Plus l'amplitude de vibrations est élevée, plus l'électron explore une zone de champ étendue. Le champ moyen "vu" par l'électron doit donc dépendre du nombre quantique de vibration k .

Si elle permet leur détection, la bouteille magnétique perturbée donc également les résonances cyclotron et de spin.

Calcul du déplacement de la (29) raie cyclotron ou de spin en fonction du nombre quantique k

Regroupons le terme en $(\tilde{N}_d + \frac{1}{2})(N_3 + \frac{1}{2})$ de W_{diag} avec le terme $(\tilde{N}_d + \frac{1}{2})\hbar\omega'_c$ de H_0 . Il vient $(\tilde{N}_d + \frac{1}{2})\hbar\omega'_c [1 + \lambda\hbar\omega_3(N_3 + \frac{1}{2})]$

↳ Déplacement de la fréquence cyclotron ω'_c , dépendant de k et équivalent à une variation δB_0 du champ magnétique B_0 .

$$\frac{\delta\omega'_c}{\omega'_c} = \frac{\delta\nu'_c}{\nu'_c} = \frac{\delta B_0}{B_0} = \lambda\hbar\omega_3(k + \frac{1}{2})$$

$$= \frac{\delta_0}{\nu'_c} (k + \frac{1}{2}) \approx \frac{k\delta_0}{\nu'_c} \quad (\text{car } k \gg 1)$$

$$\delta_0/\nu'_c \approx 2 \cdot 10^{-11} \quad (\delta=1 \quad \nu'_c = 5 \cdot 10^{10})$$

Même variation apparente δB_0 de B_0 pour la résonance de spin

3^{ème} effet de la bouteille magnétique (30)

La partie non diagonale de W contamine les états propres de H_0 par d'autres états propres

Exemple : Terme en $b_x S_x$ de la partie non diagonale de W_{spin} .

$b_x S_x \sim 3 x S_x$ (car $b_x = -\gamma_3 x$)
3 couple k à $k \pm 1$

x couple n à $n \pm 1$ ou s à $s \pm 1$

S_x couple $m = -\frac{1}{2}$ à $m = +\frac{1}{2}$

Done, sous l'effet de $b_x S_x$, l'état $|n, k, -\frac{1}{2}, s\rangle$ est contaminé par exemple par $|n-1, k-1, +\frac{1}{2}, s\rangle$

$$|n, k, -\frac{1}{2}, s\rangle = |n, k, -\frac{1}{2}, s\rangle$$

$$+ \epsilon |n-1, k-1, +\frac{1}{2}, s\rangle + \dots$$

Nous verrons plus loin l'importance de ces contaminations pour l'excitation des transitions $\Delta n = -1, \Delta m = +1$ de fréquence $\nu'_a = \nu_L - \nu'_c$

Références

- 1 - P. EKSTROM, D. WINELAND *Scientific American* 243, 91 (Aout 1980)
- 2 - D. WINELAND, P. EKSTROM, H. DEHMELT
Phys. Rev. Lett. 31, 1279 (1973)
- 3 - R. VAN DYCK, D. WINELAND, P. EKSTROM, H. DEHMELT
Appl. Phys. Lett. 28, 446 (1976)
- 4 - H. DEHMELT dans *Atomic Physics*, Vol. 7 (1981)
Edited by D. KLEPPNER and F. PIPKIN (Plenum
p. 337)

L'utilisation de la bouteille magnétique, dont le principe a été décrit plus haut (§§ 2 et 3), permet de détecter la résonance magnétron (§ 4), la résonance cyclotron (§ 7), et des résonances mixtes, correspondant à des transitions où 2 nombres quantiques varient à la fois, comme les résonances mixtes vibration axiale - magnétron à $\omega_z \pm \omega_m$ (§ 5) et les résonances mixtes cyclotron - spin à $\omega'_a = \omega_c - \omega'_s$ (§ 8).

Une application importante de la résonance mixte vibration axiale - magnétron à $\omega_z + \omega_m$ est de permettre le refroidissement radiatif du mouvement magnétron (§ 6)

Suite du plan

- ④ Excitation et détection de la résonance magnétron (1 à 2)
- ⑤ Résonances mixtes vibration axiale - magnétron
 - a) Structure du champ électrique induisant de telles résonances (3 à 4)
 - b) Interprétation semiclassical de ces résonances (5)
 - c) Calcul quantique (6 à 7)
- ⑥ Refroidissement radiatif du mouvement magnétron
 - a) Principe de la méthode (8 à 9)
 - b) Calcul de la vitesse et des limites du refroidissement (10 à 17)
 - c) Observation expérimentale (18)
- ⑦ Excitation et détection de la résonance cyclotron
 - a) Principe et observation expérimentale (19 à 20)
 - b) Origine de l'élargissement de la raie (21 à 22)
 - c) Amélioration de la précision de la mesure (23 à 24)
 - d) Résonances mixtes cyclotron - vibration et cyclotron - magnétron (25)
- ⑧ Résonance mixte cyclotron - spin
 - a) Interprétation semiclassical (26 à 28)
 - b) Interprétation quantique (29 à 30)
 - c) Observation expérimentale (31 à 32)

Références

- (1) - H. Dehmelt dans Atomic Physics, Vol 7 (1981), edited by D. Kleppner and F. Pipkin (Plenum) p. 337
- (2) - R. Van Dyck, P. Schwinberg, H. Dehmelt, Phys. Rev. Lett 38, 310 (1977)
- (3) - D. Wineland, H. Dehmelt, Bull. Am. Phys. Soc. 20, 637 (1975)
- (4) - H. Dehmelt, Nature 262, 777 (1976)
- (5) - D. Wineland, J. Appl. Phys. 50, 2528 (1979)
- (6) - R. Van Dyck, P. Schwinberg, G. Gabrielse, H. Dehmelt Bulletin of Mag. Resonance, 5, 107 (1983)
- (7) - H. Dehmelt - Communication au symposium A. Kastler, 1985, à paraître

Résonance magnétron (1) Exemple de résultats expérimentaux (2)

Excitation

Antenne de radiofréquence, arrivant dans l'espace entre l'anneau et les coupelles, et injectant dans le piège une onde de fréquence ω voisine de ω_m

Importance d'avoir $\omega \neq \omega_m$. Sinon le mouvement, non amorti divergerait.

Mouvement résultant

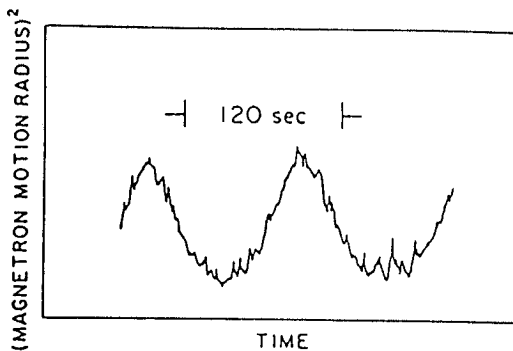
Superposition d'un mouvement libre à ω_m et forcé à ω

↳ Modulation à $\omega_m - \omega$ du carré, r_m^2 , du rayon magnétron r_m

Détection

La variation de fréquence axiale ω_3 dépend de r_m^2 [voir transparent IV-26] et est donc modulée, ce qui permet de mesurer $\omega_m - \omega$

Figure extraite de (1)



$$\omega_m/2\pi = 35052,628 \text{ Hz}$$

$$\omega/2\pi = 35052,620 \text{ Hz}$$

Connaissant $\omega/2\pi$, et mesurant $\omega_m - \omega$, on en déduit $\omega_m/2\pi$ à 10^{-3} Hz près

Résonances mixtes (3)

Vibration axiale - magnétron

Correspondent à des transitions où les 2 nombres quantiques, k et s , varient à la fois

$$\Delta k = \pm 1 \quad \text{et} \quad \Delta s = \pm 1$$

Fréquences de ces résonances

$$\omega_3 \pm \omega_m$$

Bandes latérales situées à $\pm \omega_m$ de la résonance axiale à ω_3

Caractéristique importante

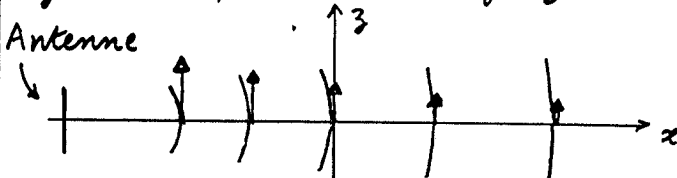
Le champ électrique oscillant à $\omega_3 \pm \omega_m$ doit être inhomogène pour pouvoir induire ces résonances.

Application essentielle

La résonance à $\omega_3 + \omega_m$ permet de refroidir le mouvement magnétron, et de diminuer le rayon r_m de l'orbite magnétron

Exemple de champ \vec{E} inhomogène (4)

Champ de fréquence ω créé par une petite antenne parallèle à Oz en un point $x < 0, y = z = 0$



Champ parallèle à Oz sur l'axe Ox , décroissant avec la distance à l'antenne, donc avec x

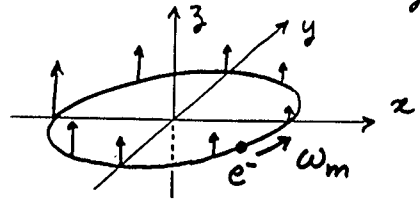
Si l'on néglige le champ magnétique associé, champ décrit par un potentiel scalaire oscillant à ω , dont le développement au voisinage de 0 a la forme

$$\Phi(x, y, z, t) = \cos \omega t [c_1 z + c_2 z x + \dots]$$

où c_1 et c_2 sont des constantes (voir référence (7))

Interprétation semiclassique de la résonance $\omega = \omega_3 \pm \omega_m$ (5)

Orbite magnétron pure, dans le plan xOy , centrée autour de O_3 , et parcourue à la vitesse angulaire ω_m



Comme il se déplace dans un champ $\vec{E} \cos \omega t$ inhomogène, e^- "voit" dans son référentiel au repos un champ $\vec{E} \parallel z$, modulé en amplitude à la fréquence ω_m

Le champ qui agit sur lui varie donc en $\cos \omega t \cos \omega_m t$, et les bandes latérales à $\omega \pm \omega_m$ peuvent exciter de manière résonnante sa vibration axiale à ω_3 si $\omega \pm \omega_m = \omega_3$, c-à-d si $\omega = \omega_3 \pm \omega_m$

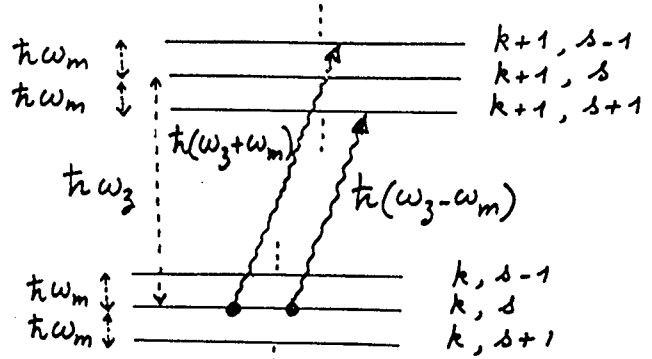
Calcul quantique de la résonance à $\omega_3 \pm \omega_m$ (6)

Hamiltonien d'interaction avec le champ produit par l'antenne $q \Phi(x, y, z, t) = q \cos \omega t [c_1 z + c_2 z x + \dots]$

Remplaçons z et x par leur expression en fonction de a_3, a_3^+, a_g, a_g^+ [voir transparent II-20. On ne met plus les v sur a_g, a_g^+, a_d, a_d^+ pour simplifier les notations]

- Le terme $q \cos \omega t c_1 z$ contient a_3 et a_3^+ et induit des transitions $\Delta k = \pm 1$, résonnantes pour $\omega = \omega_3$
- Le terme $q \cos \omega t c_2 z x$ contient des termes en $a_3 a_g, a_3 a_g^+, a_3^+ a_g, a_3^+ a_g^+$, induisant des transitions $\Delta k = \pm 1$ et $\Delta s = \pm 1$, résonnantes pour $\omega = \omega_3 \pm \omega_m$

Transitions $k, s \rightarrow k+1, s \pm 1$ (7)



Hamiltonien non perturbé des oscillateurs z et g

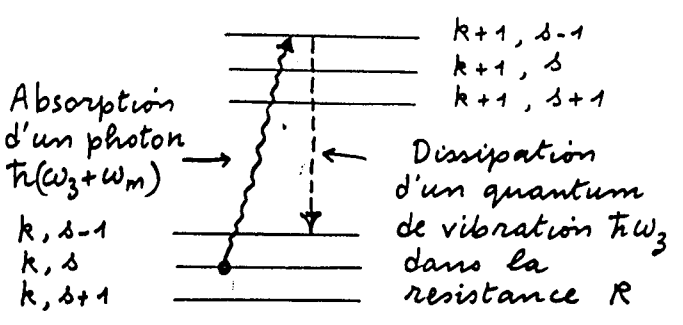
$$\hbar \omega_3 N_z - \hbar \omega_m N_g$$

L'énergie de e^- décroît quand la valeur propre s de N_g croît

Résonances à $\omega_3 \pm \omega_m$

L'absorption d'un photon RF à $\omega_3 + \omega_m$ fait diminuer s d'une unité
L'absorption d'un photon RF à $\omega_3 - \omega_m$ fait croître s d'une unité

Principe du refroidissement (8) radiatif du mouvement magnétron



- L'absorption d'un photon $\hbar(\omega_3 + \omega_m)$ augmente l'énergie de vibration ($k \rightarrow k+1$), mais diminue s d'une unité (diminution de l'énergie cinétique magnétron et du rayon r_m)

- Le mouvement de vibration est le seul à perdre de l'énergie par effet Joule du courant qu'il induit dans la résistance extérieure R

$$\Delta k = -1 \quad \Delta s = 0$$

Bilan global du cycle

s a diminué d'une unité

Problème

Le cycle précédent peut être répété plusieurs fois.

Quelle est la constante de temps avec laquelle s diminue ?

(Vitesse du refroidissement)

Jusqu'à où peut-on faire descendre la valeur de s ?

(Limite ultime du refroidissement)

Nécessité d'un traitement quantitatif.

Remarque

Si, au lieu d'irradier l'électron avec $\omega_3 + \omega_m$, on l'irradie avec $\omega_3 - \omega_m$, s augmenterait d'une unité à chaque cycle absorption d'un photon - dissipation d'un quantum de vibration, et le rayon magnétron divergerait.

Références : (3) à (7)

(9) Hamiltonien des oscillateurs z et g (10)

(en présence d'un champ RF à $\omega_3 + \omega_m$ et en l'absence de processus dissipatifs)

$$H = \hbar \omega_3 a_3^\dagger a_3 - \hbar \omega_m a_g^\dagger a_g + \lambda \hbar a_3^\dagger a_g e^{-i(\omega_3 + \omega_m)t} + h.c.$$

1^{ère} ligne : Hamiltonien non perturbé

2^{ème} ligne : Couplage avec le champ RF, résonnant pour les transitions

$$\Delta k = +1 \text{ et } \Delta s = -1$$

λ : Constante réelle, dépendant de q , de l'amplitude du champ RF et de son gradient

On néglige tous les autres termes en $a_3, a_3^\dagger, a_3^\dagger a_g^\dagger, \dots$ non-résonnants pour $\omega = \omega_3 + \omega_m$

On a fait "l'approximation du champ tournant" qui consiste à ne pas garder les termes en $a_3^\dagger a_g e^{i(\omega_3 + \omega_m)t}$

Equations de Heisenberg pour a_3 et a_g

$$\begin{cases} \dot{a}_3 = -i\omega_3 a_3 - i\lambda a_g e^{-i(\omega_3 + \omega_m)t} \\ \dot{a}_g = i\omega_m a_g - i\lambda a_3 e^{i(\omega_3 + \omega_m)t} \end{cases} \quad (11)$$

Changement de variables

$$a_3 = c_3 e^{-i\omega_3 t} \quad a_g = c_g e^{i\omega_m t}$$

$$\begin{cases} \dot{c}_3 = -i\lambda c_g \\ \dot{c}_g = -i\lambda c_3 \end{cases}$$

Equations linéaires décrivant des échanges réversibles de l'excitation entre les 2 oscillateurs z et g à la "fréquence de Rabi" λ

A partir de ces équations, il est possible de calculer les vitesses de variations de

$$\langle N_z \rangle = \langle k \rangle = \langle a_3^\dagger a_3 \rangle = \langle c_3^\dagger c_3 \rangle$$

$$\langle N_g \rangle = \langle s \rangle = \langle a_g^\dagger a_g \rangle = \langle c_g^\dagger c_g \rangle$$

Equations d'évolution de $\langle k \rangle$ et $\langle s \rangle$

$$\langle \dot{k} \rangle, \langle \dot{s} \rangle \text{ et } \langle \dot{v} \rangle = i \langle c_3^\dagger c_g - c_g^\dagger c_3 \rangle \quad (12)$$

forment un système fermé de 3 variables complexées, obéissant à

$$\begin{cases} \langle \dot{k} \rangle = -\lambda \langle v \rangle \\ \langle \dot{s} \rangle = \lambda \langle v \rangle \\ \langle \dot{v} \rangle = 2\lambda (\langle k \rangle - \langle s \rangle) \end{cases}$$

On vérifie bien que $\langle k \rangle + \langle s \rangle = c^2 e$ (règle de sélection $\Delta(k+s) = 0$)

Introduction des termes de relaxation

Comme le temps de corrélation des processus dissipatifs est très court devant λ^{-1} , on peut ajouter aux vitesses précédentes les vitesses de relaxation calculées avec $\lambda = 0$

Comme, seul, l'oscillateur z relaxe, les nombres quantiques de g restent "spectateurs"

Vitesses de relaxation

(13)

$$\langle \dot{k} \rangle = -\frac{1}{\tau_3} (\langle k \rangle - k_{eq})$$

$k_{eq} = \frac{kT}{\hbar\omega_3}$: valeur d'équilibre thermodynamique de $\langle k \rangle$

$\tau_3 = \frac{\ell}{R}$: Temps d'amortissement de la vibration axiale

$$\langle \dot{c}_3^+ c_3 \rangle = -\frac{1}{2\tau_3} \langle c_3^+ c_3 \rangle$$

Seule, la partie z de $\langle c_3^+ c_3 \rangle$ relaxe avec le temps d'amortissement $2\tau_3$ de l'amplitude

Vitesses de variation globales

$$\begin{cases} \langle \dot{k} \rangle = -\lambda \langle v \rangle - \frac{1}{\tau_3} (\langle k \rangle - k_{eq}) \\ \langle \dot{s} \rangle = \lambda \langle v \rangle \\ \langle \dot{v} \rangle = 2\lambda (\langle k \rangle - \langle s \rangle) - \frac{1}{2\tau_3} \langle v \rangle \end{cases}$$

Analogie avec les équations de Bloch optiques d'un système à 2 niveaux non fermé ($\langle k \rangle + \langle s \rangle$ non constant), la relaxation n'affectant qu'un seul niveau

V-5

Solution stationnaire

(14)

(Limites du refroidissement radiatif)

$$\begin{cases} \langle v \rangle_{\text{limite}} = 0 \\ \langle k \rangle_{\text{limite}} = k_{eq} \\ \langle s \rangle_{\text{limite}} = k_{eq} \end{cases}$$

Les valeurs moyennes de k et s tendent donc vers la même limite

$k_{eq} = \frac{kT}{\hbar\omega_3}$, soit environ

$$k_{eq} = 1300 \text{ pour } T = 4^\circ\text{K et } \frac{\omega_3}{2\pi} = 60\text{MHz}$$

Diminution spectaculaire pour s , car la valeur initiale de $\langle s \rangle$, après injection de e^- dans le piège est de l'ordre de 10^9 [référence (6)]

Rayon final de l'orbite magnétron

$$\begin{aligned} (r_m)_{\text{limite}} &= (2\langle s \rangle_{\text{limite}} + 1) \frac{\hbar}{m_e \tilde{\omega}_c} \\ &= (2k_{eq} + 1) \frac{\hbar}{m_e \tilde{\omega}_c} \end{aligned}$$

(voir Transparent II-21)

$$\rightarrow (r_m)_{\text{limite}} \approx 10000 \text{ \AA} = 1 \mu\text{m}$$

Température du mouvement magnétron T_m

(15)

Comme ce sont les niveaux les plus élevés qui sont les plus peuplés, T_m est une température négative qu'on peut définir par

$$\langle s \rangle_{\text{limite}} = k_{eq} = \frac{k |T_m|}{\hbar\omega_m}$$

En comparant avec $k_{eq} = \frac{kT}{\hbar\omega_3}$, on voit que $|T_m| = T \frac{\omega_m}{\omega_3}$

Reduction importante de T

$$T = 4^\circ\text{K} \quad \frac{\omega_3}{2\pi} = 60\text{MHz} \quad \frac{\omega_m}{2\pi} = 35\text{KHz}$$

$$\rightarrow |T_m| = 2\text{mK}$$

Analogie avec la polarisation nucléaire dynamique où les spins nucléaires atteignent une température plus basse que celle des spins électroniques par un facteur égal au rapport des moments magnétiques.

Vitesse de refroidissement

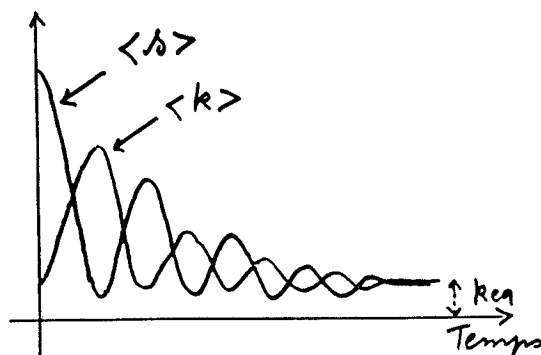
(16)

2 régimes différents suivant les valeurs relatives de la fréquence de Rabi λ et de $1/\tau_3$

Champ RF intense $\lambda \gg \frac{1}{\tau_3}$

$$\langle N_z \rangle = \langle k \rangle \text{ et } \langle N_g \rangle = \langle s \rangle$$

oscillent en opposition de phase à la fréquence λ et tendent vers k_{eq} avec un temps d'amortissement de l'ordre de τ_3



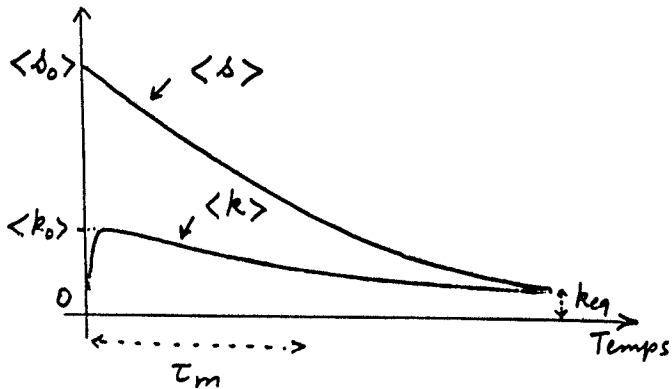
Champ RF faible $\lambda \ll \frac{1}{\tau_3}$ (17)

Dans une première phase, durant de l'ordre de τ_3 , $\langle k \rangle$ varie (ainsi que $\langle v \rangle$), et se stabilise à la valeur $\langle k_0 \rangle = \langle s_0 \rangle 4 \lambda^2 \tau_3^2$

Puis, c'est la variable lente $\langle s \rangle$, qui est restée égale à $\langle s_0 \rangle$ pendant cette première phase, qui impose ensuite sa vitesse lente

$$\frac{1}{\tau_m} = \frac{1}{\tau_3} 4 \lambda^2 \tau_3^2 = \frac{1}{\tau_3} \frac{\langle k_0 \rangle}{\langle s_0 \rangle}$$

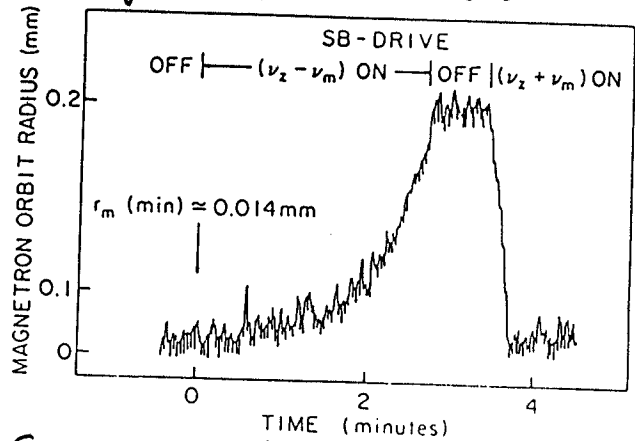
à toutes les autres variables



Observation expérimentale

Mesure de $(r_m)^2$ par l'intermédiaire de celle de δv_z [voir transparent IV-26]

Figure extraite de (1)



Suivant que l'excitation est à $\omega_3 - \omega_m$ ou $\omega_3 + \omega_m$, r_m augmente ou diminue

La valeur limite de r_m , $14 \mu m$, est plus grande que $1 \mu m$ (voir plus haut) car l'oscillateur k n'est pas en équilibre (Il est excité par pouvoir suivre les variations de δv_z qui permettent de mesurer r_m^2)

Excitation de la résonance cyclotron (19)

Diode Schottky en dehors de l'enceinte à vide, près de l'espace entre l'anneau et les coupelles. Alimentée par un klystron à 8,6 GHz

Agit comme un multiplicateur de fréquence et une antenne rayonnant dans le piège une microonde à $8,6 \times 6 = 51,6 \text{ GHz}$

Détection de la résonance cyclotron

- On balaié la fréquence microonde
- Au voisinage de la résonance, l'électron monte dans les niveaux cyclotron n plus élevés que les 4 premiers entre lesquels il partage son temps à l'équilibre thermodynamique
- Cette variation résonnante de n est détecté par une variation de la fréquence de vibrations axiale ω_3 qui est mesuré en permanence.

Exemple de résultats expérimentaux

Figure extraite de (2)

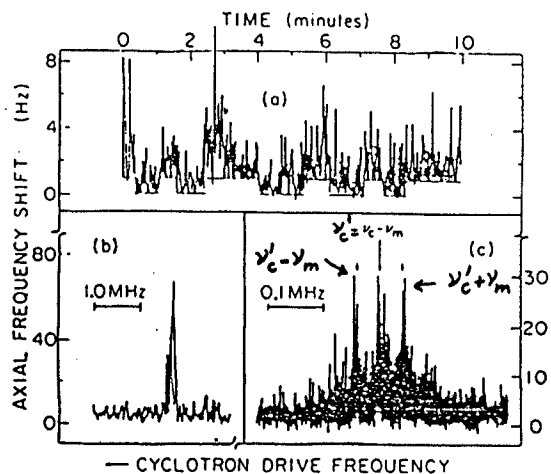


Fig. b Bouteille magnétique pour laquelle $\delta_0 = 2,5 \text{ Hz}$ (voir transparent IV-25) Excitation axiale à ω_3 (pour mesurer $\delta \omega_3$) importante

Fig. c Bouteille pour laquelle $\delta_0 = 1 \text{ Hz}$ Excitation axiale à ω_3 beaucoup plus faible. La résonance cyclotron est beaucoup plus fine et on voit les bandes latérales à $\nu_c' \pm \nu_m$

Fig. a Sera analysé plus loin

Origine de l'élargissement de la résonance cyclotron (21)

Si l'électron est dans un niveau de vibration k bien défini, la résonance cyclotron a une fréquence bien définie

$$\nu'_c + (k + \frac{1}{2}) \delta_0$$

différente de ν'_c par $k + \frac{1}{2}$ fois le déplacement δ_0 de la bouteille (voir transparent IV-29).

Si la valeur de k n'est pas bien définie et fluctue dans un intervalle Δk , la fréquence cyclotron fluctue dans un intervalle $\Delta k \delta_0$.

↳ Elargissement de la résonance

A l'équilibre thermodynamique,

$$\Delta k \approx k_{eq} = \frac{kT}{h\nu_3} \approx 1300$$

↳ Elargissement de quelques kHz

Augmentation de l'incertitude sur k due à l'excitation à ω_3 (22)

Même si, initialement, $k = 0$ (oscillateur z dans l'état fondamental), l'excitation de la vibration axiale à ω_3 (nécessaire pour avoir un signal de mesure de $\delta\omega_3$) porte l'oscillateur dans un état qui est, au mieux, un état cohérent dont la dispersion Δk est de l'ordre de $\sqrt{\langle k_{exc} \rangle}$. Les processus dissipatifs ne font qu'augmenter encore cette dispersion sur k .

Il faut donc éviter d'exciter trop la vibration axiale à ω_3 pour ne pas élargir trop la résonance

Compromis à réaliser entre raie fine et bon rapport signal sur bruit

Meilleure solution : alterner dans le temps, excitation à ν'_c , détection à ν_3

Amélioration de la précision de la mesure de ν'_c (23)

Utilisation du caractère dissymétrique de la forme de raie.

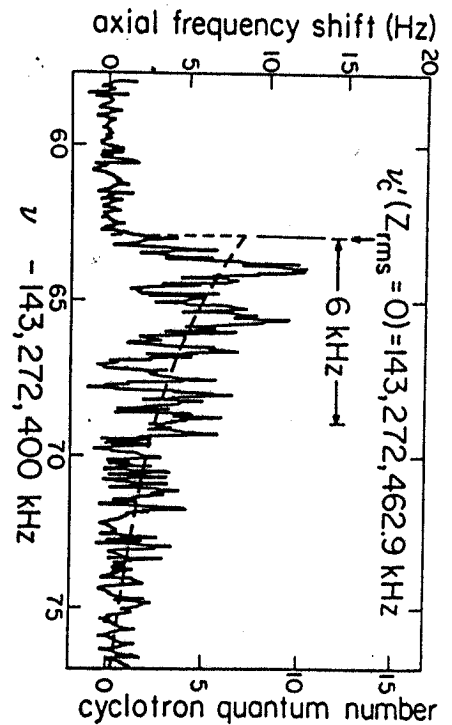
A l'équilibre thermodynamique, l'électron passe d'autant plus de temps dans un niveau de vibration k donné que k est plus petit

La raie cyclotron à la fréquence $\nu'_c + (k + \frac{1}{2}) \delta_0$ sera donc d'autant plus intense que k est plus petit

Si τ_3 est suffisamment long (approximation quasi-statique) on aura donc, en balayant la fréquence microonde très lentement, un spectre montant brusquement à $\nu'_c + \frac{1}{2} \delta_0$ ($k=0$), puis décroissant très lentement (contribution des valeurs de $k \neq 0$, d'autant plus petite que k est plus grand)

Exemple de raie asymétrique (24)

avec montée brusque à ν'_c suivi d'une décroissance lente



Mesure de ν'_c à $5 \cdot 10^2 \text{ Hz}$ près
Figure extraite de (1)

Résonances mixtes cyclotron-vibration et cyclotron-magnétron (25)

- Il serait éventuellement possible de refroidir le mouvement de vibration en irradiant e- avec ω'c - ωz et en découplant la vibration des circuits extérieurs (R=0)

En champ B0 fort (ωc/2π = 160 GHz) et à T=4°K, seul le niveau n=0 est occupé (neq=0), et le refroidissement radiatif à ω'c - ωz devrait faire tendre <k> vers keq = neq = 0

- Idem pour le refroidissement radiatif du mouvement magnétron à ω'c + ωm. <s> devrait lui aussi tendre vers seq = neq = 0

Espoir de pouvoir ainsi préparer l'électron dans l'état n=0, k=0, s=0!

Résonance mixte cyclotron-spin (26)

- Application d'un champ électrique parallèle à Oz, de fréquence ω'a = ωL - ω'c en général différente de la fréquence propre de vibration axiale ωz, et mettant l'électron en vibration forcée à ω'a

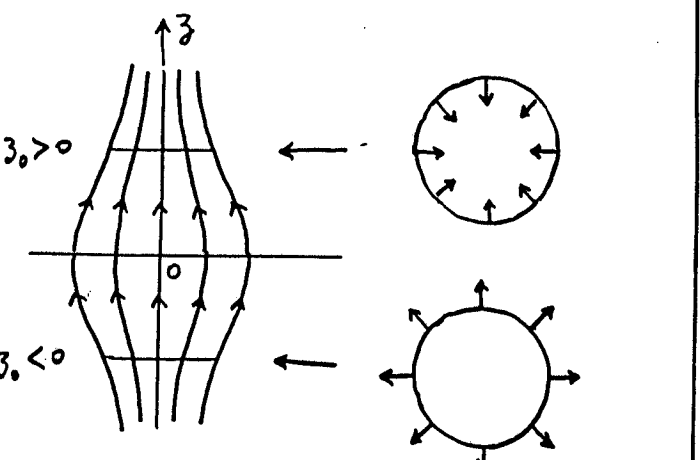
- La vibration forcée de e- dans le champ statique inhomogène b de la bouteille magnétique provoque des transitions résonnantes entre les 2 états de spin ↓ et ↑

En fait, il s'agit d'une excitation résonnante de la transition

n, k, ↓, s → n-1, k, ↑, s

- Pour cette résonance mixte, le champ inhomogène n'est pas un champ électrique oscillant, mais un champ magnétique statique

Interprétation semiclassique de la résonance à ω'a (27)



- Orbite cyclotron pure autour de Oz parcourue à la vitesse angulaire constante

- Dans un plan z=z0, le champ B de la bouteille a une composante radiale perpendiculaire à Oz
• dirigée vers l'intérieur si z0 < 0
• dirigée vers l'extérieur si z0 > 0

Champ magnétique "vu" par e- (28)

Pendant un tour du mouvement cyclotron, z varie peu. Dans son référentiel propre, e- "voit" un champ magnétique perpendiculaire à Oz, tournant à la fréquence ω'c

Effet de la vibration axiale forcée à la fréquence ω'a

Le centre de l'orbite cyclotron oscille lentement à la fréquence ω'a le long de Oz

La composante radiale de b dans le plan de l'orbite cyclotron est modulée en amplitude à ω'a

Le champ tournant à ω'c "vu" par e- est donc modulé en amplitude à ω'a

Equivalent à 2 champs tournants à ω'c + ω'a et ω'c - ω'a

Résonance de spin

(29)

Comme $\omega'_a = \omega_L - \omega'_c$, le champ magnétique "vu" par e^- et tournant à $\omega'_c + \omega'_a = \omega_L$ a exactement la bonne fréquence ω_L pour provoquer des transitions résonnantes entre les 2 états de spin \downarrow et \uparrow

Interprétation quantique de la résonance à ω'_a

La partie non diagonale de la perturbation de spin introduite par la bouteille magnétique, (W_{spin}) non diag., contamine les états propres de e^- dans le piège par d'autres états propres. C'est cette contamination qui permet à la perturbation associée au champ électrique oscillant à ω'_a d'induire des transitions $\Delta n = -1, \Delta m = +1$

Expression des nouveaux états propres contaminés (transparent IV-29)

V-9

(30)

$$|n, k, \downarrow, s\rangle = |n, k, \downarrow, s\rangle + \epsilon |n-1, k-1, \uparrow, s\rangle + \dots$$

$$|n-1, k, \uparrow, s\rangle = |n-1, k, \uparrow, s\rangle + \epsilon' |n, k-1, \downarrow, s\rangle + \dots$$

Perturbation associée au champ électrique // à Oz , oscillant à ω'_a

$$W' = q\phi' \cos \omega'_a t = -q E_0 \cos \omega'_a t z$$

W' satisfait aux règles de sélection

$$\Delta k = \pm 1, \Delta n = \Delta m = \Delta s = 0$$

W' a un élément de matrice non nul entre les 2 états propres précédents, entre la composante d'ordre 0 en W_{spin} de l'un et la composante d'ordre 1 (contamination) de l'autre

Il y a résonance car $\hbar \omega'_a$ est précisément l'écart entre les 2 états perturbés

Détection des transitions de spin (31)

Immédiatement après une transition $\Delta n = -1, \Delta m = +1$, qui ne change pas $m+n$, la fréquence de vibration axiale à ω_3 (qui est suivie en permanence grâce à une deuxième excitation à ω'_3) ne change pas, car $\delta \omega_3$ ne dépend que de $m+n$ (voir transparent IV-24)

Mais la relaxation cyclotron, qui intervient aussitôt après, va faire changer n entre 0 et 4. La valeur la plus basse de $m+n$, qui est m , ne sera donc pas la même suivant que $m = -\frac{1}{2}$ ou $m = +\frac{1}{2}$.

Chaque transition de spin est donc détectable par une variation du plancher inférieur des fluctuations de $\delta \omega_3$ [voir figure a du transparent V-20]

Enregistrement de la résonance à ω'_a

Figure extraite de (1)

(32)

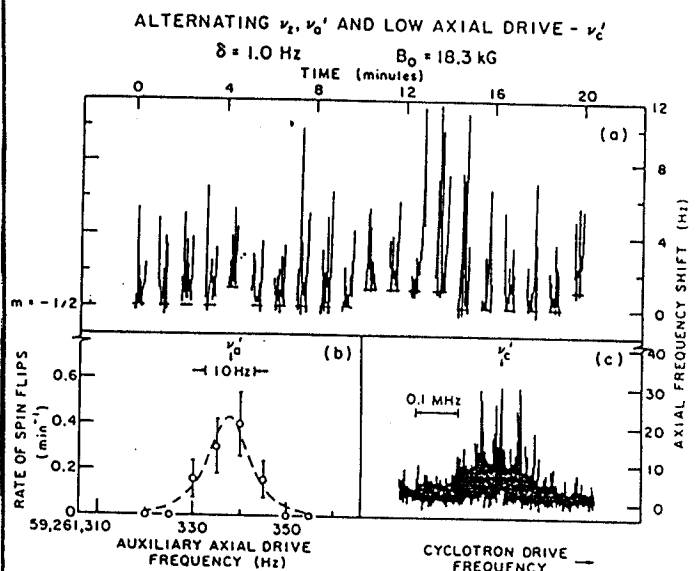


Fig a Pendant une période de 20 minutes, phases alternées d'excitation à ω'_a et de détection à ω'_3 du plancher inférieur des fluctuations de $\delta \omega_3$

Fig b Nombre de transitions $\Delta n = -1, \Delta m = +1$ qui se sont produites pendant 20 minutes en fonction de ω'_a

Fig c Déjà décrite plus haut (V-20)

Effet Stern et Gerlach continu sur un électron unique

Temps de mesure minimum et perturbations
du système observé par l'appareil de mesure

Le système étudié dans les cours précédents est suffisamment simple pour qu'on puisse, au moins dans des conditions idéales (un seul électron, pas d'autres sources de bruit que la résistance R du circuit extérieur, résistance R à une température $T = 0^\circ\text{K}$), étudier un certain nombre de problèmes relatifs au processus de mesure.

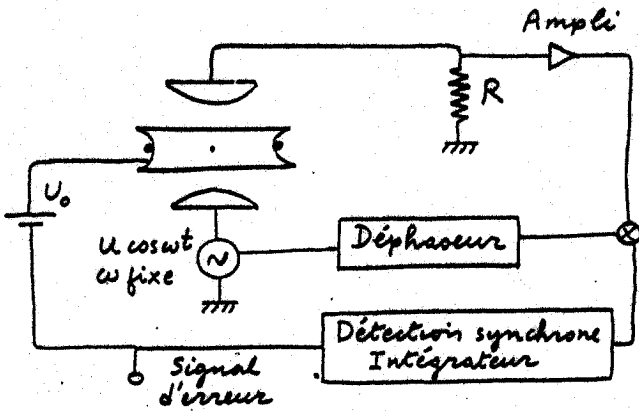
- Quel est le rapport signal sur bruit S/B ?
- Pendant quel temps minimum T_m faut-il moyenniser le bruit pour avoir $S \gg B$?
- L'interaction du spin avec le champ inhomogène de la bouteille magnétique peut-elle brouiller la phase relative entre les 2 états de spin pendant ce temps de mesure minimum T_m ?
- Le fait d'observer en permanence l'état du spin bloque-t-il son évolution ?

Plan du cours VI

Introduction - Buts de ce cours (Transparents 1 à 5)

- ① - Calcul du rapport signal sur bruit (6 à 11)
- ② - Calcul du temps minimum T_m nécessaire pour mesurer l'état de spin de l'électron (12 à 13)
- ③ - Perturbation de l'état de spin par le processus de mesure
 - a) Caractère aléatoire de la précession de Larmor du spin
Origine physique de ce caractère aléatoire (14 à 16)
 - b) Fonctions de corrélation des fluctuations de l'énergie d'oscillation de l'électron
 - Calcul semiclassique (17 à 20)
 - Grandes lignes du calcul quantique (21 à 22)
 - c) Calcul de la rotation aléatoire du spin pendant le temps de mesure T_m (23 à 26)
 - d) Discussion physique : lien avec la "réduction du paquet d'ondes" (27)
- ④ - Paradoxe de Zénon
 - a) Énoncé du paradoxe (28)
 - b) Évolution du spin, sous l'effet d'une impulsion π de radiofréquence de durée T_p , dans les 2 cas limites $T_p \ll T_m$ et $T_p \gg T_m$ (29 à 31)
 - c) Résolution du paradoxe (32)

Référence : Toutes les discussions de ce cours VI sont basées sur l'article
"Continuous Stern-Gerlach effect" de H. DEHMELT
Preprint soumis à Phys. Rev. D

Rappel du principe de l'expérience (1)

- Excitation à ω fixe de la vibration axiale.
- Réglage de la détection synchrone pour détecter la résonance sous forme d'une courbe de dispersion
- Verrouillage de U_0 pour être au centre de cette courbe de dispersion quand le spin est dans l'état \downarrow
 $\omega_3(\downarrow) = \omega$

Détection d'une transition de spin (2)

- Si le spin bascule de \downarrow à \uparrow , la fréquence de vibration axiale change à cause de la bouteille magnétique
 $\omega_3(\uparrow) = \omega_3(\downarrow) + \delta_0$ (δ_0 en rad/s)
- Un signal d'erreur S apparaît, proportionnel à δ_0 , à la tension de pilotage U . S dépend aussi de la largeur $\Delta\omega = \gamma_3$ de la résonance axiale ($\gamma_3 = \frac{R}{L}$)

Bruit

- En plus du signal, il y a du bruit provenant de la résistance R (on négligera ici toutes les autres sources de bruit provenant des amplificateurs situés après R)
- Le bruit de R est filtré dans le circuit résonnant L, C, R , équivalent à l'électron, et surtout dans la bande passante de la détection synchrone, beaucoup plus étroite en général que $\Delta\omega = \gamma_3$

Temps de mesure minimum T_m (3)

Pour pouvoir affirmer que le spin a basculé, le signal associé à la variation $\omega_3(\uparrow) - \omega_3(\downarrow) = \delta_0$ doit être suffisamment grand par rapport au bruit B

Or, le bruit B est d'autant plus petit que la bande passante de la détection synchrone est plus étroite, ou encore que le temps d'intégration t_d est plus long

Pour avoir $S > B$, il faut donc que t_d soit supérieur à une certaine valeur minimum T_m (celle pour laquelle $S \sim B$)

Idee importante que toute mesure doit durer un temps minimum T_m , celui pendant lequel il faut moyenner le bruit pour le rendre plus petit que le signal

Buts de ce cours (4)1- Calculer T_m

L'expérience analysée ci-dessus est suffisamment simple (au moins dans sa version idéale : un seul électron, bruit ne venant que de R , température $T = 0^\circ K$), pour qu'on puisse calculer explicitement T_m en fonction des divers paramètres de l'expérience.

2- Etudier les effets de l'interaction du système observé avec l'appareil de mesure pendant le temps T_m

On peut calculer aussi l'évolution, pendant T_m , du spin de e^- (système observé) interagissant avec le gradient de champ de la bouteille (appareil de mesure)

Eclairage intéressant sur certains problèmes relatifs à la mesure (réduction du paquet d'ondes, paradoxe de Zénon)

Effet Stern et Gerlach continu (5)

Nom donné à l'expérience étudiée ici pour les raisons suivantes

① - La différence $\delta_0 = \omega_3(\uparrow) - \omega_3(\downarrow)$ est due à l'interaction du spin de e^- avec un gradient de champ magnétique, comme dans l'effet Stern et Gerlach

② - L'enregistrement du signal S avec la constante de temps T_m , permet de suivre de manière continue l'état \downarrow ou \uparrow dans lequel se trouve le spin.

Exemple simple d'une mesure idéale, non destructive, pouvant être effectuée sur le même système aussi longtemps qu'on le désire

Calcul du signal

Tension appliquée : $U \cos \omega t$

Courant produit

$I_p \cos \omega t$ + $I_p \sin \omega t$
 en phase en quadrature

Impédance complexe

$Z(\omega) = X(\omega) + i Y(\omega) = R + i(\ell\omega - \frac{1}{C\omega}) \approx R [1 + \frac{i(\omega - \omega_3)}{\delta_3/2}]$

$\ell C \omega_3^2 = 1$ $\delta_3 = \frac{R}{\ell}$ largeur de la résonance

Sortie de la détection synchrone

$S = I_p = \frac{U Y(\omega)}{|Z(\omega)|^2}$

On supposera $\omega - \omega_3 = \delta_0 \ll \delta_3$

$\hookrightarrow S = \frac{U}{R} \frac{2\delta_0}{\delta_3}$

$I_p = \frac{U X(\omega)}{|Z(\omega)|^2} \approx \frac{U}{R}$

Expression du signal en fonction de l'énergie axiale W_3 (7)

$W_3 = 2 \times \frac{1}{2} \ell I(t)^2 \approx \ell I_p^2 \cos^2 \omega_3 t$
 (car $I_p \gg I_0$ puisque $\delta_0 \ll \delta_3$)

$W_3 = \ell \frac{I_p^2}{2} = \frac{\ell U^2}{2R^2}$

$\hookrightarrow S^2 = \frac{U^2}{R^2} \frac{4\delta_0^2}{\delta_3^2} = \frac{2W_3}{\ell} \frac{4\delta_0^2}{\delta_3^2}$

Or $\delta_3 = \frac{R}{\ell} \rightarrow \ell \delta_3 = R$

$\hookrightarrow S^2 = 8 W_3 \frac{\delta_0^2}{R \delta_3}$

Déphasage φ entre les courants correspondant à $\omega = \omega_3$ et $\omega = \omega_3 + \delta_0$

$\tan \varphi \approx \varphi \approx \frac{I_0}{I_p} = \frac{2\delta_0}{\delta_3}$

Calcul du bruit (8)

- La résistance R est à l'origine d'un bruit de voltage, dont la densité spectrale, $J_R(\omega)$, est donnée par le théorème de Nyquist

$J_R(\omega) = 2R \frac{\hbar\omega}{2} \coth \frac{\hbar\omega}{2kT}$

(voir transparent III-29)

- On suppose ici que $T=0$, de sorte que

$J_R(\omega) = R \hbar\omega$

- Ce bruit de voltage, appliqué au circuit ℓC équivalent à l'électron, donne un bruit de courant, dont la densité spectrale, $J_I(\omega)$, est donné par

$J_I(\omega) = \frac{1}{|Z(\omega)|^2} J_R(\omega) \approx \frac{1}{|Z(\omega)|^2} J_R(\omega_3)$
 $= \frac{1}{|Z(\omega)|^2} R \hbar\omega_3$

(voir transparent III-27)

Effet de la détection synchrone (9)

Filtrage supplémentaire du bruit de courant

On ne conserve qu'un intervalle spectral $\delta\gamma$, inversement proportionnel au temps d'intégration τ_d , autour de $\gamma = \gamma_3$

Plus précisément, filtre en ω décrit par la lorentzienne

$$|F(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega - \omega_3}{1/2\tau_d}\right)^2}$$

Densité spectrale du courant filtré

$$\begin{aligned} \tilde{J}_I(\omega) &= J_I(\omega) |F(\omega)|^2 = \frac{R \hbar \omega_3}{|Z(\omega)|^2} |F(\omega)|^2 \\ &\approx \frac{R \hbar \omega_3}{|Z(\omega_3)|^2} |F(\omega)|^2 = \frac{\hbar \omega_3}{R} |F(\omega)|^2 \end{aligned}$$

car la largeur, δ_3 , de $\frac{1}{|Z(\omega)|^2}$ est beaucoup plus grande que $1/\tau_d$

Expression du bruit de courant (10)
à la sortie de la détection synchrone

$$B^2 = \overline{I(t)^2} = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty d\omega \tilde{J}_I(\omega)$$

(voir Transparent III-28)

$$\hookrightarrow B^2 = \frac{\hbar \omega_3}{\pi R} \int_0^\infty d\omega |F(\omega)|^2 =$$

$$\frac{\hbar \omega_3}{\pi R} \int_0^\infty d\omega \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega - \omega_3}{1/2\tau_d}\right)^2} = \frac{\hbar \omega_3}{2R\tau_d}$$

$$\hookrightarrow \boxed{B^2 = \frac{\hbar \omega_3}{2R\tau_d}}$$

Rapport signal sur bruit

$$\frac{S^2}{B^2} = \frac{8 W_3 \delta_0^2 / R \delta_3}{\hbar \omega_3 / 2R\tau_d} =$$

$$= 16 \frac{\delta_0^2 \tau_d}{\delta_3} \frac{W_3}{\hbar \omega_3} = 16 \frac{\delta_0^2 \tau_d}{\delta_3} \bar{k}$$

Discussion physique

(11)

Le rapport signal sur bruit est d'autant plus élevé que

- δ_0 est plus grand
(Bouteille magnétique plus profonde)
- δ_3 est plus petit
(Résonance de vibration plus étroite)
- \bar{k} est plus grand
(Energie de vibration axiale plus grande)
- τ_d est plus long
(Temps d'intégration plus long)

Les 2 premiers paramètres sont caractéristiques du montage expérimental utilisé

Les 2 derniers (\bar{k}, τ_d) sont à la disposition de l'expérimentateur qui peut augmenter la tension U d'excitation ou allonger le temps d'intégration.

Calcul du temps minimum T_m nécessaire pour une mesure (12)

Pour un état de spin donné, 94% des valeurs de I tombent dans un intervalle $\pm 2B$ autour de la valeur moyenne.

Pour être sûr que les 2 intervalles de confiance à 94% associés aux états \downarrow et \uparrow sont disjoints, il faut donc que $S \geq 4B$

Le temps minimum de mesure T_m est la valeur de τ_d pour laquelle $S = 4B$

$$\frac{S^2}{B^2} = 16 = 16 \frac{\delta_0^2 T_m}{\delta_3} \bar{k}$$

$$\hookrightarrow \boxed{T_m = \frac{\delta_3}{\bar{k} \delta_0^2}}$$

Autre interprétation de l'équation
donnant T_m (13)

$$T_m = \frac{\gamma_3}{\bar{k} \delta_0^2}$$

$$\hookrightarrow \gamma_3 \bar{k} T_m = \frac{\gamma_3^2}{\delta_0^2}$$

Le membre de gauche de cette équation donne le nombre de quanta de vibrations dissipés dans la résistance R pendant le temps de mesure

Comme $\gamma_3 \gg \delta_0$, on en déduit qu'une mesure de l'état de spin nécessite de dépenser une énergie égale à celle de plusieurs quanta de vibration

Fluctuations de l'énergie de l'électron

- Le bruit produit par R a un autre effet : il fait fluctuer l'énergie d'oscillation de l'électron autour de sa valeur moyenne

$$\bar{E} = (\bar{k} + \frac{1}{2}) \hbar \omega_L$$

- L'électron change donc de niveau de vibration de manière aléatoire. Le nombre quantique $k(t)$ du niveau dans lequel il se trouve à l'instant t fluctue donc autour de \bar{k}

Fluctuations de la précession de Larmor

- A cause de la bouteille magnétique, le champ magnétique "vu" par e^- dépend de k (voir transparent IV-9) Par exemple, la fréquence de Larmor du spin dans l'état k vaut

$$\omega_L(k) = \omega_L + (k + \frac{1}{2}) \delta_0$$

- Comme k fluctue, il en est de même de la précession de Larmor du spin

Perturbation du système étudié (15)
par l'opération de mesure

- La bouteille magnétique et le circuit électrique de détection (appareil de mesure) introduisent donc un élément aléatoire dans l'évolution du spin (système qu'ils permettent d'étudier).

- On pourrait à première vue penser qu'il suffit de réduire T_m pour réduire l'effet de cette perturbation, par exemple en augmentant l'énergie d'oscillation forcée (puisque $T_m \sim \bar{k}^{-1}$) Mais comment varient les fluctuations de k autour de \bar{k} quand \bar{k} augmente?

Ne risque-t-on pas de perdre en augmentant les fluctuations de k ce qu'on gagne en réduisant T_m ?

Caractérisation des fluctuations de k (16)

- Pour étudier de manière précise la perturbation du spin de l'électron pendant le temps de mesure, il est donc nécessaire au préalable d'étudier les propriétés statistiques des fluctuations $\delta k(t) = k(t) - \bar{k}$, caractérisées par la fonction de corrélation

$$\overline{\delta k(t+\tau) \delta k(t)}$$

Calcul semiclassical

Fonction de corrélation de l'énergie de l'électron mis en mouvement forcé et soumis de plus au bruit de voltage de R

Calcul quantique

Fonction de corrélation quantique

$$\langle \delta N_3(t+\tau) \delta N_3(t) \rangle$$

$$\text{ou } \delta N_3(t) = a_3^\dagger(t) a_3(t) - \langle a_3^\dagger(t) a_3(t) \rangle_{\text{stat}}$$

↑
Valeur moyenne de N_3
dans l'état stationnaire

Calcul semiclassique

(17)

Mouvement de l'électron sous l'effet du bruit de voltage de R

- Mouvement erratique, de fréquence moyenne ω_3 , de temps de corrélation $2/\gamma_3$, de phase aléatoire [filtrage du bruit de R par l'impédance $Z(\omega)$]

$$z_B(t) = P(t) \cos \omega_3 t + \varphi(t) \sin \omega_3 t$$

$$\overline{P^2(t)} = \overline{\varphi^2(t)} = b^2 \quad \overline{P(t)\varphi(t)} = 0$$

$$\overline{P(t+\tau)P(t)} = b^2 e^{-\gamma_3 |\tau|/2}$$

- Vitesse de l'électron

$$\dot{z}_B(t) \approx -\omega_3 P(t) \sin \omega_3 t + \omega_3 \varphi(t) \cos \omega_3 t$$

Il est légitime de négliger \dot{P} et $\dot{\varphi}$ devant $\omega_3 P$ et $\omega_3 \varphi$ car $\gamma_3 \ll \omega_3$

Méthode heuristique pour trouver b^2 (18)

Comme $T = 0^\circ K$, l'oscillateur quantique est dans l'état $k=0$ où $\langle z^2 \rangle = \hbar/m_e \omega_3$. En égalant $\overline{z_B^2(t)}$ et $\langle z^2 \rangle$, on obtient

$$b^2 = \frac{\hbar}{m_e \omega_3}$$

Même résultat si l'on écrit que $\overline{E_{cin}} + \overline{E_{pot}} = \frac{1}{2} \hbar \omega_3$

Mouvement forcé de l'électron

Pour une excitation résonnante

$$z_F(t) = z_0 \cos \omega_3 t$$

Mouvement global

Comme les équations sont linéaires, le mouvement global est la superposition du mouvement forcé et du mouvement dû au bruit

$$z(t) = [z_0 + P(t)] \cos \omega_3 t + \varphi(t) \sin \omega_3 t$$

Energie instantanée

(19)

$$E(t) = \frac{1}{2} m_e \omega_3^2 z^2(t) + \frac{1}{2} m_e \dot{z}^2(t)$$

A partir de l'expression de z (et en négligeant toujours \dot{P} et $\dot{\varphi}$ devant $\omega_3 P$ et $\omega_3 \varphi$), on obtient

$$E(t) = \frac{1}{2} m_e \omega_3^2 \left[\underbrace{z_0^2}_{(1)} + \underbrace{P^2(t) + \varphi^2(t)}_{(2)} + \underbrace{2z_0 P(t)}_{(3)} \right]$$

- ① Energie du mouvement forcé
- ② Energie du bruit
- ③ Terme d'interférence entre z_F et z_B
"Hétérodynage du bruit par le signal"

Energie moyenne

Comme $\overline{P^2} = \overline{\varphi^2} = \hbar/2m_e \omega_3$, $\overline{P} = 0$

$$\overline{E} = \frac{1}{2} m_e \omega_3^2 z_0^2 + \frac{1}{2} \hbar \omega_3$$

En identifiant \overline{E} à $(\bar{k} + \frac{1}{2}) \hbar \omega_3$, on relie z_0 à \bar{k}

$$\frac{1}{2} m_e \omega_3^2 z_0^2 = \bar{k} \hbar \omega_3$$

Fluctuations de l'énergie

(20)

$$\delta E(t) = E(t) - \overline{E(t)}$$

En ignorant la différence entre $A^2(t) + B^2(t)$ et $\overline{A^2} + \overline{B^2}$, on obtient

$$\delta E(t) = m_e \omega_3^2 z_0 P(t)$$

$\delta E(t)$ a donc le même temps de corrélation que $P(t)$

$$\overline{\delta E(t+\tau) \delta E(t)} = \overline{\delta E^2} e^{-\gamma_3 |\tau|/2}$$

$$\text{Or, } \overline{\delta E^2} = m_e^2 \omega_3^4 z_0^2 \overline{P^2} = (\hbar \omega_3)^2 \bar{k}$$

$$= \frac{2 \bar{k} m_e \hbar \omega_3^3}{2 m_e \omega_3} = \hbar \omega_3 \bar{k}$$

$$\hookrightarrow \overline{\delta E(t+\tau) \delta E(t)} = (\hbar \omega_3)^2 \bar{k} e^{-\gamma_3 |\tau|/2}$$

- Comme

$$\delta E(t) = \hbar \omega_3 \delta k(t)$$

on en déduit finalement

$$\overline{\delta k(t+\tau) \delta k(t)} = \bar{k} e^{-\gamma_3 |\tau|/2}$$

$\overline{\delta k^2} = \bar{k}$ croit avec \bar{k} (Poisson)

Grandes lignes du calcul quantique (21)

① On sait écrire l'équation pilote décrivant la relaxation d'un oscillateur harmonique quantique couplé à un thermostat de température T quelconque, en particulier nulle (cf équations XII-18 du cours 1975-76 avec $\langle n_0 \rangle = 0$ puisque $T = 0$)

$$\frac{d}{dt} \sigma = -i\omega_3 [a_3^\dagger a_3, \sigma] + \frac{\gamma_3}{2} [-a_3^\dagger a_3 \sigma - \sigma a_3^\dagger a_3 + 2a_3 \sigma a_3^\dagger]$$

σ : opérateur densité
 γ_3 : Taux d'amortissement de l'énergie

② On ajoute à cette équation les termes décrivant le couplage avec le champ extérieur monochromatique mettant l'oscillateur en mouvement forcé

Il est alors possible d'écrire les équations d'évolution des valeurs moyennes des diverses observables

③ Par exemple, on trouve que (22) $\langle \delta N_3(t) \rangle, \langle \delta a(t) \rangle, \langle \delta a^\dagger(t) \rangle$ obéissent à des équations d'évolution formant un système fermé, de la forme

$$\frac{d}{dt} \langle \delta N_3(t) \rangle = \alpha \langle \delta N_3(t) \rangle + \beta \langle \delta a(t) \rangle + \gamma \langle \delta a^\dagger(t) \rangle$$

④ Le théorème de régression quantique permet alors de calculer les fonctions de corrélation. Il indique en effet que si $t > t'$

$$\frac{d}{dt} \langle \delta N_3(t) \delta N_3(t') \rangle = \alpha \langle \delta N_3(t) \delta N_3(t') \rangle + \beta \langle \delta a(t) \delta N_3(t') \rangle + \gamma \langle \delta a^\dagger(t) \delta N_3(t') \rangle$$

On peut ainsi calculer $\langle \delta N_3(t) \delta N_3(t') \rangle$ en fonction des moyennes à un temps $\langle \delta N_3(t') \delta N_3(t') \rangle, \langle \delta a(t') \delta N_3(t') \rangle, \langle \delta a^\dagger(t') \delta N_3(t') \rangle$, elles mêmes calculables à partir de l'équation pilote

On démontre ainsi que

$$\langle \delta N_3(t+\tau) \delta N_3(t) \rangle = \langle N_3 \rangle e^{-\gamma_3 |\tau|/2}$$

Rotation aléatoire du spin pendant le temps de mesure T_m (23)

- Le spin étant à l'instant $t = 0$ dans l'état \uparrow , faisons une impulsion $\pi/2$ (très courte devant T_m) qui le met dans l'état

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)$$

- L'aimantation transversale précesse ensuite autour de Oz à la fréquence de Larmor ω_L . Comme ω_L dépend de k , et que k est une fonction aléatoire de t , le spin subit une rotation aléatoire qui, accumulée entre

0 et T_m , vaut

$$\begin{aligned} \delta\phi(T_m) &= \delta_0 \int_0^{T_m} dt \delta k(t) = \\ &= \delta_0 T_m \underbrace{\frac{1}{T_m} \int_0^{T_m} dt \delta k(t)}_{\delta K(t)} \end{aligned}$$

$\delta K(t)$: Moyenne de $\delta k(t)$ sur le temps T_m

Rotation quadratique moyenne (24)

$$\begin{aligned} \overline{\delta\phi(T_m)} &= \delta_0 T_m \overline{\delta K(t)} = 0 \\ \overline{\delta\phi^2(T_m)} &= \delta_0^2 T_m^2 \overline{\delta K^2(t)} \end{aligned}$$

Calcul de $\overline{\delta K^2(t)}$

Comme $\delta k(t)$ s'obtient à partir de $\delta k(t)$ par une moyenne temporelle, c-à-d encore par un filtrage, il est commode de passer dans l'espace de Fourier et d'introduire les densités spectrales $J_{\delta k}(\omega)$ et $J_{\delta K}(\omega)$ de δk et δK

Densité spectrale de δk

$$\begin{aligned} J_{\delta k}(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau e^{-i\omega\tau} \overline{\delta k(t+\tau) \delta k(t)} \\ &= \bar{k} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau e^{-i\omega\tau} e^{-\gamma_3 |\tau|/2} \\ &= 2\bar{k} \frac{\frac{\gamma_3}{2}}{\omega^2 + \left(\frac{\gamma_3}{2}\right)^2} \end{aligned}$$

Densité spectrale de δK (25)

$$J_{\delta K}(\omega) = J_{\delta K}(\omega) |G(\omega)|^2$$

où $|G(\omega)|^2 = \frac{\sin^2(\omega T_m/2)}{(\omega T_m/2)^2}$

$G(\omega)$ est la transformée de Fourier de la fonction de filtrage $\frac{1}{T_m} \theta(t) \theta(T_m-t)$
 [θ : Fonction de Heaviside]

Comme $\delta_3 \gg 1/T_m$

$$J_{\delta K}(\omega) \approx \underbrace{J_{\delta K}(\omega=0)}_{4\bar{k}/\delta_3} |G(\omega)|^2 = \frac{4\bar{k}}{\delta_3} |G(\omega)|^2$$

Expression de $\overline{\delta K^2(t)}$

$$\overline{\delta K^2(t)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega J_{\delta K}(\omega)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \frac{4\bar{k}}{\delta_3} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega |G(\omega)|^2}_{2\pi/T_m}$$

↳ $\overline{\delta K^2} = \frac{4\bar{k}}{\delta_3 T_m}$

Calcul de $\overline{\delta\phi^2(T_m)}$ (25)

$$\overline{\delta\phi^2(T_m)} = \delta_0^2 T_m^2 \overline{\delta K^2} = \frac{4\bar{k} \delta_0^2 T_m}{\delta_3}$$

Or, nous avons vu plus haut (cf Transparent VI-12) que $T_m = \gamma_3 / \bar{k} \delta_0^2$.
 Donc,

$\overline{\delta\phi^2(T_m)} = 4$

Ainsi, l'amplitude de la rotation aléatoire du spin pendant le temps T_m ne dépend pas de T_m , et est de l'ordre de 2 radians.

Si l'on diminue T_m en augmentant \bar{k} , les fluctuations de k augmentent suffisamment pour produire la même rotation aléatoire pendant le temps T_m plus court.

Discussion physique (27)

Le fait que la rotation aléatoire du spin soit de l'ordre de 2 radians signifie que l'évolution aléatoire du spin, pendant le temps de mesure minimum T_m , a transformé la superposition linéaire initiale d'états $(|b\rangle + |f\rangle) / \sqrt{2}$ en un mélange statistique des états $|b\rangle$ et $|f\rangle$ avec des poids égaux $1/2$ et $1/2$.

Ainsi, le temps minimum pour faire la mesure la plus idéale possible est aussi le temps au bout duquel l'interaction avec le dispositif de mesure a brouillé les phases relatives entre les diverses composantes du "paquet d'ondes" initial pour ne garder que les probabilités de chaque composante.

Paradoxe de Zénon (28)

D'après le postulat de réduction du paquet d'ondes, immédiatement après une mesure, le système est dans l'état propre correspondant à la valeur propre observée. La même mesure, recommencée tout de suite après, redonne le même résultat, et ainsi de suite...

Il semble ainsi que le fait de mesurer en permanence un système physique l'empêche d'évoluer.

Un tel raisonnement ne tient pas compte cependant du fait que toute mesure nécessite un temps fini et non nul. Comment peut-on reformuler le paradoxe de Zénon à la lumière des résultats obtenus plus haut sur T_m ?

Exemple simple d'évolution (29)

Soumettons le spin à une impulsion de champ de radiofréquence $B_1 \cos \omega_1 t$ durant un temps τ_p tel qu'en l'absence de toute autre perturbation, on ait une impulsion π faisant passer le spin de l'état $| \downarrow \rangle$ à $| \uparrow \rangle$,

$$\omega_1 \tau_p = \pi$$

$\omega_1 = -\gamma B_1 =$ Fréquence de Rabi

Problème

Comment varie la probabilité de basculement du spin $P_{\downarrow \rightarrow \uparrow}(\tau_p)$ à l'issue de l'impulsion, lorsqu'on fait varier le rapport τ_p/T_m d'une valeur très petite devant 1 à une valeur très grande devant 1 (ω_1 et τ_p étant toujours reliés par $\omega_1 \tau_p = \pi$) ?

VI-9

Cas $\tau_p \ll T_m$

(30)

Dans ce cas, on peut négliger l'interaction du spin avec l'appareil de mesure pendant l'impulsion τ_p , qui est bien alors une impulsion π . Le spin a bien basculé à l'issue du temps τ_p

$$P_{\downarrow \rightarrow \uparrow}(\tau_p) = 1 \quad \text{si } \tau_p \ll T_m$$

Cas $\tau_p \gg T_m$

Dans ce cas, on ne peut plus ignorer l'interaction du spin avec l'appareil de mesure pendant τ_p .

On peut dire encore qu'on fait plusieurs mesures (en fait τ_p/T_m mesures) de l'état de spin pendant le temps τ_p où il est soumis à l'impulsion RF.

A cause de la rotation aléatoire du spin, introduite par la bouteille magnétique, on s'attend à ce que $P_{\downarrow \rightarrow \uparrow}$ soit $\ll 1$

Calcul de $P_{\downarrow \rightarrow \uparrow}(\tau_p)$ si $\tau_p \gg T_m$ (31)

- Comme T_m est le temps au bout duquel la phase relative entre les 2 états de spin est brouillée, T_m peut être considéré comme un temps de relaxation T_2 pour le spin, et la largeur de la raie de résonance du spin est $1/T_2 = 1/T_m$

- Comme $\omega_1 \tau_p = \pi$ et que $\tau_p \gg T_m$,
 $\omega_1 \ll 1/T_m$

ω_1 étant très petit devant la largeur de raie de résonance du spin, on n'a plus de précession de Rabi, mais une probabilité de transition par unité de temps

$$W_{\downarrow \rightarrow \uparrow} \sim \frac{\omega_1^2}{T_m^{-1}} = \omega_1^2 T_m$$

On en déduit que, si $\tau_p \gg T_m$

$$P_{\downarrow \rightarrow \uparrow}(\tau_p) = W_{\downarrow \rightarrow \uparrow} \times \tau_p \sim$$

$$\sim \omega_1^2 T_m \tau_p = \underbrace{\omega_1^2 \tau_p^2}_{\pi^2} \frac{T_m}{\tau_p} = \frac{\pi^2 T_m}{\tau_p} \ll 1$$

Résolution du paradoxe (32)

- Le temps de mesure T_m est fini et non nul
- Si l'on observe le spin plusieurs fois pendant τ_p , la probabilité de transition n'est pas nulle, tout en étant très petite puisque proportionnelle à T_m/τ_p
- Pour une valeur donnée de T_m , il suffit d'utiliser une impulsion π suffisamment courte ($\tau_p \ll T_m$) pour retrouver une évolution normale non perturbée

Introduction - Motivations (Transparent 1)

- ① Piège de capture et piège de mesure (2 à 3)
- ② Capture et refroidissement des positrons (4 à 7)
- ③ Détection des positrons et mesure des fréquences de résonance (8 à 10)

Références

- (1) P. SCHWINBERG, R. VAN DYCK, H. DEHMELT
Precision measurement and Fundamental constants II
B. Taylor and W. Phillips eds, NBS Special publication 617
(1984) p. 215
- (2) Mêmes auteurs, Phys. Lett. 81A, 119 (1981)
- (3) Mêmes auteurs, Phys. Rev. Lett. 47, 1679 (1981)

Etude des corrections relativistes

Introduction - Motivations (11)

- ① Discussion qualitative : Conséquences de la variation relativiste de masse (12 à 15)
- ② Niveaux d'énergie d'un électron dans un champ magnétique uniforme
 - a) Equation de Dirac sans terme d'anomalie.
- Valeurs propres exactes (16 à 17)
 - b) Equation de Dirac avec terme d'anomalie.
- Valeurs propres exactes (18)
- Diagramme énergétique et spectre de raies cyclotron pour une énergie longitudinale nulle (19 à 21)
- Cas d'une énergie longitudinale non nulle (22)
- ③ Niveaux d'énergie d'un électron dans un piège de Penning
 - a) Equations de Dirac avec terme d'anomalie (23)
 - b) Transformation de Foldy - Wouthuysen et nouvel hamiltonien pair (24 à 25)
 - c) Interprétation physique des diverses corrections relativistes (26 à 27)
 - d) Effet des corrections relativistes sur les fréquences de Bohr (28 à 30)

Références : voir page VII-9

Détermination de l'anomalie g-2 du positron

Intérêt

La comparaison de g-2 pour e+ et e- est un test sévère de la symétrie matière - antimatière (CPT)

Principale difficulté

Faire entrer dans un piège de Penning un positron émis par une source radioactive et le maintenir dans ce piège

Méthode suivie

- Utilisation de 2 pièges en série
- Le premier sert essentiellement à capturer le positron et à le refroidir
- Le positron est ensuite transféré dans un second piège, dont les défauts sont compensés avec soin et qui sert à faire des mesures précises

Pièges de capture et de mesure
(Figures extraites de (1))

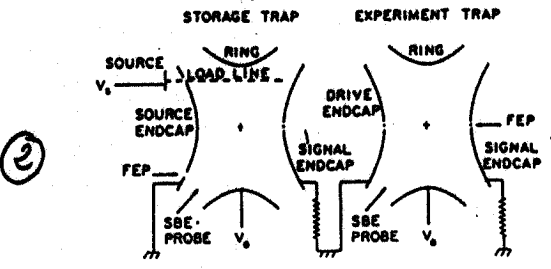
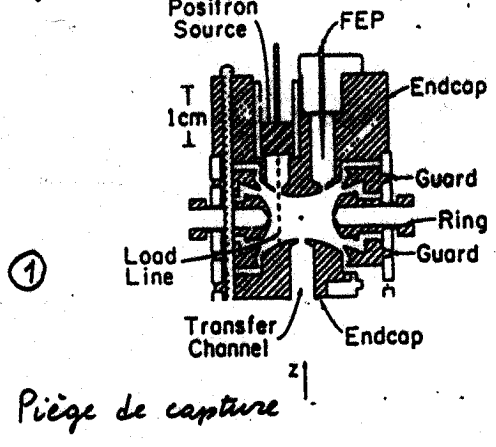


Figure 1

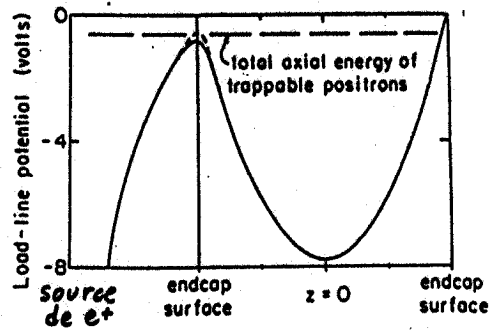
- La source de positrons est une source de Sodium 22 radioactif
- L'axe d'injection ("load line") est parallèle à Oz et décalé par rapport au centre du piège
- Il est possible également d'injecter des électrons par une pointe à effet de champ ("FEP")
- Quand on étudie des e+, le potentiel V_0 de l'anneau est négatif

Figure

- Il y a trop de trous dans le piège de capture pour qu'on puisse compenser efficacement ses défauts
- Une fois que les positrons sont capturés et refroidis (par excitation à bande latérale "side band excitation"), ils sont transférés dans un piège de mesure hautement compensé par une impulsion entre les 2 coupelles adjacentes

Potentiel le long de l'axe d'injection
(Figure extraite de (1))

- La source de Na²² est à un potentiel -300 volts par rapport aux coupelles



Le potentiel, partant de -300 v, passe par un maximum légèrement négatif au niveau du trou d'entrée, puis par un minimum au niveau de l'anneau, et recroît ensuite pour s'annuler sur la coupelle inférieure

Trajectoire des positrons

(5)

- Les positrons émis ont une énergie (~ 100 keV) essentiellement cyclotron dans le champ \vec{B}_0 de 51 kG
- Leur mouvement le long de O₃ est guidé par \vec{B}_0 et a une énergie beaucoup plus faible. Les positrons dont l'énergie est suffisante pour franchir le "col" de potentiel au niveau du trou d'entrée pénètrent dans le piège. Certains d'entre eux, dont l'énergie n'est pas trop élevée, rebroussement chemin sans heurter la coupelle inférieure
- Pendant cet aller et retour entre le trou d'entrée et la coupelle inférieure, la rotation magnétron a dévié latéralement le centre de la trajectoire et, au retour, le positron est plus proche des bords du trou d'entrée, et voit donc un maximum de potentiel légèrement plus grand (ligne en pointillés de la figure)

Capture des positrons

(6)

- Les positrons capturés sont ceux dont l'énergie le long de O₃ est suffisante pour franchir le col à l'entrée, mais insuffisante pour franchir la barrière un peu plus élevée qu'ils trouvent au retour
- Après une période magnétron, les positrons reviennent exactement sur l'axe d'injection, au centre du trou d'entrée, mais ils ont fait alors plusieurs allers et retours, et le mouvement de vibration correspondant a été amorti par dissipation du courant induit dans la résistance extérieure
- Si cette dissipation est suffisante, ils n'ont plus assez d'énergie pour franchir le col et sortir

Refroidissement des positrons

(7)

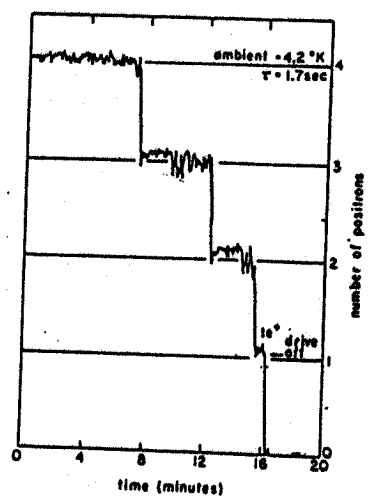
- L'énergie du mouvement cyclotron est amorti par émission spontanée (rayonnement synchrotron)
- Le mouvement de vibration axiale est amorti par dissipation du courant induit dans le circuit externe
- Le mouvement magnétron (essentiel pour la phase initiale de la capture) est amorti par refroidissement radiatif par excitation RF à $\omega_3 + \omega_m$; ce qui amène les positrons au centre du piège.

Environ 25 positrons sont ainsi capturés par heure avec une source de 0,5 mCi

Détection des positrons

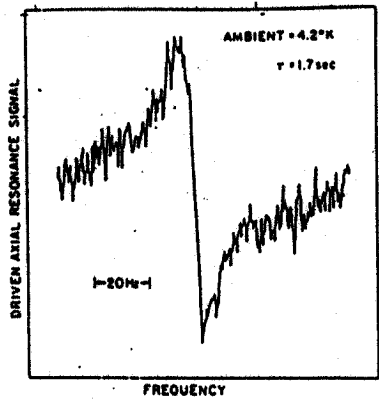
(8)

(Figure extraite de (1))



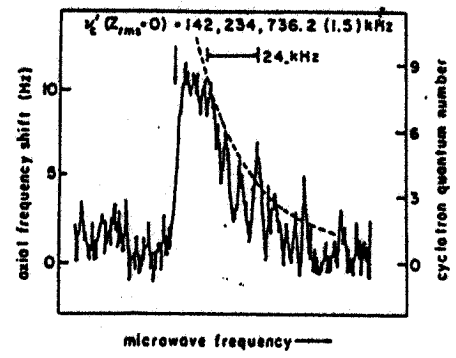
Méthode habituelle utilisant la vibration axiale et des impulsions RF pour les éjecter un à un et n'en garder qu'un seul

Exemple de résonance axiale (9)

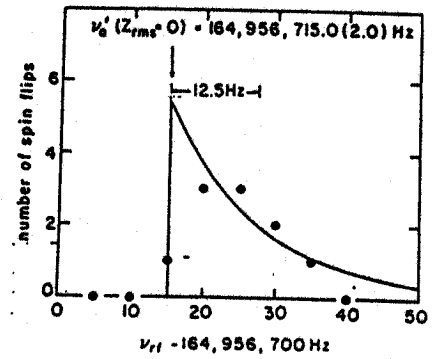


Réglage de la détection synchrone pour obtenir une courbe en forme de dispersion

Exemple de résonance cyclotron (10)



Exemple de résonance d'anomalie



(Figures extraites de (1))

Corrections relativistes (11)

Problème

Comment les niveaux d'énergie et les fréquences de Bohr d'un électron dans un piège de Penning sont-ils modifiés par les corrections relativistes?

Intérêt

- ① Evaluer à partir de quelle précision il faut tenir compte de ces corrections dans la détermination expérimentale de $g-2$
- ② Possibilité d'utiliser ces effets pour détecter les résonances cyclotron et de spin sans bouteille magnétique et, par suite, sans les inhomogénéités de champ magnétique associées à cette bouteille.

Discussion qualitative (12)

Effet sur le mouvement cyclotron

- Pour un mouvement d'énergie cinétique $E = \frac{1}{2} m_e v^2$ (avec $E \ll m_e c^2$), l'accroissement relativiste de masse δm_e vaut

$$\delta m_e = \frac{E}{c^2}$$

- Comme la fréquence cyclotron à la limite $E \rightarrow 0$, $\omega_{c0} = -q B_0 / m_e$, est proportionnelle à $\frac{1}{m}$, on a

$$\frac{\delta \omega_c}{\omega_{c0}} = - \frac{\delta m_e}{m_e} = - \frac{E}{m_e c^2}$$

$$\omega_{c0} \rightarrow \omega_{c0} \left(1 - \frac{E}{m_e c^2} \right)$$

La fréquence cyclotron diminue quand l'énergie augmente. Les niveaux cyclotron se resserrent quand on monte en énergie. L'oscillateur d qui décrit ces niveaux est anharmonique

Ordres de grandeur

$$\frac{\delta \omega_c}{\omega_{c0}} = - \frac{E}{m_e c^2} = - \frac{E \text{ volt}}{5 \cdot 10^5}$$

$$= 2 \cdot 10^{-6} \text{ pour } E = 1 \text{ volt}$$

$$E \approx (n + \frac{1}{2}) \hbar \omega_{c0} \approx n \hbar \omega_{c0} \text{ (si } n \gg 1)$$

n : nombre quantique cyclotron

$$\hbar \omega_{c0} = 0,68 \cdot 10^{-3} \text{ volt}$$

pour $B = 60 \text{ kG}$ ($\frac{\omega_{c0}}{2\pi} = 164 \text{ GHz}$)

$$\frac{\hbar \omega_{c0}}{m_e c^2} = 1,3 \cdot 10^{-9}$$

Si $n = 100$, $\frac{\delta \omega_c}{\omega_{c0}} = 1,3 \cdot 10^{-7}$

$$\frac{\delta \omega_c}{2\pi} = 21 \text{ KHz}$$

Effet tout à fait détectable

(13) Effet sur le mouvement de vibration

Comme $\omega_z^2 = 4|q|U_0 / m_e(r_0^2 + 2z_0^2)$ (14)

$$\frac{\delta \omega_z}{\omega_z} = - \frac{1}{2} \frac{\delta m_e}{m_e} = - \frac{E}{2m_e c^2}$$

Si le mouvement cyclotron est excité vers $n = 100$

$$E = 100 \hbar \omega_{c0} = 68 \cdot 10^{-3} \text{ volt}$$

et $\frac{\delta \omega_z}{\omega_z} = - \frac{68 \cdot 10^{-3}}{10^6} = -6,8 \cdot 10^{-8}$

Si $\frac{\omega_z}{2\pi} = 60 \text{ MHz}$ $\delta \omega_z / 2\pi = -4 \text{ Hz}$

L'excitation du mouvement cyclotron peut être détectée par une variation de la fréquence de vibration axiale, comme dans la méthode utilisant une bouteille magnétique.

La sensibilité est cependant 25 fois plus faible que pour la bouteille magnétique ($\delta_0 = 1 \text{ Hz}$ pour $\Delta n = 1$)

Autres problèmes à résoudre (15)

Quelles sont les corrections relativistes sur les transitions de Spin, sur les transitions d'anomalie?

Traitement quantitatif

- Basé sur l'équation de Dirac, généralisée pour inclure un terme décrivant le moment magnétique anormal.

- Possibilité de trouver les valeurs propres exactes de cette équation dans quelques cas simples (champ magnétique uniforme seul).

- Dans les autres cas, étude de la limite non relativiste de cette équation et obtention d'un hamiltonien de Pauli (Transformation de Foldy-Wouthuysen)

Niveaux d'énergie dans un champ magnétique uniforme B_0 (16)

Equation de Dirac (sans terme d'anomalie, $g=2$)

$$i \hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = \mathcal{H}_D \psi$$

$$\mathcal{H}_D = c \vec{\alpha} \cdot \vec{\pi} + \beta m_e c^2$$

$$\vec{\pi} = \vec{p} - q \vec{A} \quad \vec{B}_0 = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

$\vec{\alpha}, \beta$ Matrices de Dirac

Problème soluble

Expression des valeurs propres

$$E = [m_e^2 c^4 + 2m_e c^2 j \hbar \omega_{c0} + c^2 \pi_z^2]^{1/2}$$

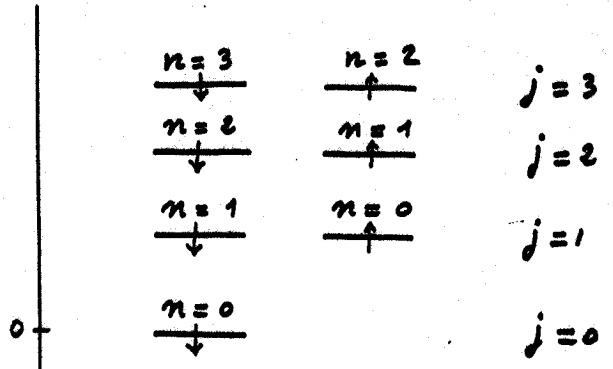
π_z : valeur propre de π_z

$$j = n + m + \frac{1}{2}$$

$n = 0, 1, 2, \dots$ Landau $m = -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}$ Spin

Diagramme énergétique
(dans le sous espace $\pi_3 = 0$)

(17)



L'énergie ne dépend que de $j = m + n + \frac{1}{2}$
 Dégénérescence 2 pour chaque valeur de j
 Les niveaux vont en se resserrant
Limite $v \ll c$

$$E = m_e c^2 \left[1 + 2j \frac{\hbar \omega_{c0}}{m_e c^2} \right]^{1/2}$$

$$= m_e c^2 + j \hbar \omega_{c0} - \frac{1}{2} \frac{j^2 \hbar^2 \omega_{c0}^2}{m_e c^2} + \dots$$

$$= m_e c^2 + (m + n + \frac{1}{2}) \hbar \omega_{c0} \left[1 - \frac{(m + n + \frac{1}{2}) \hbar \omega_{c0}}{2 m_e c^2} \dots \right]$$

Equation de Dirac avec terme
supplémentaire pour décrire le
moment magnétique anormal

(18)

Nouvel hamiltonien

$$\mathcal{H}_D = c \vec{\alpha} \cdot \vec{\pi} + \beta m_e c^2 + \beta a \frac{q \hbar}{4 m_e c} \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$$

$$a = \frac{g-2}{2}$$

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \text{ Tenseur de spin}$$

$$F_{\mu\nu} : \text{Tenseur champ électromagnétique}$$

$$\frac{1}{2} \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = i \vec{\alpha} \cdot \vec{E} - c \vec{\Sigma} \cdot \vec{B}_0$$

$$\vec{\Sigma} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix} \quad \vec{\sigma} : \text{Matrices de Pauli}$$

Là encore, le problème est soluble exactement si $\vec{E} = \vec{0}$ et si \vec{B}_0 est uniforme. Les valeurs propres sont

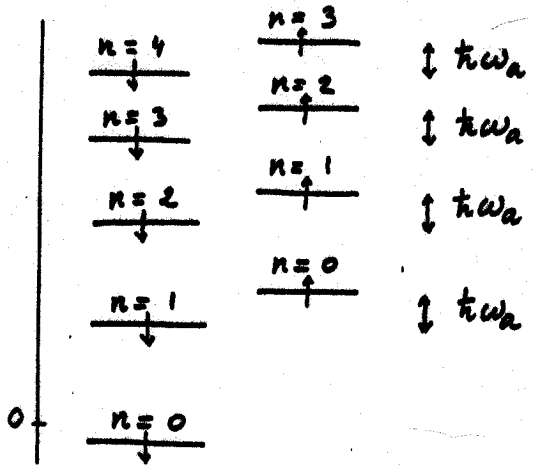
$$E = \left\{ \left[(m_e c^2 + 2 m_e c^2 j \hbar \omega_{c0})^{1/2} + m \hbar \omega_a \right]^2 + c^2 \pi_3^2 \right\}^{1/2}$$

$$\omega_a = a \omega_{c0} = \frac{g-2}{2} \omega_{c0}$$

Diagramme énergétique
(dans le sous espace $\pi_3 = 0$)

(19)

$$E = m_e c^2 \left[1 + 2j \frac{\hbar \omega_{c0}}{m_e c^2} \right]^{1/2} + m \hbar \omega_a$$



Dans chaque colonne $m = \downarrow$ ou $m = \uparrow$, les niveaux vont en se resserrant, mais l'écart entre les 2 niveaux $n \downarrow$ et $n-1 \uparrow$ de même j reste constant et égal à $\hbar \omega_a$

Limite $v \ll c$ ($\pi_3 = 0$) (20)

$$E_{n,m} = m_e c^2 + j \hbar \omega_{c0} - \frac{j^2 \hbar^2 \omega_{c0}^2}{2 m_e c^2} + m \hbar \omega_a$$

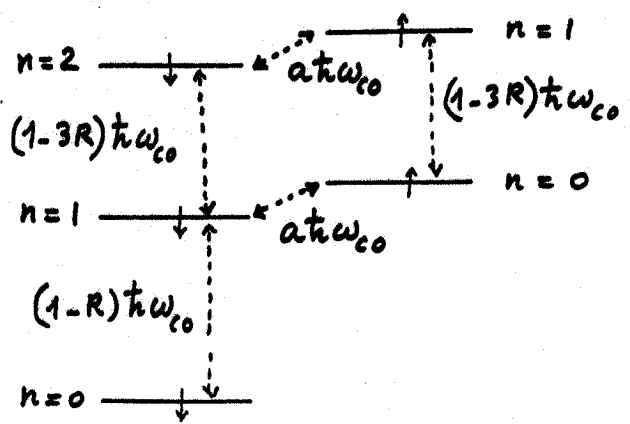
Position des raies cyclotron

$$E_{n+1,m} - E_{n,m} = \hbar \omega_{c0} - (2j+1) \frac{\hbar^2 \omega_{c0}^2}{2 m_e c^2}$$

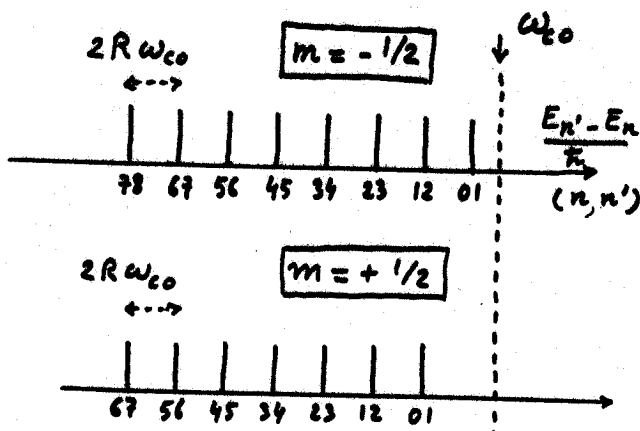
$$= \hbar \omega_{c0} [1 - 2(n+m+1)R]$$

$$R = \frac{\hbar^2 \omega_{c0}^2}{2 m_e c^2} = 5,5 \cdot 10^{-10} \text{ pour } \frac{\omega_3}{2\pi} = 164 \text{ GHz}$$

Position des 5 premiers niveaux



Allure du spectre de raies (21)



Spectre de raies équidistantes avec un écart entre raies $2R\omega_{c0} = 210 \text{ Hz}$

Point important

Le spectre cyclotron n'est pas le même suivant que $m = -\frac{1}{2}$ ou $m = +\frac{1}{2}$

Possibilité d'utiliser cet effet relativiste pour identifier l'état de spin de l'électron

Limite $v \ll c$ avec $\pi_3 \neq 0$ (22)

Le développement de la formule exacte avec $\pi_3 \neq 0$ donne

$$E_{n,m,j,\pi_3} - m_e c^2 = j \hbar \omega_{c0} + m \hbar \omega_a + \frac{\pi_3^2}{2m_e} - \frac{j^2 \hbar^2 \omega_{c0}^2}{2m_e c^2} - \frac{\pi_3^4}{8m_e^3 c^2} - j \hbar \omega_{c0} \frac{\pi_3^2}{2m_e^2 c^2} - m \hbar \omega_a \frac{\pi_3^2}{2m_e^2 c^2}$$

1^{ère} ligne : Termes d'ordre 0 en v/c

2^{ème} ligne : Corrections masse-vitesse des mouvements transverses et longitudinaux (sur eux mêmes et entre eux)

3^{ème} ligne : Correction de la fréquence d'anomalie due au mouvement longitudinal. Pas de correction due au mouvement transverse

Niveaux d'énergie dans un piège de Penning (23)

Equation de Dirac (avec terme d'anomalie)

$$i \hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \mathcal{H}_D \Psi$$

$$\mathcal{H}_D = c \vec{\alpha} \cdot \vec{\pi} + q \phi + \beta m_e c^2 + a \frac{q \hbar}{2m_e c} i \beta \vec{\alpha} \cdot \vec{E} - a \frac{q \hbar}{2m_e} \beta \vec{\Sigma} \cdot \vec{B}_0$$

Termes nouveaux

ϕ : Potentiel électrostatique quadrupolaire du piège

Terme en $\vec{E} = -\vec{\nabla} \phi$ dans la correction d'anomalie en a

Pas de solution exacte connue pour une telle équation

Transformation de Foldy-Wouthuysen (24)

$$\mathcal{H}_D = \beta m_e c^2 + \mathcal{U} + \mathcal{W}$$

\mathcal{U} : opérateur impair

\mathcal{W} : opérateur pair

(c.-à.-d. reliant ou ne reliant pas les 2 premières et 2 dernières composantes des spineurs de Dirac)

Possibilité de rendre \mathcal{H}_D pair par une transformation unitaire

$$\mathcal{H}_D \rightarrow \mathcal{H}'_D = \beta m_e c^2 + \mathcal{W} + \frac{\beta}{2m_e c^2} \mathcal{U}^2$$

$$- \frac{1}{8m_e^2 c^4} [\mathcal{U}, [\mathcal{U}, \mathcal{W}]] - \frac{1}{8m_e^2 c^6} \beta \mathcal{U}^4 + \dots$$

Développement en puissances de $1/c$
Pour le problème étudié ici,

$$\mathcal{U} = \underbrace{c \vec{\alpha} \cdot \vec{\pi}}_{\mathcal{U}_1} + a \underbrace{\frac{q \hbar}{2m_e c} i \beta \vec{\alpha} \cdot \vec{E}}_{\mathcal{U}_2}$$

$$\mathcal{W} = \underbrace{q \phi}_{\mathcal{W}_1} - a \underbrace{\frac{q \hbar}{2m_e} \vec{\Sigma} \cdot \vec{B}_0}_{\mathcal{W}_2}$$

Résultats du calcul

(25)

(à l'ordre 2 inclus en $1/c$)

$$\begin{aligned} \mathcal{H}'_D - \beta m_e c^2 = & \frac{\vec{\pi}^2}{2m_e} + q\phi - \frac{q\hbar}{2m_e} (1+a) \vec{\sigma} \cdot \vec{B}_0 \\ & \uparrow u_1^2 \quad \uparrow w_1 \quad \uparrow u_2^2 \quad \uparrow w_2 \\ - \frac{1}{2m_e c^2} \left[\frac{\vec{\pi}^2}{2m_e} - \frac{q\hbar}{2m_e} \vec{\sigma} \cdot \vec{B}_0 \right]^2 & \leftarrow u_1^4 \\ + \frac{q\hbar^2}{8m_e^2 c^2} \Delta\phi & \leftarrow [u_1, [u_1, w_1]] \\ + \frac{q\hbar}{8m_e^2 c^2} (1+2a) \vec{\sigma} \cdot [\vec{\pi} \times \vec{E} - \vec{E} \times \vec{\pi}] & \leftarrow [u_1, [u_1, w_1]] \quad u_1 u_2 + u_2 u_1 \\ + a \frac{q\hbar}{4m_e^2 c^2} (\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi})(\vec{B}_0 \cdot \vec{\pi}) & \leftarrow [u_1, [u_1, w_2]] \end{aligned}$$

Discussion physique

(26)

1^{ère} ligne

Hamiltonien non relativiste
Energie cinétique + énergie potentielle + énergie de couplage du moment magnétique de spin incluant l'anomalie.

2^{ème} ligne

Corrections masse-vitesse faisant intervenir l'énergie cinétique transverse ($\vec{\pi}_\perp^2/2m_e$) et longitudinale ($\pi_z^2/2m_e$), ainsi que l'énergie de couplage du spin sans l'anomalie

Termes carrés pour chacun de ces 3 termes + Termes rectangles

3^{ème} ligne

Correction de Darwin
Nulle ici car $\Delta\phi = 0$

4^{ème} ligne

(27)

Couplage spin-orbite

$$1 + 2a = 1 + 2 \frac{g-2}{2} = g-1$$

Terme g : Couplage du moment magnétique de spin (incluant l'anomalie) avec le champ magnétique motionnel $-\frac{1}{2c} \vec{v} \times \vec{E}$

Terme -1 Précession de Thomas
Correction cinématique qui n'a aucune raison de dépendre de a

5^{ème} ligne

Correction relativiste à la fréquence de la transition d'anomalie, due à l'énergie cinétique longitudinale

Effet des corrections relativistes (28) sur les fréquences de Bohr

Calcul perturbatif à l'ordre 1 en $1/c^2$

Comme dans le calcul de l'effet de la bouteille magnétique, il ne faut retenir que les termes diagonaux en N_d, N_g, S_z des diverses corrections relativistes en $1/c^2$

On obtient ainsi

- des termes "anharmoniques" en N_d^2, N_g^2
- des termes de couplage "croisés" en $N_d N_g, N_d S_z, N_g S_z$

Confirmation des résultats de la discussion qualitative faite plus haut

1^{er} exemple

Termes en $\frac{\pi_{\perp}^4}{8m_e^3c^2}$ provenant de la 2^{ème} ligne du transparent VII-25

En utilisant les expressions de π_x et π_y en fonction de a_d, a_f, \dots (transparent II-20), on obtient

$$\left(-\frac{\pi_{\perp}^4}{8m_e^3c^2}\right)_{diag} = \frac{1}{2m_e c^2} \underbrace{\frac{\hbar^2 \omega_c^4}{\omega_c^2}}_{\sim \hbar^2 \omega_c^2} (N_d + \frac{1}{2})^2 + \dots$$

En regroupant ce terme avec le terme $\hbar \omega_c' (N_d + \frac{1}{2})$, on obtient

$$(N_d + \frac{1}{2}) \hbar \omega_c' \left[1 - \frac{1}{2m_e c^2} \hbar \omega_c' (N_d + \frac{1}{2}) \right]$$

↳ Fréquence cyclotron dépendant du nombre quantique cyclotron

$$\frac{E_{n+1} - E_n}{\hbar} = \omega_c' \left[1 - \frac{\hbar \omega_c'}{2m_e c^2} (2n+1) \right]$$

(29)

2^{ème} exemple Terme croisé (30)

$$-2 \frac{\pi_3^2 \pi_{\perp}^2}{2m_e} \frac{1}{2m_e c^2}$$
 (2^{ème} ligne de VII-25)

Partie diagonale égale à $-(N_3 + \frac{1}{2}) \hbar \omega_3 (N_d + \frac{1}{2}) \hbar \omega_c' \frac{1}{2m_e c^2}$

Regroupé avec $(N_3 + \frac{1}{2}) \hbar \omega_c'$, donne $(N_3 + \frac{1}{2}) \hbar \omega_3 \left[1 - (N_d + \frac{1}{2}) \frac{\hbar \omega_c'}{2m_e c^2} \right]$

↳ Fréquence de vibration axiale dépendant de l'excitation cyclotron

$$\frac{E_{k+1} - E_k}{\hbar} = \omega_3 \left[1 - (n + \frac{1}{2}) \frac{\hbar \omega_c'}{2m_e c^2} \right]$$

3^{ème} exemple Partie diagonale de la 5^{ème} ligne de VII-25

$$-\hbar \omega_a S_3 \frac{1}{2} (N_3 + \frac{1}{2}) \hbar \omega_3 \frac{1}{2m_e c^2}$$

Regroupé avec $\hbar \omega_a S_3$ donne une fréquence d'anomalie dépendant de k (vibration axiale)

$$\omega_a \rightarrow \omega_a \left[1 - (k + \frac{1}{2}) \frac{\hbar \omega_3}{2m_e c^2} \right]$$

Références

- Equation de Dirac

- (4) A. MESSIAH, Mécanique Quantique Dunod (Paris 1964), chapitre XX
- (5) J.D BJORKEN, S. DRELL, Relativité Quantum Mechanics Mc Graw Hill (New York 1964) chapitres 1 et 4

- Solutions dans un champ magnétique uniforme

- (6) W. TSAI, Phys. Rev. 7D, 1945 (1973)
- (7) H. MENDLOWITZ, K. CASE, Phys. Rev. 97, 33 (1955)
- (8) R. VAN DYCK, P. SCHWINBERG, H. DEHMELT "Electron Magnetic Moment from Geonium Spectra I" Preprint soumis à Phys. Rev. D (1984)

- Transformation de Foldy Wouthuysen : references (4), (5) et

- (9) C. COHEN-TANNOUDJI, Cours au Collège de France 1980-81 Cours VI, VII, VIII
- (10) C. LHUILLIER Thèse Paris 1976
- (11) R. HEGSTROM, C. LHUILLIER Phys. Rev. A 15, 1797 (1977)

- Application au piège de Penning

- (12) G. GRAFF, E. KLEMP, G. WERTH, Z. Physik 222, 201 (1969)

Buts de ce chapitre : Décrire une expérience récente mettant en évidence un phénomène d'hystérésis et de bistabilité observables sur un électron unique piégé dans un piège de Penning. L'origine physique de l'effet est l'anharmonicité du mouvement cyclotron due à la variation relativiste de la masse.

- ① Excitation forcée du mouvement cyclotron à la fréquence ω
 - a) Calcul de l'énergie cinétique K en régime stationnaire (1 à 2)
 - b) Effet de la variation relativiste de la fréquence cyclotron (3 à 4)
- ② Allure de la courbe de réponse (donnant K en fonction de ω)
 - a) Discussion qualitative
 - Apparition de plusieurs états stationnaires possibles pour une même fréquence d'excitation (5 à 6)
 - Hystérésis et bistabilité (7 à 8)
 - b) Etude quantitative des courbes de réponse (9 à 15)
- ③ Etude expérimentale
 - a) Système étudié - Principe de l'expérience (16 à 17)
 - b) Augmentation de la durée de vie cyclotron par effet cavité (18 à 19)
 - c) Observation de l'hystérésis et de la bistabilité (20 à 21)

Conclusion générale

- ① Récapitulation des résultats obtenus par le groupe de H. Dehmelt (22 à 24)
- ② Prolongements possibles
 - a) Confinement le plus petit possible d'un électron (25)
 - b) Augmentation de la précision de mesure sur $g-2$ (26 à 28)
 - c) Corrections radiatives dans une cavité (29)
 - d) Possibilités d'extension de la méthode à d'autres systèmes (30)

Références

- (1) A. Kaplan Phys. Rev. Lett. 48, 138 (1982)
- (2) H. Dehmelt, G. Gabrielse, B.A.P.S. 26, 797 (1981) et 27, 481 (1982)
- (3) Pour la discussion d'un oscillateur anharmonique, voir L. Landau, E. Lifchitz, Mécanique (Moscou, 1968), § 28
- (4) G. Gabrielse, H. Dehmelt "Relativistically anharmonic cyclotron resonance and cavity lengthened cyclotron lifetime of a single e^- with energies less than 1 eV", Preprint 1984, Soumis à Phys. Rev. A
- (5) G. Gabrielse, R. Van Dyck, P. Schwinberg, H. Dehmelt B.A.P.S. 29, 926 (1984)
- (6) G. Gabrielse, H. Dehmelt, W. Kells, Phys. Rev. Lett. 54, 537 (1985)
- (7) G. Gabrielse, H. Dehmelt, B.A.P.S. 25, 1149 (1980) et dans "Precision measurement and fundamental constants II", B. Taylor and W. Phillips eds, NBS Special publication 617 (1984) - p. 219

Voir la suite des références page VIII - 9

Excitation forcée du mouvement cyclotron à la fréquence ω

Equations classiques

$$\begin{cases} m_e \ddot{x} = q B_0 \dot{y} - m_e \frac{\gamma_c}{2} \dot{x} + q E \cos \omega t \\ m_e \ddot{y} = -q B_0 \dot{x} - m_e \frac{\gamma_c}{2} \dot{y} + q E \sin \omega t \end{cases}$$

On a rajouté aux équations du transparent II-1

- Les termes d'excitation par le champ extérieur E de fréquence ω
- Des termes d'amortissement avec un taux $\gamma_c/2$

En toute rigueur, comme cet amortissement est dû à l'émission spontanée, il faudrait plutôt rajouter des termes en \ddot{x}, \ddot{y} (réaction de rayonnement). Mais pour un mouvement quasi-harmonique, $\ddot{\vec{r}} \approx -\omega^2 \vec{r}$

VIII-2

Solution forcée Si l'on pose (2)

$$\rho = x + iy \quad \omega_{co} = -q B_0 / m_e$$

les équations s'écrivent

$$\ddot{\rho} + \frac{\gamma_c}{2} \dot{\rho} - i \omega_{co} \dot{\rho} = \frac{q E}{m_e} e^{i \omega t}$$

et ont pour solution forcée

$$\rho = \frac{q E}{m_e \omega} e^{i \omega t} \frac{1}{\omega_{co} - \omega + i \frac{\gamma_c}{2}}$$

Energie cinétique du mouvement forcé

$$K = \frac{1}{2} m_e (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2} m_e |\dot{\rho}|^2$$

$$\hookrightarrow K = K_0 \frac{(\gamma_c/2)^2}{(\omega - \omega_{co})^2 + (\gamma_c/2)^2}$$

$$K_0 = \frac{2 q^2 E^2}{m_e \gamma_c^2}$$

Energie cinétique maximale, à résonance, proportionnelle à E^2 , c-à-d à l'intensité de l'excitation

Effet des corrections relativistes (3)

La fréquence propre ω_{co} du mouvement cyclotron diminue quand K augmente (voir VII-12)

$$\frac{\delta m_e}{m_e} = \frac{K}{m_e c^2} \rightarrow \frac{\delta \omega_{co}}{\omega_{co}} = -\frac{\delta m_e}{m_e} = -\frac{K}{m_e c^2}$$

$$\omega_{co} \rightarrow \omega_{co} \left(1 - \frac{K}{m_e c^2}\right)$$

Avec cette nouvelle valeur de ω_{co} , l'expression VIII-2 de K devient

$$K = K_0 \frac{(\gamma_c/2)^2}{\left(\omega - \omega_{co} + \omega_{co} \frac{K}{m_e c^2}\right)^2 + (\gamma_c/2)^2}$$

(On a négligé la variation de K_0 due à la variation de m_e)

Quand on se rapproche de résonance, K augmente, mais cette augmentation de K a pour effet aussi de changer l'écart à résonance

Problème (4)

En l'absence de corrections relativistes, la courbe $K = f(\omega)$ est une lorentzienne symétrique, centrée en ω_{co} , de largeur γ_c .

Comment la courbe $K = f(\omega)$ est-elle modifiée par les corrections relativistes? Quelles sont les conséquences physiques de cette modification?

Changement de variables

$$x = \frac{\omega - \omega_{co}}{\gamma_c/2} \quad \text{Ecart à résonance en unités de } \gamma_c/2$$

$$g = \frac{\omega_{co} K_0}{m_e c^2} \frac{1}{\gamma_c/2} \quad \text{Déplacement relativiste maximal en unités de } \frac{\gamma_c}{2}$$

$$y = \frac{K}{K_0} \quad \text{Energie cinétique en unités de } K_0$$

$$y = \frac{1}{(x + g y)^2 + 1}$$

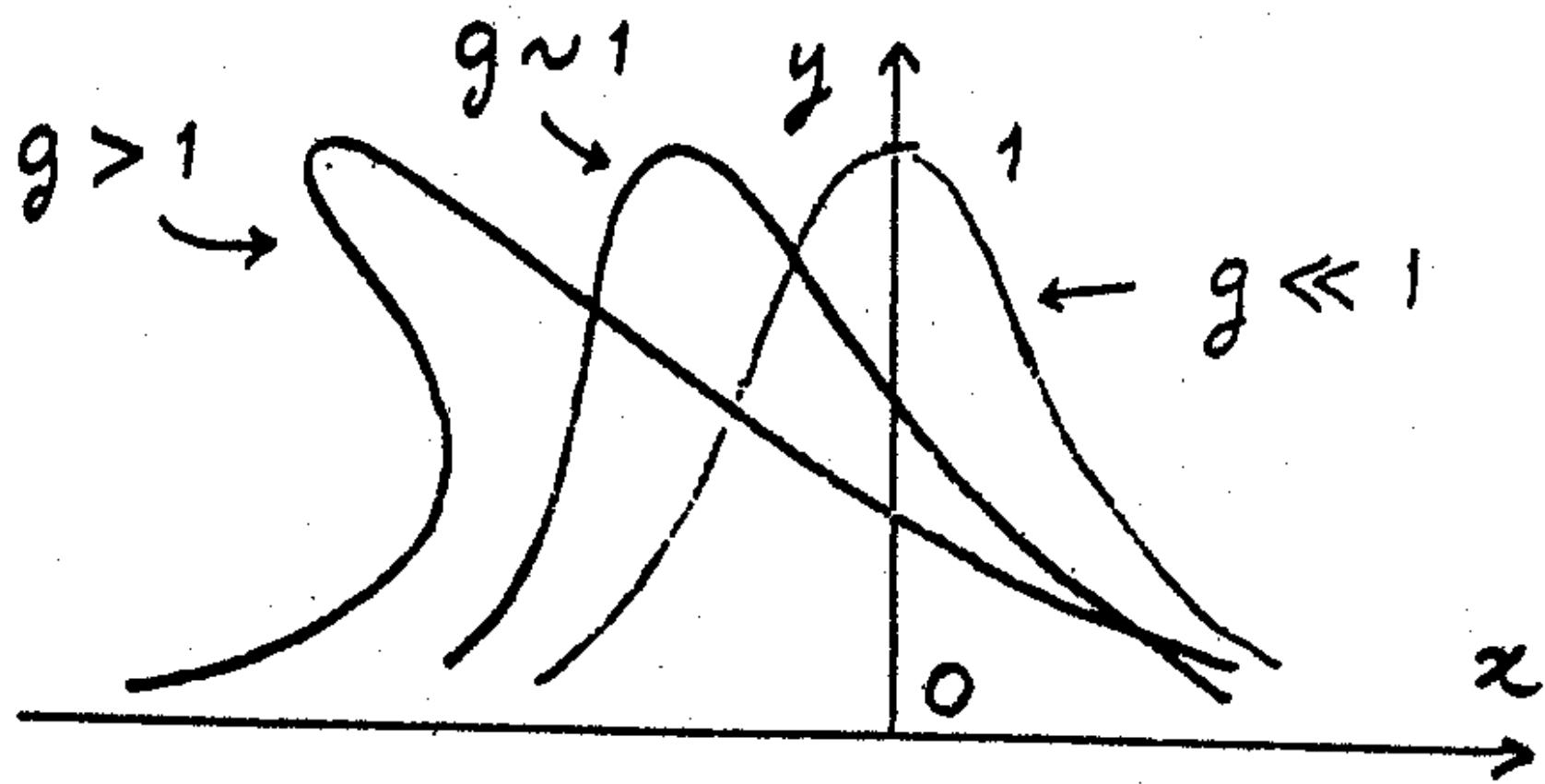
Discussion qualitative

g caractérise l'intensité de l'excitation

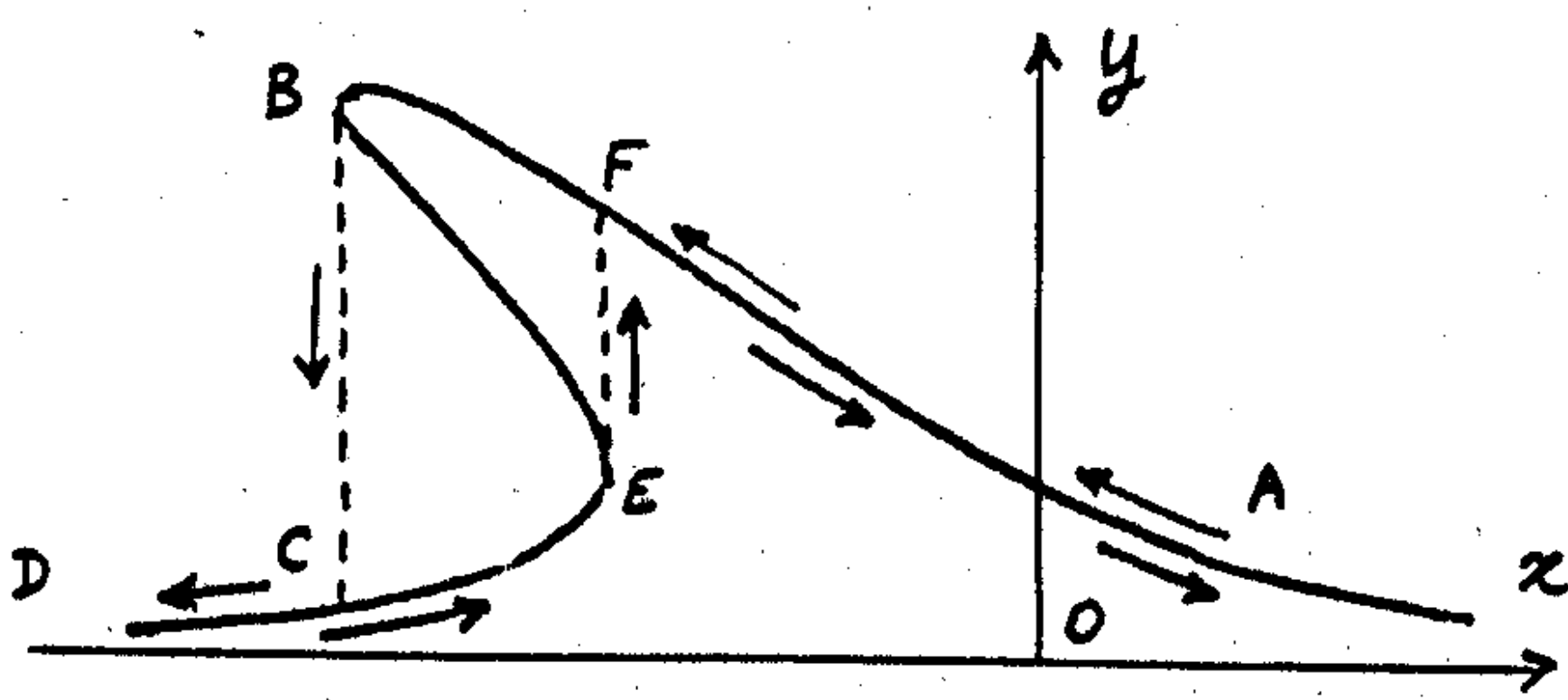
Si $g \ll 1$, le déplacement relativiste maximal est très petit devant la largeur intrinsèque γ_c . On peut l'ignorer. Si l'on fait $g=0$, on retrouve la lorentzienne symétrique $y = 1/(x^2+1)$

Si $g \gtrsim 1$, on ne peut plus ignorer le terme en gy . La courbe $y = f(x, y)$ n'est plus une lorentzienne mais une cubique

- Pour chaque valeur de y , avec $0 \leq y \leq 1$, 2 valeurs de x
- Pour chaque valeur de x , 1, 2 ou 3 valeurs de y

(5) Allure des courbes $y = f(x, y)$ (6)

- Les courbes ont toutes le même maximum $y=1$ atteint en $x=-g$
- Pour $g \ll 1$, lorentzienne symétrique centrée en $x = g \approx 0$
 - Pour $g \sim 1$, le maximum est décalé vers la gauche et la courbe est dissymétrique
 - Pour $g \gg 1$, le maximum est très décalé vers la gauche et il y a une région où y est "trivaluée" (3 valeurs de y pour une valeur de x)

Conséquences physiques du caractère trivaluée de y 

- Quand on balais lentement w par valeurs décroissantes, on parcourt le chemin ABCD (Décrochement brutal en B)
- Puis, quand on revient en sens inverse, on parcourt le chemin DEFA (Décrochement brutal en E)

On peut montrer que les états du segment de courbe EB sont instables.

(7) Hystérésis et bistabilité (8)

La dissymétrie des chemins suivis dans les 2 sens de variation de w est un phénomène d'hystérésis

L'existence d'une plage de valeurs de w où 2 états stables sont possibles (segments BF et CE) est un phénomène de bistabilité

Le point important est que ces phénomènes, habituellement observables sur des systèmes macroscopiques, apparaissent ici sur le système le plus simple qui soit, un électron unique

Le mécanisme physique de ces effets est une non linéarité intrinsèque d'origine relativiste (Voir références (1) et (2))

Etude quantitative

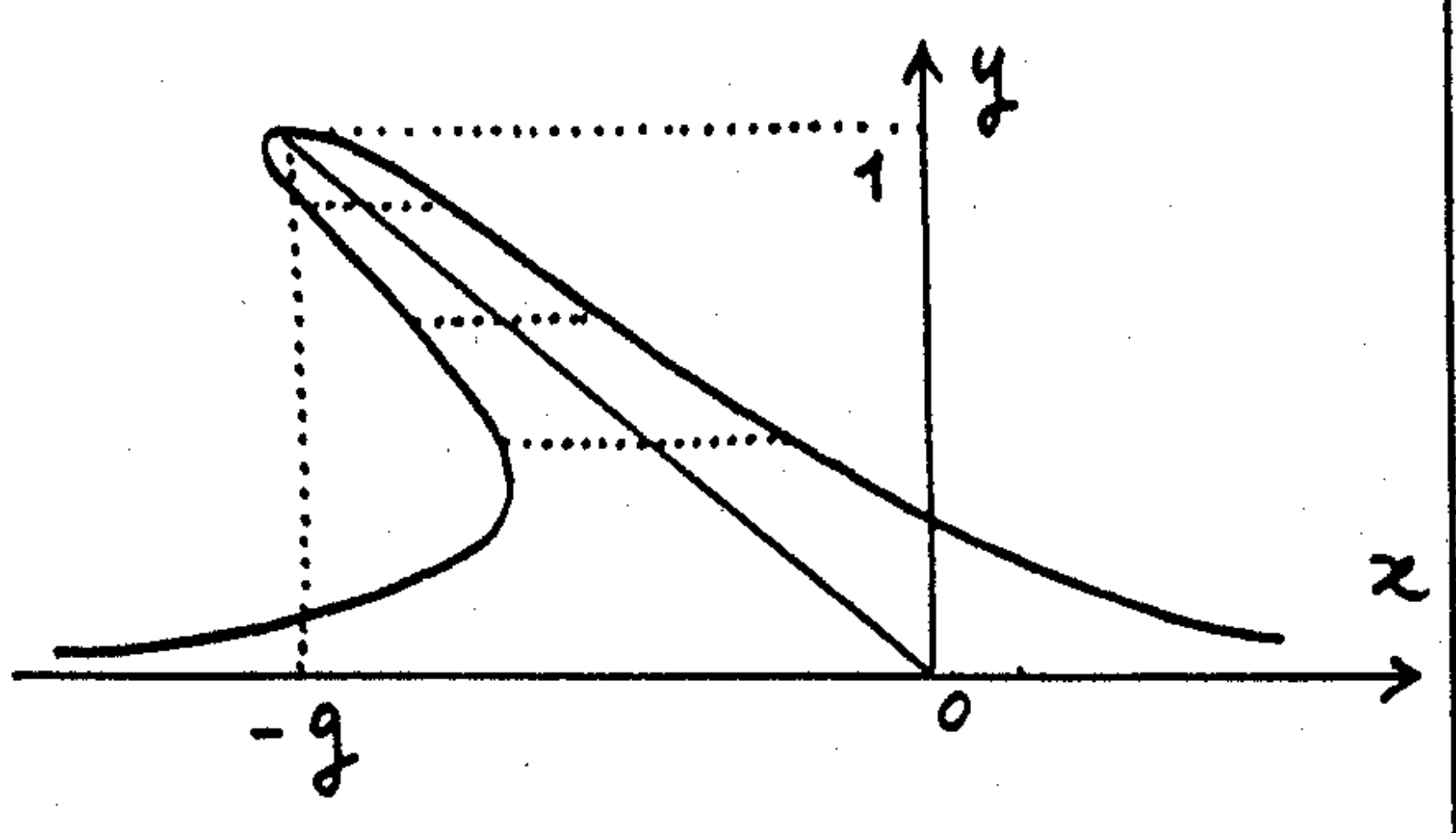
(9) Largeur à mi-hauteur

Lieu des milieux des cordes horizontales

Pour chaque valeur de y ($0 \leq y \leq 1$), les abscisses x_1 et x_2 des 2 points situés sur la courbe sont solutions de $x^2 + 2gyx + g^2y^2 + 1 - \frac{1}{y} = 0$

$\rightarrow (x_1 + x_2)/2 = -gy$

Les milieux des cordes horizontales sont alignés sur une droite passant par 0 et par le maximum ($x = -g, y = 1$)



Si $y = 1/2$, que vaut $x_1 - x_2$?

$x^2 + gx + \frac{g^2}{4} - 1 = 0$

$\rightarrow x_1 = -\frac{g}{2} + 1 \quad x_2 = -\frac{g}{2} - 1$

$\Delta x = x_1 - x_2 = 2$

La largeur à mi-hauteur est indépendante de g

Points où la tangente est verticale

En différentiant l'équation de la courbe

$y = \frac{1}{(x+gy)^2 + 1} \quad (1)$

on obtient

$\frac{dy}{dx} = -\frac{2y(x+gy)}{x^2 + 4gxy + 3g^2y^2 + 1} \quad (2)$

Les points à tangente verticale sont les solutions communes à (1) et à

$x^2 + 4gxy + 3g^2y^2 + 1 = 0 \quad (3)$

Valeur critique de g : \tilde{g}

(au dessus de laquelle il y a un intervalle où y est trivalué)

Point d'inflexion à tangente verticale (les 2 points à tangente verticale sont confondus)

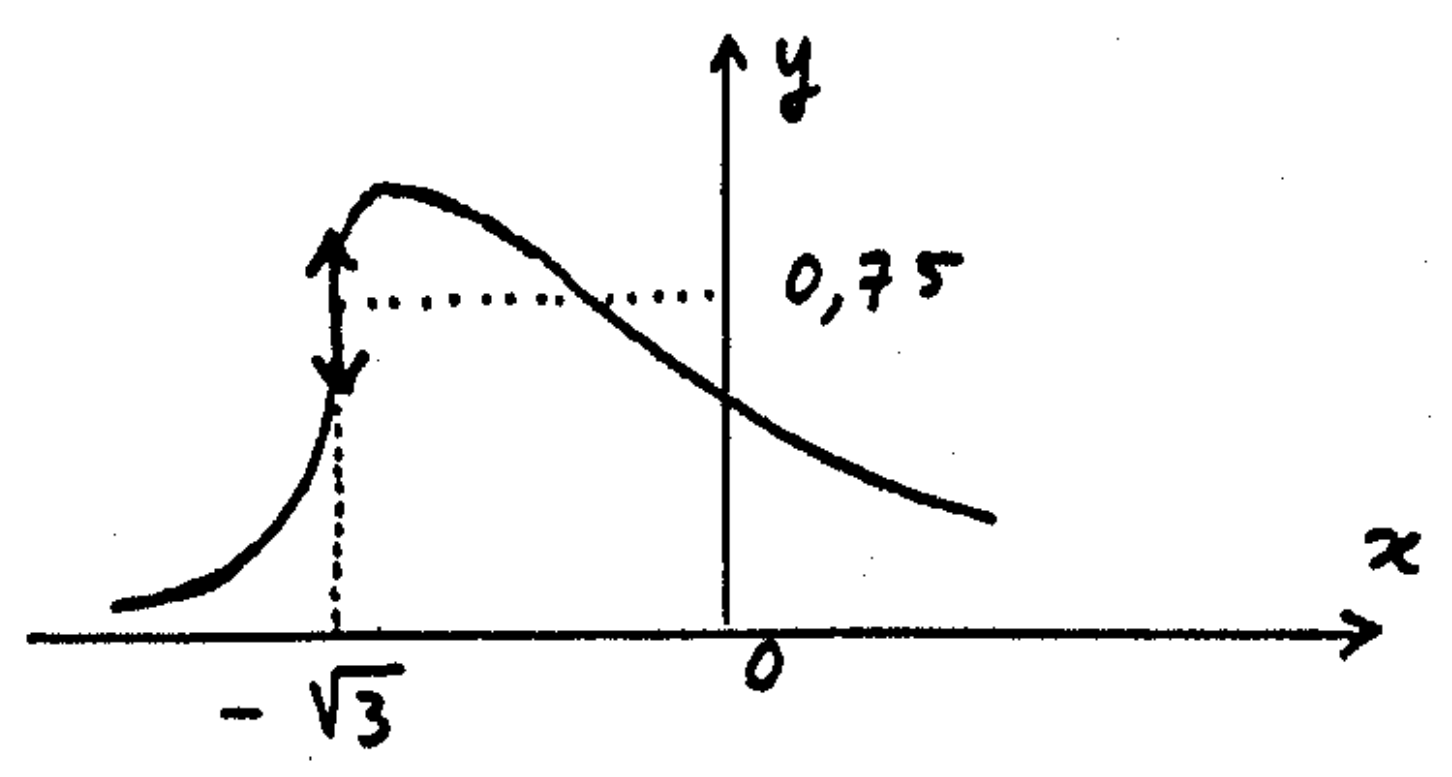
On écrit que l'équation (3) de (VIII-10), considérée comme une équation en y , a une racine double

$\Delta' = 4\tilde{g}^2x^2 - 3\tilde{g}^2(x^2+1) = \tilde{g}^2(x^2-3) = 0$

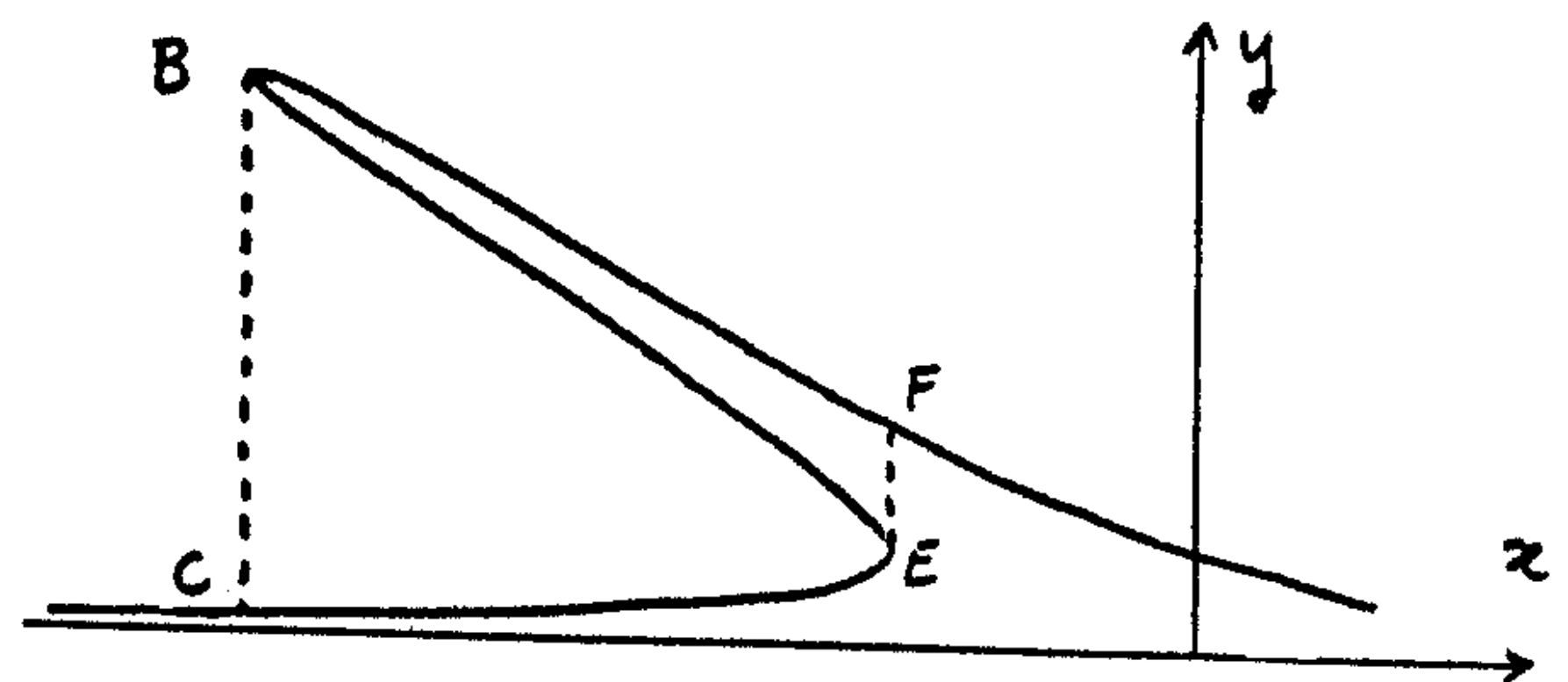
$\rightarrow x = -\sqrt{3} \rightarrow y = \frac{2}{\tilde{g}\sqrt{3}}$

L'équation (1) donne alors

$\tilde{g} = \frac{8}{3\sqrt{3}} = 1,54$



Etude du cas $g \gg 1$



Correspond aux expériences qui sont décrites plus loin

Pour interpréter les positions et les amplitudes des discontinuités observées quand on balaisé ω par valeurs décroissantes et croissantes, il est important de déterminer les coordonnées des points à tangente verticale B et E ainsi que celles de C et F

Coordonnées de B et C

(13)

B semble très proche du maximum ($x = -g, y = 1$)

Des équations (1) et (3) de (VIII-10) on déduit

$$-2g y^2 (x + g y) = 1 \quad (4)$$

ce qui, reporté dans (1), donne

$$y = \frac{1}{1 + \frac{1}{4g^2 y^4}} \quad (5)$$

Comme $y_B \sim 1$, on déduit de (5)

$$y_B \approx 1 - \frac{1}{4g^2}$$

et par suite de (4)

$$x_B = -g y_B - \frac{1}{2g y_B^2} \approx -g - \frac{1}{2g}$$

Comme, pour $x = x_B$, l'équation (1)

a une racine double $y = y_B$ et une racine simple $y = y_C$, on a

$$y_B^2 y_C = \frac{1}{r_0^2} \rightarrow y_C \approx \frac{1}{r_0^2}$$

Coordonnées de E et F

(14)

Comme $y_E \ll 1$, l'équation (5) donne

$$y_E \approx \frac{1}{4g^2 y_E^4} \rightarrow y_E \approx \left(\frac{1}{4}\right)^{1/3} g^{-2/3}$$

On en déduit, d'après (4)

$$x_E = -g y_E - \frac{1}{2g y_E^2} = -3 \left(\frac{1}{4}\right)^{1/3} g^{1/3}$$

et par suite, d'après (1)

$$y_E^2 y_F = \frac{1}{r_0^2} \rightarrow y_F = 4^{2/3} g^{-2/3} = 4 y_E$$

Récapitulation (pour $g \gg 1$)

$$x_B = x_C \approx -g \quad x_E = x_F \approx -3 \left(\frac{1}{4}\right)^{1/3} g^{1/3}$$

$$x_B - x_E \approx -g$$

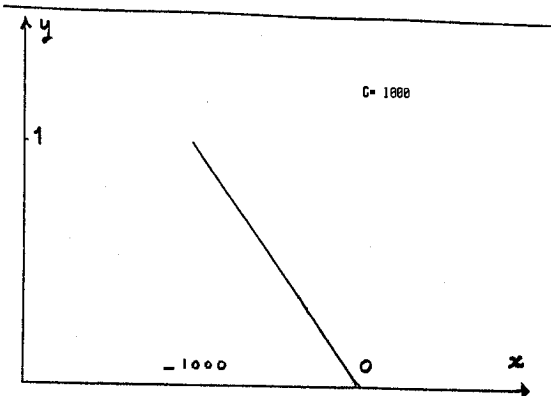
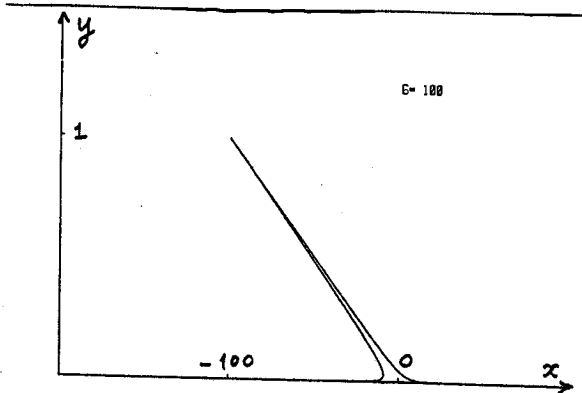
$$y_B - y_C \approx 1 \quad y_F - y_E \approx 3 \left(\frac{1}{4}\right)^{1/3} g^{2/3}$$

$$\frac{y_B - y_C}{y_F - y_E} \approx g^{2/3} \gg 1$$

La discontinuité dans un sens ($\omega \downarrow$) est beaucoup plus grande que dans l'autre ($\omega \uparrow$)

Vérification numérique

(15)



Etude expérimentale

(16)

Système étudié

Electron unique dans un piège de Penning

Le seul effet du potentiel électrostatique quadrupolaire est de faire varier légèrement la fréquence cyclotron ω_{c0} qui devient

$$\omega'_c = \frac{\omega_{c0}}{2} + \frac{\omega_{c0}}{2} \sqrt{1 - \frac{2\omega_3^2}{\omega_{c0}^2}} \quad (\text{Voir cours II})$$

Détection des variations de K

Quand l'énergie cinétique cyclotron K varie, m_e change, et la fréquence de vibration axiale ω_3 , qui varie en $\frac{1}{\sqrt{m_e}}$, change elle aussi

$$\frac{\delta \omega_3}{\omega_3} = -\frac{1}{2} \frac{\delta m_e}{m_e} = -\frac{K}{2m_e c^2}$$

$$\hookrightarrow \delta \omega_3 = -\omega_3 \frac{K}{2m_e c^2} \quad (\text{Transparent VII-14})$$

Principe de l'expérience

- La fréquence microonde est balayée lentement au voisinage de $\omega = \omega'_c$, par valeurs décroissantes puis par valeurs croissantes
- Les variations de la fréquence de vibration axiale sont suivies en permanence, ce qui permet de suivre les variations de l'énergie cinétique cyclotron K

Principales difficultés

- Réalisation d'une source microondes suffisamment intense, stable et pure (avec un spectre de bruit aussi petit que possible)
- Réalisation d'une largeur cyclotron γ_c aussi faible que possible

(17) Augmentation de la durée de vie radiative cyclotron par effet cavité (18)

- La durée de vie radiative (émission spontanée) du mouvement cyclotron est (voir III-1)

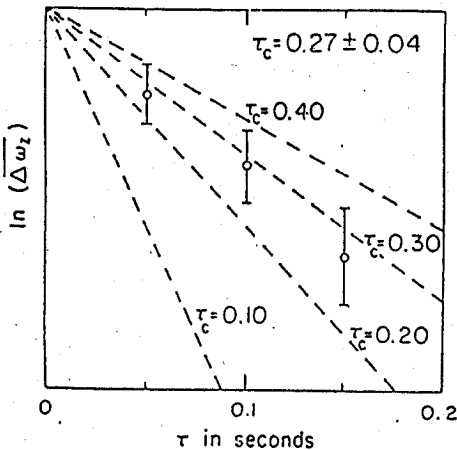
$$\tau_c = \gamma_c^{-1} = 3 m_e c^3 / 4 \omega'_c{}^2 \left(\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \right)$$

$$\tau_c \approx 0,08 \text{ sec pour } \frac{\omega'_c}{2\pi} = 164 \text{ GHz}$$

- En fait, comme les dimensions de la cavité ne sont pas très grandes devant λ_c , l'émission spontanée peut être renforcée ou inhibée, suivant que les fréquences propres de la cavité coïncident ou ne coïncident pas avec ω'_c
- Valeur mesurée de τ_c environ 3 fois plus longue que celle prévue pour l'émission dans l'espace libre

Exemple de mesure de τ_c

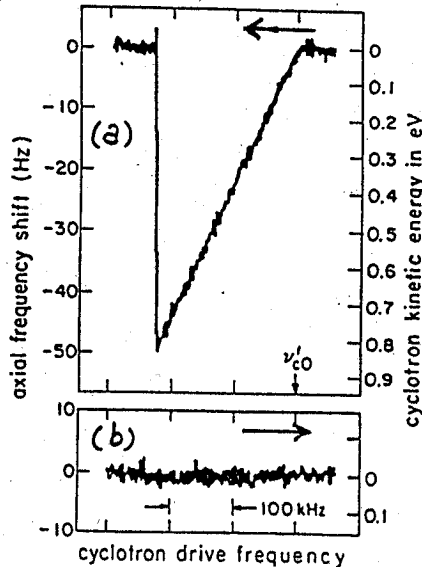
Figure extraite de (4)



Impulsion microondes, puis, après un délai τ variable, mesure de $\delta\omega_z$, et donc de K . Des allongements de τ_c par un facteur 10 ont été observés depuis [voir (5)]

(19) Observation de l'hysteresis et de la bistabilité (20)

Figure extraite de (6)



(a) Balayage par ω décroissant
 (b) Balayage par ω croissant
 Hystérésis très prononcée avec un très bon rapport signal sur bruit

Discussion des résultats

(21)

- $\frac{\omega'_c}{2\pi} = 164 \text{ GHz}$ $\frac{\omega_3}{2\pi} = 62 \text{ MHz}$
- Pas de bouteille magnétique
- L'énergie cinétique maximum K_0 est égale à $0,8 \text{ eV}$
- Comme par ailleurs $\gamma_c = \tau_c^{-1} = 3 \text{ rad/s}$ on a $g = \omega'_c \frac{K_0}{m_0 c^2} \frac{2}{\gamma_c} \approx 10^6 \gg 1$
- D'après l'étude théorique (VIII-14) le rapport des discontinuités dans les 2 sens de balayage doit être de l'ordre de $g^{2/3} \approx 10^4 \gg 1$
- Dans le sens retour [Fig. 6], la discontinuité est donc inférieure au bruit, ce qui explique qu'on ne la voit pas.
- Le bruit correspond à $K \approx 20 \text{ meV}$. La sensibilité permet de détecter des effets relativistes sur un e^- de 20 meV (voir aussi (7))

Récapitulation des résultats obtenus par l'équipe de H. Dehmelt

(22)

- Piégeage, refroidissement et confinement d'un e^- ou e^+ unique dans une zone dont les dimensions sont de l'ordre de quelques microns
- Observation du même e^- pendant plusieurs mois
- Observation de l'effet Stern-Gerlach continue sur un e^- unique
- Gain de plusieurs ordres de grandeur sur la détermination des anomalies $a(e^-)$ et $a(e^+)$ [voir transparents suivants]
- Observation d'un hystérésis et d'une bistabilité d'origine relativiste sur un e^- unique.
"Mini synchrocyclotron"
- Observation d'un allongement d'une durée de vie radiative dans une cavité par un facteur 10

Résultats obtenus sur $a(e^\pm)$

(23)

Résultats publiés [voir (8) et (9)]

$$a(e^-) = 0.001159652200 \text{ (40)}$$

$$a(e^+) = 0.001159652222 \text{ (50)}$$

$$\Delta a/a \approx 4 \cdot 10^{-8} \quad \Delta g/g \approx 4 \cdot 10^{-11}$$

$$\frac{g(e^+)}{g(e^-)} = 1 + (22 \pm 64) \cdot 10^{-12}$$

Comparaison avec la théorie (4, 10)

$$a(e)_{th} = 0.001159652460 \text{ (147)}$$

Incertitudes sur α Calcul des termes en α^4 non terminé.

Pour les implications de ces résultats sur les symétries fondamentales (CPT), et pour les résultats sur les autres leptons (μ_+ et μ_-), voir les références (11)

Résultats les plus récents [12, 13]

(24)

$$a(e^-) = 0.001159652193 \text{ (4)}$$

$$\Delta a/a \approx 4 \cdot 10^{-9} \quad \Delta g/g \approx 4 \cdot 10^{-12}$$

(Source microonde plus pure et plus stable. Champ B_0 plus stable)

Gain d'environ 3 ordres de grandeur sur les mesures antérieures les plus précises

- Groupe de Michigan [réf. 14] utilisant la méthode de précession
- Groupe de Mayence [réf. 15] utilisant aussi des e^- dans un piège de Penning, le spin de ces e^- étant orienté et détecté par collisions avec un jet d'atomes de Sodium.

Prolongements possibles (25)

① Confinement le plus petit possible d'un e^- (compatible avec la mécanique quantique)

Refroidissement radiatif par excitation des bandes latérales à $\omega_c' + \omega_m$, $\omega_c' - \omega_z$, $\omega_z + \omega_m$ [voir V-25]

Espoir de refroidir ainsi au maximum tous les degrés de liberté et de préparer e^- dans l'état $n=0$, $k=0$, $s=0$

La seule énergie résiduelle serait alors l'énergie du point zéro

On aurait alors un confinement dans un cylindre de diamètre 400 Å et de hauteur 5000 Å (pour $\frac{\omega_c'}{2\pi} = 150 \text{ GHz}$, $\frac{\omega_z}{2\pi} = 60 \text{ MHz}$)

② Augmentation de la précision (26)

par suppression de la bouteille magnétique et des inhomogénéités de \vec{B}_0

Comment détecter l'état (n, m) dans lequel e^- se trouve ?

1^{ère} possibilité

Pour une intensité donnée du champ excitant le mouvement cyclotron, il y a une variation temporelle $\omega = f(t)$ de la fréquence de ce champ pour laquelle l'énergie du mouvement cyclotron croît le plus vite possible avec t .

(i) Le champ doit être résonnant à $t=0$

(ii) ω doit être ajusté en permanence au déplacement relativiste

Réglage parfait du "mini synchrocyclotron"

Principe de la détection (27)

Un tel réglage parfait n'est pas le même suivant que e^- est à $t=0$ dans $n=0$ ou $n=1$. Les fréquences de résonance initiales ν_{01} et ν_{12} diffèrent en effet de $2R\omega_0 = 210 \text{ Hz}$ (voir VII-21), ce qui est grand devant la largeur intrinsèque γ_c

L'excitation finale à la fin de l'impulsion $\omega = f(t)$ peut donc être très différente suivant qu'à $t=0$ $n=0$ ou $n=1$

De même, si $n=0$, les fréquences de résonance initiales $\nu_{01}(\downarrow)$ et $\nu_{01}(\uparrow)$ ne sont pas les mêmes suivant que e^- est dans l'état \downarrow ou \uparrow . Elles diffèrent de 210 Hz (voir VII-21)

2^{ème} possibilité (nécessitant (28) peut être un réglage moins critique)

Balayage "adiabatique rapide" de la fréquence ω du champ excitant le mouvement cyclotron

- Si, à $t=0$, e^- est dans $n=0$, il passe dans $n=1$ quand ω passe sur ω_{01} , puis dans $n=2$ quand ω passe sur ω_{12} , et ainsi de suite...

- Par contre si, à $t=0$, e^- est dans $n=1$, il passe dans $n=0$ quand ω passe sur ω_{01} , et il y reste ensuite, car ω diminue et ne peut plus être résonnant.

Ces 2 possibilités permettent ainsi de repérer la valeur initiale de n et de suivre ainsi une résonance entre $n=0$ et $n=1$ [référence (13)]

③ Corrections radiatives dans une cavité ⁽²⁹⁾

Comment le facteur g de e^- est-il modifié par la présence des parois de la cavité ?

De même que la présence de ces parois modifie la durée de vie radiative (effets dissipatifs), elle doit également modifier les fréquences propres de e^- (effets réactifs)

A partir de quelle précision sur g faut-il tenir compte de ces effets ?

Voir par exemple références (16) et (17)

Autre effet analogue : effet Casimir pour un atome au voisinage d'une paroi

④ Possibilités d'extension de la méthode à d'autres systèmes (ref. 18) ⁽³⁰⁾

- Antiproton

Les difficultés viennent de la grande énergie initiale de p^- (voir ref. 19)

- Système de $2e^-$

Il serait intéressant d'étudier les effets de la répulsion coulombienne sur les niveaux d'énergie d'un tel système.

- Système e^-e^+

Dans un piège RF plutôt qu'un piège de Penning (car la force de piégeage est indépendante du signe de la charge dans un piège RF)

Suite des références

- (8) H. Dehmelt in *Atomic Physics 7* (1981), edited by D. Kleppner and F. Pipkin (Plenum) p. 337
- (9) P. Schwünberg, R. Van Dyck, H. Dehmelt in "Precision measurement and fundamental constants II", déjà cité en (7), p. 215
- (10) T. Kinoshita, in *Atomic Physics 9*, eds R. Van Dyck and E. Fortson, World Scientific Book Publishers, New York 1985 à paraître
- (11) J. Field, E. Picasso, E. Combley, *Sov. Phys. Usp.* 22, 199 (1979) voir aussi séminaire de E. Picasso au Collège de France, le 19/3/85
- (12) H. Dehmelt in *Atomic Physics 9*, déjà cité en (10)
- (13) H. Dehmelt, communication au symposium A. Kastler 1985 à paraître
- (14) A. Reeh, J. Wesley, *Rev. Mod. Phys.* 44, 250 (1972)
- (15) G. Graff, G. Major, R. Roeder, G. Werth, *Phys. Rev. Lett.* 21, 340 (1968)
G. Graff, E. Klempt, G. Werth, *Z. Physik* 222, 201 (1969)
- (16) E. Fischbach, N. Nakagawa, *Phys. Rev. D* 30, 2356 (1984)
- (17) K. Svozil, *Phys. Rev. Lett.* 54, 742 (1985)
- (18) H. Dehmelt, R. Van Dyck, P. Schwünberg, G. Gabrielse, *B.A.P.S.* 24, 757 (1979)
- (19) W. Kells, G. Gabrielse, K. Helmerson, in *Atomic Physics 9*, Satellite Workshops and Conference Abstracts, p. 1389
R. Van Dyck and E. Fortson eds, 1984