

Thème choisi pour le cours 1982-83

Forces exercées par des photons sur des atomes
Pression de radiation et forces dipolaires

Motivations de ce choix

- ① La discussion de ces forces, de leur origine, de leurs manifestations, de leurs fluctuations, permet d'aborder et d'approfondir des problèmes fondamentaux relatifs à l'interaction matière-rayonnement.

Exemples de problèmes- Interprétation des forces radiatives en termes d'échange d'impulsion entre atomes et photons

Le développement de l'onde incidente monochromatique en ondes planes permet de distinguer les "modes" non vides du champ (contenant des photons incidents), et les modes initialement vides.

Sous l'effet de l'interaction matière-rayonnement des photons peuvent passer d'un mode non vide vers un mode initialement vide (diffusion de photons sous l'effet de processus d'absorption et d'émission spontanée). Il peut y avoir également transfert d'un photon d'un mode non vide vers un autre mode non vide (redistribution des photons incidents sous l'effet de processus d'absorption et d'émission stimulée).

Quels sont les bilans d'impulsion dans ces divers processus et les propriétés des forces radiatives qui en résultent? (grandeur et direction des forces, dépendance vis à vis de la fréquence de l'onde incidente, vis à vis de la vitesse de translation de l'atome)

Les forces radiatives dérivent-elles d'un potentiel?

L'image corpusculaire tenue plus haut est-elle suffisante?

Y a-t-il d'autres processus à envisager, en plus de la diffusion et de la redistribution?

- Fluctuations des forces radiatives autour de leur valeur moyenne.

Quelles sont les origines physiques de ces fluctuations?

Sont-elles dues au caractère discret des échanges d'impulsion entre atomes et photons? au caractère aléatoire de l'émission spontanée?

Quel est le temps de corrélation de ces fluctuations?

Comment varient-elles en fonction de la fréquence et de l'intensité de l'onde incidente? du temps d'interaction?

Comment ces fluctuations se manifestent-elles sur le mouvement de l'atome?

- Corrélations entre variables atomiques internes et externes

Toutes les fois qu'un atome absorbe ou émet un photon, il change d'état interne, et son impulsion (qui caractérise ses degrés de liberté de translation externes) change.

Comment décrire quantitativement l'évolution couplée de ces deux types de variables ?

Quels sont les temps d'évolution caractéristique des deux types de variables ? Dans quelles conditions peut-on les découpler (en considérant par exemple qu'un type de variable suit "adiabotiquement" l'évolution de l'autre) ?

Quelles situations nécessitent un traitement quantique de tous les degrés de liberté ? et dans ce cas, comment décrire quantitativement le mouvement d'un atome à 2 (ou plusieurs) niveaux dans une onde résonnante ou quasi-résonnante ?

② L'utilisation de ces forces, rendue plus aisée grâce au développement des sources laser, constitue un nouveau moyen d'action sur les atomes, un nouveau moyen de contrôle de leurs degrés de liberté externes, ouvrant des perspectives intéressantes dans de nombreux domaines

- Possibilité de changer la direction de la vitesse d'un atome

Déflexion sélective de jets atomiques irradiés à angle droit par des faisceaux laser (application éventuelle à la séparation isotopique)

- Possibilité de changer le module de la vitesse d'un atome

Forces radiatives dépendant de la vitesse
Accélération ou ralentissement d'atomes neutres
Refroidissement radiatif très efficace (déjà réalisé avec succès sur des jets d'atomes neutres ou des ions piégés).

- Possibilité de confiner le mouvement d'un atome neutre dans une région limitée de l'espace.

Tentatives de réaliser des pièges radiatifs stables pour atomes neutres.

Perspective importante pour la spectroscopie : atome ^(neutre) unique piégé et refroidi (déjà réalisé pour un ion)
Élimination de diverses causes d'élargissement (effets Doppler du 1^{er} et 2^{ème} ordre, temps de transit...)

Il importe de bien noter qu'une compréhension satisfaisante des problèmes évoqués au § 1 ci-dessus est indispensable pour mettre en œuvre avec succès ces nouvelles techniques.

- Exemple des pièges radiatifs

Si la diffusion d'impulsion liée aux fluctuations des forces radiatives est trop forte, les "fuites" hors du piège sont trop importantes et le temps de piégeage trop court. Peut-on minimiser cette diffusion d'impulsion et comment ?

- Exemple du refroidissement radiatif

Les forces radiatives permettent de diminuer la valeur

moyenne de l'impulsion atomique. Mais la diffusion d'impulsion liée aux fluctuations des forces est équivalente à un échauffement. Jusqu'où peut-on descendre en température? Quels sont les paramètres qui déterminent la limite ultime du refroidissement radiatif?

Organisation générale du cours

Présentation successive de diverses approches possibles au problème des forces radiatives, en commençant par les plus simples, et en affinant progressivement la description théorique pour inclure les effets physiques négligés dans les approches simplifiées.

1^{ère} partie : approche semi-classique

- Tous les degrés de liberté (atomiques et de rayonnement) sont traités classiquement ou semi-classiquement.

Champ classique et force de Lorentz classique

Dipôle oscillant classique (électron oscillant) ou valeur moyenne d'un dipôle atomique : les calculs ne font intervenir que la valeur moyenne $\langle D \rangle$ de l'opérateur dipôle D

Emission spontanée traitée phénoménologiquement par des termes d'amortissement dans l'équation du mouvement du dipôle atomique.

- Un dipôle atomique est placé dans une onde monochromatique qui le fait osciller

La force de Lorentz exercée par l'onde sur le dipôle est calculée et moyennée sur une période optique (force "séculaire").

Mise en évidence de deux types de force : pression de radiation et forces dipolaires. Calcul de ces forces et discussion physique. Effets liés à la vitesse de l'atome.

- Insuffisances de cette approche et effets négligés

2^{ème} partie : effets physiques liés au caractère quantique des degrés de liberté internes de l'atome.

- Pour mettre l'accent sur ces problèmes, on néglige dans cette deuxième partie l'émission spontanée, ce qui est toujours possible si le temps d'interaction T est court devant la durée de vie radiative

Le dipôle atomique est traité maintenant comme un opérateur. L'équation de Schrödinger pour la fonction d'onde atomique [qui est une fonction à 2 composantes $\psi_e(\vec{r})$ et $\psi_f(\vec{r})$ si l'atome a 2 niveaux e et f] rappelle celle décrivant le mouvement d'un spin $1/2$ dans un champ magnétique inhomogène. D'où le nom d'effet Stern et Gerlach optique.

- Interprétation de la force dipolaire en termes de gradients spatiaux des niveaux d'énergie de "l'atome habillé"
- Diffraction de Bragg d'une onde de de Broglie atomique par le potentiel effectif périodique associé à une onde lumineuse stationnaire : effet Kapitza-Dirlac résonnant

3^{ème} partie : effets physiques liés au caractère quantique du champ du vide

- L'émission spontanée, qui résulte de l'interaction de l'atome avec les modes vides du champ, n'est pas seulement une cause d'amortissement pour l'atome. Elle introduit également un caractère fluctuant dans son évolution.

- L'étude de ces fluctuations est abordée, dans cette partie, à partir des équations de Heisenberg des variables atomiques, équations rappelant par certains côtés les équations de Langevin du mouvement Brownien.

On fait parfois l'approximation que le paquet d'ondes atomique a des dimensions petites devant la longueur d'onde de la lumière, et se déplace peu pendant la durée de vie radiative de l'état excité.

Calcul de l'opérateur force, de sa valeur moyenne sur le paquets d'onde atomique, de sa fonction de corrélation. Coefficient de diffusion de l'impulsion atomique.

Interprétation physique des fluctuations de la force dipolaire en termes d'atome habillé.

- Une approche plus complète, ne nécessitant aucune hypothèse sur la longueur d'onde de de Broglie atomique, est possible. Elle consiste à établir l'équation d'évolution de l'opérateur densité atomique (tenant compte à la fois des degrés de liberté internes et externes) sous l'effet des divers processus physiques mis en jeu. Des représentations particulières de cet opérateur densité (représentation de Wigner) permettent de mettre cette équation sous une forme analogue à celle de l'évolution d'une fonction de distribution classique dans l'espace des phases (équations cinétiques - équation de Fokker-Planck). Cette approche, qui est très générale, sera exposée dans un cours ultérieur.

Quelques articles de revue

- A. P. Kazantsev Sov. Phys. Usp. 21, 58 (1978)
- R. J. Cook Comments Atomic Mol. Phys 10, 267 (1981)
- V. S. Letokhov, V. G. Minogin, Phys. Reports 73, 1 (1981)

et références in
 Voir aussi Christian Tanguy Thèse 3^{ème} cycle Paris 1983

Force séculaire exercée par une onde monochromatique sur un dipôle atomique

A - Calcul classique de la force séculaire

- ① - Introduction . Buts de ce paragraphe . Approximations (Transparents 1 et 2)
- ② - Mouvement rapide et mouvement lent (3 → 5)
- ③ - Calcul des forces électrique et magnétique séculaires (6 → 10)
- ④ - Décomposition de la force séculaire totale en 2 types de force (faisant intervenir les gradients d'amplitude et de phase et les composantes du dipôle en phase et en quadrature avec le champ) (11 → 14)

Buts du § A

(1)

- Onde monochromatique de fréquence ω
Phase et intensité pouvant varier d'un point à l'autre
 - Dipôle classique, oscillant à la même fréquence ω , placé en un point \vec{R}
 - Force agissant sur ce dipôle et moyennée sur une période optique $2\pi/\omega$
- Calcul de cette force "séculaire" en fonction
- des gradients de phase et d'amplitude du champ
 - des composantes du dipôle en phase et en quadrature avec le champ

Approximations

(2)

- 1 - Amplitude a d'oscillation du dipôle faible devant la longueur d'onde λ de la lumière
Développement en a/λ
- 2 - Vitesses faibles devant c aussi bien pour le mouvement d'oscillation que pour le mouvement de translation
Traitement non relativiste
- 3 - Traitement classique de tous les degrés de liberté
Le dipôle est un vecteur classique (éventuellement la valeur moyenne d'un opérateur)

Mouvement de la charge (3)

Charge q en \vec{r} oscillant à la fréquence ω autour de \vec{R}

Dipole $\vec{D} = q(\vec{r} - \vec{R})$

Pour un dipole atomique, \vec{R} est le centre de l'atome

\vec{R} évolue lentement sous l'effet de la force séculaire

Mouvement de $\vec{r} - \vec{R}$

Oscillation rapide à ω

Mouvement de \vec{R}

Déplacement lent à la vitesse $\dot{\vec{R}}$

Pendant une période d'oscillation, $2\pi/\omega$, le déplacement de \vec{R} est négligeable devant λ

$\dot{\vec{R}} \frac{2\pi}{\omega} \ll \lambda \iff \dot{\vec{R}} \ll c$

Remarque

(5)

En fait, le mouvement d'oscillation du dipole dépend de la vitesse de translation $\dot{\vec{R}}$. En effet, dans le référentiel au repos de l'atome, la fréquence ω est déplacée par effet Doppler.

Une onde non plane apparaît non monochromatique.

On supposera ici le dipole initialement immobile, et on négligera la vitesse $\dot{\vec{R}}$ acquise pendant le temps d'établissement du régime d'oscillation stationnaire

La dépendance des forces radiatives vis à vis de la vitesse de translation sera étudiée ultérieurement

Dans ce § A, l'oscillation

de \vec{D} est supposée connue, et la force séculaire calculée en fonction du champ et des composantes du dipole en phase et en quadrature avec le champ

Ultérieurement, l'oscillation du dipole sera déterminée à partir d'une équation du mouvement décrivant

- l'"excitation" du dipole par le champ
- l'"amortissement" du dipole par émission spontanée

La force séculaire sera alors réexprimée en fonction du champ et des paramètres décrivant la "réponse" du dipole au champ

Force électromagnétique

(6)

agissant sur la charge q en \vec{r}

$\vec{F} = \vec{F}^{el} + \vec{F}^{mag}$

Force électrique \vec{F}^{el}

$\vec{F}^{el} = q \vec{E}(\vec{r}, t)$

champ électrique en \vec{r}

Force magnétique \vec{F}^{mag}

$\vec{F}^{mag} = q \dot{\vec{r}} \times \vec{B}(\vec{r}, t)$

champ magnétique en \vec{r}

Or $q \dot{\vec{r}} \approx \dot{\vec{D}}$ car $|\dot{\vec{R}}| \ll |\dot{\vec{r}}|$

$\hookrightarrow \vec{F}^{mag} = \dot{\vec{D}} \times \vec{B}(\vec{r}, t)$

Composantes séculaires des forces

$\vec{F} = \frac{1}{T} \int_0^T dt \vec{F}(t)$

$T = 2\pi/\omega =$ période d'oscillation

Force électrique (7)

Développement de $\vec{E}(\vec{r}, t)$ au voisinage de \vec{R}

$$E_i(\vec{r}, t) = E_i(\vec{R}, t) + \sum_j (r_j - R_j) (\partial_j E_i) + \dots$$

$i, j = x, y, z \quad (\partial_j E_i) = \left[\frac{\partial}{\partial r_j} E_i(\vec{r}, t) \right]_{\vec{r}=\vec{R}}$

$$F_i^{el} = q E_i(\vec{R}, t) + \sum_j D_j (\partial_j E_i) + \dots$$

Développement en puissances de a/λ

Composante séculaire

- 1^{er} terme : purement oscillant
Moyenne séculaire nulle
 - 2^{em} terme : produit de 2 termes oscillants, D_j et $\partial_j E_i$
- ↳ $\overline{F_i^{el}} = \sum_j \overline{D_j (\partial_j E_i)}$

Force magnétique (8)

\vec{F}^{mag} étant v/c fois plus petite que \vec{F}^{el} , on peut remplacer $\vec{B}(\vec{r}, t)$ par $\vec{B}(\vec{R}, t)$ et négliger les termes d'ordre supérieur en a/λ

$$\vec{F}^{mag} = \dot{\vec{D}} \times \vec{B}(\vec{R}, t) = \frac{d}{dt} [\vec{D} \times \vec{B}] - \vec{D} \times \frac{d}{dt} \vec{B}$$

Or,

$$\frac{d}{dt} \vec{B}(\vec{R}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \vec{B}(\vec{R}, t) + \left(\frac{d\vec{R}}{dt} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{R}} \right) \vec{B}(\vec{R}, t)$$

Deuxième terme négligeable devant le premier car $|\dot{\vec{R}}| \ll c$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \times \vec{E} \quad \text{Equation de Maxwell}$$

$$F_i^{mag} = \frac{d}{dt} [\vec{D} \times \vec{B}]_i + [\vec{D} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E})]_i$$

\uparrow $\sum_j D_j (\partial_i E_j) - \sum_j D_j (\partial_j E_i)$

Moyenne séculaire nulle
 $\frac{1}{T} [\vec{D} \times \vec{B}]_0 = 0$ car $\vec{D} \times \vec{B}$ périodique

Force séculaire totale (9)

$$\overline{F_i^{el}} = \sum_j \overline{D_j (\partial_j E_i)}$$

$$\overline{F_i^{mag}} = \sum_j \overline{D_j (\partial_i E_j)} - \sum_j \overline{D_j (\partial_j E_i)}$$

↳ $\overline{F_i} = \sum_j \overline{D_j (\partial_i E_j)}$

ou encore, en notations vectorielles

$$\boxed{\overline{\vec{F}} = \sum_j \overline{D_j (\vec{\nabla} E_j)}}$$

$\overline{\vec{F}}$ apparait comme l'opposé du gradient de l'énergie dipolaire moyenne

$$-\sum_j \overline{D_j E_j} = -\overline{\vec{D} \cdot \vec{E}}$$

le gradient n'agissant toutefois que sur le champ électrique

Simplification (10)

Dipole ayant une direction d'oscillation bien définie, \parallel à Oz .

$$D_j = D \delta_{jz}$$

Posons $E_z = E$

$$\boxed{\vec{F} = D \vec{\nabla} E}$$

On peut aussi supposer la lumière polarisée suivant Oz

Composantes de fréquence $> 0, < 0$

$$E(\vec{R}, t) = E^+(\vec{R}) e^{-i\omega t} + E^-(\vec{R}) e^{i\omega t}$$

$$D(t) = D^+ e^{i\omega t} + D^- e^{-i\omega t}$$

$$\boxed{\overline{\vec{F}} = D^+ \vec{\nabla} E^+ + D^- \vec{\nabla} E^-}$$

Amplitude et phase du champ

$$\vec{E}(\vec{R}, t) = E_0(\vec{R}) \cos[\omega t + \phi(\vec{R})]$$

$$\vec{E}^-(\vec{R}) = \frac{1}{2} E_0(\vec{R}) e^{i\phi(\vec{R})}$$

$E_0(\vec{R})$: amplitude (réelle)

$\phi(\vec{R})$: phase (réelle)

Onde plane

$$E_0(\vec{R}) = E_0 \text{ indépendant de } \vec{R}$$

$$\phi(\vec{R}) = -\vec{k} \cdot \vec{R}$$

$$E(\vec{R}, t) = E_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{R})$$

Onde stationnaire

$$E_0(\vec{R}) = E_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{R})$$

$$\phi(\vec{R}) = 0$$

$$E(\vec{R}, t) = E_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{R}) \cos \omega t$$

Gradient d'amplitude et gradient de phase

$$\vec{\nabla} E^-(\vec{R}) = \frac{1}{2} [\vec{\nabla} E_0(\vec{R})] e^{i\phi(\vec{R})} + \frac{i}{2} E_0(\vec{R}) e^{i\phi(\vec{R})} [\vec{\nabla} \phi(\vec{R})]$$

↳ Existence de 2 composantes dans la force, l'une liée au gradient de phase, l'autre au gradient d'amplitude

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

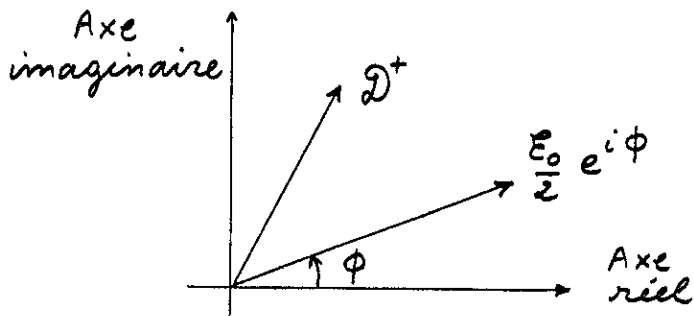
$$\vec{F}_1 = E_0(\vec{\nabla} \phi) \frac{D_+ e^{-i\phi} - D_- e^{i\phi}}{2i}$$

$$\vec{F}_2 = (\vec{\nabla} E_0) \frac{D_+ e^{-i\phi} + D_- e^{i\phi}}{2}$$

\vec{F}_1 fait intervenir $\text{Im } D_+ e^{-i\phi}$

\vec{F}_2 " " $\text{Re } D_+ e^{-i\phi}$

Interprétation de $D_+ e^{-i\phi}$



Ces 2 vecteurs représentent dans le plan complexe E^- et D^+ à $t=0$ (évolution ultérieure en $e^{i\omega t}$)

Une rotation de $-\phi$ amène $\frac{E_0}{2} e^{i\phi}$ sur l'axe réel et transforme D^+ en $D^+ e^{-i\phi}$. On en déduit que

(i) $\text{Re } D^+ e^{-i\phi}$ est la composante du dipôle en phase avec le champ

(ii) $\text{Im } D^+ e^{-i\phi}$ est la composante en quadrature avancée

Récapitulation

2 composantes dans la force

$$\textcircled{1} \vec{F}_1 = D_{\text{quadr. avancée}} \text{ quadr. } E_0(\vec{\nabla} \phi)$$

Proportionnelle

- au gradient de phase

- à la composante de D en quadrature

$$\textcircled{2} \vec{F}_2 = D_{\text{phase}} (\vec{\nabla} E_0)$$

Proportionnelle

- au gradient d'amplitude

- à la composante en phase de D

Seule la composante en quadrature de D échange de l'énergie avec le champ

↳ Seule \vec{F}_1 fait intervenir des échanges d'énergie entre le dipôle et le champ

B - Considérations énergétiques - Absorption et redistribution de photons.

- 1 - Introduction (Transparent 1)
- 2 - Energie absorbée par le dipole par unité de temps (2 → 3)
- 3 - Interprétation physique de \mathcal{F}_1 (4 → 6)
- 4 - Interprétation physique de \mathcal{F}_2 (7 → 13)
Modèle simple
Généralisation
- 5 - Récapitulation (14)

C - Premier exemple simple - Electron libre dans une onde lumineuse

- 1 - Introduction (15)
- 2 - Etude du mouvement d'oscillation stationnaire (16 → 19)
- 3 - Calcul et interprétation physique de \mathcal{F}_2 (20 → 21)
Gradient de l'énergie moyenne de vibration
- 4 - Calcul et interprétation physique de \mathcal{F}_1 (22 → 24)
Pression de radiation
- 5 - Généralisation (25 → 26)

Buts du § B

(1)

- Evaluer, en régime stationnaire, l'énergie fournie par le champ incident au dipole atomique
- Par des arguments de conservation d'énergie, en déduire l'énergie perdue par le champ incident, et, par suite, le nombre de photons incidents qui sont absorbés par unité de temps
- Si le champ incident n'est pas une onde plane, faire ce bilan énergétique mode par mode.
- En déduire une interprétation physique des forces $\vec{\mathcal{F}}_1$ et $\vec{\mathcal{F}}_2$ en termes d'absorption ou de redistribution des photons incidents

Travail effectué par le champ incident sur la charge q

(2)

$$dW = \vec{\mathcal{F}} \cdot d\vec{r}$$

$$\frac{dW}{dt} = \vec{\mathcal{F}} \cdot \dot{\vec{r}} = \underbrace{\vec{\mathcal{F}} \cdot \dot{\vec{R}}}_{=0 \text{ car } \dot{\vec{R}} = \vec{0}} + \underbrace{\vec{\mathcal{F}} \cdot (\dot{\vec{r}} - \dot{\vec{R}})}_{= \vec{\mathcal{F}} \cdot \dot{\vec{D}}/q}$$

(atome initialement immobile)

Moyenne séculaire

$$\overline{\frac{dW}{dt}} = \overline{\vec{E}(\vec{R}, t) \cdot \dot{\vec{D}}} = \overline{E(\vec{R}, t) \dot{D}}$$

Seule, la force électrique travaille

$$E = E_z \quad D = D_z$$

$$E(\vec{R}, t) = E^+(\vec{R}) e^{-i\omega t} + E^-(\vec{R}) e^{i\omega t}$$

$$D(t) = D^+ e^{i\omega t} + D^- e^{-i\omega t}$$

$$\dot{D}(t) = i\omega [D^+ e^{i\omega t} - D^- e^{-i\omega t}]$$

$$\boxed{\frac{dW}{dt} = i\omega [D^+ E^+(\vec{R}) - D^- E^-(\vec{R})]}$$

Expression équivalente de \overline{dW}/dt (3)

$$\vec{E}^{\pm}(\vec{R}) = \frac{\vec{E}_0(\vec{R})}{2} e^{\mp i\phi(\vec{R})} \quad (4 \text{ I-11})$$

$$\hookrightarrow \frac{dW}{dt} = i \frac{\omega \vec{E}_0}{2} [\mathcal{D}^+ e^{-i\phi} - \mathcal{D}^- e^{i\phi}]$$

$$\boxed{\frac{dW}{dt} = -\omega \vec{E}_0 \mathcal{D}_{\text{quadrature avancée}}}$$

Nombre de photons incidents absorbés par unité de temps

Par conservation de l'énergie

$$\left(\frac{dW}{dt}\right)_{\text{fournie au dipôle par le champ}} = \left(\frac{dW}{dt}\right)_{\text{perdue par le champ}}$$

Le champ incident est monochromatique

Donc $dW = dN \hbar \omega$ où dN est le nombre de photons absorbés

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dt} &= \frac{1}{\hbar \omega} \frac{dW}{dt} = \frac{i}{\hbar} [\mathcal{D}^+ \vec{E}^+(\vec{R}) - \mathcal{D}^- \vec{E}^-(\vec{R})] \\ &= -\vec{E}_0 \mathcal{D}_{\text{quadrature avancée}} / \hbar \end{aligned}$$

Interprétation physique de \vec{F}_1 (4)

De I-14 et II-3

$$\vec{F}_1 = -\hbar (\vec{\nabla} \phi) \frac{dN}{dt}$$

on déduit

Onde plane $\phi = -\vec{k} \cdot \vec{R}$ (voir I-11)

$$\hookrightarrow \boxed{\vec{F}_1 = \hbar \vec{k} \frac{dN}{dt}}$$

dN photons incidents, ayant chacun une impulsion $\hbar \vec{k}$, sont absorbés par le dipôle, qui gagne donc l'impulsion $d\vec{p} = \hbar \vec{k} dN$ pendant dt , d'où la force $d\vec{p}/dt = \hbar \vec{k} dN/dt$

Cas général

Superposition d'ondes planes de même ω , mais de \vec{k} différents
 $-\hbar (\vec{\nabla} \phi)$ apparaît comme l'impulsion "moyenne" des photons absorbés (Par exemple, $-\hbar \vec{\nabla} \phi = \vec{0}$ pour une onde stationnaire)

Que devient l'énergie absorbée par le dipôle? (5)

Reévacuée par les processus dissipatifs responsables de l'amortissement du dipôle.

En particulier, amortissement radiatif par émission spontanée

Ce sont d'ailleurs les termes d'amortissement dans l'équation d'évolution du dipôle qui sont, en régime stationnaire, à l'origine de la composante de \mathcal{D} en quadrature avec \vec{E} . D'où la dénomination utilisée parfois

\vec{F}_1 : Force "dissipative"

\vec{F}_2 : Force "réactive"

Bilan global d'impulsion (6)

En régime stationnaire, les dN photons incidents absorbés pendant dt par le dipôle sont réémis spontanément dans les modes du champ initialement vides, avec des probabilités égales dans 2 directions opposées

L'impulsion reperdue par le dipôle lors de la réémission est donc nulle en moyenne

\hookrightarrow Idée que le traitement élémentaire présenté ici contient en fait une 2^{ème} moyenne (en plus de la moyenne séculaire) sur les photons émis spontanément, et ignore donc les fluctuations correspondantes pour \vec{F}_1

Interprétation de \vec{F}_2

- Pour une onde plane
 $E_0 = \text{Constante} \rightarrow \vec{\nabla} E_0 = \vec{0} \rightarrow \vec{F}_2 = \vec{0}$
- Pour avoir un gradient d'amplitude, il faut donc superposer des ondes planes de \vec{k} différents
- Commençons par un modèle simple de 2 ondes planes, d'amplitudes E_1 et E_2 , se propageant en sens inverse
 $\vec{k}_1 = \vec{k} = -\vec{k}_2$

$$E^+ = E_1 e^{i\vec{k} \cdot \vec{R}} + E_2 e^{-i\vec{k} \cdot \vec{R}}$$

Superposition de ces 2 ondes

- On se place en un point \vec{R} où les 2 ondes sont en quadrature.
En un tel point, le gradient de l'amplitude globale est $\neq 0$ ($\parallel \vec{k}$)

Transfert d'énergie d'une onde (9) à l'autre

- D_1 en quadrature avancée sur E_2 fournit de l'énergie à E_2
 $\left(\frac{dW_2}{dt}\right)_{\text{par } E_2} \text{ gagnée} = \omega E_2 D_1 = \alpha \omega E_2 E_1$

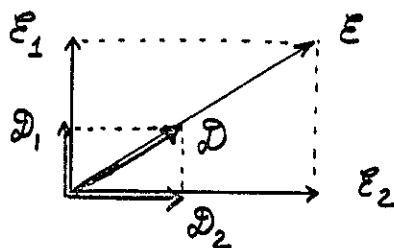
- D_2 en quadrature retard sur E_1 , absorbe de l'énergie sur E_1
 $\left(\frac{dW_1}{dt}\right)_{\text{par } E_1} \text{ perdue} = \omega E_1 D_2 = \alpha \omega E_1 E_2$

↳ L'énergie gagné par une onde est perdue par l'autre

Redistribution à énergie constante

Par contre, comme l'impulsion change d'une onde à l'autre, le bilan global d'impulsion est non nul

$$\left(\frac{d\vec{P}}{dt}\right)_{\text{par dipole}} \text{ gagnée} = \frac{\alpha \omega E_1 E_2}{\hbar \omega} (\hbar \vec{k}_1 - \hbar \vec{k}_2) \neq 0$$

(7) Discussion dans le plan complexe (8)

$D = \alpha E$: Dipole en phase avec le champ total E
 α : réel (pas forcément susceptibilité linéaire - Peut dépendre de $|E|^2$)

$$\hookrightarrow D_2 = \alpha E_2 \quad D_1 = \alpha E_1$$

- D en phase avec E
↳ Pas d'absorption globale d'énergie
- D_2 en phase avec E_2 , mais en quadrature retard sur E_1
- D_1 en phase avec E_1 , mais en quadrature avancée sur E_2

Importance des relations de (10) phase entre les 2 ondes

- L'onde incidente \vec{k}_1 induit un dipole D_1 qui dépend de la phase de cette onde au point \vec{R}

- Ce dipole D_1 rayonne dans le mode \vec{k}_2 et c'est l'interférence entre ce champ rayonné dans le mode \vec{k}_2 et le champ incident dans \vec{k}_2 qui est responsable de l'amplification de l'onde \vec{k}_2

- La redistribution n'est donc pas une succession de 2 processus incohérents (absorption de \vec{k}_1 et émission induite de \vec{k}_2). Ces 2 processus interfèrent d'une manière qui dépend de la phase relative des 2 ondes au point \vec{R} .

Généralisation

- Superposition quelconque d'ondes planes. Modes μ, ν, \dots

$$E^+(\vec{R}) = E_\mu^+(\vec{R}) + E_\nu^+(\vec{R}) + \dots$$

$$E_\mu^+(\vec{R}) = E_\mu^+ e^{i\vec{k}_\mu \cdot \vec{R}} \quad E_\nu^+(\vec{R}) = E_\nu^+ e^{i\vec{k}_\nu \cdot \vec{R}}$$

- Composante en phase du dipole

$$D^- = \alpha E^+(\vec{R}) = D_\mu^- + D_\nu^- + \dots$$

$$D_\mu^- = \alpha E_\mu^+ e^{i\vec{k}_\mu \cdot \vec{R}} \quad D_\nu^- = \alpha E_\nu^+ e^{i\vec{k}_\nu \cdot \vec{R}}$$

α réel

Contribution d'une paire de modes μ, ν à la force \vec{F}_2

$$\vec{F}_2 = D^+ \vec{\nabla} E^- + D^- \vec{\nabla} E^+ =$$

$$\alpha [E_\mu^-(\vec{R}) + E_\nu^-(\vec{R}) + \dots] [i\vec{k}_\mu E_\mu^+(\vec{R}) + i\vec{k}_\nu E_\nu^+(\vec{R}) + \dots]$$

$$= i\alpha (\vec{k}_\mu - \vec{k}_\nu) [E_\nu^-(\vec{R}) E_\mu^+(\vec{R}) - E_\mu^-(\vec{R}) E_\nu^+(\vec{R})] + c.c.$$

+ contribution des autres paires μ, ν'

(11) Travail fourni par E_μ sur D_ν

$$\frac{dW_{\mu\nu}}{dt} = i\omega [D_\nu^+ E_\mu^+(\vec{R}) - D_\nu^- E_\mu^-(\vec{R})] \quad (\text{voir II-2})$$

Nombre de photons disparaissant du mode μ à cause de D_ν

$$\frac{dN_{\mu\nu}}{dt} = \frac{i\alpha}{\hbar} [E_\nu^-(\vec{R}) E_\mu^+(\vec{R}) - E_\nu^+(\vec{R}) E_\mu^-(\vec{R})]$$

Travail fourni par E_ν sur D_μ

et nombre de photons disparaissant du mode ν à cause de D_μ

$$\frac{dN_{\nu\mu}}{dt} = \frac{i\alpha}{\hbar} [E_\mu^-(\vec{R}) E_\nu^+(\vec{R}) - E_\mu^+(\vec{R}) E_\nu^-(\vec{R})]$$

Bilan global d'énergie

$$\frac{d}{dt} (N_{\mu\nu} + N_{\nu\mu}) = 0$$

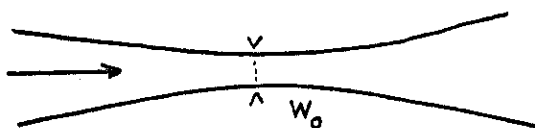
Redistribution à énergie constante

Bilan global d'impulsion

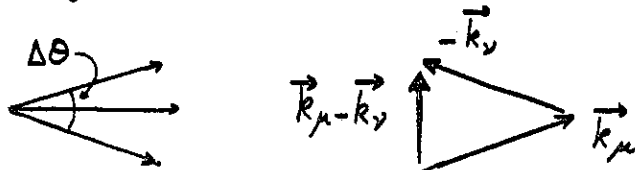
$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_{\text{paires } \mu, \nu} [\hbar \vec{k}_\mu \frac{d}{dt} N_{\mu\nu} + \hbar \vec{k}_\nu \frac{d}{dt} N_{\nu\mu}] = \sum_{\mu, \nu} i\alpha (\vec{k}_\mu - \vec{k}_\nu) [E_\nu^-(\vec{R}) E_\mu^+(\vec{R}) - E_\nu^+(\vec{R}) E_\mu^-(\vec{R})]$$

On retrouve exactement \vec{F}_2

Application: Force \vec{F}_2 maximale (13) pour un faisceau gaussien



Vecteurs \vec{k} des ondes planes incidentes repartis dans un angle $\Delta\theta \approx 1/w_0$ autour de la direction moyenne



La valeur maximale de $\vec{k}_\mu - \vec{k}_\nu$ est réalisée en prenant les 2 valeurs extrêmes pour \vec{k}_μ et \vec{k}_ν

Force \vec{F}_2 maximale dans la direction transversale (inversement proportionnelle au diamètre w_0 du faisceau)

Récapitulation (14)

Force \vec{F}_1 (Gradient de phase)

Perte globale d'énergie pour le champ incident

Disparition globale de photons dans les modes non vides

Transfert de ces photons vers les modes initialement vides

Force de "diffusion"

Force \vec{F}_2 (Gradient d'amplitude)

Pas de changement global d'énergie du champ incident

Nombre total de photons incidents constant

Redistribution cohérente des photons incidents entre les modes non vides

(de même énergie mais d'impulsion différente), les modes initialement vides restant vides

Force de "redistribution"

Forces radiatives exercées (15)
par une onde monochromatique
sur un electron libre

- Illustration simple des notions introduites en A et B.
- Equation d'Abraham-Lorentz pour calculer le mouvement d'oscillation rapide de l'electron
- \vec{R} , centre de cette oscillation, évolue beaucoup plus lentement. On suppose que $\dot{\vec{R}} = \vec{0}$ à $t = 0$, et demeure négligeable pendant le temps d'établissement du régime d'oscillation stationnaire
- Possibilité de traitements plus complets :
Onde non monochromatique
Effets relativistes

Mouvement d'oscillation (16)
Interaction avec le champ incident

$m \ddot{\vec{r}} = q \vec{E}(\vec{r}, t) + q \dot{\vec{r}} \times \vec{B}(\vec{r}, t)$
La force magnétique instantanée est v/c fois plus petite que la force électrique instantanée
A l'ordre le plus bas en v/c et a/λ , l'oscillation de l'electron autour de \vec{R} est due à la seule force électrique instantanée, évaluée en \vec{R}

$$m \ddot{\vec{r}}_{\text{osull}} = q \vec{E}(\vec{R}, t)$$

Rappelons que, pour avoir la force séculaire, il faut développer la force électrique à l'ordre 1 en $(\vec{r} - \vec{R})/\lambda$ autour de \vec{R} , et garder la force magnétique à l'ordre 0 (cf § A)

Interaction de l'electron avec (17)
son champ propre

- Responsable d'une correction de masse (supposée réintégrée dans m)
- Responsable d'un amortissement radiatif dû à la perte d'énergie par rayonnement de la charge oscillante

La force de freinage associé est la "réaction de rayonnement" qu'on peut montrer être égale à

$$\vec{R} = \frac{2}{3} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 c^3} \ddot{\vec{r}}$$

Equation d'Abraham-Lorentz

$$m \ddot{\vec{r}} = \frac{2}{3} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 c^3} \ddot{\vec{r}} + q \vec{E}(\vec{R}, t)$$

Simplifications (18)

- Le mouvement oscillant de $\vec{D} = q(\vec{r} - \vec{R})$ est très rapide devant le mouvement lent de \vec{R} (voir hypothèses sur $\dot{\vec{R}}$ dans II-15)

$\hookrightarrow q \ddot{\vec{r}} \approx \ddot{\vec{D}} \quad q \ddot{\vec{r}} \approx \ddot{\vec{D}}$
 $\ddot{\vec{D}} - \frac{2}{3} \frac{e^2}{mc^3} \ddot{\vec{D}} = \frac{q^2}{m} \vec{E}(\vec{R}, t)$
On a posé $e^2 = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0}$

- Comme le mouvement de \vec{D} est sinusoïdal, $\ddot{\vec{D}} \approx -\omega^2 \vec{D}$

$$\ddot{\vec{D}} + \frac{2}{3} \frac{e^2 \omega^2}{mc^3} \vec{D} = \frac{q^2}{m} \vec{E}(\vec{R}, t)$$

- \vec{E} polarisé suivant Oz près de \vec{R}
Origine des temps telle que $\phi(\vec{R}) = 0$

$$\hookrightarrow \vec{E}_i(\vec{R}, t) = \delta_{i3} E_0(\vec{R}) \cos \omega t$$

Calcul du dipole induit (19)

$$E_z(\vec{R}, t) = E(\vec{R}, t) = E^+ e^{-i\omega t} + E^- e^{i\omega t}$$

$$E^+ = E^- = E_0(\vec{R})/2$$

$$D_3(t) = D(t) = D^+ e^{i\omega t} + D^- e^{-i\omega t}$$

En régime stationnaire,

$$\left[-\omega^2 + \frac{2}{3} i \frac{e^2 \omega^3}{m c^3}\right] D^+ = \frac{q^2}{m} E^-$$

$$D_+ = -\frac{q^2}{m \omega^2} \frac{1}{1 - \frac{2 i e^2 \omega}{3 m c^3}} E^-$$

$$\frac{e^2 \omega}{m c^3} = \frac{e^2}{m c^2} \frac{\omega}{c} = \frac{r_0}{\lambda} \ll 1$$

$$r_0 = \frac{e^2}{m c^2} = 2,8 \cdot 10^{-13} \text{ cm} \quad \text{Rayon classique de } e^-$$

$$D_{\text{phase}} = -\frac{q^2}{m \omega^2} \frac{E_0}{2}$$

$$D_{\text{quadr. avancée}} = -\frac{q^2}{m \omega^2} \frac{2 r_0}{3 \lambda} \frac{E_0}{2}$$

Expression de la force \vec{F}_2 (20)

$$\vec{F}_2 = D_{\text{phase}} \vec{\nabla} E_0(\vec{R}) = -\frac{q^2}{2 m \omega^2} E_0(\vec{R}) \vec{\nabla} E_0(\vec{R}) = -\vec{\nabla} \frac{q^2 E_0^2(\vec{R})}{4 m \omega^2}$$

Proportionnelle au gradient d'intensité lumineuse
Interprétation de $q^2 E_0^2(\vec{R})/4 m \omega^2$

Energie cinétique moyenne de vibration de l'électron dans l'onde

En effet, si l'on néglige la réaction de rayonnement ($r_0/\lambda \ll 1$)

$$\ddot{z} = \frac{q E_0(\vec{R})}{m} \cos \omega t$$

$$\dot{z} = \frac{q E_0(\vec{R})}{m \omega} \sin \omega t$$

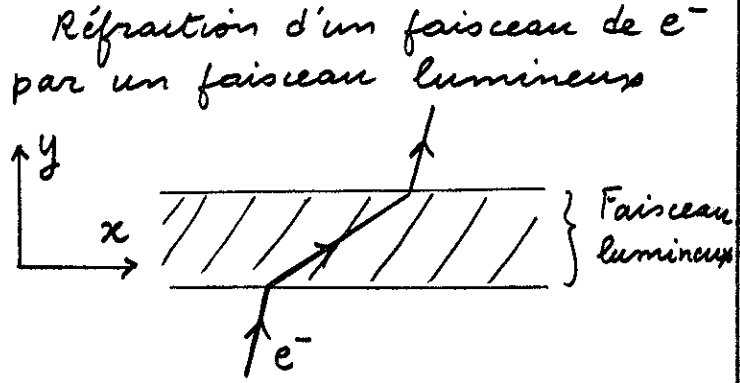
$$E_{\text{vib}}(\vec{R}) = \frac{1}{2} m \dot{z}^2 = \frac{q^2 E_0^2}{2 m \omega^2} \underbrace{\sin^2 \omega t}_{= 1/2}$$

$$\boxed{\vec{F}_2 = -\vec{\nabla} E_{\text{vib}}(\vec{R})}$$

Conclusions pour \vec{F}_2 (21)

L'énergie moyenne de vibration de e^- dans une onde lumineuse apparaît comme une énergie potentielle pour le mouvement lent de e^- , qui est repoussé hors des régions de forte intensité

Exemple de conséquence
Réfraction d'un faisceau de e^- par un faisceau lumineux



v_x diminue dans le faisceau
 v_y reste inchangée

Expression de la force \vec{F}_1 (22)

$$\vec{F}_1 = D_{\text{quadr. avancée}} E_0(\vec{\nabla} \phi) = -\frac{q^2}{m \omega^2} \frac{2 r_0}{3 \lambda} \frac{E_0^2}{2} (\vec{\nabla} \phi)$$

Cas d'une onde plane

$$\phi = -\vec{k} \cdot \vec{R} \rightarrow \vec{\nabla} \phi = -\vec{k}$$

Relions E_0^2 au flux incident moyen d'énergie F_{inc}

$$F_{\text{inc}} = \epsilon_0 c^2 |\vec{E} \times \vec{B}| = \epsilon_0 c E_0^2 \underbrace{\cos^2 \omega t}_{= 1/2}$$

On peut alors réécrire \vec{F}_1 sous la forme

$$\vec{F}_1 = \underbrace{\frac{8 \pi r_0^2}{3}}_{\text{Section efficace Thomson}} \underbrace{\frac{F_{\text{inc}}}{\hbar \omega}}_{\text{Flux de photons incidents}} \underbrace{\hbar \vec{k}}_{\text{Impulsion de chaque photon}}$$

Interprétation physique de \vec{F}_1 (23)

Des photons incidents disparaissent du faisceau lumineux et sont diffusés dans d'autres directions (avec une probabilité égale dans 2 directions opposées). C'est la diffusion Thomson

Leur nombre par unité de temps est le produit du flux de photons incidents par la section efficace Thomson

L'impulsion qui disparaît du faisceau lumineux est prise par l'électron, d'où la force \vec{F}_1 . \vec{F}_1 est souvent appelé

Force de pression de radiation

\vec{F}_2 force pondéromotrice

Ordres de grandeur relatifs de \vec{F}_1 et \vec{F}_2 (24)

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{2r_0}{\lambda} \frac{E_0^2 |\vec{\nabla}\phi|}{E_0 |\vec{\nabla}E_0|}$$

$$\vec{\nabla}\phi \approx \vec{k} \quad |\vec{k}| = \frac{1}{\lambda}$$

$$\hookrightarrow \frac{F_1}{F_2} \approx \frac{r_0}{\lambda^2} \frac{I}{|\vec{\nabla}I|} \quad I: \text{intensité}$$

Soit L la longueur caractéristique sur laquelle I varie

$$\frac{F_1}{F_2} \approx \frac{r_0}{\lambda} \frac{L}{\lambda} \quad \left\{ \begin{array}{l} r_0 \approx 2.10^{-13} \text{ cm} \\ \lambda \approx 10^{-5} \text{ cm} \end{array} \right.$$

F_1 ne devient de l'ordre de F_2 que pour $L \gtrsim$ quelques mètres. Or, au foyer d'un faisceau, $L \approx$ quelques microns. Donc, en général

$$F_2 \gg F_1$$

Généralisation à des ondes non monochromatiques (25)

Amplitude variant non seulement dans l'espace, mais aussi dans le temps

Impulsions laser

On peut alors montrer que (en plus de la pression de radiation qui demeure très faible), il y a toujours une force proportionnelle au gradient de l'énergie moyenne de vibration

$$\vec{F}_2 = - \vec{\nabla} \overline{E_{vib}}(\vec{R}, t)$$

T.W.B. KIBBLE Phys. Rev. Lett 16, 1054 (1966)

Etude relativiste dans

T.W.B. KIBBLE Phy. Rev 150, 1060 (1966)

Exemple : Entraînement d'un electron initialement immobile par un train d'ondes planes (26)



L'électron est accéléré vers la droite quand le train d'ondes arrive sur lui (repoussé des régions de forte intensité), puis ralenti quand le train d'ondes le quitte (repoussé vers la gauche). Il se retrouve immobile, mais plus loin à droite

Origine de la force : quand l'intensité croît, ou décroît, avec t, \vec{r} n'est plus en phase avec \vec{E} (même sans réaction de rayonnement), donc \vec{r} n'est plus en quadrature avec \vec{B} et $q\vec{r} \times \vec{B} \neq \vec{0}$

Introduction à la fin de la 1^{ère} partie du cours

Le traitement présenté dans les 3 premiers paragraphes A, B, C, de cette 1^{ère} partie est entièrement classique, et repose sur le calcul de la force de Lorentz séculaire exercée par une onde monochromatique sur un dipôle classique. En particulier, l'exemple de l'électron libre étudié en C ne fait appel à aucun concept quantique.

La fin de la 1^{ère} partie est consacrée à l'étude des forces radiatives s'exerçant sur un atome neutre à 2 niveaux. Il s'agit là d'un système quantique qui n'a pas de limite classique. Peut-on dans ce cas continuer à utiliser l'expression de la force classique du § A, même si l'on ne s'intéresse, comme dans cette 1^{ère} partie, qu'à la valeur moyenne de la force?

C'est pourquoi il a semblé utile, dans le § D qui suit, d'établir l'expression de la force moyenne en partant des équations de Heisenberg décrivant le mouvement du centre de masse de l'atome et en en prenant la valeur moyenne (Théorème d'Ehrenfest). On pourra ainsi déterminer dans quelles conditions l'expression classique du § A peut continuer à être utilisée. Les équations du mouvement du dipôle moyen seront également établies (Equations de Bloch optiques).

Les paragraphes suivants seront consacrés à une interprétation géométrique des résultats obtenus ainsi qu'au calcul et à l'interprétation des forces radiatives s'exerçant sur un atome neutre à 2 niveaux, initialement immobile ou en mouvement (forces dépendant de la vitesse).

D) Atome neutre à 2 niveaux dans une onde lumineuse résonnante

Théorème d'Ehrenfest et Equations de Bloch optiques

- 1 - Introduction Transparent T 1
- 2 - Hamiltonien (T 2 → 4)
Hamiltonien atomique, d'interaction, total.
- 3 - Evolution du centre de masse (Théorème d'Ehrenfest)
 - Equations de Heisenberg pour la position et l'impulsion du centre de masse. (T 5)
 - Equations d'évolution des valeurs moyennes. Difficultés du calcul de la force moyenne (T 6).
 - Approximations conduisant à l'expression classique (T 7 → 12)
 - Conclusions sur la force radiative moyenne (T 13)
- 4 - Evolution des variables internes (Equations de Bloch optiques)
 - Champ agissant sur l'atome T 14 → 15
 - Modèle simple d'atome - Approximation du champ tournant T 16 → 18
 - Matrice densité interne - Relaxation radiative T 19 → 20
 - Equations d'évolution de la matrice densité interne T 21 → 25
- 5 - Récapitulation générale T 26 → 27

Buts du § D (2)

- Etablir à partir du théorème d'Ehrenfest l'expression de la force radiative moyenne exercée par une onde lumineuse sur un atome neutre

Justifier ainsi le résultat purement classique du § A, préciser ses conditions de validité, et le généraliser (ondes non monochromatiques, vitesses de translation non nulles...)

- Etablir les équations d'évolution du dipole atomique dans le cas d'un atome à 2 niveaux (Equations de Bloch optiques)

Hamiltonien d'interaction (3) avec le champ incident $V(t)$

Approximation dipolaire électrique

$$V(t) = -\vec{D} \cdot \vec{E}(\vec{R}, t)$$

Interaction du dipole \vec{D} avec le champ électrique de l'onde incidente, évalué à la position \vec{R} du centre de masse

Termes négligés (dipolaire magnétique, quadrupolaire électrique...) plus petits par un facteur a_0/λ

Le champ incident est traité classiquement, de sorte que $V(t)$ est un opérateur purement atomique, dépendant des opérateurs "interne" \vec{D} et "externe" \vec{R}

Hamiltonien atomique H_A (2) (en l'absence de champ)

2 types d'opérateurs atomiques

- Variables du centre de masse
Degrés de liberté externes ou de translation

\vec{R} : position du centre de masse
 \vec{P} : impulsion " " "

- Variables internes (dans le système du centre de masse)

Par exemple, l'opérateur dipole $\vec{D} = \sum_i q_i (\vec{r}_i - \vec{R}) = \sum_i q_i \vec{r}_i$ (car $\sum_i q_i = 0$)

Hamiltonien H_A

$$H_A = \frac{\vec{P}^2}{2M} + h_A$$

$\frac{\vec{P}^2}{2M}$ Energie cinétique de translation (M: masse totale de l'atome)

h_A Hamiltonien interne (Niveaux d'énergie électroniques)

Hamiltonien total H (4)

$$H = \frac{\vec{P}^2}{2M} + h_A - \vec{D} \cdot \vec{E}(\vec{R}, t)$$

Que manque-t-il ?

- Termes suivants du développement multipolaire (a_0/λ)
- Corrections relativistes (v/c)
- Hamiltonien du champ quantique et interaction de l'atome avec le champ quantique, en particulier le champ du vide

Importance pour l'émission spontanée (voir cours ultérieurs)

Ici, l'émission spontanée sera décrite phénoménologiquement par des termes d'amortissement dans les équations d'évolution du dipole moyen $\langle \vec{D} \rangle$

Evolution du centre de masse (5)Point de vue de Heisenberg

- Instant initial $t_0 = 0$
Etat du système : $|\psi\rangle$
Observables : $\vec{R}, \vec{P}, \vec{D}, \dots$
- Instant ultérieur t
 $|\psi\rangle$ reste fixe. Les observables G évoluent conformément à
 $i\hbar \dot{G}(t) = [G(t), H(t)]$

Equations d'évolution de \vec{R} et \vec{P}

$$\dot{\vec{R}}(t) = \frac{1}{i\hbar} [\vec{R}(t), H(t)] = \vec{\nabla}_{\vec{P}} H(t) = \frac{\vec{P}(t)}{M}$$

$$\dot{\vec{P}}(t) = \frac{1}{i\hbar} [\vec{P}(t), H(t)] = -\vec{\nabla}_{\vec{R}} H(t)$$

$$M\ddot{\vec{R}}_i(t) = \sum_j D_j(t) \frac{\partial}{\partial R_i(t)} E_j(\vec{R}(t), t) = F_i(t)$$

Grande ressemblance entre l'opérateur force $F_i(t)$ et la force séculaire classique $F_i(t)$ du § A.

Hypothèse sur la durée t (7) de l'interaction

- On suppose t suffisamment voisin de l'instant initial 0 pour qu'on puisse écrire

$$\vec{R}(t) \approx \vec{R}(0) + \frac{\vec{P}(0)}{M} t = \vec{R} + \frac{\vec{P}}{M} t \quad (1)$$

Entre 0 et t , l'atome se déplace avec sa vitesse initiale \vec{P}/M .

La variation de vitesse due aux forces radiatives entre 0 et t est donc supposé négligeable (les conditions de validité de (1) seront précisées ultérieurement)

- Si la condition (1) est remplie, $\vec{R}(t)$ reste un opérateur n'agissant que sur la partie externe de $|\psi\rangle$ (supposé factorisé), car $\vec{R}(t)$ ne dépend alors que de \vec{R} et \vec{P} .

Equations d'évolution des valeurs (6) moyennes (Théorème d'Ehrenfest)

$$\langle \psi | \vec{R}(t) | \psi \rangle = \vec{R}(t)$$

$$M \dot{\vec{R}}_i(t) = \sum_j \langle \psi | D_j(t) \frac{\partial}{\partial R_i(t)} E_j(\vec{R}(t), t) | \psi \rangle$$

2 difficultés

- 1 - La moyenne du produit d'opérateurs du 2^{ème} membre n'est pas en général égale au produit des moyennes (corrélations entre variables externes et internes)

Même si l'état initial $|\psi\rangle$ est factorisé (en une partie externe et interne), $\vec{R}(t)$ agit sur ces 2 types de degrés de liberté de $|\psi\rangle$ (si t est suffisamment grand)

- 2 - Même si l'élément de matrice est factorisé, on a en général $\langle \psi | E(\vec{R}, t) | \psi \rangle \neq E(\langle \vec{R} \rangle, t)$

Développement en ondes planes (8) du champ $E(\vec{R}(t), t)$

Apparaissent dans ce développement des termes de la forme $e^{i\vec{k} \cdot \vec{R}(t)} \approx e^{i\vec{k} \cdot (\vec{R} + \frac{\vec{P}}{M} t)}$

si la condition (1) est remplie

Nous allons chercher maintenant à quelles conditions doit satisfaire l'état initial $|\psi\rangle$

pour qu'on puisse écrire $\underbrace{e^{i\vec{k} \cdot (\vec{R} + \frac{\vec{P}}{M} t)}}_{\text{Opérateur}} |\psi\rangle \approx \underbrace{e^{i\vec{k} \cdot (\vec{R} + \frac{\vec{P}}{M} t)}}_{\text{Nombre}} |\psi\rangle$

avec $\vec{R} = \langle \psi | \vec{R} | \psi \rangle$ $\vec{P} = \langle \psi | \vec{P} | \psi \rangle$

c'est à dire encore

$$e^{i\vec{k} \cdot \vec{R}(t)} |\psi\rangle \approx e^{i\vec{k} \cdot \vec{R}(t)} |\psi\rangle$$

$$E(\vec{R}(t), t) |\psi\rangle \approx E(\vec{R}(t), t) |\psi\rangle$$

avec $\vec{R}(t) \approx \vec{R} + \frac{\vec{P}}{M} t$

Hypothèses sur l'état initial $|\psi\rangle$ (9)

- Factorisé
- Le paquet d'ondes associé à $|\psi\rangle$ est centré sur $\vec{R} = \langle \psi | \vec{R} | \psi \rangle$ avec une largeur ΔR très petite devant la longueur d'onde lumineuse $\Delta R \ll \lambda \iff \boxed{k \Delta R \ll 1}$ (2)

- Dans l'espace des impulsions, ce paquet d'ondes est centré en $\vec{P} = \langle \psi | \vec{P} | \psi \rangle$ et a une largeur $\Delta P \approx \hbar / \Delta R$.

t est supposé suffisamment petit pour que

$$\boxed{k \Delta P t / M \approx \hbar k t / M \Delta R \ll 1} \quad (3)$$

- De (2) et (3) on déduit alors $e^{i\vec{k} \cdot (\vec{R} + \frac{\vec{P}}{M} t)} |\psi\rangle \approx e^{i\vec{k} \cdot (\vec{R} + \frac{\vec{P}}{M} t)} |\psi\rangle$

Expression de la force moyenne (11)

$$M \ddot{\vec{R}}_i(t) = \sum_j \langle \psi | D_j(t) \frac{\partial}{\partial R_i(t)} \underbrace{E_j(\vec{R}(t), t)}_{\partial_i E_j(\vec{R}(t), t)} | \psi \rangle$$

$$= \sum_j \underbrace{\langle \psi | D_j(t) | \psi \rangle}_{D_j(t)} \partial_i E_j(\vec{R}(t), t)$$

$$M \ddot{\vec{R}}_i(t) = \sum_j D_j(t) \partial_i E_j(\vec{R}(t), t)$$

On retrouve l'expression de la force classique du § A, le dipole classique étant remplacé par la valeur moyenne du dipole quantique et le champ étant évalué au centre du paquet d'ondes

Expression plus générale

- Onde pas forcément mono-chromatique
- Vitesse initiale $\dot{\vec{R}}(t) = \vec{P}(t) / M$ non nulle

Récapitulation des conditions (10) sur le temps t

t est suffisamment petit pour que $\vec{R}(t) \approx \vec{R} + \frac{\vec{P}}{M} t$ (1)

$$\hbar k t / M \Delta R \ll 1 \quad (3)$$

Or, ΔR est tel que

$$k \Delta R \ll 1 \quad (2)$$

En éliminant ΔR entre (2) et (3) on obtient

$$\boxed{\frac{\hbar}{t} \gg \frac{\hbar^2 k^2}{2M} = E_{\text{recul}}} \quad (3')$$

E_{recul} est l'énergie de recul de l'atome lors de l'émission d'un photon

Si (1), (2) et (3') sont remplies, l'opérateur $\vec{R}(t)$ peut être remplacé par sa valeur moyenne $\vec{R}(t)$ dans l'expression de la force moyenne

Temps de réponse du dipole (12)

- Temps d'amortissement caractéristique τ : durée de vie radiative de l'état excité e

Largeur naturelle de e : Γ

$$\boxed{\Gamma = \frac{1}{\tau}}$$

- L'expression classique de la force peut être utilisée en régime stationnaire si la condition (3') est valable avec $t = \tau$, c-à-d si

$$\boxed{\hbar \Gamma \gg E_{\text{recul}}} \quad (3'')$$

- Condition largement réalisée pour les transitions permises. Par exemple, pour les raies D de Na $\hbar \Gamma \approx 400 E_{\text{recul}}$

Conclusions pour l'expression (13) de la valeur moyenne de la force

- L'expression classique de la force moyenne peut être utilisée
- si le paquet d'ondes atomique initial a des dimensions petites devant la longueur d'onde lumineuse
 - si le temps d'interaction t est court devant $\hbar / E_{\text{recoil}}$ et suffisamment court pour qu'on puisse négliger la variation de vitesse due aux forces radiatives
 - la valeur stationnaire du dipôle peut être utilisée dans l'expression de la force si la largeur naturelle de l'état excité est grande devant l'énergie de recul

Expression du champ agissant (15) sur l'atome

$$\vec{E}(\vec{R}(t), t) = \vec{E}^+(\vec{R}(t), t) e^{-i\omega t} + \vec{E}^-(\vec{R}(t), t) e^{i\omega t}$$

Champ quasimonochromatique et non monochromatique

- Dépendance principale en $e^{\pm i\omega t}$

$\vec{E}^{\pm}(\vec{R}(t), t)$: variation avec t beaucoup plus lente

2 causes de variation avec t

- (i) Dépendance explicite en t
L'onde incidente peut être non monochromatique

- (ii) Dépendance via $\vec{R}(t)$

Même si l'onde incidente est monochromatique, l'atome en mouvement peut la ressentir comme non monochromatique

Equations d'évolution des (14) variables internes

- Un raisonnement analogue à celui fait plus haut montre que, dans les équations d'évolution du dipôle moyen, on peut remplacer l'opérateur position du centre de masse par le centre $\vec{R}(t)$ du paquet d'ondes.

- Le champ électrique qui agit sur l'atome est donc le champ

$$\vec{E}(\vec{R}(t), t)$$

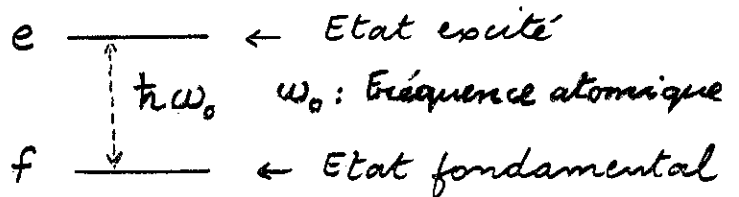
évalué au centre du paquet d'ondes en mouvement

$$\vec{R}(t) \approx \vec{R} + \frac{\vec{P}}{M} t$$

C'est ainsi qu'apparaîtront les effets liés à la vitesse $\frac{\vec{P}}{M}$

Modèle simple d'atome (16)

Atome à 2 niveaux



Hamiltonien atomique interne h_A

Si l'on prend le zéro d'énergie au milieu de e et f , h_A est représenté par la matrice

$$h_A = \frac{\hbar\omega_0}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Désaccord

$$\delta = \omega - \omega_0$$

entre la fréquence atomique et la fréquence centrale de l'onde
Excitation quasirésonnante

$$|\delta| \ll \omega_0$$

Opérateur dipôle

(17)

$$D_j = \delta_{j3} d \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} j = 2, 3, 3 \\ d \text{ réel} \end{matrix}$$

 \vec{D} oscille suivant Oz \vec{D} : opérateur impair, non diagonal

$$D_3 = D = \underbrace{d|e\rangle\langle f|}_{D_+} + \underbrace{d|f\rangle\langle e|}_{D_-}$$

D_+ : composante "montante" de D
Fait passer de f à e

D_- : composante "descendante" de D
Fait passer de e à f

Interaction avec le champ

$$V(t) = -D E_3(\vec{R}(t), t)$$

Pour simplifier les notations,
on posera parfois

$$E_3^{\pm}(\vec{R}(t), t) = \underbrace{E^{\pm}(t)}_{\text{Variation lente}}$$

Approximation du champ tournant

(18)

$$\begin{aligned} V(t) &= -D E(\vec{R}(t), t) = \\ &= -D_+ E^+(t) e^{-i\omega t} - D_- E^-(t) e^{i\omega t} \\ &= -D_- E^+(t) e^{-i\omega t} - D_+ E^-(t) e^{i\omega t} \end{aligned}$$

Les termes de la dernière ligne ne conduisent à aucun effet résonnant quand $\omega - \omega_0 \rightarrow 0$ à la différence de ceux de la deuxième ligne. On les néglige

Quand le champ E est traité quantiquement, les termes de la dernière ligne décrivent des processus où l'atome passe de e à f avec absorption d'un photon ou de f à e avec émission d'un photon (processus non résonnants)

Point de vue de Schrödinger (19)

Sera utilisé ici pour décrire l'évolution de l'état interne.

Possibilité également d'utiliser le point de vue d'Heisenberg (cf cours ultérieur)

Description par matrice densité

Impossibilité de décrire l'évolution atomique due à des processus dissipatifs, comme l'émission spontanée, en termes de vecteur d'état

Les termes d'amortissement correspondants seront rajoutés phénoménologiquement dans l'équation d'évolution de la matrice densité

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{ee} & \sigma_{ef} \\ \sigma_{fe} & \sigma_{ff} \end{pmatrix}$$
Relaxation par émission spontanée

(20)

$$\frac{d}{dt} \sigma_{ee} = -\Gamma \sigma_{ee} \quad (1)$$

$$\frac{d}{dt} \sigma_{ff} = +\Gamma \sigma_{ee} \quad (2)$$

$$\frac{d}{dt} \sigma_{ef} = -\frac{\Gamma}{2} \sigma_{ef} \quad \frac{d}{dt} \sigma_{fe} = -\frac{\Gamma}{2} \sigma_{fe} \quad (3)$$

(1) : L'atome quitte e avec un temps de transition Γ

(2) : Transfert de cet atome de e vers f

Γ : Temps d'émission spontanée
Largeur naturelle de e

$\Gamma = \frac{1}{\tau}$ τ : durée de vie radiative

(3) : Amortissement des "cohérences optiques", ou encore du dipôle moyen avec un temps $\frac{\Gamma}{2}$. En effet,

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(t) &= \text{Tr} \{ D \sigma(t) \} \\ &= d [\sigma_{ef}(t) + \sigma_{fe}(t)] \end{aligned}$$

Evolution de σ due à $\bar{h}_A + V(t)$ (21)

$$\frac{d}{dt} \sigma(t) = \frac{1}{i\hbar} [\bar{h}_A + V(t), \sigma(t)]$$

$$\bar{h}_A + V(t) = \begin{pmatrix} \hbar\omega_0/2 & -d \mathcal{E}^+(t) e^{-i\omega t} \\ -d \mathcal{E}^-(t) e^{i\omega t} & -\hbar\omega_0/2 \end{pmatrix}$$

1^{er} Changement de variables
(pour éliminer la dépendance temporelle rapide)

$$\sigma_{ef}(t) = \tilde{\sigma}_{ef}(t) e^{-i\omega t} \quad \sigma_{fe}(t) = \tilde{\sigma}_{fe}(t) e^{i\omega t}$$

$$\sigma_{ee} = \tilde{\sigma}_{ee} \quad \sigma_{ff} = \tilde{\sigma}_{ff}$$

$$\hookrightarrow \frac{d}{dt} \tilde{\sigma}(t) = \frac{1}{i\hbar} [\tilde{H}(t), \tilde{\sigma}(t)]$$

$$\tilde{H}(t) = \begin{pmatrix} \hbar(\omega_0 - \omega)/2 & -d \mathcal{E}^+(t) \\ -d \mathcal{E}^-(t) & -\hbar(\omega_0 - \omega)/2 \end{pmatrix}$$

Dépendance temporelle lente
(Equivalent du passage dans le référentiel tournant)

2^{ème} changement de variables (23)

(suggéré par les expressions de \vec{F}_1 et \vec{F}_2)

Dans \vec{F}_1 et \vec{F}_2 apparaissent $\mathcal{D}_+ e^{-i\phi} = d \tilde{\sigma}_{fe}(t) e^{-i\phi(\vec{R}(t), t)}$

et la quantité complexe conjuguée

On pose donc

$$\hat{\sigma}_{fe}(t) = \tilde{\sigma}_{fe}(t) e^{-i\phi(\vec{R}(t), t)}$$

$$\hat{\sigma}_{ee} = \tilde{\sigma}_{ee} = \sigma_{ee} \quad \hat{\sigma}_{ff} = \tilde{\sigma}_{ff} = \sigma_{ff}$$

Equation d'évolution de $\hat{\sigma}$

$$\frac{d}{dt} \hat{\sigma}(t) = \frac{1}{i\hbar} [\hat{H}(t), \hat{\sigma}(t)]$$

$$\hat{H}(t) = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} -\delta - \dot{\phi}(t) & \omega_1(t) \\ \omega_1(t) & \delta + \dot{\phi}(t) \end{pmatrix}$$

$\delta = \omega - \omega_0$ Désaccord

$$\dot{\phi}(t) = \left(\frac{\partial}{\partial t} \phi(\vec{r}, t) \right)_{\vec{r}=\vec{R}(t)} + \dot{\vec{R}}(t) \cdot \left(\nabla \phi(\vec{r}, t) \right)_{\vec{r}=\vec{R}(t)}$$

$\omega_1(t) = -d \mathcal{E}_0(\vec{R}(t), t) / \hbar$ Fréquence de Rabi

Retour sur l'expression de la force (22)

$$M \ddot{\vec{R}} = \mathcal{D}(t) \nabla \mathcal{E}(\vec{R}(t), t) = \vec{F}(t)$$

$$\mathcal{D}(t) = \mathcal{D}_+(t) e^{i\omega t} + \mathcal{D}_-(t) e^{-i\omega t}$$

$$\mathcal{D}_+(t) = d \tilde{\sigma}_{fe}(t) \quad \mathcal{D}_-(t) = d \tilde{\sigma}_{ef}(t)$$

$$\mathcal{E}(\vec{r}, t) = \mathcal{E}^+(\vec{r}) e^{-i\omega t} + \mathcal{E}^-(\vec{r}) e^{i\omega t}$$

\vec{r} : point courant de l'espace

$$\mathcal{E}^\pm(\vec{r}, t) = \frac{\mathcal{E}_0(\vec{r}, t)}{2} e^{\mp i\phi(\vec{r}, t)}$$

↳ Calculs et résultats analogues

à ceux du § A avec toutefois

$$\mathcal{E}_0 \rightarrow \mathcal{E}_0(\vec{R}(t), t) \quad \phi_0 \rightarrow \phi_0(\vec{R}(t), t)$$

$$\nabla \phi \rightarrow (\nabla \phi(\vec{r}, t))_{\vec{r}=\vec{R}(t)}$$

$$\nabla \mathcal{E}_0 \rightarrow (\nabla \mathcal{E}_0(\vec{r}, t))_{\vec{r}=\vec{R}(t)}$$

Toutes les grandeurs relatives au champ, et apparaissant dans les expressions de \vec{F}_1 et \vec{F}_2 , doivent être évaluées au centre du paquet d'ondes

Equations d'évolution globale de $\hat{\sigma}$ (24)

Contribution du commutateur avec $\hat{\sigma}$

+ Relaxation par émission spontanée

$$\frac{d}{dt} \hat{\sigma}_{ee}(t) = \frac{i}{2} \omega_1(t) [\hat{\sigma}_{fe}(t) - \hat{\sigma}_{ef}(t)] - \Gamma \hat{\sigma}_{ee}(t)$$

$$\frac{d}{dt} \hat{\sigma}_{ff}(t) = -\frac{d}{dt} \hat{\sigma}_{ee}(t)$$

$$\frac{d}{dt} \hat{\sigma}_{ef}(t) = i[\delta + \dot{\phi}(t)] \hat{\sigma}_{ef}(t) + \frac{i}{2} \omega_1(t) [\hat{\sigma}_{ee}(t) - \hat{\sigma}_{ff}(t)] - \frac{\Gamma}{2} \hat{\sigma}_{ef}(t)$$

$$\frac{d}{dt} \hat{\sigma}_{fe}(t) = \left[\frac{d}{dt} \hat{\sigma}_{ef}(t) \right]^*$$

Système différentiel linéaire permettant de calculer l'évolution de l'état interne

La 2^{ème} équation exprime que

$$\text{Tr} \hat{\sigma} = \hat{\sigma}_{ee}(t) + \hat{\sigma}_{ff}(t) = \text{Cte} = 1$$

3^{ème} changement de variables (25)

$$u(t) = (\hat{\sigma}_{fe}(t) + \hat{\sigma}_{ef}(t)) / 2$$

$$v(t) = (\hat{\sigma}_{fe}(t) - \hat{\sigma}_{ef}(t)) / 2i$$

Ce sont $u(t)$ et $v(t)$ qui apparaissent dans \vec{F}_1 et \vec{F}_2 (composantes du dipole en phase et en quadrature avec le champ)

$$w(t) = (\hat{\sigma}_{ee}(t) - \hat{\sigma}_{ff}(t)) / 2$$

Différence de populations

Equations de Bloch optiques

$$\frac{d}{dt} u(t) = [\delta + \dot{\phi}(t)] v(t) - \frac{\Gamma}{2} u(t)$$

$$\frac{d}{dt} v(t) = -[\delta + \dot{\phi}(t)] u(t) - \omega_1(t) w(t) - \frac{\Gamma}{2} v(t)$$

$$\frac{d}{dt} w(t) = +\omega_1(t) v(t) - \Gamma \left(\frac{1}{2} + w(t) \right)$$

Interprétation géométrique sera donnée ultérieurement

Système d'équations couplées (27)

- Equations de Bloch optiques pour $u(t)$, $v(t)$, $w(t)$

Dépendent de $\vec{R}(t)$

- Equation du mouvement de $\vec{R}(t)$

Dépend de $u(t)$ et $v(t)$ via $\vec{F}(t)$

La condition $\hbar\Gamma \gg E_{recul}$

- permet d'utiliser ces équations pendant un temps plus long que τ

- entraîne que les variables internes suivent adiabotiquement l'évolution des variables internes

Phénomènes négligés

Séparation du paquet d'ondes (Effet Stern et Gerlach optique)

Diffusion d'impulsion liée aux fluctuations de la force

Récapitulation générale (26)

- A l'instant initial 0, atome en \vec{R} avec la vitesse \vec{P}/M

$$\vec{R}(t) = \vec{R} + \frac{\vec{P}}{M} t$$

- On en déduit $\omega_1(t)$ et $\dot{\phi}(t)$

- Les équations de Bloch optiques permettent alors de calculer $u(t)$ et $v(t)$

- Connaissant $u(t)$ et $v(t)$, ainsi

que $\vec{\nabla}\phi = (\vec{\nabla}\phi(\vec{r}, t))_{\vec{r}=\vec{R}(t)}$ et

$\vec{\nabla}E_0 = (\vec{\nabla}E_0(\vec{r}, t))_{\vec{r}=\vec{R}(t)}$, on en déduit

$$\vec{F}(t) = u(t) \vec{\nabla}E_0 + v(t) E_0 \vec{\nabla}\phi$$

- $\vec{F}(t)$ peut être alors reporté dans l'équation $M\ddot{\vec{R}} = \vec{F}(t)$, ce qui permet de calculer la variation de vitesse de l'atome

Référence

R. J. COOK

Phys. Rev. A 20, 224 (1979)

E Représentation géométrique en termes de spin fictif .

- 1 - Introduction (T-1)
- 2 - Correspondance entre un atome à 2 niveaux et un spin fictif $1/2$ (T-2 \rightarrow 3)
- 3 - Interprétation géométrique de l'hamiltonien d'interaction (T-4 \rightarrow 5)
- 4 - Passage dans le référentiel tournant
Précession de Rabi (T-6 \rightarrow 7)
- 5 - Interprétation du 2^{ème} changement de variables du § D
Equations de Bloch optiques (T-8 \rightarrow 10)
- 6 - Champ effectif (T-11)
- 7 - Lien entre forces radiatives et effet Stern et Gerlach (T-12 \rightarrow 14)

F- Forces radiatives stationnaires pour ^{un} atome à 2 niveaux initialement immobile dans une onde monochromatique

- 1 - Introduction (T-15 \rightarrow 16)
- 2 - Interprétation de la 3^{ème} équation de Bloch (T-17)
- 3 - Solution stationnaire des équations de Bloch (T-18)
- 4 - Calcul et interprétation de \vec{F}_1 (T-19 \rightarrow 23)
Comparaison avec le résultat obtenu pour l'électron libre
Ordres de grandeur
- 5 - Calcul et interprétation de \vec{F}_2 (T-24 \rightarrow 26)
- 6 - Variation de vitesse de l'atome pendant la durée de vie radiative (T-27)
- 7 - Récapitulation (T-28)

Buts du § E

- Montrer que les équations d'évolution de la matrice densité interne sont équivalentes aux équations du mouvement d'un spin $1/2$ dans un champ magnétique
- Donner une interprétation géométrique simple de divers paramètres introduits en D
 - Phase ϕ de l'onde
 - Fréquence de Rabi ω_1
 - Désaccord δ
 - Composantes en phase et en quadrature du dipôle u et v
- Etablir un lien entre le problème des forces radiatives et l'effet Stern et Gerlach

IV-2

(1) Correspondance atome à 2 niveaux \rightarrow spin "fictif" $1/2$ \vec{S} (2)

- Aux 2 états $|e\rangle$ et $|f\rangle$ sont associés les 2 états $|+\rangle$ et $|-\rangle$ de S_z
 - $|e\rangle \rightarrow |+\rangle$ $|f\rangle \rightarrow |-\rangle$
- Matrices de spin S_x, S_y, S_z

$$S_x = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad S_y = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad S_z = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$
- Toute matrice atomique 2×2 dans la base $\{|e\rangle, |f\rangle\}$ peut être développée sur $S_x, S_y, S_z, \mathbb{1}$

$$R_A = \frac{\hbar\omega_0}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \hbar\omega_0 S_z$$

$$D = d \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow 2d S_x$$

$$D_+ = d |e\rangle\langle f| = d \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow d S_+$$

$$D_- = d |f\rangle\langle e| = d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow d S_-$$

$$S_{\pm} = S_x \pm i S_y$$

Interprétation des éléments de la matrice densité interne σ (3)

$$\sigma_{ef} = \text{Tr} \{ \sigma D_- / d \} \rightarrow \langle S_- \rangle$$

$$\sigma_{fe} = \text{Tr} \{ \sigma D_+ / d \} \rightarrow \langle S_+ \rangle$$

$$(\sigma_{ee} - \sigma_{ff}) / 2 = \text{Tr} \{ \sigma R_A / \hbar\omega_0 \} \rightarrow \langle S_z \rangle$$

Posons $\vec{P} = \langle \vec{S} \rangle$

$$\sigma_{ef} \rightarrow P_x - iP_y \quad \sigma_{fe} \rightarrow P_x + iP_y$$

$$(\sigma_{ee} - \sigma_{ff}) / 2 \rightarrow P_z$$

Les éléments de matrice de σ sont reliés aux composantes de $\vec{P} = \langle \vec{S} \rangle$

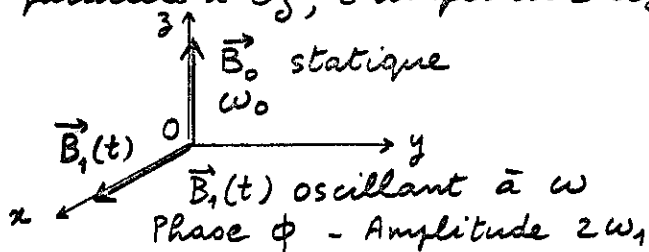
Remarque : Ne pas confondre l'espace réel et l'espace du spin fictif. $\langle D \rangle$ est toujours parallèle à l'axe Oz de l'espace réel. \vec{P} a des composantes sur les 3 axes de l'espace du spin fictif.

Interprétation géométrique de l'hamiltonien d'interaction (4)

- $$V(t) = -D \vec{E}(\vec{r}, t) \quad (\text{pour } \vec{r} = \vec{R}(t))$$
- $$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0(\vec{r}, t) \cos(\omega t + \phi(\vec{r}, t))$$
- $\vec{E}_0(\vec{r}, t)$ et $\phi(\vec{r}, t)$: amplitude et phase lentement variables. On a posé au § D
- $$\omega_1(\vec{r}, t) = -d \vec{E}_0(\vec{r}, t) / \hbar$$
- Comme $D \rightarrow 2d S_x$
- $$V(t) \rightarrow 2 \hbar \omega_1(\vec{r}, t) \cos(\omega t + \phi(\vec{r}, t)) S_x$$
- Même forme que l'interaction du spin avec un champ $\vec{B}_1(t)$
- Parallèle à Ox
 - De fréquence (moyenne) ω
 - De phase ϕ
 - D'amplitude $2\omega_1$ (en unités de pulsation de Larmor)

Champs magnétiques équivalents à l'hamiltonien total - (5)

$H = h_A + V(t)$ $h_A \rightarrow \hbar \omega_0 S_z$
 h_A équivalent à un champ statique \vec{B}_0 parallèle à Oz , d'amplitude ω_0



$\vec{B}_1(t)$ peut être décomposé en 2 composantes tournant en sens inverse dans xOy . Quand ω est proche de ω_0 , seule la composante tournant dans le "bon" sens autour de \vec{B}_0 a un effet important.

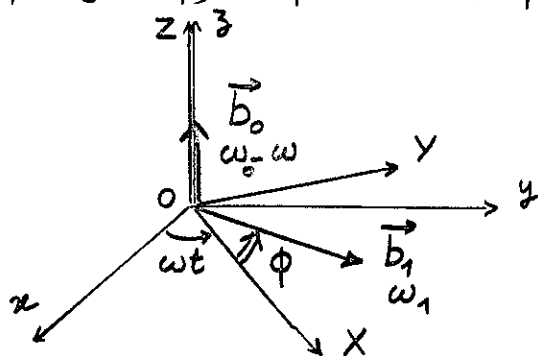
On néglige l'autre (approximation du champ tournant)

Référentiel $OXYZ$ tournant (6)

(à la fréquence ω autour de Oz)
 - Dans ce référentiel, l'amplitude du champ statique parallèle à Oz , \vec{b}_0 , est changée de ω_0 à $\omega_0 - \omega = -\delta$ (Théorème de Larmor)

- La "bonne" composante de $\vec{B}_1(t)$, $\vec{b}_1(t)$, devient quasi-statique, d'amplitude $\omega_1(t)$, et fait un angle $\phi(t)$ avec Ox car

$$2\omega_1 \cos(\omega t + \phi) = \omega_1 e^{i(\omega t + \phi)} + \omega_1 e^{-i(\omega t + \phi)}$$



$\omega_1(t), \phi(t)$: lentement variables

Interprétation du 1^{er} changement (7)
de variables du § D

La transformation $\sigma \rightarrow \tilde{\sigma}$ correspond précisément au passage dans le référentiel tournant.

\tilde{H} correspond à l'interaction du spin avec $\vec{b}_0 + \vec{b}_1$ (voir III-21)

$$\tilde{\sigma}_{ef} \rightarrow \mathcal{P}_x - i\mathcal{P}_y, \quad \tilde{\sigma}_{fe} \rightarrow \mathcal{P}_x + i\mathcal{P}_y, \quad (\tilde{\sigma}_{ee} - \tilde{\sigma}_{ff})/2 \rightarrow \mathcal{P}_z$$

Interprétation de ω_1

A résonance ($\omega_0 = \omega$), \vec{b}_0 s'annule et le spin précesse autour de \vec{b}_1 à la fréquence ω_1 .

Précession de Rabi à résonance du spin entre les 2 états $|+\rangle$ et $|-\rangle$

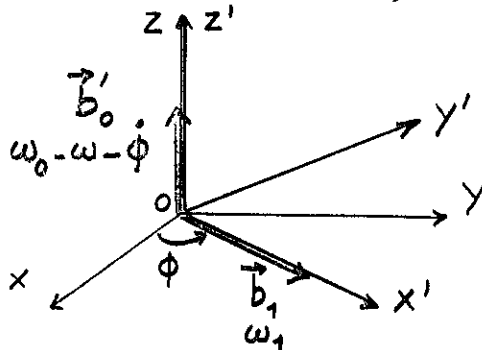
Interprétation de ϕ

Angle entre \vec{b}_1 et \vec{Ox} dans le plan xOy

Interprétation du 2^{ème} changement (8)
de variables du § D

La transformation $\tilde{\sigma} \rightarrow \hat{\sigma}$ du § D correspond à une rotation d'un angle ϕ autour de Oz . Dans le nouveau trièdre $Ox'y'z'$, \vec{b}_1 est aligné suivant \vec{Ox}'

Si ϕ dépend de t , la rotation précédente introduit un champ supplémentaire $-\dot{\phi}$ le long de Oz' (Théorème de Larmor)



\hat{H} correspond à l'interaction du spin avec $\vec{b}'_0 + \vec{b}_1$ (voir III-23)

Interprétation de u, v, w (9)

$$\hat{\sigma}_{ef} \rightarrow \mathcal{P}_{x'} - i \mathcal{P}_{y'} \quad \hat{\sigma}_{fe} \rightarrow \mathcal{P}_{x'} + i \mathcal{P}_{y'}$$

$$u(t) = \frac{1}{2} [\hat{\sigma}_{fe}(t) + \hat{\sigma}_{ef}(t)] \rightarrow \mathcal{P}_{x'}(t)$$

$$v(t) = \frac{1}{2i} [\hat{\sigma}_{fe}(t) - \hat{\sigma}_{ef}(t)] \rightarrow \mathcal{P}_{y'}(t)$$

Les composantes du dipôle en phase et en quadrature avec le champ, $u(t)$ et $v(t)$, correspondent donc aux composantes $\mathcal{P}_{x'}(t)$ et $\mathcal{P}_{y'}(t)$ du spin moyen sur la direction OX' du champ \vec{b}_1 et sur la direction perpendiculaire OY'

$$w(t) = \frac{1}{2} [\hat{\sigma}_{ee}(t) - \hat{\sigma}_{ff}(t)] \rightarrow \mathcal{P}_{z'}(t)$$

u, v, w sont les 3 composantes de \vec{S} dans $OX'Y'Z'$ ("Vecteur de Bloch")

Expression de la force moyenne

$$\vec{F} = -\hbar \mathcal{P}_{x'} \vec{\nabla} \omega_1 - \hbar \mathcal{P}_{y'} \omega_1 \vec{\nabla} \phi$$

Interprétation des équations de Bloch optiques (voir III-25) (10)

Ces équations apparaissent comme décrivant l'évolution du spin moyen \vec{S} dans le référentiel $OX'Y'Z'$ sous l'effet de

- la précession autour de $\vec{b}'_0 + \vec{b}_1$,
- la "relaxation radiative"

Interprétation des termes de relaxation

$$\frac{d}{dt} \mathcal{P}_{z'} = -\Gamma (\mathcal{P}_{z'} + \frac{1}{2})$$

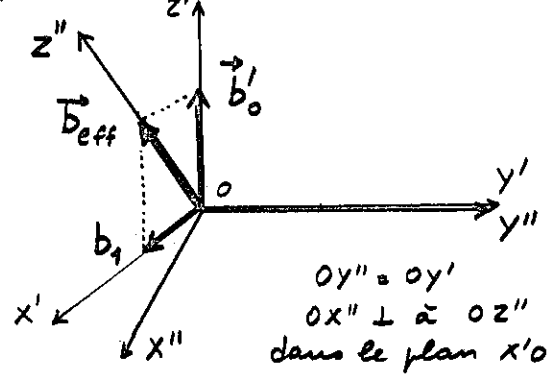
$\mathcal{P}_{z'}$ tend vers sa valeur d'équilibre $-\frac{1}{2}$ (spin dans l'état $|- \rangle$) avec un temps de relaxation $T_1 = 1/\Gamma$

$$\frac{d}{dt} \mathcal{P}_{x'} = -\frac{\Gamma}{2} \mathcal{P}_{x'} \quad \frac{d}{dt} \mathcal{P}_{y'} = -\frac{\Gamma}{2} \mathcal{P}_{y'}$$

Les composantes transversales $\mathcal{P}_{x'}$ et $\mathcal{P}_{y'}$ sont amorties avec un temps de relaxation $T_2 = 2/\Gamma$

Champ effectif (11)

3^{ème} changement de référentiel : Rotation autour de OY' amenant OZ' en OZ'' le long de la résultante \vec{b}_{eff} de \vec{b}'_0 et \vec{b}_1



Fréquence de Larmor autour de \vec{b}_{eff}

$$\Omega = \sqrt{\omega_1^2 + (\omega_0 - \omega - \dot{\phi})^2}$$

Intérêt de cette transformation

Si $\Omega \gg \Gamma$ (et si ω_1 et ϕ varient très lentement), le spin moyen précesse très vite autour de \vec{b}_{eff} et est donc aligné suivant OZ''

Liens entre forces radiatives et effet Stern et Gerlach (12)

On suppose ici l'onde incidente monochromatique ω_1 et ϕ dépendent de \vec{r} , mais non de t : $\omega_1(\vec{r}), \phi(\vec{r})$

Expression de la force moyenne

$$\vec{F} = -\hbar [\langle \vec{S} \cdot \vec{e}_{x'} \rangle \vec{\nabla} \omega_1 + \langle \vec{S} \cdot \vec{e}_{y'} \rangle \omega_1 \vec{\nabla} \phi]$$

$\langle \rangle$: Valeur moyenne prise sur l'état interne

$\vec{e}_{x'}, \vec{e}_{y'}$: Vecteurs unitaires le long de OX' et OY'

Toutes les grandeurs de champ sont évaluées en $\vec{r} = \vec{R}(t)$

Nous allons montrer que \vec{F} peut encore s'écrire

$$\vec{F} = -\hbar \langle \vec{\nabla} [\omega_1 (\vec{S} \cdot \vec{e}_{x'})] \rangle$$

Expression équivalente de \vec{F} (13)

- Comme $\vec{e}_{x'}$ est unitaire, on a (voir Fig de IV-8)
 $d\vec{e}_{x'} = \vec{e}_{y'} d\phi$
- Comme l'opérateur \vec{S} ne dépend pas de \vec{r} , il vient alors
 $\vec{\nabla}(\vec{S} \cdot \vec{e}_{x'}) = (\vec{S} \cdot \vec{e}_{y'}) \vec{\nabla} \phi$
 et par suite
 $\vec{\nabla}[\omega_1(\vec{S} \cdot \vec{e}_{x'})] = (\vec{\nabla} \omega_1)(\vec{S} \cdot \vec{e}_{x'}) + \omega_1(\vec{\nabla} \phi)(\vec{S} \cdot \vec{e}_{y'})$
- Si l'on prend la moyenne sur l'état interne, on retrouve bien que
 $\vec{F} = -\hbar \langle \vec{\nabla} [\omega_1(\vec{S} \cdot \vec{e}_{x'})] \rangle$
- Enfin, comme $\omega_0 - \omega$ et $\vec{e}_{z'}$ ne dépendent pas de \vec{r} , on peut rajouter à l'expression précédente
 $-\hbar \langle \vec{\nabla} [(\omega_0 - \omega)(\vec{S} \cdot \vec{e}_{z'})] \rangle$
 qui est nul.

Buts du § F (15)

- Résoudre les équations de Bloch optiques et calculer \vec{F}_1 et \vec{F}_2 dans le cas le plus simple possible
- Onde monochromatique
 - Atome initialement immobile (et le restant pendant la durée de l'interaction)
 - Régime stationnaire.

Simplifications

L'amplitude E_0 et la phase ϕ ne dépendent pas de t

$$\begin{cases} \omega_1 = -\frac{dE_0}{\hbar} & \text{indépendant de } t \\ \dot{\phi} = 0 \end{cases}$$

Les équations de Bloch optiques forment alors un système différentiel linéaire à coefficients constants.

Interprétation du résultat final (14)

$$\vec{F} = -\langle \vec{\nabla} \tilde{\mathcal{H}} \rangle$$

$$\tilde{\mathcal{H}} = [\hbar(\omega_0 - \omega)\vec{e}_{z'} + \hbar\omega_1\vec{e}_{x'}] \cdot \vec{S}$$

- $\tilde{\mathcal{H}}$ est l'hamiltonien d'interaction du spin fictif \vec{S} avec un champ
- dont la composante verticale est homogène
 - mais dont la composante horizontale a une direction ($\vec{e}_{x'}$) et une amplitude (ω_1) qui varient d'un point à l'autre
- Champ magnétique inhomogène spatialement.

Situation analogue à celle de l'effet Stern et Gerlach Problème qui sera repris plus en détail dans la 2^{ème} partie

Rappel des équations importantes (16)Equations de Bloch

$$\begin{cases} \dot{u} = \delta v - \Gamma u / 2 \\ \dot{v} = -\delta u - \omega_1 w - \Gamma v / 2 \\ \dot{w} = \omega_1 v - \Gamma (\frac{1}{2} + w) \end{cases}$$

Expression de la force moyenne

$$\vec{F} = \underbrace{d v E_0 \vec{\nabla} \phi}_{\vec{F}_1} + \underbrace{d u \vec{\nabla} E_0}_{\vec{F}_2}$$

$$D_{\text{quadr}} = d v_{\text{avance}}$$

$$D_{\text{phase}} = d u$$

Energie absorbée par l'atome / unité de temps

$$\frac{dW}{dt} = -\omega E_0 D_{\text{quadr}} \quad (\text{voir II-3})$$

$$= -\omega \underbrace{d E_0}_{-\hbar \omega_1} v = \hbar \omega \omega_1 v$$

Nombre de photons absorbés / unité de temps

$$\frac{dN}{dt} = \frac{1}{\hbar \omega} \frac{dW}{dt} = \omega_1 v$$

Interprétation 3^{ème} Équation de Bloch (17)

$$W = (\sigma_{ee} - \sigma_{ff})/2 = \sigma_{ee} - \frac{1}{2} \quad (\sigma_{ee} + \sigma_{ff} = 1)$$

$$\dot{\sigma}_{ee} = \omega_1 v - \Gamma \sigma_{ee}$$

$\dot{\sigma}_{ee}$: Nombre d'atomes arrivant dans l'état excité / unité de temps

$\omega_1 v$: Nombre de photons absorbés par l'atome / unité de temps

$\Gamma \sigma_{ee}$: Nombre de photons émis spontanément / unité de temps

↳ Augmentation du nombre d'atomes excités = Nombre de photons absorbés

- Nombre de photons émis spontanément

Résultat simple (et valable pour des situations plus générales que celles du § F)

En régime stationnaire ($\dot{\sigma}_{ee} = 0$)

Nombre de photons absorbés = Nombre de photons émis spontanément

Solution stationnaire des Équations de Bloch optiques (18)

$$u = \frac{\omega_1}{2} \frac{\omega - \omega_0}{(\omega - \omega_0)^2 + \frac{\Gamma^2}{4} + \frac{\omega_1^2}{2}}$$

$$v = \frac{\omega_1}{2} \frac{\frac{\Gamma}{2}}{(\omega - \omega_0)^2 + \frac{\Gamma^2}{4} + \frac{\omega_1^2}{2}}$$

$$W + \frac{1}{2} = \sigma_{ee} = \frac{\omega_1^2}{4} \frac{1}{(\omega - \omega_0)^2 + \frac{\Gamma^2}{4} + \frac{\omega_1^2}{2}}$$

Courbes d'absorption (pour v et σ_{ee}) ou de dispersion (pour u), centrées en ω_0 , de largeur $(\Gamma^2 + 2\omega_1^2)^{1/2}$

Il peut être commode d'introduire

$$s = \frac{\frac{\omega_1^2}{2}}{(\omega - \omega_0)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} \quad s : \text{Paramètre de saturation}$$

$$u = \frac{\delta}{\omega_1} \frac{s}{1+s} \quad v = \frac{\Gamma}{2\omega_1} \frac{s}{1+s}$$

$$\sigma_{ee} = \frac{1}{2} \frac{s}{1+s}$$

Expression de $\vec{F}_1 = \mathcal{D}_{quadr} \vec{E}_0 \vec{\nabla} \phi$ (19)

$$\mathcal{D}_{quadr} = d v \quad d \vec{E}_0 = -\hbar \omega_1$$

$$\vec{F}_1 = \underbrace{-\hbar(\vec{\nabla} \phi)}_{= \hbar \vec{k} \text{ pour onde plane}} \frac{\Gamma}{2} \frac{\frac{\omega_1^2}{2}}{\delta^2 + \frac{\Gamma^2}{4} + \frac{\omega_1^2}{2}} =$$

$$-\hbar(\vec{\nabla} \phi) \frac{\Gamma}{2} \frac{s}{1+s}$$

- Force maximale pour $\delta = 0$ (Forme d'absorption en $\omega - \omega_0$)

- A faible intensité, c.à.d pour $s \ll 1$ (ou encore $\omega_1^2/2 \ll (\Gamma/2)^2 + \delta^2$)

$$\vec{F}_1 = -\hbar(\vec{\nabla} \phi) \frac{\omega_1^2}{2} \frac{\Gamma}{(\omega - \omega_0)^2 + (\frac{\Gamma}{2})^2}$$

Force proportionnelle à l'intensité lumineuse ($\propto \omega_1^2$)

- A forte intensité ($s \gg 1$)

$$\vec{F}_1 \text{ sature à } -\hbar(\vec{\nabla} \phi) \frac{\Gamma}{2}$$

Valeur indépendante de l'intensité

Interprétation de \vec{F}_1 à basse intensité (pour une onde plane) (20)

- A résonance ($\delta = 0$) et pour $s \ll 1$

$$\vec{F}_1 = \frac{1}{\Gamma} \omega_1^2 \hbar \vec{k} = \frac{d^2 E_0^2}{\hbar^2 \Gamma} \hbar \vec{k}$$

- E_0^2 peut être relié au flux incident moyen d'énergie (voir II-22)

$$F_{inc} = \epsilon_0 c E_0^2 / 2$$

- Le taux Γ d'émission spontanée est calculable par la règle d'or de Fermi

$$\Gamma = \frac{1}{3\pi \hbar} \frac{d^2 \omega_0^3}{\epsilon_0 c^3}$$

- On en déduit

$$\vec{F}_1 = \underbrace{\frac{3 \lambda_0^2}{2\pi}}_{\text{Section efficace de diffusion résonnante}} \times \underbrace{\frac{F_{inc}}{\hbar \omega}}_{\text{Flux de photons incidents}} \times \underbrace{\hbar \vec{k}}_{\text{Impulsion de chaque photon}}$$

Section efficace de diffusion résonnante

Flux de photons incidents

Impulsion de chaque photon

Même structure que pour l'électron libre

Comparaison avec le résultat (21) obtenu pour un électron libre

- A basse intensité ($s \ll 1$), la réponse de l'atome est linéaire comme celle de l'électron

↳ Même structure pour \vec{F}_1

La section efficace Thomson $\sigma_T = 8\pi r_0^2/3$ est cependant remplacée par la section efficace de diffusion résonnante $\sigma_R = 3\lambda_0^2/2\pi$, beaucoup plus grande que σ_T ($\lambda_0/r_0 \approx 10^8$)

σ_R varie très vite avec ω (résonance très fine de largeur Γ) alors que σ_T est indépendante de ω

- A haute intensité ($s \gg 1$), la réponse de l'atome sature (alors que celle de e^- reste linéaire). On ne peut plus parler alors de section efficace.

Ordre de grandeur de $(\vec{F}_1)_{sat}$ (23)

$$(\vec{F}_1)_{sat} = \hbar k \frac{\Gamma}{2} = \frac{\hbar \Gamma}{2\lambda}$$

$$h = 6,6 \cdot 10^{-34} \text{ MKSA} \quad \lambda \approx 5 \cdot 10^{-7} \text{ m}$$

$$\Gamma = 10 \text{ MHz} = 10^7 \text{ Hz}$$

$$(\vec{F}_1)_{sat} = 6,6 \cdot 10^{-21} \text{ Newton}$$

Accélération pour un atome de numéro atomique $A = 100$

$$M = 10^2 \times 1,6 \cdot 10^{-27} = 1,6 \cdot 10^{-25} \text{ Kg}$$

$$a = \frac{F}{M} = \frac{6,6 \cdot 10^{-21}}{1,6 \cdot 10^{-25}} \approx 4 \cdot 10^4 \text{ m/s}^2$$

$$a = 4000 g$$

g : Accélération de la pesanteur

Force "pousse-atome"

Permet de pousser sélectivement un isotope si le laser est accordé sur la fréquence de cet isotope

Expression équivalente de \vec{F}_1 (22)

$$\vec{F}_1 = \underbrace{D_{quadr}}_{d\nu} \underbrace{\vec{E}_0}_{-\hbar\omega/d} \cdot \nabla \phi = \underbrace{\omega_1 \nu}_{dN/dt} \underbrace{(-\hbar \nabla \phi)}_{\hbar \vec{k}}$$

Or, d'après la 3^{ème} équation de Bloch

$$\frac{dN}{dt} = \omega_1 \nu = \sigma_{ee} + \Gamma \sigma_{ee}$$

Donc, en régime stationnaire

$$\boxed{\vec{F}_1 = \hbar \vec{k} \Gamma \sigma_{ee}}$$

A saturation, $\sigma_{ee} = \sigma_{ff} = 1/2$, et on retrouve bien

$$(\vec{F}_1)_{sat} = \hbar \vec{k} \frac{\Gamma}{2}$$

La force \vec{F}_1 s'annule si $\Gamma = 0$, c.à.d s'il n'y a pas d'émission spontanée d'où le nom de "force spontanée" donné parfois à \vec{F}_1

Dénomination prêtant à confusion car les transferts d'impulsion à l'origine de \vec{F}_1 s'effectuent au cours de processus d'absorption.

Expression de \vec{F}_2 (24)

$$\vec{F}_2 = \underbrace{D_{phase}}_{du} (\nabla \vec{E}_0) = - \frac{\hbar(\omega - \omega_0)}{4} \frac{\nabla \omega_1^2}{(\omega - \omega_0)^2 + \frac{\Gamma^2}{4} + \frac{\omega_1^2}{2}}$$

- \vec{F}_2 varie avec $\delta = \omega - \omega_0$ comme une courbe de dispersion

\vec{F}_2 change de signe avec δ

- \vec{F}_2 est dirigée suivant le gradient d'intensité lumineuse I

$\omega > \omega_0$ Pousse hors des I élevées

$\omega < \omega_0$ " vers les " "

- \vec{F}_2 dérive d'un potentiel $\vec{F}_2 = -\nabla U(\vec{r})$

$$U(\vec{r}) = \frac{\hbar \delta}{2} \text{Log} \left[1 + \frac{\omega_1^2(\vec{r})/2}{(\omega - \omega_0)^2 + (\Gamma/2)^2} \right]$$

$$= \frac{\hbar \delta}{2} \text{Log} [1 + s(\vec{r})]$$

On peut encore écrire

$$\vec{F}_2 = -\hbar \delta \frac{s}{1+s} \vec{\alpha} \quad \vec{\alpha} = \nabla \text{Log} |\omega_1(\vec{r})|$$

$$\vec{F}_1 = \hbar \frac{\Gamma}{2} \frac{s}{1+s} \vec{\beta} \quad \vec{\beta} = \nabla \phi$$

Interprétation physique de \vec{F}_2 (25)

- Redistribution cohérente des photons des modes non vides, les modes vides restant vides (voir § B)
- \vec{F}_2 ne s'annule pas si $\Gamma \rightarrow 0$ (à la différence de \vec{F}_1). L'émission spontanée n'est donc pas essentielle pour \vec{F}_2 .
- Analogie entre $U(\vec{r})$ et l'énergie de polarisation d'un diélectrique
- Analogie entre \vec{F}_2 et les forces agissant sur un diélectrique placé dans un champ inhomogène
- Ici la fréquence du champ est voisine de ω_0 (au lieu d'être nulle)
- Interprétation de \vec{F}_2 en termes de gradients de niveaux de "l'atome habillé": sera donnée ultérieurement

Ordres de grandeur (26)

- F_2 varie avec δ comme une courbe de dispersion dont le maximum est pour $\delta \approx \omega_1$ (si $\omega_1 \gg \Gamma$)
- Donc $(F_2)_{opt} \approx \hbar \omega_1 \frac{|\vec{\nabla} I|}{I} \approx \hbar \omega_1 \frac{1}{L}$
- Dans une onde stationnaire, la longueur caractéristique de variation de I est λ Donc $1/L = 1/\lambda \approx k$
- $(F_2)_{opt} \approx \hbar k \omega_1 \gg (F_1)_{sat} = \hbar k \Gamma$ si $\omega_1 \gg \Gamma$ F_2 ne sature pas
- Profondeur du puits U
- Pour $\delta \approx \omega_1$, $U \approx \hbar \delta$
- Pour $\delta \approx 10 \text{ GHz}$ (laser continu)
- $U \approx 3 \cdot 10^{-6} \text{ eV} \approx 36 \text{ mK}$
- Nécessite d'un refroidissement préalable si l'on veut piéger des atomes neutres

Variation de vitesse Δv acquise pendant la durée de vie τ (27)

$\Delta v = \gamma \tau = \frac{F}{M} \tau \approx \frac{\hbar k \omega_1}{M} \tau$
 ($\hbar k \omega_1$: valeur maximale de F)
 Si l'on veut pouvoir négliger cette variation de vitesse (condition ① du § D), il faut que l'effet Doppler associé à Δv , $k \Delta v$, soit petit devant la largeur de la résonance
 $\Delta v = [2\omega_1^2 + \Gamma^2]^{1/2} \approx \omega_1$ si $\omega_1 \gg \Gamma$
 $k \Delta v \approx \hbar k^2 \omega_1 \tau \ll \omega_1$
 $\hookrightarrow \frac{\hbar}{\tau} \gg \frac{\hbar^2 k^2}{M}$ $\hbar \Gamma \gg E_{recoil}$
 On retrouve la même condition de validité que pour la condition ①
 Si $\hbar \Gamma \gg E_{recoil}$, les variables internes peuvent évoluer et atteindre un régime stationnaire avant que l'état externe n'ait pu changer de manière appréciable

Récapitulation (28)

	F_1	F_2
Gradient qui intervient	Phase	Amplitude
Composante du dipôle	En quadrature avec le champ	En phase avec le champ
Variation avec $\omega - \omega_0$	Courbe d'absorption	Courbe de dispersion
Dérive d'un potentiel	non	oui
Limite $\Gamma \rightarrow 0$	$\vec{F}_1 = \vec{0}$	$\vec{F}_2 \neq \vec{0}$
Processus physiques	Absorption + Em. Spontanée Diffusion	Absorption + Em. induite Redistribution cohérente
Dénomination	Pression de radiation résonnante	Forces dipolaires

G - Dépendance en vitesse des forces radiatives

- 1 - Introduction (T.1 → 4)
- 2 - Atome en mouvement dans une onde plane
Calcul de la force - Effet Doppler (T.5 → 7)
- 3 - Atome en mouvement dans une onde stationnaire
 - a) Notations - Analogies avec un problème de résonance magnétique (T.8 → 10)
 - b) Discussion qualitative basée sur cette analogie
 - Vitesse faible - Approximation adiabatique (T.11)
 - Vitesse élevée - Résonances à 1 ou plusieurs photons (T.12 → 16)
 - c) Traitement quantitatif
 - Développement en série de Fourier du vecteur de Bloch et de la force - Relations de récurrence (T.17 → 19)
 - Résolution perturbative des relations de récurrence (T.20 → 22)
 - Méthode des fractions continues (T.23 → 26)
 - d) Résultats du calcul et discussion (Page V-8)

Buts du § G

(1)

- Etudier la dépendance en vitesse des forces radiatives dans 2 cas importants
 - Onde plane
 - Onde stationnaire
- Interpréter les résultats en termes d'effet Doppler
 - Suivant sa vitesse, l'atome est plus ou moins en résonance avec l'onde, et la force est plus ou moins grande.
- Processus multiphotoniques résonnants quand plusieurs modes sont non vides et subissent des déplacements Doppler différents (Cas de l'onde stationnaire)
 - Forces "mixtes" d'un type nouveau

Vitesse initiale \vec{v}_0

(2)

- L'atome est supposé maintenant avoir une vitesse initiale $\vec{v}_0 = \frac{\vec{p}_0}{m}$ non nulle
- On néglige la variation de vitesse Δv_0 due aux forces radiatives pendant la durée de vie τ de e . Ceci est possible si (voir IV-27)
 - $\hbar\Gamma \gg E_{exc}$
- Dans les équations de Bloch, la position \vec{R} de l'atome est donc considérée comme une fonction linéaire de t

$$\vec{R} = \vec{R}_0 + \vec{v}_0 t$$

Principe du calcul

(3)

- Résolution des équations de Bloch pour un temps t d'interaction tel que $\tau \ll t \ll T_{ext}$

$$\frac{1}{\Gamma} \ll t \ll \frac{\hbar}{E_{excit}}$$

↳ $u(\vec{R}, \vec{v}_0, t), v(\vec{R}, \vec{v}_0, t), w(\vec{R}, \vec{v}_0, t)$

- A partir de u, v et de $\vec{\nabla} E_0(\vec{R}), \vec{\nabla} \phi(\vec{R})$, calcul de la force $\vec{F}(\vec{R}, \vec{v}_0, t)$

dépendant à la fois de la position \vec{R} de l'atome à l'instant t et de sa vitesse $\vec{v}_0 = \dot{\vec{R}}$

- Evolution ultérieure de \vec{R}

Donnée par

$$M \ddot{\vec{R}} = \vec{F}(\vec{R}, \dot{\vec{R}}, t)$$

Onde monochromatique (4)

$$E(\vec{r}, t) = E_0(\vec{r}) \cos[\omega t + \phi(\vec{r})]$$

L'amplitude E_0 et la phase ϕ ne dépendent pas de t

Dans les équations de Bloch les grandeurs relatives au champ sont évaluées en

$$\vec{r} = \vec{R} = \vec{R}_0 + \vec{v}_0 t$$

Par exemple

$$\omega_1(\vec{R}) = -d E_0(\vec{R}) / \hbar$$

Dépendance implicite de t via \vec{R}

$$\dot{\omega}_1(t) = -\frac{d}{\hbar} \vec{\nabla} E_0(\vec{R}) \cdot \dot{\vec{R}}$$

$$= \omega_1(t) \frac{\vec{\nabla} E_0(\vec{R})}{E_0(\vec{R})} \cdot \vec{v}_0$$

De même

$$\dot{\phi}(t) = \vec{\nabla} \phi(\vec{R}) \cdot \vec{v}_0$$

Onde plane $E_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})$ (5)

Cas le plus simple possible

$\omega_1 = -d E_0 / \hbar$ et $\vec{\nabla} \phi = -\vec{k}$ sont indépendants de \vec{r} et t

$$\dot{\phi} = (\vec{\nabla} \phi) \cdot \dot{\vec{R}} = -\vec{k} \cdot \vec{v}_0$$

On posera

$$\Delta = \vec{k} \cdot \vec{v}_0$$

Δ aussi ne dépend pas de \vec{r} et t

Equations de Bloch

$$\begin{cases} \dot{u} = (\delta - \Delta) v - \Gamma u / 2 \\ \dot{v} = -(\delta - \Delta) u - \omega_1 v - \Gamma v / 2 \\ \dot{w} = \omega_1 v - \Gamma (\frac{1}{2} + w) \end{cases}$$

Comme dans F, système différentiel linéaire à coefficients constants (et de plus indépendants de \vec{R})

Seule différence

$$\delta \rightarrow \delta - \Delta = \delta - \vec{k} \cdot \vec{v}_0$$

Force $\vec{F} = 2 \text{quadr. } E_0 \vec{\nabla} \phi$ (6)

$$\vec{F} = d v(t) E_0(-\vec{k}) = \hbar \vec{k} \omega_1 v(t)$$

Valeur stationnaire

Identique à celle donnée en IV-8 avec $\delta \rightarrow \delta - \Delta$

$$\vec{F} = \hbar \vec{k} \frac{\omega_1^2}{2} \frac{\frac{\Gamma}{2}}{(\omega - \omega_0 - \Delta)^2 + \frac{\Gamma^2}{4} + \frac{\omega_1^2}{2}}$$

Seul effet physique lié à la vitesse \vec{v}_0 : la fréquence ω de l'onde plane est remplacé par la fréquence apparente $\omega - \Delta = \omega - \vec{k} \cdot \vec{v}_0$

décalé par effet Doppler

La force \vec{F} , qui dépend de l'écart à résonance, dépend donc de \vec{v}_0 (mais non de \vec{R})

Onde stationnaire (8)

Superposition d'ondes planes (7)

Problème plus difficile car il est en général incorrect d'ajouter indépendamment les forces associées aux diverses ondes planes (et tenant compte des effets Doppler pour chaque onde)

Importance des relations de phase entre les diverses ondes
Redistribution cohérente

Les forces radiatives dépendent à la fois de \vec{V}_0 et de \vec{R}

Apparition de processus nouveaux faisant intervenir à la fois redistribution et diffusion

- 2 ondes planes de même fréquence ω , de même amplitude e_0 , se propageant en sens inverse le long de Oz \rightarrow Onde résultante

$$E(z, t) = E_0(z) \cos \omega t$$
$$E_0(z) = 2 e_0 \cos kz$$

- Fréquence de Rabi pour chacune des 2 ondes planes

$$\omega_1 = -d e_0 / \hbar$$

- Fréquence de Rabi (dépendant de z) pour l'onde stationnaire

$$\omega_1(z) = -d E_0(z) / \hbar = 2 \omega_1 \cos kz$$

- On a introduit ω_1 pour pouvoir comparer les effets de l'onde stationnaire à la somme des effets des 2 ondes planes

Atome en mouvement

$$z \rightarrow Z = z_0 + v_0 t$$

Z : coordonnée du centre du paquet d'ondes

Equations de Bloch

$$\begin{cases} \dot{u} = \delta v - \Gamma u / 2 \\ \dot{v} = -\delta u - 2 \omega_1 \cos kZ w - \Gamma v / 2 \\ \dot{w} = 2 \omega_1 \cos kZ v - \Gamma (\frac{1}{2} + w) \end{cases}$$

Comme $Z = z_0 + v_0 t$, système différentiel linéaire à coefficients périodiques en t, de période $\frac{2\pi}{\Delta}$

\hookrightarrow Il existe une solution périodique, en régime forcé (si $t \gg \Gamma^{-1}$), de période $2\pi / \Delta$

On ne s'intéresse pas au régime transitoire ($0 < t < \Gamma^{-1}$)

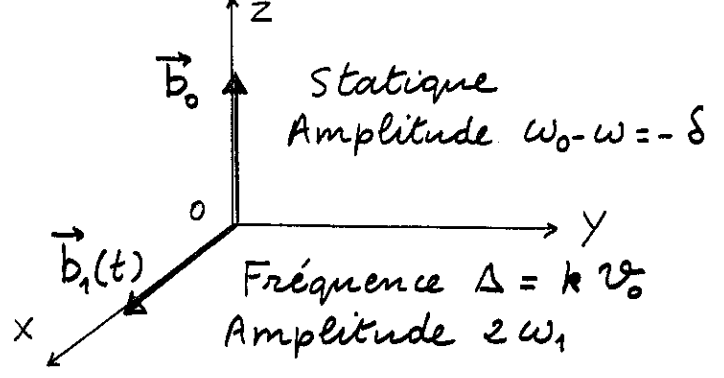
(9) Problème équivalent pour le spin fictif (10)

Dans le référentiel tournant OXYZ, le spin fictif est soumis

- à un champ $\vec{b}_0 \parallel \vec{a} \text{ Oz}$ d'amplitude $\omega_0 - \omega = -\delta$

- à un champ oscillant $\vec{b}_1(t) \parallel \vec{a} \text{ Ox}$, de fréquence Δ

$$b_1(t) = 2 \omega_1 \cos k(z_0 + v_0 t) = 2 \omega_1 \cos(kz_0 + \Delta t)$$



Analogie étroite avec un problème de résonance magnétique

Discussion qualitative (11)

V-4

Vitesse nulle $v_0 = 0 \rightarrow \Delta = 0$

Champ \vec{B}_1 statique

↳ Solution stationnaire des E.B.O.

↳ Force \vec{F} calculé au § F pour un atome immobile en \mathcal{L}_0

Vitesse faible $|\Delta| \ll \Gamma$

Champ $\vec{B}_1(t)$ variant très lentement (période $2\pi/\Delta$ longue devant le temps de relaxation Γ^{-1})

En 1^{ère} approximation, le spin suit adiabatement le mouvement de $\vec{B}_1(t) \rightarrow$ Force \vec{F} calculé comme si l'atome était "figé" en $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + v_0 t$ à chaque instant t

1^{ère} correction à l'approximation adiabatique : en $\frac{\Delta}{\Gamma} = \frac{k v_0}{\Gamma}$

↳ Forces linéaires en v_0 (voir § G.4)

Amortissement ou accélération ?

Vitesses élevées $|\Delta| \gg \Gamma$ (12)

Le champ $\vec{B}_1(t)$ varie trop vite pour que le spin puisse suivre adiabatement.

L'analogie avec un problème de résonance magnétique permet de prévoir que des effets résonnants se produiront si $\pm \Delta$ coïncide avec la fréquence de Larmor $\omega_0 - \omega$ dans b_0 .

$$\Delta = \omega - \omega_0 \rightarrow \omega_0 = \omega - k v_0$$

$$-\Delta = \omega - \omega_0 \rightarrow \omega_0 = \omega + k v_0$$

Interprétation : Résonance quand la vitesse de l'atome lui permet, par effet Doppler, d'entrer en résonance avec l'une ou l'autre des 2 ondes planes formant l'onde stationnaire

Résonances d'ordre supérieur (13)

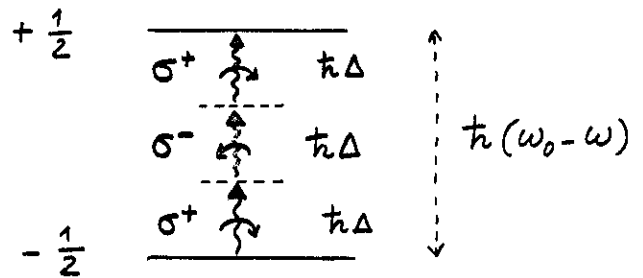
Bien connues en résonance magnétique (transitions à plusieurs quanta)

Le champ de radiofréquence polarisé linéairement le long de Ox est la superposition de 2 champs tournants droit et gauche, auxquels sont associés des photons de radiofréquence σ^+ et σ^- (de moment cinétique $J_z = +\hbar$ ou $-\hbar$)

Le spin peut passer de $-1/2$ à $+1/2$ en absorbant plusieurs photons de 2 types avec conservation simultanée de l'énergie et du moment cinétique

Remarque : ici pas d'approximation du champ tournant car ω_1 n'est pas négligeable devant $\omega_0 - \omega$

Résonance à 3 photons (14)



Si $\Delta = (\omega_0 - \omega)/3$, l'absorption de 2 photons σ^+ et d'1 photon σ^- , d'énergie $\hbar\Delta$, donne au spin l'énergie et le moment cinétique nécessaires pour passer de $-1/2$ à $+1/2$.

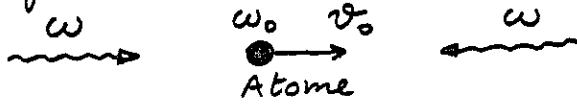
Plus généralement, résonance à un nombre impair de photons $n+1$ photons σ^+ , n photons σ^- quand $\Delta = (\omega_0 - \omega)/(2n+1)$

Quanta $\hbar\Delta$ appelés parfois "Dopplerons"

Ref : KYRÖLÄ, STENHOLM Opt. Comm. 22, 123 (1977)

Interprétation en termes de photons optiques (dans l'espace réel) (15)

Référentiel du labo



Référentiel au repos de l'atome



L'atome "voit" 2 ondes de fréquences différentes

Il peut passer de f à e en absorbant n+1 photons $\omega + \Delta$ et en émettant de manière stimulée n photons $\omega - \Delta$

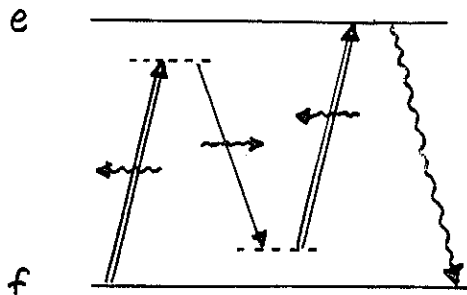
Résonance si

$$(n+1)(\omega + \Delta) - n(\omega - \Delta) = \omega_0$$

c-à-d si $\omega_0 - \omega = (2n+1)\Delta$

Impulsion acquise: $-(2n+1)\hbar \vec{k}$

Résonance à 3 photons optiques (16)



Flèches doubles : photons $\omega + \Delta$
 Flèches simples : " $\omega - \Delta$
 Flèches ondulées : photons spontanés

- Processus d'ordre supérieur faisant intervenir à la fois

- une redistribution entre les 2 ondes planes (un photon passe du mode \leftarrow au mode \rightarrow)
- une diffusion d'un photon \leftarrow vers un mode vide

↳ Force de type "mixte"

Traitement quantitatif (17)

- Retour aux équations de Bloch (V.9)

La solution en régime forcé, périodique en t, de période $2\pi/\Delta$, peut être aussi considérée comme périodique en z, de période $2\pi/k$ (car z est relié linéairement à t)

- Développement de u, v, w en série de Fourier de z

$$u = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_n e^{in k z}$$

+ Formules analogues pour v, w

Conditions de réalité

$$u_n = u_{-n}^*$$

- En régime forcé (une fois le régime transitoire amorti)

$$\dot{u} = \frac{du}{dz} \dot{z} = \frac{du}{dz} v_0 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} in \Delta u_n e^{in k z}$$

Relations de récurrence (18)

Les développements de Fourier insérés dans les E.B.O. donnent

$$\begin{cases} (in\Delta + \frac{\Gamma}{2}) u_n = \delta v_n \\ (in\Delta + \frac{\Gamma}{2}) v_n = -\delta u_n + \omega_1(w_{n-1} + w_{n+1}) \\ (in\Delta + \Gamma) w_n = \omega_1(v_{n-1} + v_{n+1}) - \frac{\Gamma}{2} \delta_{n0} \end{cases}$$

1^{ère} équation $\rightarrow u_n = \frac{\delta}{in\Delta + \frac{\Gamma}{2}} v_n$

Les 2 autres deviennent

$$\begin{cases} D(n) v_n = -\omega_1(w_{n-1} + w_{n+1}) \\ E(n) w_n = \omega_1(v_{n-1} + v_{n+1}) - \frac{\Gamma}{2} \delta_{n0} \end{cases}$$

avec $E(n) = in\Delta + \Gamma$

$$D(n) = \frac{(in\Delta + \frac{\Gamma}{2})^2 + \delta^2}{in\Delta + \frac{\Gamma}{2}}$$

Si $|\Delta| \gg \Gamma$

$$D(n) \approx \frac{(\delta - n\Delta + i\frac{\Gamma}{2})(\delta + n\Delta - i\frac{\Gamma}{2})}{in\Delta}$$

Passé par un minimum pour $\delta = \pm n\Delta$

Développement de Fourier de \mathcal{F} (19)

$$\mathcal{F} = \underbrace{D_{\text{phase}}}_{d u(z)} \underbrace{\frac{d}{dz} E_0(z)}_{-2e_0 k \sin kz}$$

$$\mathcal{F}(z) = 2\hbar k \omega_1 u(z) \sin kz$$

$$u(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_n e^{in kz}$$

$$\mathcal{F}(z) = \mathcal{F}_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \{ \mathcal{F}_n^c \cos nkz + \mathcal{F}_n^s \sin nkz \}$$

$$\mathcal{F}_0 = 2\hbar k \omega_1 \text{Im}(u_{-1} - u_1)$$

\mathcal{F}_0 est la moyenne spatiale de $\mathcal{F}(z)$

$$\mathcal{F}_n^c = 2\hbar k \omega_1 \text{Im}(u_{n-1} - u_{n+1})$$

$$\mathcal{F}_n^s = 2\hbar k \omega_1 \text{Re}(u_{n-1} - u_{n+1})$$

$\mathcal{F}_2^s \sin 2kz$ a la même dépendance en z que le gradient d'intensité, c-à-d que la force dipolaire pour un atome de vitesse nulle

Seule \mathcal{F}_2^s a une limite non nulle quand $v_0 \rightarrow 0$

Résolution perturbative (20)

Développement en puissances de ω_1

$$v_n = \sum_{p=0}^{\infty} v_n^{(p)} \omega_1^p \quad w_n = \sum_{p=0}^{\infty} w_n^{(p)} \omega_1^p$$

Les relations de récurrence deviennent

$$\begin{cases} D(n) v_n^{(p)} = - [w_{n-1}^{(p-1)} + w_{n+1}^{(p-1)}] \\ E(n) w_n^{(p)} = [v_{n-1}^{(p-1)} + v_{n+1}^{(p-1)}] - \frac{\Gamma}{2} \delta_{n0} \delta_{p0} \end{cases}$$

- A l'ordre $p=0$ en ω_1 seul est $\neq 0$
 $w_0^{(0)} = -\Gamma/2$

- A l'ordre $p=1$ en ω_1 seuls sont $\neq 0$
 $v_{\pm 1}^{(1)}$ (et par suite $u_{\pm 1}^{(1)}$)

$D(1)$ et $D(-1)$ au dénominateur
 \hookrightarrow résonances en $\delta = \omega - \omega_0 = \pm \Delta$

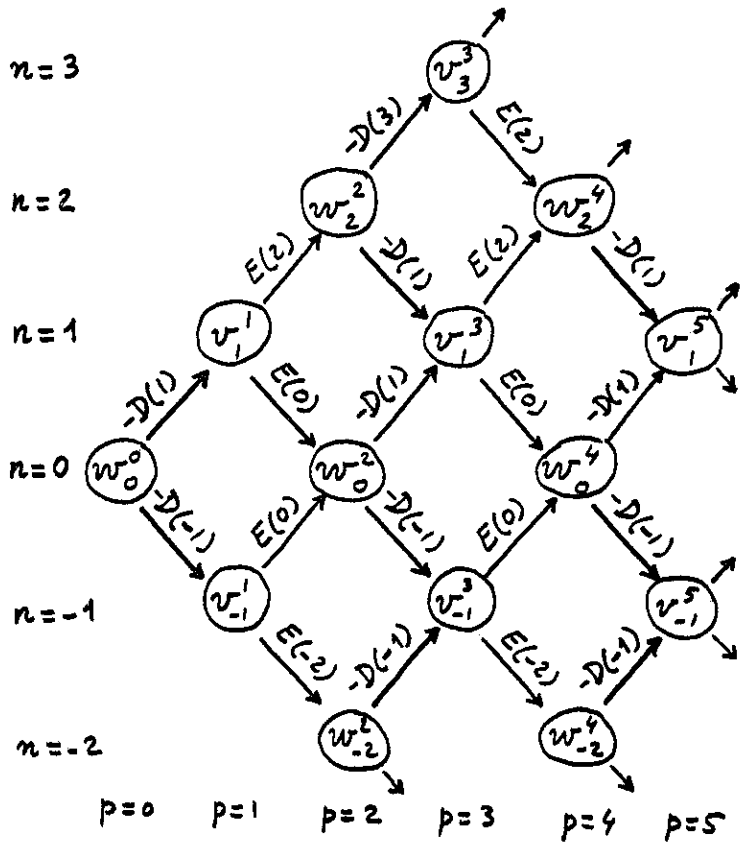
- A l'ordre $p=2$: $w_0^{(2)}$ et $w_{\pm 2}^{(2)}$

- A l'ordre $p=3$: $v_{\pm 1}^{(3)}$ et $v_{\pm 3}^{(3)}$

$D(3)$ et $D(-3)$ apparaissent pour $v_{\pm 3}^{(3)}$

\hookrightarrow Résonances en $\delta = \omega - \omega_0 = \pm 3\Delta$

Structure de la solution (21)



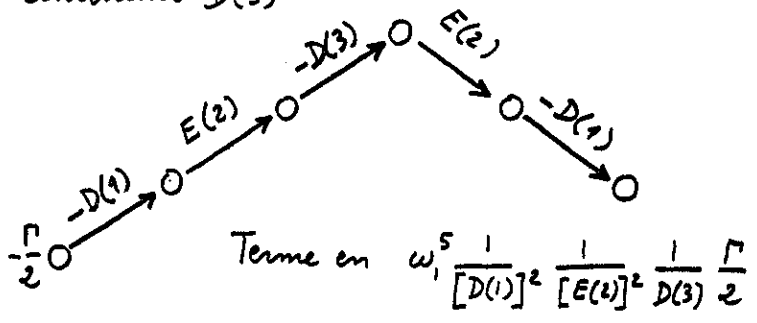
Pour w : n est pair
 Pour v (et u) : n est impair
 Dans \mathcal{F} : seulement harmoniques pairs

Exemple de calcul (22)

$\mathcal{F}_0 = 2\hbar k \omega_1 \text{Im}(u_{-1} - u_1)$
 dépend de $u_{\pm 1}$, donc de $v_{\pm 1}$

A quel ordre p en ω_1 voit on apparaître $D(3)$ pour la 1^{ère} fois dans v_1 , et donc la résonance à 3 photons $\omega - \omega_0 = \pm 3\Delta$ dans \mathcal{F}_0 ?

D'après la figure de (V-21), à l'ordre 5 en ω_1 . Un seul "chemin" conduit alors de $w_0^{(0)} = -\Gamma/2$ à $v_1^{(5)}$ en contenant $D(3)$



Terme en $\omega_1^5 \frac{1}{[D(1)]^2} \frac{1}{[E(2)]^2} \frac{1}{D(3)} \frac{\Gamma}{2}$

La force contient $\hbar k \omega_1$ en plus
 \hookrightarrow Varie en $\omega_1^6 \sim (\text{Intensité})^3$

Méthode des fractions continues (23)

Posons $f_n = \begin{cases} w_n & \text{si } n \text{ est pair} \\ v_n & \text{impair} \end{cases}$

$C(n) = \begin{cases} 1/E(n) & \text{si } n \text{ est pair} \\ -1/D(n) & \text{impair} \end{cases}$

Les relations de récurrence (V-18) peuvent être condensées en

$$f_n / C(n) = \omega_1 (f_{n-1} + f_{n+1}) - (\Gamma/2) \delta_{n0}$$

Pour $n \neq 0$, équation "homogène"

$$\frac{1}{\omega_1 C(n)} = \frac{f_{n-1}}{f_n} + \frac{f_{n+1}}{f_n}$$

Supposons $n \geq 1$ et posons $g_n = \frac{f_{n+1}}{f_n}$

$$\frac{1}{\omega_1 C(n)} = \frac{1}{g_{n-1}} + g_n$$

$$\frac{1}{g_{n-1}} = \frac{1 - \omega_1 C(n) g_n}{\omega_1 C(n)}$$

$$\rightarrow \boxed{g_{n-1} = \frac{\omega_1 C(n)}{1 - \omega_1 C(n) g_n}}$$

Expression de f_0 Comme $C(0) = \frac{1}{\Gamma}$ (25)

$$f_0 = -\frac{1}{2} \frac{1}{1 - \omega_1 C(0) 2 \operatorname{Re} g_0} = -\frac{1}{2} \frac{1}{1 - \Sigma}$$

$$\Sigma = 2 \operatorname{Re} \frac{\omega_1^2 C(0) C(1)}{1 - \frac{\omega_1^2 C(1) C(2)}{1 - \frac{\omega_1^2 C(2) C(3)}{1 - \dots}}}$$

Calcul de n'importe quel f_n

Par exemple f_2

$$f_2 = \frac{f_2}{f_1} \frac{f_1}{f_0} f_0 = g_1 g_0 f_0$$

$$\begin{array}{ccc} \swarrow & & \searrow \\ \frac{\omega_1 C(2)}{1 - \frac{\omega_1^2 C(2) C(3)}{1 - \frac{\omega_1^2 C(3) C(4)}{1 - \dots}}} & & \frac{\omega_1 C(1)}{1 - \frac{\omega_1^2 C(1) C(2)}{1 - \frac{\omega_1^2 C(2) C(3)}{1 - \dots}}} \end{array} f_0$$

Pour $n < 0$ $f_{-n} = f_n^*$

On peut ainsi calculer tous les f_n , donc tous les w_{2n} v_{2n+1} u_{2n+1} et donc tous les coefficients de Fourier de \mathcal{F}

Calcul de $g_0 = \frac{f_1}{f_0} = \frac{v_1}{w_0}$ (24)

$$g_0 = \frac{\omega_1 C(1)}{1 - \omega_1 C(1) g_1} = \frac{\omega_1 C(1)}{1 - \frac{\omega_1^2 C(1) C(2)}{1 - \omega_1 C(2) g_2}}$$

$$= \frac{\omega_1 C(1)}{1 - \frac{\omega_1^2 C(1) C(2)}{1 - \frac{\omega_1^2 C(2) C(3)}{1 - \frac{\omega_1^2 C(3) C(4)}{1 - \dots}}}}$$

"Fraction continue" donnant $\frac{f_1}{f_0}$

Conditions de réalité

$$f_1 = f_{-1}^* \quad f_0 = f_0^*$$

Pour $n=0$, équation "inhomogène"

$$f_0 / C(0) = \omega_1 (f_{-1} + f_1) - \Gamma/2$$

$$f_1 + f_{-1} = 2 \operatorname{Re} f_1 = 2 \operatorname{Re} f_0 g_0 = 2 f_0 \operatorname{Re} g_0$$

Comme on a calculé g_0 , l'équation inhomogène donne f_0

Avantages de la méthode des fractions continues (26)

- Très bien adapté au calcul sur ordinateur
- Si l'on arrête la fraction continue à un certain stade, on obtient un quotient de 2 polynômes beaucoup plus proche de la solution exacte qu'un développement perturbatif
- Méthode très générale, applicable en résonance magnétique, en théorie du laser ...

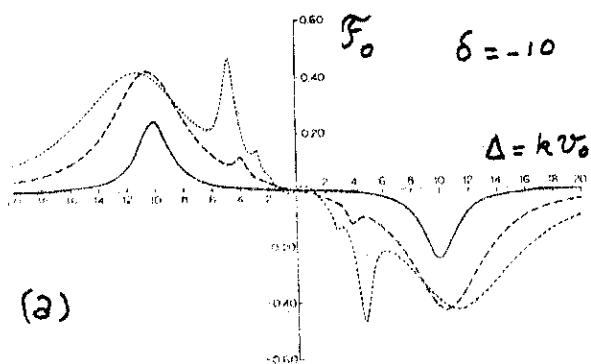
Référence pour le problème de ce §

MINOGIN, SERIMAA

Optics. Comm. 30, 373 (1979)

Résultats du calcul utilisant la méthode des fractions continues (référence MINOGIN, SERIMAA - les figures sont extraites de cette référence)

- En abscisses $\Delta = k\nu_0$ (l'unité est $\Gamma/2$)
- En ordonnées F_0 pour la figure a, F_2^C pour b, F_2^S pour c
- Toutes les courbes correspondent à $\delta = -10$ (toujours en unités $\Gamma/2$)
- L'intensité croît de la courbe en trait plein, à la courbe en tirets, puis en pointillés

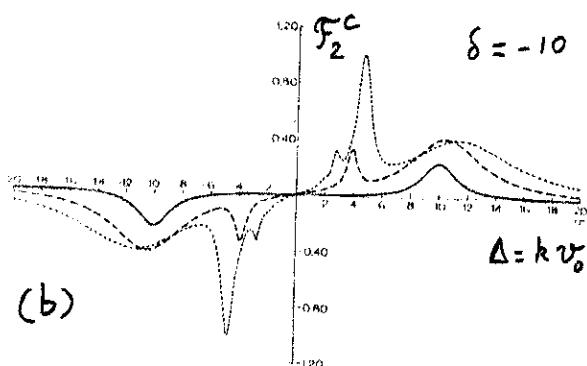


(a)

- A basse intensité, on voit bien une résonance pour $\Delta = \pm \delta = \pm 10$ sur F_0 .

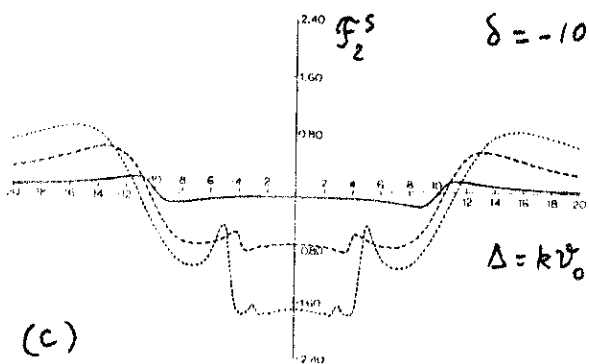
- Puis à plus forte intensité, on voit apparaître la résonance à 3 photons en $\Delta = \pm \delta/3 = \pm 3,3$ puis la résonance à 5 photons en $\Delta = \pm \delta/5 = \pm 2$

- Noter le changement de signe de la pente à l'origine à fortes intensités.



(b)

F_2^C a un comportement très analogue à F_0



(c)

F_2^S est la seule composante de Fourier à n'être pas nulle en $\nu_0 = 0$

les résonances à 1 ou plusieurs photons apparaissent avec une forme de dispersion

G. Dépendance en vitesse des forces radiatives (suite et fin)

4 - Limite des faibles vitesses.

- a) Introduction - Motivations (T.1 → 2)
- b) Cas d'une onde plane
Expression de la force de friction (T.3 → 6)
- c) Cas d'une onde stationnaire
Solution adiabatique (T.7 → 9)
Correction à l'approximation adiabatique (T.10 → 13)
Résultats du calcul et discussion (T.14 → 17)
- d) Une autre méthode pour éviter les ennuis
liés à l'onde stationnaire (T.18 → 21)
- e) Autre exemple d'approximation adiabatique
Atome soumis à une impulsion laser (T.22 → 25)

Limite des faibles vitesses (1)

Motivation : pièges radiatifs

Si le potentiel U dont dérive la force dipolaire \vec{F}_2 a un minimum (correspondant à un maximum de l'intensité lumineuse I si $\delta = \omega - \omega_0 < 0$) on peut envisager de piéger l'atome dans le "puits" correspondant.

L'atome oscillera autour de sa position d'équilibre, au fond du puits, avec une vitesse faible, et les forces dépendant de la vitesse v_0 seront linéaires en v_0 .

Cette force linéaire en v_0 amortit-elle le mouvement d'oscillation (force de friction) ?
Ou au contraire l'amplifie-t-elle ?

Phénomènes négligés ici (2)

Echauffement dû aux fluctuations de la force.

On s'intéresse ici uniquement à la force moyenne linéaire en v_0 et au signe du coefficient de proportionnalité. L'effet des fluctuations sera étudié plus tard.

Condition de faible vitesse

$$|\Delta| = k|v_0| \ll \Gamma = \frac{1}{\tau}$$

Effet Doppler pour $v_0 \ll$ Largeur naturelle

On peut encore écrire

$$|v_0| \tau \ll \lambda$$

Pendant la durée de vie τ , l'atome parcourt une distance petite devant la longueur d'onde de la lumière

Cas d'une onde plane

Expression de \vec{F} (voir V-6)

$$\vec{F} = \hbar \vec{k} \frac{\omega_1^2}{2} \frac{\frac{\Gamma}{2}}{(\omega - \omega_0 - \Delta)^2 + \frac{\Gamma^2}{4} + \frac{\omega_1^2}{2}}$$

On peut encore écrire

$$\vec{F} = \hbar \vec{k} \frac{\Gamma}{2} \frac{s}{1+s}$$

$$s = \frac{\omega_1^2/2}{(\delta - \Delta)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} \quad \text{Parametre de saturation dependant de } \vec{v}_0$$

Développement de s en puissances de $\Delta = k v_0$

Pour $\Delta = 0$ $s = s_0 = \frac{\omega_1^2/2}{\delta^2 + \frac{\Gamma^2}{4}}$

Au premier ordre en Δ

$$s = \frac{\omega_1^2/2}{\delta^2 + \frac{\Gamma^2}{4} - 2\delta\Delta} \approx s_0 \left(1 + \frac{2\delta\Delta}{\delta^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} \right)$$

Valeur optimale de la force de friction dans une onde plane

$\frac{s_0}{(1+s_0)^2}$ Maximal pour $s_0 = 1$

$\frac{2|\delta|}{\delta^2 + \frac{\Gamma^2}{4}}$ Maximal pour $|\delta| = \frac{\Gamma}{2}$

Or, pour $|\delta| = \frac{\Gamma}{2}$, $s_0 = \frac{\omega_1^2/2}{\delta^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} = \frac{\omega_1^2}{\Gamma^2}$

Donc $s_0 = 1 \rightsquigarrow \omega_1^2 = \Gamma^2$

Conditions optimales

$\omega_1 = \Gamma$ $\delta = -\Gamma/2$

Le coefficient du terme linéaire en v_0 est alors maximal et l'on a

$$\vec{F}(\vec{v}_0) = \hbar \vec{k} \frac{\Gamma}{4} - \hbar \vec{k} \frac{\vec{k} \cdot \vec{v}_0}{4} + \dots$$

Problème : Peut-on éliminer le terme indépendant de v_0 pour avoir une force de friction pure ?

(3) Expression de \vec{F} aux faibles vitesses (4)

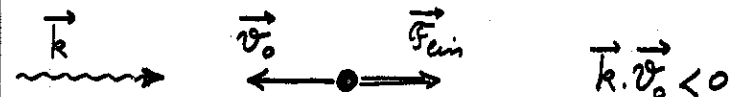
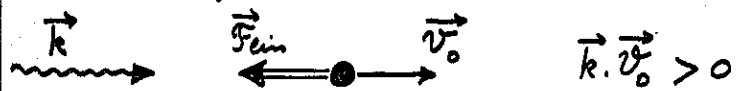
Développement de s dans \vec{F}

$$\vec{F} = \hbar \vec{k} \frac{\Gamma}{2} \frac{s_0}{1+s_0} + \hbar \vec{k} (\vec{k} \cdot \vec{v}_0) \frac{\Gamma}{2} \frac{s_0}{(1+s_0)^2} \frac{2\delta}{\delta^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} + \dots$$

1^{ère} ligne : Force pour $v_0 = 0$

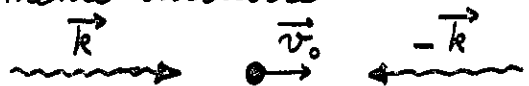
2^{ème} ligne : Force linéaire en v_0 : \vec{F}_{lin}

Si $\delta < 0$, c-à-d si $\omega < \omega_0$, \vec{F}_{lin} représente une force de friction pour la composante de \vec{v}_0 sur \vec{k} . Toujours opposé à \vec{v}_0 , quel que soit le signe de $\vec{k} \cdot \vec{v}_0$.



(5) Idee la plus simple possible (6)

Prendre 2 ondes planes \vec{k} et $-\vec{k}$ de même intensité



A très faible intensité, il semble possible d'ajouter indépendamment les effets des 2 ondes (l'atome n'interagit qu'avec une seule onde à la fois). Les termes indépendants de v_0 de (VI-4) s'éliminent, les termes linéaires en v_0 se doublent. Donc

si $s_0 \ll 1$, $\vec{F} = \hbar \vec{k} (\vec{k} \cdot \vec{v}_0) s_0 \Gamma \frac{2\delta}{\delta^2 + \frac{\Gamma^2}{4}}$

A plus forte intensité, apparition d'effets d'interférence entre les 2 ondes. Il faut étudier ce qui se passe pour une onde stationnaire

Onde stationnaire. Forces à la limite des faibles vitesses (7)

Méthode des fractions continues

A forte puissance, les résonances à plusieurs photons

$$\Delta = k v_0 = \pm \frac{\omega_0 - \omega}{2n+1}$$

s'accumulent au voisinage de $v_0 = 0$ ($\Delta \rightarrow 0$ si $n \rightarrow \infty$)

On voit que la pente à l'origine change de signe

Intérêt d'une autre méthode

mieux adaptée à la condition $|\Delta| \ll \Gamma$ et donnant un résultat analytique pouvant être discuté.

Approximation adiabatique et premières corrections à cette approximation.

Expression de $\{u_a(\vec{R}), v_a(\vec{R}), w_a(\vec{R})\}$

D'après (IV-6), on a

$$\begin{cases} u_a(\vec{R}) = \frac{\delta}{\omega_1(\vec{R})} \frac{s(\vec{R})}{1+s(\vec{R})} \\ v_a(\vec{R}) = \frac{\Gamma}{2\omega_1(\vec{R})} \frac{s(\vec{R})}{1+s(\vec{R})} \\ w_a(\vec{R}) = -\frac{1}{2} \frac{1}{1+s(\vec{R})} \end{cases}$$

$$\text{avec } s(\vec{R}) = \frac{[\omega_1(\vec{R})]^2/2}{(\omega - \omega_0)^2 + (\Gamma^2/4)}$$

Dans les expressions précédentes, $\vec{R} = \vec{R}_0 + \vec{v}_0 t$. Donc $u_a(\vec{R}), v_a(\vec{R}), w_a(\vec{R})$ sont des fonctions implicites de t via \vec{R} et l'on a

$$\dot{u}_a(\vec{R}) = \vec{\nabla} u_a(\vec{R}) \cdot \dot{\vec{R}} = \vec{v}_0 \cdot \vec{\nabla} u_a(\vec{R})$$

$\dot{u}_a(\vec{R})$ est donc différent de 0, bien que tendant vers 0 si $v_0 \rightarrow 0$. Il en est de même pour \dot{v}_a et \dot{w}_a .

Solution adiabatique des équations de Bloch : $\{u_a, v_a, w_a\}$ (8)

A chaque instant t , c'est la solution stationnaire des E.B.O. pour un atome qui serait "figé" au point $\vec{R} = \vec{R}_0 + \vec{v}_0 t$ où se trouve le vrai atome :

$$\begin{cases} 0 = \delta v_a(\vec{R}) - \Gamma u_a(\vec{R})/2 \\ 0 = -\delta u_a(\vec{R}) - \omega_1(\vec{R}) w_a(\vec{R}) - \Gamma v_a(\vec{R})/2 \\ 0 = \omega_1(\vec{R}) v_a(\vec{R}) - \Gamma [\frac{1}{2} + w_a(\vec{R})] \end{cases}$$

En (V-8) on avait pris

$$\omega_1(\vec{R}) = \omega_1(z) = 2\omega_1 \cos kz$$

mais le calcul qui suit est plus général et valable pour une onde stationnaire quelconque décrite par $\omega_1(\vec{R})$.

Corrections à l'approximation adiabatique (10)

- Comme $\dot{u}_a, \dot{v}_a, \dot{w}_a$ sont non nuls, $\{u_a, v_a, w_a\}$ n'est pas une solution des E.B.O. pour le vrai atome. Au 1^{er} membre des équations on n'a pas 0 comme dans (VI-8) mais $\{\dot{u}_a, \dot{v}_a, \dot{w}_a\}$.

- $\{u_a, v_a, w_a\}$ n'est donc qu'une solution approchée (approximation adiabatique), d'autant meilleure que v_0 est plus petit.

- La vraie solution peut s'écrire $\{u = u_a + u_{na}, v = v_a + v_{na}, w = w_a + w_{na}\}$ où u_{na}, v_{na}, w_{na} sont des corrections non adiabatiques, s'annulant si $v_0 \rightarrow 0$.

Calcul de $\{u_{na}, v_{na}, w_{na}\}$ à l'ordre 1 en \mathcal{V}_0 (11)

- Reportons $u = u_a + u_{na}$, $v = \dots$ dans les E.B.O.

u_a, v_a, w_a sont d'ordre 0 en \mathcal{V}_0

$\dot{u}_a, \dot{v}_a, \dot{w}_a$ sont d'ordre 1 en \mathcal{V}_0

ainsi que u_{na}, v_{na}, w_{na} à l'ordre le plus bas.

- A l'ordre 0 en \mathcal{V}_0 , les E.B.O. donnent les équations de VI-8 permettant de calculer $\{u_a, v_a, w_a\}$

- A l'ordre 1 en \mathcal{V}_0 , on obtient

$$\begin{cases} \dot{u}_a(\vec{R}) = \delta v_{na}(\vec{R}) - \Gamma u_{na}(\vec{R})/2 \\ \dot{v}_a(\vec{R}) = -\delta u_{na}(\vec{R}) - \omega_1(\vec{R}) w_{na}(\vec{R}) - \Gamma v_{na}(\vec{R})/2 \\ \dot{w}_a(\vec{R}) = \omega_1(\vec{R}) v_{na}(\vec{R}) - \Gamma w_{na}(\vec{R}) \end{cases}$$

Noter que le terme inhomogène de la 3^{ème} équation de Bloch, $-\frac{\Gamma}{2}$, a disparu car il est d'ordre 0 en \mathcal{V}_0

Récapitulation des calculs à faire (12)

1) u_a, v_a, w_a donnés en VI-9

2) Calcul de $\dot{u}_a = \vec{\mathcal{V}}_0 \cdot \vec{\nabla} u_a$, $\dot{v}_a = \dots$

A partir de l'expression $u_a = \frac{\delta}{\omega_1} \frac{s}{1+s}$

$$\hookrightarrow \frac{\dot{u}_a}{u_a} = -\frac{\dot{\omega}_1}{\omega_1} + \frac{\dot{s}}{s} - \frac{\dot{s}}{1+s}$$

A partir de l'expression de $s \rightarrow \frac{\dot{s}}{s} = \frac{2\dot{\omega}_1}{\omega_1}$
 Tout se ramène à $\frac{\dot{\omega}_1}{\omega_1} = \vec{\mathcal{V}}_0 \cdot \vec{\nabla} \log |\omega_1| = \vec{\mathcal{V}}_0 \cdot \vec{\alpha}$

3) Connaissant $\{\dot{u}_a, \dot{v}_a, \dot{w}_a\}$, le système linéaire de (VI-11) donne $\{u_{na}, v_{na}, w_{na}\}$ qui sont linéaires en \mathcal{V}_0

4) On reporte $u = u_a + u_{na}$ dans

$$\vec{\mathcal{F}} = -\hbar u(\vec{R}) \vec{\nabla} \omega_1(\vec{R})$$

$u_a(\vec{R}) \rightarrow$ Force dipolaire pour un atome immobile en \vec{R}

$u_{na}(\vec{R}) \rightarrow \vec{\mathcal{F}}_{na}(\vec{R}) = -\hbar u_{na}(\vec{R}) \vec{\nabla} \omega_1(\vec{R})$

Force non-adiabatique linéaire en \mathcal{V}_0 .

Autre formulation équivalente (13)

Forme matricielle des E.B.O

$$\frac{d}{dt} \vec{\mathcal{P}} = (\vec{\mathcal{V}}_0 \cdot \vec{\nabla}) \vec{\mathcal{P}} = (A) \vec{\mathcal{P}} - \vec{\mathcal{P}}_0$$

$\vec{\mathcal{P}}$: vecteur de Bloch $\{u, v, w\}$

$$(A) = \begin{pmatrix} -\frac{\Gamma}{2} & \delta & 0 \\ -\delta & -\frac{\Gamma}{2} & -\omega_1(\vec{R}) \\ 0 & \omega_1(\vec{R}) & -\Gamma \end{pmatrix} \quad \vec{\mathcal{P}}_0 : \{0, 0, \frac{\Gamma}{2}\}$$

Résolution itérative des E.B.O.

$$(A) \vec{\mathcal{P}} = \vec{\mathcal{P}}_0 + \frac{d}{dt} \vec{\mathcal{P}} \quad \frac{d}{dt} = \vec{\mathcal{V}}_0 \cdot \vec{\nabla}$$

$$\hookrightarrow \vec{\mathcal{P}} = (A)^{-1} \vec{\mathcal{P}}_0 + (A)^{-1} (\vec{\mathcal{V}}_0 \cdot \vec{\nabla}) \vec{\mathcal{P}}$$

Itération

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{P}} &= (A)^{-1} \vec{\mathcal{P}}_0 \\ &+ (A)^{-1} (\vec{\mathcal{V}}_0 \cdot \vec{\nabla}) (A)^{-1} \vec{\mathcal{P}}_0 \\ &+ (A)^{-1} (\vec{\mathcal{V}}_0 \cdot \vec{\nabla}) (A)^{-1} (\vec{\mathcal{V}}_0 \cdot \vec{\nabla}) (A)^{-1} \vec{\mathcal{P}}_0 + \dots \end{aligned}$$

1^{ère} ligne : approximation adiabatique

2^{ème} ligne : 1^{ère} correction, linéaire en \mathcal{V}_0

3^{ème} ligne : 2^{ème} correction, en \mathcal{V}_0^2

Résultats du calcul (14)

Force adiabatique $\vec{\mathcal{F}}_a$

$$\vec{\mathcal{F}}_a(\vec{R}) = -\hbar \delta \frac{s(\vec{R})}{1+s(\vec{R})} \vec{\alpha}(\vec{R})$$

avec $\vec{\alpha}(\vec{R}) = \vec{\nabla} \log |\omega_1(\vec{R})| = \frac{\vec{\nabla} \omega_1(\vec{R})}{\omega_1(\vec{R})}$

Force non adiabatique $\vec{\mathcal{F}}_{na}$

linéaire en \mathcal{V}_0

$$\vec{\mathcal{F}}_{na}(\vec{R}, \vec{\mathcal{V}}_0) = \hbar \delta \frac{s(\vec{R})}{[1+s(\vec{R})]^3} \vec{\alpha}(\vec{R}) \times$$

$$\frac{\Gamma^2 [1-s(\vec{R})] - [\omega_1(\vec{R})]^2 s(\vec{R})}{\Gamma \left(\frac{\Gamma^2}{4} + \delta^2 \right)} \vec{\alpha}(\vec{R}) \cdot \vec{\mathcal{V}}_0$$

$\vec{\mathcal{F}}_a$ et $\vec{\mathcal{F}}_{na}$ sont toutes deux

proportionnelles à $\vec{\alpha}(\vec{R})$, et sont donc dirigées suivant le gradient d'amplitude $\vec{\nabla} \omega_1(\vec{R})$

Valeur de \vec{F}_{na} au fond du puits (15)

- Pour piéger un atome neutre à un maximum d'intensité, il faut prendre $\delta < 0$. Par exemple, dans une onde stationnaire gaussienne, le piégeage longitudinal existe dans les ventres de l'onde, le piégeage transversal au foyer



Au fond du puits, $\vec{F}_a = \vec{0}$ (position d'équilibre). Donc $\vec{\alpha} = \vec{0}$

Mais, comme \vec{F}_{na} est aussi proportionnelle à $\vec{\alpha}$, la force linéaire en \mathcal{V}_0 s'annule elle aussi au fond du puits.

Circonstance défavorable : pas de force de friction au point d'équilibre

Expression de \vec{F}_{na} aux faibles intensités ($s \ll 1$) (17)

$$\vec{F}_{na}(\vec{R}, \vec{\mathcal{V}}_0) = \hbar \delta \frac{\Gamma}{\frac{\Gamma^2}{4} + \delta^2} s(\vec{R}) (\vec{\alpha}(\vec{R}) \cdot \vec{\mathcal{V}}_0)$$

Pour une onde plane stationnaire

$$\omega_1(\vec{R}) = 2\omega_1 \cos kZ$$

$$\alpha(Z) = -k \operatorname{tg} kZ$$

$$s(Z) = 4s_0 \cos^2 kZ \quad s_0 = \frac{\omega_1^2/2}{\frac{\Gamma^2}{4} + \delta^2}$$

$$\vec{F}_{na}(Z, \mathcal{V}_0) = \hbar \delta \frac{\Gamma}{\frac{\Gamma^2}{4} + \delta^2} 4s_0 \sin^2 kZ \vec{k} (\vec{k} \cdot \vec{\mathcal{V}}_0)$$

La moyenne spatiale de \vec{F}_{na} ($\overline{\sin^2 kZ} = \frac{1}{2}$) redonne alors la somme des forces linéaires en \mathcal{V}_0 des 2 ondes planes formant l'onde stationnaire (voir VI-6)

Signe de la force linéaire en \mathcal{V}_0 (16)

- Aux faibles intensités ($s \ll 1$)
 $\Gamma^2 [1 - s(\vec{R})] - [\omega_1(\vec{R})]^2 s(\vec{R}) > 0$
 Si $\delta < 0$ (cas d'un piège), \vec{F}_{na} est bien une force de friction toujours opposée à $\vec{\mathcal{V}}_0$, que $\vec{\mathcal{V}}_0$ soit parallèle ou antiparallèle à $\vec{\alpha}$
- Par contre, aux fortes intensités le coefficient $\Gamma^2(1-s) - \omega_1^2 s$ peut devenir négatif, et, dans un puits ($\delta < 0$), \vec{F}_{na} peut chauffer la particule quand elle s'écarte de sa position d'équilibre

Circonstance très défavorable pour un piège.

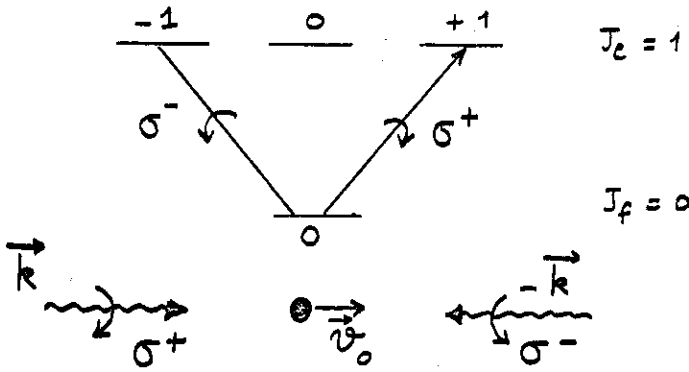
Une autre idée pour éviter les ennuis liés à l'onde stationnaire (18)

J. DALIBARD S. REYNAUD

- Utiliser des polarisations différentes pour les 2 ondes se propageant en sens inverse, de manière à ce qu'elles interagissent avec des composantes Zeeman différentes de la raie optique
- Le dipôle induit par une onde ne peut alors rayonner dans le mode associé à l'autre onde. On évite ainsi les effets d'interférence entre les 2 ondes, responsables du changement de signe de la force linéaire en \mathcal{V}_0 aux hautes intensités.

Exemple précis

Transition atomique $J_f = 0 \leftrightarrow J_e = 1$



Après avoir absorbé un photon σ^+ l'atome ne peut que réémettre un photon σ^+ (conservation du moment cinétique)

Impossibilité d'absorber un photon \vec{k} et de réémettre de manière stimulée un photon $-\vec{k}$
Pas de force de type mixte

(19)

Valeur optimale de la force de friction

Si les 2 ondes ont même intensité, le calcul donne une force de friction pure (nulle pour $v_0 = 0$), toujours de même signe, et de valeur optimale

$$\vec{F} = -0,31 \hbar \vec{k} (\vec{k} \cdot \vec{v}_0)$$

Mouvement le long de \vec{k}

$$M \frac{dv_0}{dt} = -0,31 \hbar k^2 v_0$$

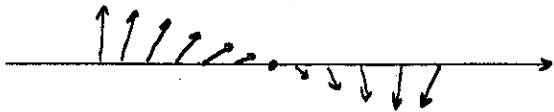
$$\hookrightarrow \frac{dv_0}{dt} = -\frac{1}{\tau_{\text{ext}}} v_0$$

τ_{ext} = Temps d'amortissement
= $\frac{1}{0,31} \frac{\hbar}{E_{\text{recul}}}$
On retrouve bien \hbar/E_{recul} comme temps d'évolution caractéristique des variables externes

Structure de l'onde résultante (21)

- Intensité uniforme

Par contre, l'onde résultante est polarisée linéairement, avec un vecteur polarisation qui tourne hélicoïdalement autour de \vec{k} .



Comme il n'y a pas de gradient d'intensité, il n'y a pas de "puits" de potentiel comme dans une onde stationnaire.

Il faut une autre onde pour piéger. Séparation des fonctions de piégeage et de refroidissement.

Autre exemple d'approximation adiabatique et de correction à cette approximation (22)

Atome à 2 niveaux, initialement immobile, soumis à une impulsion laser (paquet d'ondes à 1 dimension)



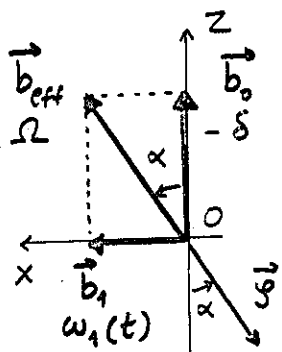
Durée T de l'impulsion supposée très courte devant τ (émission spontanée négligeable) mais suffisamment longue pour que

$$\frac{1}{T} \ll \Omega = \sqrt{\omega_1^2 + \delta^2}$$

et compris si $\omega_1 = 0$: $\frac{1}{T} \ll |\delta|$

La précession du spin fictif autour du champ effectif (voir IV-11) est très rapide devant la vitesse de rotation de ce champ

Dans le référentiel tournant (23)



En 1^{ère} approximation, le spin fictif \vec{S} (gardant un module constant $\frac{1}{2}$) reste aligné le long de \vec{b}_{eff} en partant à $t = -\infty$ de la position d'équilibre : $u = 0$,

$v = 0$, $w = -\frac{1}{2}$ et en y revenant à $t = +\infty$

Solution adiabatique

A tout instant t , \vec{S} aligné sur \vec{b}_{eff} supposé "figé" à cet instant

$$u_a = -\frac{1}{2} \sin \alpha = -\frac{\omega_1}{2\Omega} \quad \Omega = \sqrt{\omega_1^2 + \delta^2}$$

$$v_a = 0$$

$$w_a = -\frac{1}{2} \cos \alpha = \frac{\delta}{2\Omega}$$

Equations de Bloch (avec $\Gamma = 0$)

$$\begin{cases} \dot{u} = \delta v \\ \dot{v} = -\delta u - \omega_1 w \\ \dot{w} = \omega_1 v \end{cases}$$

Interprétation physique de \vec{F} (25)

- Comme $v_a = 0$, $\vec{F}_a = \vec{0}$

\vec{F}_a est nul car on a pris $\Gamma = 0$

- D'après l'équation $\dot{w}_a = \omega_1 v_{na}$

$$\vec{F}_{na} = \hbar \vec{k} \dot{w}_a$$

$$\text{Or } w_a = \frac{\delta}{2\Omega} \rightarrow \vec{F}_{na} = -\frac{\hbar \vec{k} \delta}{2} \frac{\dot{\Omega}}{\Omega^2}$$

Comme on néglige l'émission spontanée, l'atome ne peut qu'absorber un photon et monter dans e , en gagnant l'impulsion $\hbar \vec{k}$, puis retomber dans f par émission stimulée, en rependant $\hbar \vec{k}$. La force est donc, dans tous les cas

$$\vec{F} = \hbar \vec{k} \dot{\sigma}_{ee} = \hbar \vec{k} \dot{w}$$

Si l'on peut remplacer \dot{w} par \dot{w}_a (ordre 1 en $1/\Omega T$), σ_{ee} part de 0, croît lentement, puis redécroit à 0. L'atome est donc accéléré, puis ralenti et se retrouve avec une vitesse nulle à la fin de l'impulsion laser.

Corrections à l'approximation adiabatique (24)

u_a, v_a, w_a ne sont solutions des équations de Bloch (avec $\Gamma = 0$) que si ω_1 et Ω ne dépendent pas de t

En fait, ω_1 et Ω varient lentement au cours du temps et $\dot{u}_a, \dot{v}_a, \dot{w}_a$ sont non nuls

Si l'on pose $u = u_a + u_{na}$, $v = v_a + v_{na}$, $w = w_a + w_{na}$, on obtient, à l'ordre 1 en $1/T$

$$\begin{cases} \dot{u}_a = \delta v_{na} \\ \dot{v}_a = -\delta u_{na} - \omega_1 w_{na} \\ \dot{w}_a = \omega_1 v_{na} \end{cases}$$

Expression de la force

$$\begin{aligned} \vec{F} &= D_{quadr} \vec{E}_0 \vec{\nabla} \phi = \hbar \vec{k} \omega_1 v \\ &= \underbrace{\hbar \vec{k} \omega_1 v_a}_{\vec{F}_a} + \underbrace{\hbar \vec{k} \omega_1 v_{na}}_{\vec{F}_{na}} \end{aligned}$$

Référence pour le § 4 c

J.P. GORDON, A. ASHKIN

Phys. Rev. A21, 1606 (1980)

A - Introduction

- 1 - Buts de cette 2^{ème} partie (T1 à T3)
- 2 - Phénomènes que l'on continue à négliger (T-4)

B - Evolution du système atomique

- 1 - Hamiltonien (T-5)
- 2 - Fonction d'onde à plusieurs composantes (T6 à T7)
- 3 - Equation de Schrödinger pour la fonction d'onde atomique (T8 à T10)

C - Séparation en deux parties du paquet d'ondes atomiqueEffet Stern et Gerlach optique

- 1 - Conditions sur la fonction d'onde initiale (T-11)
- 2 - Cas d'une onde lumineuse stationnaire résonnante
 - a) Principe de l'expérience (T-12)
 - b) Etude du mouvement du paquet d'ondes - Ordres de grandeur (T13 à T17)
- 3 - Cas d'une onde lumineuse progressive résonnante
 - a) Effet Stern et Gerlach optique transversal (T18 à T19)
 - b) Double réfraction (T-20)
- 4 - Cas général
 - a) Etats propres et valeurs propres du potentiel (T-21)
 - b) Variation spatiale des valeurs propres du potentiel (T-22)
 - c) Entrée de l'atome dans le faisceau lumineux (T23 à T26)
 - limite adiabatique
 - limite non adiabatique - Dédoublement du paquet d'ondes

Buts de la 2^{ème} partie

Etudier l'évolution du paquet d'ondes tout entier, et non pas seulement celle de son centre

$$\vec{R}(t) = \langle \vec{R}(t) \rangle$$

Exemples d'effets physiques non contenus dans le mouvement de $\vec{R}(t)$

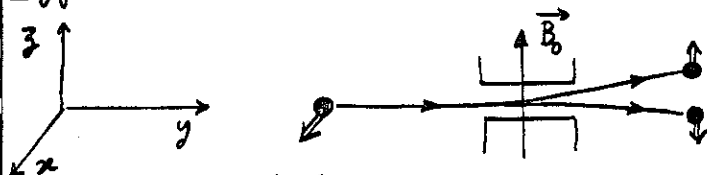
- ① Même si le paquet d'ondes initial est très petit, il peut se scinder en deux

↳ Effet Stern et Gerlach optique

- ② Dans certaines directions, la longueur d'onde de de Broglie atomique peut être très grande

↳ Phénomènes ondulatoires

Diffraction de Bragg de l'onde de de Broglie atomique

① Effet Stern et Gerlach habituel ②

- Etat initial

Paquet d'ondes très petit $\psi(\vec{r})$

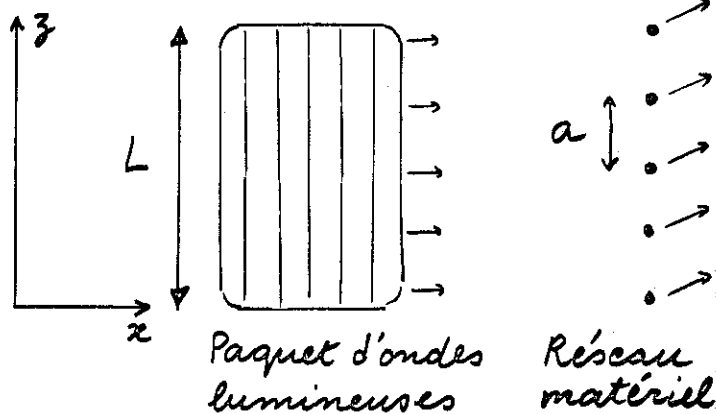
$$\text{Spin } \parallel \text{ à } Ox \quad |+\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}} [|+\rangle_z + |-\rangle_z]$$

Superposition de 2 paquets d'ondes $\psi_+(\vec{r})$ et $\psi_-(\vec{r})$ correspondant à $S_z = \pm \frac{\hbar}{2}$

- Les 2 paquets d'ondes $\psi_{\pm}(\vec{r})$ subissent des déviations opposées car S_z a des valeurs opposées dans chacun d'eux

Points importants

- Corrélations entre variables internes et externes
- Caractère quantique des variables internes

Diffraction par un réseau (3)

Si la dimension transversale (le long de Oz) du paquet d'ondes lumineuses, L , est grande devant le pas du réseau, a , diffraction constructive dans certaines directions

Point important

$$L \gg a$$

Phénomènes que l'on continue à négliger dans cette 2^{ème} partie (4)

Effets liés au caractère quantique du rayonnement

- Si le champ incident est dans un état cohérent, il est correct de le traiter classiquement

MOLLOW Phys. Rev. A 12, 1919 (1975)

- Par contre, le champ du vide est fondamentalement quantique Responsable (en partie) de l'émission spontanée et du caractère fluctuant des forces radiatives

Dans cette 2^{ème} partie, on négligera l'émission spontanée, en supposant le temps d'interaction T court devant la durée de vie radiative τ_R

$$T \ll \tau_R$$

Hamiltonian (cf III-4) (5)

$$H = \frac{\vec{P}^2}{2M} + h_A - D E(\vec{R}, t)$$

\vec{R}, \vec{P} : Opérateurs position et impulsion du centre de masse

h_A : Hamiltonien interne (2 niveaux e, f d'énergie $\pm \frac{\hbar\omega_0}{2}$)

D : Opérateur dipole

Onde monochromatique

$$E(\vec{R}, t) = E^+(\vec{R}) e^{-i\omega t} + E^-(\vec{R}) e^{i\omega t}$$

$$E^\pm(\vec{R}) = \frac{E_0(\vec{R})}{2} e^{\mp i\phi(\vec{R})}$$

Approximation du champ tournant

$$- D E(\vec{R}, t) \simeq$$

$$- D_+ E^+(\vec{R}) e^{-i\omega t} - D_- E^-(\vec{R}) e^{i\omega t}$$

$$D_+ = d |e\rangle\langle f| \quad D_- = d |f\rangle\langle e|$$

$$\omega_1(\vec{R}) = -d E_0(\vec{R})/\hbar$$

Possibilité de décrire l'état atomique par une fonction d'onde (6)

Dans l'hamiltonien H n'apparaissent que des opérateurs atomiques puisque

- le champ du vide est ignoré
- le champ incident est décrit par une onde classique [\vec{R} est cependant un opérateur dans $E(\vec{R}, t)$]

Il est donc possible d'utiliser un vecteur d'état atomique tel que

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = H(t) |\psi(t)\rangle$$

Si le champ de rayonnement était quantifié, il faudrait, pour décrire l'état atomique, prendre la trace par rapport au rayonnement

Une description par opérateur densité réduit serait alors nécessaire

Fonction d'onde atomique à plusieurs composantes (7)

- Base orthonormée atomique $|a, \vec{r}\rangle$ $a = e$ ou f
 $\vec{r} =$ valeur propre de \vec{R}
- Composantes du vecteur d'état $|\Psi(t)\rangle$ dans cette base
 $\langle a, \vec{r} | \Psi(t) \rangle = \Psi_a(\vec{r}, t)$
Amplitude de probabilité de trouver, à l'instant t , l'atome au point \vec{r} dans l'état interne a
- Fonction d'onde à 2 composantes $\begin{pmatrix} \Psi_e(\vec{r}, t) \\ \Psi_f(\vec{r}, t) \end{pmatrix}$
- Densité de probabilité de présence de l'atome au point \vec{r} ($\neq a$)
 $\rho(\vec{r}, t) = |\Psi_e(\vec{r}, t)|^2 + |\Psi_f(\vec{r}, t)|^2$

Equation de Schrödinger (8)

Au lieu d'étudier, comme dans la 1^{ère} partie, l'évolution de $\langle \Psi(t) | \vec{R} | \Psi(t) \rangle$ (Théorème d'Ehrenfest) on s'intéresse ici à l'évolution de $\Psi_e(\vec{r}, t)$ et $\Psi_f(\vec{r}, t)$

Posons
$$\begin{cases} \Psi_e(\vec{r}, t) = c_e(\vec{r}, t) e^{-i\omega t/2} \\ \Psi_f(\vec{r}, t) = c_f(\vec{r}, t) e^{i\omega t/2} \end{cases}$$

On a donc

$$|\Psi(t)\rangle = \int d^3r \left[c_e(\vec{r}, t) e^{-i\omega t/2} |e, \vec{r}\rangle + c_f(\vec{r}, t) e^{i\omega t/2} |f, \vec{r}\rangle \right]$$

Le développement de $|\Psi(t)\rangle$ est ensuite porté dans l'équation de Schrödinger $i\hbar \frac{d}{dt} |\Psi(t)\rangle = H(t) |\Psi(t)\rangle$ et les coefficients de $|e, \vec{r}\rangle$ et $|f, \vec{r}\rangle$ égalés dans les 2 membres

Evolution de $c_e(\vec{r}, t)$ et $c_f(\vec{r}, t)$ (9)

Equation matricielle

$$i\hbar \begin{pmatrix} \dot{c}_e(\vec{r}, t) \\ \dot{c}_f(\vec{r}, t) \end{pmatrix} = -\frac{\hbar^2}{2M} \Delta \begin{pmatrix} c_e(\vec{r}, t) \\ c_f(\vec{r}, t) \end{pmatrix} + [V(\vec{r})] \begin{pmatrix} c_e(\vec{r}, t) \\ c_f(\vec{r}, t) \end{pmatrix}$$

avec $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

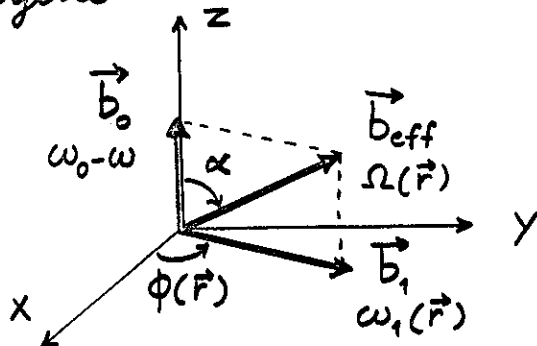
$[V(\vec{r})]$ matrice 2×2 égale à

$$\frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \omega_0 - \omega & \omega_1(\vec{r}) e^{-i\phi(\vec{r})} \\ \omega_1(\vec{r}) e^{i\phi(\vec{r})} & -(\omega_0 - \omega) \end{pmatrix}$$

Energie potentielle "effective" indépendante de t , dépendant de l'état interne et de \vec{r} , et représentant l'effet de l'irradiation lumineuse sur l'atome

Problème équivalent (10)

Equations d'évolution strictement identiques à celles d'une particule de masse M , de spin $\frac{1}{2}$, évoluant dans un champ magnétique inhomogène



L'amplitude $[\omega_1(\vec{r})]$, et la direction $[\phi(\vec{r})]$ de \vec{b}_1 varient avec \vec{r}

$$\Omega(\vec{r}) = \sqrt{[\omega_1(\vec{r})]^2 + (\omega_0 - \omega)^2}$$

Pulsation de Larmor autour du champ total $\vec{b}_{\text{eff}} = \vec{b}_0 + \vec{b}_1$

Effet Stern et Gerlach optique (11)

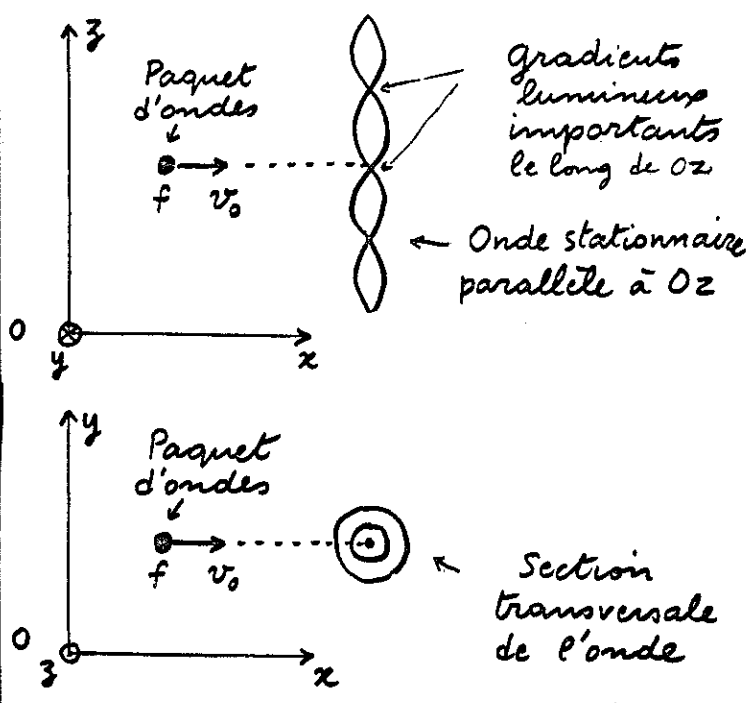
Conditions sur la fonction d'onde atomique

- Atome dans l'état f
- Paquet d'ondes très petit devant les longueurs caractérisant les variations spatiales de l'onde lumineuse (longueur d'onde $\lambda_R \approx 0,5 \mu$ - diamètre focal $w_0 \approx 10 \mu$)
- Ce paquet d'ondes traverse une onde lumineuse en un point de fort gradient lumineux

Ordres de grandeur

Pour un atome de numéro atomique $A=25$, d'énergie $\frac{3}{2}k\Theta$ avec $\Theta=300^\circ K$
 λ de Broglie $\approx 0,3 \text{ \AA} \ll \lambda_R, w_0$
 Il est donc possible d'avoir des paquets d'ondes très petits

Onde stationnaire résonnante (12)



Le paquet d'ondes, de vitesse $\vec{v}_0 \parallel$ à Ox , est dans un plan de symétrie axial de l'onde
 Pas de déviation en y
 Déviation par contre en z

Potentiel lumineux (13)

- Onde stationnaire $\rightarrow \phi(\vec{r}) = 0$
- Résonance $\rightarrow \omega_0 - \omega = 0$
- $\hookrightarrow [V(\vec{r})] = \frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} 0 & \omega_1(\vec{r}) \\ \omega_1(\vec{r}) & 0 \end{bmatrix}$
 avec $\omega_1(\vec{r}) = 2\omega_1 \cos kz$
- Les états propres de $[V(\vec{r})]$ sont indépendants de \vec{r} . Ce sont les combinaisons linéaires symétrique et antisymétrique de $|e, \vec{r}\rangle$ et $|f, \vec{r}\rangle$

Posons donc

$$c_{\pm}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{2}} [c_e(\vec{r}, t) \pm c_f(\vec{r}, t)]$$

On a bien sur

$$c_f(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{2}} [c_+(\vec{r}, t) - c_-(\vec{r}, t)]$$

$$c_e(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{2}} [c_+(\vec{r}, t) + c_-(\vec{r}, t)]$$

$$|c_e(\vec{r}, t)|^2 + |c_f(\vec{r}, t)|^2 = |c_+(\vec{r}, t)|^2 + |c_-(\vec{r}, t)|^2$$

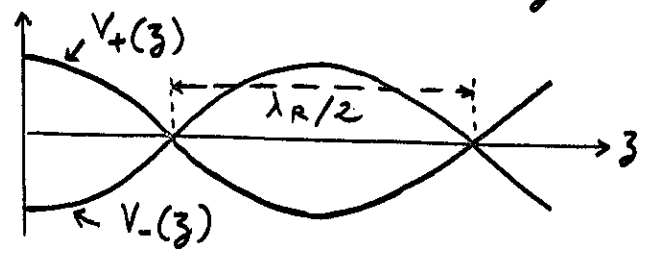
Evolution de $c_{\pm}(\vec{r}, t)$ (14)

Les 2 équations couplées pour c_e et c_f deviennent 2 équations découplées pour c_+ et c_-

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} c_{\pm}(\vec{r}, t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2M} \Delta \pm \frac{\hbar \omega_1(\vec{r})}{2} \right] c_{\pm}(\vec{r}, t)$$

Chaque équation décrit le mouvement d'une particule de masse M dans un potentiel

$$V_{\pm}(\vec{r}) = V_{\pm}(z) = \pm \hbar \omega_1 \cos kz$$

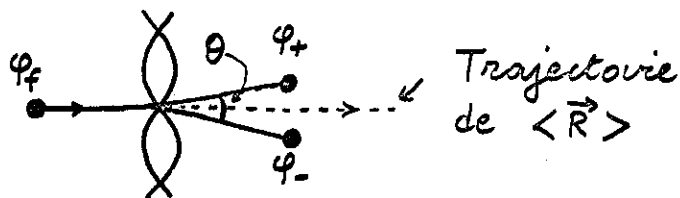


$$\left| \frac{d}{dz} V_{\pm}(z) \right| = \left| \mp \hbar k \omega_1 \sin kz \right|$$

Maximal quand $\sin kz = \pm 1$
 c-à-d quand $\cos kz = 0$

Mouvement du paquet d'ondes (15)

Le paquet d'ondes initial $\psi_f(\vec{r}, t)$ est une superposition linéaire de 2 paquets d'ondes $\psi_+(\vec{r}, t)$ et $\psi_-(\vec{r}, t)$ qui vont évoluer indépendamment l'un de l'autre, et subir des déviations opposées car $v_+ = -v_-$



Dédoublément du paquet d'ondes comme dans le vrai effet Stern et Gerlach

Le théorème d'Ehrenfest ne rend pas compte de ce phénomène : $\langle \vec{R} \rangle$ est au milieu des 2 paquets d'ondes, en un point où la densité de présence devient nulle, et la trajectoire de $\langle \vec{R} \rangle$ n'est pas déviée.

Calcul de la déviation (16)

Comme chaque paquet d'ondes ψ_+ ou ψ_- évolue en restant petit, on peut étudier son mouvement par le théorème d'Ehrenfest (alors que ce théorème, appliqué à l'ensemble des 2 ne donne rien)

Le centre de chaque paquet d'ondes évolue comme une particule de masse M soumise à une force $\mp \frac{dV(z)}{dz}$ pendant un temps T (temps de traversée de l'onde, court devant τ_R)

Impulsion (maximale) acquise suivant Oz

$$\Delta p_z = \mp \left| \frac{dV}{dz} \right|_{\max} T = \mp \hbar k \omega_1 T$$

Ecart angulaire θ à la sortie

$$\theta = \frac{2 \Delta p_z}{p_0} = \frac{2 \hbar k \omega_1 T}{M v_0}$$

Ordres de grandeur (17)

$$T = 10^{-8} \text{ sec} \quad \omega_1 = 10 \text{ GHz} = 10^{10} \text{ Hz}$$

$$\hookrightarrow \Delta p_z = \mp 100 \hbar k$$

$$M v_0 = \frac{2\pi \hbar}{\lambda_{\text{de Broglie}}} \leftarrow \approx 0,3 \text{ \AA} \quad (\text{voir VII-11})$$

$$\hookrightarrow \theta = 2 \frac{2\pi \hbar}{M v_0} \frac{k}{2\pi} \omega_1 T = 2 \omega_1 T \frac{\lambda_{\text{de Broglie}}}{\lambda_R} \approx 200 \frac{0,3}{6000} \approx \frac{1}{100} \text{ Radian}$$

Largeur de chaque tache

Incertitude δp_z liée à la largeur δz du paquet d'ondes

$$\text{Si } \delta z = \lambda_R / 10 \quad \delta p_z = \hbar / \delta z \approx 10 \hbar k$$

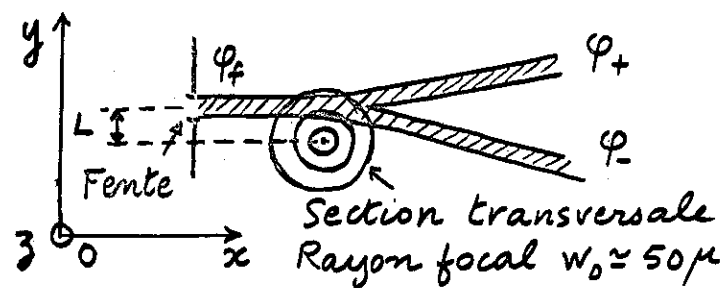
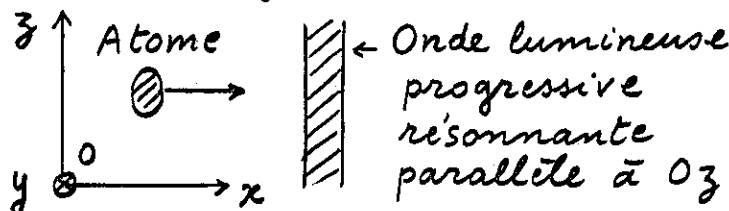
$$\delta p_z \ll \Delta p_z \rightarrow 2 \text{ taches bien séparées}$$

Difficultés d'une telle expérience

Paquet d'ondes très étroit ($\lambda_R / 10 \approx 600 \text{ \AA}$). Fentes collimatrices très fines \rightarrow signal très petit

Proposition plus réaliste (18)

R. J. COOK Phys. Rev. Lett. 41, 1788 (1978)



Fente de largeur 20μ (plus facile à faire que 600 \AA) délimitant un jet se propageant à une distance $L = \frac{w_0}{\sqrt{2}}$ de l'axe du faisceau lumineux

Le jet coupe le faisceau à une distance de l'axe correspondant au gradient lumineux maximal
Déviation en y

Ordres de grandeur

Faisceau gaussien $P = 1 \text{ watt}$ $\omega_0 = 50 \mu$
 Four $\Theta = 1000^\circ \text{K}$ Fente 20μ
 Vitesse = v la plus probable / 10
 $A = 50$ $d = 1 \text{ Debye}$
 L'écart angulaire prévu est $\Theta = 0,31^\circ$
 La divergence angulaire de chaque faisceau est $\delta\Theta = 0,03^\circ$

Remarque

Il y a également des forces parallèles à Oz [la phase ϕ de l'onde est non nulle et dépend de z , ce qui empêche en toute rigueur de découpler les évolutions de c_+ et c_-].

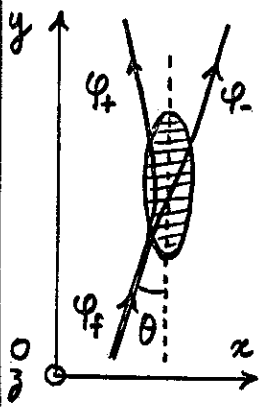
Mais, comme on néglige l'émission spontanée, transfert d'impulsion au plus égal à $\hbar k$ suivant Oz. Peut être négligé devant le transfert suivant Oy.

(19)

Autre exemple : double réfraction (20)

A. P. KAZANTSEV, Sov. Phys. Usp 21, 58 (1978)

Onde progressive résonnante focalisée par une lentille cylindrique de sorte que la section de l'onde par le plan focal est une ellipse allongée



Jet atomique de largeur petite devant celle de l'ellipse et faisant un angle Θ petit avec le grand axe de l'ellipse

Le paquet d'ondes ψ_- est attiré par le potentiel lumineux $-\hbar\omega_1(\vec{r})/2$
 Le paquet d'ondes ψ_+ est repoussé par le potentiel $+\hbar\omega_1(\vec{r})/2$. Il est réfléchi si $\frac{1}{2} M v_x^2 \leq \frac{\hbar\omega_1^{\text{max}}}{2}$

Cas général

(21)

Onde non nécessairement résonnante, stationnaire ou progressive

Retour au potentiel $[V(\vec{r})]$

Etats propres

$$\begin{cases} |+\rangle_{\vec{r}} = \cos\frac{\alpha}{2} e^{-i\frac{\phi}{2}} |e, \vec{r}\rangle + \sin\frac{\alpha}{2} e^{i\frac{\phi}{2}} |f, \vec{r}\rangle \\ |-\rangle_{\vec{r}} = -\sin\frac{\alpha}{2} e^{-i\frac{\phi}{2}} |e, \vec{r}\rangle + \cos\frac{\alpha}{2} e^{i\frac{\phi}{2}} |f, \vec{r}\rangle \end{cases}$$

$\phi = \phi(\vec{r})$ Phase de l'onde
 $\alpha = \alpha(\vec{r})$ tel que $\sin\alpha(\vec{r}) = \frac{\omega_1(\vec{r})}{\Omega(\vec{r})}$

Valeurs propres $\pm \frac{\hbar}{2} \Omega(\vec{r})$

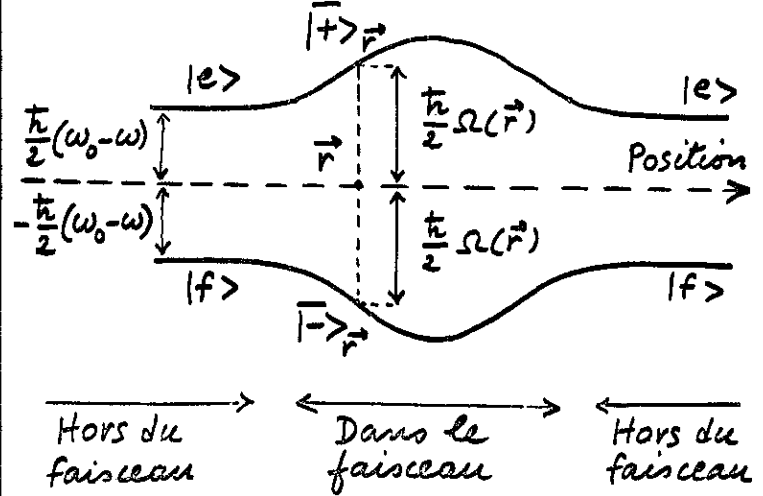
Interprétation géométrique

$|+\rangle_{\vec{r}}$ et $|-\rangle_{\vec{r}}$ sont les états propres du spin le long du champ total \vec{b}_{eff} [voir figure VII-10]
 α est l'angle entre Oz et \vec{b}_{eff}

Diagramme d'énergie

(22)

Portons les 2 énergies potentielles $\pm \frac{\hbar}{2} \Omega(\vec{r})$ en fonction de \vec{r}



Dans le faisceau, les 2 états propres $| \pm \rangle_{\vec{r}}$ dépendent en général de \vec{r} , ce qui empêche de découpler l'équation de Schrödinger en 2 équations indépendantes

Entrée de l'atome dans le faisceauLimite adiabatique

(23)

Si la vitesse de l'atome est suffisamment faible, et si les énergies $\pm \hbar \Omega(\vec{r})/2$ sont suffisamment séparées, l'atome suit adiabatiquement la variation des niveaux.

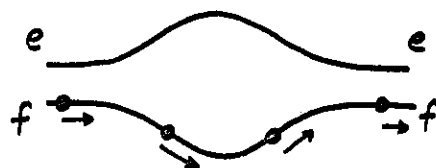
Plus précisément, un petit paquet d'ondes, de centre \vec{r}_0 , dans l'état $|\vec{+}\rangle_{\vec{r}_0}$ (ou $|\vec{-}\rangle_{\vec{r}_0}$), évolue en restant dans l'état $|\vec{+}\rangle_{\vec{r}}$ (ou $|\vec{-}\rangle_{\vec{r}}$) correspondant aux divers points \vec{r} explorés au cours du mouvement (le spin fictif reste aligné sur \vec{b}_{eff})

Le centre du paquet d'ondes évolue comme un point de masse M soumis à la force $-\frac{\hbar}{2} \vec{\nabla} \Omega(\vec{r})$ [ou $+\frac{\hbar}{2} \vec{\nabla} \Omega(\vec{r})$]

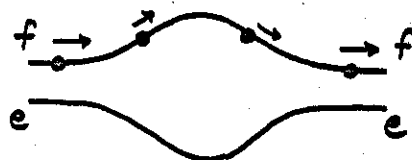
Le paquet d'ondes ne se dédouble pas à la limite adiabatique

(24)

Avant d'entrer dans le faisceau, l'atome est dans l'état $|f\rangle$. Si $|\delta| = |\omega - \omega_0|$ est suffisamment grand, et si la vitesse est suffisamment faible, l'atome reste dans l'état se raccordant à f par continuité

Cas $\omega < \omega_0$ 

Attraction vers les hautes intensités

Cas $\omega > \omega_0$ 

Répulsion hors des hautes intensités
Rebroussement si $\frac{1}{2} M v^2 \leq \frac{\hbar}{2} [\Omega_{\text{max}} \delta]$

Conditions de validité de l'approximation adiabatique

(25)

La vitesse de rotation du champ effectif \vec{b}_{eff} doit être plus petite que la fréquence de précession autour de \vec{b}_{eff}

Etude dans le cas de la traversée d'un faisceau perpendiculairement à son axe

$$\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_{\text{max}} \approx \frac{1}{|\delta|} \left(\frac{d\omega_1}{dt}\right)_{\text{max}} \approx \frac{1}{|\delta|} \left(\frac{d\omega_1}{dr}\right)_{\text{max}} \frac{dr}{dt}$$

$$\approx \frac{1}{|\delta|} \frac{\omega_1^{\text{max}}}{\omega_0} v$$

$$(\Omega)_{\text{min}} = |\delta|$$

$$\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_{\text{max}} \ll (\Omega)_{\text{min}} \rightarrow \frac{1}{|\delta|} \frac{\omega_1^{\text{max}}}{\omega_0} v \ll |\delta|$$

Or $\frac{\omega_0}{v} = T$ Temps de traversée

$$\rightarrow \boxed{|\delta| = |\omega - \omega_0| \gg \sqrt{\frac{\omega_1^{\text{max}}}{T}}}$$

Limite non adiabatique

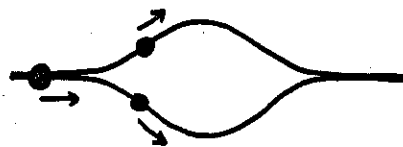
(26)

Dédoublage du paquet d'ondes

Les états $|\pm\rangle_{\vec{r}}$ changent trop vite et l'atome ne peut suivre cette variation.

En entrant dans le faisceau, l'atome reste dans l'état $|f\rangle$, c.à.d dans une superposition linéaire de 2 paquets d'ondes qui vont subir ensuite des déviations différentes.

C'est ce qui se passe pour $\delta = 0$



ou pour δ suffisamment faible

$$|\delta| \ll \sqrt{\frac{\omega_1^{\text{max}}}{T}}$$

2^{ème} Partie - Effets physiques liés au caractère quantique des variables atomiques (suite et fin)

D - Diffraction d'une onde de de Broglie atomique par un faisceau lumineux

1 - Conditions sur la fonction d'onde atomique initiale (T1-T4)

2 - Modification de la fonction d'onde atomique à la traversée du faisceau lumineux (T5-T9)

a) Calcul du déphasage en chaque point.

b) Analogie optique - Réseau de phase biréfringent

3 - Diffraction par une onde lumineuse résonnante progressive

a) Fonction d'onde après traversée du faisceau lumineux (T-10)

b) Distribution d'impulsion (T-11)

c) Interprétation corpusculaire (T-12)

4 - Diffraction par une onde lumineuse résonnante stationnaire - Effet Kapitza-Dirac résonnant

a) Fonction d'onde après traversée du faisceau lumineux (T13-T14)

b) Distribution d'impulsion. (T-15)

c) Interprétation corpusculaire (T 16-T19)

d) Interprétation ondulatoire. Analogie avec une diffraction de Bragg (T20-T21)

e) L'effet Kapitza-Dirac pour des électrons. (T22-T23)

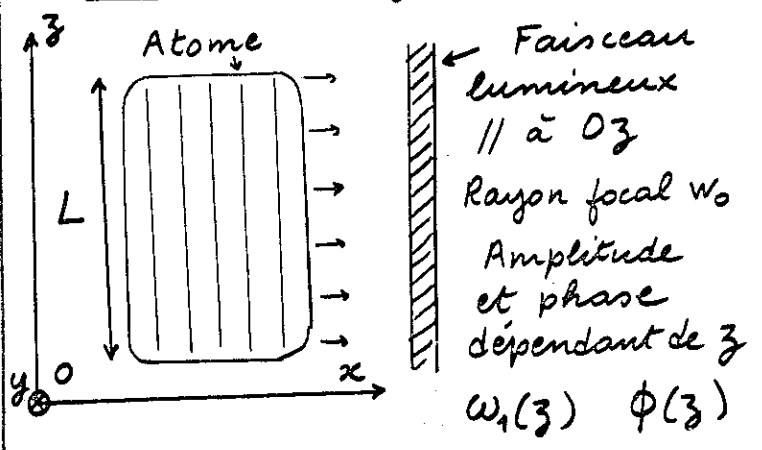
Buts du § D

(1)

- Etudier la diffraction d'une onde atomique plane (ou tout au moins ayant une dimension transversale grande devant λ_R) par un faisceau lumineux qui elle traverse à angle droit
 - Calcul et interprétation physique des phénomènes prévus dans 2 cas importants
 - (i) Onde lumineuse résonnante progressive
 - (ii) Onde lumineuse résonnante stationnaire
- Interprétations ondulatoire et corpusculaire
Lien avec l'effet Kapitza-Dirac

Notations - Hypothèses

(2)



Atome dans l'état $|f\rangle$
Etat externe décrit par un paquet d'ondes de largeur L

$$L \gg \lambda_R$$

se propageant suivant Ox avec une vitesse $v_x = v_0 = \hbar k_0 / M$
Energie initiale $E_0 = \frac{\hbar^2 k_0^2}{2M}$

Impulsion initiale : $\hbar \vec{k}_0 // \vec{a} Ox$

(3)

- Comme la largeur en z du paquet d'ondes est L , la dispersion δp_z de p_z autour de sa valeur moyenne $\langle p_z \rangle = 0$ vaut
- $$\delta p_z \approx \frac{\hbar}{L}$$
- $$L \gg \lambda_R \longrightarrow \delta p_z \ll \frac{\hbar}{\lambda_R} = \hbar k$$
- L'impulsion initiale atomique est définie à mieux que l'impulsion $\hbar k$ d'un photon de l'onde lumineuse

Buts du calcul

- Calculer la dépendance en z de la fonction d'onde atomique après traversée du faisceau lumineux
- Par transformée de Fourier spatiale en déduire la distribution de l'impulsion transférée à l'atome le long de Oz

Absence de réflexion pour l'onde de de Broglie incidente

(4)

L'énergie cinétique initiale de l'atome, $E_0 = \hbar^2 k_0^2 / 2M$, est supposée grande devant le potentiel lumineux $|V(z)|$ [Température du four $\sim 800^\circ K$ - Potentiels optiques $\sim k \Theta$ avec $\Theta \approx 30 mK$]. Donc, pas de barrière de potentiel.

De plus, les variations de l'amplitude lumineuse le long de Ox se font sur une distance de l'ordre de w_0 ($\sim 10 \mu$), très grande devant la longueur d'onde de de Broglie le long de Ox ($\sim 1 \text{ \AA}$)

Donc, pas de réflexion de l'onde de de Broglie lorsqu'elle arrive sur le faisceau lumineux

Déphasage subi par l'onde de de Broglie en un point z (5)

Comme il n'y a pas de réflexion, l'onde transmise a même module que l'onde incidente (on néglige également tout déplacement de l'atome le long de Oz pendant la traversée du faisceau, ce qui est possible si w_0 est suffisamment petit)

Le seul effet de la traversée est donc un déphasage $e^{i\chi(z)}$ dépendant de z et de l'état interne

Analogie optique

"Réseau de phase" avec une biréfringence et des polarisations principales dépendant de z

Calcul du déphasage (6)

Soient $|\pm\rangle_z$ les 2 états propres de $[V(z)]$.

Les 2 amplitudes qu'a l'atome incident en z d'être dans les états $|+\rangle_z$ et $|-\rangle_z$ vont subir des déphasages $\chi_{\pm}(z)$ dépendant des valeurs propres $V_{\pm}(z) = \pm \frac{\hbar}{2} \Omega(z)$ du potentiel.

Le calcul de $\chi_{\pm}(z)$ peut être fait semiclassiquement car la longueur d'onde de de Broglie suivant Ox est très petite devant w_0

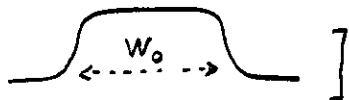
Dans le faisceau lumineux, la longueur d'onde de de Broglie est

$$\lambda_{\pm}(z) = \frac{1}{k_{\pm}(z)} \quad \text{avec} \quad k_{\pm}(z) = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2M(E_0 - V_{\pm}(z))}$$

Expression de $\chi_{\pm}(z)$ (7)

$$\chi_{\pm}(z) = [k_{\pm}(z) - k_0] w_0$$

[on assimile la répartition de l'amplitude lumineuse le long de Ox au point z à un créneau carré avec des bords arrondis



Comme $E_0 = \frac{\hbar^2 k_0^2}{2M} \gg |V_{\pm}|$

$$k_{\pm}(z) = k_0 \left[1 - \frac{2M V_{\pm}(z)}{\hbar^2 k_0^2} \right]^{1/2}$$

$$\approx k_0 \left[1 - \frac{M V_{\pm}(z)}{\hbar^2 k_0^2} \right] = k_0 - \frac{V_{\pm}(z)}{\hbar v_0}$$

avec $v_0 = \hbar k_0 / M$

$$\hookrightarrow [k_{\pm}(z) - k_0] w_0 = - \frac{V_{\pm}(z)}{\hbar} \frac{w_0}{v_0} = \mp \frac{\Omega(z)}{2} T$$

où $T = \frac{w_0}{v_0}$ est le temps de traversée

Fonction d'onde initiale (8)

$$|\Psi\rangle = \int dz |f, z\rangle$$

$$\begin{cases} \Psi_e(z) = 0 \\ \Psi_f(z) \text{ indépendant de } z \end{cases} \quad \text{L'atome est dans } f \quad (L \gg \lambda_R)$$

Changement de base

Développons $|f, z\rangle$ sur les 2 états propres $|\pm\rangle_z$ de $[V(z)]$

[voir VII-21]

$$|\Psi\rangle = \int dz \left\{ e^{-i\frac{\phi(z)}{2}} \left[\cos \frac{\alpha(z)}{2} |-\rangle_z + \sin \frac{\alpha(z)}{2} |+\rangle_z \right] \right\}$$

Fonction d'onde après traversée

Les états $|+\rangle_z$ et $|-\rangle_z$ évoluent indépendamment l'un de l'autre et subissent des déphasages $e^{-i\Omega(z)T/2}$ et $e^{i\Omega(z)T/2}$

Vecteur d'état final $|\psi'\rangle$ (9)

$$|\psi'\rangle = \int dz \left\{ e^{-i\frac{\phi(z)}{2}} \left[\cos \frac{\alpha(z)}{2} e^{i\frac{\Omega(z)T}{2}} |-\rangle_z + \sin \frac{\alpha(z)}{2} e^{-i\frac{\Omega(z)T}{2}} |+\rangle_z \right] \right\}$$

Retour à la base $\{|e\rangle, |f\rangle\}$

On utilise de nouveau (VII-21)

$$|\psi'\rangle = \int dz \left\{ |f, z\rangle \left[\cos \frac{\Omega(z)T}{2} + i \cos \alpha(z) \sin \frac{\Omega(z)T}{2} \right] \psi'_f(z) + |e, z\rangle \left[-i \sin \alpha(z) \sin \frac{\Omega(z)T}{2} e^{-i\phi(z)} \right] \psi'_e(z) \right\}$$

Le module reste bien constant

$$|\psi'_e(z)|^2 + |\psi'_f(z)|^2 = |\psi'_e(z)|^2 + |\psi'_f(z)|^2$$

Calcul analogue à celui de la traversée d'une lame biréfringente en Optique

Distribution d'impulsion après (11) traversée du faisceau lumineux

Suivant l'état interne dans lequel il sort (e ou f), l'atome n'a pas la même fonction d'onde en z

- S'il sort dans f , sa fonction d'onde en z est une constante, dont la transformée de Fourier est $\delta(p_z)$
 \hookrightarrow S'il sort dans f , l'atome a la même impulsion $p_z = 0$ qu'à l'entrée

- S'il sort dans e , sa fonction d'onde est e^{ikz} dont la transformée de Fourier est $\delta(p_z - \hbar k)$

\hookrightarrow S'il sort dans e , l'atome a gagné une impulsion $\hbar k$ égale à celle des photons du faisceau lumineux

Onde progressive résonnante (10)

$$\omega_1(z) = \omega_1 = -d E_0 / \hbar$$

Indépendant de z

$$\Omega(z) = \sqrt{[\omega_1(z)]^2 + (\omega_L - \omega_0)^2} = \omega_1$$

Indépendant de z

$$\phi(z) = -kz$$

$$\sin \alpha(z) = \frac{\omega_1(z)}{\Omega(z)} = 1 \rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}$$

On en déduit

$$\begin{cases} \psi'_f(z) = \cos \frac{\omega_1 T}{2} \\ \psi'_e(z) = -i \sin \frac{\omega_1 T}{2} e^{ikz} \end{cases}$$

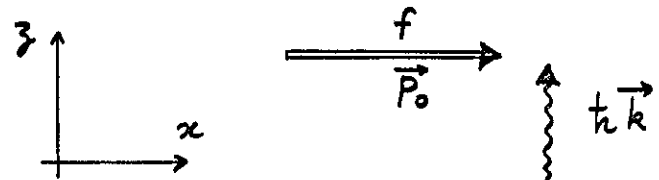
Après traversée du faisceau, l'atome a une probabilité $\cos^2 \frac{\omega_1 T}{2}$ d'être dans f

$\sin^2 \frac{\omega_1 T}{2}$ d'être dans e

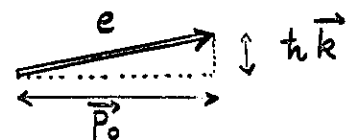
[Si $\omega_1 T = \pi$, impulsion π]

Interprétation corpusculaire (12)

Etat initial



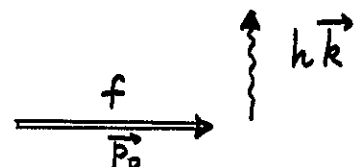
Absorption d'un photon



L'atome monte dans e et gagne $\hbar k$

Emission stimulée d'un photon

(l'émission spontanée est négligée)



L'atome redescend dans f et reprend $\hbar k$

Onde stationnaire résonnante (13)

$$\phi(z) = 0 \quad \delta = \omega - \omega_0 = 0$$

$$\omega_1(z) = 2\omega_1 \cos kz = \Omega(z)$$

$$\sin \alpha(z) = 1 \quad \rightarrow \quad \alpha = \frac{\pi}{2}$$

On en déduit

$$\psi_f'(z) = \cos(\omega_1 T \cos kz)$$

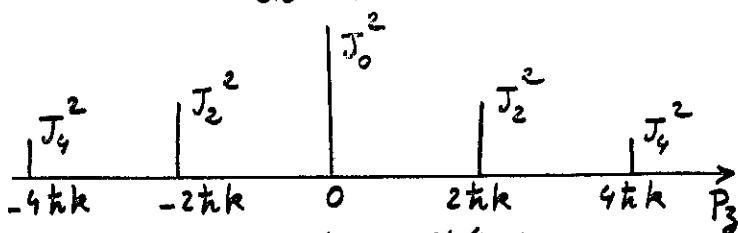
$$\psi_e'(z) = -i \sin(\omega_1 T \cos kz)$$

ψ_f' et ψ_e' sont des fonctions périodiques de z , de période $\frac{2\pi}{k}$

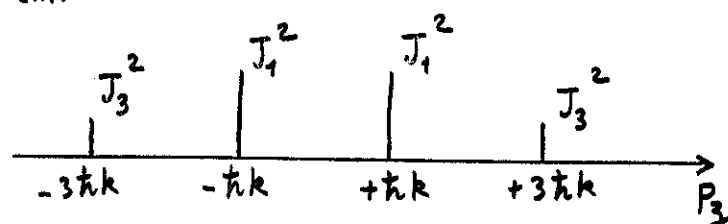
Leurs transformées de Fourier en z sont donc des "peignes" de fonctions $\delta(p_z - n\hbar k)$ avec n entier ≥ 0 , les coefficients de ces fonctions δ étant les coefficients du développement en série de Fourier de ψ_e' et ψ_f'

Distribution d'impulsion après (15)
traversé du faisceau lumineuxAtome sortant dans l'état f

L'impulsion p_z peut avoir toutes les valeurs $2n\hbar k$ avec des probabilités $J_{2n}^2(\omega_1 T)$

Atome sortant dans l'état e

L'impulsion p_z peut avoir toutes les valeurs $(2n+1)\hbar k$ avec des probabilités $J_{2n+1}^2(\omega_1 T)$

Quelques formules utiles (14)

$$e^{\pm i u \cos \theta} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (\pm i)^n J_n(u) e^{\mp i n \theta}$$

J_n : Fonction de Bessel d'ordre n
(Formule importante pour la modulation de fréquence)

$$J_n(u) = (-1)^n J_{-n}(u)$$

$$J_n(u) = (-1)^n J_n(-u)$$

On en déduit que

$$\begin{cases} \cos(u \cos \theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n J_{2n}(u) e^{2i n \theta} \\ \sin(u \cos \theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n J_{2n+1}(u) e^{i(2n+1)\theta} \end{cases}$$

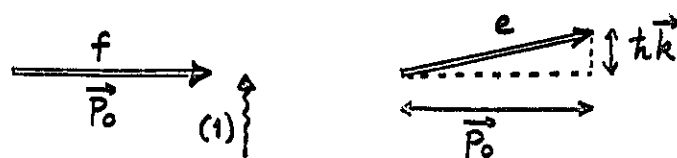
Seuls les harmoniques pairs (impairs) apparaissent dans le développement en série de Fourier de $\cos(u \cos \theta)$ [$\sin(u \cos \theta)$]

Interprétation corpusculaire (16)

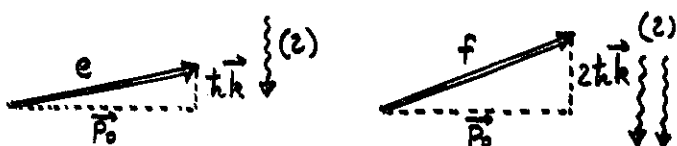
L'onde stationnaire est une superposition de 2 ondes progressives se propageant en sens inverse

2 types de photons (1) et (2)
d'impulsion $+ \hbar \vec{k}$ et $- \hbar \vec{k}$ suivant Oz

Absorption d'un photon (1)



Absorption d'un photon (1) suivie de l'émission stimulée d'un photon (2)



L'atome retourne dans f avec une impulsion $\hbar \vec{k} - (-\hbar \vec{k}) = 2\hbar \vec{k}$

Pics à $2n\hbar k$

Correspondent à une suite de processus d'absorption et d'émission stimulée où, globalement, n photons sont absorbés dans le mode (1) [ou (2)], et n photons sont émis de manière stimulée dans l'autre mode, l'atome retournant à la fin dans l'état f

Pics à $(2n+1)\hbar k$

$n+1$ photons absorbés globalement dans un mode et n photons émis de manière stimulée dans l'autre mode, l'atome finissant dans l'état e

Redistribution entre les 2 modes non vides

Pics très étroits car on néglige l'émission spontanée

(17) Autre formulation du problème (18)

Etats de base du système atome + mode (1) + mode (2)

$|a, n_1, n_2\rangle$

Atome dans l'état a (f ou e) en présence de n_1 photons (1), n_2 photons (2)

Partons de $|f, n_1, n_2\rangle$. L'atome peut passer de f à e en absorbant un photon (1) ou (2). L'état $|f, n_1, n_2\rangle$ est donc couplé à $|e, n_1-1, n_2\rangle$ ou $|e, n_1, n_2-1\rangle$ (qui ont tous même énergie si $\omega = \omega_0$)

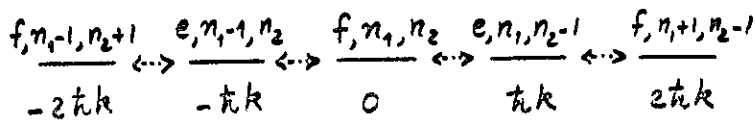
L'état $|e, n_1-1, n_2\rangle$ est couplé, soit à $|f, n_1, n_2\rangle$, soit à $|f, n_1-1, n_2+1\rangle$ [émission d'un photon stimulé (1) ou (2)]

Et ainsi de suite ... Ensemble d'états de même énergie couplés de proche en proche

Diagramme énergétique (19)

Ordonnées : énergie Abcisses : impulsion

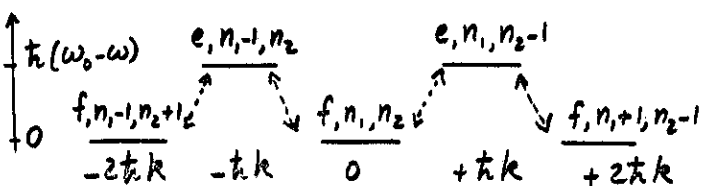
Cas résonnant



Tous les états ont même énergie. Le lien entre la parité de n et l'état e ou f apparaît clairement.

Analogie avec la propagation dans un solide (l'espace des positions étant remplacé par celui des impulsions)

Cas non résonnant



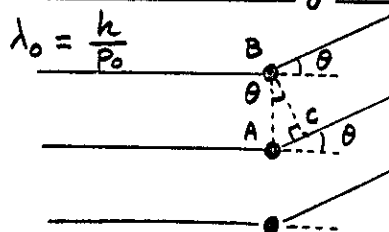
2 groupes d'états séparés par $\hbar(\omega_0 - \omega)$. Si l'on part de f , ce sont surtout les états f qui seront peuplés (conservation de l'énergie)

Interprétation ondulatoire (20)

Dans la diffraction habituelle par un réseau, c'est une onde lumineuse qui est diffractée par un réseau de matière

Ici, c'est une onde de matière (onde de de Broglie) qui est diffractée par un réseau lumineux

Condition d'interférence constructive



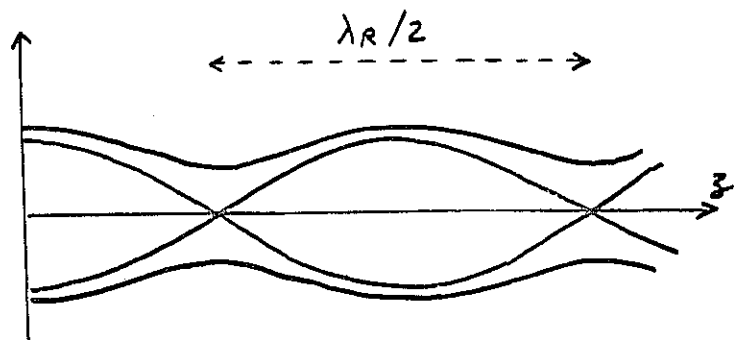
Période du réseau lumineux λ_R

$AC = AB \sin \theta = n \lambda_0$

$\rightarrow \sin \theta = n \frac{\lambda_0}{AB} = n \frac{\lambda_0}{\lambda_R} = n \frac{\hbar k}{P_0}$

$P_z = P_0 \sin \theta = n \hbar k$

Changement de périodicité du (21) réseau quand on sort de résonance



A résonance, les 2 potentiels lumineux sont $\pm \frac{\hbar}{2} \omega_1(z) = \pm \hbar \omega_1 \cos kz$
Période λ_R

Hors résonance ($\omega \neq \omega_0$), ces 2 potentiels sont
 $\pm \frac{\hbar}{2} \Omega(z) = \pm \frac{\hbar}{2} [4\omega_1^2 \cos^2 kz + (\omega_0 - \omega)^2]^{1/2}$

La période passe de λ_R à $\lambda_R/2$.

Interprétation du fait qu'on a surtout les impulsions paires à la sortie

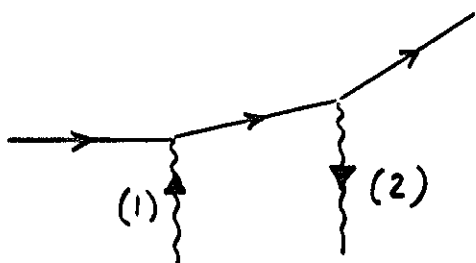
Interprétation corpusculaire (23)

Effet Compton stimulé

Diffusion Compton d'un photon du mode non vide (1) vers le mode non vide (2)

Amplitude proportionnelle à $\sqrt{n_1(n_2+1)}$. Section efficace proportionnelle à $n_1(n_2+1)$
(Pour l'effet Compton spontané, on aurait n_1)

Représentation diagrammatique



Effet Kapitza-Dirac (22)

Electron libre traversant une onde lumineuse stationnaire

Diffraction de Bragg de l'onde de Broglie électronique par le potentiel associé à l'onde lumineuse

Ce potentiel n'est autre que l'énergie cinétique de vibration de l'électron dans l'onde lumineuse (voir II-20). Comme l'énergie de vibration est quadratique en champ [$v \cos^2 kz = (1 + \cos 2kz)/2$], la période du potentiel est $\lambda_R/2$ et le transfert d'impulsion est un multiple de $2\hbar k$

En fait, le potentiel est très petit, et, seul, le transfert $\pm 2\hbar k$ est appréciable

Quelques références

Théorie

R. J. COOK, A. F. BERNHARDT
Phys. Rev. A 18, 2533 (1978)

A. F. BERNHARDT, B. W. SHORE
Phys. Rev. A 23, 1290 (1981)

E. ARIMONDO, A. BAMBINI, S. STENHOLM
Phys. Rev. A 24, 898 (1981)

C. TANGUY Thèse 3^{ème} cycle Paris 1981

Expérience

Séminaire de D. PRITCHARD
au Collège de France (8/3/83)

Effet Kapitza-Dirac avec des électrons

P. L. KAPITZA, P. A. M. DIRAC
Proc. Camb. Phil. Soc. 29, 297 (1933)