

A. Résumé du cours 1978-79

① Ideés physiques

Le cours de l'année antérieure avait porté sur l'étude des fonctions de corrélation d'un système quantique à partir des équations de Langevin-Mori. Ces équations, établies de manière générale grâce à la technique des opérateurs de projection introduite par Zwanzig, décrivent comment les observables intéressantes du système évoluent sous l'effet d'une force de friction retardée, qui est responsable de l'amortissement du système, et d'une force de Langevin fluctuante, qui introduit des fluctuations dans le comportement de ce système. Une telle approche avait été ensuite appliquée à l'étude des fonctions de corrélation et fonctions de mémoire d'un système en équilibre thermodynamique.

En *optique* quantique, les systèmes étudiés sont, le plus souvent, hors d'équilibre. Par exemple, dans un oscillateur atomique, comme un maser ou un laser, un mécanisme de pompage approprié permet de réaliser des inversions de population entre deux niveaux d'énergie, ce qui peut entraîner, dans certaines conditions, des auto-oscillations entretenues, c'est-à-dire la transformation, en régime permanent, de l'énergie de pompage incohérente en un rayonnement cohérent ayant des propriétés tout à fait remarquables. Il a donc semblé intéressant de prolonger le cours de l'année antérieure en étudiant, au moyen des équations de Langevin-Mori, les fonctions de corrélation d'un système hors d'équilibre de manière, par exemple, à pouvoir comprendre le fonctionnement d'un laser et les propriétés statistiques du rayonnement qu'il émet.

1) On commence par montrer que, dans le cas très général d'un « petit » système S, hors d'équilibre et couplé à un « grand » réservoir R, on peut associer à toute réduction de l'équation de Schrödinger en équation pilote pour S, une réduction des équations de Heisenberg en équations de Langevin-Mori, les opérateurs de projection utilisés dans les deux réductions étant adjoints l'un de l'autre. Il est possible alors d'utiliser les résultats obtenus antérieurement lors de l'étude de l'équation pilote de S pour trouver le projecteur P qu'il faut appliquer aux équations de Heisenberg pour les trans-

former en équations de Langevin-Mori. L'action de P sur une observable quelconque revient à prendre la « moyenne sur le réservoir » de cette observable. On établit ainsi, de manière très générale, la structure des équations de Langevin-Mori des observables de S. On montre que la moyenne sur le réservoir des forces de Langevin est nulle et que l'évolution des moyennes à un temps déduite de ces équations coïncide avec celle donnée par l'équation pilote.

On aborde ensuite, dans le cadre d'un traitement perturbatif des interactions entre S et R, l'étude des fonctions de corrélation $\langle F_\alpha(t) F_\beta(t') \rangle_R$ des forces de Langevin F_α et F_β agissant sur deux observables A_α et A_β de S. On montre qu'il existe deux échelles de temps bien distinctes dans le problème, le temps de corrélation τ_c qui caractérise les fluctuations des observables de R couplées à S et qui est très court, le temps de relaxation T_R qui décrit l'amortissement des observables de S et son retour à l'équilibre, et qui est beaucoup plus long. L'expression de $\langle F_\alpha(t) F_\beta(t') \rangle_R$ révèle que les fonctions de corrélation des forces de Langevin dépendent à la fois de $t-t'$ et de t . Elles s'écrivent :

$$\langle F_\alpha(t) F_\beta(t') \rangle_R = 2 D_{\alpha\beta}(t) f_{\alpha\beta}(t-t')$$

où $f_{\alpha\beta}(t-t')$ a pour temps caractéristique τ_c et où $D_{\alpha\beta}(t)$ est un coefficient de diffusion (en fait, un opérateur de S) ayant pour temps caractéristique T_R . On retrouve donc bien que les forces de Langevin fluctuent très rapidement (temps τ_c). Mais elles ne sont plus stationnaires pour un système hors d'équilibre puisque les coefficients de diffusion $D_{\alpha\beta}$ dépendent de l'écart à l'équilibre et varient donc lors du retour du système à l'équilibre (temps T_R).

2) Le résultat précédent concernant la structure de $\langle F_\alpha(t) F_\beta(t') \rangle_R$ est en fait valable dans des situations plus générales que celles relevant d'un traitement perturbatif des interactions entre S et R, pourvu toutefois qu'il existe deux échelles de temps bien distinctes τ_c et T_R . On peut, par exemple, considérer l'effet de collisions fortes subies par les atomes actifs d'un milieu laser contre des perturbateurs, le temps τ_c d'une collision étant beaucoup plus court que le temps T_R entre deux collisions subies par le même atome.

Il paraît donc important d'établir l'expression des fonctions de corrélation $\langle F_\alpha(t) F_\beta(t') \rangle_R$ directement à partir des équations de Langevin-Mori, sans passer par des développements perturbatifs.

On commence par montrer que, si $\Delta A_\alpha(t)$ et $\Delta A_\beta(t)$ désignent les accroissements de A_α et A_β au cours d'un intervalle de temps Δt long devant τ_c mais court devant T_R , on a $\langle \Delta A_\alpha(t) \Delta A_\beta(t) \rangle_R = 2 D_{\alpha\beta}(t) \Delta t$ ce qui permet bien d'interpréter physiquement $D_{\alpha\beta}(t)$ comme un coefficient de diffusion. En calculant de deux manières différentes $\langle \Delta A_\alpha(t) \Delta A_\beta(t) \rangle_R$, on obtient des

I-2

équations reliant $D_{\alpha\beta}(t)$ aux taux de relaxation des observables de S et aux valeurs moyennes de ces observables, équations appelées « relations d'Einstein généralisées » et qui traduisent pour un système hors d'équilibre le lien étroit existant entre fluctuations et dissipation. On montre également que les fonctions de corrélation $\langle A_\alpha(t) A_\beta(t') \rangle_R$ des observables de S, convenablement « lissées » sur un intervalle Δt long devant τ_c et court devant T_R , obéissent, pour $t \geq t'$, aux mêmes équations d'évolution (vis-à-vis de t) que les moyennes à un temps $\langle A_\alpha(t) \rangle$. Il s'agit là du « théorème de régression quantique » qui permet de calculer simplement la dynamique des fluctuations de S.

Tous ces résultats généraux sont illustrés sur de nombreux exemples concrets. Les coefficients de diffusion $D_{\alpha\beta}$ sont calculés explicitement pour un système à deux niveaux « fermé » (spin 1/2 obéissant à des équations de Bloch ou émission spontanée sur la raie de résonance optique) pour un système à deux niveaux « ouvert » (alimenté par des processus de pompage et soumis à une relaxation), pour un mode propre d'une cavité électromagnétique avec des pertes dans la paroi. On présente également un modèle d'oscillateur harmonique amorti, entièrement soluble, à propos duquel le problème des moments d'ordre supérieur à deux des forces de Langevin est abordé ainsi que celui de leur caractère gaussien éventuel.

3) Dans la troisième partie du cours, le formalisme précédent est appliqué à l'étude des fluctuations dans les masers et les lasers.

Dans le modèle choisi, le système S est formé par un mode propre d'une cavité électromagnétique dans laquelle se trouvent des atomes actifs, le réservoir R est l'ensemble des autres systèmes responsables du pompage, de l'amortissement et des fluctuations de S : processus de pompage et de relaxation pour les atomes actifs, pertes dans les parois et rayonnement du corps noir pour le mode propre de la cavité. Les équations de Langevin-Mori des observables de S sont écrites, compte tenu du couplage atomes actifs-mode de la cavité et les divers coefficients de diffusion calculés en fonction des taux de relaxation et de pompage introduits dans le modèle de manière phénoménologique.

Une discussion qualitative des équations ainsi obtenues (traitant les diverses observables comme des nombres et non comme des opérateurs) permet tout d'abord de dégager les paramètres physiques importants (taux d'émission spontanée des atomes actifs dans le mode, inversion critique au delà de laquelle les gains sont supérieurs aux pertes), les approximations intéressantes (élimination adiabatique des variables atomiques qui varient beaucoup plus vite que celles du mode de la cavité au voisinage de l'inversion critique et qui suivent donc instantanément les variations lentes du champ laser,

en lui étant en quelque sorte « asservies »). L'allure générale des phénomènes lorsqu'on traverse l'inversion critique est discutée : ralentissement critique quand on s'approche du seuil, puis apparition d'un champ dans la cavité quand on dépasse le seuil, avec stabilisation de l'amplitude et diffusion de la phase. L'analogie avec une transition de phase du deuxième ordre est soulignée.

On reprend ensuite le problème de manière plus quantitative et on établit, après élimination adiabatique des variables atomiques, l'équation de Langevin à laquelle obéissent les opérateurs a et a^+ du mode laser. On étudie à partir de cette équation trois grandeurs physiques intéressantes : le nombre moyen de photons en régime stationnaire, qui est proportionnel à la puissance de sortie du laser ; la fonction de corrélation du champ électromagnétique, dont la transformée de Fourier donne la répartition spectrale du rayonnement émis ; la fonction de corrélation de l'intensité. Deux approximations différentes sont utilisées : l'approximation linéaire au-dessous du seuil, qui revient à négliger les effets de saturation atomique, ce qui est tout à fait justifié compte tenu de la faible intensité lumineuse ; l'approximation quasi-linéaire au-dessus du seuil, qui revient à linéariser les équations au voisinage du point de fonctionnement. Au voisinage immédiat du seuil, aucune des deux approximations précédentes n'est justifiée, compte tenu de l'importance des fluctuations. Il faut alors passer par l'intermédiaire de l'équation de Fokker-Planck à laquelle satisfait la distribution de quasi-probabilité $P(\alpha)$ du mode laser, établir cette équation à partir de l'équation de Langevin et la résoudre. Il est possible, ainsi, d'obtenir la courbe complète donnant en fonction de l'inversion atomique, la puissance de sortie du laser, de déterminer l'influence des divers processus physiques (émission spontanée, rayonnement du corps noir) sur la largeur spectrale du rayonnement émis, de comprendre le ralentissement puis l'accélération des fluctuations d'intensité.

Le cours se termine enfin par une revue des expériences (dont certaines, très récentes, viennent seulement d'être publiées) qui ont permis de tester les modèles théoriques précédents : mesure de l'intensité laser en fonction de l'inversion atomique, étude de la structure fine des fonctions de corrélation du champ laser et de l'intensité mettant en évidence, au voisinage du seuil, l'existence de plusieurs modes de relaxation avec des constantes de temps et des poids en accord avec les prédictions de l'équation de Fokker-Planck, évolution de la statistique du rayonnement quand on traverse le seuil. La transition laser est certainement l'une des transitions du deuxième ordre qui ont été étudiées le plus en détail, tant sur le plan théorique qu'expérimental.

② Rappel de quelques formules- "Petit" système S et "grand" réservoir R

$\{A_\alpha\}$: ensemble orthonormé complet d'opérateurs de S
(par exemple, pour un système à 2 niveaux a, b :
 $|a\rangle\langle a|, |b\rangle\langle b|, |a\rangle\langle b|, |b\rangle\langle a|$)

ω_α : fréquence d'évolution libre de A_α (en l'absence de couplage S-R)

A $t=0$, opérateur densité factorisé

$$\sigma(0) = \sigma_R(0) \sigma_S(0) \quad (\text{I-1})$$

- Equations de Langevin - Mori des A_α

$$\dot{A}_\alpha(t) = \underbrace{i\omega_\alpha A_\alpha(t)}_{\text{Evolution libre}} - \underbrace{\int_0^t d\tau \sum_\beta \gamma_{\beta\alpha}(\tau) A_\beta(\tau)}_{\text{Friction retardée}} + \underbrace{F_\alpha(t)}_{\text{Force de Langevin}} \quad (\text{I-2})$$

$$\langle F_\alpha(t) \rangle_R = \text{Tr}_R(\sigma_R(0) F_\alpha(t)) = 0 \quad (\text{I-3})$$

Résultats exacts (sans approximations)

- Hypothèse supplémentaire (existence de 2 échelles de temps)

Hypothèse supposée réalisée à partir de maintenant

τ_c : temps de corrélation des observables de R couplés à S

T_R : temps de relaxation des observables de S ($T_R^{-1} \sim \Gamma \sim \int_0^\infty \gamma(\tau) d\tau$)

$$\boxed{T_R \gg \tau_c} \quad (\text{I-4})$$

- Moyenne "à gros grains" ("coarse-grained average")

On s'intéresse au comportement de S sur une échelle de temps Δt longue devant τ_c mais courte devant T_R

$$\tau_c \ll \Delta t \ll T_R \quad (\text{I-5})$$

Accroissement de A_α

$$\Delta A_\alpha(t) = A_\alpha(t + \Delta t) - A_\alpha(t) \quad (\text{I-6})$$

Vitesse de variation "lissée"

$$\frac{\Delta A_\alpha(t)}{\Delta t} = \frac{A_\alpha(t + \Delta t) - A_\alpha(t)}{\Delta t} \quad (\text{I-7})$$

- Equation d'évolution "lissée" des A_α

$$\boxed{\frac{\Delta A_\alpha}{\Delta t} = i\omega_\alpha A_\alpha(t) - \sum_\beta \Gamma_{\beta\alpha} A_\beta(t) + F_\alpha(t)} \quad (\text{I-8})$$

$$\Gamma_{\beta\alpha} = \int_0^\infty \gamma_{\beta\alpha}(\tau) d\tau \quad \langle F_\alpha(t) \rangle_R = 0 \quad (\text{I-9})$$

l'équation intégrodifférentielle (I-2) devient une équation différentielle

Fonctions de corrélation des forces de Langevin $F_\alpha(t)$

I-4

$$\langle F_\alpha(t) F_\beta(t') \rangle_R = 2 D_{\alpha\beta}(t) g(t-t') \quad (I-10)$$

$D_{\alpha\beta}(t)$: opérateur de S variant à l'échelle de T_R

$g(t-t')$: "Fonction $\delta(t-t')$ " de largeur Δt

(fonction paire de $t-t'$, de largeur Δt , d'intégrale égale à 1)

Interprétation physique de $D_{\alpha\beta}(t)$

$$\langle \Delta A_\alpha(t) \Delta A_\beta(t) \rangle_R = 2 D_{\alpha\beta}(t) \Delta t \quad (I-11)$$

$D_{\alpha\beta}$ apparaît comme un coefficient de diffusion

Caractère quantique : $D_{\alpha\beta} \neq D_{\beta\alpha}$

Relations d'Einstein généralisées

Regroupons les 2 premiers termes des 2^{ème} membres de I-8 en appelant V_α leur somme

$$\frac{\Delta A_\alpha}{\Delta t} = V_\alpha(t) + F_\alpha(t) \quad (I-12)$$

et soit $A_{\alpha\beta}$ l'opérateur produit de A_α par A_β

$$A_{\alpha\beta}(t) = A_\alpha(t) A_\beta(t) \quad (I-13)$$

qui obéit à une équation analogue à (I-12)

$$\frac{\Delta A_{\alpha\beta}}{\Delta t} = V_{\alpha\beta}(t) + F_{\alpha\beta}(t) \quad (I-14)$$

Alors

$$2 D_{\alpha\beta}(t) = \langle V_{\alpha\beta}(t) \rangle_R - \langle A_\alpha(t) V_\beta(t) \rangle_R - \langle V_\alpha(t) A_\beta(t) \rangle_R \quad (I-15)$$

Théorème de régression quantique

γ étant fixé et α variant, considérons l'ensemble des fonctions de corrélation $\langle A_\alpha(t) A_\gamma(t') \rangle_R$

leur vitesse de variation (linéaire) par rapport à t obéit, pour $t \geq t'$, aux mêmes équations d'évolution complètes que les moyennes à un temps $\langle A_\alpha(t) \rangle_R$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta \langle A_\alpha(t) A_\gamma(t') \rangle_R}{\Delta t} &= \frac{\langle A_\alpha(t+\Delta t) A_\gamma(t') \rangle_R - \langle A_\alpha(t) A_\gamma(t') \rangle_R}{\Delta t} \\ &= i\omega_\alpha \langle A_\alpha(t) A_\gamma(t') \rangle_R - \sum_\beta \Gamma_{\beta\alpha} \langle A_\beta(t) A_\gamma(t') \rangle_R \end{aligned}$$

Equation analogue à

(I-16)

$$\frac{\Delta \langle A_\alpha(t) \rangle_R}{\Delta t} = i\omega_\alpha \langle A_\alpha(t) \rangle_R - \sum_\beta \Gamma_{\beta\alpha} \langle A_\beta(t) \rangle_R \quad (I-17)$$

① Ideé générale

- Dans les processus de détection et d'émission de rayonnement par des atomes, essayer de dégager les aspects qui nécessitent réellement une quantification du rayonnement.

- Au cours des dernières années, plusieurs physiciens ont essayé de construire des théories semi-classiques des interactions matière-rayonnement où la matière est traitée quantiquement et le rayonnement classiquement.

Succès de ces approches pour expliquer un nombre important de phénomènes : effet photoélectrique, effet Hanbury-Brown et Twiss, théorie semi-clasque du laser, optique non-linéaire...

Objet de ce cours : essayer, en analysant des tests expérimentaux récents, de répondre à la question suivante : pourrait-on se passer du concept de photon, au moins dans le domaine optique ?

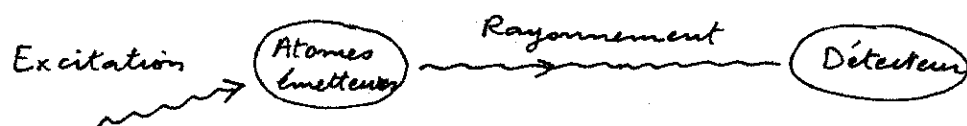
② Schéma général d'une expérience portant sur le rayonnement

Fig. 1

③ Problèmes posés par la détection

a) Que peut-on mesurer avec un photodétecteur ?

- Plusieurs types de signaux peuvent être mesurés avec un PM.

Courant photoélectrique moyen $\langle I(t) \rangle$

Courant photoélectrique moyen après avoir mis devant le PM un filtre sélectif en fréquence (Fabry-Perot...), ce qui donne accès à la répartition spectrale $S(\omega)$ du rayonnement

Corrélations d'intensité $\langle I(t) I(t') \rangle$

- A la limite des faibles flux lumineux et avec une électronique rapide, la sortie du PM apparaît sous forme d'un train d'impulsions (Fig. 2). Chaque impulsion vient d'un photoélectron éjecté de la cathode et multiplié dans la chaîne de dynodes.

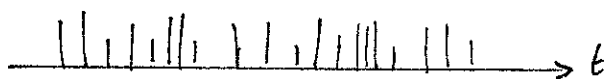


Fig. 2

On peut alors compter le nombre d'impulsions dans un intervalle T fixé et déterminer la probabilité $P(m, T)$ de compter m impulsions.

On peut mesurer les corrélations entre nombres m_1 et m_2 d'impulsions comptés dans 2 intervalles différents T_1, T_2 .

On peut mesurer la distribution des intervalles τ entre 2 impulsions successives, etc...

- Ces techniques de comptage deviennent de plus en plus utilisées pour les raisons suivantes.

Propriétés dans l'électronique rapide.

Propriétés dans le traitement de l'information contenue dans le train d'impulsions.

Possibilité de mesurer par ces techniques des temps de corrélation longs (la largeur spectrale correspondante serait trop faible pour être accessible à une mesure de largeur de raie).

Pour plus de détails sur ces problèmes voir

" Photon correlations and light beating Spectroscopy "

edited by H.Z. Cummins and E.R. Pike Plenum Press 1973

b) Comment remonter des signaux mesurés aux propriétés du rayonnement ?

C'est surtout ce problème que nous étudierons.

Le but poursuivi est de relier les signaux de détection expérimentaux à des fonctions de corrélation, de complexité croissante, du rayonnement tombant sur le PM.

Le calcul sera fait, d'abord avec des rayonnements classiques, puis des rayonnements quantiques.

Se pose alors le problème suivant.

c) Existe-t-il des effets spécifiques d'un rayonnement quantique ?

Plus précisément, peut-on réaliser des expériences où les signaux de détection observés sont impossibles à comprendre si le rayonnement incident est traité classiquement ?

Des tests expérimentaux très récents seront décrits qui permettent de répondre positivement à une telle question.

Pourquoi a-t-il fallu attendre si longtemps pour faire de telles expériences ? Expériences difficiles car les effets quantiques se manifestent clairement quand le rayonnement étudié provient d'un très petit nombre d'atomes. Nécessité d'avoir des détecteurs très sensibles ou une excitation optique très efficace des atomes émetteurs (excitation laser).

Avec les tests expérimentaux mentionnés plus haut, le débat semblerait à première vue clos et la nécessité d'un traitement quantique démontrée. En fait, la situation est plus complexe.

d) Arguments des partisans des théories semi-classiques.

Tout rayonnement provient d'une source.

Les effets quantiques révélés par les expériences mentionnées plus haut ne font que refléter la nature quantique des atomes émetteurs.

Le champ rayonné par un dipôle atomique est proportionnel à ce dipôle. C'est donc un opérateur, mais un opérateur atomique.

En termes plus mathématiques, on peut espérer formuler une théorie n'utilisant que l'espace de Hilbert de l'atome,

évitant ainsi de quantifier le champ et d'introduire l'espace de Fock correspondant, avec toutes les difficultés conceptuelles liées aux fluctuations du vide.

Le débat se trouve ainsi reporté sur le mécanisme du processus d'émission.

④ Problèmes posés par l'émission

Le problème fondamental est le suivant : peut-on comprendre l'émission de rayonnement par un atome sans faire appel à la quantification du champ électromagnétique.

a) Arguments des partisans des théories semi-classique.

- 2 mécanismes distincts sont souvent évoqués pour décrire l'émission spontanée de rayonnement par un atome :

- (i) l'interaction de l'électron avec son propre champ (réaction de rayonnement)
- (ii) l'interaction de l'électron avec les fluctuations du vide (l'émission spontanée apparaît comme une émission "induite par les fluctuations du vide").

- Les équations de Heisenberg couplées de l'atome et du rayonnement peuvent être transformées de plusieurs manières différentes, équivalentes algébriquement. Avec l'une de ces manières, l'émission semble due uniquement à la réaction de rayonnement.

On peut donc ignorer les fluctuations du vide et adopter un point de vue unique sur tout champ à une source.

b) Réponse à ces arguments

- Nous essaierons de montrer que la séparation entre effets des fluctuations du vide et effets de la réaction de rayonnement n'est pas ambiguë.

Ces 2 effets interviennent simultanément.

Les formes mathématiques mentionnées plus haut sont bien équivalentes algébriquement mais elles n'ont pas toutes un contenu physique clair.

- L'équation du mouvement des observables atomiques couplées au rayonnement quantique est analogue à une équation de Langevin - Mori.

Ignorer les fluctuations du vide revient à ignorer la force de Langevin correspondante.

Nous analyserons les conséquences d'une telle attitude :

- (i) Non-conservation des relations de commutation atomiques.
- (ii) Prédiction différente pour les fonctions de corrélation atomiques. Contradiction avec l'expérience.

Théorie "sans photons" et "avec photons"

Buts de ce chapitre

- Calculer les divers types de signaux qui peuvent être observés à la sortie d'un photomultiplicateur lorsque ce dernier est exposé à un rayonnement libre incident. Le rayonnement sera traité soit classiquement (théorie "sans photons"), soit quantiquement (théorie "avec photons").
- Montrer que ces signaux renseignent sur les fonctions de corrélation du rayonnement (classique ou quantique). En profiter pour souligner, sur quelques exemples, la richesse et la puissance des méthodes de corrélation d'intensité et de comptage de photoélectrons par rapport aux méthodes spectroscopiques interférentielles habituelles.
- Essayer de dégager les analogies et différences, entre les fonctions de corrélation classiques et quantiques, de manière à pouvoir ensuite, dans le chapitre suivant, discuter de la recherche d'effets typiquement quantiques.

A - Etude du processus de base : photoionisation d'un atome

① Ionisation d'un atome par une onde monochromatique classique : l'effet photoélectrique "sans photons".

a) Notations

Atome : traité quantiquement

H_A : hamiltonien

Niveaux : voir figure

ex : moment dipolaire

Rayonnement : onde classique
sinusoïdale

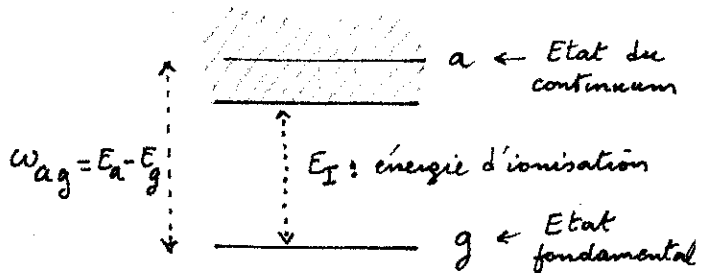


Fig 1

Hamiltonien d'interaction (approximation dipolaire électrique)

$$V(t) = -ex \mathcal{E} \sin \omega t \quad (II-1)$$

Problème A $t=0$, l'atome est dans l'état fondamental. Il est soumis pendant un temps t au rayonnement incident. Quelle est la probabilité de le trouver au bout de ce temps dans un groupe d'états du continuum ?

$$P_{ion}(t) = \sum_a R_a P_{g \rightarrow a}(t) \quad (II-2)$$

R_a décrit l'efficacité de collection du photoélectron en fonction de son énergie E_a . Si $R_a = \delta(E_a - E)$, on ne collecte que les électrons d'énergie cinétique E bien définie (comme dans un spectromètre β ou dans une expérience "ESCA"). Si $R_a = 1$, collection parfaite (détecteur à large bande).

Représentation d'interaction

$$|\tilde{\psi}(t)\rangle = e^{iH_A t} |\psi(t)\rangle$$

$$i \frac{d}{dt} |\tilde{\psi}(t)\rangle = \tilde{V}(t) |\tilde{\psi}(t)\rangle$$

$$\text{avec } \tilde{V}(t) = e^{iH_A t} V(t) e^{-iH_A t} \quad (\text{II-3})$$

$$|\tilde{\psi}(t)\rangle = \tilde{U}(t,0) |\tilde{\psi}(0)\rangle$$

$$\tilde{U}(t,0) = -i \int_0^t dt' \tilde{V}(t') - \int_{t'}^t dt'' \int_0^{t'} dt' \tilde{V}(t'') \tilde{V}(t') + \dots \quad (\text{II-4})$$

Amplitude de transition $g \rightarrow a$ (à l'ordre le plus bas en V)

$$\langle a | \tilde{U}(t,0) | g \rangle = \frac{e^{\mathcal{E}}}{2i} x_{ag} \left[\frac{1 - e^{i(\omega_{ag} - \omega)t}}{\omega_{ag} - \omega} - \frac{1 - e^{i(\omega_{ag} + \omega)t}}{\omega_{ag} + \omega} \right] \quad (\text{II-5})$$

Comme ω_{ag} et ω sont > 0 , le dénominateur du 2^e terme du crochet de II-5 ne peut jamais s'annuler (terme "anti-résonnant") à la différence du 1^{er} (terme "résonnant"). Pour $t \gg \frac{1}{\omega}$, la contribution du 2^e terme est négligeable (2 fonctions de diffraction séparées par une distance 2ω grande devant leur largeur $1/t$).

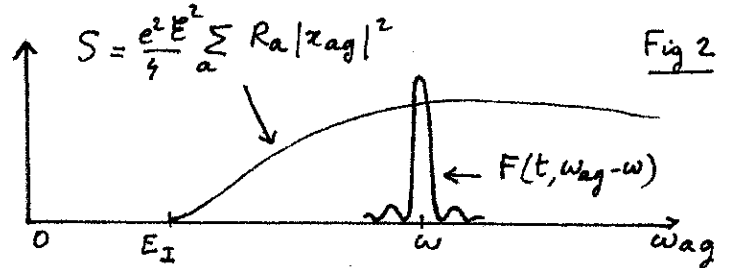
Probabilité de transition $g \rightarrow a$

$$P_{g \rightarrow a}(t) = \frac{e^2 \mathcal{E}^2}{4} |x_{ag}|^2 \left[\frac{\sin[(\omega_{ag} - \omega)t/2]}{(\omega_{ag} - \omega)/2} \right]^2 \quad (\text{II-6})$$

Fonction de diffraction $F(t, \omega_{ag} - \omega)$, centrée en $\omega_{ag} = \omega$ et de largeur $1/t$, se comportant comme $2\pi t \delta(\omega_{ag} - \omega)$ vis à vis des fonctions variant lentement sur un intervalle $1/t$.

Sommation sur les états finaux

Si R_a varie peu avec E_a (détection à large bande), la courbe S varie peu avec ω_{ag} . Sa "largeur" Δ est l'inverse du temps de réponse du détecteur. Si $t \gg \frac{1}{\Delta}$, on peut assimiler



F à $2\pi t \delta(\omega_{ag} - \omega)$, ce qui donne en reportant (II, 6) dans (II, 2)

$$P_{ion}(t) = W t \quad (\text{II-7})$$

avec

$$W = \frac{\mathcal{E}^2}{4} S \quad S = 2\pi e^2 \sum_a R_a |x_{ag}|^2 \delta(\omega_{ag} - \omega) \quad (\text{II-8})$$

c) Conclusion : on retrouve toutes les caractéristiques de l'effet photoélectrique

- Pour $t \gg \frac{1}{\omega}, \frac{1}{\Delta}$, l'irradiation de l'atome produit une ionisation de l'atome avec une probabilité par unité de temps W proportionnelle à l'intensité \mathcal{E}^2
- L'ionisation ne se produit que si $\omega > E_I$ (voir fig. 2)
- Les états du continuum atteints sont tels que $\omega_{ag} = \omega$ à $\frac{1}{t}$ près (voir toujours fig. 2). On retrouve la fameuse relation d'Einstein entre énergie cinétique E_a du photoélectron, travail d'extraction E_I et fréquence ω
 $\omega_{ag} = \omega \rightarrow E_a - E_g = \omega \rightarrow E_a = \omega + E_g = \omega - E_I$

② Généralisation à une onde classique quelconque
(non monochromatique et pouvant fluctuer)

a) Composantes de fréquences > 0 et < 0 du champ

- Développement du champ $E(r, t)$ en "modes" (par exemple, ondes ^{progressives} planes)

$$E(r, t) = \sum_k N_k [\alpha_k e^{i(kr - \omega t)} + \alpha_k^* e^{-i(kr - \omega t)}] \quad (\text{II-9})$$

N_k : coef. de normalisation (sans importance ici). On oublie aussi pour simplifier le caractère vectoriel de E et les vecteurs polarisation

α_k : coefficient du développement du champ sur le "mode k "
($\omega = c|k|$)

- Par définition

$$E^{(+)}(r, t) = \sum_k N_k \alpha_k e^{i(kr - \omega t)} \quad E^{(-)}(r, t) = [E^{(+)}(r, t)]^* \quad (\text{II-10})$$

$E^{(+)}$: composante de fréquences > 0 du champ (dépendance en $e^{-i\omega t}$)

- On appellera également "intensité" $I(r, t)$ du champ en r, t

$$I(r, t) = E^{(-)}(r, t) E^{(+)}(r, t) = |E^{(+)}(r, t)|^2 \quad (\text{II-11})$$

b) Champs aléatoires

- $E(r, t)$ non connue avec certitude : fonction aléatoire de t
 $\{\alpha_k\}$: coefficients de Fourier, aléatoires. Distribution de pbte $\mathcal{P}(\{\alpha\})$
(Voir cours 1977-78 chapitre IV)
- Processus aléatoires stationnaires (invariants / translation dans le temps)
Moyennes à 1 temps t : indépendantes de t
Moyennes à 2 temps t, t' : ne dépendent que de $t - t'$
- Processus aléatoires gaussiens et stationnaires
Nous utiliserons la relation suivante (notation i pour r_i, t_i)

$$\overline{E^{(-)}(1) E^{(-)}(2) E^{(+)}(3) E^{(+)}(4)} = \overline{E^{(-)}(1) E^{(+)}(3)} \overline{E^{(-)}(2) E^{(+)}(4)} + \overline{E^{(-)}(1) E^{(+)}(4)} \overline{E^{(-)}(2) E^{(+)}(3)} \quad (\text{II-12})$$

c) Ce qui change dans le calcul précédent

- Il faut faire le calcul jusqu'au bout avec une "réalisation" possible de $E(r, t)$, puis moyennes à la fin (c-à-d au niveau de $P_g \rightarrow a$ et non de $\tilde{U}_{g \rightarrow a}$), sur les diverses réalisations possibles de $E(r, t)$
- On remplace dans (II-1) $E \sin \omega t$ par $E(r, t)$. On obtient

$$\begin{aligned} \langle a | \tilde{U}(t, 0) | g \rangle &= -i \int_0^t dt' \langle a | \tilde{V}(t') | g \rangle \\ &= -ie \alpha_{ag} \int_0^t dt' e^{i\omega_{ag} t'} E^{(+)}(r, t') \end{aligned} \quad (\text{II-13})$$

L'approximation qui consiste à ne garder que $E^{(+)}(r, t')$ dans le second membre de (II-13) (c-à-d à négliger $E^{(-)}$ dans $E = E^{(+)} + E^{(-)}$) est équivalente à celle qui consiste, dans l'équation (II-5) du § A 1, à négliger le 2^{ème} terme du crochet devant le 1^{er} : en effet, seul $E^{(+)}$, qui varie en $e^{-i\omega t'}$, pourra donner avec $e^{i\omega_{ag} t'}$ ($\omega_{ag} > 0$) des termes qui vont avoir un effet cumulatif dans l'intégrale sur t'

- On élève au carré le module de (II-13) et, seulement après, on prend la moyenne sur les réalisations de \mathcal{E} , ce qui donne

$$P_{g \rightarrow a}(t) = e^2 |\chi_{ag}|^2 \int_0^t dt' \int_0^t dt'' e^{i\omega_{ag}(t'-t'')} \overline{\mathcal{E}^{(-)}(r, t'')} \mathcal{E}^{(+)}(r, t') \quad (\text{II-14})$$

On voit apparaître ainsi la fonction de corrélation classique

$$\mathcal{G}^{(1)}(rt'', rt') = \overline{\mathcal{E}^{(-)}(r, t'')} \mathcal{E}^{(+)}(r, t') \quad (\text{II-15})$$

- Sommation sur les états finaux

(i) Détection à bande étroite. On ne collecte que les photoélectrons ayant une énergie bien définie Ω au dessus de g : $R_a = \delta(\Omega - \omega_{ag})$ le signal est alors proportionnel à

$$\int_0^t dt' \int_0^t dt'' e^{i\Omega(t'-t'')} \mathcal{G}^{(1)}(rt'', rt') \quad (\text{II-16})$$

Si le processus est stationnaire, c-à-d si $\mathcal{G}^{(1)}(rt'', rt') = \mathcal{G}^{(1)}(r, \tau)$ avec $\tau = t' - t''$, et si le temps d'observation t est long devant le temps de corrélation τ_c du champ (temps caractéristique de $\mathcal{G}^{(1)}(\tau)$), on montre aisément que (II-16) est égal à

$$t \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\Omega\tau} \mathcal{G}^{(1)}(r, \tau) \quad (\text{II-17})$$

Le taux de photoionisation par unité de temps, avec une détection à bande étroite, est proportionnel à la T.F. de la fonction de corrélation $\mathcal{G}^{(1)}$ du champ, prise à la fréquence Ω de détection, c-à-d encore à la puissance spectrale $P(\Omega)$ du champ

(ii) Détection à bande large: R_a dépend peu de E_a

- Multiplions (II-14) par R_a et sommions sur a . On obtient

$$P_{\text{ion}}(t) = \sum_a R_a P_{g \rightarrow a}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^t dt' \int_0^t dt'' \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega s(\omega) e^{i\omega(t'-t'')} \mathcal{G}^{(1)}(rt'', rt') \quad (\text{II-18})$$

où l'on a introduit la sensibilité spectrale $s(\omega)$ du détecteur définie par

$$s(\omega) = 2\pi e^2 \sum_a |\chi_{ag}|^2 R_a \delta(\omega - \omega_{ag}) \quad (\text{II-19})$$

$s(\omega)$ (qui est proportionnel à l'intégrale du produit des 2 courbes de la fig. 2) varie très lentement avec ω : échelle caractéristique Δ . Si Δ est grand devant l'inverse du temps de corrélation du champ incident, c-à-d grand devant la largeur spectrale du rayonnement étendue, on peut négliger la dépendance en ω de $s(\omega)$, et remplacer dans (II-18) $s(\omega)$ par une constante S [valeur de $s(\omega)$ pour la fréquence moyenne du champ]. L'intégrale sur ω de (II-18) donne alors $2\pi S \delta(t'-t'')$, et il vient

$$P_{\text{ion}}(t) = S \int_0^t dt' \mathcal{G}^{(1)}(rt', rt') \quad (\text{II-20})$$

- On obtient alors pour le taux de comptage $w_1(t)$ (plus précisément $w_1(t) dt$ est la probabilité de détecter un photoélectron entre t et $t+dt$)

$$w_1(t) = \frac{dP(t)}{dt} = S \mathcal{G}^{(1)}(rt, rt) = S \overline{\mathcal{E}^{(-)}(r, t) \mathcal{E}^{(+)}(r, t)} = S \overline{I(r, t)}$$

le taux de comptage est proportionnel à l'intensité du champ (II-2)

③ Calcul quantique : l'effet photoélectrique "avec photons" II-5

a) Opérateur champ - Hamiltonien du système global

- En théorie quantique, le champ électrique est représenté par un opérateur indépendant du temps en représentation de Schrödinger

$$E(r) = \sum_k N_k (a_k e^{ikr} + a_k^+ e^{-ikr}) \quad (\text{II-22})$$

a_k^+ et a_k : opérateurs création et annihilation d'un photon du mode k

- Le système global atome détecteur + champ est décrit par un hamiltonien indépendant du temps

$$H = H_A + H_R + V \quad (\text{II-23})$$

où $H_R = \sum_k \omega (a_k^+ a_k + \frac{1}{2})$ est l'hamiltonien du rayonnement et $V = -ex E(r)$ est l'interaction atome - champ (r : position du centre de gravité de l'atome)

- En représentation d'interaction, on se débarrasse de H_A et H_R mais V est remplacé par $\tilde{V}(t) = -e\tilde{x}(t) E(r,t)$ où

$$E(r,t) = e^{iH_R t} E(r) e^{-iH_R t} = \sum_k N_k [a_k e^{i(kr-\omega t)} + a_k^+ e^{-i(kr-\omega t)}] \quad (\text{II-24})$$

On notera la grande ressemblance entre (II-9) et (II-24). Ne pas oublier cependant que a_k et a_k^+ sont des nombres dans (II-9) alors que a_k et a_k^+ sont des opérateurs. On posera ici également

$$E^{(+)}(r,t) = \sum_k N_k a_k e^{i(kr-\omega t)} \quad E^{(-)}(r,t) = [E^{(+)}(r,t)]^\dagger \quad (\text{II-25})$$

Différence physique plus claire entre $E^{(+)}$ et $E^{(-)}$. $E^{(+)}$ est la composante de E qui détruit 1 photon (alors que $E^{(-)}$ en crée)

b) Éléments nouveaux par rapport aux calculs du § A2

- Étant donné la ressemblance entre (II-24) et (II-9), les 2 calculs se ressemblent beaucoup aux 2 points suivants près :

(i) $E^{(+)}$ est un opérateur alors que $\mathcal{E}^{(+)}$ est un nombre

(ii) Il faut ajouter les nombres quantiques du champ

$|i\rangle$ état initial du champ, $|f\rangle$ état final du champ

- Ainsi, il faut remplacer l'amplitude $\langle a | \tilde{U}(t,0) | g \rangle$ calculée en (II-13) par $\langle a f | \tilde{U}(t,0) | g i \rangle$. On obtient alors une expression identique à (II-13), moyennant le remplacement

$$\mathcal{E}^{(+)}(r,t') \longrightarrow \langle f | E^{(+)}(r,t') | i \rangle \quad (\text{II-26})$$

- Quand on calcule la probabilité, on a de même

$$\mathcal{E}^{(-)}(r,t'') \mathcal{E}^{(+)}(r,t') \longrightarrow \langle i | E^{(-)}(r,t'') | f \rangle \langle f | E^{(+)}(r,t') | i \rangle \quad (\text{II-27})$$

quel est alors l'équivalent dans le calcul quantique de la moyenne sur les réalisations possibles du champ ?

- Considérons d'abord l'état final $|f\rangle$ du champ. Comme on observe seulement l'état final de l'atome (on collecte

le photoelectron), on ne mesure pas $|f\rangle$. Il faut donc sommer sur tous les états $|f\rangle$ possibles, ce qui donne.

$$\sum_f \langle i | E^{(-)}(r, t'') | f \rangle \langle f | E^{(+)}(r, t') | i \rangle = \langle i | E^{(-)}(r, t'') E^{(+)}(r, t') | i \rangle \quad (\text{II-28})$$

Alors que les 2 éléments de matrice de (II-27) peuvent être écrits dans n'importe quel ordre (ce sont des nombres), la sommation sur f fait apparaître l'élément de matrice d'un produit de 2 opérateurs rangés dans un ordre bien défini, l'ordre normal, où les opérateurs d'annihilation sont à droite des opérateurs de créations.

- Reste enfin le problème de l'état initial $|i\rangle$. L'état initial du rayonnement n'est en général pas connu avec certitude. C'est un mélange statistique d'états $|i\rangle$ avec des poids π_i , décrit par l'opérateur densité
$$\rho_R = \sum_i \pi_i |i\rangle \langle i| \quad (\text{II-29})$$

Moyenner sur i revient alors à pondérer (II-28) par π_i et à sommer sur i , ce qui fait apparaître la fonction de corrélation quantique

$$G^{(1)}(r, t'', r, t') = \text{Tr}_R \left(\rho_R E^{(-)}(r, t'') E^{(+)}(r, t') \right) = \langle E^{(-)}(r, t'') E^{(+)}(r, t') \rangle \quad (\text{II-30})$$

- Les sommations sur l'état final de l'électron sont les mêmes qu'en A 2

c) Conclusion

Moyennant la correspondance

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{F. de corrélation classique} \\ G^{(1)}(r, t'', r, t') = \frac{E^{(-)}(r, t'') E^{(+)}(r, t')}{\dots} \end{array} \longleftrightarrow \begin{array}{l} \text{F. de corrélation quantique} \\ G^{(1)}(r, t'', r, t') = \langle E^{(-)}(r, t'') E^{(+)}(r, t') \rangle \end{array}}$$

les résultats des 2 calculs sont la même forme (II-31)

- Donc un PM à bande large a un temps de comptage proportionnel à $\langle E^{(-)}(r, t) E^{(+)}(r, t) \rangle$

- Un PM avec bande étroite (pour la collection du photoelectron) mesure la T.F. de la fonction de corrélation $\langle E^{(-)}(r, t) E^{(+)}(r, t+\tau) \rangle$

B_ Corrélation entre 2 photoionisations

① Position du problème

- On considère 2 atomes 1 et 2 situés aux points r_1 et r_2 et exposés à un rayonnement incident. On néglige toute interaction directe ou indirecte entre ces 2 atomes.

- Soit $w_2(r_1, t_1, r_2, t_2) dt_1 dt_2$ la probabilité pour que l'atome 1 soit ionisé entre t_1 et $t_1 + dt_1$ et l'atome 2 entre t_2 et $t_2 + dt_2$.

Peut-on relier $w_2(r_1, t_1, r_2, t_2)$ aux fonctions de corrélation du champ ?

La mesure de w_2 fournit elle des informations intéressantes, comparées à celle des taux de comptage à un temps $w_1(r, t)$ étudié au § A précédent (informations nouvelles ou plus faciles à obtenir ...)?

② Principales étapes du calcul

Nous nous contenterons de souligner les différences par rapport aux calculs du § A précédent. On considérera d'emblée le cas quantique en indiquant chaque fois le résultat semi-classique correspondant

Hamiltonien

$$H = H_{A1} + H_{A2} + H_R + \underbrace{V_1}_{-e x_1 E(r_1)} + \underbrace{V_2}_{-e x_2 E(r_2)} \quad (\text{II-32})$$

Amplitude

On cherche l'amplitude $\langle a_1, a_2 f | \tilde{U}(0, t) | g_1, g_2 i \rangle$
 (Entre 0 et t chaque atome est ionisé et le champ passe de i à f).

Comme il y a nécessairement 2 interactions avec le champ, il faut prendre le terme d'ordre 2 dans $\tilde{U}(0, t)$ (voir II-4) :

$$- \langle a_1, a_2 f | \int_{t'}^t dt'' \int_0^{t'} dt' \tilde{V}(t'') \tilde{V}(t') | g_1, g_2 i \rangle \quad (\text{II-33})$$

On ne s'intéresse pas aux processus où le champ interagit 2 fois avec le même atome. Comme $\tilde{V} = \tilde{V}_1 + \tilde{V}_2$, on peut dans (II-33) remplacer $\tilde{V}(t'') \tilde{V}(t')$ par $\tilde{V}_2(t'') \tilde{V}_1(t') + \tilde{V}_1(t'') \tilde{V}_2(t')$, ce qui donne pour (II-33) :

$$- e^2 \int_{t'}^t dt'' \int_0^{t'} dt' (x_1)_{a_1 g_1} (x_2)_{a_2 g_2} e^{i \omega_{a_1 g_1} t''} e^{i \omega_{a_2 g_2} t''} \langle f | E^{(+)}(r_2 t'') E^{(+)}(r_1 t') | i \rangle + \text{Termes analogues } 1 \rightleftharpoons 2 \quad (\text{II-34})$$

On a négligé les termes en $E^{(-)}$ qui donnent une contribution anti-résonnante négligeable.

Comme $E^{(+)}$ ne contient que des a^\dagger qui commutent entre eux, les deux $E^{(+)}$ du dernier terme commutent entre eux. En les changeant d'ordre dans la 1^{ère} ligne de (II-34) et en intervertissant t' et t'' dans cette 1^{ère} ligne, on peut regrouper ensuite les 2 lignes en s'affranchissant de toute restriction sur les bornes d'intégration, ce qui donne pour (II-34)

$$- e^2 \int_0^t dt'' \int_0^t dt' (x_1)_{a_1 g_1} (x_2)_{a_2 g_2} e^{i \omega_{a_1 g_1} t''} e^{i \omega_{a_2 g_2} t''} \langle f | E^{(+)}(r_2 t'') E^{(+)}(r_1 t') | i \rangle \quad (\text{II-35})$$

Dans le calcul semi-classique, le dernier terme est remplacé par $E^{(+)}(r_2 t'') E^{(+)}(r_1 t')$

Probabilité

$$P_{i g_1 g_2 \rightarrow f a_1 a_2}(t) = e^4 \int_0^t dt' \int_0^t dt'' \int_0^t dt''' \int_0^t dt'''' | (x_1)_{a_1 g_1} |^2 | (x_2)_{a_2 g_2} |^2 e^{i \omega_{a_1 g_1} (t' - t''''')} e^{i \omega_{a_2 g_2} (t'' - t''''')} \langle i | E^{(-)}(r_1 t''''') E^{(-)}(r_2 t''''') | f \rangle \langle f | E^{(+)}(r_2 t'') E^{(+)}(r_1 t') | i \rangle \quad (\text{II-36})$$

- Sommation sur les états jumeaux du champ que l'on n'observe pas et moyenne sur les états initiaux. Le dernier terme de (II-36) devient (grâce à la relation de fermeture sur f) la fonction de corrélation d'ordre 2

$$G^{(2)}(r_1 t''', r_2 t''', r_2 t'', r_1 t') = \langle E^{(-)}(r_1 t''') E^{(-)}(r_2 t''') E^{(+)}(r_2 t'') E^{(+)}(r_1 t') \rangle \quad (\text{II-37})$$

On notera là encore l'ordre normal des opérateurs (opérateurs d'annihilation à droite des opérateurs de création)

Le calcul semi-classique ferait apparaître

$$G^{(2)}(r_1 t''', r_2 t''', r_2 t'', r_1 t') = \overline{E^{(-)}(r_1 t''') E^{(-)}(r_2 t''') E^{(+)}(r_2 t'') E^{(+)}(r_1 t')} \quad (\text{II-38})$$

- Sommation sur a_1 et a_2 (états jumeaux des atomes)

Comme plus haut, $\sum_{a_1} R_{a_1} \rightarrow S \delta(t' - t''')$
 $\sum_{a_2} R_{a_2} \rightarrow S \delta(t'' - t''')$

de sorte que la probabilité d'avoir les 2 atomes ionisés à la fin de l'intervalle $(0-t)$ est égale à

$$S^2 \int_0^t dt' \int_0^t dt'' G^{(2)}(r_1 t', r_2 t'', r_2 t'', r_1 t') \quad (\text{II-39})$$

- Imaginons finalement qu'un obturateur masque le champ pour l'atome 1 à partir de t_1 et pour un autre pour l'atome 2 à partir de t_2 (avec t_1 et t_2 inférieurs à t). Le calcul précédent demeure valable à condition de remplacer V_1 et V_2 par $V_1 \Theta(t_1 - t)$ et $V_2 \Theta(t_2 - t)$ où Θ est la fonction d'Heaviside.

Pour obtenir la probabilité d'avoir l'atome 1 ionisé entre 0 et t_1 et l'atome 2 ionisé entre 0 et t_2 , il suffit alors de remplacer (II-39) par

$$S^2 \int_0^{t_1} dt' \int_0^{t_2} dt'' G^{(2)}(r_1 t', r_2 t'', r_2 t'', r_1 t') \quad (\text{II-40})$$

Finalement, en dérivant (II-40) par rapport à t_1 et t_2 , on obtient pour le taux $w_2(r_1 t_1, r_2 t_2)$ défini plus haut

$$\boxed{w_2(r_1 t_1, r_2 t_2) = S^2 G^{(2)}(r_1 t_1, r_2 t_2, r_2 t_2, r_1 t_1) = S^2 \langle E^{(-)}(r_1 t_1) E^{(-)}(r_2 t_2) E^{(+)}(r_2 t_2) E^{(+)}(r_1 t_1) \rangle} \quad (\text{II-41})$$

pour un champ quantique et

$$\boxed{w_2(r_1 t_1, r_2 t_2) = S^2 \overline{G^{(2)}(r_1 t_1, r_2 t_2, r_2 t_2, r_1 t_1)} = S^2 \overline{E^{(-)}(r_1 t_1) E^{(-)}(r_2 t_2) E^{(+)}(r_2 t_2) E^{(+)}(r_1 t_1)} = \overline{I(r_2 t_2) I(r_1 t_1)}} \quad (\text{II-42})$$

pour un champ classique

Les $E^{(+)}$ et les $E^{(-)}$, qui sont des nombres, peuvent être écrits dans n'importe quel ordre, ce qui permet de faire apparaître la fonction de corrélation de l'intervalle dans (II-42). Les $E^{(+)}$ et $E^{(-)}$ sont par contre des opérateurs qui ne commutent pas et l'ordre normal ne peut être changé dans (II-41)

Généralisation aisée à l'étude des corrélations entre N atomes.

C. Analogies et différences entre fonctions de corrélation classiques et quantiques

① Fonctions de corrélation classiques et distribution de probabilité $P(\{\alpha\})$

- Soit $\{\alpha\} = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \dots\}$ une réalisation possible des coefficients du développement (II-9) du champ sur les modes $1, 2, \dots, k, \dots$, et soit $P(\{\alpha\})$ la probabilité d'une telle réalisation. Plus précisément $P(\alpha_1, \alpha_2, \dots) d^2\alpha_1 d^2\alpha_2, \dots = P(\{\alpha\}) d^2\{\alpha\}$ est la probabilité d'avoir le coefficient du mode 1 entre α_1 et $\alpha_1 + d\alpha_1, \dots$

$$P(\{\alpha\}) \text{ réel, } \geq 0 \qquad \int d^2\{\alpha\} P(\{\alpha\}) = 1 \qquad \text{(II-43)}$$

- Nous noterons $E(r, t, \{\alpha\})$ le champ en r, t correspondant à la réalisation $\{\alpha\}$. $E(r, t, \{\alpha\})$ est donné par (II-9)

Pour calculer la valeur moyenne du produit d'un certain nombre de $E^{(+)}$ et $E^{(-)}$, on prend le produit de ces grandeurs évaluées pour la réalisation $\{\alpha\}$, on pondère par $P(\{\alpha\})$, et on intègre sur $\{\alpha\}$. Ainsi

$$G^{(1)}(r_2, t_2, r_1, t_1) = \int d^2\{\alpha\} E^{(-)}(r_2, t_2, \{\alpha\}) E^{(+)}(r_1, t_1, \{\alpha\}) P(\{\alpha\}) \qquad \text{(II-44)}$$

$$G^{(2)}(r_1, t_1, r_2, t_2, r_2, t_2, r_1, t_1) = \int d^2\{\alpha\} E^{(-)}(r_1, t_1, \{\alpha\}) E^{(-)}(r_2, t_2, \{\alpha\}) E^{(+)}(r_2, t_2, \{\alpha\}) E^{(+)}(r_1, t_1, \{\alpha\}) P(\{\alpha\})$$

② Représentation $P(\{\alpha\})$ de l'opérateur densité du champ quantique

- Soit $|\alpha_k\rangle$ un état propre de a_k de valeur propre α_k (états cohérents du mode k)

$$a_k |\alpha_k\rangle = \alpha_k |\alpha_k\rangle \qquad \langle \alpha_k | a_k^\dagger = \alpha_k^* \langle \alpha_k | \qquad \text{(II-45)}$$

- Supposons que l'état du champ soit un produit d'états cohérents de chaque mode

$$|\{\alpha\}\rangle = |\alpha_1\rangle |\alpha_2\rangle \dots |\alpha_k\rangle \dots \qquad \text{(II-46)}$$

On déduit alors de (II-25), (II-45) et (II-10) que

$$E^{(+)}(r, t) |\{\alpha\}\rangle = E^{(+)}(r, t, \{\alpha\}) |\{\alpha\}\rangle \qquad \text{(II-47)}$$

L'état $|\{\alpha\}\rangle$ est état propre de $E^{(+)}(r, t)$ avec pour valeur propre la valeur en r, t du champ classique $E^{(+)}$ associé à $\{\alpha\}$. En utilisant (II-47) et l'équation adjointe, on en déduit que la valeur moyenne dans l'état $|\{\alpha\}\rangle$ d'un produit normal de $E^{(-)}$ et $E^{(+)}$ n'est autre que le produit des champs classiques correspondants associés à $\{\alpha\}$. Ainsi, par exemple

$$\langle \{\alpha\} | E^{(-)}(r_2, t_2) E^{(+)}(r_1, t_1) | \{\alpha\} \rangle = E^{(-)}(r_2, t_2, \{\alpha\}) E^{(+)}(r_1, t_1, \{\alpha\}) \qquad \text{(II-48)}$$

- Dans un grand nombre de cas, l'opérateur densité ρ du champ peut être écrit comme une somme de projecteurs $|\{\alpha\}\rangle \langle \{\alpha\}|$:

$$\rho = \int d^2\{\alpha\} P(\{\alpha\}) |\{\alpha\}\rangle \langle \{\alpha\}| \qquad \text{(II-49)}$$

Le fait que $\rho = \rho^\dagger$ et que $\text{Tr} \rho = 1$ entraîne

$$P(\{\alpha\}) \text{ réel} \qquad \int d^2\alpha P(\{\alpha\}) = 1 \qquad \text{(II-50)}$$

Il faut noter cependant que $P(\{\alpha\})$ n'est pas nécessairement positif. $P(\{\alpha\})$ peut prendre des valeurs < 0 , ce qui montre que $P(\{\alpha\})$ est une densité de quasi-probabilité et non de probabilité.

Si $P(\{\alpha\})$ était une vraie densité de probabilité, cela voudrait dire que l'on peut mesurer simultanément la phase et l'amplitude d'un champ quantique (voir cours 1974-75 chapitre IV)

Enfin, pour certains états du champ quantique $P(\{\alpha\})$ n'existe pas (ou est trop singulière pour être utilisable).

③ Expression des fonctions de corrélation quantiques en fonction de $P(\{\alpha\})$ (quand $P(\{\alpha\})$ existe)

- Si $P(\{\alpha\})$ existe, on peut écrire, compte tenu de (II-49) et (II-48)

$$G^{(1)}(r_2, t_2, r_1, t_1) = \text{Tr}(\rho E^{(-)}(r_2, t_2) E^{(+)}(r_1, t_1)) = \int d^2\alpha \mathcal{E}^{(-)}(r_2, t_2, \{\alpha\}) \mathcal{E}^{(+)}(r_1, t_1, \{\alpha\}) P(\{\alpha\}) \quad (\text{II-51})$$

$$G^{(2)}(r_1, t_1, r_2, t_2, r_2, t_2, r_1, t_1) = \text{Tr}(\rho E^{(-)}(r_1, t_1) E^{(-)}(r_2, t_2) E^{(+)}(r_2, t_2) E^{(+)}(r_1, t_1)) \\ = \int d^2\alpha \mathcal{E}^{(-)}(r_1, t_1, \{\alpha\}) \mathcal{E}^{(-)}(r_2, t_2, \{\alpha\}) \mathcal{E}^{(+)}(r_2, t_2, \{\alpha\}) \mathcal{E}^{(+)}(r_1, t_1, \{\alpha\}) P(\{\alpha\})$$

- L'analogie entre les expressions (II-44) et (II-51) est frappante. Elle permet d'aboutir aux conclusions suivantes

(i) Si la représentation $P(\{\alpha\})$ existe, que $P(\{\alpha\})$ est positive et suffisamment régulière, les fonctions de corrélation quantiques peuvent être simulées par des fonctions de corrélation classiques. Il n'existe alors pas de différence entre les prédictions des 2 théories.

(ii) Si $P(\{\alpha\})$ est nettement différente d'une vraie densité de probabilité, par exemple si $P(\{\alpha\})$ prend des valeurs négatives, les 2 théories peuvent conduire à des prédictions nettement différentes.

Par exemple, c'est le caractère positif d'une vraie densité de probabilité qui entraîne que la moyenne du carré d'une grandeur est supérieure ou égale au carré de la moyenne. Une telle propriété n'est plus forcément vraie pour des "moyennes" calculées avec une densité de vraisemblance qui prend des valeurs négatives. Nous interpréterons plus loin de cette manière le fait que des champs quantiques puissent donner naissance à des "dégroupements" de photoélectrons contrairement aux champs classiques qui conduisent toujours à des "groupements".

D - L'effet Hanbury Brown et Twiss

Dans tout ce §, on se limite à des champs stationnaires : G^2 (ou G^2) ne dépend que de $\tau = t_2 - t_1$. Pour simplifier les notations, on écrit $G^2(r_1, t_1, r_2, t_2, r_1, t_1)$ sous la forme $G^2(r_1, r_2, \tau)$.

① Différents types d'expériences possibles

(PM : photomultiplicateur)
(C : corrélateur)

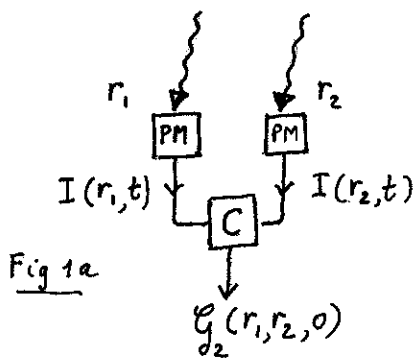


Fig 1a

Dépendance spatiale de G^2
 $t_1 = t_2 \quad r_1 \neq r_2$

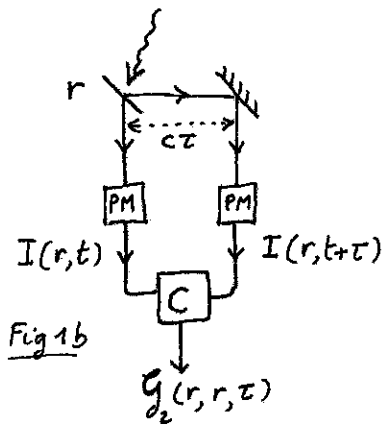


Fig 1b

Dépendance temporelle de G^2
 $t_1 \neq t_2 \quad r_1 = r_2$

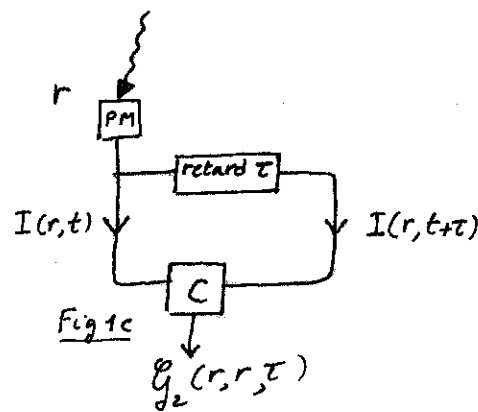


Fig 1c

Dépendance temporelle de G^2
Autre méthode

② Effet de "groupement" de photoelectrons pour une onde classique fluctuante : L'effet Hanbury Brown et Twiss "sans photons".

a) Explication simple de l'effet de groupement

- Considérons les expériences des fig. 1b et 1c et comparons la valeur des fonctions de corrélations classiques $G^2(r, r, \tau)$ en $\tau = 0$ et $\tau = \infty$

$$G^2(r, r, 0) = \overline{I(r, t) I(r, t)} = \overline{I^2} \quad (III-1)$$

$$G^2(r, r, \infty) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \overline{I(r, t) I(r, t + \tau)} \quad (III-2)$$

Or dès que $\tau > \tau_c$ (τ_c : temps de corrélation), les 2 valeurs de I à des instants distants de τ sont non corrélés et la valeur moyenne du produit est égale au produit des valeurs moyennes. Donc

$$G^2(r, r, \infty) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \overline{I(r, t)} \cdot \overline{I(r, t + \tau)} = (\overline{I})^2 \quad (III-3)$$

(On a utilisé la stationnarité : $\overline{I(r, t)}$ indépendant de t)

- Or la valeur moyenne du carré d'une grandeur classique est toujours supérieure au carré de la valeur moyenne

$$\overline{I^2} - \overline{I}^2 = \overline{(I - \overline{I})^2} \geq 0 \quad (III-4)$$

(Une variance classique est toujours ≥ 0). On en déduit, en comparant III-1 et III-3 à III-4, que :

$$G^2(r, r, 0) \geq G^2(r, r, \infty) \quad (III-5)$$

Une fois qu'on a détecté un photoelectron, on a ^(donc) plus (ou autant) de chances d'en détecter un autre tout de suite après que longtemps après. Les photoelectrons sont groupés dans le temps ("bunching")

- La même propriété est vraie pour l'expérience de la figure 1a. ($r_1 \neq r_2, t_1 = t_2$) si on admet de plus que $I(r)$ dépend peu de r .

$G_2(r_1, r_2, 0)$ est plus grand pour $r_1 = r_2$ ($G_2 = \overline{I(r_1)^2}$) que pour $|r_1 - r_2|$ grand [plus précisément pour $|r_1 - r_2|^2$ grand devant l'aire de cohérence de l'onde incidente], auquel cas $G_2 = \overline{I(r_1) I(r_2)} = (\overline{I(r_1)})^2$

- Le groupement temporel et spatial des photoelectrons (mis en évidence la 1^{ère} fois par Hantsburg Brown et Twiss) est parfois interprété en disant que les photons, étant des bosons, aiment "s'agglutiner".

L'interprétation donnée plus haut ne fait aucunement appel aux photons ni à leur caractère de bosons. Elle utilise seulement le fait qu'un signal de corrélation d'intensité est un signal non linéaire en I et que $\overline{I^2} \geq \overline{I}^2$

Comme l'effet photoélectrique, on peut donc comprendre l'effet Hantsburg Brown et Twiss sans faire appel au concept de photon.

b) Paramètre caractéristique du groupement : $g_2(0) - g_2(\infty)$

On se limite dans ce § à l'aspect temporel [figs 1b et 1c]

- Fonctions de corrélation normalisées

$$\begin{cases} g_1(\tau) = \frac{G_1(r, \tau)}{G_1(r, 0)} \\ g_2(\tau) = \frac{G_2(r, r, \tau)}{|G_1(r, 0)|^2} \end{cases} \quad (\text{rappelons que } G_1(r, \tau) = \overline{E^{(+)}(r, t) E^{(+)}(r, t+\tau)}) \quad (\text{III-6})$$

- On en déduit alors [comme $G_2(r, r, \infty) = |G_1(r, 0)|^2$ voir III-3)

$$g_2(0) - g_2(\infty) = g_2(0) - 1 = \frac{G_2(r, r, 0) - |G_1(r, 0)|^2}{|G_1(r, 0)|^2} = \frac{\overline{I^2} - \overline{I}^2}{\overline{I}^2} \quad (\text{III-7})$$

- On peut exprimer $G_2(r, r, 0)$ et $G_1(r, 0)$ au moyen de la densité de probabilité $P(\{\alpha\})$ [formule II-44]

$$\begin{aligned} G_2(r, r, 0) &= \int |\overline{E}^+(rt, \{\alpha\})|^4 P(\{\alpha\}) d^2\{\alpha\} \\ G_1(r, 0) &= \int |\overline{E}^+(rt, \{\alpha\})|^2 P(\{\alpha\}) d^2\{\alpha\} \end{aligned} \quad (\text{III-8})$$

Il est commode de passer de la densité de probabilité $P(\{\alpha\})$ de $\{\alpha\}$ à la densité de probabilité $P(J)$ de $J = |\overline{E}^+(rt)|^2$

$$P(J) = \int \delta(J - |\overline{E}(rt, \{\alpha\})|^2) P(\{\alpha\}) d^2\{\alpha\} \quad (\text{III-9})$$

Comme $P(\{\alpha\})$, $P(J)$ est une vraie densité de probabilité, définie ≥ 0 et d'intégrale égale à 1. En reportant (III-9) dans (III-8), on obtient

$$g_2(r, r, 0) = \int \gamma^2 \mathcal{P}(\gamma) d\gamma \quad g_1(r, 0) = \int \gamma \mathcal{P}(\gamma) d\gamma \quad (III-10)$$

et par suite

$$g_2(0) - g_2(\infty) = g_2(0) - 1 = \frac{\int d\gamma \mathcal{P}(\gamma) [\gamma - \int d\gamma' \gamma' \mathcal{P}(\gamma')]^2}{(\int d\gamma \gamma \mathcal{P}(\gamma))^2} \quad (III-11)$$

L'effet de groupement de photoelectrons, c-à-d le fait que $g_2(0) - g_2(\infty) \geq 0$, apparait clairement sur cette formule comme etant lie au caractere positif de $\mathcal{P}(\gamma)$

c) Comment pourraient se manifester des effets quantiques ?

Tous les calculs precedents peuvent etre repris dans le cadre d'une description quantique du champ.

D'apres les considerations du § C ci-dessus, toutes les formules etablies plus haut demeurent valables à condition de remplacer la densite de pble $\mathcal{P}(\{\alpha\})$ par la densite de quasi-pble $\mathcal{P}(\{\alpha\})$. En particulier, l'analogue de (III-9) s'ecrit

$$\mathcal{P}(\gamma) = \int \delta(\gamma - |\mathcal{E}(rt, \{\alpha\})|^2) \mathcal{P}(\{\alpha\}) d^2\{\alpha\} \quad (III-12)$$

et definit une fonction $\mathcal{P}(\gamma)$ qui est, comme $\mathcal{P}(\{\alpha\})$, une densite de quasiprobabilite, c-à-d pouvant prendre des valeurs negatives.

L'analogue de (III-11) s'ecrit enfin

$$g_2(0) - g_2(\infty) = g_2(0) - 1 = \frac{\int d\gamma \mathcal{P}(\gamma) [\gamma - \int d\gamma' \gamma' \mathcal{P}(\gamma')]^2}{(\int d\gamma \gamma \mathcal{P}(\gamma))^2} \quad (III-13)$$

Dans (III-13), toutes les quantites qui apparaissent sont positives, sauf eventuellement $\mathcal{P}(\gamma)$.

Si $g_2(0) - g_2(\infty)$ est strictement negatif, c-à-d si l'on observe un effet de "degroupement" ("antibunching"), ceci ne peut provenir que du fait que $\mathcal{P}(\gamma)$ est une quasiprobabilite et non une probabilite, prenant des valeurs negatives.

Toute observation d'un degroupement ne pourrait etre donc comprise classiquement et revelerait donc la nature quantique du champ arrivant sur le detecteur.

Il est amusant de constater que, dans les cas des experiences de correlations d'intensite, le caractere quantique du champ electromagnetique est revele non pas par le groupement mais par le degroupement des photoelectrons. Une analyse superficielle des phenomenes associerait le groupement au caractere boson des photons et excluerait le degroupement en l'associant de maniere exclusive et erronee à des fermions.

③ Cas des champs classiques gaussiens - Applications pratiques
de l'effet Hanbury Brown et Twiss

a) Importance des champs gaussiens

Champs émis par des sources chaotiques (décharges, étoiles...):
 superposition d'un très grand nombre de trains d'ondes.
 Théorème de la limite centrale → champ total gaussien

b) Définition des fonctions de corrélation normalisées dans le cas $r_1 \neq r_2, t_1 \neq t_2$

$$g_2(r, r_2, \tau) = \frac{g^{(2)}(r, r_1, r_2, t_2, r_2, t_2, r, t_1)}{g^{(1)}(r, t_1, r, t_1) g^{(1)}(r_2, t_2, r_2, t_2)} \quad \tau = t_2 - t_1 \quad (\text{III-14})$$

On normalise g_2 en divisant $g^{(2)}$ par le produit des intensités en r, t_1 et r_2, t_2 . On pose de même

$$g_1(r, r_2, \tau) = \frac{g^{(1)}(r, t_1, r_2, t_2)}{\sqrt{g^{(1)}(r, t_1, r, t_2) g^{(1)}(r_2, t_2, r_2, t_2)}} \quad (\text{III-15})$$

c) Utilisation de la propriété générale des fonctions gaussiennes

En utilisant (II-12), on obtient :

$$\begin{aligned} g^{(2)}(r, t_1, r_2, t_2, r_2, t_2, r, t_1) &= \overline{E^{(-)}(r, t_1) E^{(-)}(r_2, t_2) E^{(+)}(r_2, t_2) E^{(+)}(r, t_1)} = \\ &= \overline{E^{(-)}(r, t_1) E^{(+)}(r, t_1)} \overline{E^{(-)}(r_2, t_2) E^{(+)}(r_2, t_2)} + \overline{E^{(-)}(r, t_1) E^{(+)}(r_2, t_2)} \overline{E^{(-)}(r_2, t_2) E^{(+)}(r, t_1)} \\ &= g^{(1)}(r, t_1, r, t_1) g^{(1)}(r_2, t_2, r_2, t_2) + |g^{(1)}(r, t_1, r_2, t_2)|^2 \quad (\text{III-16}) \end{aligned}$$

On a utilisé la définition de $g^{(1)}$ et le fait que $E^{(-)} = (E^{(+)})^*$

En portant (III-16) dans (III-14) et en utilisant (III-15), on obtient finalement

$$\boxed{g_2(r, r_2, \tau) = 1 + |g_1(r, r_2, \tau)|^2} \quad (\text{III-17})$$

La mesure des corrélations d'intensité permet donc, dans le cas gaussien, d'obtenir simplement le module de la fonction de corrélation du champ classique.

d) 1^{ère} application : mesure de temps de corrélation longs

On prend $r_1 = r_2 = r$ [figs 1b ou 1c]. D'après III-15 pour $r_1 = r_2$ et $t_1 = t_2$ ($\tau = 0$), $g_1 = 1$: $g_1(r, r, 0) = 1$. On en déduit l'allure suivante pour $g_2(r, r, \tau)$ en fonction de τ (fig 2)

g_2 décroît de 2 à 1 sur un intervalle $\tau_c \approx \frac{1}{\Delta\nu}$ de l'ordre de l'inverse de la largeur spectrale $\Delta\nu$ du champ incident.

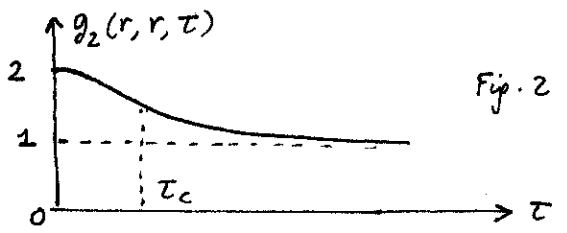


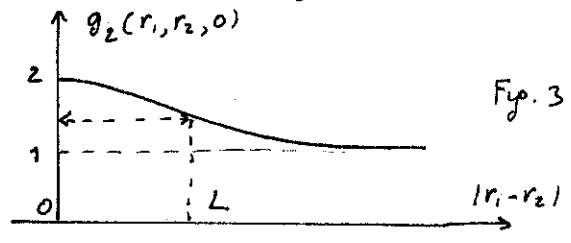
Fig. 2

Cette méthode est particulièrement intéressante quand τ_c est long (Δv trop petit pour pouvoir être mesuré par une analyse spectrale de la lumière)

e) 2^{ème} application : mesure du diamètre apparent des étoiles

On prend $t_1 = t_2$ ($\tau = 0$) (Fig 1a) et on étudie les variations de $g_2(r_1, r_2, 0)$ avec $|r_1 - r_2|$. Comme $g_2(r_1, r_2, 0) = 1$, on en déduit l'allure générale représentée sur la figure 3

g_2 décroît de 2 à 1 sur un intervalle de longueur L . L^2 représente l'aire de cohérence du champ dans un plan $\perp \hat{z}$ la direction moyenne de propagation du faisceau.



Si la lumière provient d'une étoile vue sous l'angle apparent θ , on montre aisément que, λ étant la longueur d'onde du rayonnement,

$$\theta \approx \frac{\lambda}{L} \quad (\text{III-18})$$

La mesure de la dépendance spatiale des corrélations d'intensité permet donc de mesurer L , et par suite de remonter à θ . Pour $\theta = 0,01''$, on a des longueurs L de l'ordre d'une dizaine de mètres.

On pourrait également mesurer directement g_1 en étudiant la visibilité de franges d'interférence obtenues en faisant interférer 2 ondes recueillies par 2 miroirs distants de p et en déterminant au bout de quelle distance ($p \approx L$) les franges disparaissent (méthode de Michelson)

La méthode de corrélation d'intensité semble plus commode pour les raisons suivantes (*):

- difficulté de faire de l'interférométrie avec des bases L de plusieurs mètres (**), (stabilité mécanique, thermique...)
- les fluctuations de l'atmosphère affectent beaucoup plus le champ que l'intensité (introduction de déphasage différents sur les 2 bras de l'interféromètre)

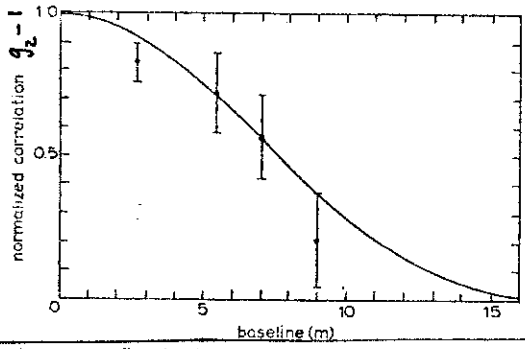


Fig 4. Exemple de résultat obtenu par Hanbury Brown et Twiss sur l'étoile Sirius A. θ correspond à $0,0069''$

Proc. Roy. Soc. A 248, 235 (1958)

(*) Elle ne s'applique cependant qu'à des étoiles suffisamment brillantes (voir remarque ii de la page suivante)

(**) En radioastronomie, on peut faire des corrélations d'intensité avec des bases de plusieurs kilomètres ("synthèse et supersynthèse d'ouverture")

Remarques

(i) Que se passe-t-il lorsque la surface S des photocathodes est supérieure à l'aire de cohérence σ ?

Comme on mesure les signaux non pas avec des atomes détectés unipolaires, mais avec des surfaces de photocathode comprenant un grand nombre d'atomes, il faut sommer les fonctions G^2 correspondant à toutes les paires d'atomes possible, l'un sur une photocathode, l'autre sur l'autre

$$\sum_i \sum_j G^{(2)}(r_i, t_1, r_j, t_2, r_i, t_1)$$

En remplaçant les sommes discrètes par des intégrales et en utilisant la dernière ligne (III-16), on obtient

$$\iint dr dr' \left\{ G^{(1)}(r, t_1, r', t_1) G^{(1)}(r', t_2, r, t_2) + |G^{(1)}(r, t_1, r', t_2)|^2 \right\} \quad (\text{III-19})$$

Si l'intensité lumineuse moyenne ne varie pas sur la surface S de la photocathode (on suppose par contre $S > \sigma$), la double intégrale du 1^{er} terme de (III-19) fait apparaître un facteur S^2 alors que celle du 2^{em} terme [après changement de variables $r, r' \rightarrow r, r-r'$] fait apparaître un facteur $S\sigma$.

Quand on augmente S , le fond constant, sans intérêt physique (1^{er} terme de III-19) augmente comme S^2 , et donc le bruit associé comme $\sqrt{S^2} = S$, alors que le signal intéressant (2^o terme de III-19) augmente comme S . On ne gagne donc pas en signal sur bruit. Il n'y a donc aucun intérêt à augmenter trop l'angle solide de détection. Il faut le choisir de manière que l'aire de détection soit égale à l'aire de cohérence σ .

(ii) Que se passe-t-il lorsque le temps de réponse θ de l'électronique est supérieur au temps de corrélation τ_c du champ?

Un raisonnement très analogue au précédent montre qu'il faut "lisser" la dépendance temporelle de $G^{(2)}$, c-à-d remplacer t_1 et t_2 par t et t' et faire l'intégrale $\frac{1}{\theta^2} \int_{t_1}^{t_1+\theta} dt \int_{t_2}^{t_2+\theta} dt'$. Si $\theta < \tau_c$ rien n'est changé, mais si $\theta > \tau_c$, on trouve que le fond constant de $G^{(2)}(r_1, r_2)$ reste le même alors que l'amplitude de la courbe utile au dessus du fond est réduite par un facteur τ_c/θ .

Si l'on veut ~~se~~ mesurer le diamètre apparent d'une étoile au moyen de corrélations d'intensité, il ne faut donc pas opérer en lumière blanche, mais filtrer en fréquence la lumière qui arrive de manière à avoir un temps de corrélation pas trop court. Ceci réduit le flux lumineux et fait que la méthode de Hardbury Brown et Tavis n'est applicable qu'aux étoiles brillantes.

Par contre, il est toujours possible d'observer des franges d'interférence ordinaires en lumière blanche, ce qui rend la méthode de Michelson supérieure pour l'étude des étoiles peu brillantes à condition toutefois de remédier aux inconvénients mentionnés à la fin de la page (III-5). Des progrès très importants ont été réalisés dans cette direction au cours de la dernière décennie: contrôle par laser des variations de chemin optique et correction, utilisation de l'interférométrie à fibres optiques ("speckle interferometry") conjuguée à des caméras électroniques très rapides pour éliminer l'effet des fluctuations de l'atmosphère (voir A. Labeyrie, La Recherche n° 67, mai 1976, page 421)

④ Absence d'effet Hanbury Brown et Twiss pour un faisceau laser

Lorsqu'on est suffisamment au dessus du seuil, le champ issu d'un laser est stabilisé en amplitude. L'intensité I ne fluctue pas et reste constante. La fonction de corrélation $\overline{I(r,t_1)I(r,t_2)}$ ne dépend pas de $t_2 - t_1$, et par suite la courbe de la figure 2 se réduit alors à une horizontale d'ordonnée 1

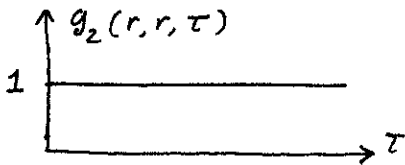


Fig. 5

La phase peut par contre diffuser, ce qui est à l'origine d'une largeur spectrale finie $\Delta\nu$ de l'onde laser. Un champ gaussien de même largeur spectrale donnerait un effet de groupement (figure 2 avec $\tau_c \approx 1/\Delta\nu$)

On voit ainsi qu'on peut très bien imaginer 2 champs de même largeur spectrale, c-à-d de même g_1 , mais conduisant à des corrélations d'intensité complètement différentes.

E - Comptage de photoelectrons

Le problème est de déterminer la probabilité $p(n, T)$ de détecter n photoelectrons dans un intervalle T .

Pour simplifier, on ne présentera ici que les calculs semi-classiques. Les formules exactes résultent d'ailleurs simplement du remplacement de $P\{\{x\}\}$ par $P\{\{\alpha\}\}$ dans les expressions semi-classiques correspondantes.

① Cas d'une intensité I constante

- Divisons l'intervalle $t, t+T$ en N intervalles égaux Δt

$$T = N \Delta t \quad (\text{III-20})$$

- La probabilité de détecter un photoelectron dans l'un de ces intervalles est, d'après II-21, égale à $s I \Delta t$ celle de ne pas en détecter un égale à $(1 - s I \Delta t)$

La probabilité de détecter n photoelectrons dans l'intervalle $t, t+T$ est donc donnée par une loi binomiale

$$p(n, T) = C_n^N (s I \Delta t)^n (1 - s I \Delta t)^{N-n} = \frac{N!}{n!(N-n)!} (s I \Delta t)^n (1 - s I \Delta t)^{N-n} \quad (\text{III-21})$$

- Limite $N \rightarrow \infty$ ($\Delta t \rightarrow 0$)

$$\frac{N!}{(N-n)!} \rightarrow N^n$$

$$(1 - s I \Delta t)^{N-n} \rightarrow \left(1 - \frac{s I T}{N}\right)^N \rightarrow e^{-s I T} \quad (\text{III-22})$$

- En reportant (III-22) dans (III-21) et en utilisant (III-20), on obtient finalement

$$p(n, T) = \frac{\mu^n}{n!} e^{-\mu} \quad \text{avec } \mu = sIT \quad (\text{II-23})$$

c.-à.-d. une loi de Poisson de paramètre μ , ou $\mu = sIT$ est le nombre moyen de photoélectrons dans l'intervalle T

② Cas d'une intensité $I(t)$ fluctuante avec $T \ll \tau_c$

- Comme T est très inférieur à τ_c , on peut considérer que, pendant l'intervalle T , l'intensité I du champ ne fluctue pas et reste constante. D'une réalisation du champ à l'autre, I change cependant, la distribution de probabilité $P(I)$ de I étant donnée par (III-9)

Pour chaque valeur possible de I , constante dans l'intervalle T , on a donc une loi de Poisson donnée par (II-23) qui a pour moyenne sur toutes les valeurs possibles de I , pondérées par $P(I)$:

$$p(n, T) = \int dI P(I) \frac{(sIT)^n}{n!} e^{-sIT} \quad (\text{II-24})$$

On notera l'intervention des probabilités à 2 stades : même si I est bien défini, n est une variable aléatoire (le processus d'ionisation est aléatoire ; on ne peut prédire avec certitude quand il va se produire). Les fluctuations de I entraînent un caractère aléatoire supplémentaire

- Cas particulier d'un champ gaussien. La distribution de probabilité de \mathcal{E} est alors gaussienne en $e^{-|\mathcal{E}|^2 / I_0}$ et par suite celle de $I = |\mathcal{E}|^2$ exponentielle

$$P(I) = \frac{1}{I_0} e^{-I/I_0} \quad (\text{II-25})$$

En reportant (II-25) dans (II-24), on obtient après des intégrales élémentaires

$$p(n, T) = \frac{\mu_0^n}{(1 + \mu_0)^{n+1}} \quad \text{avec } \mu_0 = sI_0 T \quad (\text{II-26})$$

c.-à.-d. une loi de Bose-Einstein de paramètre $\mu_0 = sI_0 T$

③ Cas d'une intensité $I(t)$ fluctuante avec T quelconque

- Commençons par calculer $p(n, T)$ pour une réalisation bien définie de l'intensité, c.-à.-d. pour une certaine fonction $I(t)$ considérée comme certaine.

Le raisonnement du § 1 se généralise aisément : on divise l'intervalle T en N intervalles égaux, on calcule la probabilité d'avoir n succès et $N-n$ échecs et on passe à la limite $N \rightarrow \infty$ [voir le calcul détaillé dans : L. Mandel, Progress in Optics, Vol II, 1963 p. 181, Appendice page 242]

On trouve le résultat suivant. Si l'on pose

$$\Omega(T) = s \int_t^{t+T} I(t') dt' \quad (\text{II-27})$$

on a pour $p(n, T)$ une loi de Poisson de paramètre $\Omega(T)$

$$p(n, T) = \frac{[\Omega(T)]^n}{n!} e^{-\Omega(T)} \quad (\text{II-28})$$

- Il faut ensuite moyenner sur toutes les réalisations possibles de l'intervalle. Pour cela, il est commode d'introduire la distribution de probabilité $\mathcal{P}(\Omega', T)$ de $\Omega(T)$ par une démarche identique à celle qui conduit à la formule (III-9). On a ainsi

$$\mathcal{P}(\Omega', T) = \int \delta \left[\Omega' - s \int_t^{t+T} |E(r, \{\alpha\})|^2 \right] \mathcal{P}(\{\alpha\}) d^2\{\alpha\} \quad (\text{II-29})$$

d'où l'on déduit finalement la loi de Poisson composée

$$p(n, T) = \int d\Omega' \mathcal{P}(\Omega', T) \frac{(\Omega')^n}{n!} e^{-\Omega'} \quad (\text{II-30})$$

- le calcul quantique de $p(n, T)$ est présenté dans les références

R. Glauber . Les Houches 1964 Quantum Optics and Electronics
page 176

R. Glauber Physics of Quantum Electronics (eds Kelley,
Lax, Tannenwald) Mc Graw Hill 1966 p. 788

P.L. Kelley, W.H. Kleiner, Phys Rev A 316, 136 (1964)

le résultat est très simple : il suffit de remplacer dans (II-30) la densité de probabilité $\mathcal{P}(\Omega', T)$ par la densité de quasiprobabilité $P(\Omega', T)$ définie par une équation identique à (II-29) au remplacement de $\mathcal{P}(\alpha)$ par $P(\alpha)$ près.

- Quelques applications du comptage de photoélectrons à l'étude expérimentale de la statistique du rayonnement laser ont été décrites dans le cours 1978-79 (voir pages X-5 à X-7)

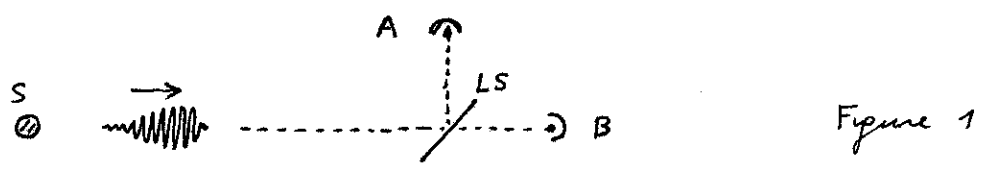
Quelques tests expérimentaux du caractère quantique du rayonnement

Buts de ce chapitre.

- Décrite 2 expériences où les signaux de photodétection observés violent des inégalités établies à partir des expressions semi-classiques de ces signaux (photodétecteurs excités par des ondes classiques).
Donner ainsi 2 exemples concrets de situations où le champ émis par des atomes et arrivant sur les photodétecteurs ne peut être correctement représenté par une onde électromagnétique classique.
- Nous verrons en fait que les écarts entre prévisions semi-classiques et quantiques ne sont spectaculaires que pour le rayonnement émis par un seul atome source. Ceci nous amènera donc à discuter, à partir d'un modèle simple de source, les contributions aux signaux de détection des processus faisant intervenir un ou plusieurs atomes sources. Cette analyse nous conduira en particulier à une interprétation physique plus profonde de l'effet Hantsburg Brown et Twiss.

A. Une expérience idéale

Commençons par analyser une situation où les descriptions semi-classique et quantique conduisent à des prédictions nettement opposées.



Considérons un atome S initialement excité qui se désexcite en émettant du rayonnement. Ce rayonnement, divisé par une lame séparatrice LS, tombe sur 2 photomultiplicateurs A et B disposés symétriquement par rapport à LS (Fig. 1).

(i) Prédictions semi-classiques

Le rayonnement émis par l'atome, considéré comme un paquet d'ondes classiques, est divisé en 2 par LS et excite simultanément les 2 atomes A et B.

Il y a donc une probabilité non nulle pour que les 2 atomes A et B soient ionisés simultanément.

(ii) Prédictions de la théorie quantique du rayonnement

L'état du champ après l'émission de S ne contient qu'un seul photon. Il peut être absorbé soit par A, soit par B, mais jamais par A et B à la fois. A et B ne peuvent pas être ionisés tous les deux

En d'autres termes, plus qualitatifs, le paquet d'ondes associé au photon est divisé en 2 par LS, mais pas le photon qui est absorbé soit par A, soit par B.

Remarque : point de vue "source-field"

le champ émis par S et agissant sur A et B à l'instant t est proportionnel au dipôle de S à l'instant $t - r/c$, $X_S(t - \frac{r}{c})$, où r est le chemin optique $SA = SB$. L'hamiltonien d'interaction est donc proportionnel à

$$X_S(t - \frac{r}{c}) X_A + X_S(t - \frac{r}{c}) X_B \quad (IV-1)$$

(IV-1) A $t=0$, le système global S+A+B est dans l'état $|e_S g_A g_B\rangle$ (atome S dans l'état excité e_S , atomes A et B dans l'état fondamental g). Par suite des règles de sélection de X, l'hamiltonien ne peut coupler (au 1^{er} ordre) cet état initial qu'aux états $|g_S a_A g_B\rangle$ ou $|g_S g_A a_B\rangle$ (à état excité, y compris du continuum), et jamais à $|g_S a_A a_B\rangle$

Donc l'approche "source-field" conduit à la même prédiction que la théorie quantique du rayonnement (*).

L'expérience de la figure 1 semble évidemment difficilement réalisable. Observer une seule émission d'un seul atome poserait des problèmes expérimentaux très ardues dans le domaine optique (on arrive certes maintenant à détecter la lumière émise par un seul atome, mais cet atome est excité en permanence par un laser et réémet en permanence de la lumière).

On peut alors songer à faire l'expérience de la figure 1 avec une source émettant en régime stationnaire un ensemble de trains d'ondes. Il faudrait étudier le temps de coïncidence entre A et B, et voir si on peut en extraire des informations sur le processus élémentaire analysé ci-dessus, c-à-d sur l'effet de l'excitation simultanée de A et B par un même train d'ondes élémentaire. La difficulté est bien sûr qu'il faut tenir compte du fait que A et B peuvent être en plus excités par 2 trains d'ondes différents qui se recouvrent et qui proviennent de 2 atomes différents de la source.

Avant de décrire les diverses expériences qui ont été réalisées, il semble donc intéressant d'analyser un peu plus en détail le rayonnement en provenance d'une source, de manière à bien discerner les deux processus physiques qui interviennent. Par exemple, dans le chapitre précédent, nous avons relié l'effet Hanbury Brown et Twiss (groupement spatio-temporel des photoélectrons) aux fluctuations d'intensité (au fait que $I^2 \geq \bar{I}^2$). Peut-on comprendre cet effet en faisant intervenir les trains d'ondes émis par la source? Le groupement fait-il intervenir l'excitation simultanée des 2 atomes détecteurs par le même train d'ondes ou fait-il intervenir plusieurs atomes de la source?

(*) Notons toutefois que le raisonnement précédent suppose implicitement que, lors de l'évolution de l'atome S sous l'effet de l'émission spontanée, $X_S(t)$ reste un opérateur purement atomique. Nous reviendrons plus tard sur les difficultés associées à un tel point de vue.

Enfin, on pourrait se dire qu'il serait plus simple de commencer par étudier les corrélations d'intensité sur le rayonnement de fluorescence provenant d'un atome unique excité en permanence par une irradiation laser résonnante. En fait, dans les expériences qui ont été réalisées à ce jour sur ce problème, le nombre d'atomes dans le volume d'observation n'est pas 1 avec certitude. Il fluctue. Il est donc nécessaire de savoir calculer les effets à 2, 3... atomes de manière à pouvoir extraire des courbes expérimentales les informations sur la fluorescence à un seul atome.

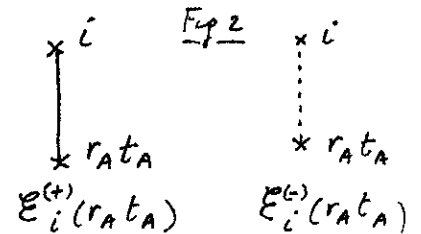
B. Analyse des signaux de détection pour un modèle simple de source.

Nous mènerons la discussion sur les signaux de détection semi-classiques. Les différences entre les 2 types de signaux seront mentionnées au fur et à mesure.

① Hypothèses - Notations.

- Source formée de N atomes, identiques, notés $1, 2, \dots, i, \dots, N$, répartis aléatoirement dans un volume $V \gg \lambda^3$.
Atomes supposés immobiles pour simplifier (quelques remarques l'ont parfois sur l'effet du mouvement)

- On note $E_i^{(+)}(r_A, t_A)$ le champ rayonné en r_A, t_A par l'atome i et on le représente par un trait plein joignant i à r_A, t_A (Fig. 2)



$E_i^{(-)}(r_A, t_A)$ est représenté par un trait tireté

- Atomes supposés indépendants les uns des autres. Excités par des processus microscopiques (collisions...) différents les uns des autres (*). On néglige en particulier tout couplage entre les atomes par l'intermédiaire du rayonnement (superradiance...)

Conséquence : la moyenne du produit de grandeurs relatives à des atomes différents est égale au produit des valeurs moyennes

$$\overline{E_i E_j} = \overline{E_i} \overline{E_j} \quad \overline{E_i E_j E_i} = \overline{E_i} \overline{E_i} \overline{E_j} \quad (IV-2)$$

- Le champ rayonné par un atome a une valeur moyenne nulle

$$\overline{E_i} = 0 \quad (IV-3)$$

En effet, l'atome i est excité par un processus aléatoire (*) de sorte que la phase de son dipôle n'a pas une valeur bien définie

(*) Voir la remarque (ii) du § 2 suivant pour la discussion du cas où les atomes sont excités par une onde laser cohérente

② Structure de $G^{(1)}(r_A t_A, r_B t_B)$

IV-4

Représentation graphique des divers termes

$$G^{(1)}(r_A t_A, r_B t_B) = \left(\sum_i E_i^{(-)}(r_A t_A) \right) \left(\sum_j E_j^{(+)}(r_B t_B) \right) \quad (IV-4)$$

- En utilisant la représentation graphique de la figure 2, on obtient



- Cas particuliers $r_A t_A = r_B t_B = r t$



Élimination des termes α à 2 atomes sources

D'après (4-2) les 2 contributions α et α' sont proportionnelles à $\overline{E_i E_j}$ et nulles d'après (IV-3). Il reste β ou β'

Variation avec r_A, t_A, r_B, t_B

- Le terme β' est égal à $\overline{I_i}(r t)$ qui varie peu avec $r t$ et avec i . La somme sur i de β' varie peu avec $r t$.
- Dans β les chemins $i-r_A t_A$ et $i-r_B t_B$ correspondent à des déphasages différents qui ne se compensent pas. La somme sur i de β tend vers 0 quand $|r_A - r_B|^2 \gg \sigma$ (aire de cohérence) et $|t_A - t_B| \gg \tau_c$ (temps de corrélation)

Remarques

(i) On peut se convaincre aisément que le temps τ_c associé à β est sensible à l'élargissement inhomogène (largeur Doppler par exemple si les atomes sont en mouvement)

(ii) Supposons que les atomes soient excités par une onde laser cohérente. Chaque dipôle a alors une composante vibrant en phase avec le laser. On ne peut donc plus considérer que les atomes sont indépendants les uns des autres et que le champ moyen rayonné par i est nul. Peut-on alors négliger α' devant β' (et α devant β) ?

En fait, nous supposons qu'on observe le rayonnement diffusé non pas dans la direction du laser, mais dans une direction différente. Le déphasage entre $i-r t$ et $j-r t$ dans α' varie alors aléatoirement d'un couple $i-j$ à l'autre. On pourrait penser que la somme de tous ces termes est nulle. En fait, il y a $N(N-1)$ couples i, j et la somme de $N(N-1)$ nombres complexes de phase aléatoire a un module de l'ordre de $\sqrt{N(N-1)} \sim N$ (marche au hasard de N^2 pas dans le plan complexe)

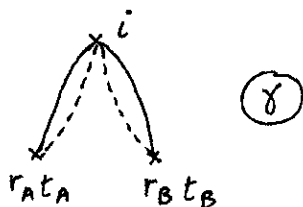
A priori, on ne peut donc pas négliger α' devant β' qui est lui aussi en N . Mais le point important est que la somme sur i, j de α' oscille vite avec r et a donc une intégrale nulle sur la surface S de la cathode, ce qui n'est pas le cas de β'

③ Structure de $Q^{(2)}(r_{A^+}, r_{B^+}, r_{B^-}, r_{A^-})$

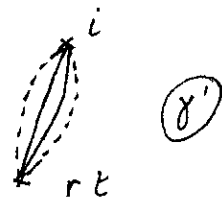
On peut écrire pour $Q^{(2)}$ une équation analogue à (IV-1), et représenter graphiquement les divers termes de la quadruple somme. De r_{A^+} doivent partir un trait plein et un trait tiré (il y a un E^+ et un E^- pour r_{A^-}). Il en est de même pour r_{B^+} . De plus, tous les diagrammes où, d'un point source i , part un seul trait, sont nuls ($\vec{E}_i^+ = \vec{E}_i^- = 0$). [le raisonnement de la remarque ii) du § précédent peut se généraliser à $Q^{(2)}$ dans le cas d'une excitation laser cohérente]

On en déduit qu'il ne peut y avoir que des termes à 1 et à 2 atomes sources

Termes à 1 atome source

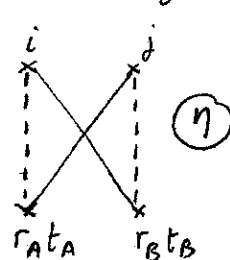
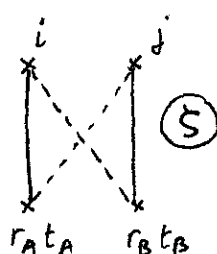
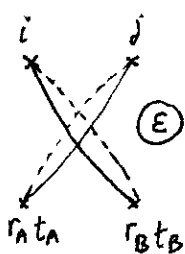
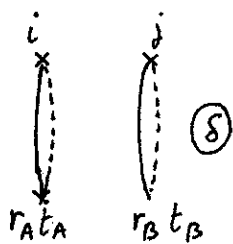


Cas particuliers $r_{A^+} = r_{B^+} = r_t$

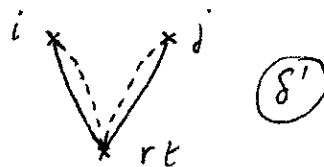


Termes à 2 atomes sources

on dessine tous les diagrammes correspondant à une paire i, j



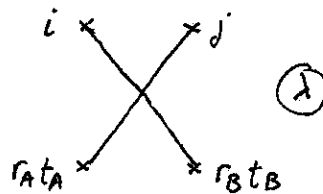
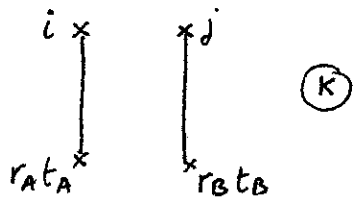
Cas particuliers $r_{A^+} = r_{B^+} = r_t$
Les 4 termes précédents deviennent identiques



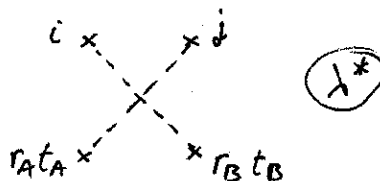
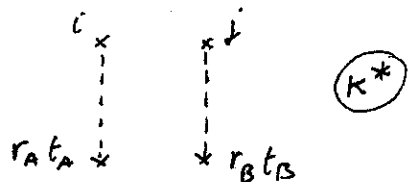
④ Contributions à $Q^{(2)}$ des processus à 2 atomes sources

a) Interprétation physique de l'effet de groupement (effet H-B T)

- Fixons i, j, r_{A^+}, r_{B^+} . La somme des 4 contributions $\delta, \epsilon, \xi, \eta$ peut être considérée comme étant le carré du module de la somme de 2 amplitudes κ et λ



En effet, prendre le complexe conjugué de κ et λ revient à remplacer les traits pleins par les traits



et on voit immédiatement que

$$(\kappa + \lambda)(\kappa^* + \lambda^*) = \underbrace{\kappa\kappa^*}_{\delta} + \underbrace{\lambda\lambda^*}_{\epsilon} + \underbrace{\kappa\lambda^*}_{\xi} + \underbrace{\kappa^*\lambda}_{\eta}$$

ξ et η représentant donc les interférences entre κ et λ .

- les modules de κ et λ sont assez voisins l'un de l'autre (pourvu que $r_{A^T A}$ et $r_{B^T B}$ ne soient pas trop éloignés). Par contre, leur différence de phase varie beaucoup plus vite avec l'écart entre $r_{A^T A}$ et $r_{B^T B}$.

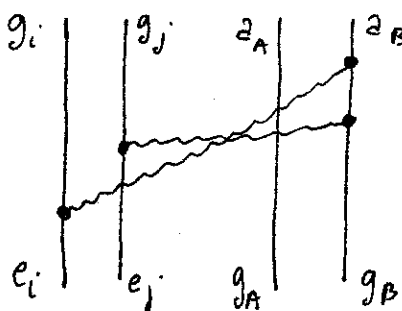
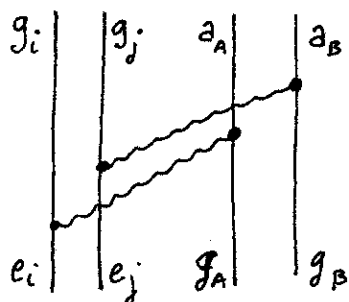
Quand $r_{A^T A} = r_{B^T B}$, $\kappa = \lambda$ et la somme $\delta + \epsilon + \xi + \eta$ est égale à $|2\kappa|^2 = 4\rho^2$ où ρ est le module de κ et λ . Par contre, quand $r_{B^T B}$ s'éloigne de $r_{A^T A}$, un déphasage apparaît entre κ et λ et $|\kappa + \lambda|^2$ devient inférieure à $4\rho^2$.

On aboutit ainsi à une interprétation physique plus profonde de l'effet H-B T discuté dans le chapitre précédent : l'effet H-B et T est lié à une interférence entre 2 amplitudes associées à 2 processus

1^{er} processus : le rayonnement de i excite A, celui de j B

2^{em} processus : le rayonnement de i excite B, celui de j A

b) le même raisonnement demeure valable en théorie quantique et est illustré par les 2 diagrammes de Feynman ci-dessous



On a 2 chemins partant du même état initial : atome

i et j dans l'état excité e , atomes A et B dans l'état fondamental et aboutissant au même état final : i et j dans g , A et B dans a et i et A d'une part, j et B de l'autre échangent un photon dans le 1^{er} chemin ; i et B , j et A dans le 2^{ème} (*)

c) Sommation sur toutes les paires d'atomes sources

Jusqu'ici nous avons fixé i et j . Si on somme sur toutes les paires i et j , on trouve aisément que δ et E varient peu avec $r_A - r_B$ et $t_A - t_B$, alors que ξ et η tendent vers 0 quand $|r_A - r_B|^2 \gg \sigma$, $|t_A - t_B| \gg t_c$.

Ceci entraîne (voir remarques page III-7) que l'intégration sur la surface S de la photocathode multiplie δ et E par S^2 ξ et η par $S\sigma$ (si $S \gg \sigma$)

Enfin, à la limite $N \rightarrow \infty$, on peut négliger les N termes à 1 atome source devant les $N(N-1)$ termes à 2 atomes source. On peut également oublier la restriction $i \neq j$ qui figure dans la somme sur i et j de δ, E, ξ, η . On retrouve alors pour $G^{(2)}$ la formule (III-16) établie plus haut pour un champ classique gaussien.

⑤ Contribution à $G^{(2)}$ des processus à un atome source

Ce sont ceux qui sont intéressants pour la distinction entre prévisions semi-classiques et quantiques

a) Allure de l'intensité $I_i(t)$ émise par un atome donné i

Le processus ⑧ décrit une excitation double produite par le rayonnement provenant du même atome i

Considérons tout d'abord l'intensité émise par un même atome i au cours du temps (Fig. 3). De temps en temps, i est excité dans la décharge, émet un train d'ondes et retombe dans l'état fondamental, puis est excité de nouveau réémet un 2^{ème} train d'ondes... et ainsi de suite.

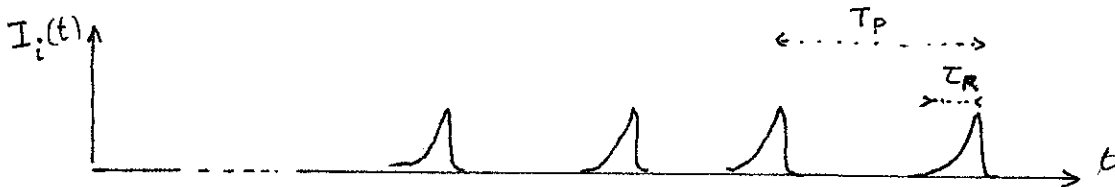


Fig. 3

La durée de chaque train d'ondes est la durée de vie radiative T_R de l'état excité, le temps moyen T_p entre 2 trains d'ondes est de l'ordre du temps de pompage de l'atome i ($1/T_p$ est la proba par unité de temps d'excitation de i). Dans une source ordinaire, peu intense, $T_p \gg T_R$, et les divers trains d'onde émis par un même atome source

(*) Voir U. FANO, Am. J. Phys. 29, 539 (1961)

sont bien séparés en moyenne

Remarques

(i) - En fluorescence laser résonnante intense, l'image précédente n'est plus valable. L'atome i oscille de manière cohérente entre g et e à la "fréquence de Rabi".

Comme chaque atome émet alors une lumière appréciable, on peut effectuer l'expérience sur un très petit nombre d'atomes émetteurs ($N \approx 1, 2, 3$). Nous reviendrons ultérieurement sur le calcul quantique de $\langle Y \rangle$ dans ce cas.

(ii) Le temps T_R qui intervient ici n'est pas sensible à la largeur inhomogène. C'est la durée de vie de e (éventuellement raccourcie par collisions).

b) Prédictions semi-classiques.

Supposons r_A et r_B proches. Si $|t_A - t_B| < T_R$, les 2 détections peuvent alors avoir lieu pendant le passage du même train d'onde et la probabilité d'une coïncidence est élevée. Si, par contre, $|t_A - t_B| \gg T_R$, les coïncidences dues à un même atome source i ne peuvent provenir que de l'excitation des 2 atomes détecteurs par 2 trains d'ondes différents émis par le même atome source i . Le temps de coïncidence varie alors peu avec $t_A - t_B$.

En résumé, la théorie semi-classique prévoit pour les processus à un atome source un groupement, centré en $t_A = t_B$, de largeur T_R , au dessus d'un fond plat.

Il est clair également que si l'on est loin de la source, le train d'onde recouvre latéralement une large région de l'espace, sa longueur cT_R est importante, et l'intégrale sur la surface S des photocathodes de la contribution de $\langle Y \rangle$ fait apparaître un terme S^2 .

c) Prédictions quantiques.

Une fois que le photon arrive à un train d'ondes a été détecté, ce train d'ondes est "épuisé" et ne peut plus donner naissance à une autre détection.

On ne prévoit donc pas de groupement. Bien plus, le calcul quantique (qui sera fait ultérieurement) prévoit un dégroupement. Il y a dans le temps de coïncidence un trou allant de 0 pour $t_A = t_B$ et remontant jusqu'à un plateau quand $t_A - t_B$ augmente, l'échelle de temps étant T_p pour le processus étudié ici. Qualitativement, on peut dire que la 1^{ère} détection projette l'atome source i dans l'état fondamental g et qu'il lui faut ensuite un temps T_p pour être reexcité et pouvoir émettre un 2^{ème} photon.

Comme plus haut, l'arc de cohérence n'intervient pas ici et le signal est proportionnel à S^2 .

⑥ Récapitulation et conclusion.

IV-9

- (i) L'effet de groupement H-B T est un effet d'interférence lié à des processus à 2 atomes sources.
Il peut être interprété aussi bien classiquement que quantiquement.
- (ii) Les différences entre prédictions semi-classiques et quantiques ne sont spectaculaires que pour les processus à 1 atome source. La théorie semi-classique prévoit un groupement, la théorie quantique un dégroupement.
Pour ne pas être gêné par les processus à 2 atomes sources, qui sont N fois plus nombreux, il faut donc opérer avec N aussi petit que possible : sources faibles, ou mieux fluorescence laser d'un jet atomique et observation d'un tout petit volume, ou mieux encore fluorescence laser d'un ion unique piégé.
- (iii) Il faut réduire au maximum l'effet de groupement H-B T de manière à ne pas gêner l'observation du groupement ou dégroupement éventuel, due à des processus à 1 atome source. Comme l'effet H-B T disparaît quand les 2 détecteurs ne sont pas dans la même aie de cohérence, alors que les processus à 1 atome source ne sont pas sensibles à l'aie de cohérence, on a intérêt à prendre $S \gg \sigma$, ou mieux à prendre 2 cathodes distinctes n'ayant aucune aie de cohérence commune.

C. Première tentative expérimentale de Adam, Janossy et Varga

Une première tentative expérimentale a été faite en 1955 [A. Adam, L. Janossy, P. Varga : *Acta Physica Hungaria* 4, 301 (1955) et *Ann. Physik* 16, 408 (1955)]. Le schéma du montage expérimental est analogue à celui de la figure 1 à part que S est une source (et non un atome unique) filtrée en fréquence par un monochromateur. Ne voyant aucun groupement, les auteurs concluent à l'échec de la théorie semi-classique.

Cette expérience a été analysée de manière critique par Clauser [J. F. Clauser, *Phys. Rev. D* 9, 853 (1974)] qui est arrivé à la conclusion que le rapport signal sur bruit était insuffisant : le temps de collection de la lumière, calculé par les auteurs, est surestimé par un facteur 100 et il aurait fallu d'après Clauser, un temps de mesure considérablement plus long ($\sim 10^5$ sec !) pour pouvoir écarter avec certitude la présence d'une bosse dans $G^{(2)}(\tau)$.

Clauser (même référence et § D suivant) a réalisé une expérience différente et beaucoup plus convaincante, où il utilise des cascades radiatives. L'intérêt d'une cascade est que le signal de corrélation entre les 2 photons d'une cascade est fait intervenir des processus à 1 atome source : Ce sont les 2 photons λ_1 et λ_2 émis en cascade par le même atome qui sont corrélés. Si on observe avec un bon rapport signal sur bruit un tel signal, on doit être capable de voir aussi le groupement prévu par la théorie semi-classique pour les photoionisations produites par λ_1 tout seul ou λ_2 tout seul.

Quelques tests expérimentaux du caractère quantique du rayonnement (suite)

D - Expérience de Clauser⁽¹⁾ [J.F. Clauser Phys. Rev. D 9, 853 (1974)]
Référence (1)

① Idee générale de l'expérience

Soit une source de mercure S émettant (Figure 1) un rayonnement à $\lambda_1 = 5676 \text{ \AA}$ et un rayonnement à $\lambda_2 = 4358 \text{ \AA}$. Ces rayonnements sont respectivement filtrés par les filtres F_1 et F_2 et envoyés par les lames séparatrices LS_1 et LS_2 sur 2 paires de PM, γ_{1A} et γ_{1B} pour λ_1 , γ_{2A} et γ_{2B} pour λ_2 , disposés symétriquement par rapport à LS_1 et LS_2 (Figure 2)

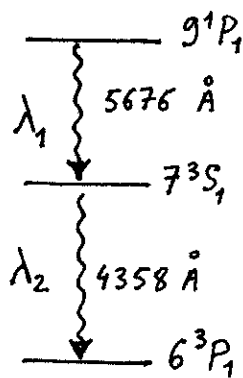


Fig. 1

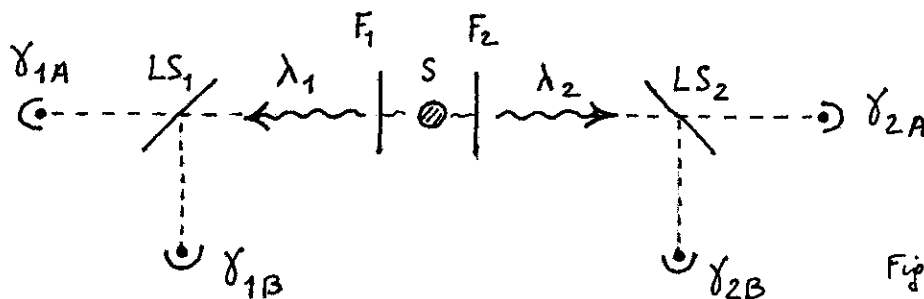


Fig. 2

Le principe de l'expérience consiste à comparer le signal de corrélation entre les 2 voies λ_1 et λ_2 ($\gamma_{1A} - \gamma_{2B}$ par exemple ou $\gamma_{1B} - \gamma_{2A}$) aux signaux de corrélation sur la même voie λ_1 ($\gamma_{1A} - \gamma_{1B}$) ou λ_2 ($\gamma_{2A} - \gamma_{2B}$)

Le signal de corrélation $\lambda_1 - \lambda_2$ vient de processus à 1 atome source (voir fin du § C). Si on le voit, on doit voir aussi les signaux de corrélation $\lambda_1 - \lambda_1$ ou $\lambda_2 - \lambda_2$ dus à un seul atome source.

Le § 2 suivant précise cette idée de manière quantitative et indépendamment de tout modèle précis de source.

② Inégalité prédite par la théorie semi-classique.

- Soient $I_1(t)$ et $I_2(t)$ les intensités émises par la source dans les voies λ_1 et λ_2 . Dans ce §, on traite $I_1(t)$ et $I_2(t)$ comme 2 fonctions aléatoires classiques et on ne fait aucune hypothèse sur les propriétés statistiques de $I_1(t)$ et $I_2(t)$, si ce n'est la stationnarité.

- Soient α_{1A} , α_{1B} , α_{2A} , α_{2B} les efficacités des 4 photomultiplicateurs (dépendant de leurs rendements quantiques et des coefficients de réflexion et de transmission de LS_1 et LS_2). D'après les résultats d'un chapitre précédent, la probabilité de détecter un photoélectron en γ_{1A} à l'instant t et un autre en γ_{2B} à l'instant $t+\tau$, (-à-d le temps de coïncidence retardé $C_{1A, 2B}(\tau)$, est donné par

$$C_{1A, 2B}(\tau) = \alpha_{1A} \alpha_{2B} \overline{I_1(t) I_2(t+\tau)} \quad (IV-1)$$

On a de même

$$C_{1B\ 2A}(\tau) = \alpha_{1B} \alpha_{2A} \overline{I_1(t) I_2(t+\tau)}$$

$$C_{1A\ 1B}(\tau) = \alpha_{1A} \alpha_{1B} \overline{I_1(t) I_1(t+\tau)} \quad (V-2)$$

$$C_{2A\ 2B}(\tau) = \alpha_{2A} \alpha_{2B} \overline{I_2(t) I_2(t+\tau)}$$

(V-2)

- Écrivons alors que la moyenne du carré de l'expression $\lambda I_1(t) + \mu I_2(t+\tau)$ est positive ou nulle quelle que soient λ et μ . En écrivant que le discriminant de l'équation du second degré ainsi obtenue en λ/μ est négatif, on établit l'inégalité suivante (démonstration analogue à celle de l'inégalité de Schwarz)

$$\overline{I_1(t) I_1(t)} \overline{I_2(t+\tau) I_2(t+\tau)} \geq \overline{I_1(t) I_2(t+\tau)} \overline{I_1(t) I_2(t+\tau)} \quad (V-3)$$

En multipliant les 2 membres de (V-3) par $\alpha_{1A} \alpha_{1B} \alpha_{2A} \alpha_{2B}$, et en utilisant (V-1) et (V-2), on obtient finalement

$$C_{1A\ 1B}(0) C_{2A\ 2B}(0) \geq C_{1A\ 2B}(\tau) C_{1B\ 2A}(\tau) \quad (V-4)$$

La généralisation de la discussion qualitative du § précédent est donc que le produit des taux de coïncidence "carrés" (sur une même voie) est supérieure ou égale au produit des taux de coïncidence "rectangles".

Remarque : l'inégalité (V-4) demeure valable lorsqu'on tient compte du temps de réponse fini de l'électronique et de la surface des photocathodes.

③ Résultats expérimentaux

Ils sont représentés sur la figure 2 ci-dessous extraite de (1)

Ils montrent clairement (fig. 9) que l'inégalité (V-4) est violée pour τ compris entre 0 et 20 nsec. Le rayonnement émis par la source ne peut donc être considéré comme un champ classique. De plus, le test est indépendant de tout modèle de source.

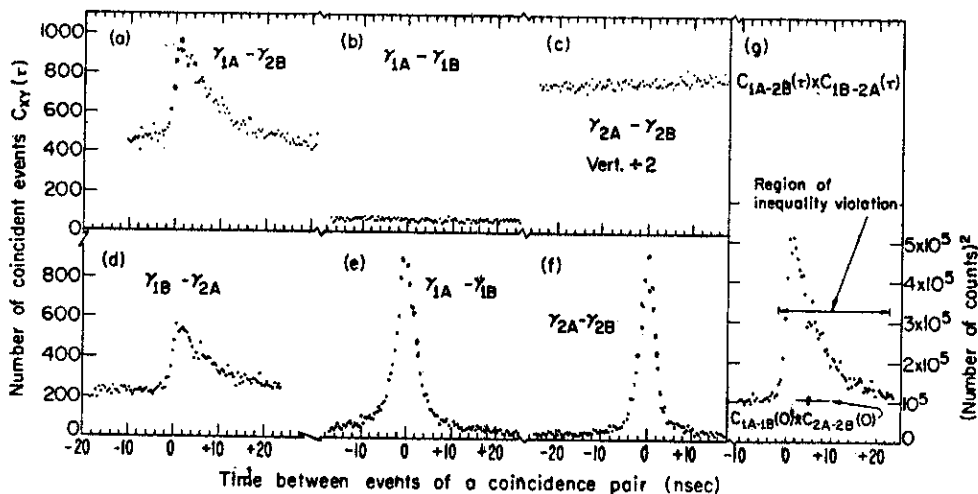


FIG. 3. (a)-(d) Time-delay coincidence spectra of the four monitored channels: C_{1A-2B} , C_{1A-1B} , C_{2A-2B} , and C_{1B-2A} . (e)-(f) C_{1A-1B} and C_{2A-2B} coincidence spectra in response to short pulses of light incident upon beam splitters produced by a barium titanate source. (g) Product of C_{1A-2B} and C_{1B-2A} versus time delay. For small times this clearly exceeds the indicated value of the product C_{2A-2B} and C_{1A-1B} evaluated at zero delay.

Fig. 2
(extraite de la référence 1)

E - Etude expérimentale des corrélations d'intensité sur la fluorescence de résonance d'un jet atomique irradié par un laser Observation d'un dégroupement.

① Références expérimentales.

(Les références théoriques seront données dans le chapitre suivant)

- Référence 2 . Première publication expérimentale sur le sujet
H.J. Kimble, M. Dagenais, L. Mandel
Phys. Rev. Lett. 39, 691 (1977)
- Référence 3 . Voir aussi les résultats expérimentaux du groupe de H. Walther à Garching, non encore publiés, mais représentés sur la figure 5 de l'article de revue de D.F. Walls, Nature 280, 451 (1979).
- Référence 4 . Cette référence attire l'attention sur le fait que le nombre N d'atomes n'est pas égal à 1 avec certitude, et que les fluctuations (poissonniennes) de N peuvent fausser le résultat
(1978)
E. Jakeman, E.R. Pike, P.N. Pusey, J.M. Vaughan J. Phys A 11, L121
- Référence 5 . Réplique des auteurs de (2) qui montrent qu'ils peuvent tenir compte des fluctuations de N et de plusieurs autres corrections
Mêmes auteurs que (2). Phys. Rev. A 18, 201 (1978)
- Référence 6 . Article expérimental détaillé complétant (2) et (5)
M. Dagenais, L. Mandel Phys. Rev. A 18, 2217 (1978)

② Montage expérimental

Représenté sur la figure 3 (extraite de [6])

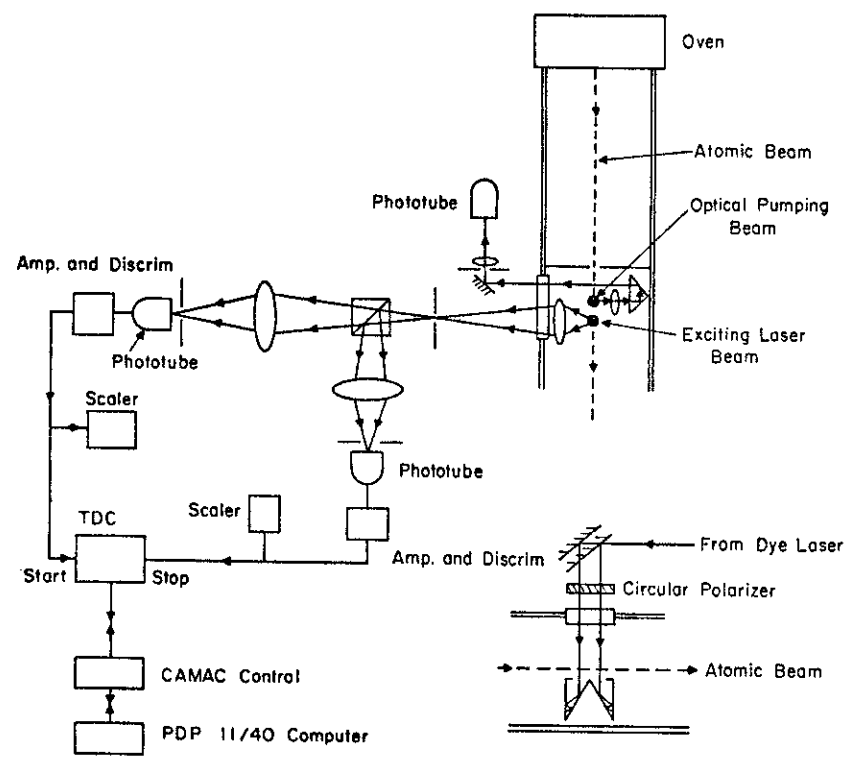


FIG. 1. Outline of the apparatus. The inset in the lower-right-hand corner of the figure shows the exciting light beams, which lie in a plane perpendicular to the atomic and fluorescent beams.

Fig. 3

- (i) Le jet atomique est préalablement pompé optiquement par le faisceau de pompage, polarisé en σ^+ , qui pompe les atomes de sodium dans le sous-niveau $F=2, m_F=2$ de l'état fondamental. Le laser d'excitation, centré sur D_2 , et lui aussi polarisé en σ^+ , ne couple cet état qu'au sous-niveau $F=3, m_F=3$ de l'état excité $3P_{3/2}$.
On a donc un vrai système à 2 niveaux

- (ii) Le signal mesuré est un signal "start-stop". On mesure la distribution $n(\tau)$ des intervalles de temps séparant une impulsion observée sur un détecteur et l'impulsion suivante observée sur l'autre détecteur.

$n(\tau)$ est donc proportionnelle à la probabilité conditionnelle pour qu'après avoir détecté un photoelectron sur une voie, la première photoelectron détectée ensuite sur l'autre voie survienne un temps τ après. Comme on explore une faible zone de valeurs de τ (~ 100 nsec), on montre aisément que $n(\tau)$ est proportionnelle à la probabilité de détecter un photoelectron sur une voie à l'instant t et un autre photoelectron sur l'autre voie à l'instant $t+\tau$, ce qui n'est autre que $G^{(2)}(t, t+\tau)$.

③ Exemple de résultats expérimentaux bruts

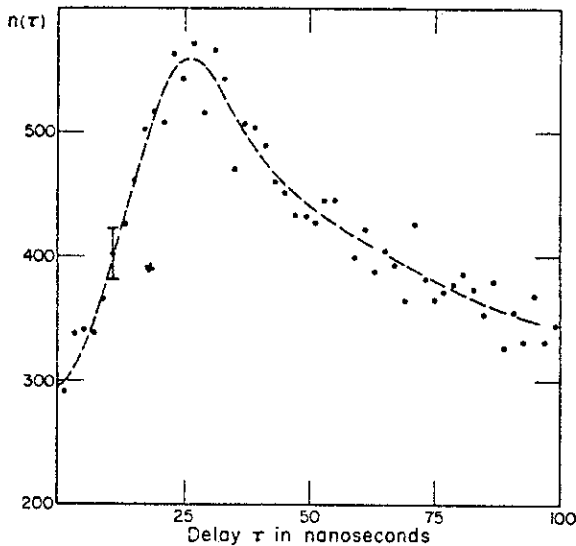


FIG. 2. The number of recorded pulse pairs $n(\tau)$ as a function of the time delay τ in nanoseconds. The growth of $n(\tau)$ from $\tau=0$ shows antibunching. The bars on one point indicate statistical uncertainties corresponding to one standard deviation. The broken line just outlines the trend.

Figure 4.
Premiers résultats expérimentaux publiés (extraite de [2])

Commentaires

- (i) $n(\tau)$, c-à-d encore $G^{(2)}(\tau)$, est une fonction croissante de τ au voisinage de $\tau=0$ ("antibunching"). La théorie semi-classique, qui prévoit une fonction non croissante est donc mise en défaut. Cet argument semble convaincant malgré les critiques de la référence [4] qui objecte que $n(0)$ n'est pas clairement inférieur à $n(\infty)$.

(ii) Pourquoi $n(\tau)$ décroît pour les grandes valeurs de τ ? [V-5]

Tout simplement à cause du temps de vol fini de chaque atome dans la zone d'observation (vitesse thermique $\sim 10^5$ cm/sec, région observée ~ 0.1 mm \rightarrow temps d'observation ~ 100 nsec). On ne peut donc observer un même atome plus de 100 nsec.

Pourquoi ne pas augmenter la zone d'observation? On augmente la contribution des effets à plusieurs atomes (et la lumière parasite!).

④ Résultats expérimentaux corrigés - Comparaison avec la théorie.

Dans [5] et [6], il est tenu compte

- de la contribution des processus à 2 atomes sources (pour une distribution poissonienne du nombre d'atomes dans la zone d'observation).
- de l'effet du temps de vol fini (pour une répartition maxwellienne des vitesses).
- de la lumière parasite.

Des courbes brutes est extraite la contribution des processus à 1 atome source. Sur les figures 5 et 6 (extraites de [6]), on représente les variations avec τ de la fonction de corrélation normalisée $g_2(\tau)$ [notée $1 + \lambda(\tau)$] relative à 1 seul atome source, pour diverses valeurs du rapport Ω/β [Ω : fréquence de Rabi, $\beta \sim$ largeur naturelle du niveau excité]

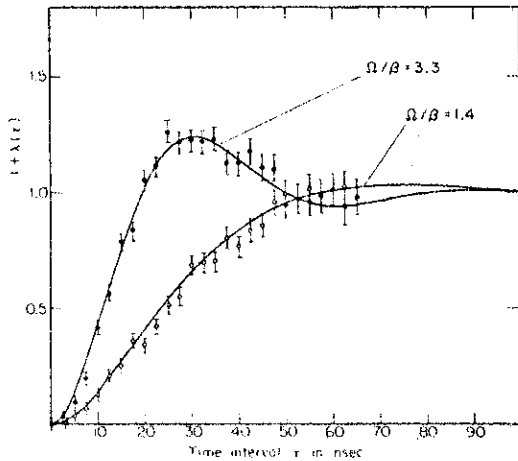


FIG. 3. Comparison of the correlation function $1 + \lambda(\tau)$ derived from the measurements with the theoretical curve given by Eq.(9), for two different values of Ω/β on resonance. A few experimental points have been omitted where they fall on top of others.

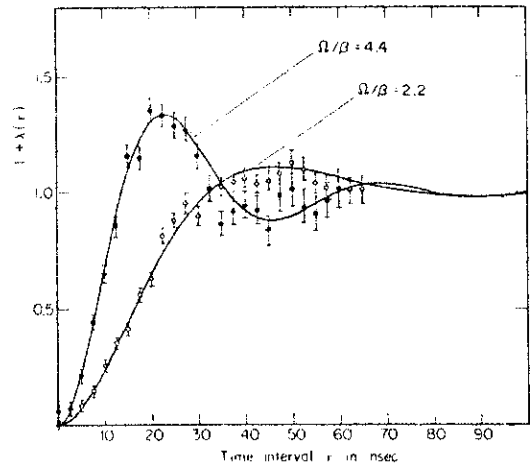


FIG. 4. Comparison of the correlation function $1 + \lambda(\tau)$ derived from the measurements with the theoretical curve given by Eq.(9), for two different values of Ω/β on resonance. A few experimental points have been omitted where they fall on top of others.

Figure 5 (extraite de [6])

Figure 6 [extraite de [6]]

Il ressort clairement qu'en $\tau = 0$ le dégroupement est total :

$g_2(0) = 0$. Pour $\tau \rightarrow \infty$, on obtient bien $g_2(\tau) \rightarrow 1$ la précision est moins bonne quand τ est grand (à cause de l'effet temps de vol). L'accord théorie - expérience est néanmoins très bon.

L'interprétation théorique de l'effet de dégroupement et des oscillations apparaissant quand l'intensité du laser augmente sera abordée ultérieurement.

Interprétation quantique des signaux de corrélation d'intensité sur la lumière émise par un atome unique

Buts de ce chapitre .

- Montrer comment la théorie quantique du rayonnement permet de rendre compte quantitativement des observations expérimentales décrites dans le chapitre précédent
 - Dégroupement de photoélectrons pour la fluorescence de résonance laser d'un atome unique .
 - Signaux de cascade radiative .
- Donner les grandes lignes du calcul : Discuter les approximations sur lesquelles il repose (approximations de "mesure courte") . Interpréter les résultats obtenus en termes de "sauts quantiques" de l'atome associés à la détection du 1^{er} photoélectron .

① Analyse des différentes interactions subies par l'atome émetteur

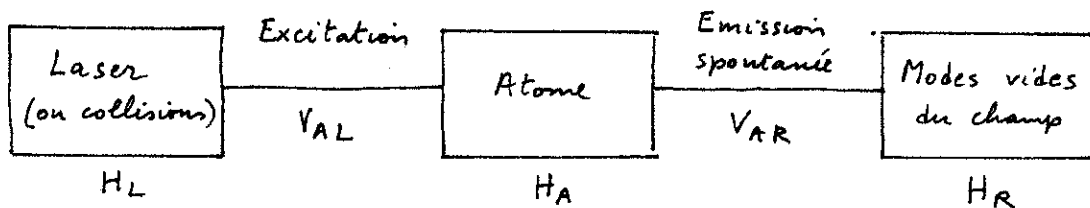


Fig. 1

L'atome émetteur, supposé unique, d'hamiltonien H_A , est soumis à 2 types d'interactions .

- L'interaction V_{AR} avec tous les modes, initialement vides, du champ électromagnétique quantique (hamiltonien H_R) . Cette interaction est à l'origine de l'émission spontanée de rayonnement par l'atome, c'est d'ailleurs sur ce rayonnement qu'on effectue les mesures de corrélation d'intensité décrites dans le chapitre précédent .
- L'interaction V_{AL} avec le laser incident qui excite en permanence l'atome. (L'excitation laser peut bien sûr être remplacé par une excitation collisionnelle) .

a) L'interaction avec les modes vides du champ quantique .

- Bien que ne contenant aucun photon, chaque mode vide, de fréquence ω , est le siège de fluctuations de champ de fréquence ω , auxquelles l'atome est sensible. (Dans l'état fondamental d'un oscillateur harmonique quantique, $\langle x \rangle = 0$ mais $\langle x^2 \rangle \neq 0$) .
- Comme il y a une infinité de modes vides, et par suite une infinité de fréquences ω , l'atome "voit" une perturbation fluctuant très vite (La densité spectrale de cette perturbation varie en ω^3 , un facteur ω^2 provenant de la densité spectrale des modes, le facteur ω supplémentaire étant dû au fait que le champ électrique dans le mode ω varie en $\sqrt{\omega}$) .
- L'analyse de l'interaction d'un atome avec le vide du rayonnement quantique conduit donc à l'image suivante, celle d'un

"petit" système, l'atome A (petit parce que ayant seulement une ou deux fréquences propres importantes pour les problèmes considérés ici), couplé à un "grand" réservoir, le vide du rayonnement quantique R (grand, parce que ayant une infinité de fréquences propres), la "force" exercée par R sur A fluctuant très vite et ayant par suite une "mémoire" très courte.

b) L'interaction avec le mécanisme excitateur

- Dans le cas d'une excitation laser monomode, l'un des modes du champ n'est pas vide mais contient des photons.

- On peut montrer (voir cours 1976-77, pages VII-1 à VII-9) que, si l'état de ce mode est un état cohérent (état quasi-classique), il est rigoureusement équivalent de décrire l'excitation de l'atome de manière classique. Plus précisément, l'excitation est correctement décrite si l'on rajoute à l'hamiltonien atomique H_A la perturbation dépendant du temps

$$V(t) = -D E_L \cos \omega_L t \quad (VI-1)$$

décrivant l'interaction du dipôle atomique (opérateur D) avec un champ classique d'amplitude E_L et de fréquence ω_L .

- Bien sûr, on peut conserver une description quantique du champ laser, auquel cas c'est le système atome + mode laser interagissant mutuellement et d'hamiltonien global $H_L + H_A + V_{AL}$ (atome "habillé" par les photons laser) qui interagit avec le vide.

Pour ce qui suit, le point fondamental est l'interaction de l'atome avec le vide du rayonnement quantique.

② L'approximation de mémoire courte

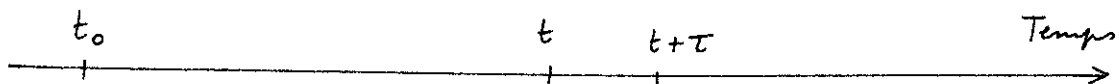


Fig. 2

- Soit t_0 un temps suffisamment éloigné dans le passé où le paquet d'ondes (décrit classiquement) qui va exciter l'atome n'est pas encore arrivé sur lui, et où le système A + R peut être décrit par un opérateur densité factorisé

$$\sigma(t_0) = \sigma_A \sigma_R \quad \text{avec } \sigma_R = |0\rangle\langle 0| \quad (VI-2)$$

($|0\rangle$ est le vide quantique. L'atome, étant dans l'état fondamental $|g\rangle$, est décrit par $\sigma_A = |g\rangle\langle g|$)

- A l'instant t , l'opérateur densité est devenu

$$\sigma(t) = U(t, t_0) \sigma(t_0) U^\dagger(t, t_0) \quad (VI-3)$$

où $U(t, t_0)$ est l'opérateur d'évolution entre t_0 et t

- Si l'on ne s'intéresse qu'à des grandeurs atomiques, on peut, au lieu de $\sigma(t)$, utiliser l'opérateur densité "réduit" $\sigma_A(t)$ obtenu en "traçant" $\sigma(t)$ par rapport aux variables de R :

$$\sigma_A(t) = \text{Tr}_R \sigma(t) \tag{VI-4}$$

- On peut aussi bien sur relier directement $\sigma(t+\tau)$ à $\sigma(t)$ par l'opérateur d'évolution $U(t+\tau, t)$

$$\sigma(t+\tau) = U(t+\tau, t) \sigma(t) U^\dagger(t+\tau, t) \tag{VI-5}$$

et calculer $\sigma_A(t+\tau)$ en fonction de $\sigma(t)$

$$\sigma_A(t+\tau) = \text{Tr}_R \left\{ U(t+\tau, t) \sigma(t) U^\dagger(t+\tau, t) \right\} \tag{VI-6}$$

- Approximation 1

L'évolution de l'atome dans le futur de t , entre t et $t+\tau$, avec $\tau > 0$, est due en particulier à la force exercée par R sur A entre t et $t+\tau$.

Cette force fluctue très vite et a une mémoire très courte, caractérisée par le temps de corrélation τ_c

Les corrélations existant entre A et R à l'instant t et traduites mathématiquement par le fait que

$$\sigma(t) \neq \text{Tr}_R \sigma(t) \otimes \text{Tr}_A \sigma(t) \tag{VI-7}$$

ne peuvent donc jouer un rôle important qu'entre t et $t+\tau_c$.

Si $\tau \gg \tau_c$, on peut donc remplacer dans VI-6 $\sigma(t)$ par l'opérateur densité "décorrélé" $\text{Tr}_R \sigma(t) \otimes \text{Tr}_A \sigma(t)$.

- Approximation 2

Ce ne sont pas les quelques photons émis spontanément par l'atome qui vont changer les propriétés du grand système R . On a donc

$$\text{Tr}_A \sigma(t) \simeq \sigma_R = |0\rangle\langle 0| \tag{VI-8}$$

- En conclusion,

Pour $\tau > 0$ et $\tau \gg \tau_c$ (ce qui est le cas pour tous les temps d'intérêt physique puisque τ_c est infiniment court), on peut pour calculer $\sigma_A(t+\tau)$, c-à-d les propriétés de l'atome à l'instant $t+\tau$, remplacer l'opérateur densité global $\sigma(t)$ à l'instant t par $\text{Tr}_R \sigma(t) \otimes |0\rangle\langle 0| = \sigma_A(t) \otimes |0\rangle\langle 0|$

- Remarques

(i) le raisonnement précédent ne vaut bien sur que pour $\tau > 0$.

(ii) Nous avons choisi ici le point de vue de Schrödinger, qui se prête bien aux discussions physiques ci-dessous.

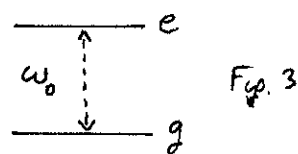
Si l'on utilise le point de vue de Heisenberg, l'équivalent de la discussion précédente est celle qui permet de démontrer le théorème de répression quantique à partir des équations de Langevin-Mori (voir rappels du cours I de cette année et cours 1977-78 et 78-79)

③ Lien entre les signaux de photodétection et les fonctions de corrélation du dipôle émetteur

a) Cas de la résonance de fluorescence laser

- Atome à 2 niveaux g et e (Fig. 3)

Fréquence atomique : ω_0



- Opérateur moment dipolaire électrique D

$$d = \langle e | D | g \rangle = \langle g | D | e \rangle^* \quad \langle g | D | g \rangle = \langle e | D | e \rangle = 0 \quad (\text{VI-9})$$

Avec un choix convenable des phases relatives de e et g , on peut prendre d réel. On peut donc écrire :

$$D = \underbrace{d |e\rangle\langle g|}_{D_+} + \underbrace{d |g\rangle\langle e|}_{D_-} \quad (\text{VI-10})$$

D_+ fait "monter" de g à e , D_- fait "descendre" de e à g

- En représentation de Heisenberg, les opérateurs $D_+(t)$ et $D_-(t)$ s'écrivent :

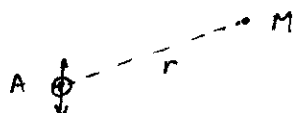
$$D_{\pm}(t) = U^{\dagger}(t, t_0) D_{\pm} U(t, t_0) \quad (\text{VI-11})$$

En l'absence de toute interaction (seul H_A différent de zéro), on auroit

$$D_{\pm}^0(t) = e^{iH_A(t-t_0)} D_{\pm} e^{-iH_A(t-t_0)} = D_{\pm} e^{\pm i\omega_0(t-t_0)} \quad (\text{VI-12})$$

L'émission spontanée représente une perturbation faible (la largeur naturelle des niveaux excités est petite devant la fréquence optique). De même, la fréquence de Rabi $\omega_R = d E_L$ associée à l'excitation laser est petite devant ω_0 . On s'attend donc à ce que la dépendance temporelle de $D_{\pm}(t)$ soit voisine de celle de $D_{\pm}^0(t)$

$$D_+(t) \sim e^{i\omega_0 t} \quad D_-(t) \sim e^{-i\omega_0 t} \quad (\text{VI-13})$$



A l'instant t , le champ rayonné par l'atome source A en un point M situé à une distance r de A est proportionnel au dipôle de A à l'instant $t - r/c$

$$E(M, t) \simeq D(t - \frac{r}{c}) \quad (\text{VI-14})$$

La proportionnalité (VI-14) découle de la résolution des équations de Maxwell quantiques (et sera démontrée dans un cours ultérieur).

Comme les parties de fréquence > 0 et < 0 de E varient en $e^{-i\omega t}$ et $e^{i\omega t}$ respectivement, on déduit de (VI-14) que

$$E^{(+)}(M, t) \simeq D_-(t - \frac{r}{c}) \quad E^{(-)}(M, t) \simeq D_+(t - \frac{r}{c}) \quad (\text{VI-15})$$

Il s'en suit que le signal de corrélation (temporelle) d'intensité mesuré au point M , $\mathcal{G}^{(2)}(t, t+\tau)$ [Probabilité de détecter un photoélectron à l'instant t et un autre à l'instant ultérieur $t+\tau$] s'écrit :

$$\mathcal{G}^{(2)}(t, t+\tau) \simeq \langle D_+(t - \frac{r}{c}) D_+(t+\tau - \frac{r}{c}) D_-(t+\tau - \frac{r}{c}) D_-(t - \frac{r}{c}) \rangle$$

(i) le fait d'exprimer le champ rayonné en fonction des dipôle émetteurs ne revient pas à dire que ce champ est un opérateur purement atomique (ce qui est le point de vue de l'approche "source-field"). En effet, si à $t=t_0$ $D_+(t_0)$ est bien un opérateur purement atomique, l'opérateur d'évolution $V(t, t_0)$ qui le fait évoluer de t_0 à t (voir formule VI-11) est un opérateur agissant à la fois sur les variables de A et de R , de sorte que $D(t)$ est lui aussi un opérateur agissant sur les variables de A et R .

(ii) En toute rigueur, l'équation (VI-14) est incomplète. La solution des équations de Maxwell est une somme de 2 termes: un terme dû aux sources (c'est le terme VI-14, solution des équations de Maxwell avec sources), plus un terme solution générale des équations de Maxwell sans sources (champ libre). Nous montrerons ultérieurement que ce terme de champ libre n'intervient pas dans VI-16 pourvu que τ soit > 0 et que l'ordre des opérateurs soit bien celui de VI-16.

b) Cas de la cascade radiative

- Atome à 3 niveaux a, b, c
- 2 Transitions permises $c \rightarrow b$ et $b \rightarrow a$ de fréquences ω_{01} et ω_{02} (et de longueurs d'onde λ_1, λ_2)

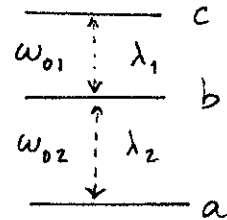


Fig. 4

- L'opérateur moment dipolaire D s'écrit

$$D = D_1 + D_2 = D_{1+} + D_{1-} + D_{2+} + D_{2-} \quad (\text{VI-17})$$

avec

$$\begin{cases} D_{1+} = d_1 |c\rangle\langle b| \\ D_{1-} = d_1 |b\rangle\langle c| \end{cases} \quad \begin{cases} D_{2+} = d_2 |b\rangle\langle a| \\ D_{2-} = d_2 |a\rangle\langle b| \end{cases} \quad (\text{VI-18})$$

- Le champ $E^{(+)}$ rayonné en M est proportionnel à $D_-(t - \frac{r}{c})$. Si l'on met devant le PM un filtre centré sur λ_1 , laissant passer λ_1 , mais bloquant λ_2 , $E^{(+)}$ est alors proportionnel à $D_{1-}(t - \frac{r}{c})$, et ainsi de suite.

- On en déduit que la probabilité de détecter un photon λ_1 à l'instant t , puis un photon λ_2 un instant τ après est donnée par

$$g^{(2)}(\lambda_1, t; \lambda_2, t+\tau) \simeq \langle D_{1+}(t - \frac{r}{c}) D_{2+}(t+\tau - \frac{r}{c}) D_{2-}(t+\tau - \frac{r}{c}) D_{1-}(t - \frac{r}{c}) \rangle \quad (\text{VI-19})$$

On peut également s'intéresser à la probabilité de détecter un photon λ_2 à l'instant t , puis un photon λ_1 un instant τ après

$$g^{(2)}(\lambda_2, t; \lambda_1, t+\tau) \simeq \langle D_{2+}(t - \frac{r}{c}) D_{1+}(t+\tau - \frac{r}{c}) D_{1-}(t+\tau - \frac{r}{c}) D_{2-}(t - \frac{r}{c}) \rangle$$

Dans les 2 expressions (VI-19) et (VI-20), τ est > 0 . On peut (VI-20) considérer que (VI-20) est l'extension de (VI-19) aux valeurs < 0 de τ

- A partir de maintenant, et pour simplifier les notations, nous écrirons plus $\frac{r}{c}$. Ce terme est néanmoins toujours sous-entendu.

4) Calcul et interprétation physique du signal de corrélation d'intensité
pour l'expérience de fluorescence de résonance laser.

a) Calcul du signal

- Dans l'expression (VI-16) remplaçons $D_{\pm}(t)$ et $D_{\pm}(t+\tau)$ par leur expression (VI-11). En utilisant l'invariance d'une trace par permutation circulaire et les relations de groupe satisfaites par l'opérateur d'évolution :

$$U(t_3, t_2) U(t_2, t_1) = U(t_3, t_1) \quad U^+(t_1, t_2) = U(t_2, t_1) \quad (VI-17)$$

on obtient :

$$\begin{aligned} \mathcal{G}^{(2)}(t, t+\tau) &\simeq \text{Tr}_{A,R} \left\{ D_+(t+\tau) D_-(t+\tau) D_-(t) \sigma(t_0) D_+(t) \right\} = \\ &= \text{Tr}_{A,R} \left\{ D_+ D_- \underbrace{U(t+\tau, t_0) U^+(t, t_0)}_{U(t+\tau, t)} D_- \underbrace{U(t, t_0) \sigma(t_0) U^+(t, t_0)}_{\sigma(t)} D_+ \underbrace{U(t, t_0) U^+(t+\tau, t_0)}_{U^+(t+\tau, t)} \right\} \\ &= \text{Tr}_{A,R} \left\{ D_+ D_- \underbrace{U(t+\tau, t) D_- \sigma(t) D_+ U^+(t+\tau, t)}_{\Sigma(t+\tau)} \right\} \quad (VI-18) \end{aligned}$$

- Jusqu'ici nous n'avons fait aucune approximation.

Comme l'opérateur $D_+ D_-$ est un opérateur atomique, la trace sur R peut passer sur l'opérateur $\Sigma(t+\tau)$ (représenté par l'accrochante). On est ainsi conduit à considérer un opérateur atomique, $\text{Tr}_R \Sigma(t+\tau)$, à l'instant $t+\tau$ dans l'expression duquel figure $\sigma(t)$.

D'après la discussion physique sur l'approximation de mémoire courte (voir § 2 ci-dessus), on commet alors une erreur négligeable (de l'ordre de τ_c/τ) en remplaçant $\sigma(t)$ par $\text{Tr}_R \sigma(t) \otimes |0\rangle\langle 0| = \sigma_A(t) \otimes |0\rangle\langle 0|$, ce qui donne

$$\mathcal{G}^{(2)}(t, t+\tau) \simeq \text{Tr}_{A,R} \left\{ D_+ D_- U(t+\tau, t) D_- \sigma_A(t) D_+ \otimes |0\rangle\langle 0| U^+(t+\tau, t) \right\} \quad (VI-19)$$

En utilisant la définition (VI-10) de D_+ et D_- , on obtient alors

$$\mathcal{G}^{(2)}(t, t+\tau) \simeq d^2 \langle e | \sigma_A(t) | e \rangle \text{Tr}_{A,R} \left\{ |e\rangle\langle e| U(t+\tau, t) |g\rangle\langle g| \otimes |0\rangle\langle 0| U^+(t+\tau, t) \right\} \quad (VI-20)$$

c.-à-d encore

$$\mathcal{G}^{(2)}(t, t+\tau) \sim P_e(t) \Pi(e, t+\tau/g, t) \quad (VI-21)$$

avec

$$\begin{cases} P_e(t) = \langle e | \sigma_A(t) | e \rangle & (VI-22) \\ \Pi(e, t+\tau/g, t) = \langle e | \text{Tr}_R \left\{ U(t+\tau, t) |g\rangle\langle g| \otimes |0\rangle\langle 0| U^+(t+\tau, t) \right\} | e \rangle & (VI-23) \end{cases}$$

b) Interprétation physique

- Pour que l'atome puisse émettre le 1^{er} photon que l'on détecte à l'instant t , il faut qu'il soit dans l'état excité e à cet instant. Il est donc normal qu'apparaisse le facteur $P_e(t)$ dont la signification physique est claire : c'est la probabilité pour que l'atome soit dans l'état e à l'instant t .

- L'analyse de l'expression (VI-23) de $\Pi(e, t+\tau/g, t)$ conduit à l'interprétation physique suivante.

À l'instant t on part d'un opérateur densité du système global $A+R$ factorisé $|g\rangle\langle g| \otimes |0\rangle\langle 0|$: atome dans l'état fondamental g , vide du rayonnement. Le système évolue ensuite entre t et $t+\tau$ sous l'effet du couplage avec le vide et le rayonnement laser excitateur [opérateur d'évolution $U(t+\tau, t)$]. On calcule alors l'opérateur densité de l'atome à l'instant $t+\tau$ [ρ_R] et la probabilité pour que l'atome soit dans l'état e à cet instant.

$\Pi(e, t+\tau/g, t)$ représente donc la probabilité conditionnelle pour que, partant de l'état fondamental g à l'instant t , l'atome soit remonté dans l'état excité e à l'instant $t+\tau$.

- Tout se passe donc comme si, lors de la 1^{ère} détection, dont la probabilité est $p_e(t)$, l'atome subissait un "saut quantique" qui l'amène de e à g . Pour qu'il émette ensuite un 2^{ème} photon à l'instant $t+\tau$, il faut qu'il ait été réexcité par le laser entre t et $t+\tau$.

On comprend ainsi très clairement l'effet de désynchronisation. Immédiatement après la 1^{ère} détection, l'atome est certainement dans g et ne peut réémettre tout de suite un 2^{ème} photon. Il lui faut un certain temps pour être réexcité.

Quant aux oscillations des figures 5 et 6 du chapitre précédent, elles s'interprètent également très clairement. Elles représentent "l'oscillation de Rabi" du système à 2 niveaux entre les 2 niveaux g et e sous l'effet de l'irradiation laser.

Remarques

(i) Dans la référence 5, le calcul est généralisé au cas où il y a plusieurs sous-niveaux Zeeman dans g et e . On montre qu'il est alors possible de jouer sur les polarisations des photons détectés pour augmenter considérablement l'effet de désynchronisation.

(ii) le calcul peut être aisément généralisé au cas d'une excitation collisionnelle. Pour calculer $\Pi(e, t+\tau/g, t)$ on utilise plus alors les "équations de Bloch optiques" décrivant l'évolution de la matrice densité atomique sous l'effet de l'irradiation laser mais les équations de relaxation

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \sigma_e = w \sigma_g - \Gamma \sigma_e \\ \frac{d}{dt} \sigma_g = -w \sigma_g + \Gamma \sigma_e \end{cases} \quad (VI-24) \quad \begin{array}{c} \overline{g} \\ w \uparrow \quad \downarrow \Gamma \\ \overline{e} \end{array}$$

décrivant comment les populations σ_e et σ_g de e et g évoluent sous l'effet des processus de pompage qui transfèrent les atomes de g vers e avec un taux w (supposé beaucoup plus petit que le taux d'émission spontanée Γ de e vers g). On déduit alors aisément de (VI-24) que

$$\begin{cases} \sigma_e(t) \approx \frac{w}{\Gamma} \\ \Pi(e, t+\tau/g, t) \approx \frac{w}{\Gamma} (1 - e^{-\Gamma t}) \end{cases} \quad (VI-25)$$

On a donc pour $G^{(2)}$ un "trou" en $\tau=0$, de largeur $1/\Gamma$, et une asymptote d'ordonnée w^2/Γ^2 . Pour une excitation laser résonnante intense, on aurait un trou de largeur $1/\omega$, ($\omega_1 = d E_L$: fréquence de Rabi) et une asymptote de hauteur $1/4$ [à saturation, $P_c(t) = \frac{1}{2}$ et $\lim_{t \rightarrow \infty} \Pi = \frac{1}{2}$]

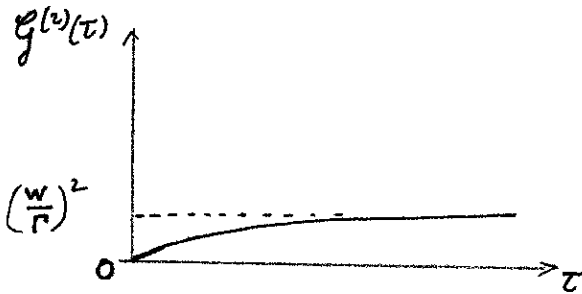


Fig. 5 Excitation collisionnelle faible

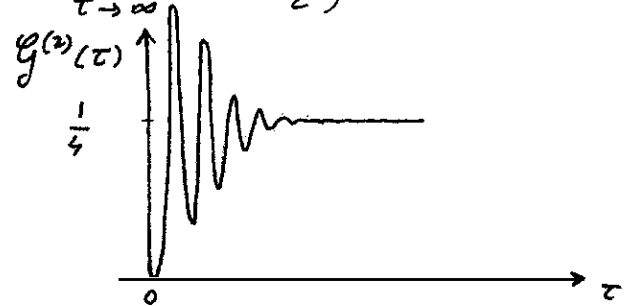


Fig. 6 Excitation laser résonnante intense

⑤ Calcul et interprétation des signaux de cascade radiative.

Les calculs étant voisins de ceux du § précédent, nous ne les expliciterons pas. Nous nous contenterons donc de donner les résultats du calcul et les interprétations physiques.

a) Cas où l'on détecte d'abord λ_1 puis λ_2

On trouve que $G^{(2)}(\lambda_1, t; \lambda_2, t+\tau)$ est proportionnel

- d'une part à $P_c(t) = \langle c | \sigma_A(t) | c \rangle$ qui est la probabilité pour que l'atome soit dans l'état c à l'instant t . En effet, pour que l'atome puisse émettre un photon λ_1 , il faut qu'il soit dans l'état c .

- d'autre part à $\Pi(b, t+\tau | b, t)$ qui est la probabilité conditionnelle pour que, partant de b à l'instant t , l'atome y soit encore à l'instant $t+\tau$. Si Γ_2 est la probabilité d'émission spontanée $b \rightarrow a$ (largeur naturelle de b), $\Pi(b, t+\tau | b, t)$ varie au début comme $e^{-\Gamma_2 t}$ [Pour les grandes valeurs de τ , Π tend vers la population stationnaire de b]

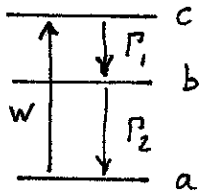
Tout se passe donc comme si, lors de la 1^{ère} détection à λ_1 , l'atome subissait un "saut quantique" de c à b .

b) Cas où l'on détecte d'abord λ_2 puis λ_1

$G^{(2)}(\lambda_2, t; \lambda_1, t+\tau)$ est alors proportionnel à $P_b(t) = \langle b | \sigma_A(t) | b \rangle$. Pour que l'atome puisse émettre un photon λ_2 , il faut en effet qu'il soit dans l'état b .

Lors de cette première détection, tout se passe comme si l'atome subissait un "saut quantique" de b à a . Pour qu'il puisse ensuite réémettre un photon λ_1 à l'instant $t+\tau$, il faut qu'il soit recapté de a vers c , d'où l'apparition de la probabilité conditionnelle $\Pi(c, t+\tau | a, t)$.

On peut faire le calcul jusqu'au bout dans le cadre d'un modèle simple où l'atome est pompé de a vers c avec un champ w très faible devant Γ_1 et Γ_2



$$\begin{cases} d\sigma_c/dt = -\Gamma_1 \sigma_c + w \sigma_a \\ d\sigma_b/dt = -\Gamma_2 \sigma_b + \Gamma_1 \sigma_c \\ d\sigma_a/dt = -w \sigma_a + \Gamma_2 \sigma_b \end{cases} \quad (VI-26)$$

En régime stationnaire, on a (à la limite $w \ll \Gamma_1, \Gamma_2$)

$$\sigma_a \approx 1 \quad \sigma_b \approx \frac{w}{\Gamma_2} \quad \sigma_c = \frac{w}{\Gamma_1} \quad (VI-27)$$

On trouve donc pour $\varphi_y^{(2)}(\lambda_1, t; \lambda_2, t+\tau)$ une exponentielle de constante de temps Γ_2^{-1} , partant de w/Γ_1 en $t=0$ et tendant vers l'asymptote $w^2/\Gamma_1 \Gamma_2$.

Le prolongement pour $\tau < 0$ de $\varphi_y^{(2)}(\lambda_1, t; \lambda_2, t+\tau)$, qui n'est autre que $\varphi_y^{(2)}(\lambda_2, t; \lambda_1, t+\tau)$, présente au voisinage de $\tau=0$ un trou de largeur $\sim \Gamma_1^{-1}$ ou Γ_2^{-1} et tend vers la même asymptote $w^2/\Gamma_1 \Gamma_2$. La courbe est donc très désymétrique (Fig. 7)

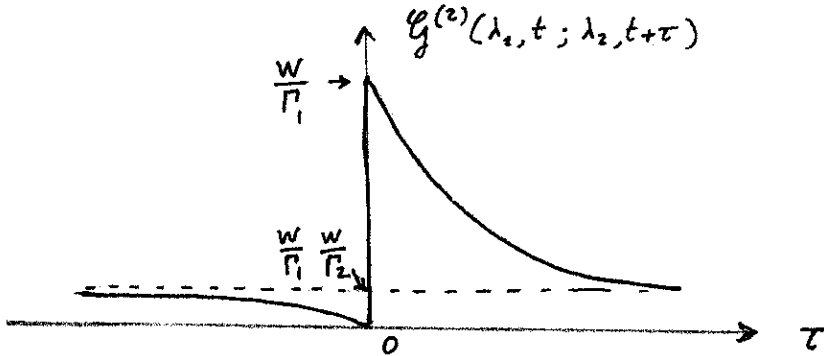


Fig. 7

Remarques

- (i) Nous avons supposé ici pour simplifier a, b, c non-dégénérés. Supposons maintenant que les 3 niveaux aient des moments cinétiques $J_a = J_c = 0$ $J_b = 1$. Il apparaît alors des corrélations très étroites entre les polarisations des 2 photons émis en cascade. Si par exemple le 1^{er} photon λ_1 est σ^+ , le 2^{ème} est nécessairement σ_- .

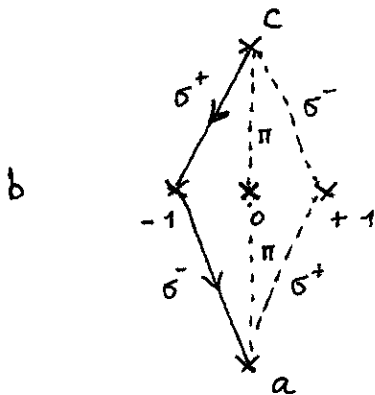


Fig. 8

Si le 1^{er} photon a une polarisation superposition linéaire de σ_+ et σ_- , le saut quantique de l'atome fera passer cet atome de c vers une superposition linéaire bien définie des 2 sous-niveaux Zeeman -1 et +1 de b. La polarisation émise sur λ_2 doit être alors calculée en partant de cet état initial.

Si l'on met en plus un champ magnétique, les 2 sous-niveaux -1 et +1 n'ont pas la même énergie. La superposition linéaire créée dans b après la détection du 1^{er} photon évolue donc et la polarisation du 2^{ème} photon dépend alors de l'intervalle de temps τ entre les 2 détections (corrélations perturbées par un champ magnétique - Analogie avec le phénomène de battement quantique)

(ii) Dans la référence 5, on montre comment la fluorescence de résonance laser d'un atome à 2 niveaux peut être considérée comme une cascade radiative, celle de l'atome "hanté" par les photons laser.

Cette approche suggère des effets nouveaux, comme l'existence de corrélations temporelles entre les bandes latérales du triplet de fluorescence, effets qui viennent d'être mis en évidence expérimentalement à l'Institut d'Optique (par Alain Aspect, Jean Dalibard et Serge Reynaud)

Références théoriques

- (1) D. STOLER, Phys. Rev. Lett. 33, 1397 (1974)
- (2) H.J. CARMICHAEL, D.F. WALLS J. Phys B 9, L43 et 1199 (1976)
- (3) C. COHEN-TANNOUJDI Les Houches 1975
(publié dans Frontiers in Laser spectroscopy, ed. R. Balmain, S. Haroche, S. Liberman North Holland 1977)
- (4) H.J. KIMBLE, L. MANDEL Phys. Rev. A 13, 2123 (1976)
- (5) C. COHEN-TANNOUJDI, S. REYNAUD. Phil. Trans. Roy. Soc. London A 293, 223 (1979)

Buts de ce chapitre

- Analyser la structure du champ électrique existant dans l'espace en présence d'un dipôle atomique émetteur.
Montrer, par intégration des équations du mouvement du système dipôle + champ, que le champ E est la somme d'un terme indépendant des sources, et évoluant librement, (champ du vide), et d'un terme dépendant du dipôle émetteur (champ des sources).
- Calculer le champ des sources, non seulement loin du dipôle émetteur, mais également à l'emplacement de ce dipôle, de manière à pouvoir, dans un chapitre ultérieur, étudier l'effet de l'interaction du dipôle avec son propre champ (réaction de rayonnement).
- Calculer les commutateurs entre le champ du vide et une grandeur atomique quelconque (ces commutateurs seront utilisés, dans un chapitre ultérieur, lors de la discussion des effets respectifs des fluctuations du vide et de la réaction de rayonnement lors le processus d'émission spontanée).

① Notations - Hypothèses

Champ électrique $E(\vec{r}, t)$

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \sum_{\vec{k}, \vec{E}} i N_R \left[a_{kE}(t) \vec{E} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} - a_{kE}^\dagger(t) \vec{E} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} \right] \quad (\text{VII-1})$$

$$N_R = \sqrt{\frac{\hbar \omega}{2 \epsilon_0 L^3}} \quad \vec{E}^{(+)}(\vec{r}, t) \quad (\text{VII-2})$$

Développement en ondes planes progressives (dans un cube de côté L avec conditions aux limites périodiques).

N_R : coefficient de normalisation

\vec{k} : vecteur d'onde $\vec{E} \perp \vec{k}$: polarisation $\omega = ck$: pulsation

Hamiltonien d'interaction dipolaire électrique

- Système atomique, globalement neutre, de dimensions de l'ordre de a_0 (orbite de Bohr), placé à l'origine $\vec{0}$ des coordonnées, et possédant un moment dipolaire électrique $\vec{D}(t)$
- On montre (voir par exemple cours 1974-75) qu'on peut, par une transformation unitaire appropriée, transformer l'hamiltonien d'interaction habituel $(-\frac{e}{m} \vec{A} \vec{p} + \frac{e^2}{2m} \vec{A}^2)$ en

$$V = -\vec{D}(t) \cdot \vec{E}(0, t) = - \sum_{i=x,y,z} D_i(t) E_i(\vec{0}, t) \quad (\text{VII-3})$$

- L'approximation dipolaire électrique n'est valable que si la longueur d'onde $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ du rayonnement est grande devant a_0 . Si l'on reporte le développement (VII-1) de \vec{E} dans (VII-3), l'approximation n'est certainement plus valable pour les modes $k \gtrsim 2\pi/a_0$.

- Pour remédier à cette difficulté, nous introduisons à partir de maintenant une coupure dans la sommation sur k

$$\int_0^\infty dk \rightarrow \int_0^{k_M} dk \quad \text{avec} \quad k_M \ll \frac{2\pi}{a_0} \quad (VII-4)$$

Comme les longueurs d'onde optiques $\lambda_0 = 2\pi/k_0$ sont très grandes devant a_0 , on peut choisir k_M tel que

$$k_0 \ll k_M \ll 2\pi/a_0 \quad (VII-5)$$

et garder ainsi un nombre suffisant de modes pour décrire correctement l'interaction du dipôle émetteur avec le champ tout en restant dans le cadre de l'approximation dipolaire électrique

- L'interaction (que l'on néglige ici) avec les modes de fréquence élevée ($k \gg k_M$) ne produit essentiellement que des déplacements de niveaux d'énergie atomiques (qui divergent d'ailleurs). En fait, ces divergences peuvent être éliminées par une redéfinition des paramètres de l'électron (renormalisation). Nous n'aborderons pas ici ces problèmes (qui nécessiteraient de toute façon un traitement relativiste de l'électron) et nous contenterons de l'artifice de la coupure à k_M .

Système atomique

- lorsque nous aurons besoin de préciser davantage le système atomique (§§ 3 et 4), nous supposons que :

(i) le système n'a qu'un degré de liberté (le long de Oz) :

$$D_i(t) = S_{iz} D(t) = d S_{iz} A(t) \quad (VII-6)$$

où d est un nombre réel ayant les dimensions d'un moment dipolaire électrique et $A(t)$ un opérateur atomique sans dimension

(ii) le dipôle atomique n'a qu'une fréquence propre ω_0

$$A(t) = A_+(t) + A_-(t) \quad A_\pm(t) \sim e^{\pm i\omega_0 t} \quad (VII-7)$$

- En fait, dans le chapitre suivant, nous prendrons pour système atomique

(i) soit un oscillateur harmonique (vibrant le long de Oz), auquel cas

$$A_+(t) = b^+(t) \quad A_-(t) = b(t) \quad (VII-8)$$

l'hamiltonien atomique H_A s'écrit alors :

$$H_A = \hbar \omega_0 (b^+ b + \frac{1}{2}) \quad (VII-9)$$

(ii) soit un système à 2 niveaux $\{|e\rangle, |g\rangle\}$ auquel cas

$$A_+ = S_+ = |e\rangle\langle g| \quad A_- = S_- = |g\rangle\langle e| \quad (VII-10)$$

$$H_A = \hbar \omega_0 S_3 \quad \text{avec} \quad S_3 = \frac{1}{2} (|e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|) \quad (VII-11)$$

Approximation du champ tournant ("r.w.a.")

Revenant, quand on l'effectue, à négliger les processus "anti-résonnants" où le système atomique grimpe en énergie en émettant un photon ($A_+ E^{(-)}$) ou descend en énergie en absorbant un photon ($A_- E^{(+)}$). Mathématiquement,

une telle approximation revient à effectuer le remplacement

$$V = -D E = -d(A_+ + A_-)(E^{(+)} + E^{(-)}) \rightarrow V = -d(A_+ E^{(+)} + A_- E^{(-)}) \quad (\text{VII-12})$$

Equation d'évolution de a_{kE} et a_{kE}^+

En partant de l'hamiltonien total

$$H = H_A + \sum_{kE} \hbar \omega (a_{kE}^+ a_{kE} + \frac{1}{2}) - \sum_j D_j(t) E_j(\vec{0}, t) \quad (\text{VII-13})$$

dans lequel on remplace E_i par son développement (VII-1), et en écrivant l'équation d'évolution (équation de Hamilton-Jacobi) pour a_{kE} , on obtient :

$$\frac{d}{dt} a_{kE} = -i\omega a_{kE} + \frac{N_k}{\hbar} \sum_j \epsilon_j D_j(t) \quad (\text{VII-14})$$

qui s'intègre immédiatement entre l'instant initial t_0 et l'instant t

$$a_{kE}(t) = a_{kE}(t_0) e^{-i\omega(t-t_0)} + \frac{N_k}{\hbar} \int_{t_0}^t dt' \sum_j \epsilon_j D_j(t') e^{-i\omega(t-t')} \quad (\text{VII-15})$$

Remarque : les équations (VII-14) et (VII-15) n'ont en elles mêmes rien de quantique ; elles ont la même forme en théorie classique (les a_{kE} et $a_{kE}^+ = a_{kE}^*$ étant alors les coefficients du développement du champ sur les modes). Tant que l'on utilise (VII-15), sans faire appel à aucune commutateur, on obtient donc des résultats qui n'ont rien de nouveau par rapport aux résultats classiques.

② Champ rayonné par le dipôle atomique (suffisamment loin)

a) Région de l'espace considérée

Dans le § 2, nous étudions le champ rayonné par le dipôle à une distance suffisamment grande de lui :

$$r \gg \frac{1}{k_M} \quad (\text{VII-16})$$

Par contre, compte tenu de (VII-5), nous ne faisons aucune hypothèse sur la grandeur de r par rapport à la longueur d'onde λ_0 de la transition atomique. r peut être $> \lambda_0$ ou $< \lambda_0$.

Dans le § 3 suivant, nous étudierons le champ créé à l'emplacement du dipôle : $r \ll \frac{1}{k_M}$

b) Expressions du champ $E_i(\vec{r}, t)$ en fonction du dipôle $D_j(t')$

Reprenons (VII-15) (et l'expression hermitique conjuguée pour a_{kE}^+) dans le développement (VII-1). On obtient (après le changement de variables $\tau = t - t'$) :

$$E_i(\vec{r}, t) = E_{0i}(\vec{r}, t) + \int_0^{t-t_0} d\tau F_{ij}(\vec{r}, \tau) D_j(t-\tau) \quad (\text{VII-17})$$

où :

$E_{0i}(\vec{r}, t)$ est le "champ libre" ou encore le "champ du vide" obtenu en remplaçant dans (VII-1) $a_{kE}(t)$ et $a_{kE}^+(t)$ par les solutions libres.

$$a_{kE}(t) = a_{kE}(t_0) e^{-i\omega(t-t_0)} \quad a_{kE}^+(t) = a_{kE}^+(t_0) e^{i\omega(t-t_0)} \quad (\text{VII-18}) \quad (\text{VII-4})$$

et le tenseur F_{ij} (convention de sommation sur les indices répétés dans VII-17) s'écrit :

$$F_{ij}(\vec{r}, t) = \frac{i}{\hbar} \sum_{\vec{k}} \sum_{\vec{E} \perp \vec{k}} E_i E_j N_k^2 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} + \text{c.c.} \quad (\text{VII-19})$$

le dernier terme de (VII-17) est le champ rayonné par le dipôle ou encore le "champ des sources"

Le calcul de la transformée de Fourier spatio-temporelle qui figure dans (VII-19) ne présente aucune difficulté de principe et est donné en appendice. On obtient

$$4\pi\epsilon_0 F_{ij}(\vec{r}, t) = \frac{1}{r} (\delta_{ij} - \frac{x_i x_j}{r^2}) \left[-\frac{1}{c^2} \ddot{D}_j(t - \frac{r}{c}) + \frac{1}{c^2} \ddot{D}_j(t + \frac{r}{c}) \right] \\ + \frac{1}{r^2} (\delta_{ij} - \frac{3x_i x_j}{r^2}) \left[-\frac{1}{c} \dot{D}_j(t - \frac{r}{c}) - \frac{1}{c} \dot{D}_j(t + \frac{r}{c}) \right] \\ - \frac{1}{r^3} (\delta_{ij} - \frac{3x_i x_j}{r^2}) \left[D_j(t - \frac{r}{c}) - D_j(t + \frac{r}{c}) \right] \quad (\text{VII-20})$$

où x_i la i -ième composante cartésienne du vecteur \vec{r} .

En reportant (VII-20) dans (VII-17), on obtient finalement

$$E_i(\vec{r}, t) = E_{0i}(\vec{r}, t) - \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{1}{r} (\delta_{ij} - \frac{x_i x_j}{r^2}) \ddot{D}_j(t - \frac{r}{c}) \\ - \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c} \frac{1}{r^2} (\delta_{ij} - \frac{3x_i x_j}{r^2}) \dot{D}_j(t - \frac{r}{c}) - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} (\delta_{ij} - \frac{3x_i x_j}{r^2}) D_j(t - \frac{r}{c}) \quad (\text{VII-21})$$

c) Discussion physique

- L'expression (VII-21) a la même structure que celle de l'expression classique donnant le rayonnement d'un dipôle. Cela n'a rien d'étonnant étant donné que l'équation (VII-15) n'a rien de spécifiquement quantique (voir remarque à la fin du § 2). On peut considérer en fait que le calcul précédent n'est autre qu'un calcul du rayonnement classique d'un dipôle basé sur la formulation hamiltonienne de l'électrodynamique (plutôt que sur les équations de Maxwell).
- Les facteurs sans dimensions $(\delta_{ij} - \frac{x_i x_j}{r^2})$ et $(\delta_{ij} - \frac{3x_i x_j}{r^2})$ donnent la répartition angulaire du champ rayonné, qui est la somme de 3 termes variant en $1/r$, $1/r^2$, $1/r^3$.
- Si le dipôle a un mouvement quasi-harmonique, de fréquence ω_0 , alors $\ddot{D}_j \sim \omega_0^2 D_j$, $\dot{D}_j \sim \omega_0 D_j$, et par suite le champ rayonné est proportionnel au dipôle émetteur (pris au instant t/c avant). On voit également que, si $\lambda_0 = 2\pi c/\omega_0$ est la longueur d'onde associée à ω_0 , le terme en $1/r$ prédomine pour $r \gg \lambda_0$ (c'est le rayonnement à très grande distance d'un dipôle), alors que pour $r \ll \lambda_0$ (mais $r \gg 2\pi/km$), c'est le terme en $1/r^3$ qui prédomine. L'effet de retard mis à part, ce terme en $1/r^3$ a d'ailleurs la même structure que celui donnant le champ électrostatique d'un dipôle.

③ Champ créé par le dipôle à son propre emplacement

a) Région de l'espace considérée.

Le calcul de $F_{ij}(\vec{r}, t)$ donne en appendice montré que, dès que $r \ll 1/k_m$, $F_{ij}(\vec{r}, t)$ diffère très peu de sa valeur en $\vec{r} = \vec{0}$.

Ce résultat se comprend bien physiquement. On peut montrer en effet que le fait d'introduire une coupure en k_m est équivalent à moyenner en chaque point \vec{r} le champ sur une sphère centrée en \vec{r} et de rayon $\sim 1/k_m$. Il est par suite normal que le champ ainsi moyenné conserve à peu près la même valeur en 2 points distants de moins de $1/k_m$.

b) Calcul de $\vec{E}^{(+)}(\vec{0}, t)$

Le calcul de $F_{ij}(\vec{0}, t)$ fait en appendice montre que $F_{ij}(\vec{0}, t)$ est proportionnel à $S'''(t)$. Comme l'intégrale sur t' de VII-17 va de 0 à $+\infty$ (on suppose $t-t_0 \gg 1/ck_m$), et non de $-\infty$ à $+\infty$, on n'obtient pas un résultat simple dans le cas général pour $E_i(\vec{0}, t)$ ne faisant intervenir, comme en VII-21, que des dérivés de D_j .

Nous allons donc, à partir de maintenant, particulariser un peu plus le problème, en supposant que $D(t)$ n'a qu'une fréquence propre (voir VII-6 et VII-7), de manière à avoir des expressions relativement simples (la généralisation des calculs qui suivent à des situations plus complexes, où D a plusieurs fréquences propres, ne pose cependant aucun problème). De plus, nous allons calculer séparément $\vec{E}^{(+)}(\vec{0}, t)$, et $\vec{E}^{(-)}(\vec{0}, t)$ qui est son adjoint, car nous en aurons besoin dans le chapitre suivant. Rappelons que $\vec{E}^{(+)}(\vec{r}, t)$ est la partie du développement (VII-1) qui ne contient que les $a_{kE}(t)$.

On obtient ainsi, en reportant (VII-15) dans le 1^{er} terme du 2^{em} membre de (VII-1), en utilisant VII-6 et VII-7 pour $D_j(t')$, et en multipliant les 2 membres de l'équation par d

$$d.E_i^{(+)}(\vec{0}, t) = d.E_{0i}^{(+)}(\vec{0}, t) + d \int_0^{t-t_0} d\tau \sum_{\vec{k} \in E} \underbrace{E_i E_j \delta_{ij}}_{E_i E_j} \frac{i}{\hbar} N_k^2 e^{-i\omega\tau} [A_+(t-\tau) + A_-(t-\tau)] \quad (VII-22)$$

La somme sur \vec{k} de $N_k^2 e^{-i\omega\tau}$ fait apparaître une fonction de τ très étroite (de largeur $1/ck_m$), de sorte qu'il est justifié de poser

$$A_+(t-\tau) = A_+(t) e^{-i\omega_0\tau} \quad A_-(t-\tau) = A_-(t) e^{i\omega_0\tau} \quad (VII-23)$$

(On ne tient compte que de l'évolution harmonique de A_+ et A_- dans l'intervalle de temps très court $t-\tau, \tau$). En remplaçant $\tau-t_0$ par $+\infty$, on voit alors apparaître les fonctions de ω

$$\int_0^{\infty} d\tau e^{-i(\omega \pm \omega_0)\tau} = \pi \delta(\omega \pm \omega_0) - i\mathcal{P} \frac{1}{\omega \pm \omega_0} \quad (VII-24)$$

de sorte que

$$d.E_i^{(+)}(\vec{0}, t) - d.E_{0i}^{(+)}(\vec{0}, t) = \sum_{\vec{k} \in E} E_i E_j \frac{i}{\hbar} N_k^2 d^2 \left\{ A_+(t) \left[\pi \delta(\omega + \omega_0) - i\mathcal{P} \frac{1}{\omega + \omega_0} \right] + A_-(t) \left[\pi \delta(\omega - \omega_0) - i\mathcal{P} \frac{1}{\omega - \omega_0} \right] \right\} \quad (VII-25)$$

La seule quantité qui dépend des angles de \vec{k} dans (VII-25) est $E_i E_3$, dont la moyenne angulaire s'annule si $i \neq 3$. On peut donc remplacer $E_i E_3$ par $E_3^2 \delta_{i3}$ et obtenir finalement

$$\begin{aligned} E_i^{(+)}(\vec{0}, t) - E_{0i}^{(+)}(\vec{0}, t) &= \frac{i\hbar}{d} \delta_{i3} \left[\left(\frac{\gamma}{2} + i\delta\right) S_-(t) + i\bar{\delta} S_+(t) \right] \\ E_i^{(-)}(\vec{0}, t) - E_{0i}^{(-)}(\vec{0}, t) &= -\frac{i\hbar}{d} \delta_{i3} \left[\left(\frac{\gamma}{2} - i\delta\right) S_+(t) - i\bar{\delta} S_-(t) \right] \end{aligned} \quad (VII-26)$$

où les quantités $\gamma, \delta, \bar{\delta}$ sont définies par

$$\gamma = \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{\vec{k} \in E} d^2 E_3^2 \mathcal{N}_k^2 \delta(\hbar\omega - \hbar\omega_0) \quad (VII-27)$$

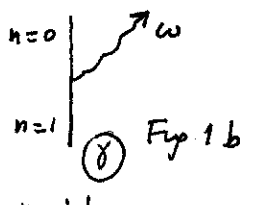
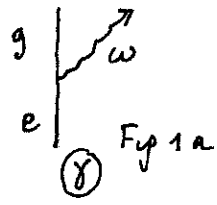
$$\delta = \frac{1}{\hbar} \mathcal{P} \sum_{\vec{k} \in E} \frac{d^2 E_3^2 \mathcal{N}_k^2}{\hbar\omega_0 - \hbar\omega} \quad (VII-28)$$

$$\bar{\delta} = \frac{1}{\hbar} \mathcal{P} \sum_{\vec{k} \in E} \frac{d^2 E_3^2 \mathcal{N}_k^2}{-\hbar\omega_0 - \hbar\omega} \quad (VII-29)$$

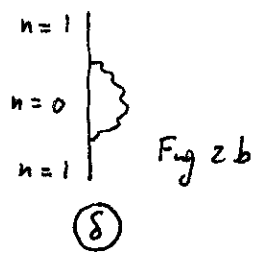
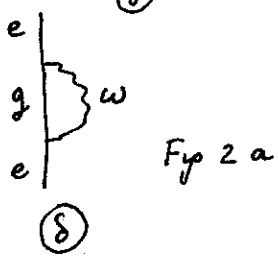
c) Discussion physique

- Interprétation de $\gamma, \delta, \bar{\delta}$

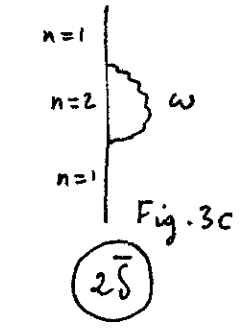
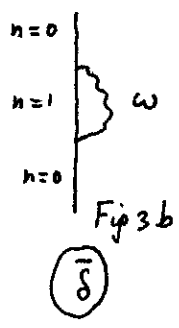
γ s'interprète comme la probabilité d'émission d'un photon par unité de temps à partir de l'état e pour le système à 2 niveaux (Fig 1a) à partir de l'état $n=1$ pour l'oscillateur harmonique (Fig 1b). On reconnaît en effet en (VII-27) la formule la règle d'or de Fermi puisque $d^2 E_3^2 \mathcal{N}_k^2$ est le carré de l'élément de matrice de V entre l'état atomique supérieur + 0 photon et l'état atomique inférieur + 1 photon



δ est le déplacement radiatif de e (ou de $n=1$) quand on fait l'approximation r.w.2. (Figs 2a et 2b). On reconnaît en effet en (VII-28) un déplacement d'énergie au 2^{ème} ordre



$\bar{\delta}$ est le déplacement radiatif de g (ou de $n=0$) quand on ne fait pas r.w.2. (Figs 3a, 3b). Notons également que $n=1$ a un déplacement radiatif supplémentaire $2\bar{\delta}$ quand on ne fait pas r.w.2. (Fig 3c), du à une transition virtuelle vers $n=2$.



(Le facteur 2 dans $2\bar{\delta}$ vient du carré de l'élément de matrice entre $n=1$ et $n=2$, qui est en $(\sqrt{2})^2 = 2$)

- On voit sur (VII-26) que le champ créé par le dipôle à son propre emplacement est parallèle à ce dipôle (facteur δ_{ij}), qu'il comprend une partie en quadrature avec le dipôle, proportionnelle à $\dot{\gamma}$ (c'est cette partie qui est susceptible d'effectuer du travail, donc d'amortir le mouvement du dipôle) et une partie en phase ou en opposition de phase, proportionnelle à δ et $\dot{\delta}$.

Notons également que ce sont les processus antirésonnants à l'origine de $\dot{\delta}$, qui introduisent dans $E^{(+)}$ une composante variant non en $e^{-i\omega t}$ mais en $e^{+i\omega t}$.

Notons enfin que γ est indépendant de k_M , alors que δ et $\dot{\delta}$ croissent avec k_M (une renormalisation des paramètres de l'électron serait nécessaire pour obtenir des déplacements radiatifs indépendants de k_M).

④ Relations de commutation entre le champ du vide \vec{E}_0 et une grandeur atomique quelconque G_A

a) Principe du calcul

- A l'instant initial t_0 , les grandeurs atomiques $G_A(t_0)$ et les grandeurs de champs $a_{kE}(t_0)$ (et $a_{kE}^+(t_0)$) commutent :

$$[G_A(t_0), a_{kE}(t_0)] = 0 \quad (\text{VII-30})$$

- L'évolution hamiltonienne entre t_0 et t conserve les commutateurs :

$$[G_A(t), a_{kE}(t)] = 0 \quad (\text{VII-31})$$

Par contre comme $a_{kE}(t)$ est différent de $a_{kE}(t_0)$ (voir VII-15), $G_A(t)$ ne commute plus en général avec $a_{kE}(t_0)$, et par suite avec le champ du vide $\vec{E}_0(\vec{r}_i, t_i)$ qui est une superposition linéaire des $a_{kE}(t_0)e^{-i\omega(t_i-t_0)}$ [et $a_{kE}^+(t_0)e^{i\omega(t_i-t_0)}$]

- En fait, en reportant (VII-15) dans (VII-31), on obtient aisément

$$[G_A(t), a_{kE}(t_0)] = -\frac{N_k}{\hbar} \int_{t_0}^t dt' \epsilon_j [G_A(t), D_j(t')] e^{-i\omega(t_0-t')} \quad (\text{VII-32})$$

ce qui permet ensuite par superposition de calculer n'importe quel commutateur $[G_A(t), E_{0i}(\vec{r}_i, t_i)]$.

b) Résultats du calcul pour les commutateurs faisant intervenir le champ du vide en un point \vec{r}_i suffisamment loin du dipôle ($r_i \gg 1/k_M$)

$$\begin{aligned} [G_A(t), E_{0i}(\vec{r}_i, t_i)] &= [G_A(t), \sum_{\vec{k}E} iN_k \epsilon_i a_{kE}(t_0) e^{-i\omega(t_i-t_0)} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}_i} + \text{c.c.}] \\ &= - \int_{t_0}^t dt' [G_A(t), D_j(t')] \left\{ \sum_{\vec{k}E} \frac{i\epsilon_i \epsilon_j N_k^2}{\hbar} e^{-i\omega(t_i-t')} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}_i} + \text{c.c.} \right\} \quad (\text{VII-33}) \end{aligned}$$

En posant $t_i - t' = \tau$, et en utilisant (VII-19), on obtient alors

$$[G_A(t), E_{0i}(\vec{r}_i, t_i)] = - \int_{t_i-t}^{t_i-t_0} d\tau F_{ij}(\vec{r}_i, \tau) [G_A(t), D_j(t_i-\tau)] \quad (\text{VII-34})$$

On voit alors que si $t_1 - t > r_1/c$, l'intervalle d'intégration sur τ ne contient ni $\tau = r_1/c$ ni $\tau = -r_1/c$, c-à-d aucun des centres des jonctions S, S', S'' figurant dans l'expression (VII-20) de F_{ij} . On a donc

$$\boxed{[G_A(t), E_{0i}(\vec{r}_1, t_1)] = 0 \quad \text{si } t_1 - t > r_1/c} \quad (\text{VII-35})$$

Le résultat est très satisfaisant physiquement

c) Commutateurs faisant intervenir le champ du vide $\vec{E}_0(\vec{0}, t_1)$ à l'emplacement du dipôle.

Comme dans le § 3 précédent, nous séparons $E_0^{(+)}$ et $E_0^{(-)}$ et utilisons (VII-6) et (VII-7), ce qui donne par exemple

$$\begin{aligned} [G_A(t), E_{0i}^{(+)}(\vec{0}, t_1)] &= -\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt' [G_A(t), D(t')] \sum_{\vec{k} \in \mathbb{E}} \epsilon_i \epsilon_j N_k^2 e^{-i\omega(t-t')} \\ &= -\frac{id}{\hbar} \delta_{i3} \int_{t_1-t}^{t_1-t_0} d\tau [G_A(t), A_+(t_1-\tau) + A_-(t_1-\tau)] \sum_{\vec{k} \in \mathbb{E}} \epsilon_3^2 N_k^2 e^{-i\omega\tau} \\ &= -\frac{id}{\hbar} \delta_{i3} [G_A(t), A_+(t_1)] \int_{t_1-t}^{t_1-t_0} d\tau \sum_{\vec{k} \in \mathbb{E}} \epsilon_3^2 N_k^2 e^{-i(\omega+\omega_0)\tau} \\ &\quad - \frac{id}{\hbar} \delta_{i3} [G_A(t), A_-(t_1)] \int_{t_1-t}^{t_1-t_0} d\tau \sum_{\vec{k} \in \mathbb{E}} \epsilon_3^2 N_k^2 e^{-i(\omega-\omega_0)\tau} \end{aligned} \quad (\text{VII-36})$$

Comme dans le § 3 on a utilisé le fait que $f(\tau) = \sum_{\vec{k} \in \mathbb{E}} N_k^2 \epsilon_3^2 e^{-i\omega\tau}$ est une fonction très étroite en τ (de largeur $1/k_m c$) pour remplacer $A_{\pm}(t_1-\tau)$ par $A_{\pm}(t_1) e^{\mp i\omega_0\tau}$.

Cette même propriété de la fonction $f(\tau)$ montre d'ailleurs que si $t_1 - t \gg 1/k_m c$, l'intervalle d'intégration sur τ ne contient pas la zone où $f(\tau)$ n'est pas nulle, de sorte que

$$\boxed{[G_A(t), E_{0i}^{(+)}(\vec{0}, t_1)] = 0 \quad \text{si } t_1 - t \gg 1/k_m c} \quad (\text{VII-37})$$

Par contre, si $t - t_1 \gg 1/k_m c$ (et $t_1 - t_0 \gg 1/k_m c$), on peut remplacer les bornes d'intégration par $-\infty$ et $+\infty$, ce qui fait apparaître $\delta(\omega + \omega_0)$ et $\delta(\omega - \omega_0)$ et donne par suite compte tenu de (VII-27)

$$[G_A(t), E_{0i}^{(+)}(\vec{0}, t_1)] = -\frac{i\hbar}{d} \gamma \delta_{i3} [G_A(t), A_-(t_1)] \quad \text{si } t - t_1 \gg 1/k_m c \quad (\text{VII-38})$$

Enfin si $t_1 = t$, les bornes d'intégration dans (VII-36) deviennent 0 et $+\infty$, ce qui fait apparaître $\delta(\omega \pm \omega_0)$ et $\mathcal{P} \frac{1}{\omega \pm \omega_0}$ et donne, compte tenu de (VII-28) et (VII-29)

$$\begin{aligned} [G_A(t), E_{0i}^{(+)}(\vec{0}, t)] &= -\frac{i\hbar}{d} (i\delta) \delta_{i3} [G_A(t), A_+(t)] \\ &\quad - \frac{i\hbar}{d} \left(\frac{\gamma}{2} - i\delta\right) \delta_{i3} [G_A(t), A_-(t)] \end{aligned} \quad (\text{VII-39})$$

- Des calculs tout à fait analogues donnent

$$\boxed{[G_A(t), E_{0i}^{(-)}(\vec{0}, t_1)] = 0 \quad \text{si} \quad t_1 - t \gg 1/k_M c} \quad (\text{VII-40})$$

$$[G_A(t), E_{0i}^{(-)}(\vec{0}, t_1)] = \frac{i\hbar}{d} \gamma \delta_{i3} [G_A(t), A_+(t_1)] \quad \text{si} \quad t_1 - t \gg 1/k_M c \quad (\text{VII-41})$$

$$[G_A(t), E_{0i}^{(-)}(\vec{0}, t)] = \frac{i\hbar}{d} \left(\frac{\gamma}{2} + i\delta \right) \delta_{i3} [G_A(t), A_+(t)] + \frac{i\hbar}{d} (-i\delta) \delta_{i3} [G_A(t), A_-(t)] \quad (\text{VII-42})$$

Appendice : Calcul de $F_{ij}(\vec{r}, \tau)$

- Sommation sur les polarisations.

Soient \vec{E} et \vec{E}' 2 vecteurs unitaires $\perp \vec{k}$ et \perp entre eux. En les complétant avec \vec{k}/k , on obtient une base orthonormale satisfaisant la relation de fermeture

$$E_i E_j + E'_i E'_j + \frac{k_i k_j}{k^2} = \delta_{ij} \quad (\text{A-1})$$

ce qui donne

$$\sum_{\vec{E} \perp \vec{k}} E_i E_j = \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \quad (\text{A-2})$$

- En utilisant

$$\left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} = \left(\delta_{ij} + \frac{1}{k^2} \frac{\partial^2}{\partial r_i \partial r_j} \right) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \quad (\text{A-3})$$

$$\text{et} \quad \sum_{\vec{k}} = \frac{L^3}{(2\pi)^3} \int_0^{k_M} dk k^2 \int d\Omega \quad (\text{A-4})$$

on obtient, après intégration angulaire

$$F_{ij}(\vec{r}, \tau) = \frac{i}{\hbar} \frac{L^3}{(2\pi)^3} 2\pi \int_0^{k_M} dk k^2 \frac{\hbar c k}{2\epsilon_0 L^3} \left(\delta_{ij} + \frac{1}{k^2} \frac{\partial^2}{\partial r_i \partial r_j} \right) \frac{e^{ikr} - e^{-ikr}}{ikr} e^{-i\omega\tau} + c.c. \quad (\text{A-5})$$

Ajouter le complexe conjugué de l'expression écrite en (A-5) revient simplement à changer les bornes d'intégration

$$\int_0^{k_M} \rightarrow \int_{-k_M}^{+k_M}$$

- Cas $r \gg 1/k_M$

On ne peut pas faire de développement limité de $\frac{e^{ikr} - e^{-ikr}}{ikr}$.
Un calcul de dérivations élémentaires donne

$$\left(\delta_{ij} + \frac{1}{k^2} \frac{\partial^2}{\partial r_i \partial r_j} \right) \frac{e^{\pm ikr}}{r} = \frac{1}{r} \left(\delta_{ij} - \frac{x_i x_j}{r^2} \right) e^{\pm ikr} \pm \frac{i}{kr^2} \left(\delta_{ij} - \frac{3x_i x_j}{r^2} \right) e^{\pm ikr} - \frac{1}{k^2 r^3} \left(\delta_{ij} - \frac{3x_i x_j}{r^2} \right) e^{\pm ikr} \quad (\text{A-6})$$

ce qui reporté dans (A-5) donne finalement

$$F_{ij}(\vec{r}, \tau) = \frac{c}{4\pi\epsilon_0} \times \left\{ \begin{aligned} & - \frac{1}{r} (\delta_{ij} - \frac{x_i x_j}{r^2}) \frac{1}{2\pi} \int_{-k_M}^{+k_M} dk (-k^2) [e^{ik(r-\tau)} - e^{-ik(r+\tau)}] \\ & + \frac{1}{r^2} (\delta_{ij} - \frac{3x_i x_j}{r^2}) \frac{1}{2\pi} \int_{-k_M}^{+k_M} dk (ik) [e^{ik(r-\tau)} + e^{-ik(r+\tau)}] \\ & - \frac{1}{r^3} (\delta_{ij} - \frac{3x_i x_j}{r^2}) \frac{1}{2\pi} \int_{-k_M}^{+k_M} dk [e^{ik(r-\tau)} - e^{-ik(r+\tau)}] \end{aligned} \right\} \quad (A-7)$$

En utilisant $\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} dk$, $\delta'(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (ik) e^{ikx} dk$,
on obtient alors (VII-20)

- Cas $r \ll 1/k_M$. On peut alors faire un développement limité de

$$\frac{e^{ikr} - e^{-ikr}}{ikr} = 2 \left(1 - \frac{k^2 r^2}{6} + \dots \right) \quad (A-8)$$

ce qui donne

$$\left(\delta_{ij} + \frac{1}{k^2} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \right) \frac{e^{ikr} - e^{-ikr}}{ikr} = 2 \left(\delta_{ij} - \frac{2\delta_{ij}}{6} + o(kr) \right) = \frac{4}{3} \delta_{ij} \quad (A-9)$$

On vérifie aisément qu'on obtient le même résultat qu'en faisant d'emblée $\vec{r} = \vec{0}$ dans (VII-19)

En reportant (A-9) dans (A-5), on obtient

$$F_{ij}(\vec{0}, \tau) = \frac{2}{3} \frac{\delta_{ij}}{\epsilon_0 c^3} \frac{1}{(2\pi)^2} \underbrace{\int_{-w_M}^{+w_M} dw \omega^3 \sin \omega \tau}_{\frac{d^3}{d\tau^3} \int_{-w_M}^{w_M} dw \cos \omega \tau} = \frac{1}{3\pi \epsilon_0 c^3} \delta_{ij} \delta'''(\tau) \quad (A-10)$$

c.à-d finalement

$$F_{ij}(\vec{0}, \tau) = \frac{1}{3\pi \epsilon_0 c^3} \delta_{ij} \delta'''(\tau) \quad (A-11)$$

IntroductionConclusions des cours précédents

- Le champ rayonné par un atome n'est pas un champ classique
- Autre manifestation (indirecte) de ce fait : échec de la théorie "néo-classique" de Jaynes, où l'on essaie de décrire l'émission spontanée comme due à l'interaction de l'atome avec un champ classique dont il serait la source
- Approche quantique (cours de la semaine précédente) : exprimer le champ arrivant sur le détecteur en fonction du dipôle émetteur \vec{D} (noter qu'on prend \vec{D} et non $\langle \vec{D} \rangle$). On est ainsi ramené au calcul d'une fonction de corrélation de \vec{D} qu'on évalue grâce à l'approximation de mémoire courte (vinage du champ du vide qui fluctue très vite)

Autre tentative "semi-classique"

Pourrait-on comprendre l'émission spontanée de l'atome en faisant intervenir uniquement une réaction de rayonnement purement atomique ?

Pourrait-on se passer du champ du vide ?

Objet des 4 derniers cours

Essayer de répondre à ces questions à partir d'une étude des équations de Heisenberg du système atome source + champ
Pourquoi les équations de Heisenberg ? Elles permettent de faire un parallèle très étroit entre physique classique et physique quantique.

Plan de ce cours

- 1 - Rappels sur les développements des champs en modes.
Introduction d'une coupure (Transparent T1)
- 2 - Modèle simple d'atome (T2)
(Beaucoup plus général que celui considéré page VII-2)
- 3 - Autre forme plus commode de l'hamiltonien à l'approximation dipolaire électrique (T3, T4, T5)
- 4 - Equations de Heisenberg pour le champ
Champ du vide et champ des sources (près et loin de la source) (T6 à T14)
- 5 - Equations de Heisenberg pour le dipôle
Analogie avec les équations classiques (T15 et T16)

T 1

Développement du champ en modes

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \sum_{\vec{k}} \sum_{\vec{\epsilon} \perp \vec{k}} \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 \omega L^3}} [a_{\vec{k}\vec{\epsilon}}(t) \vec{\epsilon} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} + h.c.]$$

$$\vec{E}_{\perp}(\vec{x}, t) = \sum_{\vec{k}} \sum_{\vec{\epsilon} \perp \vec{k}} \sqrt{\frac{\hbar \omega}{2\epsilon_0 L^3}} [i a_{\vec{k}\vec{\epsilon}}(t) \vec{\epsilon} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} + h.c.]$$

$$\underbrace{\sum_{\vec{k}}}_{NR} \underbrace{\sum_{\vec{\epsilon} \perp \vec{k}}}_{\vec{E}_{\perp}^{(+)}(\vec{x}, t)}$$

$$\omega = ck$$

$\vec{E} \perp \vec{k} \rightarrow$ champs "transverses"

Coupure à $k = k_M$

$$\int_0^{\infty} dk \rightarrow \int_0^{k_M} dk$$

$$k_0 \ll k_M \ll 1/a_0$$

↑ Fréquence optique ↑ a_0 : rayon de Bohr

Equivalence à un moyennage spatial des champs sur une sphère de rayon $1/k_M$.

T 3

Transformation unitaire U

$$U = \exp \left[-\frac{ie}{\hbar} \vec{r} \cdot \vec{A}(\vec{0}) \right]$$

U translate \vec{p}

$$U \vec{p} U^{\dagger} = \vec{p} + e \vec{A}(\vec{0})$$

$$U \frac{1}{2m_0} [\vec{p} - e \vec{A}(\vec{0})]^2 U^{\dagger} = \frac{\vec{p}}{2m_0}$$

grande simplification

U translate aussi a_i et a_i^{\dagger}

$$-\frac{ie}{\hbar} \vec{r} \cdot \vec{A}(\vec{0}) = \sum_i (p_i^{\dagger} a_i - p_i a_i^{\dagger})$$

$$p_i = \frac{ie}{\hbar} \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 \omega_i L^3}} \vec{\epsilon}_i \cdot \vec{r}$$

$$\begin{cases} U a_i U^{\dagger} = a_i + p_i \\ U a_i^{\dagger} U^{\dagger} = a_i^{\dagger} + p_i^{\dagger} \end{cases}$$

(Formule de Glauber)

T 2

VIII-2

Charge liée en $\vec{0}$

Hamiltonien du système charge + champ

$$H = \frac{1}{2m_0} [\vec{p} - e \vec{A}(\vec{r})]^2 + V(r) + H_R$$

m_0 : masse e : charge

\vec{r} et \vec{p} : position et impulsion

$V(\vec{r})$: potentiel liant la charge en $\vec{0}$

$$H_R = \sum_i \hbar \omega_i (a_i^{\dagger} a_i + \frac{1}{2})$$

$$\left(\sum_i = \sum_{\vec{k}} \sum_{\vec{\epsilon} \perp \vec{k}} \right)_{k < k_M}$$

Approximation dipolaire électrique

$$\frac{1}{2m_0} [\vec{p} - e \vec{A}(\vec{r})]^2 \rightarrow \frac{1}{2m_0} [\vec{p} - e \vec{A}(\vec{0})]^2$$

T 4

Transformation de H_R

$$U \sum_i \hbar \omega_i (a_i^{\dagger} a_i + \frac{1}{2}) U^{\dagger} =$$

$$\sum_i \hbar \omega_i [(a_i^{\dagger} + p_i^{\dagger})(a_i + p_i) + \frac{1}{2}] =$$

$$= \sum_i \hbar \omega_i (a_i^{\dagger} a_i + \frac{1}{2}) \leftarrow H_R \text{ (champ)}$$

$$+ \sum_i \hbar \omega_i (a_i^{\dagger} p_i + a_i p_i^{\dagger}) \leftarrow W_1 \text{ (champ + particule)}$$

$$+ \sum_i \hbar \omega_i p_i^{\dagger} p_i \leftarrow A_2 \text{ (particule)}$$

$$U H_R U^{\dagger} = H_R + W_1 + A_2$$

$$W_1 = -e \vec{r} \cdot \left[\sum_i \sqrt{\frac{\hbar \omega_i}{2\epsilon_0 L^3}} i \vec{\epsilon}_i a_i + h.c. \right]$$

$$= -e \vec{r} \cdot \vec{E}_{\perp}(\vec{0}) = -\vec{D} \cdot \vec{E}_{\perp}(\vec{0})$$

$$A_2 = \sum_i \hbar \omega_i \frac{\hbar}{2\epsilon_0 \omega_i L^3} \frac{e^2}{\hbar^2} (\vec{\epsilon}_i \cdot \vec{r})^2$$

$$= \frac{1}{6\epsilon_0 \pi^2} \vec{D}^2 \int_0^{k_M} k^2 dk = \frac{k_M^3}{18\epsilon_0 \pi^2} \vec{D}^2$$

T5

Nouvel hamiltonien H'

$$H' = U H U^\dagger = \underbrace{\frac{\vec{p}^2}{2m_0} + V(\vec{r})}_{H_A} + \underbrace{\frac{\hbar^3}{18 \epsilon_0 \pi^2}}_{\text{"Self-énergie" atomique}} \vec{D}^2 + H_R - \underbrace{\vec{D} \cdot \vec{E}_\perp(\vec{0}, t)}_{\text{Interaction}}$$

Avantages

- 1 - Terme d'interaction très simple
- 2 - Élimination des précurseurs instantanés du champ transverse

Références

- Cours 1974-75
- E.A. POWER, T. THIRUNAMACHANDRAN Am. J. Phys. 46, 370 (1978) et références in

T7

Calcul du champ $\vec{E}_\perp(\vec{x}, t)$

Report de la solution trouvée pour $a_{kE}(t)$ dans le développement en mode de $\vec{E}_\perp(\vec{x}, t)$

$$E_i(\vec{x}, t) = E_{oi}(\vec{x}, t) \leftarrow \text{champ du vide} + \underbrace{\int_0^{t-t_0} d\tau F_{ij}(\vec{x}, \tau) D_j(t-\tau)}_{\text{Champ des sources}}$$

Expression du tenseur $F_{ij}(\vec{x}, \tau)$

$$F_{ij}(\vec{x}, \tau) = \frac{i}{\hbar} \sum_{\vec{k}} \sum_{\vec{E} \perp \vec{k}} E_i E_j \sqrt{\hbar}^2 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega \tau)} + c.c.$$

Calcul fait en appendice (pages VII-9 et VII-10)

T6

VIII-3

Equations du mouvement des a_{kE}

Autre manière ("hamiltonienne") d'écrire les équations de Maxwell en présence des sources atomiques.

$$i\hbar \frac{d}{dt} a_{kE}(t) = [a_{kE}(t), H'] = [a_{kE}(t), H_R] + [a_{kE}(t), -\vec{D} \cdot \vec{E}_\perp(\vec{0}, t)]$$

$$\hbar \omega a_{kE}(t) \quad i N_k \vec{E} \cdot \vec{D}(t)$$

$$\frac{d}{dt} a_{kE}(t) = -i\omega a_{kE}(t) + \frac{N_k}{\hbar} E_j D_j(t)$$

Equation linéaire en a_{kE}

$$a_{kE}(t) = a_{kE}(t_0) e^{-i\omega(t-t_0)} + \frac{N_k}{\hbar} \int_0^{t-t_0} d\tau E_j D_j(t-\tau) e^{-i\omega\tau}$$

↑ Contribution du vide
↑ Contribution des sources

Même résultat qu'en électromagnétisme classique

T8

Quelques formules utiles pour ce calcul

① Sommation sur les polarisations transverses

$(\vec{E}, \vec{E}', \frac{\vec{k}}{k})$: Base orthonormée

↳ Relation de fermeture

$$E_i E_j + E'_i E'_j + \frac{k_i k_j}{k^2} = \delta_{ij}$$

$$\sum_{\vec{E} \perp \vec{k}} E_i E_j = \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}$$

$$\textcircled{2} \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} = \left(\delta_{ij} + \frac{1}{k^2} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \right) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}}$$

$$\textcircled{3} \sum_{\vec{k} < k_M} = \frac{L^3}{(2\pi)^3} \int_0^{k_M} k^2 dk \int d\Omega$$

T 9

Exemple : calcul de $F_{ij}(\vec{0}, \tau)$

$$F_{ij}(\vec{0}, \tau) = \frac{i}{\hbar} \sum_{\vec{k} \in \mathbb{R}^3} \epsilon_i \epsilon_j \frac{\hbar \omega}{2 \epsilon_0 L^3} e^{-i\omega \tau} + c.c.$$

$$= \frac{1}{\epsilon_0 L^3} \sum_{\vec{k} \in \mathbb{R}^3} \epsilon_i \epsilon_j \omega \sin \omega \tau$$

$$\sum_{\vec{k} \in \mathbb{R}^3} \epsilon_i \epsilon_j = \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}$$

$$\int d\Omega (\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}) = 4\pi \frac{2}{3} \delta_{ij} = \frac{8\pi}{3} \delta_{ij}$$

$$F_{ij}(\vec{0}, \tau) = \frac{\delta_{ij}}{\epsilon_0 (2\pi)^3} \frac{8\pi c}{3} \int_0^{k_M} dk k^3 \sin \omega \tau$$

$$= \frac{2}{3} \frac{\delta_{ij}}{\epsilon_0 c^3} \frac{1}{(2\pi)^2} \underbrace{\int_{-ck_M}^{+ck_M} d\omega \omega^3 \sin \omega \tau}_{\frac{d^3}{d\tau^3} \underbrace{\int_{-ck_M}^{+ck_M} d\omega \cos \omega \tau}_{2\pi \delta(\tau)}}$$

$$= \frac{1}{3\pi \epsilon_0 c^3} \ddot{\delta}(\tau)$$

T 11

Champ rayonné par le dipôle au loin ($x \gg 1/k_M$)

$$E_i(\vec{x}, \tau) - E_{oi}(\vec{x}, \tau) =$$

$$- \frac{1}{4\pi \epsilon_0 c^2} \frac{1}{x} (\delta_{ij} - \frac{x_i x_j}{x^2}) \ddot{D}_j(t - \frac{x}{c})$$

$$- \frac{1}{4\pi \epsilon_0 c} \frac{1}{x^2} (\delta_{ij} - \frac{3x_i x_j}{x^2}) \dot{D}_j(t - \frac{x}{c})$$

$$- \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{1}{x^3} (\delta_{ij} - \frac{3x_i x_j}{x^2}) D_j(t - \frac{x}{c})$$

Effets de retard

Dépendance angulaire

Dépendance de la distance

Cas d'un dipôle harmonique $\omega_0 = ck_0$

$$k_0 x \gg 1 \quad E \sim 1/x$$

$$k_0 x \ll 1 \quad E \sim 1/x^3$$

T 10

Résultat du calcul de $F_{ij}(\vec{x}, \tau)$

Pour $x \gg 1/k_M$

$$4\pi \epsilon_0 F_{ij}(\vec{x}, \tau) = \frac{1}{r} (\delta_{ij} - \frac{x_i x_j}{x^2}) [-\frac{1}{c^2} \ddot{\delta}(t - \frac{x}{c}) + \frac{1}{c^2} \ddot{\delta}(t + \frac{x}{c})] + \frac{1}{r^2} (\delta_{ij} - \frac{3x_i x_j}{x^2}) [-\frac{1}{c} \dot{\delta}(t - \frac{x}{c}) - \frac{1}{c} \dot{\delta}(t + \frac{x}{c})] - \frac{1}{r^3} (\delta_{ij} - \frac{3x_i x_j}{x^2}) [\delta(t - \frac{x}{c}) - \delta(t + \frac{x}{c})]$$

Pour $x \ll 1/k_M$ $F_{ij}(\vec{x}, \tau) \simeq F_{ij}(\vec{0}, \tau)$

$$F_{ij}(\vec{0}, \tau) = \frac{1}{3\pi \epsilon_0 c^3} \delta_{ij} \ddot{\delta}(\tau)$$

Les fonctions "δ" ont une largeur finie, due à la coupure à k_M

$$\delta(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-ck_M}^{+ck_M} e^{i\omega \tau} d\omega$$

Largeur $\sim 1/ck_M$

T 12

Champ rayonné par le dipôle à son propre emplacement ($x \ll 1/k_M$)

$$\delta E_i(\vec{x}, \tau) = E_i(\vec{x}, \tau) - E_{oi}(\vec{x}, \tau) =$$

$$\frac{1}{3\pi \epsilon_0 c^3} \int_0^{t-t_0} d\tau \ddot{\delta}(\tau) D_i(t-\tau)$$

Intégration par parties successive

$$\int_0^{t-t_0} d\tau \ddot{\delta}(\tau) D_i(t-\tau) = \underbrace{[\dot{\delta}(\tau) D_i(t-\tau)]_0^{t-t_0}}_{= -\dot{\delta}(0) D_i(t)}$$

$$+ \int_0^{t-t_0} d\tau \dot{\delta}(\tau) \dot{D}_i(t-\tau) = 0 \quad (\dot{\delta} \text{ impaire})$$

$$\int_0^{t-t_0} d\tau \ddot{\delta}(\tau) \dot{D}_i(t-\tau) = \underbrace{[\delta(\tau) \dot{D}_i(t-\tau)]_0^{t-t_0}}_{= 0 \quad (\delta \text{ impaire})}$$

$$+ \int_0^{t-t_0} \dot{\delta}(\tau) \ddot{D}_i(t-\tau) = -\dot{\delta}(0) \ddot{D}_i(t)$$

$$\int_0^{t-t_0} \dot{\delta}(\tau) \ddot{D}_i(t-\tau) = \underbrace{[\delta(\tau) \ddot{D}_i(t-\tau)]_0^{t-t_0}}_{= -\delta(0) \ddot{D}_i(t)}$$

$$+ \int_0^{t-t_0} \delta(\tau) \ddot{\ddot{D}}_i(t-\tau) = \frac{1}{2} \ddot{\ddot{D}}_i(t)$$

$$= \frac{1}{2} \ddot{\ddot{D}}_i(t)$$

T13

En regroupant tout,

$$\int_0^t d\tau \ddot{\delta}(\tau) D_i(t-\tau) =$$

$$- \ddot{\delta}(0) D_i(t) - \delta(0) \ddot{D}_i(t) + \frac{1}{2} \ddot{\ddot{D}}_i(t)$$

$$\text{De } \delta(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-ck_m}^{+ck_m} e^{i\omega\tau} d\omega,$$

on tire

$$\delta(0) = \frac{ck_m}{\pi} \quad \ddot{\delta}(0) = -\frac{c^3 k_m^3}{3\pi}$$

ce qui donne finalement

$$\delta \vec{E}(\vec{o}, t) = \vec{E}(\vec{o}, t) - E_0(\vec{o}, t) =$$

$$\frac{e^2 k_m^3}{9\pi^2 \epsilon_0} \vec{r}(t) - \frac{ek_m}{3\pi^2 \epsilon_0 c^2} \ddot{\vec{r}}(t) + \frac{e}{6\pi \epsilon_0 c^3} \ddot{\ddot{\vec{r}}}(t)$$

T15

Equation du mouvement de la charge

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [\vec{r}, H'] = \frac{\partial H'}{\partial \vec{p}} = \frac{\vec{p}}{m_0}$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m_0 \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \frac{1}{i\hbar} [\vec{p}, H']$$

$$\frac{1}{i\hbar} [\vec{p}, V(\vec{r})] = -\vec{\nabla} V(\vec{r})$$

$$\frac{1}{i\hbar} [\vec{p}, \vec{D}^2] = \frac{e^2}{i\hbar} [\vec{p}, \vec{r}^2] = -2e^2 \vec{r}$$

$$\hookrightarrow \frac{1}{i\hbar} [\vec{p}, \frac{k_m^3}{18\epsilon_0 \pi^2} \vec{D}^2] = -\frac{e^2 k_m^3}{9\epsilon_0 \pi^2} \vec{r}$$

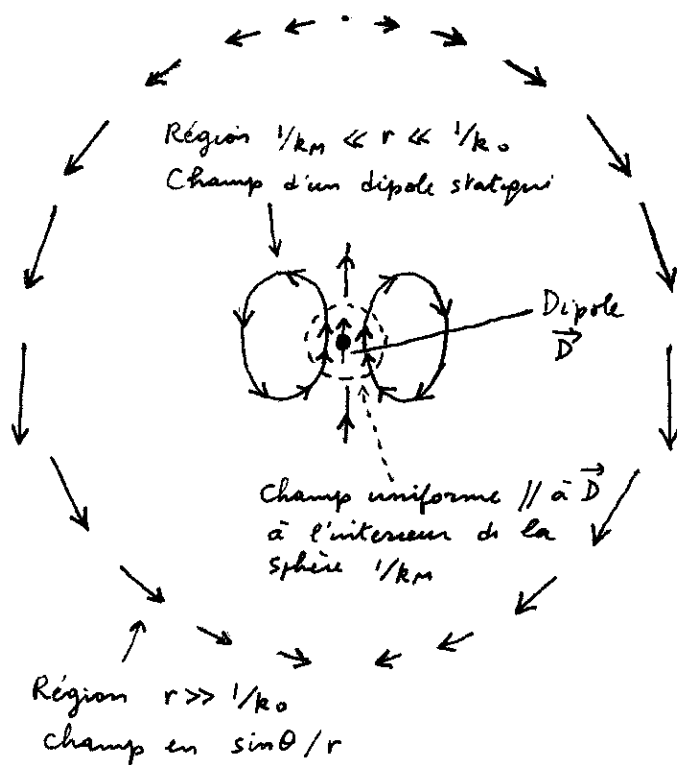
$$\frac{1}{i\hbar} [\vec{p}, \vec{D} \cdot \vec{E}(\vec{o})] = -\frac{e}{i\hbar} \vec{E}(\vec{o}) \underbrace{[\vec{p}, \vec{r}]}_{-i\hbar}$$

$$= e \vec{E}(\vec{o})$$

T14

VIII-5

Allure de la répartition spatiale du champ du dipôle



T-16

En regroupant tout

$$m_0 \ddot{\vec{r}} = -\vec{\nabla} V(\vec{r}) - \frac{e^2 k_m^3}{9\epsilon_0 \pi^2} \vec{r} + e \vec{E}(\vec{o})$$

Or, d'après le calcul précédent (T13)

$$e \vec{E}(\vec{o}) = e \vec{E}_0(\vec{o}) \leftarrow \text{Champ du vide}$$

$$+ \frac{e^2 k_m^3}{9\epsilon_0 \pi^2} \vec{r} - \frac{e^2 k_m}{3\pi^2 \epsilon_0 c^2} \ddot{\vec{r}} + \frac{e^2}{6\pi \epsilon_0 c^3} \ddot{\ddot{\vec{r}}}$$

champ de la source à son emplacement

Finalement

$$m_0 \ddot{\vec{r}} = -\vec{\nabla} V(\vec{r}) \leftarrow \text{Force liante}$$

$$+ e \vec{E}_0(\vec{o}, t) \leftarrow \text{Force due au champ du vide}$$

$$+ \frac{e^2}{4\pi \epsilon_0} \frac{2}{3c^2} \ddot{\ddot{\vec{r}}}(t) \leftarrow \text{Freinage dû à la réaction de rayonnement}$$

$$- \frac{e^2 k_m}{3\pi^2 \epsilon_0 c^2} \ddot{\vec{r}} \leftarrow \text{Inertie due à la réaction de rayonnement}$$

Masse "expérimentale" m

$$m = m_0 + \frac{e^2 k_m}{3\pi^2 \epsilon_0 c^2}$$

Rappels

Principe

Hamiltonien $H = H_A + H_R - e \vec{r} \cdot \vec{E}(\vec{0}, t)$

$\frac{d}{dt} a_{kE} = \frac{1}{i\hbar} [a_{kE}, H]$

Eq. de Maxwell avec sources

$\vec{E}(\vec{x}, t) = \vec{E}_0(\vec{x}, t) + \vec{E}_s(\vec{x}, t)$
 ↑ ↑
 Champ du vide Champ des sources

$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [\vec{r}, H]$ $\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [\vec{p}, H]$

Eq. de Newton avec champ

$\frac{d}{dt} \vec{p}(t) = \frac{1}{i\hbar} [\vec{p}, H_A] + e \vec{E}(\vec{0}, t)$

$\vec{x} = \vec{0}$

On obtient ainsi

$m_0 \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = - \vec{\nabla} H_A + e \vec{E}_s(\vec{0}, t) + e \vec{E}_0(\vec{0}, t)$
 ↑ ↑ ↑
 Force atomique Force due au champ des sources Force due au champ du vide

En explicitant \vec{E}_s et H_A

$(m_0 + \delta m) \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = - \vec{\nabla} V(\vec{r}) + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{3c^2} \ddot{\vec{r}} + e \vec{E}_0(\vec{0}, t)$
 ↑ ↑
 Inertie électromagnétique Réaction de rayonnement
 $\delta m = \frac{e^2 \hbar m}{3\pi^2 \epsilon_0 c^2}$

Plan de ce cours

1 - Introduction

Intérêt d'étudier des observables autres que \vec{r} et \vec{p} (T1)
 Modèles très simplifiés d'atomes - les avantages, les dangers, les notations (T2 à T4)

2 - Retour sur le champ rayonné par le dipôle à son propre emplacement

Aspects nouveaux par rapport au calcul précédent (T5)
 Calcul et approximations (T6 à T8)
 Interprétation physique (T9 à T10)

3 - Equations de Heisenberg pour l'oscillateur harmonique

Calcul et interprétation physique (T11 à T13)

4 - Equations de Heisenberg pour l'atome à 2 niveaux

Calcul et interprétation physique (T14 à T20)

T1]

\vec{r} et \vec{p} ne sont pas les seules observables atomiques intéressantes.

Les mêmes spectroscopies donnent plutôt les fréquences de Bohr atomiques $(E_p - E_n)/h$

$$\text{---} |\varphi_q\rangle \quad H_A |\varphi_n\rangle = E_n |\varphi_n\rangle$$

$$\text{---} |\varphi_p\rangle \quad S_{np} = |\varphi_n\rangle \langle \varphi_p|$$

$$\text{---} |\varphi_n\rangle \quad \frac{d}{dt} S_{np} = \frac{i}{\hbar} [S_{np}, H]$$

Peut-on obtenir une équation simple décrivant l'évolution de S_{np} sous l'effet du processus d'émission ?

Quels sont les rôles respectifs du champ du vide et du champ des sources dans l'élargissement et le déplacement radiatifs des raies atomiques ?

Le champ du vide est-il essentiel ?

T3]

Atomes à 2 niveaux

Opérateurs S_+, S_-, S_z

$$\begin{array}{c} |e\rangle \\ \updownarrow \omega_0 \\ |g\rangle \end{array} \quad \begin{cases} S_+ = |e\rangle \langle g| \\ S_- = |g\rangle \langle e| \\ S_z = \frac{1}{2} (|e\rangle \langle e| - |g\rangle \langle g|) \end{cases}$$

$$|e\rangle \langle e| + |g\rangle \langle g| = 1$$

Dipole atomique \vec{D}

Vibre le long de Oz

$$D_i = \delta_{iz} d (S_+ + S_-)$$

d : nombre réel ayant les dimensions d'un dipole

Hamiltonien atomique H_A

$$H_A = \hbar \omega_0 S_z$$

(Terme de "self-énergie" $A_2 \sim \mathbb{1}$)

Evolution non perturbée de S_{\pm}

$$S_{\pm}(t) \sim e^{\pm i\omega_0(t-t_0)} S_{\pm}(t_0)$$

T.2]

IX-2

Modèles simples à 2 niveaux

Très nombreux articles

Avantages

- Calculs plus simples
- Analogie avec des spins $1/2$ ("Equations de Bloch optiques").

Dangers

- Base incomplète d'états
Effets non résonnants (déplacements) impossibles à calculer exactement
- Renormalisation
Ne peut être discutée sérieusement
- On perd l'aspect position et impulsion
Image de la charge vibrant sous l'effet du champ du vide et moyennant le potentiel atomique dans un volume fini.
(Interprétation du "Lamb-shift" par Welton)

T4]

Un autre système simple

Oscillateur harmonique à 1 dimension

Hamiltonien H_A

$$H_A = \hbar \omega_0 (b^\dagger b + \frac{1}{2})$$

Dipole \vec{D}

Vibre le long de Oz

$$D_i = \delta_{iz} d (b^\dagger + b)$$

Comparaison avec le système à 2 niveaux

(i) Dans les 2 cas

$$D_i = \delta_{iz} d (A_+ + A_-)$$

avec $A_{\pm}(t) \sim e^{\pm i\omega_0 t}$

Une seule fréquence propre pour D_z

(ii) L'oscillateur harmonique est linéaire.

Le système à 2 niveaux est non-linéaire.

T-5] Calcul du champ rayonné par le dipôle à son propre emplacement

Aspects nouveaux (par rapport au calcul précédent)

- ① - Pour la suite de la discussion, il faut calculer $\vec{E}^{(\pm)}(\vec{0}, t)$ (et non pas seulement $\vec{E}(\vec{0}, t)$)
- ② Moyennant certaines approximations, on peut exprimer $\vec{E}^{(\pm)}(\vec{0}, t)$ en fonction de $\vec{D}(t)$ seulement (au lieu de $\vec{D}, \ddot{\vec{D}}, \dddot{\vec{D}}$)
- ③ Les coefficients des équations reliant $\vec{E}^{(\pm)}(\vec{0}, t)$ à $\vec{D}(t)$ sont proportionnels aux élargissements et déplacements radiatifs des niveaux

T6]

Rappel de l'expression de $a_{kE}(t)$

$$a_{kE}(t) = a_{kE}(t_0) e^{-i\omega(t-t_0)} \leftarrow \text{vide}$$

$$+ \frac{N_k}{\hbar} \int_0^{t-t_0} d\tau E_j D_j(t-\tau) e^{-i\omega\tau} \leftarrow \text{source}$$

Report dans le développement de $\vec{E}^{(+)}(\vec{0}, t)$

$$E_i^{(+)}(\vec{0}, t) = \sum_{\vec{k} \in \mathcal{E}} i N_k E_i a_{kE}(t) =$$

$$E_{oi}^{(+)}(\vec{0}, t) + \int_0^{t-t_0} d\tau F_{ij}^{(+)}(\tau) D_j(t-\tau)$$

$$F_{ij}^{(+)}(\tau) = \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{i}{\hbar} \sum_{k < k_m} N_k^2 e^{-i\omega\tau}$$

$F_{ij}^{(+)}(\tau)$: fonction "étroite", centrée en $\tau=0$, de largeur $1/c k_m$

Valeur de $D_{ij}(t-\tau)$ dans les modèles simples étudiés ici

$$D_{ij}(t-\tau) = \delta_{ij} d [A_+(t-\tau) + A_-(t-\tau)]$$

T-7]

Enfinement,

$$E_i^{(+)}(\vec{0}, t) - E_{oi}^{(+)}(\vec{0}, t) = d \delta_{i3} \int_0^{t-t_0} d\tau F_{ij}^{(+)}(\tau) [A_+(t-\tau) + A_-(t-\tau)]$$

Approximation (ordre le plus bas en d)

A cause de la présence de $F_{ij}^{(+)}(\tau)$, seules les valeurs très faibles de τ contribuent. L'évolution de A_{\pm} entre t et $t-\tau$ peut être remplacée par l'évolution non perturbée

$$A_{\pm}(t-\tau) = A_{\pm}(t) e^{\mp i\omega_0\tau}$$

Ceci fait apparaître une double intégrale en τ et en k entièrement calculable (voir pages VII-5 et VII-6)

Approximation équivalente dans le calcul faisant apparaître $\ddot{\vec{D}}$ et $\ddot{\vec{D}}$

$$\dot{A}_+ = i\omega_0 A_+ \quad \ddot{A}_+ = -\omega_0^2 A_+ \quad \dddot{A}_+ = -i\omega_0^3 A_+$$

T8]

Résultats du calcul

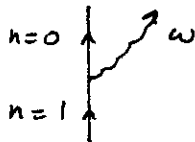
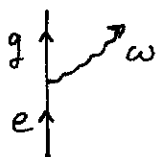
$$E_i^{(+)}(\vec{0}, t) - E_{oi}^{(+)}(\vec{0}, t) = \pm \frac{i\hbar}{d} \delta_{i3} \left[\left(\frac{\gamma}{2} \pm i\delta \right) S_{\mp}(t) \pm i\bar{\delta} S_{\pm}(t) \right]$$

avec

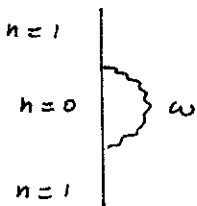
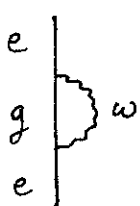
$$\left\{ \begin{aligned} \gamma &= \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{\vec{k} \in \mathcal{E}} d^2 E_3^2 N_k^2 \delta(\hbar\omega - \hbar\omega_0) \\ \delta &= \frac{1}{\hbar} \mathcal{P} \sum_{\vec{k} \in \mathcal{E}} \frac{d^2 E_3^2 N_k^2}{\hbar\omega_0 - \hbar\omega} \\ \bar{\delta} &= \frac{1}{\hbar} \mathcal{P} \sum_{\vec{k} \in \mathcal{E}} \frac{d^2 E_3^2 N_k^2}{-\hbar\omega_0 - \hbar\omega} \end{aligned} \right.$$

Composante en quadrature avec S_{\pm} proportionnelle à γ

T 9

Interprétation de γ 

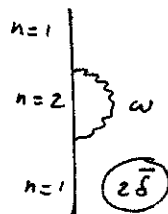
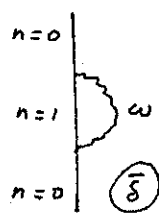
Probabilité d'émission spontanée d'un photon par unité de temps (Règle d'or de Fermi)

Interprétation de δ 

Déplacement radiatif dû à l'émission et à la réabsorption virtuelle d'un photon (l'atome passant virtuellement dans un niveau inférieur)

IX-4

T 10

Interprétation de $\bar{\delta}$ 

Déplacement radiatif dû à l'émission et à la réabsorption virtuelle d'un photon (l'atome passant virtuellement dans un niveau supérieur)

Récapitulation pour les déplacements

- Systèmes à 2 niveaux

$$\delta_e = \delta \quad \delta_g = \bar{\delta}$$

- Oscillateur harmonique

$$\delta_1 = \delta + 2\bar{\delta} \quad \delta_0 = \bar{\delta}$$

T 11

Equations de Heisenberg pour l'oscillateur harmonique

$$H = \hbar\omega_0 [b^\dagger(t)b(t) + \frac{1}{2}] + H_R - d [b^\dagger(t) + b(t)] E_3(\vec{0}, t)$$

$$\frac{d}{dt} b(t) = \frac{1}{i\hbar} [b(t), H] = -i\omega_0 b(t) - \frac{d}{i\hbar} E_3(\vec{0}, t)$$

$$E_3(\vec{0}, t) = E_{03}(\vec{0}, t) + \frac{i\hbar}{d} \left[\left(\frac{\gamma}{2} + i\delta + i\bar{\delta} \right) b(t) - \left(\frac{\gamma}{2} - i\delta - i\bar{\delta} \right) b^\dagger(t) \right]$$

$$\frac{d}{dt} b(t) = -i\omega_0 b(t) + \frac{id}{\hbar} E_{03}(\vec{0}, t) - \left(\frac{\gamma}{2} + i\delta + i\bar{\delta} \right) b(t) + \left(\frac{\gamma}{2} - i\delta - i\bar{\delta} \right) b^\dagger(t)$$

On néglige ce couplage "non-seculaire" entre b et b^\dagger (r.w.o.)

T 12

Finalement,

$$\frac{d}{dt} b(t) = -\frac{\gamma}{2} b(t) - i(\omega_0 + \delta\omega_0) b(t) + \frac{id}{\hbar} E_{03}(\vec{0}, t)$$

$$\text{avec } \delta\omega_0 = \delta + \bar{\delta} = \delta_1 - \delta_0$$

Analogie avec une équation de Langevin les termes en $\gamma/2$ et $\delta\omega_0$ proviennent de l'interaction de l'oscillateur avec son propre champ

Valeurs moyennes

- Etat initial du champ : vide ou état cohérent

$$|\Psi_R(t_0)\rangle = |0\rangle \quad \text{ou} \quad |\Psi_R(t_0)\rangle = |\{\alpha\}\rangle$$

$$\langle 0 | E_{03}(\vec{0}, t) | 0 \rangle = 0$$

$$\langle \{\alpha\} | E_{03}(\vec{0}, t) | \{\alpha\} \rangle = E_{03}(\vec{0}, t, \{\alpha\})$$

Champ classique associé à $\{\alpha\}$

T-13

Si l'on pose

$$\langle b(t) \rangle_R = \langle \Psi_R(t_0) | b(t) | \Psi_R(t_0) \rangle$$

$$\frac{d}{dt} \langle b(t) \rangle_R =$$

$$-\frac{\chi}{2} \langle b(t) \rangle_R - i(\omega_0 + \delta\omega_0) \langle b(t) \rangle_R + \begin{cases} 0 \\ \frac{i d}{\hbar} E_{03}(\vec{0}, t) \end{cases}$$

Equation d'un oscillateur amorti, attaqué par un champ classique (éventuellement nul si $|\Psi_R(t_0)\rangle = |0\rangle$)

Conclusions

① le déplacement de fréquence et l'amortissement sont dus uniquement à la réaction de rayonnement

② Pour les valeurs moyennes, le champ libre ne joue aucun rôle dans le vide, a le même effet qu'un champ classique s'il est dans un état cohérent.

La quantification du champ ne semble jouer aucun rôle.

T-14

Equations de Heisenberg

IX-5

pour l'atome à 2 niveaux

$$H = \hbar\omega_0 S_z(t) + H_R - d [S_+(t) + S_-(t)] E_3(\vec{0}, t)$$

$$[S_+(t), S_-(t)] = 2S_z(t) \quad [S_z(t), S_{\pm}(t)] = \pm S_{\pm}(t)$$

$$\frac{d}{dt} S_+(t) = \frac{1}{i\hbar} [S_+(t), H]$$

$$\frac{d}{dt} S_+(t) = i\omega_0 S_+(t) + \frac{2id}{\hbar} S_z(t) E_3(\vec{0}, t)$$

$$\frac{d}{dt} S_z(t) = \frac{1}{i\hbar} [S_z(t), H]$$

$$\frac{d}{dt} S_z(t) = \frac{id}{\hbar} [S_+(t) - S_-(t)] E_3(\vec{0}, t)$$

$E_3(\vec{0}, t)$ n'apparaît pas seul (comme pour l'oscillateur harmonique) mais multiplié par un opérateur atomique (Effet des non-linéarités)

T-15

Problème de l'ordre des opérateurs

A l'instant initial t_0 , les opérateurs atomiques $\{S_{\pm}(t_0), S_z(t_0)\}$ commutent avec les opérateurs de champ $\{E_i^{(\pm)}(\vec{x}, t_0) \dots\}$

L'évolution hamiltonienne entre t_0 et t conserve ces commutateurs. Les opérateurs "atomiques" $S_{\pm}(t), S_z(t)$ commutent avec les champs totaux $\{E_i^{(\pm)}(\vec{x}, t) \dots\}$. On peut donc écrire

$$\begin{aligned} S_z(t) E_3(\vec{0}, t) &= S_z(t) [E_3^{(+)}(\vec{0}, t) + E_3^{(-)}(\vec{0}, t)] \\ &= S_z(t) E_3^{(+)}(\vec{0}, t) + E_3^{(+)}(\vec{0}, t) S_z(t) \leftarrow \text{Ordre normal} \\ &= E_3^{(+)}(\vec{0}, t) S_z(t) + S_z(t) E_3^{(-)}(\vec{0}, t) \leftarrow \text{Ordre antinormal} \\ &= \frac{1}{2} [S_z(t) E_3^{(+)}(\vec{0}, t) + E_3^{(+)}(\vec{0}, t) S_z(t) \\ &+ S_z(t) E_3^{(-)}(\vec{0}, t) + E_3^{(-)}(\vec{0}, t) S_z(t)] \leftarrow \text{Ordre symétrique} \\ &= \dots \end{aligned}$$

T-16

Remarque importante

Les opérateurs "atomiques" $S_{\pm}(t), S_z(t)$ commutent avec le champ total $\vec{E}(t)$, non avec le champ du vide $\vec{E}_0(t)$ et le champ des sources.

Exemple : De la formule donnée plus haut pour $E_i^{(\pm)}(\vec{0}, t) - E_{0i}^{(\pm)}(\vec{0}, t)$ et de $[G_A(t), E_i^{(\pm)}(\vec{0}, t)] = 0$ (où G_A est un opérateur atomique), on déduit

$$\begin{aligned} [G_A(t), E_{0i}^{(\pm)}(\vec{0}, t)] &= \\ &= \frac{i\hbar}{d} \delta_{i3} \left\{ \left(\frac{\chi}{2} \pm i\delta \right) [G_A(t), S_{\mp}(t)] \right. \\ &\quad \left. \pm i\bar{\delta} [G_A(t), S_{\pm}(t)] \right\} \end{aligned}$$

Un opérateur atomique initialement "pur" devient à l'instant t "contaminé" par le rayonnement

T-17

Equations de Heisenberg pour l'atome à 2 niveaux - Ordre normal.

Calculs pour $S_+(t)$

$$\frac{d}{dt} S_+(t) = i\omega_0 S_+(t) + \frac{2id}{\hbar} [S_3(t) E_3^{(+)}(\vec{0}, t) + E_3^{(-)}(\vec{0}, t) S_3(t)]$$

On remplace $E_3^{(\pm)}(\vec{0}, t)$ par les expressions données plus haut.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} S_+(t) &= i\omega_0 S_+(t) + \frac{2id}{\hbar} [S_3(t) E_{03}^{(+)}(\vec{0}, t) + E_{03}^{(-)}(\vec{0}, t) S_3(t)] \\ &+ \frac{2id}{\hbar} \left(\frac{i\hbar}{d}\right) \left[\left(\frac{\gamma}{2} + i\delta\right) \underbrace{S_3(t) S_-(t)}_{-\frac{1}{2} S_-(t)} + i\bar{\delta} \underbrace{S_3(t) S_+(t)}_{\frac{1}{2} S_+(t)} \right] \\ &+ \frac{2id}{\hbar} \left(\frac{-i\hbar}{d}\right) \left[\left(\frac{\gamma}{2} - i\delta\right) \underbrace{S_+(t) S_3(t)}_{-\frac{1}{2} S_+(t)} - i\bar{\delta} \underbrace{S_-(t) S_3(t)}_{\frac{1}{2} S_-(t)} \right] \end{aligned}$$

Couplages non-séculaires entre $S_+(t)$ et $S_-(t)$ négligés

T-19

Calculs analogues pour S_3

$$\frac{d}{dt} S_3(t) = \frac{id}{\hbar} \left\{ [S_+(t) - S_-(t)] E_3^{(+)}(\vec{0}, t) + E_3^{(-)}(\vec{0}, t) [S_+(t) - S_-(t)] \right\}$$

$$\frac{d}{dt} S_3(t) = -\gamma \left[\frac{1}{2} + S_3(t) \right]$$

$$+ \frac{id}{\hbar} \left\{ [S_+(t) - S_-(t)] E_{03}^{(+)}(\vec{0}, t) + E_{03}^{(-)}(\vec{0}, t) [S_+(t) - S_-(t)] \right\}$$

Valeur moyenne dans le vide

$$\frac{d}{dt} \langle S_3(t) \rangle_R = -\gamma \left[\frac{1}{2} + \langle S_3(t) \rangle_R \right]$$

$$\begin{aligned} P_e &= |e\rangle\langle e| & P_g &= |g\rangle\langle g| \\ P_e(t) + P_g(t) &= 1 & \frac{1}{2}(P_e(t) - P_g(t)) &= S_3(t) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{c} |e\rangle \\ \downarrow \gamma \\ |g\rangle \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \langle P_e(t) \rangle_R = -\gamma \langle P_e(t) \rangle_R \\ \frac{d}{dt} \langle P_g(t) \rangle_R = \gamma \langle P_e(t) \rangle_R \end{array} \right.$$

T-18

IX-6

En regroupant tout (avec $\delta\omega_0 = \delta - \bar{\delta} = \delta e - \delta g$)

$$\frac{d}{dt} S_+(t) = i(\omega_0 + \delta\omega_0) S_+(t) - \frac{\gamma}{2} S_+(t) + \frac{2id}{\hbar} [S_3(t) E_{03}^{(+)}(\vec{0}, t) + E_{03}^{(-)}(\vec{0}, t) S_3(t)]$$

Valeur moyenne dans le vide

Comme $E_{03}^{(+)}(\vec{0}, t) |0\rangle = 0 = \langle 0 | E_{03}^{(-)}(\vec{0}, t)$
Le champ du vide ne contribue pas

$$\frac{d}{dt} \langle S_+(t) \rangle_R = i(\omega_0 + \delta\omega_0) \langle S_+(t) \rangle_R - \frac{\gamma}{2} \langle S_+(t) \rangle_R$$

Valeur moyenne dans un état cohérent $|\{\alpha\}\rangle$

$$E_{03}^{(+)}(\vec{0}, t) |\{\alpha\}\rangle = E_{03}^{(+)}(\vec{0}, t, \{\alpha\}) |\{\alpha\}\rangle$$

$$\langle \{\alpha\} | E_{03}^{(-)}(\vec{0}, t) = E_{03}^{(-)}(\vec{0}, t, \{\alpha\}) \langle \{\alpha\} |$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle S_+(t) \rangle_R &= i(\omega_0 + \delta\omega_0) \langle S_+(t) \rangle_R - \frac{\gamma}{2} \langle S_+(t) \rangle_R \\ &+ \frac{2id}{\hbar} E_{03}(\vec{0}, t) \langle S_3(t) \rangle_R \end{aligned}$$

Equations de Bloch avec relaxation ($\frac{\gamma}{2}$) déplacement ($\delta\omega_0$), et couplage avec un champ classique.

T-20

Conclusions pour l'atome à 2 niveaux

- ① Avec l'ordre normal, l'élargissement et le déplacement radiatifs de la transition atomique, les transferts radiatifs entre e et g, semblent dus uniquement à la réaction de rayonnement
- ② Pour les valeurs moyennes, et pour un champ libre dans un état cohérent, on justifie rigoureusement les "équations de Bloch optiques" décrivant l'évolution de $\langle S_+(t) \rangle$, $\langle S_3(t) \rangle$ sous l'effet d'une excitation par un champ classique et d'une relaxation

Là encore, on a l'illusion qu'on peut se passer de la quantification du rayonnement.

Plan

- ① On ne peut oublier le caractère opératoire du champ du vide
(T1 à T5)
- ② Les relations de commutation atomiques ne se conservent que si le champ du vide est traité quantiquement
(T6 à T8)
- ③ Séparation des effets du champ du vide et du champ des sources
(T9 à T15)
- ④ Comparaison avec l'approche équation pilote
(T16 à T19)
- ⑤ Fonctions de corrélation et équations de Heisenberg.
(T20 à T26)

T1 Tentation possible
après les calculs du cours précédent

- ① Ne tenir compte que du champ des sources, exprimé en fonction des opérateurs atomiques
 - ② Remplacer le champ libre $E_0^{(\pm)}$
 - par 0 dans le cas où il n'y a aucun rayonnement incident
 - par un champ classique si un tel rayonnement existe
- ↳ Théorie purement atomique ne quantifiant pas le champ

Objet du présent cours

Montrer en quoi une telle attitude est erronée

T2 Equations de Heisenberg pour
l'atome à 2 niveaux - Ordre antinormal

Calculs pour S_+

$$\frac{d}{dt} S_+(t) = i\omega_0 S_+(t) + \frac{2id}{\hbar} [E_3^{(+)}(\vec{0}, t) S_3(t) + S_3(t) E_3^{(-)}(\vec{0}, t)]$$

On remplace $E_3^{(\pm)}(\vec{0}, t)$ par les expressions données plus haut

$$\frac{d}{dt} S_+(t) = i\omega_0 S_+(t) + \frac{2id}{\hbar} [E_{03}^{(+)}(\vec{0}, t) S_3(t) + S_3(t) E_{03}^{(-)}(\vec{0}, t)]$$

$$+ \frac{2id}{\hbar} \left(\frac{i\hbar}{d}\right) \left[\left(\frac{\gamma}{2} + i\delta\right) \underbrace{S_-(t) S_3(t)}_{\frac{1}{2} S_-(t)} + i\bar{\delta} \underbrace{S_+(t) S_3(t)}_{-\frac{1}{2} S_+(t)} \right]$$

$$+ \frac{2id}{\hbar} \left(\frac{-i\hbar}{d}\right) \left[\left(\frac{\gamma}{2} - i\delta\right) \underbrace{S_3(t) S_+(t)}_{\frac{1}{2} S_+(t)} - i\bar{\delta} \underbrace{S_3(t) S_-(t)}_{-\frac{1}{2} S_-(t)} \right]$$

T3]

En regroupant tout (avec $\delta\omega_0 = \delta - \bar{\delta}$)

$$\frac{d}{dt} S_+(t) = i(\omega_0 - \delta\omega_0) S_+ + \frac{\gamma}{2} S_+ + \frac{2id}{\hbar} [E_{03}^{(+)}(\vec{0}, t) S_3(t) + S_3(t) E_{03}^{(-)}(\vec{0}, t)]$$

Pas de rayonnement incident

Si l'on cède à la tentation précédente, on remplace $E_{03}^{(\pm)}(\vec{0}, t)$ par 0, ce qui donne pour les valeurs moyennes

$$\frac{d}{dt} \langle S_+(t) \rangle_R = i(\omega_0 - \delta\omega_0) \langle S_+(t) \rangle_R + \frac{\gamma}{2} \langle S_+(t) \rangle_R$$

Résultat absurde

- 1 - Le dipôle moyen diverge spontanément au lieu de s'amortir
- 2 - Le déplacement trouvé a le mauvais signe

T5]

Conclusion

On ne peut éventuellement "oublier" l'aspect opératoire de $E_0^{(\pm)}$ qui a à la fin du calcul, après avoir rétabli l'ordre normal.

Or, pour arriver à cet ordre normal, que rien n'impose a priori au début, il faut utiliser les commutateurs de $E_0^{(\pm)}$ avec les autres opérateurs qui l'empêchent d'être en position normale, donc faire appel explicitement au caractère opératoire de $E_0^{(\pm)}$

Il ne serait donc pas très cohérent de prétendre que E_0 est un champ classique après l'avoir traité comme un opérateur.

T4]

X-2

Manière correcte de faire le calcul

Avant de prendre la moyenne, faire passer $E_{03}^{(+)}$ à droite de S_3 et $E_{03}^{(-)}$ à gauche de S_3 en utilisant les commutateurs $[E_{03}^{(\pm)}(\vec{0}, t), S_3(t)]$. On obtient ainsi

$$\frac{d}{dt} \langle S_+(t) \rangle_R = [i(\omega_0 - \delta\omega_0) + \frac{\gamma}{2}] \langle S_+(t) \rangle_R + \frac{2id}{\hbar} \left\{ \langle [E_{03}^{(+)}(\vec{0}, t), S_3(t)] \rangle_R + \langle [S_3(t), E_{03}^{(-)}(\vec{0}, t)] \rangle_R \right\}$$

On trouve alors que la contribution de la 2^{ème} ligne est égale à

$$2i\delta\omega_0 \langle S_+(t) \rangle_R - \gamma \langle S_+(t) \rangle_R$$

et rétablit le bon résultat

$$\frac{d}{dt} \langle S_+(t) \rangle_R = [i(\omega_0 + \delta\omega_0) - \frac{\gamma}{2}] \langle S_+(t) \rangle_R$$

T6]

Autre objection plus grave

Les relations de commutation atomique ne se conservent au cours du temps que si le champ du vide obéit de son côté aux relations de commutation quantiques

Cohérence interne de la théorie (Bohr - Rosenfeld)

Quand 2 systèmes interagissent mutuellement, traiter l'un quantiquement et l'autre classiquement conduit à des incohérences.

T7

Vérification de ce point sur l'oscillateur harmonique

$$\frac{d}{dt} b(t) = -[i\tilde{\omega}_0 + \frac{\gamma}{2}] b(t) + \frac{id}{\hbar} E_{03}(\vec{0}, t)$$

$$\text{avec } \tilde{\omega}_0 = \omega_0 + \delta\omega_0$$

$$b(t) = b(t_0) e^{-[i\tilde{\omega}_0 + \frac{\gamma}{2}](t-t_0)} + \int_{t_0}^t dt' e^{-[i\tilde{\omega}_0 + \frac{\gamma}{2}](t-t')} \frac{id}{\hbar} E_{03}(\vec{0}, t')$$

Pas de rayonnement incident

Si l'on posait $E_{03} = 0$, la 2^{ème} ligne serait nulle et l'on aurait

$$[b(t), b^+(t)] = \underbrace{[b(t_0), b^+(t_0)]}_{=1} e^{-\gamma(t-t_0)} = e^{-\gamma(t-t_0)}$$

Résultat visiblement absurde

T9

Séparation des effets du champ du vide et du champ des sources

Récapitulation des résultats précédents

Quel que soit l'ordre adopté dans le terme d'interaction, $-D(t) E_3(\vec{0}, t)$, entre l'opérateur "atomique" $D(t)$ et l'opérateur "champ total" $E_3(\vec{0}, t)$ qui commutent, le résultat final du calcul est le même pour les valeurs moyennes $\langle S_{\pm}(t) \rangle_R$, $\langle S_3(t) \rangle_R$

Par contre, quand on pose

$$E(\vec{0}, t) = E_0(\vec{0}, t) + E_S(\vec{0}, t)$$

la contribution du terme en E_0 (et par suite, celle du terme en E_S) dépendent de l'ordre, leur somme restant la même.

T8

X-3

Manière correcte de faire le calcul

$$[b(t), b^+(t)] = e^{-\gamma(t-t_0)} + \int_{t_0}^t dt' \int_{t_0}^{t'} dt'' e^{-(i\tilde{\omega}_0 + \frac{\gamma}{2})(t-t')} e^{(i\tilde{\omega}_0 - \frac{\gamma}{2})(t-t'')} \frac{d^2}{\hbar^2} [E_{03}(\vec{0}, t'), E_{03}(\vec{0}, t'')]$$

A partir du développement de E_{03} en modes et des commutateurs $[a_{kE}(t_0), a_{k'E'}^+(t_0)] = \delta_{kk'} \delta_{EE'}$, on calcule

$$[E_{03}(\vec{0}, t'), E_{03}(\vec{0}, t'')] = \frac{i\hbar}{3\pi\epsilon_0 c^3} \ddot{\delta}(t'-t'')$$

ce qui permet de montrer ensuite que la double intégrale en t' et t'' vaut $1 - e^{-\gamma(t-t_0)}$, et donne finalement :

$$[b(t), b^+(t)] = 1 = [b(t_0), b^+(t_0)]$$

T10

Conclusion généralement tirée

La séparation entre effets des fluctuations du vide et effets de la réaction de rayonnement est ambiguë. Ces 2 phénomènes sont indissociables.

"The 2 interpretations are merely 2 sides of the same quantum mechanical coin with each ... being an oversimplification motivated by the ordering scheme adopted" (Senitzky)

Notre point de vue

Une séparation claire et non ambiguë des 2 effets existe.

Les différents ordres possibles sont bien équivalents mathématiquement, mais seul, l'ordre symétrique a un sens physique clair.

T-11

Justification de ce point de vue

$G_A(t)$: observable atomique ayant un sens physique, donc hermitique
 $G_A(t) = G_A^\dagger(t)$

La vitesse de variation $\frac{d}{dt} G_A(t)$ est aussi hermitique

$(\frac{d}{dt} G_A(t))_{FV}$: Contribution à $\frac{d}{dt} G_A(t)$ des termes en \vec{E}_0

$(\frac{d}{dt} G_A(t))_{RR}$: Contribution à $\frac{d}{dt} G_A(t)$ des termes en \vec{E}_s

① - On impose aux vitesses de variation $(\frac{d}{dt} G_A(t))_{FV}$ et $(\frac{d}{dt} G_A(t))_{RR}$ d'avoir chacune un sens physique, donc d'être séparément hermitiques

② - Les opérateurs de champ apparaissant dans $(\frac{d}{dt} G_A(t))_{FV}$ doivent aussi avoir un sens physique, donc être hermitiques

T-12

X-4

Ecriture la plus générale de $V = -DE$

$$V = -\lambda D E^{(+)} - \mu E^{(+)} D - \nu D E^{(-)} - \xi E^{(-)} D$$

$$\lambda + \mu + \nu + \xi = 1$$

$$\frac{d}{dt} G_A = \frac{1}{i\hbar} [G_A, H_A] + \frac{1}{i\hbar} [G_A, V]$$

Posons $F_A = \frac{1}{i\hbar} [G_A, D]$

$$\left. \begin{matrix} G_A = G_A^\dagger \\ D = D^\dagger \end{matrix} \right\} \rightarrow F_A = F_A^\dagger$$

F_A est une observable atomique hermitique

Dans V , on remplace E par $E_0 + E_s$

$(\frac{d}{dt} G_A)_{FV}$ est la partie de $\frac{1}{i\hbar} [G_A, V]$ où $E_0^{(+)}$ et $E_0^{(-)}$ interviennent.

T-13

$$(\frac{d}{dt} G_A)_{FV} = -\lambda F_A E_0^{(+)} - \mu E_0^{(+)} F_A - \nu F_A E_0^{(-)} - \xi E_0^{(-)} F_A$$

Condition 1 Hermiticité de $(\frac{dG_A}{dt})_{FV}$

$$\lambda = \xi \quad \mu = \nu$$

↳ $(\frac{d}{dt} G_A)_{FV} = -F_A (\lambda E_0^{(+)} + \nu E_0^{(-)}) + h.c.$

Condition 2 Hermiticité des opérateurs de champ apparaissant dans $(\frac{d}{dt} G_A)_{FV}$

↳ $\lambda E_0^{(+)} + \nu E_0^{(-)}$ doit être hermitique

$$\lambda = \nu$$

Conclusion

$$\lambda = \mu = \nu = \xi = \frac{1}{4}$$

Ordre complètement symétrique

T-14

Résultats du calcul

(Ordre complètement symétrique)

Pour $\langle S_+ \rangle_R$

$$(\langle \frac{dS_+}{dt} \rangle_R)_{FV} = -\frac{\gamma}{2} \langle S_+ \rangle_R + i\delta\omega_0 \langle S_+ \rangle_R$$

$$(\langle \frac{dS_+}{dt} \rangle_R)_{RR} = 0$$

Le déplacement et l'élargissement radiatifs de la transition atomique sont entièrement dus aux fluctuations du vide

Pour $\langle P_e \rangle_R$ et $\langle P_g \rangle_R$

$$(\frac{d}{dt} \langle P_e \rangle_R)_{FV} = -\frac{\gamma}{2} \langle P_e \rangle_R + \frac{\gamma}{2} \langle P_g \rangle_R$$

$$(\frac{d}{dt} \langle P_g \rangle_R)_{FV} = -\frac{\gamma}{2} \langle P_g \rangle_R + \frac{\gamma}{2} \langle P_e \rangle_R$$

$$(\frac{d}{dt} \langle P_e \rangle_R)_{RR} = -\frac{\gamma}{2} \langle P_e \rangle_R - \frac{\gamma}{2} \langle P_g \rangle_R = -\frac{\gamma}{2}$$

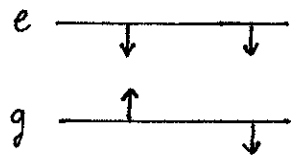
$$(\frac{d}{dt} \langle P_g \rangle_R)_{RR} = +\frac{\gamma}{2} \langle P_e \rangle_R + \frac{\gamma}{2} \langle P_g \rangle_R = +\frac{\gamma}{2}$$

T-15

Interprétation physique

Effet des fluctuations du vide

Equivalent à celui d'une perturbation fluctuante.
 Induit des transitions dans les 2 sens avec un taux $\gamma/2$



Effet de la réaction de rayonnement

Double le taux de départ de e
 Annule le taux de départ de g

Compensation pour g de l'effet des fluctuations du dipôle et de l'effet des fluctuations du champ (Fain)

T-17

Signification de $K(\tau)$

$K(\tau) =$

$\frac{1}{2} \langle 0 | \{ E_0(\vec{0}, t) E_0(\vec{0}, t+\tau) + E_0(\vec{0}, t+\tau) E_0(\vec{0}, t) \} | 0 \rangle$

Fonction de corrélation symétrique caractérisant les fluctuations du champ du vide

Signification de $\chi(\tau)$

$\chi(\tau) = \frac{1}{2i} \langle 0 | [E_0(\vec{0}, t), E_0(\vec{0}, t+\tau)] | 0 \rangle$

Susceptibilité du "réservoir" constitué par le rayonnement.
 Caractérise la manière dont le rayonnement "répond" à une perturbation atomique (dipôle placé en 0)

Théorie de la réponse linéaire

T-16

X-5

Confirmation de ce point de vue par une autre méthode

Equation pilote de la matrice densité atomique

Le rayonnement n'intervient dans cette équation que par l'intermédiaire de

$\xi(\tau) = \langle 0 | E_0(\vec{0}, t) E_0(\vec{0}, t+\tau) | 0 \rangle$

Moyenne à 2 temps relative au champ du vide au point $\vec{0}$ où se trouve l'atome

$\xi(\tau)$ n'est pas réel. Ce sont ses parties réelle et imaginaire qui ont un sens physique

$\xi(\tau) = K(\tau) + i \chi(\tau)$

T-18

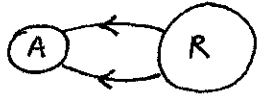
Résultats de la comparaison

- ① Les termes de l'équation pilote faisant intervenir $K(\tau)$ coïncident avec les termes associés à $(\frac{dG_A}{dt})_{FV}$ obtenus à partir des équations de Heisenberg
- ② Les termes de l'équation pilote faisant intervenir $\chi(\tau)$ coïncident avec les termes associés à $(\frac{dG_A}{dt})_{RR}$

Résultat général qui demeure valable même si l'état initial du champ n'est pas le vide, mais contient des photons.

Interprétation physique

① Termes en $K(\tau)$



Les fluctuations de R (fluctuations du vide) polarisent l'atome et interagissent avec le dipôle qu'elles ont induit.

② Termes en $X(\tau)$



Les fluctuations de A polarisent R. A interagit avec son image dans R (A interagit avec le champ dont il est la source).

Fonctions de corrélation et équations de Heisenberg

$$\langle S_+(t) S_-(t') \rangle_R = \langle \Psi_R(t_0) | S_+(t) S_-(t') | \Psi_R(t_0) \rangle$$

Rappel

$$\frac{d}{dt} S_+(t) = [i(\omega_0 + \delta\omega_0) - \frac{\gamma}{2}] S_+(t) + \frac{2id}{\hbar} [S_3(t) E_{03}^{(+)}(\vec{0}, t) + E_{03}^{(-)}(\vec{0}, t) S_3(t)]$$

Multiplication à droite par $S_-(t')$

$$\frac{d}{dt} S_+(t) S_-(t') = [i(\omega_0 + \delta\omega_0) - \frac{\gamma}{2}] S_+(t) S_-(t') + \frac{2id}{\hbar} [S_3(t) E_{03}^{(+)}(\vec{0}, t) S_-(t') + E_{03}^{(-)}(\vec{0}, t) S_3(t) S_-(t')]$$

Pour faire passer $E_{03}^{(+)}(\vec{0}, t)$ à droite, et rétablir l'ordre normal, il faut connaître $[E_{03}^{(+)}(\vec{0}, t), S_-(t')]$

Commutateur du champ libre en $\vec{0}$ à l'instant t avec une observable atomique G_A à un autre instant t'

Résultats du calcul de $[E_{0i}^{(+)}(\vec{0}, t), G_A(t')]$

On repart de

$$a_{kE}(t') = a_{kE}(t_0) e^{-i\omega(t'-t_0)} + \frac{\mathcal{N}_k}{\hbar} \int_{t_0}^{t'} dt'' \epsilon_j D_j(t'') e^{-i\omega(t'-t'')}$$

À l'instant initial

$$[a_{kE}(t_0), G_A(t_0)] = 0$$

Donc, par évolution hamiltonienne

$$[a_{kE}(t'), G_A(t')] = 0$$

On en déduit

$$[a_{kE}(t_0), G_A(t')] =$$

$$- \frac{\mathcal{N}_k}{\hbar} \int_{t_0}^{t'} dt'' \epsilon_j [D_j(t''), G_A(t')] e^{-i\omega(t_0-t'')}$$

Comme

$$E_{0i}^{(+)}(\vec{0}, t) = i \sum_{kE} \mathcal{N}_k \epsilon_i a_{kE}(t_0) e^{-i\omega(t-t_0)}$$

et qu'on connaît $[a_{kE}(t_0), G_A(t')]$

on en déduit $[E_{0i}^{(+)}(\vec{0}, t), G_A(t')]$

On trouve

$$[E_{0i}^{(+)}(\vec{0}, t), G_A(t')] = - \int_{t-t'}^{t-t_0} d\tau [D_j(t-\tau), G_A(t')] F_{ij}^{(+)}(\tau)$$

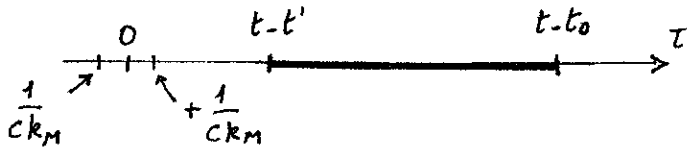
$$F_{ij}^{(+)}(\tau) = \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{i}{\hbar} \sum_{k < k_M} \mathcal{N}_k^2 e^{-i\omega\tau}$$

Fonction étroite, centrée en $\tau=0$, de largeur $1/c k_M$

T-23]

Résultat simple quand $t-t' \gg \frac{1}{ck_M}$

L'intervalle d'intégration $[t-t', t-t_0]$ sur τ ne contient pas la région $[-\frac{1}{ck_M}, +\frac{1}{ck_M}]$ où $F_{ij}^{(+)}(\tau)$ est non nulle



Donc, si $t-t' \gg \frac{1}{ck_M}$, $E_{oi}^{(+)}(\vec{0}, t)$ commute avec $G_A(t')$

- Voir page (VII-8) le calcul du commutateur quand $t-t' \ll -\frac{1}{ck_M}$

- Enfin, on a déjà calculé le commutateur $[E_{oi}^{(+)}(\vec{0}, t), G_A(t)]$ quand $t'=t$

T-25]

Moyenne dans un état cohérent

Il faut rajouter à la 1^{ère} équation

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle S_3(t) S_-(t') \rangle_R E_{03}(\vec{0}, t)$$

et à la 2^{ème} équation

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle S_3(t) \rangle_R E_{03}(\vec{0}, t)$$

Conclusion

Nouvelle démonstration très simple du "théorème de régression quantique"

Les moyennes à 2 temps t, t' obéissent vis à vis du temps le plus grand aux mêmes équations d'évolution que les moyennes à un temps.

T-24]

X-7

Retour à l'équation $\frac{d}{dt} S_+(t) S_-(t')$

Si $t > t'$ ($t-t' \gg 1/ck_M$), $E_{03}^{(+)}(\vec{0}, t)$ commute avec $S_-(t')$ et peut être mis à droite.

Résultations de l'ordre normal

Conséquence

Moyenne dans le vide

Pour $t > t'$

$$\frac{d}{dt} \langle S_+(t) S_-(t') \rangle_R =$$

$$[i(\omega_0 + \delta\omega_0) - \frac{\gamma}{2}] \langle S_+(t) S_-(t') \rangle_R$$

à comparer avec

$$\frac{d}{dt} \langle S_+(t) \rangle_R =$$

$$[i(\omega_0 + \delta\omega_0) - \frac{\gamma}{2}] \langle S_+(t) \rangle_R$$

T-26]

Récapitulation : Bilan de l'approche équations de Heisenberg pour les atomes à 2 niveaux.

- 1 - Etablissement des "équations de Bloch optiques" décrivant l'amortissement et de déplacement radiatifs
- 2 - Justification du fait qu'on peut traiter classiquement un rayon - nement libre incident s'il est dans un état cohérent.
- 3 - Démonstration du théorème de régression quantique qui permet de calculer les fonctions de corrélation à partir des équations de Bloch optiques.

Plan

- ① Retour à un modèle d'atome plus réaliste (T1)
- ② Calcul de la vitesse de variation d'une observable atomique quelconque
Approximations effectuées (T2 à T5)
- ③ Calcul du terme en k_M
Renormalisation de la masse due à la réaction de rayonnement (T6 à T9)
- ④ Déplacements de niveaux dus aux fluctuations du vide
Calcul et interprétation physique (T10 à T17)
- ⑤ Conclusion générale pour les déplacements de niveaux (T18)
- ⑥ Transitions radiatives entre niveaux (T19 à T20)

T1 Retour à un modèle d'atome plus réaliste

Hamiltonien

$$H = \underbrace{\frac{\vec{P}^2}{2m_0}}_{H_A} + \underbrace{V(\vec{r}) + \frac{k_M^3}{18\epsilon_0\pi^2} D_j D_j}_{\text{self-énergie atomique}} + \underbrace{H_R - D_j E_j(\vec{0})}_{\text{Interaction } V}$$

Compte à k_M

Écriture de V sous forme symétrique

(Pour séparer clairement les effets des fluctuations du vide et ceux de la réaction de rayonnement)

$$V = -\frac{1}{2} D_j E_j(\vec{0}) - \frac{1}{2} E_j(\vec{0}) D_j$$

Évolution d'une observable atomique quelconque G_A

$$\frac{d}{dt} G_A = \frac{1}{i\hbar} [G_A, H]$$

T2 Calcul de $\frac{1}{i\hbar} [G_A, H]$

① $\frac{1}{i\hbar} [G_A, H_A]$ Evolution purement atomique

② $\frac{1}{i\hbar} [G_A, \frac{k_M^3}{18\epsilon_0\pi^2} D_j D_j] =$
 $\frac{1}{i\hbar} \frac{k_M^3}{18\epsilon_0\pi^2} [G_A, D_j D_j] = [G_A, D_j] D_j + D_j [G_A, D_j]$

③ $\frac{1}{i\hbar} [G_A, V] = -\frac{1}{2i\hbar} \{ [G_A, D_j] E_j(\vec{0}) + E_j(\vec{0}) [G_A, D_j] \}$

En regroupant tout, on obtient

$$\frac{d}{dt} G_A = \frac{1}{i\hbar} [G_A, H_A]$$

$$+ \frac{1}{2i\hbar} \{ [G_A, D_j] (C D_j - E_j(\vec{0})) + (C D_j - E_j(\vec{0})) [G_A, D_j] \}$$

avec

$$C = \frac{k_M^3}{9\epsilon_0\pi^2}$$

T3

Rappels sur $E_j(\vec{0})$

(Champ créé par le dipôle

 $D_j = e r_j$ à son propre emplacement) $E_j(\vec{0}) = E_{0j}(\vec{0})$ ← Champ du vide

$$+ \underbrace{\frac{k_M^3}{9\epsilon_0 n^2} D_j - \frac{k_M}{3n^2 \epsilon_0 c^2} \ddot{D}_j + \frac{1}{6n\epsilon_0 c^3} \dddot{D}_j}_C$$

← Champ des sources

On remplace, dans $\frac{d}{dt} G_A$, $E_j(\vec{0})$ par l'expression précédente

Comme, dans $\frac{dG_A}{dt}$, apparaît $C D_j - E_j(\vec{0})$, on voit que l'ordre symétrique choisi pour V fait disparaître la divergence en k_M^3 dès le début.

Autre avantage de l'ordre symétrique.

T5

Expression de r_j en fonction des $S_{\alpha\beta}$ Les $S_{\alpha\beta}$ forment un ensemble orthonormé complet d'opérateurs

$$r_j = \sum_{\alpha} \sum_{\beta} |\alpha\rangle \langle \alpha| r_j |\beta\rangle \langle \beta|$$

$$= \sum_{\alpha, \beta} r_{\alpha\beta}^j |\alpha\rangle \langle \beta| = \sum_{\alpha, \beta} r_{\alpha\beta}^j S_{\alpha\beta}$$

Approximation pour le calcul de \ddot{r}_j , \ddot{r}_j \ddot{r}_j et \ddot{r}_j apparaissent dans des termes déjà en e^2 On peut donc négliger l'interaction avec le rayonnement pour calculer \ddot{r}_j et \ddot{r}_j et utiliser

$$\dot{S}_{\alpha\beta} = i\omega_{\alpha\beta} S_{\alpha\beta} \quad \ddot{S}_{\alpha\beta} = -\omega_{\alpha\beta}^2 S_{\alpha\beta} \quad \dots$$

de sorte que

$$\ddot{r}_j = - \sum_{\alpha, \beta} \omega_{\alpha\beta}^2 r_{\alpha\beta}^j S_{\alpha\beta}$$

$$\ddot{r}_j = - \sum_{\alpha, \beta} i\omega_{\alpha\beta}^3 r_{\alpha\beta}^j S_{\alpha\beta}$$

T4

X1-2

Finalement

$$\frac{d}{dt} G_A = \frac{1}{i\hbar} [G_A, H_A]$$

$$- \frac{e}{2i\hbar} \left\{ [G_A, r_j] E_{0j}(\vec{0}) + E_{0j}(\vec{0}) [G_A, r_j] \right\}$$

$$+ \frac{1}{2i\hbar} \frac{e^2 k_M}{3n^2 \epsilon_0 c^2} \left\{ [G_A, r_j] \ddot{r}_j + \ddot{r}_j [G_A, r_j] \right\}$$

$$- \frac{1}{2i\hbar} \frac{e^2}{6n\epsilon_0 c^3} \left\{ [G_A, r_j] \ddot{r}_j + \ddot{r}_j [G_A, r_j] \right\}$$

Opérateurs G_A étudiés

$$H_A |\varphi_\alpha\rangle = E_\alpha |\varphi_\alpha\rangle$$

$$G_A = S_{\alpha\beta} = |\varphi_\alpha\rangle \langle \varphi_\beta|$$

$$\frac{1}{i\hbar} [S_{\alpha\beta}, H_A] = -\frac{i}{\hbar} (E_\beta - E_\alpha) S_{\alpha\beta}$$

$$= i\omega_{\alpha\beta} S_{\alpha\beta}$$

L'évolution non-perturbée de $S_{\alpha\beta}$ se fait à la fréquence de Bohr

$$\omega_{\alpha\beta} = (E_\alpha - E_\beta)/\hbar$$

T6

Calcul du terme en k_M

Contribue à $\frac{dG_A}{dt}$ par

$$\frac{1}{2i\hbar} \frac{e^2 k_M}{3n^2 \epsilon_0 c^2} \left\{ [G_A, r_j] \ddot{r}_j + \ddot{r}_j [G_A, r_j] \right\}$$

On prend $G_A = S_{\lambda\mu}$

Approximations

① Perturbative

$$\ddot{r}_j = - \sum_{\alpha, \beta} \omega_{\alpha\beta}^2 r_{\alpha\beta}^j S_{\alpha\beta}$$

② Séculaire

Dans $\frac{d}{dt} S_{\lambda\mu}$, on ne garde que les termes évoluant à la même fréquence non-perturbée $\omega_{\lambda\mu}$ que $S_{\lambda\mu}$.

T7)

Un intermédiaire de calcul commode

Comment passer de r à p et réciproquement ?

$$\text{De } [r_j, H_A] = i\hbar \frac{\partial H_A}{\partial p_j} = i\hbar \frac{p_j}{m_0}$$

on déduit

$$r_{\alpha\beta}^j (E_\beta - E_\alpha) = \frac{i\hbar}{m_0} p_{\alpha\beta}^j$$

$$\boxed{\omega_{\alpha\beta} r_{\alpha\beta}^j = \frac{i}{m_0} p_{\alpha\beta}^j}$$

Dans le terme en k_m , figurent 2 éléments de matrice de r et une fréquence de Bohr au carré

On peut donc faire apparaître (grâce en plus à l'approximation séculaire) un élément de matrice de p au carré

XI-3

T8)

Résultats du calcul

L'effet du terme en k_m est équivalent à celui d'un hamiltonien supplémentaire

$$\delta H = - \frac{\delta m}{2m_0^2} (\vec{p}^2)_{\text{drag}}$$

où

$$\delta m c^2 = \frac{e^2 k_m}{3\pi^2 \epsilon_0}$$

$(\vec{p}^2)_{\text{drag}}$ signifie qu'on ne garde de \vec{p}^2 que les éléments de matrice entre états propres de H_A de même énergie

Par ailleurs, on peut écrire

$$\begin{aligned} \frac{\vec{p}^2}{2(m_0 + \delta m)} &= \frac{\vec{p}^2}{2m_0} \frac{1}{1 + \frac{\delta m}{m_0}} \\ &= \frac{\vec{p}^2}{2m_0} - \frac{\delta m}{2m_0^2} \vec{p}^2 + \dots \end{aligned}$$

T9)

Conclusion pour le terme en k_m

Son effet est équivalent à celui d'un changement de la masse m_0 de l'électron

$$m_0 \rightarrow m = m_0 + \delta m$$

(la correction en δm étant calculée ici à l'ordre 1 en e^2)

Comme on trouve que le terme en \vec{v} ne crée pas de déplacement, on en conclut que les déplacements de niveaux produits par la réaction de rayonnement s'interprètent entièrement par une renormalisation de la masse

La réaction de rayonnement seule ne permet donc pas de comprendre le Lamb-shift

T10)

Effet des fluctuations du vide

Contribue à $\frac{dG_A}{dt}$ par

$$-\frac{e}{2i\hbar} \left\{ [G_A, r_j] E_{0j}(\vec{0}) + E_{0j}(\vec{0}) [G_A, r_j] \right\}$$

$$\text{Posons } E_{0j}(\vec{0}) = E_{0j}^{(+)}(\vec{0}) + E_{0j}^{(-)}(\vec{0})$$

Il faut faire passer les $E_{0j}^{(+)}$ à droite, les $E_{0j}^{(-)}$ à gauche pour rétablir l'ordre normal, commode pour faire les calculs de moyennes

Il faut donc connaître les commutateurs de $E_0^{(\pm)}$ à un instant t avec une grandeur atomique au même instant t

Principe du calcul identique à celui de l'atome à 2 niveaux

On avait posé

$$D = d(S_+ + S_-) = d(|e\rangle\langle g| + |g\rangle\langle e|)$$

T11)

On pose ici

$$D_j = \sum_{\alpha\beta} \underbrace{d_{\alpha\beta}^j}_{e r_{\alpha\beta}^j} \underbrace{|\varphi_\alpha\rangle\langle\varphi_\beta|}_{S_{\alpha\beta}}$$

A la sommation sur α et β près, la suite des calculs est la même. On trouve

$$[G_A(t), E_{oj}^{(+)}(\vec{0}, t)] =$$

$$- \sum_{\alpha\beta} \frac{i\hbar}{d_{\beta\alpha}^j} [G_A(t), S_{\alpha\beta}(t)] \left(\frac{1}{2} \gamma_{\alpha\rightarrow\beta} + i \delta_{\alpha\rightarrow\beta} \right)$$

avec

$$\begin{cases} \gamma_{\alpha\rightarrow\beta} = \frac{1}{\hbar} \frac{e^2 \sum_i |r_{\alpha\beta}^i|^2}{3\pi\epsilon_0 c^3} \omega_{\alpha\beta}^3 \theta(\omega_{\alpha\beta}) \\ \delta_{\alpha\rightarrow\beta} = \frac{1}{\hbar} \frac{e^2 \sum_i |r_{\alpha\beta}^i|^2}{6\pi^2 \epsilon_0 c^3} \mathcal{P} \int_0^{\omega_M} \frac{\omega^3 d\omega}{\omega_{\alpha\beta} - \omega} \end{cases}$$

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

T13) Effet des fluctuations du vide

Résultats du calcul pour les déplacements de niveaux

On trouve que le déplacement Δ_α de $|\varphi_\alpha\rangle$ du aux fluctuations du vide est la somme sur β de la partie impaire en $\omega_{\alpha\beta}$ de $\delta_{\alpha\rightarrow\beta}$

$$(\Delta_\alpha)_{FV} = - \sum_{\beta} \frac{e^2 \sum_i |r_{\alpha\beta}^i|^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \times$$

$$\left(\omega_{\alpha\beta}^3 \log \frac{\omega_M - \omega_{\alpha\beta}}{|\omega_{\alpha\beta}|} + \omega_{\alpha\beta} \frac{\omega_M^2}{2} \right)$$

Terme en ω_M^2 et terme en $\log \omega_M$

Approximation pour le terme en $\log \omega_M$

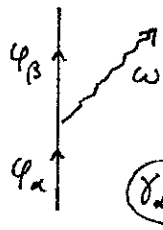
$$\log \frac{\omega_M - \omega_{\alpha\beta}}{|\omega_{\alpha\beta}|} \rightarrow \log \frac{\omega_M}{\bar{\omega}}$$

$\bar{\omega}$: fréquence atomique moyenne

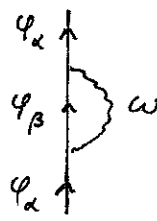
T12)

(X1-4)

Interprétation de γ et δ



$\gamma_{\alpha\rightarrow\beta}$



$\delta_{\alpha\rightarrow\beta}$

$\gamma_{\alpha\rightarrow\beta}$: Taux d'émission spontanée $|\varphi_\alpha\rangle \rightarrow |\varphi_\beta\rangle$ (on doit avoir $E_\alpha > E_\beta$)

$\delta_{\alpha\rightarrow\beta}$: Déplacement radiatif de $|\varphi_\alpha\rangle$ du à une transition virtuelle vers $|\varphi_\beta\rangle$

Calcul explicite de la partie principale apparaissant dans $\delta_{\alpha\rightarrow\beta}$

On trouve

$$\delta_{\alpha\rightarrow\beta} = - \frac{1}{\hbar} \frac{e^2 \sum_i |r_{\alpha\beta}^i|^2}{6\pi^2 \epsilon_0 c^3} \times$$

$$\left[\omega_{\alpha\beta}^3 \log \frac{\omega_M - \omega_{\alpha\beta}}{|\omega_{\alpha\beta}|} + \omega_{\alpha\beta}^2 \omega_M + \omega_{\alpha\beta} \frac{\omega_M^2}{2} + \frac{\omega_M^3}{3} \right]$$

T14)

Déplacement en ω_M^2

Grandes lignes du calcul

- Dans le terme en ω_M^2 apparaît $|r_{\alpha\beta}^i|^2 \omega_{\alpha\beta}$ qu'on peut transformer en $\frac{i}{2m_0} (r_{\alpha\beta}^i p_{\beta\alpha}^i - p_{\alpha\beta}^i r_{\beta\alpha}^i)$

- la somme sur β fait apparaître le commutateur

$$[r^i, p^i]_{\alpha\alpha} = i\hbar$$

- Finalement, on trouve que le déplacement en ω_M^2 est le même pour tous les niveaux et vaut

$$\Delta_1 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\omega_M^2}{2m_0\pi c^3}$$

Il ne peut pas expliquer le Lamb-shift.

T15]

Interprétation physique

Sous l'effet des fluctuations du vide, l'électron vibre.

Δ_1 représente l'énergie cinétique de vibration correspondante de l'électron.

Calcul semi-classique

$$m_0 \ddot{x} = e E_\omega e^{i\omega t}$$

$$\frac{1}{2} m_0 \dot{x}^2 = \frac{e^2 E_\omega^2}{2 m_0 \omega^2}$$

On calcule E_ω^2 pour le mode ω en prenant la contribution du mode ω à $\langle 0 | E^2 | 0 \rangle$.

On somme sur ω de 0 à ω_M . On retrouve ainsi Δ_1 .

Δ_1 / c^2 représente la renormalisation de la masse due aux fluctuations du vide. La correction à l'énergie cinétique apparaîtrait à un ordre supérieur du calcul.

T17]

Interprétation physique

Sous l'effet des fluctuations du vide, l'électron vibre et moyenne le potentiel $V(r)$ sur une distance correspondant à l'amplitude de vibration.

$(\Delta_2)_\alpha$ coïncide avec le résultat du calcul semi-classique de Welton.

Lorsque $V(r)$ est un potentiel coulombien (cas de l'atome H)

$$\Delta V(r) \sim \delta(r^2)$$

Cet effet affecte uniquement les électrons s pour lesquels $|\psi(\vec{0})|^2 \neq 0$.

On trouve bien que l'état $2S_{1/2}$ est déplacé vers le haut par rapport à l'état $2P_{1/2}$.

Le Lamb-shift est donc bien due essentiellement aux fluctuations du vide.

T16]

Déplacement en $\log \omega_M$

XI.5

Grandes lignes du calcul

- Dans le terme en $\log \omega_M$ apparaît $|r_{\alpha\beta}^i|^2 \omega_{\alpha\beta}^3$ qu'on veut transformer en

$$\left(-\frac{i}{m} P_{\alpha\beta}^i\right) \left(\frac{i}{m} P_{\beta\alpha}^i\right) \omega_{\alpha\beta} =$$

$$\frac{1}{\hbar m^2} P_{\alpha\beta}^i ([P^i, H_A])_{\beta\alpha}$$

- la sommation sur β fait apparaître

$$([P^i, [P^i, H_A]])_{\alpha\alpha}$$

proportionnel à $(\Delta V(r))_{\alpha\alpha}$

- Finalement, on trouve que le déplacement en $\log \omega_M$ du niveau $|\psi_\alpha\rangle$ vaut

$$(\Delta_2)_\alpha = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \frac{1}{2m^2} \log \frac{\omega_M}{\omega} (\Delta V(r))_{\alpha\alpha}$$

T-18]

Conclusion générale

pour les déplacements de niveaux

① La réaction de rayonnement est à l'origine d'une renormalisation de la masse (inertie électromagnétique de l'électron) qui affecte donc le terme d'énergie cinétique de l'électron.

② Les fluctuations du vide

- introduisent une énergie cinétique de vibration de l'électron qui déplace en bloc tous les niveaux.

- sont à l'origine d'un moyennage spatial du potentiel qui modifie l'énergie potentielle de l'électron.

T-19]

Effet de tous les autres termes

(Termes en \ddot{r}_j de la réaction de rayonnement et termes en $\gamma_{\lambda \rightarrow \beta}$ des fluctuations du vide)

Décrivent les transitions radiatives entre niveaux et l'élargissement correspondant des transitions

Si l'on pose $P_{\alpha} = |\varphi_{\alpha}\rangle\langle\varphi_{\alpha}|$, on trouve

$$\left(\frac{d}{dt} P_{\alpha}\right)_{FV} = \sum_{E_{\lambda} > E_{\alpha}} \frac{1}{2} \gamma_{\lambda \rightarrow \alpha} (P_{\lambda} - P_{\alpha}) - \sum_{E_{\mu} < E_{\alpha}} \frac{1}{2} \gamma_{\alpha \rightarrow \mu} (P_{\alpha} - P_{\mu})$$

$$\left(\frac{d}{dt} P_{\alpha}\right)_{RR} = \sum_{E_{\lambda} > E_{\alpha}} \frac{1}{2} \gamma_{\lambda \rightarrow \alpha} (P_{\lambda} + P_{\alpha}) - \sum_{E_{\mu} < E_{\alpha}} \frac{1}{2} \gamma_{\alpha \rightarrow \mu} (P_{\alpha} + P_{\mu})$$

T-20]

XI-6

Effet total

$$\left(\frac{d}{dt} P_{\alpha}\right)_{FV+RR} = \sum_{E_{\lambda} > E_{\alpha}} \gamma_{\lambda \rightarrow \alpha} P_{\lambda} - \sum_{E_{\mu} < E_{\alpha}} \gamma_{\alpha \rightarrow \mu} P_{\mu}$$

Interprétation physique

La même que pour les atomes à 2 niveaux.

Les fluctuations du vide tendent à égaliser les populations des niveaux α et β avec un taux $\frac{1}{2} \gamma_{\alpha \rightarrow \beta}$

La réaction de rayonnement renforce les processus d'émission spontanée, compense exactement ceux "d'absorption spontanée".

Elle fait perdre de l'énergie au système atomique.

Quelques références pour l'approche équations de Heisenberg

- J.R. ACKERHALT, P.L. KNIGHT, J.H. EBERLY Phys. Rev. Lett 30, (1973), 456
 I.R. SENITZKY Phys. Rev. Lett. 31 (1973), 955
 P.W. MILONNI, J.R. ACKERHALT, W.A. SMITH Phys. Rev. Lett 31, (1973), 958
 J.R. ACKERHALT, J.H. EBERLY Phys. Rev. D10, (1974), 3350
 P.W. MILONNI, W.A. SMITH Phys. Rev A11, (1975), 819
 D.W. MILONNI Physics Reports C25, (1976), 1

Pour la compensation entre effets des fluctuations du champ et effets des fluctuations du dipôle dans l'état fondamental voir

V.M. FAIN, Y.I. KHANIN Quantum Electronics
 (MIT Cambridge 1969) Vol I p.211