

Résumé du cours 1977 - 78

Au cours des années antérieures, l'évolution au cours du temps d'un « petit système » S couplé à un grand « réservoir » R avait été étudiée en détail au moyen du formalisme de l'équation pilote. Une telle équation donne la vitesse de variation de l'opérateur densité réduit du petit système et permet d'étudier l'évolution des diverses observables de ce système (valeurs moyennes « à un temps » t). Un tel formalisme avait été appliqué à l'étude d'un certain nombre de problèmes d'optique quantique : émission spontanée, spectroscopie (R.F. ou laser) de systèmes à 2 ou 3 niveaux...

Une autre approche du problème, qui consiste à partir des fonctions de corrélation des diverses observables du système, est particulièrement intéressante. Les fonctions de corrélation sont des moyennes « à deux temps » t et t' décrivant dans quelle mesure la fluctuation d'une observable A par rapport à sa valeur moyenne à l'instant t est corrélée avec la fluctuation d'une autre observable B à un autre instant t'. Les fonctions de corrélation décrivent ainsi la dynamique des fluctuations du système. De plus, il se trouve qu'elles sont directement reliées à la plupart des signaux expérimentaux susceptibles d'être mesurés sur le système. C'est pourquoi il a paru intéressant d'axer le cours de cette année sur l'étude des fonctions de corrélation d'un système quantique de manière à pouvoir aborder ultérieurement divers problèmes tels que : corrélation de photons, bruit quantique, fluctuations du vide et réaction de rayonnement...

1) Le cours commence par un rappel du modèle de Langevin pour le mouvement brownien, destiné à servir de guide pour l'analyse et l'interprétation des équations de Mori abordées dans un chapitre ultérieur. Le mouvement d'une particule lourde immergée dans un fluide est analysé en décrivant l'effet des chocs des molécules du fluide par une force de friction et une force aléatoire (force de Langevin). Après une analyse critique de l'équation de Langevin, plusieurs résultats simples sont déduits de cette équation : réponse de la particule à une excitation extérieure, étude des fluctuations dans l'état d'équilibre, dynamique de ces fluctuations illustrée

par le calcul d'un certain nombre de fonctions de corrélation (force de Langevin-vitesse, vitesse-vitesse, force totale-force totale), relation entre fluctuation et dissipation... On souligne également tout l'intérêt présenté par l'analyse harmonique d'un processus aléatoire : la transformée de Fourier d'une fonction d'autocorrélation stationnaire a la signification physique d'une puissance spectrale, mesurable expérimentalement (théorème de Wiener-Khintchine), et se transforme très simplement dans de très nombreuses opérations physiques (filtrages linéaires). Enfin, en abordant un point de vue plus général, qui n'est plus limité à l'étude des moyennes à 1 ou 2 temps, on procède à un rapide survol des notions les plus importantes relatives aux processus aléatoires classiques. On étudie plus particulièrement les processus de Markoff (de mémoire infiniment courte) dont la simplicité permet une analyse mathématique beaucoup plus poussée (équation de Fokker-Planck). On souligne également les simplifications qui apparaissent lorsque le processus est gaussien, ou lorsqu'il est à la fois markoffien et gaussien (théorème de Doob). Tous ces résultats généraux sont appliqués au mouvement brownien.

2) La deuxième partie du cours est consacrée à une présentation de la théorie de la réponse linéaire, qui sert de transition entre le modèle de Langevin du mouvement brownien (modèle phénoménologique) et la théorie de Mori qui, partant des équations exactes de Heisenberg d'un système quantique, les « réduit » sous une forme très analogue à celle de l'équation de Langevin généralisée.

La réponse d'un système quantique, initialement en équilibre thermodynamique à la température T , à une excitation faible est calculée par la théorie des perturbations dépendant du temps, au premier ordre. On introduit ainsi très naturellement toute une série de grandeurs importantes (A , B) relatives à des paires d'observables A et B du système (le système est « perturbé » sur A et sa « réponse » est observée sur B) : susceptibilité généralisée, fonction spectrale, fonctions de corrélation canonique ou symétrique... Les relations qui existent entre ces diverses fonctions sont établies, ce qui permet de démontrer le premier théorème fluctuation-dissipation, leurs propriétés de symétrie sont analysées, notamment lors du renversement du sens du temps (relations d'Onsager) : le comportement de ces fonctions de réponses aux fréquences faibles et élevées, et par suite le comportement du système aux temps longs et courts, sont étudiés grâce notamment à l'établissement de règles de somme.

L'étude précédente permet alors de dégager clairement les insuffisances du modèle de Langevin. Le fait que la force de friction soit instantanée conduit à une violation des règles de somme. Ceci suggère tout naturellement de la remplacer par une force de friction retardée. Mais l'application des résultats généraux de la réponse linéaire montre alors que la force de Langevin ne peut pas être quelconque : la fonction de corrélation de cette force doit coïncider avec la fonction de mémoire intervenant dans la friction retardée (deuxième théorème fluctuation-dissipation). La théorie de la réponse linéaire constitue ainsi un guide précieux pour améliorer l'équation de Langevin et la mettre sous une forme (équation de Langevin généralisée) qui sera celle pour laquelle une généralisation quantique existe.

3) La troisième partie du cours aborde précisément une telle généralisation quantique. L'idée générale est de partir des équations de Heisenberg du système quantique et de « réduire » ces équations au moyen d'opérateurs de projection introduits initialement par Zwanzig pour l'établissement d'équations pilotes. Après avoir introduit un produit scalaire dans l'espace de Liouville des opérateurs, ce qui permet d'isoler clairement le sous-espace des observables auxquelles on s'intéresse (généralement celles qui varient lentement par rapport aux autres), on projette les équations de Heisenberg dans ce sous-espace. On établit ainsi des équations d'évolution exactes pour les observables intéressantes (équations de Mori) qui ont une structure d'équations de Langevin généralisées. Les différents termes apparaissant dans cette équation sont analysés en détail et interprétés physiquement. La force de Langevin apparaît comme la composante « rapide » de la force agissant sur les observables intéressantes, alors que la force de friction retardée apparaît comme une « self-réaction » (réaction sur les observables lentes des observables rapides perturbées par l'évolution des observables lentes). Le lien précis entre les 2 forces est explicité (2^e théorème fluctuation-dissipation).

4) Les résultats précédents sont très généraux et reposent seulement sur l'existence d'un produit scalaire dans l'espace des opérateurs. Le choix d'un tel produit scalaire dépend du problème physique étudié. La quatrième partie du cours présente une application des équations de Mori à l'étude d'un système en équilibre thermodynamique.

On montre d'abord commun le choix judicieux d'un produit scalaire, suggéré par l'étude de la réponse linéaire, permet de déduire des équations de Mori des équations exactes auxquelles satisfont les fonctions de corrélation canonique ou symétrique des observables intéressantes. De telles équations sont des équations intégrodifférentielles dont le noyau, n'est autre que la fonction de mémoire de la force de friction retardée, ou encore la fonction de corrélation de la force de Langevin. L'analogie entre fonctions de corrélation et fonctions de mémoire d'une part, propagateurs et self-énergies d'autre part, est soulignée.

On établit ensuite un certain nombre de résultats exacts concernant les fonctions de corrélation et fonctions de mémoire : relations entre les moments des transformées de Fourier-Laplace de ces deux fonctions, propriétés de symétrie, développement en fractions continues, positivité de la transformée de Fourier de la fonction de corrélation, lien entre positivité et caractère dissipatif du système...

Les résultats précédents sont alors utilisés pour introduire un certain nombre d'approximations intéressantes. L'approximation markoffienne consiste à négliger le temps de mémoire (ou temps de corrélation) devant le temps de relaxation (temps d'évolution des variables lentes). On montre que pour une seule variable lente, une telle approximation conduit à une exponentielle décroissante pour la fonction de corrélation et, par suite, à une lorentzienne pour la densité spectrale. Le cas de plusieurs variables lentes couplées les unes aux autres est également analysé dans le cadre de cette approximation. On présente ensuite un certain nombre d'améliorations possibles à l'approximation markoffienne : choix pour la fonction de mémoire de fonctions simples dont on ajuste les paramètres grâce aux règles de somme exactes établies plus haut, utilisation du développement en fractions continues que l'on tronque après un certain nombre d'itérations.

Enfin, on souligne un certain nombre de prolongements possibles dont certains seront abordés aux cours des années ultérieures : fluctuations dans les systèmes hors d'équilibre, importance des non linéarités, couplage entre modes, critères pour trouver les variables lentes, lois de conservation et modèle hydrodynamique...

Equations de Langevin

Etude des fluctuations dans l'état d'équilibre

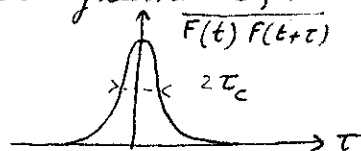
- L'étude du mouvement "erratique" d'une particule lourde, de masse M , immergée dans un fluide en équilibre thermodynamique, est analysée au moyen de l'équation phénoménologique :

$$\frac{d}{dt} v(t) = -\gamma v(t) + \frac{1}{M} F(t) \quad (I-1)$$

où l'on sépare dans la force totale exercée par le fluide, la composante purement erratique $F(t)$, appelée force de Langevin, et la réaction du fluide à la perturbation qu'il subit du fait du mouvement de la particule, $-\gamma v(t)$, appelée force de friction.

- Hypothèses sur $F(t)$: fonction aléatoire stationnaire, centrée, de temps de corrélation très court τ_c , (éventuellement gaussienne).

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{F(t)} = 0 \quad (I-2-a) \\ \overline{F(t)F(t+\tau)} = 2DM^2 \delta(\tau) \quad (I-2-b) \end{array} \right.$$



- Exemples de calculs faits à partir de l'équation de Langevin

(i) Le caractère fluctuant de F se transmet à v $\overline{v(t)} = 0$
 le calcul de $\overline{v^2}$ donne $\overline{v^2} = D/\gamma$, ce qui combiné à l'équipartition de l'énergie $\frac{1}{2} M \overline{v^2} = \frac{1}{2} kT$, donne la relation

$$\gamma = \frac{M}{kT} D \quad (I-3)$$

qui doit nécessairement exister entre les paramètres γ et D décrivant la "dissipation" et la "fluctuation" du système

(ii) Fonctions de corrélation $\overline{v(t)v(t+\tau)}$ décrivant les corrélations entre fluctuations de v à 2 instants différents.

Le théorème de Wiener-Khinchine indique que le carré du module de la T.F. d'une fonction aléatoire, proportionnel à la densité spectrale $J(\omega)$ du processus, est aussi proportionnel à la T.F. de la fonction de corrélation temporelle du processus. Par T.F. de (I-1) et élévation du module des 2 membres au carré, on obtient la relation

$$J_v(\omega) = \frac{1}{\gamma^2 + \omega^2} \frac{1}{M^2} J_F(\omega) \quad (I-4)$$

entre les densités spectrales J_v et J_F de v et F . Par T.F. de (I-4) et à la limite $\tau_c \rightarrow 0$, on obtient, compte tenu de (I-2-b) et (I-3)

$$\overline{v(t)v(t+\tau)} = \overline{v^2} e^{-\gamma|\tau|} \quad (I-5)$$

Existence de 2 échelles de temps bien distinctes dans le problème : τ_c , temps de corrélation de F et $\gamma^{-1} = T_R$ temps de corrélation de v (ou encore temps de relaxation) beaucoup plus long que τ_c .

Réponse à une perturbation externe faible

- En présence d'une force externe F_{ext} faible, c-à-d qui fait sortir le système très légèrement de l'équilibre, le mouvement de la particule est supposé décrit par l'équation

$$\frac{d}{dt} v(t) = -\gamma v(t) + \frac{1}{M} F(t) + \frac{1}{M} F_{ext}(t) \quad (I-6)$$

La force de Langevin $F(t)$ gardant les mêmes propriétés (I-2) que dans l'état d'équilibre.

- En prenant la moyenne de (I-6), on obtient alors compte tenu de (I-2-a) :

$$\frac{d\overline{v}(t)}{dt} = -\gamma \overline{v}(t) + \frac{1}{M} \overline{F_{ext}}(t) \quad (I-7)$$

équation qui permet de calculer la réponse linéaire du système, c-à-d encore si l'on choisit $\overline{F_{ext}}(t)$ sinusoidale, la susceptibilité $\chi(\omega)$ (ou encore l'admittance) en fonction de γ

Problèmes en suspens

- (i) Comment justifier une équation telle que (I-1) à partir des équations exactes du mouvement ? phénoménologique
- (ii) Comment tenir compte de la valeur non nulle de τ_c ? (effets de retard ...)
- (iii) Que se passe-t-il si l'on sort très nettement de l'équilibre ? Les propriétés de la nouvelle force de Langevin ne vont-elles pas dépendre de l'écart à l'équilibre ?

Réponses linéaires

On quitte momentanément l'approche phénoménologique précédente pour une approche perturbative.

Principe du calcul

- On part d'un système initialement en équilibre thermodynamique, décrit par l'opérateur densité $\rho_{eq} = Z^{-1} e^{-H/KT}$ ($Z = Tr e^{-H/KT}$)
 - On le soumet à une perturbation jouée, dépendant du temps, et proportionnelle à l'observable A : $W = -a(t)A$
 $a(t)$: fonction classique de t .
 - On calcule le nouvel état ainsi obtenu, au 1^{er} ordre en a , par la théorie des perturbations dépendant du temps, et on s'intéresse à la valeur moyenne de B dans l'état hors d'équilibre ainsi obtenu. On trouve ainsi
- $$\langle B(t) \rangle_{n.eq} = \int_{-\infty}^t dt' \tilde{\chi}_{BA}(t-t') a(t') \quad (I-8)$$
- $\tilde{\chi}_{BA}$: fonction de réponse linéaire sur B du système "attaqué" sur A .

Quelques résultats importants

(i) On trouve pour $\tilde{\chi}_{BA}$
$$\tilde{\chi}_{BA}(t-t') = \frac{i}{\hbar} \langle [B(t), A(t')] \rangle_{eq} \theta(t-t') \quad (I-9)$$

La réponse linéaire $\tilde{\chi}$ s'exprime en fonction de fonctions de corrélations d'observables du système évaluées dans l'état d'équilibre

(ii) Autre forme intéressante du résultat précédent

Soit $\chi_{BA}(\omega)$ la T.F. de $\tilde{\chi}_{BA}(t)$. $\chi_{BA}(\omega)$ est la susceptibilité du système. Si $A = B$ et si $A = A^\dagger$, la partie imaginaire $\xi_{AA}(\omega) = \text{Im} \chi_{AA}(\omega)$ décrit la dépendance en fréquence de la dissipation du système. On démontre alors aisément que

$$S_{AA}(\omega) = \hbar \coth \frac{\beta \hbar \omega}{2} \xi_{AA}(\omega) \quad (I-10)$$

où $\beta = 1/kT$ et $S_{AA}(\omega)$ est la T.F. de la f. de corrélation symétrisée

$$\tilde{S}_{AA}(t) = \frac{1}{2} \langle A(0)A(t) + A(t)A(0) \rangle_{eq} \quad (I-11)$$

C'est le 1^{er} théorème fluctuation-dissipation

(iii) Établissement de règles de somme permettant de préciser le comportement de $\chi_{BA}(\omega)$ pour ω grand.

Ces règles de somme ne sont pas satisfaites par l'expression phénoménologique de $\chi(\omega)$ déduite de (I-1), ce qui montre les défauts d'une telle équation aux temps courts (effets de retard négligés)

Equations de Langevin généralisé.

On revient à l'équation phénoménologique (I-1) et on essaie de l'améliorer en tenant compte des résultats obtenus à partir de l'étude des réponses linéaires.

Nouvelles hypothèses

On remplace (I-1) par

$$\frac{d}{dt} v(t) = - \int_{-\infty}^t \tilde{\gamma}(t-t') v(t') dt' + \frac{1}{M} R(t) \quad (I-12)$$

où $\tilde{\gamma}(\tau)$ décrit la friction retardée et où $R(t)$ est la force de Langevin pour laquelle on suppose seulement

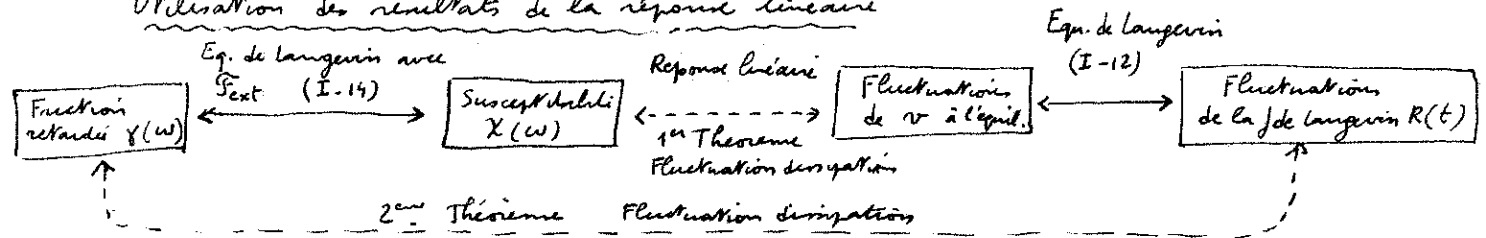
$$\overline{R(t)} = 0 \quad (I-13)$$

En présence d'une force extérieure faible, on suppose, comme pour (I-6), qu'il suffit de rajouter $\frac{1}{M} F_{ext}(t)$ à (I-12), les propriétés de $R(t)$ restant les mêmes qu'à l'équilibre. On obtient ainsi pour les valeurs moyennes

$$\frac{d}{dt} \overline{v(t)} = - \int_{-\infty}^t \tilde{\gamma}(t-t') \overline{v(t')} dt' + \frac{1}{M} F_{ext}(t) \quad (I-14)$$

équation qui permet de relier la susceptibilité $\chi(\omega)$ du système à la transformée de Fourier $\tilde{\gamma}(\omega)$ de $\tilde{\gamma}(\tau) \theta(\tau)$ [transformée de Fourier Laplace de $\tilde{\gamma}(\tau)$]

Utilisation des résultats de la réponse linéaire



- L'équation de Langevin (I-12) permet de relier les fluctuations de v dans l'équilibre à celles de la force de Langevin (partie droite de la figure)
- l'équation de Langevin avec $F_{ext}(t)$ (I-14) permet par ailleurs de relier la susceptibilité $\chi(\omega)$ à la fonction retardée $\tilde{\gamma}(\omega)$ (partie gauche)
- Or, la théorie de la réponse linéaire relie la susceptibilité $\chi(\omega)$ aux fluctuations de v dans l'équilibre (1^{er} théorème fluctuation-dissipation). Elle fournit donc le maillon qui permet de relier les fluctuations de R à $\tilde{\gamma}(\omega)$. En d'autres termes, si les équations (I-12) et (I-14) sont exactes, la fonction de corrélation de la force de Langevin ne peut être quelconque et est nécessairement reliée à la friction $\tilde{\gamma}(\tau)$. Un tel résultat est appelé 2^{ème} théorème fluctuation-dissipation

De manière plus précise, si l'on réécrit (I-12) sous la forme

$$\frac{d}{dt} v(t) = - \int_0^t \tilde{\gamma}(t-t') v(t') dt' + \frac{1}{M} F(t) \quad (I-15)$$

en posant $F(t) = R(t) - M \int_{-\infty}^0 \tilde{\gamma}(t-t') v(t') dt'$ (I-16)

on démontre que

$$\begin{cases} \overline{F(t)} = 0 & (I-17-a) \\ \overline{F(0)F(\tau)} = \tilde{\gamma}(\tau) MkT \text{ (pour } \tau > 0) & (I-17-b) \end{cases}$$

$$\overline{v(0)F(t)} = 0 \text{ pour } t > 0$$

- Reste bien sûr à montrer l'existence d'équations du type de (I-12) ou (I-14).

Espace de Liouville E_L

- Espace vectoriel formé par l'ensemble des opérateurs d'un système quantique
Notation $A \rightarrow |A\rangle$ ou $|A\rangle$ ket de E_L
 - Opérateur de Liouville \mathcal{L} défini à partir de l'hamiltonien H
 $\mathcal{L}|A\rangle = |[H, A]\rangle = |HA - AH\rangle$ (I-18)
- Avec cette définition, les équations de Heisenberg s'écrivent
- $$\frac{d}{dt}|A(t)\rangle = i\mathcal{L}|A(t)\rangle \quad (t=1) \quad (I-19)$$
- Introduction d'un produit scalaire $\langle B|A\rangle$ dans E_L , satisfaisant aux propriétés habituelles du produit scalaire (Exemple $\langle B|A\rangle = \text{Tr} B^\dagger A$)
D'où la possibilité de définir l'adjoint d'un opérateur de E_L .
Suivant le produit scalaire choisi $\mathcal{L} = \mathcal{L}^\dagger$ ou $\mathcal{L} \neq \mathcal{L}^\dagger$.

Idee générale du calcul

- En général, 2 échelles de temps dans le problème. Par exemple 1 variable "lente" A (possibilité de plusieurs variables lentes), les autres sont "rapides".
- L'introduction d'un produit scalaire permet de définir le projecteur $P = |A\rangle\langle A|$ sur "l'axe lent" et le projecteur $Q = 1 - P$ sur le "sous-espace rapide".
- Dans l'équation de Heisenberg (I-19), $i\mathcal{L}|A(t)\rangle$ apparaît comme la force totale agissant sur A à l'instant t .
L'idée générale du calcul consiste à "réduire" algébriquement cette équation au moyen des projecteurs P et Q , de manière à isoler la composante purement rapide dans la force agissant sur A .

Résultats

De manière purement algébrique, et sans aucune approximation, on établit ainsi que

$$\frac{d}{dt}|A(t)\rangle = i\Omega|A(t)\rangle - \int_0^t dt' \tilde{\gamma}(t')|A(t-t')\rangle + |F(t)\rangle \quad (I-20)$$

avec

$$\begin{cases} \Omega = \langle A|\mathcal{L}|A\rangle & (I-21-a) \\ F(t) = e^{iQ\mathcal{L}Qt} iQ\mathcal{L}A & (I-21-b) \\ \tilde{\gamma}(t) = -\langle A|i\mathcal{L}F(t)\rangle & (I-21-c) \end{cases}$$

Le 1^{er} terme de (I-20) décrit l'évolution propre de $A(t)$ en l'absence de tout couplage entre variables lentes et rapides.

A cause de la présence du projecteur Q dans $F(t)$, on a

$$\langle A|F(t)\rangle = 0 \quad (I-22)$$

$F(t)$ évolue donc en restant constamment dans le sous-espace rapide. $F(t)$ est donc une force purement rapide, appelée "force de Langevin".

Finalement, le 2^{ème} terme de (I-20) représente une force retardée qui, lorsqu'on l'analyse plus en détail, a la signification d'une "self-reaction" de la variable lente sur elle-même via les variables rapides (A à $t=0$, la variable lente perturbe les variables rapides lesquelles, après avoir évolué librement pendant un temps t , réagissent sur les variables lentes).

Il est donc bien possible en conclusion d'établir, à partir des équations exactes du mouvement, une équation ayant la structure et le sens d'une équation de Langevin généralisée.

Signalons enfin 2 autres résultats importants

(i) Quel que soit le produit scalaire choisi, on obtient à partir de (I-20) et (I-22) l'équation exacte (I-7)

$$\frac{d}{dt} \langle A|A(t) \rangle = i\Omega \langle A|A(t) \rangle - \int_0^t dt \tilde{\gamma}(\tau) \langle A|A(t-\tau) \rangle \quad (I-23)$$

(ii) Si le produit scalaire choisi est tel que $\mathcal{L} = \mathcal{L}^\dagger$

$$\tilde{\gamma}(\tau) = \langle F(0)|F(\tau) \rangle \quad (I-24)$$

expression rappelant beaucoup le 2^{ème} théorème fluctuation-dissipation (voir formule I-17-b)

Problèmes en suspens

(i) Comment choisir le produit scalaire ? Quel sens physique lui donner ?

(ii) Comment choisir le sous-espace d'observables intéressantes, c-à-d le projecteur P ?

En toute rigueur, les équations précédentes demeurent valables quelle que soit P et $\phi = 1-P$. Elles ne se prêtent cependant à des approximations intéressantes que si P projette sur toutes les variables lentes ? Comment alors trouver toutes les variables lentes ?

Un premier exemple d'application des équations de Mori : Etude de l'équilibre thermodynamique.

2 choix intéressants pour le produit scalaire (suggérés par l'étude de la réponse linéaire)

(i) $\langle A|B \rangle = \frac{1}{\beta} \int_0^\beta d\lambda \langle e^{\lambda H} A^\dagger e^{-\lambda H} B \rangle_{eq}$
avec $\beta = 1/kT$

Dans ce cas, $\langle A|B(t) \rangle$ représente la valeur moyenne à l'instant $t > 0$ de l'observable B, le système ayant été faiblement perturbé par un potentiel proportionnel à A, introduit adiabatiquement de $t = -\infty$ à $t = 0$ puis coupé à $t = 0$

L'équation (I-23) décrit donc la relaxation ^{(de $\langle A(t) \rangle$)} à partir d'un état très légèrement hors d'équilibre

(ii) $\langle A|B \rangle = \frac{1}{2} \langle A^\dagger B + B A^\dagger \rangle_{eq}$

Dans ce cas $\langle A|B(t) \rangle$ représente physiquement une fonction de corrélation symétrique et (I-23) est une équation intégrodifférentielle exacte satisfaite par cette fonction de corrélation.

Le noyau $\tilde{\gamma}(\tau)$ de cette équation est appelé fonction de mémoire

Pour les 2 produits scalaires précédents, $\mathcal{L} = \mathcal{L}^\dagger$ et la relation (I-24) est valable.

Applications des équations précédentes et diverses approximations

Voir résumé de cours.

1 - Etudier les équations de Langevin - Mori pour des systèmes loins de l'équilibre.

Le problème ne sera pas abordé dans toute sa généralité. On considèrera essentiellement le cas, très important, d'un "petit" système S faiblement couplé à un "grand" réservoir R . S est initialement dans un état nettement hors d'équilibre et relaxe ensuite vers un état d'équilibre sous l'effet d'un couplage avec R . Très nombreux exemples de telles situations en physique atomique et moléculaire et en optique quantique : émission spontanée, collisions, pompage optique, masers, lasers (qui font nécessairement intervenir des situations hors d'équilibre)

Exemples de problèmes abordés

- Comment ^{obtenir} des équations de Langevin - Mori pour les observables de S ? Quel produit scalaire ou quel projecteur choisir?
- Les propriétés de la force de Langevin dépendent-elles de l'écart à l'équilibre? A-t-elle toujours une valeur moyenne nulle? Comment calculer les divers moments de cette force?
- Y a-t-il équivalence entre le contenu physique des équations de Langevin et celui de l'équation pilote étudiée dans le cours 1975-76?
- Comment calculer les fonctions de corrélation des diverses observables de S à partir des équations de Langevin?

2 - Les résultats généraux ainsi obtenus seront ensuite illustrés sur un certain nombre d'exemples concrets.

Description du bruit dans les masers et lasers : origine de la largeur de raie dans un oscillateur atomique, fluctuations d'amplitude, de phase, d'intensité ...

Corrélations de photons

L'équation pilote et les équations de Langevin-Mori

II-1

pour un petit système S couplé à un grand réservoir R

Introduction

- Pour étudier l'évolution d'un système quantique, 2 points de vue sont possibles : point de vue de Schrödinger (vecteur d'état, ou plus généralement opérateur densité, variable, observables fixes) ; point de vue de Heisenberg (opérateur densité fixe, observables variables).

- Un des premiers buts de ce chapitre est de montrer qu'il existe entre les équations de Langevin-Mori et l'équation pilote le même lien qu'entre le point de vue de Heisenberg et celui de Schrödinger.

Plus précisément, on démontre, purement algébriquement, au § 1, qu'à toute "réduction" des équations de Heisenberg utilisant un projecteur P , on peut associer une réduction de l'équation de Schrödinger utilisant le projecteur adjoint P^+ , l'équivalence des 2 équations réduites ainsi obtenues pour l'évolution des valeurs moyennes apparaissant de manière manifeste.

Dans l'appendice A (page II-8) sont regroupées les notions essentielles sur l'espace de Liouville utilisées pour un tel calcul. On y démontre en particulier un résultat nouveau par rapport aux cours antérieurs, à savoir que tout produit scalaire peut s'exprimer en fonction d'un produit scalaire particulièrement simple, dit de Hilbert-Schmidt. On peut donc, quel que soit le problème physique étudié, utiliser le produit scalaire de Hilbert-Schmidt, ce qui conduit en contre-partie à considérer des projecteurs non nécessairement orthogonaux ($P \neq P^+$).

- Pour donner un contenu physique aux équations réduites ainsi obtenues, il faut préciser le problème physique étudié et procéder à un choix judicieux des projecteurs P et P^+ . C'est ce qui est fait au § 2.

On considère ici le problème d'un petit système S , initialement hors d'équilibre, faiblement couplé à un grand réservoir R lui-même en équilibre.

Si l'on s'intéresse uniquement aux observables de S , leur valeur moyenne peut se calculer au moyen d'un opérateur densité réduit $\sigma(t)$ obtenu par trace partielle par rapport à R de l'opérateur densité $\rho(t)$ du système global $R+S$. Le passage de $\rho(t)$ à $\sigma(t)$ peut s'exprimer comme résultant de l'action d'un projecteur P^+ sur $\rho(t)$. La réduction de l'équation de Schrödinger pour $\rho(t)$ au moyen de P^+ conduit à une équation intégrodifférentielle pour $\sigma(t)$, appelé équation pilote, et qui contient toute l'information sur l'évolution de S (voir aussi cours 1975-76)

Ayant ainsi identifié P^+ , on en déduit quel projecteur $P = (P^+)^+$ il faut choisir pour réduire les équations de Heisenberg. On montre que l'action de P sur une observable quelconque revient à prendre la moyenne sur le réservoir de cette observable. La réduction des équations de Heisenberg pour les observables de S , qui sont les observables intéressantes du problème, conduit à des équations qui ont la structure et l'interprétation physique d'équations de Langevin-Mori.

① Réduction, au moyen de projecteurs, des équations du mouvement.

a) Réduction des équations de Heisenberg pour les observables.

- On part de l'équation de Heisenberg pour l'opérateur $A(t)$:

$$i\dot{A}(t) = i\mathcal{L}A(t) = i\mathcal{L}e^{i\mathcal{L}t}|A(0)\rangle = ie^{i\mathcal{L}t}\mathcal{L}|A(0)\rangle \quad (\text{II-1})$$

- Considérons l'identité algébrique :

$$e^{ixt} = e^{iyt} + i\int_0^t dt e^{ix(t-t)}(x-y)e^{iyt} \quad (\text{II-2})$$

Démonstration : Soient $\mathcal{A}(t)$ et $\mathcal{B}(t)$ les membres de droite et de gauche. On vérifie aisément qu'ils satisfont la même équation différentielle du 1^{er} ordre $i\dot{\mathcal{A}}(t) = -x\mathcal{A}(t)$, $i\dot{\mathcal{B}}(t) = -y\mathcal{B}(t)$. Comme $\mathcal{A}(0) = \mathcal{B}(0) = 1$, on en déduit que $\mathcal{A}(t) = \mathcal{B}(t)$

Soit P un opérateur de \mathcal{E}_L , ρ l'opérateur défini $P + \rho = 1$ (II-3)

En effectuant dans (II-2) la substitution $x \rightarrow \mathcal{L}$, $y \rightarrow \rho\mathcal{L}$ et par suite $x-y = (1-\rho)\mathcal{L} = P\mathcal{L}$, on obtient l'identité :

$$e^{i\mathcal{L}t} = e^{i\rho\mathcal{L}t} + i\int_0^t dt e^{i\mathcal{L}(t-\tau)}P\mathcal{L}e^{i\rho\mathcal{L}\tau} \quad (\text{II-4})$$

- Récrivons (II-1) sous la forme (puisque $P + \rho = 1$) :

$$i\dot{A}(t) = ie^{i\mathcal{L}t}P\mathcal{L}|A(0)\rangle + ie^{i\mathcal{L}t}\rho\mathcal{L}|A(0)\rangle \quad (\text{II-5})$$

Si, dans le dernier terme de (II-5) on remplace $e^{i\mathcal{L}t}$ par (II-4), on obtient

$$i\dot{A}(t) = ie^{i\mathcal{L}t}P\mathcal{L}|A(0)\rangle + ie^{i\rho\mathcal{L}t}\rho\mathcal{L}|A(0)\rangle - \int_0^t dt e^{i\mathcal{L}(t-\tau)}P\mathcal{L}e^{i\rho\mathcal{L}\tau}\rho\mathcal{L}|A(0)\rangle \quad (\text{II-6})$$

équation qui nous permettra plus loin, par un choix judicieux de P , d'établir les équations de Langevin-Mori.

b) Réduction correspondante de l'équation de Schrödinger pour l'opérateur densité $\rho(t)$

- Nous choisissons dans l'espace de Liouville le produit scalaire de Hilbert-Schmidt (voir Appendice). Avec un tel produit scalaire, l'opérateur de Liouville \mathcal{L} est hermitique ($\mathcal{L} = \mathcal{L}^\dagger$) et l'expression adjointe de (II-4) s'écrit :

$$e^{-i\mathcal{L}t} = e^{-i\mathcal{L}\rho^\dagger t} - i\int_0^t dt e^{-i\mathcal{L}\rho^\dagger t}\mathcal{L}P^\dagger e^{-i\mathcal{L}(t-\tau)} \quad (\text{II-7})$$

où P^\dagger et ρ^\dagger sont les adjoints de P et ρ (on a bien sûr $P^\dagger + \rho^\dagger = 1$).

- L'équation de Schrödinger pour l'opérateur densité $\rho(t)$ s'écrit :

$$i\dot{\rho}(t) = -i\mathcal{L}\rho(t) = -i\mathcal{L}e^{-i\mathcal{L}t}\rho(0) = -i\mathcal{L}P^\dagger e^{-i\mathcal{L}t}\rho(0) - i\mathcal{L}\rho^\dagger e^{-i\mathcal{L}t}\rho(0) \quad (\text{II-8})$$

Si dans le dernier terme de (II-8) on remplace $e^{-i\mathcal{L}t}$ par (II-7), on obtient

$$i\dot{\rho}(t) = -i\mathcal{L}P^\dagger e^{-i\mathcal{L}t}\rho(0) - i\mathcal{L}\rho^\dagger e^{-i\mathcal{L}\rho^\dagger t}\rho(0) - \int_0^t dt \mathcal{L}\rho^\dagger e^{-i\mathcal{L}\rho^\dagger t}\mathcal{L}P^\dagger e^{-i\mathcal{L}(t-\tau)}\rho(0) \quad (\text{II-9})$$

équation qui nous permettra plus loin, par un choix judicieux de P^\dagger , d'établir l'équation pilote.

c) Identité des prédictions concernant les valeurs moyennes

Point de vue de Schrödinger

$$\langle A \rangle(t) = \text{Tr} A(\rho) \rho(t) = \langle A^+(0) | \rho(t) \rangle \quad (\text{II-10})$$

Par suite, $\frac{d}{dt} \langle A \rangle(t) = \langle A^+(0) | \dot{\rho}(t) \rangle = \langle \dot{\rho}(t) | A(0) \rangle \quad (\text{II-11})$

On a utilisé la propriété $\langle A^+ | B^+ \rangle = \langle B | A \rangle$ du produit scalaire de Hilbert. Schmidt (voir A-13), et l'hermiticité de ρ ($\rho = \rho^+$)

Point de vue de Heisenberg

$$\langle A \rangle(t) = \text{Tr} \rho(0) A(t) = \langle \rho(0) | A(t) \rangle \quad (\text{II-12})$$

Par suite, $\frac{d}{dt} \langle A \rangle(t) = \langle \rho(0) | \dot{A}(t) \rangle \quad (\text{II-13})$

L'identité entre de (II-11) et (II-12) est manifeste sur (II-6) et (II-9). Si l'on prend le bra $\langle \dot{\rho}(t) |$ donné par l'adjoint de l'expression (II-9), multiplié scalairement par $|A(0)\rangle$, on obtient le même résultat qu'en multipliant scalairement l'expression (II-6) de $|\dot{A}(t)\rangle$ par $\langle \rho(0) |$

② Choix des projecteurs - Contenu polynôme des équations.

a) Système polynôme étudié - Hypothèses sur l'état initial.

Les équations (II-6) et (II-9) ont été établies sans aucune hypothèse sur le système étudié. De plus, le fait que P et P^+ soient des projecteurs n'a pas été ^{utilisé} encore. A partir de maintenant, on considère un petit système S couplé à un grand réservoir R avec les hypothèses suivantes sur l'état initial :

(i) L'opérateur densité initial $\rho(0)$ est supposé factorisé :

$$\boxed{\rho(0) = \sigma_S(0) \sigma_R(0)} \quad \text{Hypothèse 1} \quad (\text{II-14})$$

A $t=0$, le système S dans l'état $\sigma_S(0)$ est mis en contact avec le réservoir qui est dans l'état $\sigma_R(0)$

(ii) Alors que S peut être hors d'équilibre à $t=0$, R est en équilibre. Plus précisément, en l'absence de S , l'opérateur densité de R resterait toujours égal à $\sigma_R(0)$ au cours du temps. Si H_R est l'hamiltonien de R , une telle hypothèse revient à supposer

$$\boxed{[H_R, \sigma_R(0)] = 0} \quad \text{Hypothèse 2} \quad (\text{II-15})$$

b) Choix du projecteur P^+ conduisant à l'équation pilote

(Voir aussi cours 1975-76).

Opérateur densité réduit de S

- Valeur moyenne d'une observable quelconque G

$$\langle G \rangle = \text{Tr}_{RS} G \rho = \sum_{m, \bar{n}} \langle m, \bar{n} | G P | m, \bar{n} \rangle = \sum_{\substack{m, m' \\ \bar{n}, \bar{n}'}} \langle m, \bar{n} | G | m', \bar{n}' \rangle \langle m', \bar{n}' | \rho | m, \bar{n} \rangle \quad (\text{II-16})$$

$\{|m\rangle\}$ ($\{|\bar{n}\rangle\}$) : base orthonormée de l'espace des états E_S (E_R) de S (R)

- Si A est une observable de S

$$\langle m, \bar{n} | A | m', \bar{n}' \rangle = \langle m | A | m' \rangle \delta_{\bar{n}, \bar{n}'} \quad (\text{II-17})$$

de sorte que la valeur moyenne d'une observable de S s'écrit : (II-4)

$$\langle A \rangle = \sum_{m, m'} \langle m | A | m' \rangle \langle m' | \sigma | m \rangle = \text{Tr}_S A \sigma \quad (\text{II-18})$$

où
$$\sigma = \sum_{\bar{n}} \langle \bar{n} | \rho | \bar{n} \rangle = \text{Tr}_R \rho \quad (\text{II-19})$$

est un opérateur de E_S , obtenue par trace partielle de ρ par rapport à R , et appelé opérateur densité réduit de S .

- On peut encore écrire (II-19) sous la forme [voir Appendice A, notamment A-18 et A-19].

$$\sigma = \sum_{\bar{n}} \text{Tr}_R (|\bar{n}\rangle \langle \bar{n}| \rho) = \sum_{\bar{n}} \ll \bar{n} | \bar{n}^+ | \rho \gg = \ll 1_R | \rho \gg \quad (\text{II-20})$$

$|p\rangle\rangle$ appartient à l'espace de Liouville $E_L(S+R)$ de $S+R$. En prenant le produit scalaire de $|p\rangle\rangle$ par $\ll 1_R | \in E_L(R)$, on obtient un vecteur $|\sigma\rangle$ de $E_L(S)$.

Opérateur densité de $R+S$ lorsqu'on néglige les corrélations entre S et R .

- Négliger les corrélations apparues entre R et S au bout d'un temps t revient à remplacer l'opérateur densité $\rho(t)$ par l'opérateur densité factorisé

$$\rho(t) \rightarrow \text{Tr}_S \rho(t) \otimes \text{Tr}_R \rho(t) \quad (\text{II-21})$$

- Comme R est supposé très grand devant S , l'évolution de R est très peu affectée par la présence de S . Comme R tout seul serait en équilibre, (voir (II-15)), on en conclut que

$$\text{Tr}_S \rho(t) \simeq \sigma_R(0) \quad (\text{II-22})$$

Négliger les corrélations entre R et S revient donc à considérer la transformation

$$\rho(t) \rightarrow \sigma_R(0) \text{Tr}_R \rho(t) \quad (\text{II-23})$$

Utilisant les notations de Dirac dans l'espace de Liouville et l'équation (II-20), on peut récrire (II-23) sous la forme

$$|p(t)\rangle\rangle \rightarrow |\sigma_R(0)\rangle\rangle \ll 1_R | p(t)\rangle\rangle \quad (\text{II-24})$$

c.-à-d encore

$$|p(t)\rangle\rangle \rightarrow P^+ |p(t)\rangle\rangle \quad (\text{II-25})$$

où P^+ est l'opérateur défini par

$$P^+ = |\sigma_R(0)\rangle\rangle \ll 1_R | \quad (\text{II-26})$$

- Calculons $(P^+)^2$

$$P^{+2} = |\sigma_R(0)\rangle\rangle \langle 1_R | \sigma_R(0)\rangle\rangle \langle 1_R | \quad (\text{II-27})$$

Comme $\langle 1_R | \sigma_R(0)\rangle\rangle = \text{Tr}_R \sigma_R(0) = 1$ ($\sigma_R(0)$ est normé), on en déduit que

$$(P^+)^2 = P^+ \quad (\text{II-28})$$

P^+ est donc un projecteur (non orthogonal car P^+ n'est pas hermitique)

En conclusion de ce §, on peut dire que la notion d'opérateur densité réduit nous conduit tout naturellement à considérer un certain projecteur P^+ de l'espace de Liouville défini en (II-26). On peut alors se demander ce que devient l'équation de Schrödinger pour $\rho(t)$ lorsqu'on la réduit au moyen de P^+ .

Equation pilote.

- En appliquant P^+ à $\rho(0)$ donné en (II-14), on déduit que

$$P^+ |p(0)\rangle\rangle = |p(0)\rangle\rangle \quad (\text{II-29})$$

et par suite

$$Q^+ |p(0)\rangle\rangle = (1 - P^+) |p(0)\rangle\rangle = 0 \quad (\text{II-30})$$

- Si l'on développe l'exponentielle de la 2^{ème} ligne de (II-4), on voit II-5
 que $|p(0)\rangle$ est toujours immédiatement à droite de P^+ , ce qui montre
 que la 2^{ème} ligne de (II-3) donne un résultat nul, compte tenu de (II-30).
 Appliquons alors P^+ aux 2 membres de (II-3) (et remplaçons dans les
 1^{ère} et 3^{ème} lignes $e^{-i\mathcal{L}t}|p(0)\rangle$ par $|p(t)\rangle$, $e^{-i\mathcal{L}(t-\tau)}|p(0)\rangle$ par $|p(t-\tau)\rangle$). Il vient:

$$\frac{d}{dt} P^+ |p(t)\rangle = -i P^+ \mathcal{L} P^+ |p(t)\rangle - \int_0^t d\tau P^+ \mathcal{L} P^+ e^{-i\mathcal{L}P^+\tau} \mathcal{L} P^+ |p(t-\tau)\rangle \quad (\text{II-31})$$

L'équation (II-31) est une équation intégrodifférentielle qui ne fait plus intervenir que la projection $P^+ |p\rangle$ de $|p\rangle$.

- En reportant dans (II-31) l'expression $P^+ |p(t)\rangle = |\sigma_R(0)\rangle |\sigma(t)\rangle$
 découlant de (II-23) et (II-13), et en simplifiant ensuite par $|\sigma_R(0)\rangle$, on
 obtient l'équation suivante pour l'opérateur densité réduit $\sigma(t)$ de S

$$\frac{d}{dt} \sigma(t) = -i \langle\langle 1_R | \mathcal{L} | \sigma_R(0) \rangle\rangle \sigma(t) - \int_0^t d\tau \langle\langle 1_R | \mathcal{L} P^+ e^{-i\mathcal{L}P^+\tau} \mathcal{L} | \sigma_R(0) \rangle\rangle \sigma(t-\tau) \quad (\text{II-32})$$

L'équation intégrodifférentielle (II-32) satisfaite par l'opérateur densité réduit σ est appelée équation pilote.

- Dans (II-32), les éléments de matrice entre $\langle\langle 1_R |$ et $|\sigma_R(0)\rangle\rangle$ (qui appartiennent à $E_L(R)$) demeurent des opérateurs dans $E_L(S)$.

Il peut être intéressant d'expliciter (II-32) en faisant apparaître les éléments de matrice $\sigma_{ij}(t)$ de σ . En utilisant (voir A-3)

$$|\sigma(t)\rangle\rangle = \sum_{i,j} \sigma_{ij}(t) |ij^+\rangle\rangle \quad (\text{II-33})$$

et en projetant les 2 membres de (II-32) sur $\langle\langle ij^+ |$, on obtient :

$$\dot{\sigma}_{ij}(t) = -i \sum_{kl} \Omega_{ij,kl} \sigma_{kl}(t) - \sum_{kl} \int_0^t d\tau R_{ij,kl}(\tau) \sigma_{kl}(t-\tau) \quad (\text{II-34})$$

avec

$$\Omega_{ij,kl} = \langle\langle ij^+ | 1_R | \mathcal{L} | kl^+ | \sigma_R(0) \rangle\rangle \quad (\text{II-35})$$

$$R_{ij,kl}(\tau) = \langle\langle ij^+ | 1_R | \mathcal{L} P^+ e^{-i\mathcal{L}P^+\tau} \mathcal{L} | kl^+ | \sigma_R(0) \rangle\rangle \quad (\text{II-36})$$

Les Ω et R sont maintenant des nombres puisque ce sont des éléments de matrice dans $E_L(S+R)$, et non plus seulement dans $E_L(R)$ comme en (II-32).

- Comme nous le verrons plus loin, les équations (II-34) peuvent être encore simplifiées, moyennant des hypothèses raisonnables sur l'hamiltonien d'interaction V entre S et R, sur l'existence de 2 échelles de temps bien distinctes dans le problème étudié. Les équations exactes (II-32) ou (II-34) pourront alors être approximées par des équations différentielles linéaires décrivant la relaxation de S sous l'effet du couplage avec R (nombreux exemples de telles équations : équations de Bloch en RMN, équations du pompage optique, collisions...)

Pour l'instant, nous nous intéressons plutôt à un autre problème. Ayant identifié un projecteur P^+ intéressant pour résoudre l'équation de Schrödinger, on peut essayer, en suivant les calculs du § 1, d'utiliser l'opérateur adjoint P de P^+ pour résoudre les équations de Heisenberg. Quels résultats physiques intéressants peut-on obtenir dans cette voie?

c) Conséquences sur le projecteur à utiliser pour réduire les équations de Heisenberg.

Signification polynôme du projecteur P.

- De (II-26) on déduit que

$$P = |1_R\rangle\rangle\langle\langle \sigma_R(0) | \quad (II-37)$$

- Faisons agir P sur une observable quelconque G

$$P |G\rangle\rangle = |1_R\rangle\rangle\langle\langle \underbrace{\sigma_R(0)}_{\text{observable de S}} | G \rangle\rangle = 1_R \cdot \text{Tr}_R(\sigma_R(0) G) \quad (II-38)$$

P agissant sur une observable quelconque G donne donc une observable de S, obtenue par moyenne de G sur le réservoir.

- Il découle de ce qui précède que si A est une observable de S

$$P |A\rangle\rangle = |1_R\rangle\rangle\langle\langle \sigma_R(0) | A \rangle\rangle = 1_R \cdot A = |A\rangle\rangle \quad (II-39)$$

les observables de S sont donc invariante par rapport à P

Equations de Heisenberg pour les observables de S

- les observables intéressantes du problème polynôme étudié ici sont les observables de S qui, comme nous venons de le voir, sont invariante par rapport à P.

- Remplaçons dans (II-5) $|A(0)\rangle\rangle$ par l'opérateur de S

$$|A_{ij}(0)\rangle\rangle = |i\rangle\rangle\langle\langle j| \quad (II-40)$$

où $\{|i\rangle\rangle\}$ est une base orthonormée de E_S . L'ensemble des $|A_{ij}(0)\rangle\rangle$ pour tout i et tout j forme une base orthonormée de $E_L(S)$. Utilisons

$$P = |1_R\rangle\rangle\langle\langle \sigma_R(0) | = \sum_{kl} |k\rangle\rangle\langle\langle 1_R | \sigma_R(0) | l\rangle\rangle \quad (II-41)$$

et le fait que $e^{i\mathcal{L}t} A_{kl}(0) = A_{kl}(t)$, $e^{i\mathcal{L}(t-\tau)} A_{kl}(0) = A_{kl}(t-\tau)$. On obtient alors à partir de II-6

$$\frac{d}{dt} A_{ij}(t) = i \sum_{kl} \Omega_{ij,kl}^* A_{kl}(t) + F_{ij}(t) - \int_0^t d\tau R_{ij,kl}^*(\tau) A_{kl}(t-\tau) \quad (II-42)$$

où $F_{ij}(t) = i e^{i\mathcal{L}t} \mathcal{L} A_{ij}(0) \quad (II-43)$

et où les Ω et R sont donnés en (II-35), (II-36).

- les équations de Heisenberg pour les observables de S peuvent donc bien être mises sous forme d'équations ayant la structure d'équations de Langeris-Mori, $\frac{d}{dt} A_{ij}(t)$ étant donné par une somme de 3 termes : terme d'évolution propre, force de Langeris $F_{ij}(t)$, et frictions retardées.

Notons qu'à la différence de ce qui se passe pour (II-9), la 2^{ème} ligne de (II-6) ne s'annule pas avec le choix du projecteur effectué ici et donne au contraire naissance à la force de Langeris.

Moyenne sur le réservoir des forces de Langevin

- Faisons agir maintenant P sur les 2 membres des équations (II-42).
Nous poserons désormais pour l'opération de moyenne sur le réservoir associé à P

$$P |G\rangle\rangle = \langle G \rangle_R \quad (\text{II-43})$$

$\langle G \rangle_R$ demeurant une observable de S

- En développant l'exponentielle de (II-43), on voit que le projecteur P peut être mis en facteur à gauche dans l'expression donnant $F_{ij}(t)$.
Comme $P\varphi = P(1-P) = 0$, on voit ainsi que $P |F_{ij}(t)\rangle\rangle = 0$, c-à-d que

$$\langle F_{ij}(t) \rangle_R = 0 \quad (\text{II-45})$$

- Toutes les forces de Langevin ont donc une valeur moyenne nulle sur le réservoir, ce qui correspond bien à l'image physique qu'on se fait d'une force de Langevin, fluctuant autour d'une valeur moyenne nulle.
- On déduit alors de (II-42) que

$$\frac{d}{dt} \langle A_{ij}(t) \rangle_R = i \sum_{kl} \Omega_{ij,kl}^* \langle A_{kl}(t) \rangle_R - \int_0^t dt' R_{ij,kl}^*(t-t') \langle A_{kl}(t-t') \rangle_R \quad (\text{II-46})$$

Insistons bien sur la différence entre $A_{ij}(t)$ et $\langle A_{ij}(t) \rangle_R$. Alors qu'à $t=0$, $A_{ij}(0)$ est un opérateur de S , il n'en est plus de même à l'instant t : sous l'effet du couplage entre S et R , $A_{ij}(t)$ est devenue également, en partie, un opérateur de R . Par moyenne sur le réservoir on obtient un opérateur $\langle A_{ij}(t) \rangle_R$ qui obéit à l'équation adjointe de $\sigma_{ij}(t)$ [Comparez (II-34) et (II-46)].

Conclusion

En conclusion, il a été possible dans ce chapitre de mener en parallèle 2 calculs conduisant d'une part à l'équation pilote pour l'opérateur densité réduit de S , d'autre part à des équations de Langevin. Ceci pour les observables de S . Toutes les équations obtenues sont exactes et ne reposent que sur l'hypothèse de factorisation initiale (II-14).

A ce stade de la discussion, l'équation (II-42) semble beaucoup plus riche que l'équation (II-34) puisqu'elle se prête très clairement à une interprétation des fluctuations des observables de S sous l'effet des forces de Langevin $F_{ij}(t)$. On peut en particulier songer à utiliser les équations de Langevin - Ceci pour calculer les fonctions de corrélation des observables de S .

Pour progresser plus loin dans cette direction, il faut préciser davantage les propriétés des forces de Langevin $F_{ij}(t)$. Le résultat (II-45) est remarquablement simple. Par contre, il ne semble pas aisé de déduire de l'expression (II-43) de $F_{ij}(t)$ un résultat simple pour les fonctions de corrélation $\langle F_{ij}(t) F_{kl}(t') \rangle_R$ (Pas d'équivalent d'un 2^{ème} théorème fluctuation-dissipation exact).

Alors que toutes les équations de ce chapitre sont exactes, il faudra avoir recours à des approximations pour calculer $\langle F_{ij}(t) F_{kl}(t') \rangle_R$ et établir les "relations d'Einstein généralisées".

Définition - Notations

- Les opérateurs A agissant sur les kets $|\psi\rangle$ de l'espace des états E_H d'un système quantique forment eux même un espace vectoriel appelé espace de Liouville E_L

- Notations: $|\psi\rangle \in E_H \qquad |A\rangle\rangle \in E_L \qquad (A-1)$

On écrit souvent pour simplifier $|A\rangle\rangle$, ou encore A , au lieu de $|A\rangle\rangle$ quand les 2 types de kets (de E_H et E_L) n'apparaissent pas simultanément et qu'il n'y a pas de confusion possible.

- Exemples: Si $\{|n\rangle\}$ est une base orthonormée de E_H , $|n\rangle\langle m|$ est un opérateur de E_H , donc un vecteur de E_L noté $|nm^+\rangle$

$|n\rangle\langle m|$ opérateur de $E_H \iff |nm^+\rangle$ vecteur de $E_L \qquad (A-2)$

Tout opérateur A de E_H est une superposition linéaire des $|n\rangle\langle m|$

$A = \sum_{n,m} A_{nm} |n\rangle\langle m| \iff |A\rangle\rangle = \sum_{n,m} A_{nm} |nm^+\rangle \qquad (A-3)$

Opérateurs de E_L (superopérateurs) - Opérateur de Liouville \mathcal{L}

- Un opérateur ^(linéaire) de E_L fait correspondre linéairement à tout ket $|A\rangle\rangle$ de E_L un autre ket $|A'\rangle\rangle$ de E_L .

- Opérateur de Liouville \mathcal{L} . Défini à partir du hamiltonien H du système

$\mathcal{L}|A\rangle\rangle = |[H, A]\rangle\rangle = |HA - AH\rangle\rangle \qquad (A-4)$

- Equations d'évolution de l'opérateur densité et des observables ($\hbar=1$)

$i \frac{d}{dt} \rho(t) = [H, \rho(t)] \iff \frac{d}{dt} |\rho(t)\rangle\rangle = -i \mathcal{L} |\rho(t)\rangle\rangle \qquad (A-5)$

$i \frac{d}{dt} A(t) = [A(t), H] \iff \frac{d}{dt} |A(t)\rangle\rangle = i \mathcal{L} |A(t)\rangle\rangle \qquad (A-6)$

- Solutions de ces équations quand H est indépendant du temps

$\rho(t) = e^{-iHt} \rho(0) e^{iHt} \iff |\rho(t)\rangle\rangle = e^{-i\mathcal{L}t} |\rho(0)\rangle\rangle \qquad (A-7)$

$A(t) = e^{iHt} A(0) e^{-iHt} \iff |A(t)\rangle\rangle = e^{i\mathcal{L}t} |A(0)\rangle\rangle \qquad (A-8)$

- Kets propres de \mathcal{L} construits à partir des kets propres de H

$H|n\rangle = E_n|n\rangle \qquad E_n - E_m = \omega_{nm} \qquad (A-9)$

$\mathcal{L}|nm^+\rangle = |H|n\rangle\langle m| - |n\rangle\langle m|H\rangle\rangle = |(E_n - E_m)|n\rangle\langle m|\rangle\rangle = \omega_{nm} |nm^+\rangle \qquad (A-10)$

Produit scalaire de Hilbert - Schmidt

Définition

$\langle\langle B|A\rangle\rangle = \text{Tr } B^+ A \qquad (A-11)$

Propriétés générales d'un produit scalaire

$\langle\langle B|A\rangle\rangle = \langle\langle A|B\rangle\rangle^* \qquad (A-12-a)$

$\langle\langle A|A\rangle\rangle$ réel ≥ 0 , nul si et seulement si $A=0 \qquad (A-12-b)$

$\langle\langle B|A\rangle\rangle$: linéaire / A antilinéaire / $B \qquad (A-12-c)$

Propriétés plus particulières vérifiées par le produit scalaire H.S.

(i) $\langle\langle B|A\rangle\rangle = \text{Tr}(B^+ A) = \text{Tr}(A B^+) = \text{Tr}((A^+)^+ B^+) = \langle\langle A^+|B^+\rangle\rangle \qquad (A-13)$

(ii) Hermiticité de $\ll B | \ll A \gg$ vis à vis du produit scalaire de H.S.

II-9

$$\ll B | \ll A \gg = \text{Tr}(B^+ H A) - \text{Tr}(B^+ A H)$$

$$\ll A | \ll B \gg = \text{Tr}(A^+ H B) - \text{Tr}(A^+ B H)$$

Comme $H = H^+$, on déduit aisément des 2 équations précédentes (en utilisant l'invariance d'une trace dans une permutation circulaire)

$$\ll B | \ll A \gg = \ll A | \ll B \gg^* \quad \text{et donc} \quad \ll = \ll^+ \quad (A-14)$$

(iii) $\{|n m^+\rangle\}$ est une base orthonormée de \mathcal{E}_L

$$\ll n' m'^+ | n m^+ \gg = \text{Tr}((|n'\rangle\langle m'|)^+ |n\rangle\langle m|) = \text{Tr}(|m'\rangle\langle n'| |n\rangle\langle m|) = \delta_{nn'} \delta_{mm'} \quad (A-15)$$

$$\sum_{n,m} |n m^+\rangle \ll n m^+ | = \mathbb{I} \quad (\text{opérateur unité dans } \mathcal{E}_L) \quad (A-16)$$

$$\ll n m^+ | A \gg = \text{Tr}((|n\rangle\langle m|)^+ A) = \text{Tr}(|m\rangle\langle n| A) = A_{nm} \quad (A-17)$$

(iv) Une manière intéressante d'écrire la trace d'un opérateur A de \mathcal{E}_H soit $|1\rangle$ le ket de \mathcal{E}_L correspondant à l'opérateur $\sum_n |n\rangle\langle n|$ de \mathcal{E}_H

$$\sum_n |n\rangle\langle n| = 1 \quad \longrightarrow \quad \sum_n |n n^+\rangle = |1\rangle \quad (A-18)$$

$$\ll 1 | A \gg = \sum_n \ll n n^+ | A \gg = \sum_n \text{Tr}(|n\rangle\langle n| A) = \sum_n \langle n | A | n \rangle = \text{Tr} A \quad (A-19)$$

Autres produits scalaires

- Notés $\langle B | A \rangle$ pour la différentiel du produit scalaire de H.S. Satisfait aux mêmes propriétés générales (A-12) que le produit scalaire de H.S., mais pas forcément aux propriétés suivantes.
- Exemples : produits scalaires utilisés pour calculer les fonctions de corrélation symétrique et consommées d'un système en équilibre thermodynamique (voir cours 1977-78).
- Théorème (*): Tout produit scalaire $\langle B | A \rangle$ peut s'exprimer sous la forme $\ll \delta B | A \gg$ où δ est un opérateur linéaire de l'espace de Liouville \mathcal{E}_L

Démonstration: D'après (A-3) (qui ne dépend pas du produit scalaire)

$$|A\rangle = \sum_{nm} A_{nm} |n m^+\rangle$$

D'après la linéarité de $\langle B | A \rangle$ par rapport à $|A\rangle$,

$$\langle B | A \rangle = \sum_{nm} A_{nm} \langle B | n m^+\rangle$$

Or, d'après (A-17), $A_{nm} = \ll n m^+ | A \gg$, de sorte que

$$\langle B | A \rangle = \sum_{nm} \langle B | n m^+\rangle \ll n m^+ | A \gg$$

En utilisant l'orthogonalité du produit scalaire de H.S. par rapport au bra, ~~écrit~~ on obtient finalement :

$$\langle B | A \rangle = \ll \delta B | A \gg \quad \text{avec} \quad \delta = \sum_{nm} |n m^+\rangle \langle n m^+| \quad (A-20)$$

Tout produit scalaire peut donc s'exprimer en fonction du produit scalaire de H.S.

Projecteurs

Opérateur P de \mathcal{E}_L tel que $P^2 = P$. Si de plus $P = P^+$ vis à vis du produit scalaire choisi, P est un projecteur orthogonal.

Exemple: soit A un vecteur de \mathcal{E}_L tel que $\langle A | A \rangle = 1$. Alors $P = |A\rangle\langle A|$ est un projecteur orthogonal (avec le produit scalaire choisi)

Calculons $P | B \rangle$. $P | B \rangle = |A\rangle\langle A | B \rangle = |A\rangle \ll A | B \gg$

On a donc également $P = |A\rangle\langle\langle A |$, ce qui montre que P n'est plus un projecteur orthogonal vis à vis du produit scalaire de H.S.

(*) Référence: H. Grabert, Zeit für Physik (1977), B 26, 79.

Les équations de Langevin-Mori d'un petit système S couplé à un grand réservoir R. Etude perturbative

But de ce chapitre.

- Dans le chapitre précédent, toutes les formules établies sont exactes, mais trop générales pour pouvoir être discutées de manière précise. Dans ce chapitre, moyennant quelques hypothèses supplémentaires sur l'interaction entre S et R, on procède à un traitement perturbatif des équations de Langevin-Mori.
- Dans le cadre d'un tel traitement, on introduit simplement les notions de temps de corrélation T_c , de temps de relaxation T_R , et on montre que les fonctions de corrélation des forces de Langevin, sont caractérisées par le même temps de corrélation T_c que les fonctions de mémoire intervenant dans les termes de friction retardés (équivalent d'un 2^{ème} théorème fluctuation-dissipation approché). Une autre idée importante qui apparaît est que les ~~cas~~ moments des forces de Langevin dépendent de l'écart à l'équilibre.
- Le calcul quantitatif des fonctions de corrélation des forces de Langevin, c-à-d. l'établissement des relations d'Einstein généralisées, sera abordé dans le chapitre suivant, non plus à partir d'un traitement perturbatif, mais à partir des équations de Langevin-Mori elles-mêmes, convenablement "moyennées" et avec la seule hypothèse (si il existe dans le problème) d'échelles de temps bien distinctes T_c et T_R avec $T_R \gg T_c$.

A - Hypothèses sur l'interaction entre S et R - Notations

① Hamiltonien^(H) du système global.

- On suppose que H est une somme de 3 termes :

$$H = H_R + H_S + V \quad (III-1)$$

où H_R et H_S sont les hamiltoniens de R et S, V l'interaction entre S et R.

A H_R, H_S, V correspondent respectivement les opérateurs de Liouville $\mathcal{L}_R, \mathcal{L}_S, \mathcal{L}_1$

$$\mathcal{L}_R |G\rangle\rangle = | [H_R, G] \rangle\rangle \quad \mathcal{L}_S |G\rangle\rangle = | [H_S, G] \rangle\rangle \quad \mathcal{L}_1 |G\rangle\rangle = | [V, G] \rangle\rangle \quad (II-2)$$

- 1^{ère} hypothèse sur V

$$\boxed{T_{R_R}(\sigma_R(0)V) = \langle V \rangle_R = P|V\rangle\rangle = 0} \quad (III-3)$$

(on a utilisé II-44).

Une telle hypothèse exprime physiquement que le potentiel moyen exercé par R sur S, quand R est dans l'état $\sigma_R(0)$, est nul.

Elle n'est pas très restrictive dans la mesure où, si $\langle V \rangle_R$ n'est pas nul, il est ^(souvent) possible de l'intégrer dans l'hamiltonien H_S de S.

- 2^{ème} hypothèse sur V

$$\boxed{V = \sum_{\nu} S_{\nu} R_{\nu}} \quad (III-4)$$

V est une somme de produits d'opérateurs de S (majuscules droites) par des opérateurs de R (majuscules rondes)

② Commutateurs des opérateurs de Liouville $\mathcal{L}_R, \mathcal{L}_S, \mathcal{L}_I$ avec P

L'établissement des formules données dans ce § ne présente aucune difficulté et est reporté en appendice B (page III-8)

- A partir de la définition (III-2) de \mathcal{L}_S , on montre aisément que

$$P \mathcal{L}_S = \mathcal{L}_S P \tag{III-5}$$

- A partir de (III-2) et de l'hypothèse (II-15) sur $\mathcal{O}_R(0)$, on montre aisément que

$$P \mathcal{L}_R = \mathcal{L}_R P = 0 \tag{III-6}$$

- A partir de (III-2) et de l'hypothèse (III-3) sur V , on montre aisément que

$$P \mathcal{L}_I P = 0 \tag{III-7}$$

- Conséquences sur les opérateurs $P \mathcal{L} P, \mathcal{L} P, P \mathcal{L} \mathcal{L}$ rencontrés dans la suite des calculs (on a bien sur $\mathcal{L} = \mathcal{L}_R + \mathcal{L}_S + \mathcal{L}_I$).

De (III-5), (III-6), (III-7) on déduit que

$$P \mathcal{L} P = \mathcal{L}_S P = P \mathcal{L}_S \tag{III-8}$$

Comme $P \mathcal{L} = \mathcal{L} P = 0$, on a également, compte tenu de III-5 et III-6

$$P \mathcal{L} \mathcal{L} = P \mathcal{L}_I \mathcal{L} \quad \mathcal{L} \mathcal{L} P = \mathcal{L}_I \mathcal{L} P \tag{III-9}$$

Enfin, il suffit d'ajouter $P \mathcal{L}_I P = 0$ d'après (III-7) aux membres de droite de (III-9) et d'utiliser $P + \rho = 1$ pour obtenir

$$P \mathcal{L} \mathcal{L} = P \mathcal{L}_I \quad \mathcal{L} \mathcal{L} P = \mathcal{L}_I \mathcal{L} P \tag{III-10}$$

③ Simplifications des notations pour les opérateurs de S

- Dans le dernier chapitre, nous avons noté $|A_{ij}(0)\rangle\rangle$ les ket de $E_L(S)$ correspondant à $t=0$ aux opérateurs $|i\rangle\langle j|$ de $E_H(S)$. Il est d'ailleurs intéressant de prendre désormais pour $\{|i\rangle\}$ la base orthonormée des états propres de H_S , de valeur propre E_i , de sorte que $|A_{ij}(0)\rangle\rangle$ est ket propre de \mathcal{L}_S (voir A-10) avec une valeur propre ω_{ij} égale à la fréquence de Bohr de la transition $i-j$

$$\mathcal{L}_S |A_{ij}(0)\rangle\rangle = \omega_{ij} |A_{ij}(0)\rangle\rangle \quad \omega_{ij} = E_i - E_j \tag{III-11}$$

- Afin de ne pas alourdir les notations avec 2 indices i, j relatifs à S , nous prendrons désormais l'indice grec α pour représenter l'ensemble ij et nous ne mettrons pas (0) pour désigner $t=0$. Tout ket de E_L sans indication de temps correspondra donc à $t=0$

$$|A_{ij}(0)\rangle\rangle \rightarrow |A_\alpha\rangle \tag{III-12}$$

Les A_α forment une base orthonormée de $E_L(S)$ [voir A-16 et A-15]

$$\langle A_\alpha | A_\beta \rangle = \delta_{\alpha\beta} \quad \sum_\alpha |A_\alpha\rangle\langle A_\alpha| = I_S \tag{III-13}$$

- L'équation (III-11) devient

$$\mathcal{L}_S |A_\alpha\rangle = \omega_\alpha |A_\alpha\rangle \quad \text{avec} \quad \omega_\alpha = \omega_{ij} \tag{III-14}$$

- Enfin, nous supposons que les opérateurs S_ν figurant dans l'expression (III-4) de V appartiennent à la base $|A_\alpha\rangle$ (sinon, on les développe sur cette base) de sorte que

$$\mathcal{L}_S |S_\nu\rangle = \omega_\nu |S_\nu\rangle \tag{III-15}$$

④ Réécriture des équations de Langeris-Mori sous une forme rangée exacte mais plus simple

- Repartons de (II-6). Remplaçons $|A(0)\rangle$ par $|A_\alpha\rangle$. Utilisons le fait que P et φ sont des projecteurs ($P^2=P$, $\varphi^2=\varphi$) et que $|A_\alpha\rangle = P|A_\alpha\rangle$ avec le choix (II-37) de P [voir II-39]. Il vient:

$$|\dot{A}_\alpha(t)\rangle = ie^{i\omega t} P \varphi P |A_\alpha\rangle + ie^{i\varphi t} \varphi P |A_\alpha\rangle - \int_0^t dt e^{i\omega(t-\tau)} P \varphi P e^{i\varphi \tau} \varphi P |A_\alpha\rangle \quad (III-16)$$

- On voit ainsi apparaître les opérateurs $P\varphi P$, φP , $P\varphi$ mentionnés plus haut au § 2. Utilisant les résultats de ce § et (III-14), on obtient

$$|\dot{A}_\alpha(t)\rangle = i\omega_\alpha |A_\alpha(t)\rangle + ie^{i\varphi t} \mathcal{L}_1 |A_\alpha\rangle - \int_0^t dt e^{i\omega(t-\tau)} P \mathcal{L}_1 e^{i\varphi \tau} \mathcal{L}_1 |A_\alpha\rangle \quad (III-17)$$

Il ressort ainsi clairement que la force de Langeris (2^e terme) est au moins d'ordre 1 en V , alors que la friction retardée (3^e terme) au moins d'ordre 2

- Dans le 3^e terme de (III-17) introduisons enfin $I_S = \sum_\beta |A_\beta\rangle \langle A_\beta|$ avant P . Il vient

$ \dot{A}_\alpha(t)\rangle = i\omega_\alpha A_\alpha(t)\rangle + F_\alpha(t)\rangle - \int_0^t dt \sum_\beta A_\beta(t-\tau)\rangle \gamma_{\beta\alpha}(\tau)$	III-18-a
$ F_\alpha(t)\rangle = ie^{i\varphi t} \mathcal{L}_1 A_\alpha\rangle$	III-18-b
$\gamma_{\beta\alpha}(\tau) = \langle A_\beta \sigma_R \mathcal{L}_1 e^{i\varphi \tau} \mathcal{L}_1 A_\alpha 1_R\rangle$	III-18-c

- On voit sur (III-18) en à la limite $\mathcal{L}_1 \rightarrow 0$ (c-à-d $V \rightarrow 0$) $\dot{A}_\alpha(t) = i\omega_\alpha A_\alpha(t)$ c-à-d $A_\alpha(t) = e^{i\omega_\alpha t} A_\alpha$. Il est donc intéressant de poser

$$|\tilde{A}_\alpha(t)\rangle = e^{-i\omega_\alpha t} |A_\alpha(t)\rangle \quad (III-19)$$

Pour V suffisamment faible, les $|\tilde{A}_\alpha(t)\rangle$ évoluent très lentement et peuvent donc être considérées comme des variables lentes.

A partir de (III-18) et (III-19) on déduit immédiatement que :

$ \dot{\tilde{A}}_\alpha(t)\rangle = \tilde{F}_\alpha(t)\rangle - \sum_\beta e^{i(\omega_\beta - \omega_\alpha)t} \int_0^t dt \tilde{A}_\beta(t-\tau)\rangle \tilde{\gamma}_{\beta\alpha}(\tau)$	III-19-a
$ \tilde{F}_\alpha(t)\rangle = e^{-i\omega_\alpha t} F_\alpha(t)\rangle$	III-19-b
$\tilde{\gamma}_{\beta\alpha}(\tau) = e^{-i\omega_\beta \tau} \gamma_{\beta\alpha}(\tau) = \langle A_\beta \sigma_R \tilde{\mathcal{L}}_0 e^{i\varphi \tau} \mathcal{L}_1 A_\alpha 1_R\rangle$	III-19-c

Dans l'expression (III-19-c) de $\tilde{\gamma}_{\beta\alpha}(\tau)$, $\tilde{\mathcal{L}}_0$ représente l'opérateur de Liouville "non perturbé" :

$$\tilde{\mathcal{L}}_0 = \mathcal{L}_R + \mathcal{L}_S \quad (III-20)$$

Pour démontrer (III-19-c), il faut utiliser (III-14) et le fait que, compte tenu de l'hypothèse (II-15) sur σ_R ,

$$\mathcal{L}_R |\sigma_R\rangle = |[\mathcal{H}_R, \sigma_R]\rangle = 0 \quad (III-21)$$

① Traitement perturbatif de l'interaction V entre S et R

a) Calcul perturbatif des coefficients de friction $\tilde{\gamma}_{\beta\alpha}(t)$

- Comme 2 opérateurs L_i figurent déjà dans l'expression (III-19-c) de $\tilde{\gamma}_{\beta\alpha}(t)$, on peut négliger L_i dans $e^{i\mathcal{P}L}t$ et remplacer $e^{i\mathcal{P}L}t$ par $e^{i\mathcal{P}L_0}t$. En développant cette exponentielle et en utilisant le fait que $\mathcal{P}=1-P$ commute avec L_0 [voir III-5 et III-6], on peut faire sortir \mathcal{P} de l'exponentielle. On obtient alors $\mathcal{P}L_i|A_\alpha 1_R\rangle = \mathcal{P}L_i P|A_\alpha 1_R\rangle$ qui, d'après (III-10), peut être écrit $L_i P|A_\alpha 1_R\rangle = L_i|A_\alpha 1_R\rangle$. Finalement, à l'ordre 2 en V [l'ordre le plus bas où $\tilde{\gamma}_{\beta\alpha}(t)$ est non nul], on a :

$$\tilde{\gamma}_{\beta\alpha}(t) \cong \langle\langle A_\beta \sigma_R | e^{-iL_0 t} L_i e^{iL_0 t} L_i | A_\alpha 1_R \rangle\rangle \quad (III-22)$$

- Explicitons davantage (III-22). A chaque action de L_i correspond un commutateur avec V [voir III-2]. A chaque action de $e^{iL_0 t}$ correspond un passage en représentation d'interaction par rapport à l'hamiltonien non perturbé $H_R + H_S$ [voir appendice A - (A-8)]

$$e^{iL_0 t} |G\rangle \rightarrow e^{i(H_R + H_S)t} |G\rangle e^{-i(H_R + H_S)t} \quad (III-23)$$

On obtient alors à partir de (III-22), et compte tenu de (III-9), (III-15), (III-21)

$$\tilde{\gamma}_{\beta\alpha}(t) = \sum_{\mu} \sum_{\nu} \text{Tr}_{RS} \left(A_\beta^+ \sigma_R \left[S_\mu \hat{R}_\mu(-t), [S_\nu R_\nu, A_\alpha] \right] \right) e^{-i\omega_\mu t} \quad (III-24)$$

$$\text{où } \hat{R}_\mu(-t) = e^{-iH_R t} R_\mu e^{iH_R t} \quad (III-25)$$

représente l'opérateur R_μ de R en représentation d'interaction par rapport à H_R

- Nous n'explicitons pas ici le double commutateur de (III-24).

Le point qui nous intéresse est que la partie relative à R peut se factoriser. En effet, ne figurent à l'intérieur de la parenthèse de (III-24) que des opérateurs de R ou des opérateurs de S (voir III-25 en particulier). Comme les opérateurs de R commutent avec ceux de S, on peut ainsi isoler dans (III-24) la contribution de R qui fait intervenir les 2

fonctions

$$\text{Tr}_R (\sigma_R \hat{R}_\mu(-t) R_\nu) = \langle \hat{R}_\mu(-t) \hat{R}_\nu(0) \rangle_R = c_{\mu\nu}(t) \quad (III-26)$$

$$\text{Tr}_R (\sigma_R R_\nu \hat{R}_\mu(-t)) = \langle \hat{R}_\nu(0) \hat{R}_\mu(-t) \rangle_R = c_{\nu\mu}(-t) \quad (III-27)$$

On voit ainsi apparaître les fonctions de corrélation libres des observables de R intervenant dans le couplage V entre S et R. Elles sont "libres" parce que seul H_R intervient dans l'évolution de $\hat{R}_\mu(-t)$. Ce sont donc les fonctions de corrélation des R en l'absence de S.

Comme σ_R commute avec H_R par hypothèse (voir II-15), σ_R décrit un état stationnaire en l'absence de S et, par suite, les fonctions de corrélation libres (III-26), (III-27) sont stationnaires, c-à-d ne dépendent que de la différence des 2 temps (on peut le vérifier en utilisant l'invariance d'une trace sous une permutation circulaire et la commutation de σ_R et H_R). C'est là la justification de la notation $c_{\nu\mu}(-t)$ pour (III-27).

b) Introduction du temps de corrélation τ_c

- Soit $\{|\bar{n}\rangle\}$ une base orthonormée de H_R , Ω_{pn} les fréquences de Bohr correspondantes

$$H_R |\bar{n}\rangle = \bar{E}_n |\bar{n}\rangle \quad \bar{E}_p - \bar{E}_n = \Omega_{pn} \quad (III-28)$$

Comme σ_R commute avec H_R [voir II-15], on peut toujours choisir $\{|\bar{n}\rangle\}$ de manière que σ_R soit diagonal dans cette base. L'élément diagonal de σ

$$\langle \bar{n} | \sigma | \bar{n} \rangle = \pi(\bar{n}) \quad (III-29)$$

représente la population du niveau $|\bar{n}\rangle$.

En explicitant (III-26), on obtient alors

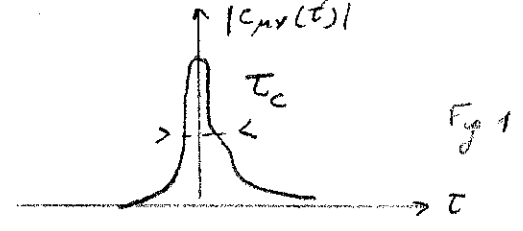
$$C_{\mu\nu}(\tau) = \sum_{\bar{p}, \bar{n}} \pi(\bar{n}) \langle \bar{n} | R_\mu | \bar{p} \rangle \langle \bar{p} | R_\nu | \bar{n} \rangle e^{i\Omega_{pn}\tau} \quad (III-30)$$

- Il importe maintenant de préciser ce que l'on entend par "grand" lorsqu'on parle de R .

Tout d'abord, la capacité calorifique de R est très grande, de sorte qu'on peut négliger la variation de l'état de R sous l'effet du couplage avec S . Cette idée physique a déjà été utilisée dans le choix du projecteur P^+ (voir discussion précédant II-26)

Ensuite, le spectre de H_R est très dense et très étendu. Il s'ensuit que les fréquences de Bohr Ω_{pn} intervenant dans le mouvement de R_μ et R_ν sont distribuées de manière très dense sur un très grand intervalle. La fonction de corrélation $C_{\mu\nu}(\tau)$

qui résulte de la superposition de très nombreuses sinusoides oscillant à des fréquences tendra très vite vers 0 quand $|\tau|$ croît à partir de 0 (Fig 1) le temps τ_c qui caractérise la décroissance des $C(\tau)$ est appelé temps de corrélation



Notons en passant que les $C_{\mu\nu}(\tau)$ ne sont pas en général des fonctions paires de τ .

- Exemples physiques.

Emission spontanée : Dans ce cas, S est un atome excité, R le vide du champ électromagnétique quantifié. L'opérateur S_ν de V correspond au dipôle atomique alors que R_ν correspond à l'opérateur champ électrique. La fonction de corrélation du champ électrique du vide fait intervenir la superposition de toutes les fréquences des divers modes du champ réparties avec une densité qui varie en ω^2 . Il y a un facteur ω supplémentaire lié au fait que le champ électrique est proportionnel à $\sqrt{\omega}$. Il faut donc prendre la T.F. de ω^3 ce qui conduit à un temps de corrélation infiniment court, à moins que l'on introduise une coupure dans l'intégrale sur ω , liée au fait que l'on prend la moyenne du champ dans un volume très petit mais non nul (voir discussion dans les cours 74-75)

Relaxation par des phonons : Dans ce cas, R_ν est en général proportionnel à l'opérateur position d'un atome du cristal. La fonction de corrélation de cette position fait intervenir la superposition d'oscillations correspondant aux fréquences des divers phonons. Le temps de corrélation est alors de l'ordre de l'inverse de la fréquence de Debye qui caractérise la largeur en fréquences du spectre des phonons.

c) Calcul perturbatif des fonctions de corrélation des forces de Langevin

- D'après (III-19-b) et (III-18-b), $|\tilde{F}_\alpha(t)\rangle$ contient déjà au moins une force \mathcal{L}_i . Il en est de même pour $|\tilde{F}_\beta(t')\rangle$.

Il s'ensuit que pour t et t' suffisamment proches de l'instant initial, on peut dans (III-18-b) remplacer $e^{i\mathcal{P}t}$ par $e^{i\mathcal{P}0t}$. Comme plus haut, on peut montrer aisément qu'on peut sortir \mathcal{Q} de $e^{i\mathcal{P}0t}$ et l'éliminer (grâce à III-10)

On peut donc, pour t et t' suffisamment proches de 0, écrire

$$\begin{cases} \tilde{F}_\alpha(t) \approx ie^{-i\omega_\alpha t} e^{i\mathcal{L}_i 0t} \mathcal{L}_i A_\alpha = i \sum_\mu e^{i\omega_\mu t} [S_\mu \hat{R}_\mu(t), A_\alpha] \\ \tilde{F}_\beta(t') \approx ie^{-i\omega_\beta t'} e^{i\mathcal{L}_j 0t'} \mathcal{L}_j A_\beta = i \sum_\nu e^{i\omega_\nu t'} [S_\nu \hat{R}_\nu(t'), A_\beta] \end{cases} \quad (III-31)$$

- Prenons alors la moyenne sur le réservoir du produit $\tilde{F}_\alpha(t) \tilde{F}_\beta(t')$. Il vient

$$\langle \tilde{F}_\alpha(t) \tilde{F}_\beta(t') \rangle_R = - \sum_\mu \sum_\nu e^{i(\omega_\mu + \omega_\nu)t} e^{-i\omega_\nu(t-t')} \left(T_{R\sigma_R} \hat{R}_\mu(t) \hat{R}_\nu(t') \right) [S_\mu, A_\alpha] [S_\nu, A_\beta] \quad (III-32)$$

On reconnaît dans la parenthèse une fonction de corrélation libre du réservoir analogue à celles discutées plus haut, et qui, d'après la propriété de stationnarité discutée plus haut, n'est autre que $C_{\mu\nu}(t'-t)$

On en conclut donc que $\langle \tilde{F}_\alpha(t) \tilde{F}_\beta(t') \rangle_R$ a une dépendance en $t-t'$ très rapide, caractérisée par le même temps que $\gamma_{\beta\alpha}(t)$, c-à-d par le temps de corrélation τ_c .

On voit également que $\langle \tilde{F}_\alpha(t) \tilde{F}_\beta(t') \rangle_R$ reste un opérateur vis à vis de S (voir par exemple $[S_\mu, A_\alpha][S_\nu, A_\beta]$) dont la valeur moyenne sur S va dépendre de $\sigma_S(0)$, donc de l'écart à l'équilibre.

En conclusion de ce §, on voit que les forces de Langevin fluctuent très rapidement, sur une échelle de temps de l'ordre de τ_c , et que leurs moments d'ordre 2 dépendent de l'écart à l'équilibre.

Remarques

(i) t et t' apparaissent tous 2 dans (III-32) et non pas seulement $t-t'$.

C'est pourquoi il faut supposer pour la validité du traitement précédent que t et t' sont tous 2 assez proches de 0. Par contre, dans l'expression (III-19-c) de $\tilde{\gamma}_{\beta\alpha}(t)$ seul t apparaît, ce qui par suite ne nécessite aucune hypothèse sur t .

(ii) Anticipant sur la discussion des §§ suivants, on peut préciser dans quelle mesure t et t' doivent être proches de 0 pour que (III-32) soit valable : t et t' doivent être plus petits que le temps de relaxation T_R , qui est beaucoup plus long que τ_c , de façon que l'évolution moyenne de S n'ait pas été encore appréciable. Si t et t' ne sont plus petits devant T_R , on conçoit aisément qu'il faille tenir compte de la relaxation de S et de la modification correspondante des moments d'ordre 2 de F .

Nous ne chercherons pas ici à améliorer le traitement perturbatif précédent car la méthode présentée au chapitre suivant permet d'obtenir plus simplement $\langle \tilde{F}_\alpha(t) \tilde{F}_\beta(t') \rangle_R$ pour tout t et tout t' .

(iii) Notons enfin la présence du terme $e^{i(\omega_\mu + \omega_\nu)t}$ dans (III-32), qui oscille très vite si $\omega_\mu + \omega_\nu \neq 0$. En fait, on peut montrer aisément que, seuls, les termes séculaires de (III-32) pour lesquels $\omega_\mu + \omega_\nu = 0$ (plus exactement $|\omega_\mu + \omega_\nu| T_R \ll 1$), ont un effet cumulatif appréciable sur les fluctuations de S . C'est pourquoi nous négligerons désormais les termes non séculaires de (III-32) (approximation séculaire analogue à celle discutée plus loin).

② Approximation de mémoire courte dans l'évolution des valeurs moyennes des opérateurs de S

- Prenons la valeur moyennée ^(sur R) des 2 membres de (III-19-a). On obtient, compte tenu de (II-45) :

$$\frac{d}{dt} \langle \tilde{A}_\alpha(t) \rangle_R = - \sum_\beta e^{i(\omega_\beta - \omega_\alpha)t} \int_0^t dt' \langle \tilde{A}_\beta(t-t') \rangle_R \tilde{\gamma}_{\beta\alpha}(t') \quad (\text{III-33})$$

- Pour ν suffisamment petit, la vitesse de variations des $\langle \tilde{A}_\alpha(t) \rangle$ est suffisamment petite pour que le temps de relaxation T_R caractérisant l'évolution des $\langle \tilde{A}_\alpha(t) \rangle$ soit très long devant t_c . Comme dans l'intégrale de (III-33) la présence de $\tilde{\gamma}_{\beta\alpha}(t')$ coupe la contribution de t' supérieures à t_c , on peut alors très valablement remplacer $\langle \tilde{A}_\beta(t-t') \rangle_R$ par $\langle \tilde{A}_\beta(t) \rangle_R$ qui peut être sorti de l'intégrale. Si enfin on suppose $t \gg t_c$, ce qui permet de remplacer la borne supérieure de l'intégrale par $+\infty$, on obtient :

$$\frac{d}{dt} \langle \tilde{A}_\alpha(t) \rangle_R = - \sum_\beta e^{i(\omega_\beta - \omega_\alpha)t} \langle \tilde{A}_\beta(t) \rangle_R \Gamma_{\beta\alpha} \quad (\text{III-34})$$

avec
$$\Gamma_{\beta\alpha} = \int_0^\infty dt' \tilde{\gamma}_{\beta\alpha}(t') \quad (\text{III-35})$$

le temps de relaxation T_R est caractérisé par l'inverse des coefficients Γ

$$T_R \simeq \Gamma^{-1} \simeq \frac{1}{\tilde{\gamma} t_c} \quad (\text{III-36})$$

③ Approximation séculaire

- On peut montrer aisément que les termes non séculaires de (III-34), pour lesquels $\omega_\beta \neq \omega_\alpha$, contribuent très peu à la solution de (III-34). Ils oscillent en effet trop vite pour avoir un effet cumulatif appréciable. Nous les négligerons désormais, faisant ainsi une erreur de l'ordre de $\Gamma/|\omega_\beta - \omega_\alpha|$, et écrirons :

$$\frac{d}{dt} \langle \tilde{A}_\alpha(t) \rangle_R = - \sum_{\omega_\beta = \omega_\alpha} \langle \tilde{A}_\beta(t) \rangle_R \Gamma_{\beta\alpha} \quad (\text{III-37})$$

- Notons que très fréquemment on peut montrer qu'il n'y a pas de termes non séculaires à partir de considérations de symétrie. Considérons par exemple les équations de Bloch relatives à la magnétisation longitudinale $\langle \tilde{M}_z \rangle_R$ et transversale $\langle \tilde{M}_\pm \rangle_R = \langle \tilde{M}_x \rangle_R \pm i \langle \tilde{M}_y \rangle_R$ d'un spin $1/2$ couplé à un réservoir (Oz est la direction du champ statique B_0). Si $\sigma_R(0)$ et V sont invariants par rotation autour de Oz , on peut montrer aisément qu'il n'y a pas de couplage entre $\langle \tilde{M}_z \rangle$, $\langle \tilde{M}_+ \rangle$, $\langle \tilde{M}_- \rangle$. On obtient

$$\frac{d}{dt} \langle \tilde{M}_3 \rangle_R = \frac{1}{T_1} (M_0 - \langle \tilde{M}_3 \rangle_R), \quad \frac{d}{dt} \langle \tilde{M}_\pm \rangle_R = -\frac{1}{T_2} \langle \tilde{M}_\pm \rangle_R \quad (\text{III-38})$$

où M_0 est l'aimantation d'équilibre et T_1 et T_2 le temps de relaxation longitudinal et transversale.

Remarque : Nous n'effectuons pas ici une discussion détaillée de conditions de validité des approximations effectuées dans les §§ 1 et 2 ci-dessus, ni un calcul explicite des temps de relaxation $T_{1,2}$ [à partir des doubles commutateurs III-24]. Voir pour cela le cours 75-76.

Comme nous l'avons indiqué dans l'introduction, le but essentiel de ce chapitre est d'introduire T_C, T_R et de faire comprendre la structure générale des fonctions de corrélation $\langle \tilde{F}_A(t) \tilde{F}_B(t') \rangle_R$

Appendice B

(i) Calcul de $[P, \mathcal{L}_S]$

Comme P et \mathcal{L}_S sont linéaires et que tout vecteur de E_L est une somme de produits $|R\rangle|S\rangle$ d'un ket $|R\rangle$ de $E_L(R)$ par un ket $|S\rangle$ de $E_L(S)$, il suffit d'étudier l'action de $P\mathcal{L}_S$ et $\mathcal{L}_S P$ sur $|R\rangle|S\rangle$, en utilisant les définitions (II-37) de P et (III-2) de \mathcal{L}_S

$$P\mathcal{L}_S |R\rangle|S\rangle = P |R\rangle | [H_S, S] \rangle = (T_{2R} \sigma_R(R)) |R\rangle | [H_S, S] \rangle$$

$$\mathcal{L}_S P |R\rangle|S\rangle = (T_{2R} \sigma_R(R)) \mathcal{L}_S |R\rangle|S\rangle = (T_{2R} \sigma_R(R)) |R\rangle | [H_S, S] \rangle$$

On en déduit $P\mathcal{L}_S = \mathcal{L}_S P$

(ii) Calcul de $P\mathcal{L}_R$ et $\mathcal{L}_R P$

$$P\mathcal{L}_R |R\rangle|S\rangle = P | [H_R, R] \rangle |S\rangle = (T_{2R} \sigma_R([H_R, R])) |R\rangle|S\rangle$$

Comme σ_R commute avec H_R (voir II-15), on obtient en utilisant l'invariance d'une trace par permutation circulaire

$$T_{2R}(\sigma_R(H_R R - R H_R)) = 0 \quad \text{et par suite} \quad P\mathcal{L}_R = 0$$

$$\mathcal{L}_R P |R\rangle|S\rangle = (T_{2R} \sigma_R(R)) \mathcal{L}_R |R\rangle|S\rangle = (T_{2R} \sigma_R(R)) \underbrace{| [H_R, R] \rangle}_{=0} |S\rangle = 0$$

et par suite $\mathcal{L}_R P = 0$

(iii) Calcul de $P\mathcal{L}_1 P$

$$P\mathcal{L}_1 P |R\rangle|S\rangle = (T_{2R} \sigma_R(R)) P\mathcal{L}_1 |R\rangle|S\rangle = (T_{2R} \sigma_R(R)) P | [V, S] \rangle$$

$$= (T_{2R} \sigma_R(R)) | [(T_{2R} \sigma_R V), S] \rangle = 0$$

En effet d'après l'hypothèse (III-3) $T_{2R} \sigma_R V = 0$

Donc $P\mathcal{L}_1 P = 0$

Théorème de régression quantique

Relations d'Einstein généralisées

① - Introduction . Buts de ce chapitre .

- Dans le chapitre II, on a établi un certain nombre de résultats exacts concernant les équations de Langevin - Mori d'un petit système S couplé à un grand réservoir R ; structure des équations, équivalence avec l'équation pilote en ce qui concerne les moyennes à un temps, nullité des moyennes sur les réservoir des forces de Langevin
- Dans le chapitre III, des informations supplémentaires ont été obtenues dans le cadre d'un traitement perturbatif ; existence, pour un couplage suffisamment faible entre S et R, de 2 échelles de temps dans le problème, temps de corrélation T_c et temps de relaxation $T_R \gg T_c$; structure des fonctions de corrélation $\langle F_\alpha(t) F_\beta(t') \rangle_R$ des forces de Langevin qui varient très vite en fonction de $t-t'$ (échelle de temps T_c), beaucoup plus lentement en fonction de t (échelle de temps T_R) ;
 Les résultats que nous venons d'évoquer semblent généralisables à d'autres situations où un traitement perturbatif ne peut être appliqué aux interactions élémentaires faisant évoluer S. Prenons un exemple concret. Considérons N atomes à 2 niveaux (atomes actifs d'un milieu laser) subissant des collisions avec N perturbateurs ($N \gg N$) ; le réservoir R est formé par les N perturbateurs, le système S par les N atomes. Les collisions peuvent être fortes de sorte que chaque collision atome-perturbateur ne peut être traitée perturbativement. Cependant, si le temps moyen entre 2 collisions successives subies par le même atome est long devant le temps de collision T_c , les observables collectives de S (dépôt global, différences de populations ...) s'annulent avec une constante de temps longue devant T_c .
- Dans le chapitre IV, moyennant des hypothèses très générales suggérées par l'approche perturbative, nous établissons directement à partir des équations de Langevin - Mori elles mêmes, c-à-d sans passer par l'expression explicite des forces de Langevin en fonction de $\rho, \mathcal{L} \dots$, un certain nombre de résultats importants concernant les fonctions de corrélation des observables de S (théorème de régression quantique), le calcul des coefficients de diffusion (relations d'Einstein généralisées) ...
 Evidemment, comme nous ne précisons pas la dynamique des interactions à l'échelle microscopique (T_c), nous ne pouvons établir que des résultats portant sur une évolution moyennée sur un intervalle de temps, long devant T_c , mais petit devant T_R ("coarse-grained average"). Un tel "lissage" partiel du bruit intervient d'ailleurs très concrètement dans l'étude expérimentale du phénomène lorsque la bande passante des instruments d'observation est petite devant T_c^{-1} (Notons en passant que le fait de lever le bruit n'empêche pas d'avoir accès expérimentalement à T_c , en étudiant par exemple la variation d'un temps de relaxation avec un champ magnétique qui fait varier une fréquence atomique).

② Hypothèses de départ

- Nous partons des équations exactes de Langevin-Mori (III-19-a) :

$$\frac{d}{dt} A_\alpha(t) = - \sum_{\beta} e^{i(\omega_\beta - \omega_\alpha)t} \int_0^t dt A_\beta(t-\tau) \gamma_{\beta\alpha}(\tau) + F_\alpha(t) \quad (IV-1)$$

où, pour simplifier au maximum les notations, nous ne mettrons plus désormais le tilde ($\tilde{}$) associé à la transformation (III-19) permettant d'éliminer le terme d'évolution propre $-i\omega_\alpha A_\alpha(t)$ [nous avons également supprimé les kets $| \rangle$ (qui porte sur les $A_\alpha(t)$) et non sur les $\langle A_\alpha(t) |$ comme à la fin de III),

Notons que nous ne faisons en IV-1, ni l'approximation de mémoire courte [remplacement de $\int_0^t dt A_\beta(t-\tau) \gamma_{\beta\alpha}(\tau)$ par $A_\beta(t) \int_0^\infty \gamma_{\beta\alpha}(\tau) d\tau$], ni l'approximation séculaire [restriction de \sum_{β} à $\omega_\beta = \omega_\alpha$]. Ces approximations seront introduites plus naturellement lors de l'opération de lissage étudié au § 3 ci-dessous.

- Hypothèses sur les échelles de temps

Soit τ_c l'échelle de temps caractérisant la variation des $\gamma(\tau)$.

Soit T_R l'échelle de temps définie par Γ^{-1} ou

$$\Gamma = \int_0^\infty \gamma(\tau) d\tau \quad (IV-2)$$

On suppose

$$T_R \gg \tau_c \quad (IV-3)$$

- Hypothèses sur les forces de Langevin $F_\alpha(t)$

En plus du résultat exact (voir II-45) pour les moyennes sur R ,

$$\langle F_\alpha(t) \rangle_R = 0 \quad (IV-4)$$

on suppose la structure suivante (suggérée par l'approche perturbative de III) pour les fonctions de corrélation

$$\langle F_\alpha(t) F_\beta(t') \rangle_R = 2 D_{\alpha\beta}(t) g_{\alpha\beta}(t-t') \quad (IV-5)$$

avec

(i) Dépendance très rapide en $t-t'$: la largeur de la fonction $g_{\alpha\beta}(t-t')$ [qui n'est pas forcément paire, ni réelle] est de l'ordre de τ_c . Cette fonction est normalisée de façon que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g_{\alpha\beta}(\tau) d\tau = 1 \quad (IV-6)$$

(au prix éventuellement d'une redéfinition de $D_{\alpha\beta}(t)$)

(ii) Dépendance en t . $D_{\alpha\beta}(t)$ est un opérateur de S évoluant à l'échelle de T_R .

En toute rigueur, $D_{\alpha\beta}(t)$ peut aussi évoluer aux fréquences propres de S , ou à des différences ou sommes de telles fréquences propres [voir le terme $e^{i(\omega_\alpha + \omega_\beta)t}$ de III-32]. Là encore, l'opération de lissage discutée ci-dessous, permet d'éliminer toutes les fréquences autre que la fréquence nulle de S .

③ Lissage partiel du bruit par une moyenne temporelle
 ("Coarse-grained" average).

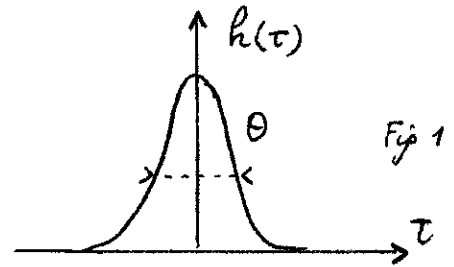
a) Définition de la moyenne temporelle.

- Soit $h(\tau)$ une fonction réelle de τ , centrée autour de 0, d'intégrale égale à 1

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) d\tau = 1 \quad (IV-7)$$

et dont la largeur θ satisfait

$$\tau_c \ll \theta \ll T_R \quad (IV-8)$$



- Les opérateurs moyennés $\overline{A_\alpha(t)}$, les forces moyennées $\overline{F_\alpha(t)}$ sont définis par

$$\overline{A_\alpha(t)} = \int_{-\infty}^{+\infty} dt A_\alpha(t-\tau) h(\tau) \quad \overline{F_\alpha(t)} = \int_{-\infty}^{+\infty} dt F_\alpha(t-\tau) h(\tau) \quad (IV-9)$$

Il ne faut évidemment pas confondre la moyenne temporelle définie ici et la moyenne sur le réservoir introduite plus haut.

- Par T.F. les produits de convolution IV-9 deviennent des produits ordinaires :

$$\overline{A_\alpha(\omega)} = A_\alpha(\omega) h(\omega) \quad \overline{F_\alpha(\omega)} = F_\alpha(\omega) h(\omega) \quad (IV-10)$$

La réalité de $h(\tau)$ et la normalisation (IV-7) impliquent :

$$h(-\omega) = h(\omega)^* \quad h(\omega=0) = 1 \quad (IV-11)$$

b) Transformation des équations de L.M. en équations différentielles.

- Dans (IV-1), $A_\alpha(t)$ et $\gamma(t)$ ne sont en réalité définis que pour $\tau, t > 0$ et doivent être remplacés par $A_\alpha(t)\theta(t)$ et $\gamma_{\beta\alpha}(t)\theta(t)$ dans l'intégrale sur τ . Soit $\gamma_{\beta\alpha}(\omega)$ la T.F. de $\gamma_{\beta\alpha}(t)\theta(t)$ [θ : fonction de Heaviside], c-à-d encore la transformée de Fourier-Laplace de $\gamma_{\beta\alpha}(t)$. La largeur de $\gamma_{\beta\alpha}(\omega)$ en ω est de l'ordre de $1/\tau_c$. Quant à $\gamma_{\beta\alpha}(\omega=0)$, on obtient d'après (IV-2) (voir aussi III.35) :

$$\gamma_{\beta\alpha}(\omega=0) = \int_0^\infty \gamma_{\beta\alpha}(t) dt = \Gamma_{\beta\alpha} \quad (IV-12)$$

- Par transformation de Fourier-Laplace, les équations de Langevin-Flou deviennent (si l'on omet, pour simplifier l'écriture, les indices α et β et qu'on oublie pour le moment les termes non sécularisés) :

$$A(\omega) [-i\omega + \gamma(\omega)] = F(\omega) + A(t=0) \quad (IV-13)$$

Multiplicons les 2 membres de cette équation par $h(\omega)$. Comme la largeur (θ^{-1}) de $h(\omega)$ est très petite devant celle (τ_c^{-1}) de $\gamma(\omega)$ [voir IV-8], on peut remplacer $\gamma(\omega)h(\omega)$ par $\gamma(\omega=0)h(\omega) = \Gamma h(\omega)$ et obtenir ainsi

$$h(\omega) A(\omega) [-i\omega + \Gamma] = h(\omega) F(\omega) + h(\omega) A(t=0) \quad (IV-14)$$

Si l'on prend la T.F.L. inverse de (IV-14), on obtient pour $t \gg \theta$ (et en remettant les indices α et β)

$$\boxed{\frac{d}{dt} \overline{A_\alpha(t)} = - \sum_{\beta} \overline{A_\beta(t)} \Gamma_{\beta\alpha} + \overline{F_\alpha(t)}} \quad (IV-15)$$

le lissage permet donc de remplacer l'équation intégrodifférentielle (IV-1) par une équation différentielle

- Quant à l'effet des termes non séculaires, on se convainc aisément (IV-4) qu'il est considérablement réduit par le lissage. En effet, les modulations aux fréquences $\Omega = \omega_\alpha - \omega_\beta$ de S que les compléxes non séculaires font apparaître dans les $A(t)$, et qui sont déjà seulement de l'ordre de $\Gamma/\Omega \ll 1$, sont encore réduites par un facteur $1/\Omega \theta$ supplémentaire dans les moyennes IV-9 [nous supposons en effet $\theta \gg \frac{1}{\Omega}$].

c) Propriétés des forces de longevité moyennées.

- On a toujours

$$\langle \overline{F_\alpha(t)} \rangle_R = 0 \quad (IV-16)$$

- Calculons la fonction de corrélation des forces moyennées. En utilisant (IV-5) et en introduisant la T.F. $g_{\alpha\beta}(\omega)$ de $g_{\alpha\beta}(\tau)$, on obtient après des calculs simples :

$$\begin{aligned} \langle \overline{F_\alpha(t)} \overline{F_\beta(t')} \rangle_R &= \int d\tau d\tau' \langle F_\alpha(t-\tau) F_\beta(t'-\tau') \rangle_R h(\tau) h(\tau') \\ &= \frac{2}{2\pi} D_{\alpha\beta}(t) \int d\omega e^{-i\omega(t-t')} g_{\alpha\beta}(\omega) h(\omega) h(-\omega) \end{aligned} \quad (IV-17)$$

Comme la largeur (θ^{-1}) de $h(\omega)$ est beaucoup plus faible que celle (τ_c^{-1}) de $g_{\alpha\beta}(\omega)$, on peut remplacer $g_{\alpha\beta}(\omega) h(\omega) h(-\omega)$ par $g_{\alpha\beta}(\omega=0) h(\omega) h(-\omega)$, c-à-d encore par $h(\omega) h(-\omega)$ puisque, d'après (IV-6) $g_{\alpha\beta}(\omega=0) = 1$. Mais $h(\omega) h(-\omega)$ est véritablement une fonction paire de ω et qui de plus d'après IV-11 est réelle et vaut 1 pour $\omega=0$. On peut donc finalement écrire

$$\langle \overline{F_\alpha(t)} \overline{F_\beta(t')} \rangle_R = 2 D_{\alpha\beta}(t) \bar{g}(t-t') \quad (IV-18)$$

où $\bar{g}(t-t')$, qui est la T.F. de $h(\omega) h(-\omega)$ est une fonction paire et réelle de $t-t'$, de largeur θ et d'intégrale égale à 1, que l'on peut assimiler à une "fonction δ " de largeur θ .

- Nous n'avons pas tenu compte implicitement des modulations éventuelles de $D_{\alpha\beta}(t)$ aux fréquences Ω de S . Lorsqu'on en tient compte on montre aisément qu'on tombe sur $\int d\omega e^{-i\omega(t-t')} g_{\alpha\beta}(\omega) h(\omega+\Omega) h(-\omega)$. Si $\theta \gg 1/\Omega$, $h(\omega+\Omega)$ et $h(-\omega)$ ne peuvent jamais être simultanément importants, ce qui montre que seules les composantes séculaires de $D_{\alpha\beta}(t)$ ($\Omega=0$) subsistent après l'opération de lissage.

d) Une opération de lissage particulièrement simple.

- Elle consiste à intégrer de t à $t+\Delta t$ (avec $\tau_c \ll \Delta t \ll T_R$) et à diviser par Δt [ce qui revient à prendre $h(\tau) = \theta(-\tau) \theta(-\Delta t + \tau) / \Delta t$]. On obtient alors pour (IV-15) :

$$\frac{A_\alpha(t+\Delta t) - A_\alpha(t)}{\Delta t} = - \sum_\beta \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} dt' A_\beta(t') \Gamma_{\beta\alpha} + \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} F_\alpha(t') dt' \quad (IV-19)$$

- Si l'on remplace dans (IV-19) $A_\beta(t')$ par $A_\beta(t) + \int_t^{t'} \dot{A}_\beta(t'') dt''$ et qu'on ne conserve que les termes d'ordre le plus bas en $\Gamma \Delta t$ (ce qui revient à remplacer $A_\beta(t')$ par $A_\beta(t)$), on obtient la formule suivante qui nous sera très utile pour la suite :

$$\boxed{A_\alpha(t+\Delta t) - A_\alpha(t) = - \sum_\beta A_\beta(t) \Gamma_{\beta\alpha} \Delta t + \int_t^{t+\Delta t} F_\alpha(t') dt'} \quad (IV-20)$$

avec $\tau_c \ll \Delta t \ll \Gamma^{-1}$

④ Calcul des corrélations entre opérateurs de S et forces de Langevin

- Pour caractériser les fluctuations des opérateurs $A_\alpha(t)$ [qui, à $t=0$ coïncident avec les opérateurs A_α de S] induites par les forces de Langevin F_β , il est intéressant de calculer les fonctions de corrélation :

$$\langle A_\alpha(t) F_\beta(t') \rangle_R \tag{IV-21}$$

- Pour $t'-t \gg \tau_c$, ces fonctions de corrélation sont certainement nulles. En effet $A_\alpha(t)$, à l'instant t , est déterminé par les forces de Langevin aux instants t'' situés dans le passé de t , instants qui sont séparés de t' par $t'-t'' \geq t'-t \gg \tau_c$. D'après les hypothèses sur les forces de Langevin faites au § 2 il ne peut alors y avoir aucune corrélation entre $F(t'')$ et $F(t')$.

- Nous allons nous borner à étudier les variations avec t' de (IV-21) dans un intervalle autour de t , de largeur 2δ petite devant T_R (trait renforcé de la figure 2).

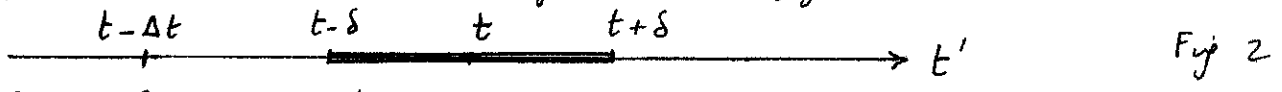


Fig 2

Pour cela, considérons l'instant $t-\delta t$ avec $\tau_c \ll \delta t \ll T_R$ et supposons de plus que $\delta t - \delta \gg \tau_c$, de sorte que dans l'intervalle de variation de t' $t'-t + \delta t \gg \tau_c$

$$(IV-22)$$

D'après (IV-20), on a

$$A_\alpha(t) = A_\alpha(t-\delta t) - \sum_\gamma A_\gamma(t-\delta t) \Gamma_{\gamma\alpha} \delta t + \int_{t-\delta t}^t F_\alpha(t'') dt'' \tag{IV-23}$$

Multiplions les 2 membres de (IV-23) à droite par $F_\beta(t')$ et prenons la moyenne sur R. D'après (IV-22), $\langle A_\alpha(t-\delta t) F_\beta(t') \rangle_R \approx 0 \approx \langle A_\gamma(t-\delta t) F_\beta(t') \rangle_R$. On a donc, d'après (IV-5) :

$$\langle A_\alpha(t) F_\beta(t') \rangle_R \approx \int_{t-\delta t}^t \langle F_\alpha(t'') F_\beta(t') \rangle_R dt'' = 2D_{\alpha\beta}(t) \int_{t-\delta t-t'}^{t-t'} g_{\alpha\beta}(\tau) d\tau \tag{IV-24}$$

D'après (IV-22), on peut remplacer la borne inférieure de la dernière intégrale de (IV-24) par $-\infty$. Pour $t-t' \gg \tau_c$, on peut remplacer également la borne supérieure $t-t'$ par $+\infty$, ce qui donne (voir IV-6) pour $\langle A_\alpha(t) F_\beta(t') \rangle_R$ une valeur égale à $2D_{\alpha\beta}(t)$. Puis

$\langle A_\alpha(t) F_\beta(t') \rangle_R$ décroît lorsque t' croît et se rapproche de t , et tend vers 0 lorsque $t'-t \gg \tau_c$, la largeur du domaine de variation de la fonction de corrélation étant de l'ordre de τ_c (figure 3)

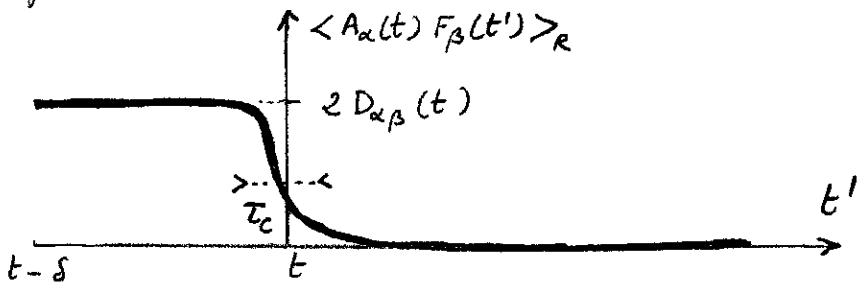


Fig. 3

- Remarque : si l'on étudie la fonction de corrélation $\langle \overline{A_\alpha(t)} \overline{F_\beta(t')} \rangle_R$ entre grandeurs "lissées", on se convainc aisément que $\langle \overline{A_\alpha(t)} \overline{F_\beta(t)} \rangle = D_{\alpha\beta}(t)$ et que la courbe de la figure 3 est remplacée par une courbe plus symétrique variant sur un intervalle de largeur θ autour de $t'=t$

⑤ Interprétation de $D_{\alpha\beta}(t)$ comme un coefficient de diffusion

- Soient

$$\Delta A_\alpha(t) = A_\alpha(t+\Delta t) - A_\alpha(t) \quad \Delta A_\beta(t) = A_\beta(t+\Delta t) - A_\beta(t) \quad (IV-25)$$

les accroissements de A_α et A_β dans un intervalle de temps Δt long devant τ_c mais court devant T_R

Nous allons calculer la quantité $\langle \Delta A_\alpha(t) \Delta A_\beta(t) \rangle_R$ et montrer, qu'à l'ordre le plus bas en $\Gamma \Delta t$, elle est égale à $2 D_{\alpha\beta}(t) \Delta t$, ce qui permet d'interpréter $D_{\alpha\beta}(t)$ comme un coefficient de diffusion.

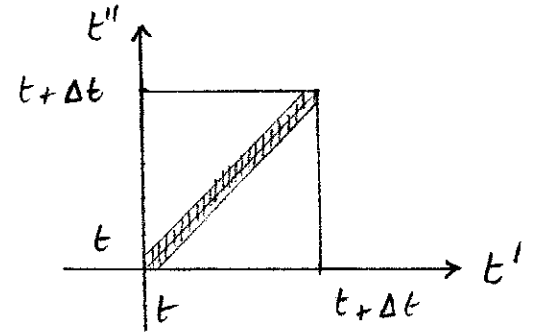
- D'après (IV-20), on a :

$$\begin{aligned} \langle \Delta A_\alpha(t) \Delta A_\beta(t) \rangle_R &= \sum_{\mu} \sum_{\nu} \langle A_\mu(t) A_\nu(t) \rangle_R \Gamma_{\mu\alpha} \Gamma_{\nu\beta} (\Delta t)^2 \\ &- \Delta t \int_t^{t+\Delta t} dt' \left[\sum_{\mu} \Gamma_{\mu\alpha} \langle A_\mu(t) F_\beta(t') \rangle_R + \sum_{\nu} \Gamma_{\nu\beta} \langle F_\alpha(t') A_\nu(t) \rangle_R \right] \\ &+ \int_t^{t+\Delta t} dt' \int_t^{t+\Delta t} dt'' \langle F_\alpha(t') F_\beta(t'') \rangle_R \end{aligned} \quad (IV-26)$$

La 1^{ère} ligne de (IV-26) est proportionnelle à $(\Delta t)^2$

Comme $t' \geq t$, l'ordre de grandeur de la 2^{ème} ligne de (IV-26) est, d'après les résultats du § 4 précédent, de l'ordre de $\Delta t D(t) \Gamma \tau_c$ (il faut intervenir l'intégrale de t à $t+\Delta t$, c-à-d de t à $+\infty$, de la courbe de la figure 3, ce qui donne un résultat de l'ordre de $D(t) \tau_c$).

Quant à la 3^{ème} ligne elle se calcule immédiatement grâce au changement de variables $t' = t'$, $\tau = t' - t''$, et aux relations (IV-5) et (IV-6) [voir aussi la figure 4 : seule une bande de largeur τ_c autour de la 1^{ère} bissectrice contribue à l'intégrale]. On trouve :



$$2 \int_t^{t+\Delta t} dt' \int_t^{t+\Delta t} dt'' D_{\alpha\beta}(t) g_{\alpha\beta}(t' - t'') \approx 2 D_{\alpha\beta}(t) \int_t^{t+\Delta t} dt' \int_{-\infty}^{+\infty} g_{\alpha\beta}(\tau) d\tau = 2 \Delta t D_{\alpha\beta}(t) \quad (IV-27)$$

(notons en passant que seules les composantes séculaires de $D_{\alpha\beta}(t')$, égales d'ailleurs aux composantes séculaires de $D_{\alpha\beta}(t)$, subsistent après l'intégration sur t').

Finalement, seules les 2^{ème} et 3^{ème} lignes de (IV-26) sont d'ordre 1 en Δt et la 2^{ème} est $\Gamma \tau_c \approx \tau_c / T_R$ fois plus petite que la 3^{ème}

On a donc démontré le résultat important

$$\boxed{\frac{\langle \Delta A_\alpha(t) \Delta A_\beta(t) \rangle_R}{2 \Delta t} = D_{\alpha\beta}(t)} \quad (IV-28)$$

Remarque : Le caractère caractéristique du problème étudié se traduit par le fait qu'en général $D_{\alpha\beta}(t) \neq D_{\beta\alpha}(t)$

⑥ Liens entre fluctuations et dissipation. Relations d'Einstein généralisées

a) Vitesse d'entraînement (Drift)

- On peut réécrire la relation fondamentale (IV-20) sous la forme

$$\frac{\Delta A_\alpha(t)}{\Delta t} = \sum_\beta A_\beta(t) \Gamma_{\beta\alpha} + \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} F_\alpha(t') dt' \quad (IV-29)$$

- Nous appellerons vitesse d'entraînement $V_\alpha(t)$ le 1^{er} terme de IV-29

$$V_\alpha(t) = \sum_\beta A_\beta(t) \Gamma_{\beta\alpha} \quad (IV-30)$$

Comme $A_\beta(t)$ n'est pas en général un opérateur pur de S pour $t \neq 0$, il en est de même pour $V_\alpha(t)$

- On note parfois $V_\alpha(t) = \left\{ \frac{d}{dt} A_\alpha(t) \right\} \quad (IV-31)$

pour rappeler que $V_\alpha(t)$ est une vitesse de variation de $A_\alpha(t)$, d'une part lissée (on utilise IV-20), d'autre part ne tenant pas compte de la force de Langevin (1^{er} terme du 2^{em} membre de IV-29 seulement)

b) Etablissement des relations d'Einstein généralisées

Calculons de 2 manières différentes $\left\langle \frac{\Delta(A_\alpha(t) A_\beta(t))}{\Delta t} \right\rangle_R$

i) $A_\alpha = A_\alpha(0)$ et $A_\beta = A_\beta(0)$ étant 2 opérateurs de S , il en est de même de $A_\alpha A_\beta$ que nous noterons $A_{\alpha\beta}$

$$A_{\alpha\beta} = A_\alpha A_\beta \quad (IV-32)$$

L'évolution au cours du temps conserve la relation (IV-32). Il suffit de multiplier les 2 membres de (IV-32) à gauche par e^{iHt} , à droite par e^{-iHt} (ou H est l'hamiltonien total), et de mettre $e^{-iHt} e^{iHt} = 1$ entre A_α et A_β pour montrer que

$$A_{\alpha\beta}(t) = A_\alpha(t) A_\beta(t) \quad (IV-33)$$

Notons en passant qu'on montrerait aisément de cette manière que les relations de commutation se conservent au cours du temps puisque:

$$[A_\alpha, A_\beta](t) = [A_\alpha(t), A_\beta(t)] \quad (IV-34)$$

Écrivant alors la formule IV-29 pour $A_{\alpha\beta}(t)$ et prenant la moyenne des 2 membres sur R (ce qui fait disparaître les forces de Langevin), on obtient :

$$\left\langle \frac{\Delta(A_\alpha(t) A_\beta(t))}{\Delta t} \right\rangle_R = \langle V_{\alpha\beta}(t) \rangle_R = \left\langle \left\{ \frac{d}{dt} (A_\alpha(t) A_\beta(t)) \right\} \right\rangle_R \quad (IV-35)$$

ii) On a par ailleurs

$$\begin{aligned} \Delta(A_\alpha(t) A_\beta(t)) &= A_\alpha(t+\Delta t) A_\beta(t+\Delta t) - A_\alpha(t) A_\beta(t) \\ &= A_\alpha(t) \Delta A_\beta(t) + \Delta A_\alpha(t) \cdot A_\beta(t) + \Delta A_\alpha(t) \Delta A_\beta(t) \end{aligned} \quad (IV-36)$$

On déduit alors aisément de (IV-36), compte tenu de (IV-28), (IV-29) et (IV-30):

De (IV-33) on déduit $\langle A_{\alpha\beta}(t) \rangle_R = \langle A_\alpha(t) A_\beta(t) \rangle_R$. Par contre, on a en général $\langle A_\alpha(t) A_\beta(t) \rangle_R \neq \langle A_\beta(t) A_\alpha(t) \rangle_R$. Les relations de commutation ne sont pas en général conservées pour les moyennes sur R .

$$\left\langle \frac{\Delta(A_\alpha(t) A_\beta(t))}{\Delta t} \right\rangle_R = \langle A_\alpha(t) V_\beta(t) \rangle_R + \langle V_\alpha(t) A_\beta(t) \rangle_R + 2 D_{\alpha\beta}(t) + \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} dt' \left(\langle A_\alpha(t) F_\beta(t') \rangle_R + \langle F_\alpha(t') A_\beta(t) \rangle_R \right) \quad (IV-37)$$

Or, d'après les résultats du § 4 (voir notamment la figure 3), l'ordre de grandeur de la 2^{ème} ligne de (IV-37) est $D(t) \frac{T_c}{\Delta t}$, c-à-d complètement négligeable devant celui de la 1^{ère}.

En égalant (IV-35) à la 1^{ère} ligne de (IV-37), on obtient alors la relation d'Einstein généralisée :

$$\begin{aligned} 2 D_{\alpha\beta}(t) &= \langle V_{\alpha\beta}(t) \rangle_R - \langle A_\alpha(t) V_\beta(t) \rangle_R - \langle V_\alpha(t) A_\beta(t) \rangle_R \\ &= \left\langle \left\{ \frac{d}{dt} (A_\alpha(t) A_\beta(t)) \right\} \right\rangle_R - \langle A_\alpha(t) \left\{ \frac{d}{dt} A_\beta(t) \right\} \rangle_R - \langle \left\{ \frac{d}{dt} A_\alpha(t) \right\} A_\beta(t) \rangle_R \end{aligned}$$

(IV-38)

c) Discussion physique

(i) Explicitons davantage (IV-38). Appelons A_γ l'opérateur $A_\alpha A_\beta$ (qui est un membre de l'ensemble $\{A\}$). On a alors d'après (IV-30)

$$2 D_{\alpha\beta}(t) = \sum_\mu \langle A_\mu(t) \rangle_R \Gamma_{\mu\gamma} - \sum_\nu \left(\langle A_\alpha(t) A_\nu(t) \rangle_R \Gamma_{\nu\beta} + \langle A_\nu(t) A_\beta(t) \rangle_R \Gamma_{\nu\alpha} \right) \quad (IV-39)$$

On voit clairement sur (IV-39) que le coefficient de diffusion $D_{\alpha\beta}$ peut être entièrement exprimé en fonction des taux de relaxation Γ et de moyennes à un temps, toutes quantités qui peuvent être calculées à partir de l'équation pilote.

Une telle relation établit un lien quantitatif entre fluctuation de S (caractérisé par D) et dissipation de S (caractérisé par les Γ)

(ii) Sans entrer dans une description microscopique détaillée du phénomène, on dispose souvent d'une description phénoménologique satisfaisante de la relaxation de S (au moyen de temps de relaxation, temps de transfert, temps de pompage...). On peut alors introduire des Γ , une équation pilote (voir III-37) qui permet de calculer l'évolution des moyennes à 1 temps. Les relations d'Einstein généralisées sont alors très utiles dans la mesure où elles permettent de calculer en fonction de courbes phénoménologiques Γ les coefficients de diffusion D que, comme nous le verrons sur les exemples concrets étudiés dans le chapitre ultérieur, permettent d'étudier le "bruit" du système.

(iii) On voit sur la 2^{ème} ligne que le coefficient de diffusion $D_{\alpha\beta}$ caractérisé dans quelle mesure l'opération $\left\{ \frac{d}{dt} \right\}$ viole la règle habituelle de dérivation d'un produit, ou si l'on veut encore dans quelle mesure l'évolution sans force de Langevin (et linéaire) n'est pas hamiltonienne. En effet si il y avait un hamiltonien effectif \mathcal{H}_{eff} tel que $V_\alpha(t) = i [\mathcal{H}_{eff}, A_\alpha(t)]$ pour tout A_α , on aurait $D_{\alpha\beta} = 0$ (car on a la relation bien connue $[\mathcal{H}_{eff}, AB] = A [\mathcal{H}_{eff}, B] + [\mathcal{H}_{eff}, A] B$). En particulier les déplacements de niveau de S sous l'effet du couplage $S-R$ ne contribuent pas au bruit.

⑦ Fonctions de corrélation des observables de S - Théorème de régression quantique.

- Le problème est de calculer les fonctions de corrélation $\langle A_\alpha(t) A_\gamma(t') \rangle_R$ (moyennes à 2 temps sur R d'opérateurs de S)

- Comme plus haut, nous renouons à une analyse très fine de la dynamique (à l'échelle de τ_c) et nous nous contentons d'une évolution lissée

Plus précisément, nous supposons $t \geq t'$ (si $t' \geq t$, on prend l'adjoint du produit des 2 opérateurs) et nous calculons la vitesse d'évolution lissée, par rapport à t , de la fonction de corrélation en posant par exemple

$$\frac{\Delta}{\Delta t} \langle A_\alpha(t) A_\gamma(t') \rangle_R = \frac{1}{\Delta t} \left[\langle A_\alpha(t+\Delta t) A_\gamma(t') \rangle_R - \langle A_\alpha(t) A_\gamma(t') \rangle_R \right] \quad (IV-40)$$

En utilisant (IV-20), on obtient alors

$$\begin{aligned} \frac{\Delta}{\Delta t} \langle A_\alpha(t) A_\gamma(t') \rangle_R &= - \sum_\beta \langle A_\beta(t) A_\gamma(t') \rangle_R \Gamma_{\beta\alpha} \\ &+ \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \langle F_\alpha(t'') A_\gamma(t') \rangle_R dt'' \end{aligned} \quad (IV-41)$$

Comme nous l'avons fait précédemment à plusieurs reprises, on vérifie aisément à partir de la figure 3 que la 2^{ème} ligne de IV-41 a un ordre de grandeur très faible devant celui de la 1^{ère} [$D \frac{\tau_c}{\Delta t}$ car $t'' > t'$] et peut donc être négligé.

Reprenons alors la 1^{ère} ligne de (IV-41) avec l'équation obtenue en prenant la moyenne par rapport à R des 2 membres de IV-29

$$\begin{aligned} \frac{\Delta}{\Delta t} \langle A_\alpha(t) A_\gamma(t') \rangle_R &= - \sum_\beta \langle A_\beta(t) A_\gamma(t') \rangle_R \Gamma_{\beta\alpha} \\ \frac{\Delta}{\Delta t} \langle A_\alpha(t) \rangle_R &= - \sum_\beta \langle A_\beta(t) \rangle_R \Gamma_{\beta\alpha} \end{aligned} \quad (IV-42)$$

Pour $t > t'$ et γ fixé, les fonctions de corrélation $\langle A_\alpha(t) A_\gamma(t') \rangle_R$ (α variable) satisfont en ce qui concerne la dépendance en t aux mêmes équations d'évolution complètes (lisses et lissées) que les moyennes à 1 temps $\langle A_\alpha(t) \rangle_R$.

C'est le théorème de régression quantique qui permet de calculer les fonctions de corrélation à partir des Γ , c-à-d de l'équation précédente.

Remarque

Si l'on part de l'équation exacte (IV-1), qu'on multiplie les 2 membres à droite par $A_\gamma = A_\gamma(0)$ (qui est un opérateur pur de S, non affecté par la moyenne sur R) et qu'on prend la moyenne des 2 membres sur R, on obtient (puisque $\text{Tr}_R(\sigma_R(0) F_\alpha(t) A_\gamma) = (\text{Tr}_R \sigma_R(0) F_\alpha(t)) A_\gamma = 0$)

$$\frac{d}{dt} \langle A_\alpha(t) A_\gamma(0) \rangle = - \sum_\beta e^{i(\omega_\beta - \omega_\alpha)t} \int_0^t dt' \langle A_\beta(t-t') A_\gamma(0) \rangle \gamma_{\beta\alpha}(t') \quad (IV-43)$$

équation qui a l'avantage d'être exacte mais l'inconvénient d'avoir l'un des 2 temps fixé à 0, alors que (IV-42) s'applique pour tout $t' \leq t$ (N'oublions pas que les fonctions de corrélation étudiées ici ne sont pas stationnaires comme dans le cours 77-78 puisqu'il s'agit d'une situation hors d'équilibre)

Exemples d'application

des relations d'Einstein généralisées

Buts de ce chapitre

- Montrer sur des exemples concrets (système à 2 niveaux, oscillateur harmonique amorti) comment on peut calculer des coefficients de diffusion à partir des relations d'Einstein généralisées. Discuter la signification physique de quelques uns des résultats obtenus.
- Etablir des résultats qui seront utiles pour la suite (Fluctuations dans les lasers).
- Dans le cas de l'oscillateur harmonique, comparer les résultats obtenus avec ceux d'un modèle soluble exactement.

① Système à 2 niveaux "fermé"

a) Définitions - Equations de relaxation phénoménologiques

- Le système à 2 niveaux de la figure 1 est dit fermé si les processus de relaxation n'induisent de transitions qu'entre les 2 niveaux 1 et 2.

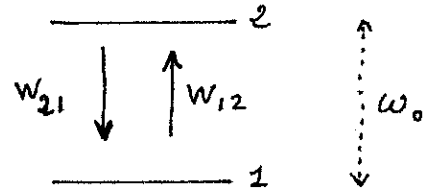


Fig. 1

Par contre, dans un système à 2 niveaux ouvert, du type de celui étudié dans le § 2 ci-dessous, les niveaux 1 et 2 peuvent être "alimentés" à partir d'autres niveaux du système et se "vider" vers d'autres niveaux.

- Les opérateurs A_{α} des chapitres précédents correspondent dans cet exemple aux 4 opérateurs :

$$n_2 = |2\rangle\langle 2| \quad n_1 = |1\rangle\langle 1| \quad \sigma_- = |1\rangle\langle 2| e^{-i\omega_0 t} \quad \sigma_+ = |2\rangle\langle 1| e^{i\omega_0 t} \quad (V-1)$$

n_2 et n_1 sont les populations des niveaux 1 et 2, σ_{\pm} le dipôle entre les 2 niveaux (le terme d'évolution propre, $e^{\pm i\omega_0 t}$, où ω_0 est la fréquence de la transition 1-2, est réintégré dans σ_{\pm}).

- Phénoménologiquement, la relaxation induit des transitions entre 1 et 2 avec un taux W_{12} , entre 2 et 1 avec un taux W_{21} . De plus, elle amortit le dipôle avec un taux γ (en toute rigueur, il y a également un déplacement δ de la fréquence ω_0 , mais nous ne nous en préoccupons pas ici car il ne contribue pas aux coefficients de diffusion - voir remarque iii page IV-3). On en déduit les équations de Langevin - Mori suivantes :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} n_2 = W_{12} n_1 - W_{21} n_2 + F_{n_2} \\ \frac{d}{dt} n_1 = -W_{12} n_1 + W_{21} n_2 + F_{n_1} \\ \frac{d}{dt} \sigma_- = -\gamma \sigma_- + F_{\sigma_-} \\ \frac{d}{dt} \sigma_+ = -\gamma \sigma_+ + F_{\sigma_+} \end{cases} \quad (V-2)$$

où $F_{n_2}, F_{n_1}, F_{\sigma_-}, F_{\sigma_+}$ sont les forces de Langevin associées à $n_2, n_1, \sigma_+, \sigma_-$ (dont les moyennes sur R sont nulles).

b) Exemples physiques de tels systèmes

(i) Spins 1/2 - Equations de Bloch

Dans ce cas, les 2 niveaux 1 et 2 sont les 2 états |-> et |+> du spin 1/2, ω_0 la fréquence de Larmor, $\langle n_2 - n_1 \rangle$ (à un facteur près) l'aimantation longitudinale, $\langle \sigma_{\pm} \rangle$ l'aimantation transversale. $T_2 = \gamma^{-1}$ est le temps de relaxation transversale. En prenant les moyennes sur le réservoir des 2 premières équations (V-2), on obtient aisément

$$\frac{d}{dt} \langle n_2 - n_1 \rangle = (W_{12} - W_{21}) - (W_{12} + W_{21}) \langle n_2 - n_1 \rangle = (W_{12} + W_{21}) \left[\frac{W_{12} - W_{21}}{W_{12} + W_{21}} - \langle n_2 - n_1 \rangle \right] \quad (V-3)$$

On reconnaît dans $W_{12} + W_{21}$ l'inverse, $\frac{1}{T_1}$, du temps de relaxation longitudinal, dans $\frac{W_{12} - W_{21}}{W_{12} + W_{21}}$ la différence de populations $\langle n_2^0 - n_1^0 \rangle$ à l'équilibre.

En résumé, si l'on veut appliquer les résultats de ce § aux équations de Bloch il suffit d'utiliser la correspondance

$$\gamma = \frac{1}{T_2} \quad W_{12} + W_{21} = \frac{1}{T_1} \quad \frac{W_{12} - W_{21}}{W_{12} + W_{21}} = \langle n_2^0 - n_1^0 \rangle \quad (V-4)$$

(ii) Emission spontanée.

Dans ce cas, 1 est le niveau fondamental, 2 le niveau de résonance optique. W_{21} est la probabilité Γ d'émission spontanée par unité de temps (Γ est la largeur naturelle de 2). $W_{12} = 0$ (l'émission spontanée ne se produit pas à partir du niveau fondamental). Enfin le dipôle optique σ_{\pm} s'amortit avec un taux $\gamma = \frac{\Gamma}{2}$ (demi-somme des largeurs Γ de 2 et 0 de 1). En résumé, il faut pour l'étude de l'émission spontanée, utiliser la correspondance :

$$W_{12} = 0 \quad W_{21} = \Gamma \quad \gamma = \frac{\Gamma}{2} \quad (V-5)$$

c) Calcul des coefficients de diffusion.

- Il suffit d'utiliser les relations d'Einstein généralisées (IV-38):

$$2 D_{\alpha\beta} = \langle V_{\alpha\beta} \rangle_R - \langle A_{\alpha} V_{\beta} \rangle_R - \langle V_{\alpha} A_{\beta} \rangle_R \quad (V-6)$$

avec les définitions suivantes des vitesses d'entraînement tirées de (V-2):

$$\begin{cases} V_{n_2} = W_{12} n_1 - W_{21} n_2 & V_{n_1} = -W_{12} n_1 + W_{21} n_2 \\ V_{\sigma_-} = -\gamma \sigma_- & V_{\sigma_+} = -\gamma \sigma_+ \end{cases} \quad (V-7)$$

et les relations d'algèbre suivantes satisfaites par les A_{α} et qui découlent immédiatement des relations de définition V-1

$$\begin{cases} n_2^2 = n_2 & n_1^2 = n_1 & n_1 n_2 = n_2 n_1 = 0 \\ \sigma_+ \sigma_- = n_2 & \sigma_- \sigma_+ = n_1 & \sigma_+^2 = \sigma_-^2 = 0 \\ n_2 \sigma_+ = \sigma_+ & \sigma_+ n_2 = 0 & n_1 \sigma_+ = 0 & \sigma_+ n_1 = \sigma_+ \\ n_2 \sigma_- = 0 & \sigma_- n_2 = \sigma_- & n_1 \sigma_- = \sigma_- & \sigma_- n_1 = 0 \end{cases} \quad (V-8)$$

- Premier exemple de calcul : $D_{\sigma_+ \sigma_-}$

Comme $\sigma_+ \sigma_- = n_2$, la relation (V-6) s'écrit

$$\begin{aligned}
 2D_{\sigma_+ \sigma_-} &= \langle V_{n_2} \rangle - \langle \sigma_+ V_{\sigma_-} \rangle - \langle V_{\sigma_+} \sigma_- \rangle \\
 &= w_{12} \langle n_1 \rangle - w_{21} \langle n_2 \rangle + \gamma \langle \sigma_+ \sigma_- \rangle + \gamma \langle \sigma_+ \sigma_- \rangle \\
 &= w_{12} \langle n_1 \rangle + (2\gamma - w_{21}) \langle n_2 \rangle
 \end{aligned} \tag{V-9}$$

- Deuxième exemple de calcul : $D_{n_2 \sigma_-}$
 Comme $n_2 \sigma_- = 0$, il vient

$$\begin{aligned}
 2D_{n_2 \sigma_-} &= 0 - \langle n_2 V_{\sigma_-} \rangle - \langle V_{n_2} \sigma_- \rangle \\
 &= \gamma \underbrace{\langle n_2 \sigma_- \rangle}_{=0} - w_{12} \underbrace{\langle n_1 \sigma_- \rangle}_{=\langle \sigma_- \rangle} + w_{21} \underbrace{\langle n_2 \sigma_- \rangle}_{=0} = -w_{12} \langle \sigma_- \rangle
 \end{aligned} \tag{V-10}$$

- On obtient ainsi de proche en proche l'ensemble de résultats suivants regroupés sous forme d'une matrice $2D_{\alpha\beta}$ (matrice des coefficients de diffusion)

$$2D_{\alpha\beta} = \begin{array}{c|cccc}
 \alpha \backslash \beta & n_1 & n_2 & \sigma_- & \sigma_+ \\
 \hline
 n_1 & w_{12} \langle n_1 \rangle + w_{21} \langle n_2 \rangle & -w_{12} \langle n_1 \rangle - w_{21} \langle n_2 \rangle & w_{12} \langle \sigma_- \rangle & -w_{21} \langle \sigma_+ \rangle \\
 n_2 & -w_{12} \langle n_1 \rangle - w_{21} \langle n_2 \rangle & w_{12} \langle n_1 \rangle + w_{21} \langle n_2 \rangle & -w_{12} \langle \sigma_- \rangle & w_{21} \langle \sigma_+ \rangle \\
 \sigma_- & -w_{21} \langle \sigma_- \rangle & w_{21} \langle \sigma_- \rangle & 0 & (2\gamma - w_{12}) \langle n_1 \rangle + w_{21} \langle n_2 \rangle \\
 \sigma_+ & w_{12} \langle \sigma_+ \rangle & -w_{12} \langle \sigma_+ \rangle & w_{12} \langle n_1 \rangle + (2\gamma - w_{21}) \langle n_2 \rangle & 0
 \end{array} \tag{V-11}$$

- Dans le cas de l'émission spontanée, cette matrice se simplifie et devient, compte tenu de (V-5) :

$$2D_{\alpha\beta} = \begin{array}{c|cccc}
 \alpha \backslash \beta & n_1 & n_2 & \sigma_- & \sigma_+ \\
 \hline
 n_1 & \Gamma \langle n_2 \rangle & -\Gamma \langle n_2 \rangle & 0 & -\Gamma \langle \sigma_+ \rangle \\
 n_2 & -\Gamma \langle n_2 \rangle & \Gamma \langle n_2 \rangle & 0 & \Gamma \langle \sigma_+ \rangle \\
 \sigma_- & -\Gamma \langle \sigma_- \rangle & \Gamma \langle \sigma_- \rangle & 0 & \Gamma \\
 \sigma_+ & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{array} \tag{V-12}$$

Pour $D_{\sigma_- \sigma_+}$ on a utilisé dans (V-12) la relation $\langle n_1 \rangle + \langle n_2 \rangle = 1$ qui se déduit aisément de (V-1) et (V-2) et qui est caractéristique du fait que le système soit fermé.

- C'est pour la même raison ($n_1 + n_2 = 1$ ne varie pas) que la somme des 2 premières lignes ou des 2 premières colonnes de (V-11) ou (V-12) est nulle $D_{\alpha, n_1+n_2} = D_{n_1+n_2, \beta} = 0$

- On notera enfin que $D_{\alpha\beta}$ est en général différent de $D_{\beta\alpha}$ ce qui montre bien le caractère irréversible de ces coefficients de diffusion.

d) Discussion physique

L'interprétation physique des coefficients $D_{\alpha\beta}$ repose sur la relation (IV-28)

$$\langle \Delta A_\alpha(t) \Delta A_\beta(t) \rangle_R = 2D_{\alpha\beta}(t) \Delta t \tag{V-13}$$

[avec $\Delta A_\alpha(t) = A_\alpha(t+\Delta t) - A_\alpha(t)$] qui permet de les interpréter comme des coefficients de diffusion décrivant la manière dont A_α et A_β diffèrent sous l'effet des forces fluctuantes qu'ils subissent de la part du réservoir.

1er exemple - Comme premier exemple, nous allons considérer l'émission spontanée et étudier comment, dans l'état fondamental, c-à-d dans un état où les valeurs moyennes n'évoluent plus (état d'équilibre), le bruit apparaît sur "l'aimantation transverse" ou encore le "dipôle".

De manière plus précise nous allons calculer $\langle [\Delta\sigma_x(t)]^2 + [\Delta\sigma_y(t)]^2 \rangle_R$ où σ_x et σ_y sont définis par

$$\sigma_\pm = \sigma_x \pm i\sigma_y \tag{V-14}$$

Auparavant, rappelons "l'usage classique" que l'on peut se faire d'un spin $1/2$ dans l'état $|-\rangle$.

σ_z a une valeur bien définie ($-\frac{1}{2}$)

De même $\sigma^2 = (\frac{3}{4})$.

On peut donc se représenter un vecteur \vec{OM} (Fig. 2), de longueur $\sqrt{\frac{3}{4}}$, dont la projection sur Oz vaut $OH = -\frac{1}{2}$. Le carré de la composante transverse vaut donc $MH^2 = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.

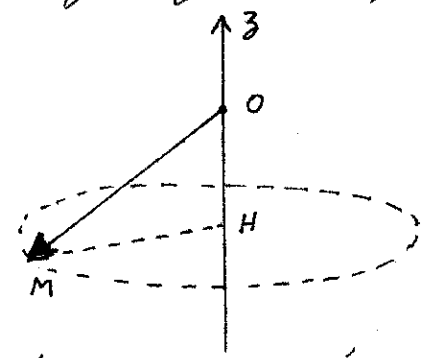


Fig 2

Comme $\langle \sigma_x \rangle$ et $\langle \sigma_y \rangle$ sont nuls dans l'état $|-\rangle$, l'extrémité du vecteur \vec{OM} de la figure 2 n'est pas connue avec certitude et est équirépartie sur le cercle de cette figure. Un tel résultat est bien en accord avec le résultat que donne le calcul de la valeur moyenne de $\sigma_x^2 + \sigma_y^2$ dans l'état $|-\rangle$.

$$\langle -|\sigma_x^2 + \sigma_y^2|-\rangle = \frac{1}{2} \langle -|\sigma_+ \sigma_- + \sigma_- \sigma_+|-\rangle = \frac{1}{2} \tag{V-15}$$

Revenons maintenant au problème quantique. On a, d'après (V-12):

$$\begin{aligned} \langle [\Delta\sigma_x(t)]^2 + [\Delta\sigma_y(t)]^2 \rangle_R &= \frac{1}{2} \langle \Delta\sigma_+(t) \Delta\sigma_-(t) + \Delta\sigma_-(t) \Delta\sigma_+(t) \rangle_R \\ &= \frac{1}{2} [2D_{\sigma_+\sigma_-} + 2D_{\sigma_-\sigma_+}] \Delta t = \Gamma \Delta t \end{aligned} \tag{V-16}$$

On peut interpréter ce résultat en considérant, au départ d'une position de départ bien définie sur le cercle de la Fig 2, le vecteur classique associé au spin $1/2$ diffusé sur le cercle avec un coefficient de diffusion Γ . Au bout d'un temps long devant Γ^{-1} il va se retrouver de nouveau équiréparti sur le cercle en ayant perdu toute mémoire de sa position de départ.

Ainsi dans l'état $|-\rangle$, bien que les valeurs moyennes n'évoluent plus (état d'équilibre), le couplage avec le champ électromagnétique du vide (responsable de l'émission spontanée) fait fluctuer le système en permanence.

Remarquons enfin que l'équation (V-16) est valable quel que soit

l'état initial du spin puisque, d'après les tableaux (V-12) (ou (V-11)), $2(D_{\sigma_+ \sigma_-} + D_{\sigma_- \sigma_+}) = 2\Gamma$ (ou 2γ) ne dépend pas de l'état à l'équilibre.

2^{ème} exemple

Considérons toujours l'émission spontanée, mais calculons maintenant le bruit sur l'aimantation longitudinale

$$\sigma_3 = \frac{1}{2} (n_2 - n_1) \tag{V-17}$$

Le coefficient de diffusion $D_{\sigma_3 \sigma_3}$ s'écrit donc, compte tenu de (V-12):

$$2 D_{\sigma_3 \sigma_3} = \frac{1}{4} 2 [D_{n_2 n_2} + D_{n_1 n_1} - D_{n_1 n_2} - D_{n_2 n_1}] = \Gamma \langle n_2 \rangle \tag{V-18}$$

de sorte que $\langle [\Delta \sigma_3(t)]^2 \rangle = \Gamma \langle n_2(t) \rangle \Delta t \tag{V-19}$

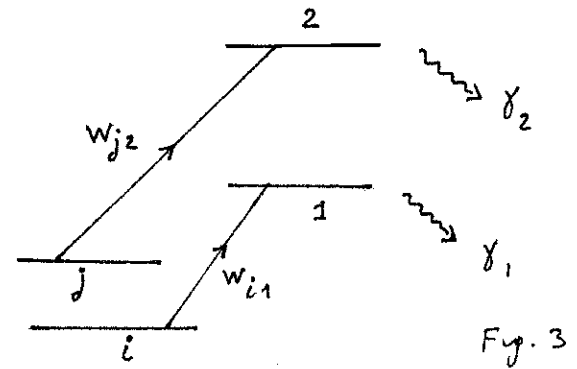
A la différence du cas précédent, on a ici une grandeur physique qui diffuse d'une manière d'autant plus importante que le système est plus loin de l'équilibre. Lorsque l'atome est dans l'état excité ($\langle n_2 \rangle = 1$), le coefficient de diffusion a la plus grande valeur possible, Γ . Puis ce coefficient décroît exponentiellement en même temps que $\langle n_2(t) \rangle$ pour s'annuler dans l'état fondamental où σ_3 ne fluctue plus ($\langle n_2 \rangle = 0$).

② Système à 2 niveaux ouvert

a) Définition - Equations de relaxation phénoménologiques

- Nous considérons maintenant un système qui jouera un rôle important dans l'étude du bruit dans les lasers qui sera abordé dans les chapitres suivants.

- Il s'agit d'atome actifs d'un milieu laser dont les états 1 et 2 (de la transition laser) sont peuplés par divers processus (collisions, pompage optique ...) à partir d'autres niveaux i, j, \dots de l'atome avec des taux $w_{j2} n_j, w_{i1} n_i \dots$



les états 1 et 2 se désexcitent (radiativement ou non) vers les autres niveaux atomiques avec les taux γ_1 et γ_2 (Fig. 3). Pour simplifier un petit peu l'écriture dans les formules qui suivront, nous avons négligé les transferts entre 1 et 2 décrits par w_{12} et w_{21} (il serait tout à fait possible d'en tenir compte).

Enfin, comme plus haut, le dipôle entre 1 et 2 s'amortit avec un taux γ (qui n'est pas forcément la demi-somme de γ_1 et γ_2 , à cause par exemple de collisions déphasantes ...)

- Dans un tel système la somme $n_1 + n_2$ des populations de 1 et 2 n'est évidemment pas constante puisque les niveaux 1 et 2 sont en communication avec les autres niveaux atomiques (c'est la somme de toutes les populations $\sum_k n_k$ qui est égale à 1). C'est la raison pour laquelle le système à 2 niveaux 1, 2 est dit "ouvert".

- Si l'on introduit les taux de pompage λ_2 et λ_1 , de 2 et 1,

$$\lambda_2 = \sum_{j \neq 1,2} w_{j2} n_j \quad \lambda_1 = \sum_{i \neq 1,2} w_{i1} n_i \quad (V-20)$$

les équations de Langevin - Mori du système s'écrivent (avec les mêmes notations qu'en (V-1)) :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} n_2 = \lambda_2 - \gamma_2 n_2 + F_{n_2} \\ \frac{d}{dt} n_1 = \lambda_1 - \gamma_1 n_1 + F_{n_1} \\ \frac{d}{dt} \sigma_- = -\gamma \sigma_- + F_{\sigma_-} \\ \frac{d}{dt} \sigma_+ = -\gamma \sigma_+ + F_{\sigma_+} \end{cases} \quad (V-21)$$

Remarque Il ne faut pas perdre de vue que λ_2 et λ_1 ne sont pas des nombres mais des opérateurs proportionnels aux populations de niveaux entre eux 1 et 2 [voir (V-20)]. En particulier

$$\lambda_2 n_2 = \sum_{j \neq 1,2} w_{j2} n_j n_2 = \sum_{j \neq 1,2} w_{j2} |j\rangle \langle j| 2\rangle \langle 2| = 0 \quad (V-22)$$

$$\text{et de même } \lambda_1 n_1 = \lambda_2 n_1 = \lambda_1 n_2 = n_1 \lambda_1 = \dots = 0 \quad (V-23)$$

Par contre il arrive très fréquemment que $\langle \lambda_2 \rangle$ et $\langle \lambda_1 \rangle$ puissent être considérés comme indépendants du temps si les niveaux i et j qui alimentent 1 et 2 sont très peuplés (niveaux fondamentaux ou métastables) et très peu affectés par les variations de populations de 1 et 2. C'est ce que nous supposons désormais.

b) Matrice des coefficients de diffusion

Les calculs sont tout à fait analogues à ceux du § 1 et conduisent aux résultats suivants.

$\alpha \backslash \beta$	n_1	n_2	σ_-	σ_+
n_1	$\langle \lambda_1 \rangle + \gamma_1 \langle n_1 \rangle$	0	$\gamma_1 \langle \sigma_- \rangle$	0
n_2	0	$\langle \lambda_2 \rangle + \gamma_2 \langle n_2 \rangle$	0	$\gamma_2 \langle \sigma_+ \rangle$
σ_-	0	$\gamma_2 \langle \sigma_- \rangle$	0	$\langle \lambda_1 \rangle + (2\gamma - \gamma_1) \langle n_1 \rangle$
σ_+	$\gamma_1 \langle \sigma_+ \rangle$	0	$\langle \lambda_2 \rangle + (2\gamma - \gamma_2) \langle n_2 \rangle$	0

(V-24)

$2D_{\alpha\beta} =$

③ Oscillateur harmonique amorti.

a) Définitions - Equations de relaxation phénoménologiques

- L'une des motivations d'étude d'un tel système est qu'un mode d'une cavité laser est, en l'absence d'atomes, un oscillateur harmonique amorti (par suite ^{de la diffusion et} des pertes sur les parois de la cavité). Nous aurons donc besoin dans les chapitres suivants des résultats obtenus ci-dessous.

Une autre motivation est qu'il existe un modèle simple de réservoir (réservoir constitué lui-même d'un grand nombre d'oscillateurs harmoniques indépendants et en équilibre) pour lequel il est possible de mener les calculs jusqu'au bout et sans approximations. On peut ainsi avoir une idée des moments d'ordre plus élevé (> 2) des forces de Langevin.

- Commençons dans ce § par une approche basée sur des équations phénoménologiques (comme dans les § 1 et 2 ci-dessus)

Sous l'effet de la relaxation, la position et la vitesse d'un oscillateur harmonique s'amortissent avec un temps κ . Il en est donc de même des opérateurs de création et d'annihilation a^+ et a . Les équations de Langevin - Mori de a et a^+ s'écrivent donc :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} a^+ = -\kappa a^+ + F_{a^+} \\ \frac{d}{dt} a = -\kappa a + F_a \end{cases} \quad (V-25)$$

(Les termes d'évolution propre $e^{\pm i\omega_0 t}$, où ω_0 est la fréquence propre de l'oscillateur, ont été réintégrés dans a et a^+ - Le déplacement éventuel de la fréquence ω_0 due à la relaxation a été omis car il ne contribue pas aux coefficients de diffusion).

Les termes quadratiques en a et a^+ , $a^2, a^{+2}, a^+a, a a^+$ s'amortissent avec un temps 2κ et tendent vers leurs valeurs d'équilibre qui sont 0 pour a^2 et a^{+2} , $\langle n_0 \rangle$ et $\langle n_0 \rangle + 1$ pour a^+a et $a a^+$, où $\langle n_0 \rangle$ est la valeur moyenne de a^+a à l'équilibre thermodynamique à la température T

$$\langle n_0 \rangle = \frac{1}{e^{\hbar\omega_0/kT} - 1} \quad (V-26)$$

Les équations de Langevin - Mori de $a^2, a^{+2}, a^+a, a a^+$ s'écrivent donc :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} a^2 = -2\kappa a^2 + F_{a^2} & \frac{d}{dt} a^{+2} = -2\kappa a^{+2} + F_{a^{+2}} \\ \frac{d}{dt} a^+a = 2\kappa (\langle n_0 \rangle - a^+a) + F_{a^+a} \\ \frac{d}{dt} a a^+ = 2\kappa (\langle n_0 \rangle + 1 - a a^+) + F_{a a^+} \end{cases} \quad (V-27)$$

b) Calcul de quelques coefficients de diffusion.

- Nous aurons besoin dans les chapitres suivants des coefficients de diffusion $D_{aa}, D_{a^+a^+}, D_{aa^+}, D_{a^+a}$

- De (V-25) et (V-27), on déduit les valeurs suivantes pour les vitesses d'entraînement V

$$\begin{aligned} V_a &= -\kappa a & V_{a^+} &= -\kappa a^+ & V_{aa} &= -2\kappa a^2 & V_{a^+a^+} &= -2\kappa a^{+2} \\ V_{a^+a} &= 2\kappa (\langle n_0 \rangle - a^+a) & V_{a a^+} &= 2\kappa (\langle n_0 \rangle + 1 - a a^+) \end{aligned} \quad (V-28)$$

En appliquant la formule fondamentale (V-6), on obtient alors aisément :

$$2 D_{\alpha\beta} = \begin{array}{c|cc} & \begin{array}{c} a \\ a^+ \end{array} & \begin{array}{c} a^+ \\ a \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} a \\ a^+ \end{array} & \begin{array}{cc} 0 & 2\kappa (\langle n_0 \rangle + 1) \\ 2\kappa \langle n_0 \rangle & 0 \end{array} \end{array} \quad (V-29)$$

Les moments d'ordre 2 des forces de Langevin F_a et F_{a^+} ne dépendent donc pas de l'écart à l'équilibre.

④ Etude d'un modèle entièrement soluble

a) Hamiltonien

- Le système S est l'oscillateur harmonique précédent (a, a^+, ω_0) d'Hamiltonien (on prend $\hbar = 1$) :

$$H_S = \omega_0 (a^+a + 1/2) \quad (V-30)$$

- Le réservoir R est constitué par un très grand nombre d'oscillateurs $\frac{V-8}{i}$ $(b_i, b_i^\dagger, \omega_i)$ indépendants. Son hamiltonien H_R est donc

$$H_R = \sum_i \omega_i (b_i^\dagger b_i + 1/2) \quad (V-31)$$

Le réservoir est en équilibre thermodynamique à la température T:

$$\sigma_R(0) = \prod_i \sigma_i^{eq} \quad \sigma_i^{eq} = (\text{Tr } e^{-\omega_i b_i^\dagger b_i / kT})^{-1} e^{-\omega_i b_i^\dagger b_i / kT} \quad (V-32)$$

- l'hamiltonien d'interactions V entre S et R s'écrit

$$V = \sum_i g_i (a b_i^\dagger + a^\dagger b_i) \quad (V-33)$$

et décrit des processus où S gagne un quantum au profit de l'oscillateur i et réciproquement (g_i est une constante de couplage entre S et l'oscillateur i).

b) Equations de Heisenberg.

- l'équation de Heisenberg de a s'écrit

$$i \frac{d}{dt} a = [a, H_R + H_S + V] \quad (V-34)$$

En utilisant $[a, a^\dagger] = 1$ $[a, a^\dagger a] = a$, on obtient aisément:

$$i \dot{a} = \omega_0 a + \sum_i g_i b_i \quad (V-35)$$

- Comme b_i apparaît dans (V-35), il est intéressant de considérer également l'équation de Heisenberg de b_i que l'on trouve aisément être:

$$i \dot{b}_i = [b_i, H_R + H_S + V] = \omega_i b_i + g_i a \quad (V-36)$$

- On peut aisément éliminer les termes d'évolution propre de (V-35) et (V-36) en posant

$$a = \tilde{a} e^{-i\omega_0 t} \quad b_i = \tilde{b}_i e^{-i\omega_i t} \quad (V-37)$$

ce qui donne

$$\begin{cases} i \dot{\tilde{a}} = \sum_i g_i \tilde{b}_i e^{i(\omega_0 - \omega_i)t} & (V-38) \\ i \dot{\tilde{b}}_i = g_i \tilde{a} e^{i(\omega_i - \omega_0)t} & (V-39) \end{cases}$$

(Nous ne mettrons plus désormais les \sim sur a et b_i pour simplifier les notations)

c) Equations de Langerin - Mori.

- Si l'on intègre (V-39) entre 0 et t et que l'on reporte le résultat ainsi obtenu dans (V-38), on obtient

$$\frac{d}{dt} a(t) = - \sum_i g_i^2 \int_0^t dt' a(t') e^{i(\omega_0 - \omega_i)(t-t')} - i \sum_i g_i b_i(0) e^{i(\omega_0 - \omega_i)t} \quad (V-40)$$

équation que l'on peut écrire (en posant $\tau = t - t'$):

$$\frac{d}{dt} a(t) = - \int_0^t d\tau \gamma(\tau) a(t-\tau) + F(t) \quad (V-41)$$

avec

$$\gamma(\tau) = \sum_i g_i^2 e^{i(\omega_0 - \omega_i)\tau} \quad (V-42)$$

$$F(t) = -i \sum_i g_i e^{i(\omega_0 - \omega_i)t} b_i(0) \quad (V-43)$$

- On vérifie bien ainsi sur cet exemple que l'on peut mettre les équations d'évolution des opérateurs de S sous forme d'équations de Langerin - Mori avec un terme de friction retardée et une force de Langerin.

De plus, on obtient des expressions explicites des coefficients de friction et des forces de Langerin qui vont nous permettre d'une part de vérifier les

valeurs obtenues plus haut (§3) pour les coefficients de diffusion, d'autre part de calculer les moments d'ordre plus élevé des forces de Langevin.

Remarque On peut se demander si l'approche ^(très simple) utilisée ici (écriture des équations de Heisenberg pour les observables de S et R, puis élimination de l'observable de R) ne serait pas généralisable à tous les autres problèmes. En fait, c'est la très grande simplicité du modèle discuté ici et qui ne fait intervenir que des oscillateurs harmoniques (systèmes très linéaires), qui permet de mener les calculs si simplement. Il suffirait de remplacer les oscillateurs de R par des systèmes à 2 niveaux pour tomber sur des équations (correspondant à V-38 et V-39) ne se prêtant pas bien à une élimination des opérateurs de R (des produits d'opérateurs de S et R apparaissent alors au second membre de V-39). Il faut alors nécessairement avoir recours à des méthodes plus élaborées, comme celle des opérateurs de projection.

d) Expression du temps d'amortissement

- Si l'on fait l'approximation de mémoire courte, ou mieux si l'on effectue un "lissage" de l'équation (V-41) [voir page IV-3], on fait apparaître le temps d'amortissement $\int_0^\infty dt \gamma(t)$ que l'on peut calculer explicitement à partir de l'expression (V-42) de $\gamma(t)$
- Si le réservoir R est très grand, et on peut, à la limite, remplacer la somme discrète \sum_i par une intégrale

$$\sum_i \rightarrow \int d\omega \rho(\omega) \tag{V-44}$$

où $\rho(\omega)$ est la densité d'oscillateurs de R de fréquence ω [et de constante de couplage $g(\omega)$]. On peut alors écrire (V-42) sous la forme

$$\gamma(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega [g(\omega)]^2 \rho(\omega) e^{i(\omega_0 - \omega)t} \tag{V-45}$$

ce qui donne par suite

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \gamma(t) dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_0^\infty dt [g(\omega)]^2 \rho(\omega) e^{i(\omega_0 - \omega)t} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_0^\infty dt [g(\omega)]^2 \rho(\omega) e^{i(\omega_0 - \omega + i\epsilon)t} = K + i\delta \end{aligned} \tag{V-46}$$

avec

$$K = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \left(\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{\epsilon}{(\omega_0 - \omega)^2 + \epsilon^2} \right) \rho(\omega) [g(\omega)]^2 = \pi \rho(\omega_0) [g(\omega_0)]^2 \tag{V-47}$$

$$\delta = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \left(\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{\omega_0 - \omega}{(\omega_0 - \omega)^2 + \epsilon^2} \right) \rho(\omega) [g(\omega)]^2 = \mathcal{P} \int \frac{\rho(\omega) [g(\omega)]^2}{\omega_0 - \omega} d\omega \tag{V-48}$$

[δ est le déplacement de fréquence de S dû au couplage et que nous avons omis au §3 car il ne contribue pas au bruit].

e) Calcul des moments d'ordre ^(1 et 2) des forces de Langevin

- Comme les divers oscillateurs i sont indépendants, et chacun en équilibre thermodynamique, on a

$$\begin{aligned} \langle b_i \rangle_R &= \langle b_i^\dagger \rangle_R = \langle b_i b_j \rangle_R = \langle b_i^\dagger b_j^\dagger \rangle_R = 0 \\ \langle b_i^\dagger b_j \rangle_R &= \langle n_i \rangle \delta_{ij} \quad \langle b_i b_j^\dagger \rangle = (\langle n_i \rangle + 1) \delta_{ij} \end{aligned} \tag{V-49}$$

où $\langle n_i \rangle$ est donné par une expression du type V-26 (ω_i remplaçant ω_0)

- On déduit alors de (V-43) que

$$\langle F(t) \rangle_R = \langle F^\dagger(t) \rangle_R = \langle F(t) F^\dagger(t') \rangle_R = \langle F^\dagger(t) F(t') \rangle_R = 0 \tag{V-50}$$

- Calculons par contre $\langle F^+(t) F(t') \rangle$. On déduit de (V-43), (V-49) et (V-44) que

$$\langle F^+(t) F(t') \rangle_R = \sum_i \sum_j g_i g_j \langle b_i^+ b_j \rangle_R e^{-i(\omega_0 - \omega_i)t} e^{i(\omega_0 - \omega_j)t'} \\ = \int d\omega [g(\omega)]^2 \rho(\omega) \langle n(\omega) \rangle e^{-i(\omega_0 - \omega)(t-t')} \quad (V-51)$$

Pour obtenir le coefficient de diffusion $2D_{ata}$, il faut intégrer (V-51) sur $\tau = t-t'$ de $-\infty$ à $+\infty$

$$2D_{ata} = \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega [g(\omega)]^2 \rho(\omega) \langle n(\omega) \rangle e^{-i(\omega_0 - \omega)\tau} = 2\pi [g(\omega_0)]^2 \rho(\omega_0) \langle n_0 \rangle = 2\kappa \langle n_0 \rangle \quad (V-52)$$

(On a utilisé $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(\omega_0 - \omega)\tau} d\tau = 2\pi \delta(\omega_0 - \omega)$ et la relation V-47). Un calcul très analogue donnerait $2D_{aat} = 2\kappa(\langle n_0 \rangle + 1)$, ce qui confirme ainsi tous les résultats du tableau (V-25).

f) Calcul des moments d'ordre supérieur à 2 des forces de Langevin.

- Comme la valeur moyenne à l'équilibre d'un produit d'un nombre impair de b ou b^+ est nulle, tous les moments impairs des forces F et F^+ sont nuls.

- Calculons un moment d'ordre pair supérieur à 2, par exemple

$$\langle F^+(t_1) F(t_2) F(t_3) F^+(t_4) \rangle_R = \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l g_i g_j g_k g_l \langle b_i^+ b_j b_k b_l^+ \rangle_R e^{-i(\omega_0 - \omega_i)t_1} e^{i(\omega_0 - \omega_j)t_2} e^{i(\omega_0 - \omega_k)t_3} e^{-i(\omega_0 - \omega_l)t_4} \quad (V-53)$$

On est donc ramené au calcul de $\langle b_i^+ b_j b_k b_l^+ \rangle_R$. Comme les divers oscillateurs sont indépendants, on voit, compte tenu de (V-49), que les seuls termes non nuls sont

$$\langle b_i^+ b_j b_k b_l^+ \rangle_R = \underbrace{\delta_{ij} \delta_{kl}}_{i \neq k} \langle b_i^+ b_i \rangle_R \langle b_k b_k^+ \rangle_R + \delta_{ik} \delta_{jl} \langle b_i^+ b_i \rangle_R \langle b_j^+ b_j \rangle_R + \delta_{ij} \delta_{ik} \delta_{il} \langle b_i^+ b_i b_i b_i^+ \rangle_R \quad (V-54)$$

Lors de la sommation sur i, j, k, l , on peut négliger la contribution du dernier terme de (V-54) (terme "carré") devant celle des 2 autres (termes "rectangles" beaucoup plus nombreux), et simultanément laisser tomber les restrictions $i \neq k$ et $i \neq j$ dans les 2 premiers termes. On obtient alors, en reportant (V-54) dans (V-53) :

$$\langle F^+(t_1) F(t_2) F(t_3) F^+(t_4) \rangle_R = \langle F^+(t_1) F(t_2) \rangle_R \langle F(t_3) F^+(t_4) \rangle_R + \langle F^+(t_1) F(t_3) \rangle_R \langle F(t_2) F^+(t_4) \rangle_R \quad (V-55)$$

relation qui permet de calculer un moment d'ordre 4 en fonction des moments d'ordre 2, et tout à fait analogue à la relation correspondante pour une fonction aléatoire gaussienne [voir cours 77-78 page IV-6]

- Des calculs analogues peuvent être faits pour les moments pairs supérieurs et montrent que F et F^+ ont des moments gaussiens.

Remarques

(i) On peut écrire le 2^e membre de (V-54) sous la forme

$$\delta_{ij} \delta_{kl} \langle b_i^+ b_i \rangle_R \langle b_k b_k^+ \rangle_R + \delta_{ik} \delta_{jl} \langle b_i^+ b_i \rangle_R \langle b_j^+ b_j \rangle_R + \delta_{ij} \delta_{ik} \delta_{il} \left(\langle b_i^+ b_i b_i b_i^+ \rangle_R - 2 \langle b_i^+ b_i \rangle_R \langle b_i b_i^+ \rangle_R \right) \quad (V-56)$$

sans aucune restriction sur i et k , ou sur i et j dans les 2 premiers termes. On peut alors montrer que, comme l'oscillateur i est en équilibre thermodynamique, le dernier terme de (V-56) est nul, ce qui entraîne que V-55 est exact et ne repose sur aucune approximation concernant les termes "carrés" et "rectangles".

(ii) On peut montrer que le caractère gaussien de F a son origine profonde dans 2 raisons : 1) F ne dépend pas des observables de S (ceci est dû au fait que S est un oscillateur harmonique) 2) S est couplé à un très grand nombre de systèmes (i) indépendants (qui pourraient être autre chose que des oscillateurs)

Lorsque S n'est plus un oscillateur harmonique, mais un système à 2 niveaux comme dans les §§ 1 et 2 ci-dessus, on peut montrer que les forces de Langevin F , qui dépendent alors des observables de S (à cause des non-linéarités de S), sont nécessairement non-gaussiennes, quel que soit R . Voir I.R. SENITZKY Phys. Rev. 161, 165 (1967)

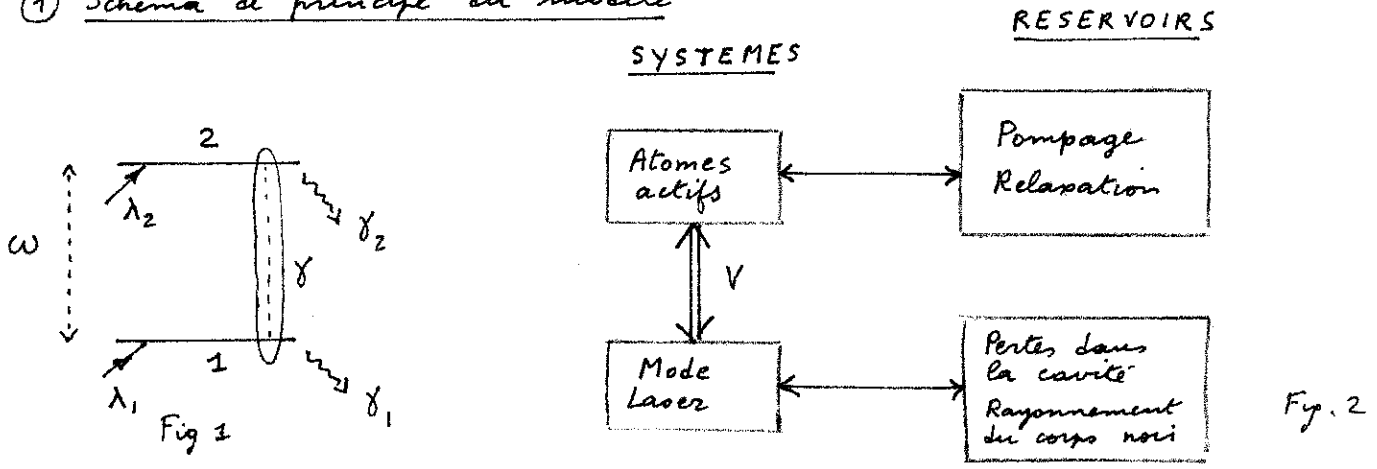
Etude simple des fluctuations dans les masers et lasers

But de ce chapitre

Utiliser les résultats des chapitres précédents (équations de Langevin - Mori, relations d'Einstein généralisées) pour étudier, dans le cadre d'un modèle simple, le bruit dans les masers et lasers. (La bibliographie est reprise à la fin du cours de cette année)

A. Equations de base du modèle

① Schéma de principe du modèle



Le système considéré ici est constitué par un grand nombre "d'atomes actifs" à 2 niveaux (Fig 1) couplés à un mode d'une cavité laser par un couplage V (flèche verticale de la figure 2). Les atomes sont supposés immobiles. Chacun de ces sous-systèmes (atomes, mode laser) est en plus couplé à un réservoir (flèches horizontales de la figure 2). C'est ce couplage par exemple qui est responsable du pompage des atomes dans le niveau supérieur 2 (nécessaire à la réalisation d'une inversion de populations) ainsi que des processus de relaxation. De même, le mode de la cavité laser présente un certain amortissement et est alimenté par le rayonnement du corps noir.

Dans les cours précédents ^(on a montré) qui à tout processus de relaxation étaient associés des fluctuations, que le système étudié soit à l'équilibre ou hors d'équilibre. Donc les couplages système-réservoir de la figure 2, toujours présents ou indispensables (pompage) dans un oscillateur atomique, vont être responsables de fluctuations dans la sortie de l'oscillateur. ^{C'est ce} que nous nous proposons d'étudier dans ce chapitre.

② Hypothèses sur les forces de Langevin

- En l'absence de couplage atome-mode laser, il semble très raisonnable de supposer que les forces de Langevin agissant sur des atomes différents sont indépendantes (collisions avec des perturbateurs différents), de même que les forces de Langevin agissant sur les atomes et sur le mode laser.
- On pourrait croire que le couplage V introduit des corrélations

entre ces diverses forces. En fait, les temps de corrélation des diverses forces de Langevin sont très courts devant l'inverse de la période de Rabi qui caractérise l'interaction atome-laser, de sorte que l'interaction atome-laser n'a pas le temps de se manifester pendant ce temps de corrélation.

Nous supposons donc en présence de l'interaction V , les diverses forces de Langevin continuent à rester indépendantes et continuent à garder les mêmes caractéristiques (coefficients de diffusion notamment).

③ Equations de Langevin - Mori en l'absence de couplage atome-laser.

- Nous nous contentons de récupérer les équations établies au chapitre précédent [V-21 et V-25], en ajoutant un indice i pour repérer l'atome i , et en réintroduisant les termes d'évolution propre.

$$\begin{cases} \dot{n}_2^i = \lambda_2 - \gamma_2 n_2^i + f_{n_2}^i \\ \dot{n}_1^i = \lambda_1 - \gamma_1 n_1^i + f_{n_1}^i \\ \dot{\sigma}_-^i = (-i\omega - \gamma) \sigma_-^i + f_{\sigma_-}^i \\ \dot{\sigma}_+^i = (i\omega - \gamma) \sigma_+^i + f_{\sigma_+}^i \end{cases} \quad (VI-1) \quad \begin{cases} \dot{a} = -(i\omega + \kappa) a + F_a \\ \dot{a}^+ = (i\omega - \kappa) a^+ + F_{a^+} \end{cases} \quad (VI-2)$$

- Nous avons supposé la cavité accordée sur la fréquence atomique [la même fréquence ω figure dans VI-1 et VI-2] de manière à simplifier le calcul qui suit. Il serait tout à fait possible de s'approcher de cette hypothèse, afin par exemple d'étudier les effets de "pulling".

④ Hamiltonien d'interaction atome-laser

- Cet hamiltonien V s'écrit

$$V = \sum_i g (e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}_i} a \sigma_+^i + e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}_i} a^+ \sigma_-^i) \quad (VI-3)$$

où \mathbf{x}_i est la position de l'atome i , \mathbf{k} le vecteur d'onde du mode, g une constante de couplage.

- V décrit des processus où un photon est absorbé par l'atome qui monte de 1 à 2 (terme $a \sigma_+^i$), ainsi que des processus où l'atome émet un photon en tombant de 2 à 1 (terme $a^+ \sigma_-^i$). L'approximation du champ tournant permet de négliger des termes de la forme $a \sigma_-^i$ ou $a^+ \sigma_+^i$.

- La constante de couplage g vaut $g = d E_0$ (VI-4)

où d est le moment dipolaire de la transition 1-2 et E_0 le "champ électrique d'un photon" (noté car il s'agit du carré du champ électrique correspondant à une énergie $\hbar\omega$ dans la cavité).

Remarque

Dans les 2 premières équations (VI-1), nous avons négligé ^{pour simplifier} les transferts radiatifs ou collisionnels entre 1 et 2, en particulier les transferts par émission spontanée ^{2→1} (nous les supposons petits devant les transferts vers les autres niveaux). Comme nous traitons quantiquement l'interaction entre l'atome et le mode laser, nous nous écarterons plus loin des termes qui

décrivent des transferts $2 \rightarrow 1$ par émission spontanée dans le mode laser. Il peut paraître surprenant de tenir compte de l'émission spontanée dans le mode laser (grâce à l'hamiltonien V) et de négliger l'émission spontanée dans les autres modes pour la transition $2-1$. En fait, l'émission spontanée dans le mode laser fait apparaître des photons dans le mode laser qui représentent, comme nous le verrons plus loin, une source très importante de bruit. Il est donc indispensable d'en tenir compte, alors que l'émission spontanée dans les autres modes (pour la transition $2 \rightarrow 1$) ne se manifeste qu'indirectement sur le bruit, par une modification des coefficients de diffusion, supposée ici négligeable.

⑤ Equations de Langevin - Mori en présence du couplage atome - laser

- Il suffit d'ajouter à chaque équation VI-1 ou VI-2 le commutateur correspondant avec V [multiplié par $-i$] :

$$\begin{cases} \dot{a}^+ = (i\omega - \kappa) a^+ + ig \sum_i e^{ikx_i} \sigma_+^i + F_{a^+} \\ \dot{\sigma}_+^i = (i\omega - \gamma) \sigma_+^i - ig e^{-ikx_i} a^+ (n_2^i - n_1^i) + f_{\sigma_+}^i \\ \dot{n}_2^i = \lambda_2 - \gamma_2 n_2^i + ig e^{-ikx_i} a^+ \sigma_-^i - ig e^{ikx_i} a \sigma_+^i + f_{n_2}^i \end{cases} \quad (VI-5)$$

(et des équations analogues pour a , n_1^i)

- On peut simplifier ces équations au moyen du changement de variables

$$\begin{cases} a^+ = \tilde{a}^+ e^{i\omega t} \\ a = \tilde{a} e^{-i\omega t} \end{cases} \quad \begin{cases} \sigma_+^i = \tilde{\sigma}_+^i e^{i(\omega t - kx_i)} \\ \sigma_-^i = \tilde{\sigma}_-^i e^{-i(\omega t - kx_i)} \end{cases} \quad (VI-6)$$

On obtient alors

$$\begin{cases} \dot{\tilde{a}}^+ = -\kappa \tilde{a}^+ + ig \sum_i \tilde{\sigma}_+^i + \tilde{F}_{a^+} \\ \dot{\tilde{\sigma}}_+^i = -\gamma \tilde{\sigma}_+^i - ig \tilde{a}^+ (n_2^i - n_1^i) + \tilde{f}_{\sigma_+}^i \\ \dot{n}_2^i = \lambda_2 - \gamma_2 n_2^i + ig (\tilde{a}^+ \tilde{\sigma}_-^i - \tilde{a} \tilde{\sigma}_+^i) + f_{n_2}^i \end{cases} \quad (VI-7)$$

(et des équations analogues pour \tilde{a} et n_1^i) avec

$$\begin{cases} F_{a^+} = \tilde{F}_{a^+} e^{i\omega t} \\ F_a = \tilde{F}_a e^{-i\omega t} \end{cases} \quad \begin{cases} f_{\sigma_+}^i = \tilde{f}_{\sigma_+}^i e^{i(\omega t - kx_i)} \\ f_{\sigma_-}^i = \tilde{f}_{\sigma_-}^i e^{-i(\omega t - kx_i)} \end{cases} \quad (VI-8)$$

On vérifie aisément à partir de (V-24), (V-29), (VI-6) et (VI-8) que les tableaux de coefficients de diffusion restent les mêmes pour les nouvelles forces (avec v) et les nouvelles variables [les exponentielles $e^{\pm i\omega t}$ et $e^{\pm i(\omega t - kx_i)}$ s'éliminent].

⑥ Variation atomiques et forces de Langevin atomiques collectives

- Posons

$$\begin{cases} N_1 = \sum_i n_1^i \\ N_2 = \sum_i n_2^i \\ S_+ = \sum_i \tilde{\sigma}_+^i \\ S_- = \sum_i \tilde{\sigma}_-^i \end{cases} \quad \begin{cases} F_{S_+} = \sum_i \tilde{f}_{\sigma_+}^i \\ F_{S_-} = \sum_i \tilde{f}_{\sigma_-}^i \\ \Lambda_1 = N \lambda_1 \\ \Lambda_2 = N \lambda_2 \end{cases} \quad (VI-9)$$

- Les équations (VI-7) [où pour simplifier on ne met plus \sim sur a et a^\dagger] deviennent alors :

$\dot{a}^\dagger = -\kappa a^\dagger + ig S_+ + F_{a^\dagger}$	(VI-10-1)
$\dot{a} = -\kappa a - ig S_- + F_a$	(VI-10-2)
$\dot{S}_+ = -\gamma S_+ - ig a^\dagger (N_2 - N_1) + F_{S_+}$	(VI-10-3)
$\dot{S}_- = -\gamma S_- + ig a (N_2 - N_1) + F_{S_-}$	(VI-10-4)
$\dot{N}_2 = \Lambda_2 - \gamma_2 N_2 + ig (a^\dagger S_- - a S_+) + F_{N_2}$	(VI-10-5)
$\dot{N}_1 = \Lambda_1 - \gamma_1 N_1 - ig (a^\dagger S_- - a S_+) + F_{N_1}$	(VI-10-6)

- Comme les forces de Langevin des différents atomes sont indépendantes, on déduit de (V-24) et (VI-9) le tableau suivant de coefficients de diffusion

$2D_{\alpha\beta} =$

$\alpha \backslash \beta$	N_1	N_2	S_-	S_+
N_1	$\langle \Lambda_1 \rangle + \gamma_1 \langle N_1 \rangle$	0	$\gamma_1 \langle S_- \rangle$	0
N_2	0	$\langle \Lambda_2 \rangle + \gamma_2 \langle N_2 \rangle$	0	$\gamma_2 \langle S_+ \rangle$
S_-	0	$\gamma_2 \langle S_- \rangle$	0	$\langle \Lambda_1 \rangle + (2\gamma - \gamma_1) \langle N_1 \rangle$
S_+	$\gamma_1 \langle S_+ \rangle$	0	$\langle \Lambda_2 \rangle + (2\gamma - \gamma_2) \langle N_2 \rangle$	0

le tableau (V-29) demeure valable pour F_a et F_{a^\dagger} . Enfin, tous les coefficients de diffusion "croisés" (laser - atome) sont nuls :

$$D_{0+a} = D_{a^\dagger N_2} = \dots = 0$$

Remarque

Dans le chapitre précédent, nous avons montré dans le cadre d'un modèle entièrement soluble, que les forces de Langevin F_{a^\dagger} et F_a avaient des moments gaussiens. Nous avons indiqué que cette propriété demeure valable pour d'autres types de réservoirs et est surtout ^{due à} la linéarité de l'oscillateur harmonique.

Par contre, pour un système à 2 niveaux, les forces de Langevin f^i ne sont certainement pas gaussiennes. Si l'on se reporte à VI-10, on voit cependant que ce n'est pas f^i qui interviennent mais $F = \sum f^i$. S'il y a ^{un très grand} nombre d'atomes actifs, les forces de Langevin ^{apparaissant dans} (VI-10) résultent de la superposition d'un très grand nombre de forces de Langevin indépendantes. On peut donc s'attendre que, pour N suffisamment grand, les F soient gaussiens, même si les f^i ne le sont pas (Théorème de la limite centrale).

① - Introduction . Simplifications

- le but de ce § est de donner une vue d'ensemble du problème, de dégager les paramètres physiques importants, et de faire comprendre l'importance des fluctuations associées aux Jones de Langevin.
- Dans le but de simplifier au maximum la discussion, les divers opérateurs a^+ , a , S_{\pm} , N_1 , N_2 seront traités comme des nombres commutant entre eux. Un calcul quantique plus rigoureux sera repris au § C.
- Dans le même souci de simplification, on supposera

$$\gamma_1 = \gamma_2 = \Gamma \quad (\text{VI-12})$$

(Γ pouvant être toutefois différent de γ). Une telle hypothèse permet, par soustraction des 2 dernières équations VI-10, d'obtenir une équation d'évolution ne faisant intervenir que la différence de populations $N_2 - N_1$ que nous appellerons désormais S

$$S = N_2 - N_1 \quad (\text{VI-13})$$

$$\dot{S} = \Gamma (S_0 - S) + 2ig(a^+ S_- - a S_+) + F_S \quad (\text{VI-14})$$

avec $S_0 = \frac{\Lambda_2 - \Lambda_1}{\Gamma} \quad (\text{VI-15})$

et $F_S = F_{N_2} - F_{N_1} \quad (\text{VI-16})$

S_0 est l'inversion de population en l'absence de couplage atome - laser, F_S est la force de Langevin sur la différence de population S .

Enfin, nous supposons que seul le niveau 2 est alimenté

$$\Lambda_1 = 0 \quad (\text{VI-17})$$

(le cas $\gamma_1 \neq \gamma_2$, $\Lambda_1 \neq 0$ ne présente aucune difficulté de principe mais complique les calculs sans introduire d'idée physique nouvelle).

② Etude du régime d'oscillation en l'absence de fluctuations.

Essayons de comprendre tout d'abord ce qui se passe en l'absence de fluctuations. Supprimons donc toutes les forces de Langevin F des équations VI-10 et VI-14. Nous les réintroduisons ensuite au § 3.

a) Régime stationnaire.

- Repartons tout d'abord aux équations précédentes, celle qui donne l'évolution du nombre de photons a^+a (énergie du mode) et que l'on obtient en ajoutant (VI-10-1) multiplié par a et (VI-10-2) multiplié par a^+

$$(a^+a) = -2K(a^+a) - ig(a^+ S_- - a S_+) \quad (\text{VI-18})$$

- En régime stationnaire, on tire de (VI-10-3) et (VI-10-4)

$$S_+ = -\frac{ig}{\gamma} a^\dagger S \quad S_- = \frac{ig}{\gamma} a S \quad (VI-19)$$

ce qui donne
$$ig(a^\dagger S_- - a S_+) = -\frac{2g^2}{\gamma} a^\dagger a S \quad (VI-20)$$

Nous voyons ainsi apparaître un paramètre $\frac{2g^2}{\gamma}$ que nous noterons w

$$w = \frac{2g^2}{\gamma} \quad (VI-21)$$

qui a les dimensions d'un taux de transition et qui jouera un rôle très important dans toute la suite.

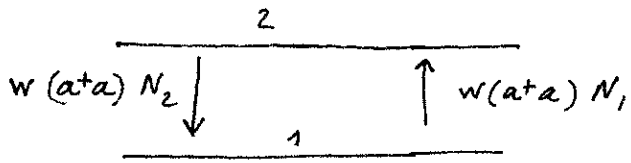
- Interprétation physique de w

Si l'on retourne à l'expression (VI-4) de g , g est le couplage associé à 1 photon (fréquence de Rabi dans le champ d'un photon). $1/\gamma$ a la signification physique d'une "densité d'états" associée à la largeur homogène de la transition 1-2. L'expression (VI-21) donne donc la probabilité de transition par unité de temps $1 \rightarrow 2$ ou $2 \rightarrow 1$ (calculée par la règle d'or de Fermi) associée à 1 photon.

On peut encore se convaincre de cette interprétation en repartant de l'équation (VI-18) réécrite en régime stationnaire (au moyen de VI-20 et VI-21):

$$(a^\dagger a) = 0 = -2\kappa(a^\dagger a) + w(a^\dagger a)(N_2 - N_1) \quad (VI-22)$$

Cette équation exprime qu'en régime stationnaire $a^\dagger a$ ne varie plus par suite d'une compensation entre les pertes de la cavité (1^{er} terme, $-2\kappa a^\dagger a$, de VI-22) et le gain résultant de la différence entre processus d'émission stimulée ($w a^\dagger a N_2$) et processus d'absorption ($-w a^\dagger a N_1$). w est donc bien le taux de transition pour 1 photon



- Différence de population stationnaire

En régime stationnaire, l'équation (VI-14) s'écrit, compte tenu de (VI-20):

$$\dot{S} = 0 = \Gamma S_0 - \Gamma S - 2w(a^\dagger a) S \quad (VI-23)$$

Une telle équation exprime l'équilibre entre le pompage (1^{er} terme), la relaxation (2^{er} terme) et la saturation (3^{em} terme) associés aux processus d'absorption et d'émission induite [le facteur 2 des derniers terme provient du fait que toute transition élémentaire d'absorption ou d'émission induite fait varier de 2 unités $N_2 - N_1$]. On déduit de VI-23 que

$$S = \frac{S_0}{1 + \frac{2w}{\Gamma} a^\dagger a} = S_0 \left(1 - \frac{2w}{\Gamma} a^\dagger a + \dots \right) \quad (VI-24)$$

- Seuil d'oscillation

Le coefficient de $a^\dagger a$ dans (VI-22) est $-2\kappa + wS$. Considérons alors l'inversion critique S_{cr} définie par

$$S_{cr} = \frac{2\kappa}{w} \quad (VI-25)$$

Si $S_0 < S_{cr}$, comme d'après (VI-24) $S \leq S_0$, le coefficient de $a+a$ dans (VI-22) est toujours négatif et ne peut s'annuler. La seule solution de (VI-22) est alors $a+a=0$: Pas d'oscillation.

Si par contre $S_0 > S_{cr}$, ce coefficient $-2\kappa + WS$ peut s'annuler pour une valeur de $a+a$ calculable à partir de l'expression VI-24 de S

$$a+a = \frac{\Gamma}{4\kappa} \left[S_0 - \frac{2\kappa}{W} \right] = \frac{\Gamma}{4\kappa} [S_0 - S_{cr}] \quad (VI-26)$$

S_{cr} est donc le seuil d'oscillation.

b) Ordres de grandeurs

- Considérons un laser à gaz (longueur ~ 1 m, Puissance ~ 10 mW)
 largeur spectrale κ des modes de la cavité $\sim 10^{-2}$ x intervalle entre ordres

↳ $\kappa \sim 1$ MHz (VI-27)

- Largeurs atomiques γ, Γ (Pression ~ 3 Torr)

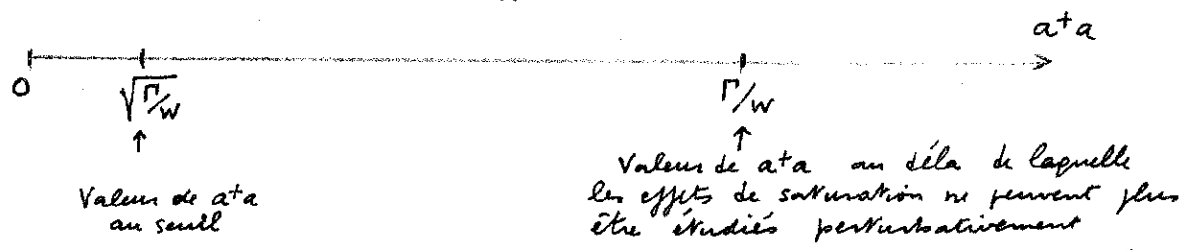
$$\gamma, \Gamma \sim 100$$
 MHz (VI-28)

- Temps de transition w associé à 1 photon

Pour l'estimer, on commence à évaluer (à partir de la puissance de sortie et du coefficient de réflexion des miroirs ($\sim 99/100$)) le nombre de photons dans la cavité que l'on trouve $a+a \sim 10^{10}$ et on écrit que, pour un laser bien au dessus du seuil, $wa+a \sim \Gamma$ ce qui donne

$$w \sim 10^{-10} \Gamma \sim 10^{-2}$$
 Hz (VI-29)

- Plus loin, nous verrons, en au seuil, le nombre de photons est de l'ordre de $\sqrt{\Gamma/w} \sim 10^5$ (il faudra faire intervenir le bruit associé à l'émission spontanée dans le mode). Comme $\sqrt{\Gamma/w} \ll \Gamma/w$ on voit qu'on peut étudier une plage très large de part et d'autre du seuil en gardant des effets de saturation (caractérisés par $2wa+a/\Gamma$) suffisamment petits pour qu'on puisse utiliser des développements limités du type de VI-24



c) Atteinte de l'équilibre

Fig. 3

Equation d'évolution de a

- Dérivées (VI-10-2): On obtient en utilisant l'expression (VI-10-4) de \dot{S}_- :

$$\ddot{a} + \kappa \dot{a} = -ig \dot{S}_- = ig\gamma S_- + g^2 a S \quad (VI-30)$$

- Il suffit alors d'utiliser VI-10-2 pour exprimer S_- en fonction de \dot{a} et a

On obtient ainsi $\ddot{a} + (\kappa + \gamma) \dot{a} + (\kappa\gamma - g^2 S) a = 0 \quad (VI-31)$

c-a-d encore

$$\boxed{\ddot{a} + (\kappa + \gamma) \dot{a} + \frac{\gamma W}{2} (S_{cr} - S) a = 0} \quad (VI-32)$$

Approximation adiabatique pour S

L'idée physique est que les temps d'évolution des variables atomiques γ^{-1} , Γ^{-1} ($\sim 10^{-8}$ sec) sont beaucoup plus courts que les temps d'évolution du rayonnement qui partent de κ^{-1} ($\sim 10^{-6}$ sec) et s'allongent considérablement quand on s'approche du seuil et qu'on le dépasse. On peut donc dire que les variables atomiques suivent instantanément l'évolution lente du champ.

Mathématiquement, on peut donc, au lieu de résoudre les équations d'évolution couplées de a et S , remplacer dans VI-32 S par sa valeur stationnaire (VI-24) dans le champ correspondant à a , ce qui donne:

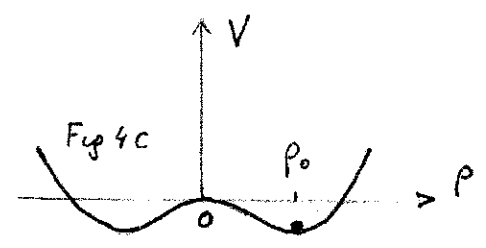
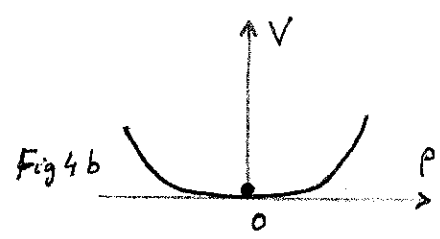
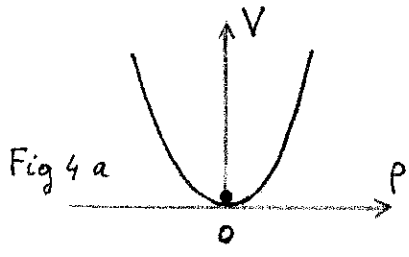
$$\ddot{a} + (k + \gamma)\dot{a} + (A + B a^2)a = 0 \tag{VI-33}$$

avec
$$A = \frac{\gamma W}{2} (S_{cr} - S_0) \quad B = \frac{\gamma W^2}{\Gamma} S_0 \tag{VI-34}$$

Problème mécanique équivalent

L'équation (VI-33) a la même structure que celle décrivant le mouvement d'une particule dans un plan à 2 dimensions. Si l'on pose $a = x + iy$, $a^+ a = x^2 + y^2 = \rho^2$, l'équation (VI-33) exprime que cette particule "fictive" est soumise à une force de friction (coefficient $k + \gamma$) et à un potentiel $V(\rho)$ ne dépendant que de ρ (et non de l'angle polaire θ):

$$V(\rho) = \frac{A}{2} \rho^2 + \frac{B}{4} \rho^4 \tag{VI-35}$$



Supposons tout d'abord le système très au dessous du seuil ($S_0 \ll S_{cr}$). D'après (VI-34), A est positif, $B a^2$ est très petit devant A . On a alors le potentiel parabolique de la figure 4a. La particule tend vers sa position d'équilibre en $\rho = 0$ avec une constante de temps $\sim \kappa^{-1}$.
Quand S_0 augmente, tout en restant inférieur à S_{cr} , la courbure en 0 diminue et le temps d'atteinte de l'équilibre est de plus en plus long car la force de rappel est de plus en plus faible. Pour $S_0 = S_{cr}$ (Fig 4.b) le potentiel est très plat en 0 ($\sim \rho^4$).
Quand S_0 dépasse S_{cr} , A devient négatif, et le terme en ρ^2 , qui domine pour ρ très petit, donne à $V(\rho)$ une courbure négative. Si ce terme était tout seul, le système serait instable et la particule irait à l'infini. Le terme en ρ^4 , qui est toujours positif, empêche une telle divergence et fait apparaître un minimum pour une valeur finie ρ_0 de ρ (Fig 4.c). En fait, le potentiel a la symétrie cylindrique et il y a une infinité de positions d'équilibre se déduisant les unes des autres par rotations autour de l'axe des ordonnées. Au voisinage d'une position d'équilibre la particule est soumise à une force de rappel, si elle se déplace le long de l'axe ρ , mais peut se déplacer librement dans le sens perpendiculaire.

(On notera l'analogie avec une transition de phase et une brisure de symétrie).

③ Importance des fluctuations

Si l'on ne néglige plus les forces de Langevin dans (VI-10), il va apparaître au second membre de VI-33 des forces fluctuantes, qui font intervenir à la fois les forces de Langevin atomiques et celles du rayonnement (en toute rigueur, nous verrons également au § suivant que les coefficients A et B sont également légèrement modifiés).

On peut alors aisément deviner quel va être l'effet de ces forces fluctuantes

a) Au dessous du seuil

- Emission de lumière au dessous du seuil

La particule va fluctuer autour de sa position d'équilibre représentée sur la fig. 4a. Il s'en suit que $\langle a^2 \rangle = \langle p^2 \rangle$ va alors avoir une valeur moyenne non nulle, ce qui signifie que le tube laser va émettre de la lumière même au dessous du seuil. Cette lumière provient de l'émission spontanée ou du rayonnement du corps noir.

- Affinement de la raie quand on s'approche du seuil

Les fluctuations s'amortissent de plus en plus lentement quand on se rapproche du seuil par suite de la diminution de la courbure en 0. La raie émise va donc s'affiner

- Approximation linéaire

Le terme non linéaire $B \langle a^2 \rangle a$ étant petit au dessous du seuil, on peut "linéariser" $(A + B \langle a^2 \rangle) a$ en remplaçant $B \langle a^2 \rangle$ par sa valeur moyenne $B \langle a^2 \rangle$

$(A + B \langle a^2 \rangle) a \rightarrow (A + B \langle a^2 \rangle) a$ (VI-35)

- Allure de la distribution de probabilité du champ électrique

C'est, à un coefficient près, la distribution de probabilité de a . Par analogie avec le mouvement Brownien d'un oscillateur harmonique soumis à des forces de Langevin moyennées, on pense que cette distribution de probabilité a une allure gaussienne, centrée en 0, avec une largeur qui croît quand on se rapproche du seuil, puisque la diminution de la courbure du potentiel permet aux forces fluctuantes d'écarter de plus en plus la particule de sa position d'équilibre.

b) Au dessus du seuil

Notons tout d'abord que ce sont les forces fluctuantes qui font quitter le point 0 (équilibre instable) à la particule pour l'amener à sa nouvelle position d'équilibre.

- Stabilisation en amplitude

Le minimum de V le long de l'axe p stabilise l'amplitude du laser autour de la valeur $\sqrt{p_0}$ (fig 4c). L'amplitude fluctue légèrement autour de $\sqrt{p_0}$.

- Diffusion de phase

Le mouvement tangentiel étant libre, la phase de l'onde laser diffuse. Comme l'amplitude est stabilisée, la largeur de raie d'un laser au dessus du seuil est donc essentiellement déterminée par la diffusion de phase.

Quand l'inversion S_0 augmente, il en est de même de la puissance de sortie, c-à-d aussi du rayon ρ_0 de la fig 4c. Le temps de diffusion de la phase augmente donc (la particule doit diffuser davantage sur un cercle de rayon ρ_0 plus grand pour tourner du même angle). La largeur de raie d'un laser diminue donc quand la puissance augmente.

- Approximation quasi-linéaire

Au lieu de linéariser autour de $p=0$ comme plus haut, on peut linéariser autour de la position d'équilibre p_0

$$(A + B a) a \rightarrow (A + B p_0) a \quad (VI-36)$$

- Allure de la distribution de probabilité du champ électrique

Isotrope (indépendante de θ) - Gaussienne autour de p_0 en fonction de p .

Cette distribution se rapproche plus de celle correspondant à un état cohérent (de phase équirépartie entre 0 et 2π).

c) Voisinage immédiat du seuil (au dessus ou au dessous)

La largeur de la distribution de probabilité de a devient si grande qu'on ne peut plus négliger les variations de la courbure de $V(p)$ sur la largeur de cette distribution : On ne peut plus faire d'approximations linéaire ou quasi-linéaire.

Il faut alors établir l'équation d'évolution de la densité de probabilité.

En négligeant dans (VI-34) \dot{a} devant $(\kappa + \gamma) a$ [au voisinage du seuil, les temps d'évolution du champ sont beaucoup plus longs que κ^{-1} et γ^{-1}], et en rajoutant au second membre les forces fluctuantes, on voit que l'on doit étudier une équation de Langevin non-linéaire. Il faut alors établir l'équation de Fokker-Planck non-linéaire correspondante et résoudre cette équation.

C - Equations de Langevin réduites pour le mode laser.

But de ce §

les équations (VI-10) et (VI-14) sont des équations de Langevin-Mori couplant les variables du mode laser (a et a^+) et les variables atomiques : dipole (S_{\pm}), inversion de populations ($N_2 - N_1 = S$). Dans ce §, on essaie d'obtenir une équation de Langevin réduite pour les seules variables a et a^+ . Pour cela, on élimine adiabatiquement les variables atomiques, en utilisant le fait qu'elles varient beaucoup plus vite que le champ laser, et peuvent donc suivre instantanément les variations lentes de ce dernier.

Il s'agit donc de reprendre les calculs du § B, d'une part en gardant dès le début les forces de Langevin, d'autre part en ne traitant pas les diverses variables comme des nombres mais comme des opérateurs qui ne commutent pas entre eux et dont il faut respecter l'ordre.

① Élimination adiabatique des variables atomiques

Rappel des paramètres physiques importants

κ : Taux d'amortissement du mode de la cavité ($\sim 10^6$ Hz)
 γ : Taux de relaxation du dipôle atomique
 Γ : " " des populations atomiques } ($\sim 10^8$ Hz)

$W = \frac{2g^2}{\gamma}$: Taux d'absorption ($1 \rightarrow 2$) ou d'émission induite ($2 \rightarrow 1$) ($\sim 10^{-2}$ Hz)
 associé à \pm photon (g : constante de couplage).

S_0 : Inversion de populations en l'absence de couplage atome-laser.

a) Élimination adiabatique du dipôle atomique S_{\pm}

- Comme les variables atomiques suivent l'évolution du champ, \dot{S}_{\pm} est de l'ordre de κS_{\pm} très au dessous du seuil, puis devient beaucoup plus petit quand on se rapproche du seuil et qu'on le dépasse. On peut donc, dans les équations (VI-10-3,4) négliger \dot{S}_{\pm} devant le 1^{er} terme, $-\gamma S_{\pm}$, du 2^e membre et obtenir ainsi :

$$S_+ = -\frac{ig}{\gamma} a^+ S + \frac{1}{\gamma} F_{S_+} \quad S_- = \frac{ig}{\gamma} a S + \frac{1}{\gamma} F_{S_-} \quad (VII-1)$$

Remarques

(i) A cause des forces de Langevin $F_{S_{\pm}}$ au 2^e membre de (VI-10-3,4), il y a une composante fluctuante dans S_{\pm} qui contribue à \dot{S}_{\pm} . Le raisonnement précédent n'est donc valable que pour les composantes de Fourier des forces fluctuantes de fréquence bien inférieure à γ . Le résultat déduit des équations (VII-1) pour les composantes de Fourier des fluctuations de S_{\pm} de fréquence supérieure à γ est donc certainement incorrect (ces fluctuations sont surestimées).

En fait, nous allons reporter les expressions "adiabatiques" (VII-1) de S_{\pm} dans l'équation d'évolution de a et a^+ . Les forces fluctuantes

nouvelles, d'origine atomique, qui apparaissent ainsi au 2^{ème} membre de l'équation donnant \dot{a} et \dot{a}^+ n'auront donc pas un spectre de fréquences correct pour $\omega \gg \gamma$. Une telle erreur n'est cependant pas grave car a et a^+ sont des variables très lentes qui ne sont sensibles qu'à la partie basse fréquence du spectre des Jones de Langevin. De manière plus précise, on peut sur les équations de Langevin réduites obtenues plus haut loin, "lisser" les Jones de Langevin et restreindre leur spectre de fréquence à une largeur $\theta^{-1} < \gamma$ [le spectre filtré est alors correct de même que les coefficients de diffusion]; la largeur θ^{-1} peut de plus toujours être choisie très grande devant la largeur spectrale des fluctuations du laser, de sorte que les Jones de Langevin filtrés (d'origine atomique) apparaissent toujours comme markoviennes pour les variables du mode laser (temps de corrélation très court devant le temps de relaxation du mode).

(ii) Dans (VII-1), on peut tout aussi bien écrire $S a^+$ au lieu de $a^+ S$ ($S a$ au lieu de $a S$), car les variables du mode de laser et les variables atomiques à un même instant t commutent.

- En reportant l'expression adiabatique VII-1 de S_- dans (VI-10-2) et en utilisant la définition $w = 2g^2/\gamma$ de w , on obtient

$$\dot{a} = -(\kappa - \frac{w}{2} S) a + \hat{F}_a \tag{VII-2}$$

où

$$\hat{F}_a = F_a - \frac{ig}{\gamma} F_{S_-} \tag{VII-3}$$

est une nouvelle Jones de Langevin pour le mode laser contenant, en plus de F_a , une contribution atomique $-\frac{ig}{\gamma} F_{S_-}$.

b) Élimination adiabatique de l'inversion de populations $S = N_2 - N_1$

- Suivant la même méthode que plus haut, on néglige dans l'équation (VI-14) \dot{S} devant $-\Gamma S$, ce qui donne

$$S = S_0 + \frac{2ig}{\Gamma} (a^+ S_- - S_+ a) + \frac{F_S}{\Gamma} \tag{VII-4}$$

- Reportons alors dans (VII-4) les expressions adiabatiques (VII-1) de S_{\pm} .
Il vient :

$$S = S_0 - \frac{2w}{\Gamma} S a^+ a + \frac{2ig}{\gamma \Gamma} (a^+ F_{S_-} - F_{S_+} a) + \frac{F_S}{\Gamma} \tag{VII-5}$$

Remarque

On peut dans (VII-5) écrire tout aussi bien $a^+ a S$ ou $S a^+ a$. Par contre, a^+ et a ne commutent pas avec $F_{S_{\pm}}$ et l'ordre des opérateurs dans l'avant dernière terme de (VII-5) est important. Notons que l'on aurait pu écrire $(S_- a^+ - a S_+)$ au lieu de $(a^+ S_- - S_+ a)$ dans le 2^{ème} terme de (VII-4). On aurait alors obtenu au lieu de (VII-5):

$$S = S_0 - \frac{2w}{\Gamma} S a a^+ + \frac{2ig}{\gamma \Gamma} (F_{S_-} a^+ - a F_{S_+}) + \frac{F_S}{\Gamma} \tag{VII-6}$$

Nous reviendrons plus loin (remarque ii page VII-6) sur l'équivalence entre (VII-5) et (VII-6).

② Equations de Langevin réduite pour a et a^+ .

a) Infiniment petits caractérisant les développements - Domaine de validité des calculs de ce chapitre.

- Nous avons vu plus haut que w/Γ et w/γ étaient extrêmement petits (de l'ordre de 10^{-10}). Nous négligerons donc toutes les corrections en w/Γ des différents coefficients des équations obtenues ci-dessous. L'approximation adiabatique a d'ailleurs introduit déjà des erreurs du même ordre ou plus grandes.
- De même, nous ne tiendrons compte des effets de saturation, caractérisés par le paramètre $\frac{w a^+ a}{\Gamma}$, que dans les termes où ils jouent un rôle important (saturation du gain qui empêche la divergence du système) et nous les calculerons alors l'ordre le plus bas où ils apparaissent. Nous supposons donc $\frac{w a^+ a}{\Gamma} \ll 1$, ce qui laisse cependant d'après la figure 3 de la page VI-7 la possibilité d'étudier une plage d'intensité assez large de part et d'autre du seuil.

b) Etablissement de l'équation d'évolution de a

- Il faut maintenant reporter l'expression adiabatique (VII-5) de S dans l'équation d'évolution (VII-2) de a qui contient S .
- Le 2^{ème} terme de (VII-5) est déjà d'ordre 1 en $w a^+ a / \Gamma$. On peut donc, d'après le § précédent, remplacer S par S_0 dans ce terme.
- Les 3^{ème} et 4^{ème} termes de (VII-5) vont, lorsqu'on reporte (VII-5) dans (VII-2), introduire des nouvelles forces fluctuantes au 2^{ème} membre de l'équation donnant \dot{a} , qui vont venir s'ajouter à \hat{F}_a . En fait, S est déjà multiplié par $w = 2g^2/\gamma$ dans (VII-2), de sorte que les nouvelles forces qui apparaissent ainsi sont \propto en g^2 et g^3 , alors que les 2 termes de \hat{F}_a sont, d'après (VII-3), en g^0 et g^1 . Nous négligerons donc ces nouvelles forces devant \hat{F}_a . [De manière plus précise ^(on peut montrer) qu'elles apportent au coefficient de diffusion de \hat{F}_a des corrections en $\frac{w}{\Gamma}$ ou $\frac{w a^+ a}{\Gamma}$].
- En toute rigueur, le 3^{ème} terme de (VII-5) n'est pas purement fluctuant puisqu'il a une valeur moyenne non nulle sur le réservoir (qui sera évalué dans le § 3 suivant). Cette valeur moyenne est cependant w/Γ fois plus petite que le 1^{er} terme, S_0 , de (VII-5) et sera donc négligée.

En conclusion, lorsqu'on reporte (VII-5) dans (VII-2), on peut ^(donc) à l'ordre le plus bas significatif en $\frac{w a^+ a}{\Gamma}$ et $\frac{w}{\Gamma}$, se contenter de l'expression

$$S = S_0 - \frac{2w}{\Gamma} S_0 a^+ a \tag{VII-7}$$

ce qui donne pour \dot{a}

$$\dot{a} = -\left(\kappa - \frac{w}{2} S_0 + \frac{w^2}{\Gamma} S_0 a^\dagger a\right) a + \hat{F}_a \quad (VII-8)$$

c) Coefficients de diffusion \hat{D} pour les nouvelles forces de Langevin \hat{F}

D'après (VII-3), on a, comme F_a et F_{S_\pm} sont des forces indépendantes :

$$2 \hat{D}_{a^\dagger a} = 2 D_{a^\dagger a} + \frac{2g^2}{\gamma^2} D_{S_+ S_-} \quad (VII-9)$$

c-à-d compte tenu de (V-29), (VI-11), (VI-12) et (VI-21)

$$2 \hat{D}_{a^\dagger a} = 2\kappa \langle n_0 \rangle + \frac{w}{2\gamma} \left(\langle N_2 \rangle - \Gamma \langle N_2 \rangle + 2\gamma \langle N_2 \rangle \right) \quad (VII-10)$$

Nous calculerons le 2^{ème} terme de (VII-10) à l'ordre 0 en $w a^\dagger a / \Gamma$. Il ne serait en effet pas cohérent de calculer les termes d'ordre 1 en continuant à négliger les forces de Langevin associées au 3^{ème} et 4^{ème} terme de (VII-5) qui donnent des corrections du même ordre.

A l'ordre 0 en $w a^\dagger a / \Gamma$, $\langle N_2 \rangle$ (et $\langle N_1 \rangle$) se calculent à partir de (VI-10-5 et 6) en négligeant le terme en $i\gamma(a^\dagger S_- - a S_+)$. Comme on peut négliger \dot{N}_2 et \dot{N}_1 (approximation adiabatique) et que $\langle F_{N_2} \rangle = \langle F_{N_1} \rangle = 0$, on a, compte tenu de (VI-12), (VI-15), (VI-17)

$$\langle N_2 \rangle - \Gamma \langle N_2 \rangle = 0 \quad \langle N_1 \rangle = 0 \quad (VII-10)$$

ce qui donne finalement

$$\frac{w}{2\gamma} \left(\langle N_2 \rangle - \Gamma \langle N_2 \rangle + 2\gamma \langle N_2 \rangle \right) = w \langle N_2 \rangle = w S_0 \quad (VII-11)$$

et de même

$$\frac{w}{2\gamma} \left(\langle N_1 \rangle - \Gamma \langle N_1 \rangle + 2\gamma \langle N_1 \rangle \right) = w \langle N_1 \rangle = 0 \quad (VII-12)$$

En conclusion, tant que $w a^\dagger a \ll \Gamma$, on peut utiliser le tableau suivant de coefficients de diffusion

$\alpha \backslash \beta$	a	a [†]	
	a	0	
	a [†]	2κn ₀ + w S ₀	0

(VII-13)

③ Moyennes sur les réservoirs d'un produit de forces de Langevin et d'opérateurs a et a[†] pris au même instant

La motivation d'un tel calcul est que des produits du type a F ou a[†] F apparaissent très fréquemment au cours des calculs de ce chapitre. Un premier exemple est le 3^{ème} terme de l'expression (VII-5) donnant S. Dans le § 4 suivant, on l'on calcule $\frac{d}{dt} \langle a^\dagger a \rangle$, on verra apparaître également $\langle a^\dagger \hat{F}_a + \hat{F}_a^\dagger a \rangle$

a) Principe du calcul

Définissons par $\hat{V}_a(t)$ le 1^{er} terme du second membre de (VII-9) et intégrons VII-8 entre t-Δt et t, Δt étant un temps long devant le temps de corrélation des forces de Langevin, court devant le temps d'évolution de a(t). On obtient, à des termes d'ordre supérieur en $\sqrt{\Delta t}$ près :

$$a(t) = a(t-\Delta t) + \hat{V}_a(t-\Delta t) \Delta t + \int_{t-\Delta t}^t \hat{F}_a(t') dt' \quad (\text{VII-14})$$

- Supposons alors qu'on s'intéresse par la quantité $\langle F_\beta(t) a(t) \rangle$ où F_β est l'une des forces de Langevin du problème. $a(t-\Delta t)$ et $\hat{V}_a(t-\Delta t)$ dépendent des valeurs des forces de Langevin dans le passé de $t-\Delta t$. Comme $\Delta t \gg \tau_c$, on en déduit que

$$\langle F_\beta(t) a(t-\Delta t) \rangle = \langle F_\beta(t) \hat{V}_a(t-\Delta t) \rangle = 0 \quad (\text{VII-15})$$

de sorte qu'en multipliant les 2 membres de (VII-14) par $F_\beta(t)$ et en prenant la valeur moyenne sur le réservoir, on obtient :

$$\langle F_\beta(t) a(t) \rangle = \int_{t-\Delta t}^t dt' \langle F_\beta(t) \hat{F}_a(t') \rangle \approx \int_{-\infty}^t dt' \langle F_\beta(t) \hat{F}_a(t') \rangle \quad (\text{VII-16})$$

b) Exemples d'application

i) Calcul de $\langle a^+(t) \hat{F}_a(t) + \hat{F}_a^+(t) a(t) \rangle$

En remplaçant $F_\beta(t)$ par $\hat{F}_a^+(t)$ dans (VII-16), on obtient immédiatement, compte tenu de (VII-13)

$$\begin{aligned} \langle \hat{F}_a^+(t) a(t) \rangle &= \int_{-\infty}^t dt' \langle \hat{F}_a^+(t) \hat{F}_a(t') \rangle = 2\hat{D}_{a^+a} \int_{-\infty}^t dt' \delta(t-t') \\ &= \hat{D}_{a^+a} = \kappa n_0 + \frac{w}{2} S_0 \end{aligned} \quad (\text{VII-17})$$

On voit ainsi toute l'importance d'avoir obtenu (après lissage) des forces de Langevin dont les fonctions de corrélation sont des fonctions paires de $t-t'$. Un calcul identique donne la même valeur pour $a^+(t) \hat{F}_a(t)$. On a donc

$$\langle a^+(t) \hat{F}_a(t) + \hat{F}_a^+(t) a(t) \rangle = 2\hat{D}_{a^+a} = 2\kappa n_0 + w S_0 \quad (\text{VII-18})$$

La signification physique de ce terme apparaîtra clairement au § 4 suivant.

ii) Calcul de $\langle a^+(t) F_{S_-}(t) - F_{S_+}(t) a(t) \rangle$ (cf 3^e terme de VII-5)

En remplaçant $F_\beta(t)$ par $F_{S_+}(t)$ dans (VII-16), en utilisant le fait que F_a et F_{S_+} sont indépendants, on obtient :

$$-\langle F_{S_+}(t) a(t) \rangle = \frac{ig}{\gamma} \int_{-\infty}^t dt' \langle F_{S_+}(t) F_{S_-}(t') \rangle = \frac{ig}{\gamma} D_{S_+S_-} \quad (\text{VII-19})$$

Un calcul analogue conduit à la même valeur pour $\langle a^+(t) F_{S_-}(t) \rangle$. On obtient ainsi (en calculant comme au § 2c $D_{S_+S_-}$ à l'ordre 0 en $w a^2/\Gamma$):

$$\frac{2ig}{\gamma\Gamma} \langle a^+(t) F_{S_-}(t) - F_{S_+}(t) a(t) \rangle = -\frac{2g^2}{\gamma^2\Gamma} 2D_{S_+S_-} = -\frac{2w}{\Gamma} \langle N_2 \rangle = -\frac{2w S_0}{\Gamma} \quad (\text{VII-20})$$

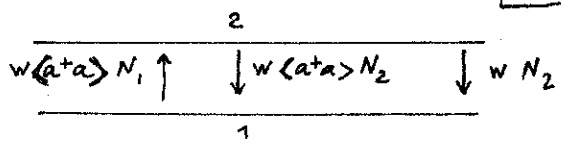
Prendons alors la valeur moyenne des 2 membres de (VII-5). En utilisant $\langle F_S \rangle = 0$, et (VII-20), on obtient (en remplaçant S par S_0 dans le terme de saturation)

$$0 = \Gamma S_0 - \Gamma \langle S \rangle - 2w S_0 \langle a^+ a \rangle - 2w \langle N_2 \rangle \quad (\text{VII-21})$$

On voit ainsi apparaître un nouveau terme, $-2w \langle N_2 \rangle$, par rapport à l'équation (VI-23) du § B précédent. La signification

physique de ce terme est très claire.

(VII-20) exprime qu'en régime stationnaire l'inversion S atteint une valeur d'équilibre sous l'effet combiné du pompage (1^{er} terme), de la relaxation (2^e terme), de l'absorption et de l'émission induites (3^e terme) et de l'émission spontanée dans le mode (4^e terme). (Le facteur 2 provient du fait que tout processus d'émission spontanée fait varier S de 2 unités)



Le paramètre w peut donc être encore interprété comme la probabilité par unité de temps d'émission spontanée d'un photon dans le mode.

Ainsi, en gardant les forces de Langevin dans (VI-10), en faisant attention à l'ordre des opérateurs et aux corrélations entre forces de Langevin et opérateurs, on voit apparaître très simplement l'émission spontanée dans le mode.

c) Remarques

(i) On peut donc séparer le 3^{em} terme de VII-5 en sa valeur moyenne, $-2w S_0 / \Gamma$ (plus petite que le 1^{er} terme de VII-5 par un facteur w/Γ ce qui explique pourquoi on ne l'a pas gardé), et l'écart par rapport sa valeur moyenne qui est une force de Langevin purement fluctuante, dont on peut se convaincre aisément qu'elle a la forme

$$\frac{2ig}{\gamma\Gamma} [a^+(t-\Delta t) F_{S-}(t) - F_{S+}(t) a(t-\Delta t)] \tag{VII-22}$$

Lorsqu'on reporte (VII-22) et F_S/Γ (VII-2), on obtient des termes fluctuants négligés dans le § 2 ci-dessus, mais qu'on pourrait calculer en suivant les mêmes méthodes que précédemment. On peut alors montrer que ces termes décrivent le bruit Schott associé aux fluctuations des populations N_1 et N_2 et provenant d'une part du pompage et de la relaxation (terme F_S/Γ), d'autre part des absorptions et émissions induites entre 1 et 2 (terme VII-22)

(ii) le même calcul qu'au § b ii) donne

$$\frac{2ig}{\gamma\Gamma} \langle F_{S-} a^+ - a F_{S+} \rangle = -\frac{2g^2}{\gamma^2\Gamma} 2D_{S-S_+} = -\frac{2w}{\Gamma} \langle N_1 \rangle = 0 \tag{VII-23}$$

Retraçons alors les valeurs moyennes des équations (VII-6) et (VII-5) obtenues plus haut à partir de 2 ordres possible d'opérateurs commutant entre eux. Il vient (à l'ordre 0 en $w(a^+a)/\Gamma$)

$$0 = \frac{2w}{\Gamma} S_0 \langle a a^+ - a^+ a \rangle - \frac{2w}{\Gamma} S_0 \tag{VII-24}$$

Comme $[a, a^+] = 1$, cette équation est bien vérifiée. En d'autres termes, suivant que le 2^{em} terme de (VII-4) est écrit sous la forme $a^+ S_- - S_+ a$ ou $S_- a^+ - a S_+$ le 2^{em} terme de l'expression VII-5 ou VII-6 donnant S n'a pas la même forme, mais il en est alors de même du 3^{em}, la somme des 2^{em} et 3^{em} termes conservant la même valeur.

④ Equations d'évolution du nombre moyen de photons $\langle a^\dagger a \rangle$

- Multiplions l'équation (VII-8) à gauche par a^\dagger , puis l'équation adjointe de (VII-8) à droite par a . Enfin, prenons la valeur moyenne sur les réservoirs de la somme des 2 équations ainsi obtenues. Il vient

$$\frac{d}{dt} \langle a^\dagger a \rangle = -(2\kappa - w S_0) \langle a^\dagger a \rangle - \frac{2w^2}{\Gamma} S_0 \langle a^\dagger a^\dagger a a \rangle + \langle a^\dagger \hat{F}_a + \hat{F}_a^\dagger a \rangle \quad (VII-25)$$

c-à-d encore, compte tenu de (VII-18) :

$$\boxed{\frac{d}{dt} \langle a^\dagger a \rangle = -(2\kappa - w S_0) \langle a^\dagger a \rangle - \frac{2w^2}{\Gamma} S_0 \langle a^\dagger a^\dagger a a \rangle + 2\kappa n_0 + w S_0} \quad (VII-26)$$

- L'interprétation physique de (VII-26) est très claire. La vitesse de variations du nombre moyen de photons dans le mode est due à 3 processus

- (i) les pertes de la cavité : Terme $-2\kappa \langle a^\dagger a \rangle$
- (ii) le gain du milieu atomique : gain linéaire $w S_0 \langle a^\dagger a \rangle$ corrigé par la saturation $-\frac{2w^2}{\Gamma} S_0 \langle a^\dagger a^\dagger a a \rangle$
- (iii) l'alimentation du mode d'une part par le rayonnement du corps noir qui introduit $2\kappa n_0$ ^(photons) dans le mode par unité de temps, d'autre part par l'émission spontanée qui en introduit $w S_0$.

- On notera 2 différences importantes entre (VII-26) et l'équation correspondante obtenue dans le § B précédent en négligeant les forces de Langevin et le caractère énantique des opérateurs (voir par exemple VI-18 et VI-22). D'une part, on a le terme source $2\kappa n_0 + w S_0$ qui est nouveau et qui permet d'avoir $\langle a^\dagger a \rangle \neq 0$ même en dessous du seuil. D'autre part, on voit apparaître $\langle a^\dagger a^\dagger a a \rangle$ et non $\langle a^\dagger a \rangle^2$

Remarque

On peut écrire le terme source $2\kappa n_0 + w S_0$ de manière plus symétrique et plus suggestive.

En l'absence d'atomes, l'équation (VII-26) s'écrit $\frac{d}{dt} \langle a^\dagger a \rangle = 2\kappa (n_0 - \langle a^\dagger a \rangle)$ ce qui montre que n_0 est, en régime stationnaire, le nombre moyen de photons dans le mode provenant du rayonnement du corps noir. Nous noterons $n_0 = n_R$ pour noter cette origine (rayonnement)

(VII-27 bis)

Supposons maintenant la cavité alimentée uniquement par l'émission spontanée. Le nombre moyen de photons dans le mode, si l'émission spontanée était le seul processus présent, serait donné par l'équation $\frac{d}{dt} \langle a^\dagger a \rangle = -2\kappa \langle a^\dagger a \rangle + w S_0$. Il vaudrait donc $\frac{w S_0}{2\kappa}$. Nous poserons

$$\boxed{n_A = \frac{w S_0}{2\kappa}} \quad (VII-27)$$

pour rappeler cette origine (atomique) de n_A . Finalement, on a

$$\boxed{2\kappa n_0 + w S_0 = 2\kappa (n_R + n_A)} \quad (VII-28)$$

Au voisinage du seuil, S_0 est voisin de $S_{cr} = \frac{2\kappa}{w}$ (voir VI-25), de sorte que n_A est de l'ordre de 1

Dans le domaine optique (lasers) n_A est de l'ordre de 1 alors que $n_R = \frac{1}{e^{\hbar\omega/kT} - 1}$ est complètement négligeable devant 1 ($\hbar\omega \gg kT$)

Dans le domaine microonde (masers), plus précisément pour $\hbar\omega \ll kT$, $n_R \approx \frac{kT}{\hbar\omega}$ est très grand devant n_A qui reste de l'ordre de 1

$$\begin{cases} \hbar\omega \gg kT & n_A \gg n_R \\ \hbar\omega \ll kT & n_A \ll n_R \end{cases} \quad (\text{VII-29})$$

⑤ Introduction de nouvelles variables sans dimensions

- Afin de simplifier les calculs et les discussions qui suivent, nous allons poser

$$\begin{cases} t = T \tau \\ a = \xi b \end{cases} \quad (\text{VII-30})$$

et choisir T (nouvelle unité de temps) et ξ (ξ^2 nouvelle unité d'intensité) pour que l'équation de Langevin pour b , obtenue à partir de (VII-8), ait la forme très simple

$$\begin{cases} \frac{db}{d\tau} = (p - b^+ b) b + \mathcal{F}(\tau) \\ \langle \mathcal{F}^+(\tau) \mathcal{F}(\tau') \rangle = 4 \delta(\tau - \tau') \end{cases} \quad (\text{VII-31})$$

Il n'y a alors plus qu'un paramètre p dans (VII-31) qui est appelé le paramètre de pompage. (Le facteur 4 est choisi dans VII-32 de manière que l'équation de Fokker-Planck associée à VII-31, qui sera étudiée plus loin, ait la forme standard de l'équation de Fokker-Planck d'un oscillateur de Van der Pol, équation très étudiée dans la littérature).

- Reportons (VII-30) dans (VII-8). Par identification avec (VII-31), on obtient :

$$\begin{cases} p = T \left(\frac{W}{2} S_0 - \kappa \right) = T \frac{W}{2} (S_0 - S_{cr}) \\ \frac{W^2 T}{\Gamma} \xi^2 W S_0 = 1 \end{cases} \quad (\text{VII-33})$$

$$\frac{W^2 T}{\Gamma} \xi^2 W S_0 = 1 \quad (\text{VII-34})$$

On a fait apparaître S_{cr} dans (VII-33) grâce à la relation (VI-25), de manière à montrer que p est proportionnel à l'écart à la valeur critique. Enfin, on peut calculer la fonction de corrélation de \mathcal{F} en fonction de celle de \hat{F} . Compte tenu de la relation $\delta(t-t') = \frac{1}{T} \delta(\tau-\tau')$, on obtient par identification avec VII-32

$$4 = \frac{\Gamma}{\xi^2} [W S_0 + 2\kappa n_0] = \frac{\Gamma}{\xi^2} W S_0 \left[1 + \frac{2\kappa n_0}{W S_0} \right] = \frac{\Gamma}{\xi^2} \left[1 + \frac{n_R}{n_A} \right] W S_0 \quad (\text{VII-35})$$

On a utilisé VII-27 et VII-27 bis. De (VII-34) et (VII-35), on tire

$$T = \sqrt{\frac{\Gamma}{W}} \frac{2}{W S_0} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{n_R}{n_A}}} \quad \xi^2 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\Gamma}{W}} \sqrt{1 + \frac{n_R}{n_A}} \quad (\text{VII-36})$$

ce qui donne pour VII-33

$$p = \sqrt{\frac{\Gamma}{W}} \frac{S_0 - S_{cr}}{S_0} \sqrt{\frac{n_A}{n_A + n_R}} \quad (\text{VII-37})$$

Le paramètre de pompage p est donc l'écart de l'inversion S_0 par rapport à la valeur critique S_{cr} exprimé en valeur relative par rapport à S_0 , amplifié par le facteur $\sqrt{\frac{\Gamma}{W}}$ ($\sim 10^5$) [le dernier radical est de l'ordre de 1 pour les lasers où $n_A \gg n_R$]

Au voisinage du seuil, $\frac{2}{\omega S_0}$ est égal à κ^{-1} . La nouvelle unité de temps τ est donc, près du seuil, κ^{-1} amplifié par $\sqrt{\frac{\Gamma}{\omega}}$ (si $n_A \gg n_R$). Enfin, comme $a^\dagger a = \xi^2 b^\dagger b$, l'unité sur $b^\dagger b$ correspond à $\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\Gamma}{\omega}}$ photons

- Enfin, avec ces nouvelles variables, l'équation (VII-26) s'écrit :

$$\boxed{\frac{d}{d\tau} \langle b^\dagger b \rangle = 2p \langle b^\dagger b \rangle - 2 \langle b^\dagger b^\dagger b b \rangle + 4} \quad (VII-38)$$

D. Nombre de photons émis par l'oscillateur en régime stationnaire

- Comme première application des formules précédentes, et avant d'étudier les fluctuations de phase et d'intensité, nous allons calculer le nombre moyen de photons dans le mode en fonction de l'écart à l'inversion critique, c-à-d de p

- Il faut pour cela trouver la solution stationnaire de (VII-38)

$$p \langle b^\dagger b \rangle - \langle b^\dagger b^\dagger b b \rangle + 2 = 0 \quad (VII-39)$$

On se heurte alors tout de suite à la difficulté du terme $\langle b^\dagger b^\dagger b b \rangle$ qui a priori ne s'exprime pas en fonction de $\langle b^\dagger b \rangle$.

Avant de résoudre cette difficulté de manière précise au moyen de l'équation de Fokker-Planck, on peut dès maintenant comprendre l'essentiel des phénomènes au moyen d'approximations raisonnables suggérées par la discussion du § B précédent (voir pages VI-9 et VI-10)

Très au dessous du seuil $p < 0 \quad |p| \gg 1$

On néglige tout simplement le terme non linéaire $\langle b^\dagger b^\dagger b b \rangle$ ce qui donne

$$\text{Approx. linéaire : } \langle b^\dagger b \rangle \sim -\frac{2}{p} \quad (VII-40)$$

Au dessous du seuil $p < 0 \quad |p| > 1$

On essaie de tenir compte de manière approchée du terme non linéaire en utilisant le fait que la distribution des valeurs possibles de b doit avoir une "allure gaussienne". On écrit donc

$$\langle b^\dagger b^\dagger b b \rangle \sim 2 \langle b^\dagger b \rangle^2 \quad (VII-41)$$

ce qui donne l'équation du second degré suivante pour $I = \langle a^\dagger a \rangle$

$$pI - 2I^2 + 2 = 0 \quad (VII-42)$$

et par suite

$$\text{Approx. gaussienne : } \langle b^\dagger b \rangle \sim \frac{1}{4} (p + \sqrt{p^2 + 16}) \quad (VII-43)$$

qui redonne bien (VII-40) pour $|p| \gg 1$

Très au dessus du seuil $p \gg 1$ (restant toutefois tel que $\frac{\omega a^\dagger a}{\Gamma} \ll 1$)

D'après la discussion du § B, la distribution des valeurs possibles de $b^\dagger b$ est très resserée autour de la valeur d'équilibre, ce qui suggère de poser (approximation "quasi linéaire") :

$$\langle b^\dagger b^\dagger b b \rangle \sim \langle b^\dagger b \rangle^2 \quad (VII-44)$$

ce qui donne l'équation $pI - I^2 + 2 = 0$ et par suite

$$\text{Approx. quasi linéaire : } \langle b^\dagger b \rangle \sim \frac{1}{2} (p + \sqrt{p^2 + 8}) \quad (VII-45)$$

Pour $p \gg 1$, on a $\langle b^+b \rangle \sim p$ (VII-46)

La figure 1 rassemble les résultats précédents. On y a porté pour $p > 0$ les résultats de l'approximation quasilineaire, pour $p < 0$ ceux de l'approximation gaussienne. Les comportements asymptotiques indiqués sont ceux donnés en (VII-40) et (VII-46). Les 2 approximations donnent respectivement 1.4 et 1 pour $\langle b^+b \rangle$ au seuil. En fait, la courbe exacte tombe entre ces 2 courbes, ce qui montre qu'au seuil $\langle b^+b \rangle$ est de l'ordre de 1, donc $\langle a^+a \rangle = \xi^2 \langle b^+b \rangle$ de l'ordre de $\sqrt{\Gamma/W}$ (voir VII-37)

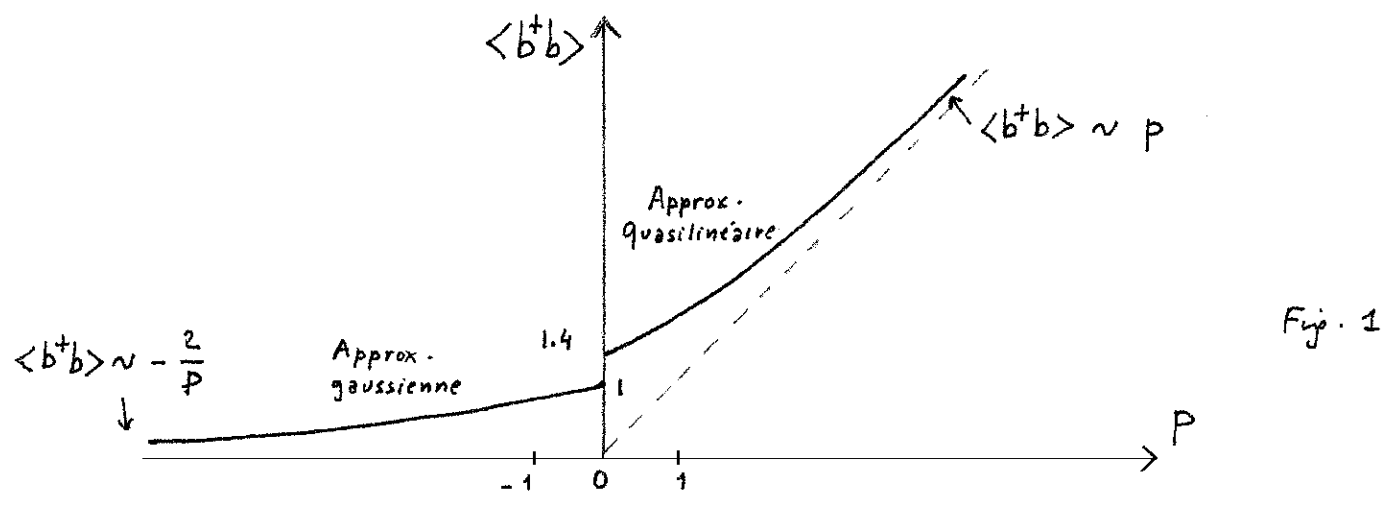


Fig. 1

Avec les variables choisies $\langle b^+b \rangle$ et p , la transition de la fig 1 a l'air très "douce". Si l'on revient aux "vraies" variables $\langle a^+a \rangle$ et $\frac{S_0 - S_{cr}}{S_0}$ il faut très dilater l'échelle des ordonnées et très contracter l'échelle des S_0 abscisses, ce qui donne la figure 2 bien typique d'une transition de phase: avant le seuil, il y a une divergence en $1/x$ (si $n_R \gg n_L$), après le seuil une croissance linéaire avec une pente extrêmement raide ($\frac{\Gamma}{W} \sim 10^{10}$)

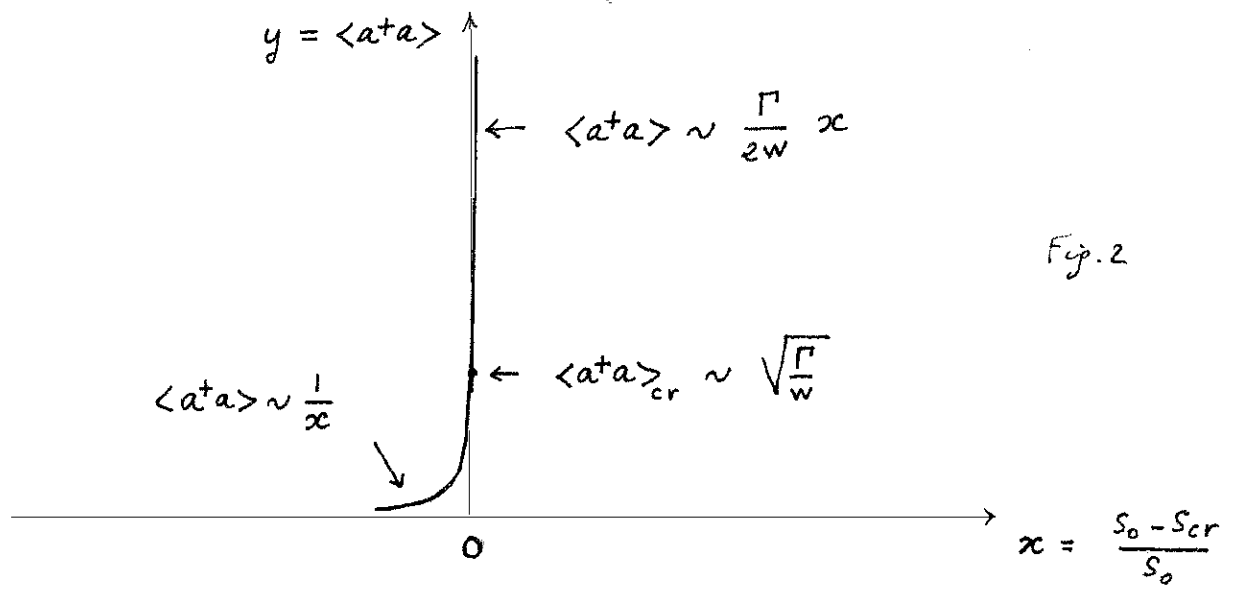


Fig. 2

Etude simple des fluctuations
dans les masers et les lasers (suite)

E - Largeurs de raie - Fluctuations d'intensité.

But de ce § . Après avoir étudié au § D le nombre de photons du mode laser en régime stationnaire, c-à-d lorsqu'un équilibre dynamique a été atteint sous l'effet combiné des processus de pompage et de relaxation, nous allons, dans ce § étudier les fluctuations de phase, d'amplitude et d'intensité du champ laser, et en déduire l'expression de grandeurs physiques importantes comme la largeur spectrale de la lumière laser.

① Fonctions de corrélation caractérisant les fluctuations.

- Les plus fréquemment utilisées sont les fonctions de corrélation :

$$G_1(\tau) = \langle b^\dagger(\tau) b(0) \rangle \quad (VIII-1)$$

$$G_2(\tau) = \langle b^\dagger(0) b^\dagger(\tau) b(\tau) b(0) \rangle \quad (VIII-2)$$

$G_1(\tau)$ et $G_2(\tau)$ ne dépendent que de τ car on considère un régime stationnaire, en réalité un équilibre dynamique (différent cependant de l'équilibre thermodynamique)

- $G_1(\tau)$ caractérise les fluctuations du champ laser (phase et amplitude).

La T.F. de $G_1(\tau)$ représente la densité spectrale du rayonnement telle qu'elle peut être mesurée par un appareil interférentiel (du type Fabry - Pérot ...). La largeur de cette T.F., c-à-d encore l'inverse du temps d'amortissement de $G_1(\tau)$, représente donc la largeur de raie du laser.

- $G_2(\tau)$ caractérise les fluctuations d'intensité du laser.

On peut montrer que $G_2(\tau)$ est reliée à la probabilité de détecter 2 photons séparés par un intervalle de temps τ (comme dans l'expérience de Hanbury - Brown et Twiss par exemple).

- Il est important de noter que, aussi bien dans (VIII-1) que dans (VIII-2), l'ordre des opérateurs est l'ordre normal : les opérateurs de création sont à gauche des opérateurs d'annihilation. On peut montrer que l'origine d'une telle structure tient au fait que G_1 et G_2 sont reliées à des signaux expérimentaux fournis par des détecteurs de photons qui absorbent et donc détruisent les photons. (Un détecteur utilisant l'émission induite plutôt que l'absorption ferait intervenir des fonctions de corrélation où les opérateurs sont rangés dans l'ordre antinormal).

② Méthode générale de calcul de ces fonctions de corrélation.

a) Au dessous du seuil, on peut linéariser les équations de Langevin réduites du mode laser (donnant db/dt , $d(b^\dagger b)/dt$). Les valeurs moyennes $\langle b(t) \rangle$ et $\langle b^\dagger(t) b(t) \rangle$ ^(de croissent donc) varient des constantes de temps respectivement égales à τ_1 et τ_2 et aisément calculables. Le théorème

de régression quantiques appliquée à (VIII-1) et (VIII-2) indique alors que $G_1(\tau)$ et $G_2(\tau)$ décroissent aussi avec les constantes de temps τ_1 et τ_2 . On peut ainsi calculer les temps caractéristiques d'amortissement des fluctuations de phase, d'amplitude et d'intensité en fonction des divers paramètres, et étudier notamment le "ralentissement critique" quand S_0 se rapproche de S_{cr} .

b) Au dessus du seuil, comme l'amplitude est stabilisée, il faut tout d'abord tirer de l'équation de Langevin donnant $\frac{d}{dt} b(\tau)$ 2 équations décrivant séparément les fluctuations de phase et d'amplitude. Les fluctuations d'amplitude (comme d'ailleurs les fluctuations d'intensité) sont étudiées au moyen de l'approximation quasi-linéaire (linéarisation autour de la position d'équilibre), les fluctuations de phase au moyen d'une équation de diffusion dérivée de l'équation de Langevin de la phase. En combinant ces divers résultats, on peut alors obtenir la largeur de raie au laser au dessus du seuil.

Dans toute cette partie, relative à la situation au dessus du seuil, b et b^+ seront traités comme des nombres β et β^* . Nous n'aborderons donc pas les difficultés liées à l'introduction d'un opérateur phase. En fait, une telle manière de procéder peut être justifiée de la manière suivante. A partir des équations de Langevin quantiques, on peut établir (voir chapitre suivant) une équation de Fokker-Planck décrivant l'évolution au cours du temps de la densité de quasiprobabilité $P(\beta, \beta^*)$, permettant de calculer (au moyen des mêmes formules qu'une vraie densité de probabilité) les valeurs moyennes des produits normaux d'opérateurs b et b^+ (b^+b , b^+b^+bb ...). Cette équation de Fokker-Planck peut elle-même être considérée comme dérivée d'équations de Langevin classiques. Aux équations de Langevin quantiques on peut donc associer des équations de Langevin classiques conduisant à la même équation de Fokker-Planck.

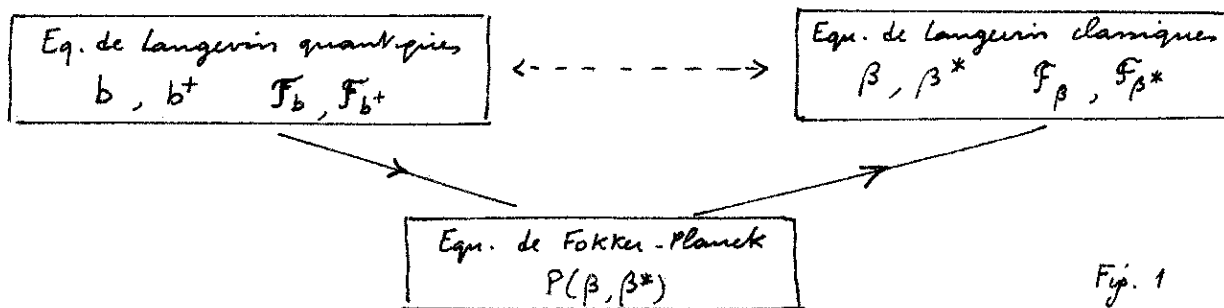


Fig. 1

Le point important est que dans l'équation de Fokker-Planck n'apparaît (à l'ordre le plus bas en ω/Γ et $\omega a/\Gamma$) que le coefficient de diffusion D_{b^+b} (et non D_{bb^+}), ce qui entraîne que les moments des forces classiques F_β et F_{β^*} ne font intervenir que D_{b^+b} .

$$F_\beta(\tau) F_{\beta^*}(\tau') = F_{\beta^*}(\tau) F_\beta(\tau') = 2 D_{b^+b} \delta(\tau - \tau') \quad - (VIII-3)$$

On peut donc oublier le caractère quantique de b et b^+ , à condition de ne pas oublier que D_{b^+b} lorsqu'on s'intéresse à des produits normaux d'opérateurs comme (VIII-1) ou (VIII-2).

c) Au voisinage du seuil enfin, aucune approximation linéaire ou quasi-linéaire n'est possible. La résolution de l'équation de Langevin non linéaire est alors difficile et il est préférable d'utiliser l'équation de Fokker-Planck (voir chapitre suivant).

③ Fluctuations au dessous du seuil

a) Linéarisation de l'équation de Langevin

- Bien au dessous du seuil, on peut négliger le terme non linéaire b^+b de l'équation de Langevin VII-31 qui devient alors

$$\frac{d}{dt} b(t) = p b(t) + F(t) \quad (\text{VIII-4})$$

On en déduit que la valeur moyenne $\langle b(t) \rangle$ s'amortit avec une constante de temps τ ,

$$\tau = -\frac{1}{p} \quad (\text{VIII-5})$$

qui, d'après le théorème de régression quantique, est aussi la constante de temps d'amortissement de $G_1(t)$.

- Il est intéressant d'exprimer τ , en fonction du nombre moyen $\langle b^+b \rangle$ de photons, qui dans la même approximation linéaire, est égal à $-2/p$ [voir VII-40]

$$\tau = \frac{\langle b^+b \rangle}{2} \quad (\text{VIII-6})$$

b) Largeur spectrale de la raie émise

La demi-largeur à mi-hauteur $\Delta\omega$ de la T.F. de $G_1(t)$ est donc égale à $1/\tau$. En revenant aux unités t et $\langle a^+a \rangle$ (voir VII-30), on obtient

$$\Delta\omega = \frac{1}{T\tau} = \frac{2}{T\langle b^+b \rangle} = 2 \frac{\xi^2}{T} \frac{1}{\langle a^+a \rangle} \quad (\text{VIII-7})$$

c-à-d encore, compte tenu de (VII-36)

$$\Delta\omega = \frac{wS_0}{2} \frac{n_A + n_R}{n_A} \frac{1}{\langle a^+a \rangle} \quad (\text{VIII-8})$$

Enfin, on peut éliminer $wS_0/2n_A$ au moyen de (VII-27) et obtenir :

$$\Delta\omega = \kappa \frac{n_A + n_R}{\langle a^+a \rangle} \quad (\text{VIII-9})$$

Cette formule montre clairement que la largeur spectrale de la lumière émise au dessous du seuil est égale à la largeur spectrale κ des modes de la cavité multipliée par un facteur de réduction. Ce facteur de réduction est le rapport du nombre de photons introduits par les sources de bruit (émission spontanée qui en introduit n_A , rayonnement du corps noir qui en introduit n_R) divisé par le nombre moyen $\langle a^+a \rangle$ de photons dans la cavité. (Pour un laser, n_R est négligeable et n_A de l'ordre de 1 au voisinage du seuil. voir bas de la page VII-7). Quand on se rapproche du seuil,

$\langle a^2 \rangle$ augmente de manière très rapide et la cavité émise s'affaiblit considérablement (ralentissement critique).

- On peut également, en utilisant l'expression (VIII-5) de τ , et l'expression (VII-37) de p , mettre $\Delta\omega$ sous la forme

$$\Delta\omega = \frac{W}{2} (S_{cr} - S_0) \quad (\text{VIII-10})$$

qui montre bien la décroissance de $\Delta\omega$ quand S_0 se rapproche de S_{cr} .

Remarque

Supposons que les pertes de la cavité soient essentiellement dues à la fuite des photons à travers les miroirs. La probabilité de sortie d'un photon par unité de temps est alors d'après (VII-26) égale à 2κ . En multipliant 2κ par le nombre de photons $\langle a^2 \rangle$ dans la cavité et l'énergie $\hbar\omega$ d'un photon, on obtient alors la puissance de sortie P

$$P = 2\kappa \langle a^2 \rangle \hbar\omega \quad (\text{VIII-11})$$

On peut alors réexprimer $\Delta\omega$ en fonction de P et obtenir

$$\Delta\omega = \frac{2\kappa^2 \hbar\omega (n_A + n_B)}{P} \quad (\text{VIII-12})$$

qui n'est autre que la formule de Townes et Schawlow.

c) Fluctuations d'intensité

La linéarisation de l'équation (VII-38) montre que $\langle b^+b \rangle$ s'amortit avec une constante de temps $\tau_2 = \frac{-1}{2p}$, 2 fois plus courte que τ_1 ,

$$\tau_2 = \frac{\tau_1}{2} = -\frac{1}{2p} \quad (\text{VIII-13})$$

D'après le théorème de régression quantique, τ_2 est aussi le temps de décroissance de la fonction de corrélation $G_2(\tau)$. La largeur $\Delta\omega_2$ de la T.F. de $G_2(\tau)$ est donc (dans les unités τ, b)

$$\Delta\omega_2 = -2p \quad (\text{VIII-14})$$

Elle tend vers 0 quand on se rapproche du seuil.

④ Fluctuations au dessus du seuil.

a) Fluctuations d'intensité

- Comme l'amplitude est stabilisée au dessus du seuil, il est plus simple de commencer par l'étude des fluctuations d'intensité.

Reprenons pour cela de l'équation (VII-38) qui donne l'évolution de $\langle b^+b \rangle$. Au dessus du seuil ($p \gg 1$), on peut remplacer $\langle b^+b^+b^+b \rangle$ par $\langle b^+b \rangle^2$ et obtenir pour $I = \langle b^+b \rangle$ l'équation d'évolution

$$\frac{d}{dt} I = 2(p-I)I + 4 = V_I \quad (\text{VIII-15})$$

(V_I est la vitesse d'entraînement de I)

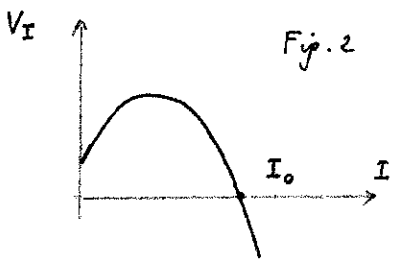


Fig. 2

La figure 2 représente la variations de V_I avec I . On obtient une parabole coupant l'axe des I en I_0 , correspondant à la valeur stationnaire de $\langle b^+b \rangle$ au dessus du seuil (voir VII-45).

L'approximation parabolique consiste à remplacer au voisinage de $I = I_0$, la parabole de la figure 2 par sa tangente en I_0 , ce qui revient

à écrire
$$\frac{d}{dt} I = -\frac{1}{\tau_2} (I - I_0) \tag{VIII-16}$$

avec
$$\frac{1}{\tau_2} = -\left(\frac{dV_I}{dI}\right)_{I=I_0} \tag{VIII-17}$$

- Pour $p \gg 1$, on a $I_0 = p$ (voir VII-46). On peut négliger le terme constant 4 dans (VIII-15), ce qui revient à écrire

$$p \gg 1 \quad \frac{dI}{dt} = 2(p - I)I = 2(I_0 - I)I. \tag{VIII-18}$$

et donne par suite

$$p \gg 1 \quad \frac{1}{\tau_2} = \Delta\omega_2 = 2I_0 = 2p \tag{VIII-19}$$

(Un calcul plus précis utilisant VII-45 au lieu de VII-46 donnerait $\Delta\omega_2 = 2\sqrt{p^2 + 8}$).

On voit ainsi que la largeur $\Delta\omega_2$ de la TF de $G_2(\tau)$ croît comme $2p$ au dessus du seuil (dans les unités τ et b)

- Après s'être ralenties quand on se rapproche du seuil par en dessous (formule VIII-14), les fluctuations d'intensité s'accroissent quand on s'éloigne du seuil par dessus (formule VIII-19). L'interprétation physique de ce résultat est claire. Revenons à la figure 4c de la page VI-8. Quand on s'éloigne du seuil par dessus, le minimum du potentiel effectif au voisinage de la position d'équilibre stable (I_0) devient de plus en plus angé, la force de rappel de plus en plus grande et le retour à l'équilibre de plus en plus rapide.

b) Equations de Langevin pour la phase et l'amplitude

- Comme cela est expliqué dans le § 2 b ci dessus (page VIII-2), on peut traiter b et b^+ comme des nombres β et β^* satisfaisant aux équations de Langevin déduites de (VII-31)

$$\frac{d}{dt} \beta = (p - |\beta|^2) \beta + F_\beta(\tau) \tag{VIII-20}$$

Mais alors que pour les forces quantiques $\langle F_b(\tau) F_{b^+}(\tau') \rangle \neq \langle F_{b^+}(\tau) F_b(\tau') \rangle$ car $D_{b^+b} \neq D_{bb^+}$, les forces classiques F_β et F_{β^*} apparaissant dans

(VIII-20) et l'équation conjuguée ne font sens que si D_{b^+b} est satisfait à (VIII-3), qui avec les unités choisies pour écrire VII-31 devient

$$F_\beta(\tau) F_{\beta^*}(\tau') = F_{\beta^*}(\tau) F_\beta(\tau') = 4 \delta(\tau - \tau') \tag{VIII-21}$$

$$F_\beta(\tau) F_\beta(\tau') = F_{\beta^*}(\tau) F_{\beta^*}(\tau') = 0 \tag{VIII-22}$$

(VIII-22 a été rajouté pour mémoire et est lié à $D_{bb} = D_{b^+b^+} = 0$)

- Séparons dans β la phase et l'amplitude

$$\beta = r e^{-i\varphi} \tag{VIII-23}$$

On obtient alors à partir de l'équation (VIII-20) et de l'équation complexe conjuguée

$$\begin{cases} r e^{-i\varphi} - i r e^{-i\varphi} \dot{\varphi} = (p - r^2) r e^{-i\varphi} + F_{\beta} \\ r e^{i\varphi} + i r e^{i\varphi} \dot{\varphi} = (p - r^2) r e^{i\varphi} + F_{\beta}^* \end{cases} \tag{VIII-24}$$

On en déduit les équations de Langvin suivantes pour $\dot{\varphi}$ et \dot{r}

$$\dot{\varphi} = \frac{1}{2ir} (F_{\beta}^* e^{-i\varphi} - F_{\beta} e^{i\varphi}) \tag{VIII-25}$$

$$\dot{r} = (p - r^2) r + \frac{1}{2} (F_{\beta}^* e^{i\varphi} + F_{\beta} e^{-i\varphi}) \tag{VIII-26}$$

Les résultats concernant les fluctuations d'amplitude sont très voisins de ceux obtenus au § précédent. Elle s'amortissent avec un temps 2 fois plus long que les fluctuations d'intensité. Aussi allons nous plus particulièrement étudier les fluctuations de phase décrites par l'équation (VIII-25)

c) Calcul de $\langle \Delta\varphi \rangle$ et $\langle (\Delta\varphi)^2 \rangle$

- Comme cela a été fait à plusieurs reprises dans ce qui précède, considérons un intervalle de temps $\Delta\tau$ long devant le temps de corrélation ^{des forces} mais court devant le temps d'évolution de la phase, et calculons la moyenne sur les réservoirs de l'accroissement $\Delta\varphi$ de φ au cours de $\Delta\tau$. Intégrons entre τ et $\tau + \Delta\tau$ l'équation (VIII-25). Cette équation est très non linéaire à cause de la présence de $e^{\pm i\varphi}$ et $\frac{1}{r}$ au 2^e membre. En fait l'amplitude étant stabilisée autour de r_0 , nous négligerons les variations de $\frac{1}{r}$ et remplacerons $\frac{1}{r}$ par $\frac{1}{r_0}$. Il vient ainsi :

$$\Delta\varphi(\tau) = \varphi(\tau + \Delta\tau) - \varphi(\tau) = \frac{1}{2ir_0} \left[\int_{\tau}^{\tau + \Delta\tau} dt' F_{\beta}^*(t') e^{-i\varphi(t')} - \int_{\tau}^{\tau + \Delta\tau} dt' F_{\beta}(t') e^{i\varphi(t')} \right] \tag{VIII-27}$$

Par ailleurs, en développant $e^{\pm i\varphi(t')}$ au voisinage de τ , on obtient

$$e^{-i\varphi(t')} = e^{-i\varphi(\tau)} - i e^{-i\varphi(\tau)} \int_{\tau}^{t'} dt'' \dot{\varphi}(t'') + \dots \tag{VIII-28}$$

ce qui donne, lorsqu'on remplace $\dot{\varphi}(t'')$ par son expression (VIII-25)

$$e^{-i\varphi(t')} = e^{-i\varphi(\tau)} - \frac{i}{2ir_0} e^{-i\varphi(\tau)} \left[\int_{\tau}^{t'} dt'' (F_{\beta}^*(t'') e^{-i\varphi(t'')} - F_{\beta}(t'') e^{i\varphi(t'')}) \right] + \dots \tag{VIII-29}$$

On peut de nouveau, en utilisant (VIII-28), remplacer $e^{\mp i\varphi(t'')}$ par $e^{\mp i\varphi(\tau)}$ dans la dernière intégrale de (VIII-29) en ajoutant simultanément d'autres termes d'ordre plus élevé. On obtient ainsi un développement itératif de $e^{\mp i\varphi(t')}$ faisant intervenir $e^{\mp i\varphi(\tau)}$ et des intégrales sur des forces ou des produits de forces. En reportant ce développement dans (VIII-27), on obtient ainsi (compte tenu du fait que F_{β}^* et F_{β} sont complexes conjugués l'une de l'autre) :

$$\begin{aligned} \Delta\varphi(\tau) = & \frac{1}{2ir_0} \left[e^{-i\varphi(\tau)} \int_{\tau}^{\tau + \Delta\tau} dt' F_{\beta}^*(t') - e^{i\varphi(\tau)} \int_{\tau}^{\tau + \Delta\tau} dt' F_{\beta}(t') \right] \\ & - \frac{i}{(2ir_0)^2} \left[e^{-2i\varphi(\tau)} \int_{\tau}^{\tau + \Delta\tau} dt' \int_{\tau}^{t'} dt'' F_{\beta}^*(t') F_{\beta}^*(t'') - \int_{\tau}^{\tau + \Delta\tau} dt' \int_{\tau}^{t'} dt'' F_{\beta}^*(t') F_{\beta}(t'') \right] + C.C. \\ & + \dots \text{ (produits de 3, 4, 5... forces)} \end{aligned} \tag{VIII-30}$$

- Prenons alors la moyenne sur les réservoirs de $\Delta\varphi(t)$
 La 1^{ère} ligne de (VIII-30) donne 0 car $\langle F_{\beta^*} \rangle = \langle F_{\beta} \rangle = 0$
 le 1^{er} terme du crochet de la 2^{ème} ligne donne 0 à cause de (VIII-22)
 le 2^{ème} terme de ce crochet donne un résultat non nul mais imaginaire pur et qui s'annule donc avec son complexe conjugué.

Pour les termes suivants de (VIII-30) il faut faire intervenir le caractère gaussien des forces de Langevin : les moments impairs de F et F^* sont nuls, les moments pairs d'ordre supérieur à 2 s'expriment en fonction des moments d'ordre 2. Par exemple

$$\langle F_{\beta^*}(t_1) F_{\beta}(t_2) F_{\beta}(t_3) F_{\beta^*}(t_4) \rangle = \langle F_{\beta^*}(t_1) F_{\beta}(t_2) \rangle \langle F_{\beta}(t_3) F_{\beta^*}(t_4) \rangle + \langle F_{\beta^*}(t_1) F_{\beta}(t_3) \rangle \langle F_{\beta}(t_2) F_{\beta^*}(t_4) \rangle \quad (VIII-31)$$

On se convainc alors aisément que les termes de la 3^{ème} ligne de (VIII-30) donnent, soit des contributions nulles (produit d'un nombre impair de forces), soit des contributions en $(\Delta t)^2, (\Delta t)^3, \dots$ (il suffit de reporter (VIII-21) dans (VIII-31) pour voir que l'intégrale sur t_1, t_2, t_3, t_4 entre t et $t + \Delta t$ de (VIII-31) donne un résultat proportionnel à $(\Delta t)^2$).

En conclusion $\langle \Delta\varphi \rangle$ est en $(\Delta t)^2$. Si l'on divise $\langle \Delta\varphi \rangle$ par Δt , or on fait tendre Δt vers 0 (tant en le laissant grand devant le temps de corrélation des forces de Langevin), on a donc

$$\boxed{\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\langle \Delta\varphi \rangle}{\Delta t} = 0} \quad (VIII-32)$$

- On peut calculer de la même manière $\langle \Delta\varphi^2 \rangle$ en élevant au carré l'expression (VIII-30). Le caractère gaussien des forces entraîne, comme on vient de le voir, que seuls les termes faisant intervenir un produit de 2 forces contribuent à la limite $\Delta t \rightarrow 0$. Donc il suffit d'élever au carré la 1^{ère} ligne de (VIII-30). D'autre part, d'après (VIII-22), seuls les termes rectangles contribuent. On obtient ainsi

$$\langle \Delta\varphi^2 \rangle = \frac{1}{4r_0^2} \int_t^{t+\Delta t} dt' \int_t^{t+\Delta t} dt'' [\langle F_{\beta^*}(t') F_{\beta}(t'') \rangle + \langle F_{\beta}(t'') F_{\beta^*}(t') \rangle] \quad (VIII-33)$$

La double intégrale se calcule aisément au moyen de (VIII-21) et est égale à $2\Delta t$. Finalement, on obtient

$$\boxed{\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\langle \Delta\varphi^2 \rangle}{2\Delta t} = \frac{1}{r_0^2}} \quad (VIII-34)$$

On trouve donc pour coefficient de diffusion de la phase $1/r_0^2$ ce qui confirme bien la discussion qualitative du § B (voir page VI-10). Plus le nombre de protons r_0^2 est élevé, plus la diffusion de la phase, associée à la diffusion de la particule fictive le long du cercle de rayon r_0 , est lente.

- Enfin, toujours à cause du caractère gaussien des forces, on a

$$\boxed{n > 2 \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\langle \Delta\varphi^n \rangle}{\Delta t} = 0} \quad (VIII-35)$$

d) Equations de diffusion de la phase.

- A l'échelle de temps $\Delta T \gg \tau_c$, la phase φ peut être considérée comme une fonction aléatoire markoffienne (sans mémoire). Comme il s'agit de plus d'un processus à diffusion lente, on peut écrire pour la distribution de probabilité $P(\varphi, \tau)$ de φ une équation de Fokker-Planck généralisée (voir cours 76-77 p. IV-5)

$$\frac{\partial}{\partial \tau} P(\varphi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial \varphi^n} M_n(\varphi) P(\varphi, \tau) \quad (\text{VIII-35})$$

où les "moments" $M_n(\varphi)$ sont définis par

$$M_n(\varphi) = \lim_{\Delta T \rightarrow 0} \frac{1}{n!} \frac{\langle \Delta \varphi^n \rangle}{\Delta T} \quad (\text{VIII-36})$$

Compte tenu de (VIII-32, 34, 35), on obtient alors pour $P(\varphi, \tau)$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} P(\varphi, \tau) = \frac{1}{r_0^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} P(\varphi, \tau) \quad (\text{VIII-37})$$

équation qui n'est autre qu'une équation de diffusion, dont la fonction de Green [solution correspondant à la condition initiale $P(\varphi, 0) = \delta[\varphi - \varphi(0)]$] s'écrit :

$$\left(\frac{4\pi\tau}{r_0^2} \right)^{-1/2} \exp \left\{ - [\varphi(\tau) - \varphi(0)]^2 r_0^2 / 4\tau \right\} \quad (\text{VIII-38})$$

On déduit en particulier de (VIII-38) la moyenne du carré de l'accroissement $\langle [\varphi(\tau) - \varphi(0)]^2 \rangle$ au bout d'un temps τ non nécessairement petit

$$\langle [\varphi(\tau) - \varphi(0)]^2 \rangle = \frac{2\tau}{r_0^2} \quad (\text{VIII-39})$$

e) Fonction de corrélation du champ laser - largeur de raie du laser au dessus du seuil.

- En reportant (VIII-23) dans l'expression (VIII-1) de $G_1(\tau)$, on obtient

$$G_1(\tau) = \langle r(\tau) r(0) e^{i[\varphi(\tau) - \varphi(0)]} \rangle \quad (\text{VIII-40})$$

Comme l'amplitude est stabilisée au dessus du seuil, on commet une erreur négligeable en remplaçant dans (VIII-40) $r(\tau) r(0)$ par le nombre r_0^2 , ce qui donne

$$G_1(\tau) = r_0^2 \langle e^{i[\varphi(\tau) - \varphi(0)]} \rangle \quad (\text{VIII-41})$$

D'après (VIII-38) $\varphi(\tau) - \varphi(0)$ est une variable aléatoire gaussienne dont le crochet de (VIII-41) n'est autre que la fonction caractéristique. Par T.F. de (VIII-38), on a alors, compte tenu de (VIII-39)

$$\langle e^{i[\varphi(\tau) - \varphi(0)]} \rangle = e^{-\frac{1}{2} \langle [\varphi(\tau) - \varphi(0)]^2 \rangle} = e^{-\frac{\tau}{r_0^2}} \quad (\text{VIII-42})$$

On a donc finalement

$$G_1(\tau) = r_0^2 e^{-\frac{\tau}{r_0^2}} \quad (\text{VIII-43})$$

- Le temps d'amortissement τ_1 des fluctuations du champ laser est donc

$$\tau_1 = r_0^2 = \langle b^+ b \rangle \quad (\text{VIII-44})$$

En comparant (VIII-44) à (VIII-6), on voit que τ_1 est toujours proportionnel à $\langle b^+ b \rangle$ que l'on soit au dessus ou au dessous du seuil, le coefficient de proportionnel étant cependant 2 fois plus grand au dessus du seuil qu'au dessous.

On en déduit pour la largeur de raie du laser

$$\Delta\omega = \frac{1}{\tau_1} = \begin{cases} \frac{2}{\langle b^+ b \rangle} & \text{au dessus du seuil} \\ \frac{1}{\langle b^+ b \rangle} & \text{au dessous du seuil} \end{cases} \quad (\text{VIII-45})$$

Comme $\langle b^+ b \rangle$ croît de manière spectaculaire au dessus du seuil, on voit que la largeur de raie du laser décroît aussi de manière spectaculaire.

On peut considérer que le facteur 2 de différence entre les 2 expressions (VIII-45) vient au fait qu'au dessus du seuil les fluctuations de phase et d'amplitude jouent toutes les 2 un rôle, alors qu'au dessous du seuil, seules les fluctuations de phase subsistent.

- En revenant aux unités t et $\langle a^+ a \rangle$, on peut, par des calculs tout à fait analogues à ceux de la page VIII-3 obtenir :

$$\Delta\omega = \frac{1}{T\tau_1} = \frac{\xi^2}{T} \frac{1}{\langle a^+ a \rangle} = \frac{w S_0}{4} \frac{n_A + n_R}{n_A} \frac{1}{\langle a^+ a \rangle} = \frac{K}{2} \frac{n_A + n_R}{\langle a^+ a \rangle} \quad (\text{VIII-46})$$

L'avant dernière expression (VIII-46) peut être très simplement interprétée dans le domaine optique où $n_R \ll n_A$ de sorte que $(n_A + n_R)/n_A = 1$. On a alors en multipliant le numérateur et le dénominateur de (VIII-46) par le carré E_0^2 du champ associé à un photon (on se rappelle que S_0 est le nombre N_2 d'atomes dans le niveau supérieur, puisque $N_1 = 0$) :

$$\Delta\omega = \frac{1}{4} \frac{N_2 w E_0^2}{\langle a^+ a \rangle E_0^2} \quad (\text{VIII-47})$$

Chaque processus d'émission spontanée fait apparaître un champ E_0 (petites flèches de la figure 3). Par

secondes on a $w N_2$ tels processus. Comme ils sont incohérents, il faut ajouter les carrés (et non les amplitudes). Donc $N_2 w E_0^2$ représente le carré moyen du champ spontané émis en 1 seconde (carré du vecteur AB de la figure 3).

Le dénominateur de (VIII-47) est le carré du champ laser (carré du rayon du cercle de la figure 3).

$\Delta\omega$ représente donc (au facteur $\frac{1}{4}$ près) la moyenne du carré du déphasage du champ laser introduit pendant 1 seconde par l'émission spontanée.

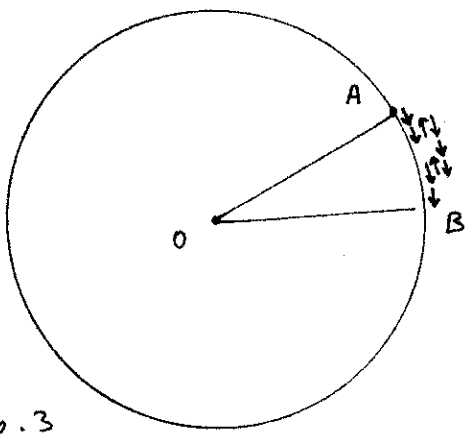


Fig. 3

aux équations de Langevin quantiques du laser

But de ce §

Montrer comment on peut déduire de l'équation de Langevin réduite du mode laser obtenue au chapitre précédent (§ C) une équation de Fokker-Planck.

La résolution de cette équation permet de préciser ce qui se passe au voisinage immédiat du seuil et de raccorder les uns avec les autres, les divers résultats fournis par les approximations (linéaire, parabolique, quasi-linéaire) introduites au chapitre précédent.

A - Rappels sur les densités de quasi-probabilité associées à un oscillateur harmonique.

La fonction $P(\alpha, \alpha^*, t)$ dont l'équation de Fokker-Planck décrit l'évolution ne peut être une vraie densité de probabilité car a et a^+ ne commutent pas entre eux (il est impossible de mesurer simultanément la phase et l'amplitude du champ). C'est une densité de quasi-probabilité dont nous rappelons ci-dessous les propriétés essentielles.

① Etats cohérents $\{|\alpha\rangle\}$ de l'oscillateur harmonique

Nous nous contentons ici de donner les formules essentielles pour la suite (voir références à la fin du cours)

- Définition

$$\begin{aligned} a|\alpha\rangle &= \alpha|\alpha\rangle \\ \langle\alpha|a^+ &= \alpha^*\langle\alpha| \end{aligned} \quad (IX-1)$$

- Développement sur les états $\{|n\rangle\}$

$$\begin{aligned} |\alpha\rangle &= e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \\ &= e^{-\frac{1}{2}\alpha^*\alpha} e^{\alpha a^+} |0\rangle \end{aligned} \quad (IX-2)$$

Loi de Poisson pour la probabilité de trouver n photons dans l'état $|\alpha\rangle$

- Produit scalaire et relation de fermeture

$$|\langle\alpha|\beta\rangle|^2 = e^{-|\alpha-\beta|^2} \quad \frac{1}{\pi} \int d^2\alpha |\alpha\rangle\langle\alpha| = 1 \quad (IX-3)$$

② Densité de quasi-probabilité $P(\alpha)$ adaptée aux produits normaux d'opérateurs

a) Définition

L'opérateur densité ρ admet une représentation $P(\alpha)$ [plus précisément $P(\alpha, \alpha^*)$], s'il est possible de le mettre sous la forme d'une superposition linéaire des projecteurs $|\alpha\rangle\langle\alpha|$

$$\rho = \int d^2\alpha P(\alpha) |\alpha\rangle\langle\alpha| \quad (IX-4)$$

(b) Propriétés de $P(\alpha)$

(i) $\rho = \rho^+ \implies P(\alpha)$ réel (IX-5)

(ii) $\text{Tr} \rho = 1 \implies \int d^2\alpha P(\alpha) \text{Tr}(|\alpha\rangle\langle\alpha|) = \int d^2\alpha P(\alpha) \langle\alpha|\alpha\rangle = 1$
 $\int d^2\alpha P(\alpha) = 1$ (1X-6)

(iii) Valeur moyenne d'un produit normal $(a^\dagger)^l a^m$
 $\langle (a^\dagger)^l a^m \rangle = \text{Tr} \rho a^{\dagger l} a^m = \int d^2\alpha P(\alpha) \text{Tr}(a^{\dagger l} a^m |\alpha\rangle\langle\alpha|)$
 $= \int d^2\alpha P(\alpha) \langle\alpha| a^{\dagger l} a^m |\alpha\rangle = \int d^2\alpha \alpha^{*l} \alpha^m P(\alpha)$
 $\langle (a^\dagger)^l a^m \rangle = \int d^2\alpha P(\alpha) \alpha^{*l} \alpha^m$ (1X-7)

(c) Pourquoi $P(\alpha)$ est-elle appelée une densité de quasi-probabilité ?

Les expressions (1X-5, 6, 7) font que $P(\alpha)$ ressemble beaucoup à une densité de probabilité de α et α^* . En fait, il est possible de trouver des états du champ pour lesquels $P(\alpha)$ prend des valeurs négatives dans le plan complexe de α , ce qui montre que $P(\alpha)$ n'est pas une vraie densité de probabilité. Enfin, les opérateurs antinormaux $a^m a^{\dagger l}$ ne donnent pas de formule simple comme (1X-7) avec $P(\alpha)$. Il leur correspond une autre densité de quasi-probabilité (voir § 3 suivant).

(d) Exemples de fonctions $P(\alpha)$

(i) Champ dans un état cohérent $|\alpha_0\rangle$ $P(\alpha) = \delta(\alpha - \alpha_0)$ (1X-8)

(ii) Champ à l'équilibre thermodynamique caractérisé par $n_0 = (e^{\hbar\omega/kT} - 1)^{-1}$ $P(\alpha) = \frac{1}{\pi n_0} e^{-\frac{|\alpha|^2}{n_0}}$ (1X-9)

③ Densité de quasi-probabilité $\mathcal{P}(\alpha)$ adaptée aux produits antinormaux

a) Définition $\mathcal{P}(\alpha) = \frac{1}{\pi} \langle\alpha|\rho|\alpha\rangle$ (1X-9-bis)

b) Propriétés
 (i) $\rho = \rho^\dagger \implies \mathcal{P}(\alpha)$ réel (1X-10)

(ii) $\text{Tr} \rho = 1 \implies \int d^2\alpha \mathcal{P}(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int d^2\alpha \langle\alpha|\rho|\alpha\rangle = \text{Tr}(\rho \int d^2\alpha \frac{|\alpha\rangle\langle\alpha|}{\pi}) = 1$
 (On a utilisé 1X-3) $\int d^2\alpha \mathcal{P}(\alpha) = 1$ (1X-11)

(iii) Valeur moyenne d'un produit antinormal d'opérateurs $a^m (a^\dagger)^l$
 $\langle a^m a^{\dagger l} \rangle = \text{Tr}(\rho a^m a^{\dagger l}) = \text{Tr}(a^{\dagger l} \rho a^m)$
 $= \text{Tr}(a^{\dagger l} \rho a^m \frac{1}{\pi} \int d^2\alpha |\alpha\rangle\langle\alpha|) = \frac{1}{\pi} \int d^2\alpha \text{Tr}(a^{\dagger l} \rho a^m |\alpha\rangle\langle\alpha|)$
 $= \frac{1}{\pi} \int d^2\alpha \langle\alpha| a^{\dagger l} \rho a^m |\alpha\rangle = \frac{1}{\pi} \int d^2\alpha \alpha^{*l} \alpha^m \langle\alpha|\rho|\alpha\rangle$
 $\langle a^m a^{\dagger l} \rangle = \int d^2\alpha \mathcal{P}(\alpha) \alpha^m \alpha^{*l}$ (1X-12)

Suivant le type de produits d'opérateurs auxquels on s'intéresse, on peut donc introduire une densité de quasi-probabilité conduisant à des formules très simples pour les moyennes de ces produits d'opérateurs.

B. Etablissement de l'équation de Fokker-Planck pour $P(\alpha)$

① Principe du calcul

- On considère à l'instant t l'opérateur

$$M^{(n)}(\alpha^+, \alpha) = e^{\lambda \alpha^+} e^{\mu \alpha} \quad (IX-13)$$

où λ et μ sont des nombres complexes et α et α^+ les opérateurs de création ^(et d'annihilation) de l'oscillateur harmonique associé au mode laser (α^+ et α sont des opérateurs de S commutant avec les opérateurs des réservoirs R).

$M^{(n)}(\alpha^+, \alpha)$ est un opérateur, rangé sous forme normale, très général, à partir duquel on peut par exemple exprimer tout produit de puissances de α^+ et α rangé sous forme normale

$$(\alpha^+)^l \alpha^m = \left. \frac{\partial^l}{\partial \lambda^l} \frac{\partial^m}{\partial \mu^m} M^{(n)}(\alpha^+, \alpha) \right|_{\lambda=\mu=0} \quad (IX-14)$$

- Adoptant tout d'abord le point de vue de Heisenberg, on calcule à partir des équations de Langevin de α et α^+ , l'accroissement de $M^{(n)}(\alpha^+, \alpha)$ entre t et $t+\Delta t$ (avec $T_R \gg \Delta t \gg T_C$). On détermine ainsi la vitesse de variation (linéaire) $\frac{d}{dt} \langle M^{(n)}(\alpha^+, \alpha) \rangle$.

- Adoptant ensuite le point de vue de Schrödinger, et utilisant le fait que la valeur moyenne de l'opérateur normal $M^{(n)}(\alpha^+, \alpha)$ peut s'exprimer en fonction de la densité de probabilité $P(\alpha, t)$, on obtient une 2^{ème} expression pour $\frac{d}{dt} \langle M^{(n)}(\alpha^+, \alpha) \rangle$ faisant intervenir $\frac{\partial}{\partial t} P(\alpha, t)$.

- Identifiant les 2 expressions ainsi obtenues, on en déduit une équation pour $\frac{\partial}{\partial t} P(\alpha, t)$.

② Correspondance entre grandeurs quantiques et classiques

- À l'opérateur quantique $M^{(n)}(\alpha^+, \alpha)$ on peut associer une grandeur classique (représentée par une lettre ronde)

$$M^{(n)}(\alpha^*, \alpha) = e^{\lambda \alpha^*} e^{\mu \alpha} \quad (IX-14)$$

obtenue en remplaçant dans $M^{(n)}(\alpha^+, \alpha)$, α^+ par α^* , α par α .

D'après la propriété IX-7 de $P(\alpha)$ on peut écrire :

$$\langle M^{(n)}(\alpha^+, \alpha) \rangle = \int d^2\alpha P(\alpha) M^{(n)}(\alpha^*, \alpha) \quad (IX-15)$$

- Réciproquement à toute expression classique $G(\alpha^*, \alpha)$, on peut associer un opérateur normal $G^{(n)}(\alpha^+, \alpha)$ obtenu par "l'opération \mathcal{N} " qui consiste, (i) à ranger dans $G(\alpha^*, \alpha)$ les α^* à gauche des α , (ii) à remplacer α^* par α^+ , α par α .

$$G^{(n)}(\alpha^+, \alpha) = \mathcal{N} G(\alpha^*, \alpha) \quad (IX-16)$$

Exemples

$$M^{(n)}(\alpha^+, \alpha) = \mathcal{N} M^{(n)}(\alpha^*, \alpha) \quad (IX-17)$$

$$\lambda e^{\lambda \alpha^+} G^{(n)}(\alpha^+, \alpha) e^{\mu \alpha} = \mathcal{N} (G(\alpha^*, \alpha) \lambda e^{\lambda \alpha^*} e^{\mu \alpha}) = \mathcal{N} \left[G(\alpha^*, \alpha) \frac{\partial}{\partial \alpha^*} M^{(n)}(\alpha^*, \alpha) \right] \quad (IX-19)$$

$$\lambda \mu e^{\lambda a^+} G^{(n)}(a^+, a) e^{\mu a} = \mathcal{N} [g(\alpha^*, \alpha) \lambda \mu e^{\lambda \alpha^*} e^{\mu \alpha}]$$

$$= \mathcal{N} [g(\alpha^*, \alpha) \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \alpha^*} M^{(n)}(\alpha^*, \alpha)] \quad (1X-19)$$

Les 2 derniers exemples montrent comment on peut éliminer les coefficients λ et μ au profit de dérivations de $M^{(n)}(\alpha^*, \alpha)$ par rapport à α^* et α .

③ Utilisation des équations de Langevin.

a) Calcul de $\Delta M^{(n)}$

- Si Δa^+ et Δa sont les accroissements de a^+ et a pendant l'intervalle de temps Δt , on a :

$$\Delta M = e^{\lambda(a^+ + \Delta a^+)} e^{\mu(a + \Delta a)} - e^{\lambda a^+} e^{\mu a} \quad (1X-20)$$

- Considérons tout d'abord le cas où $[a^+, \Delta a^+] = [a, \Delta a] = 0$.

C'est notamment le cas pour le modèle simple d'oscillateur harmonique amorti étudié plus haut [page 4-7]. Δa^+ s'écrit en effet en fonction de a^+ et des forces de Langevin qui ne dépendent que d'opérateurs du réservoir commutant avec a^+ . On a dans ce cas

$$\Delta M = e^{\lambda a^+} [e^{\lambda \Delta a^+} e^{\mu \Delta a} - 1] e^{\mu a}$$

$$= e^{\lambda a^+} [\lambda \Delta a^+ + \mu \Delta a + \frac{\lambda^2}{2} (\Delta a^+)^2 + \frac{\mu^2}{2} (\Delta a)^2 + \lambda \mu \Delta a^+ \Delta a + \dots] e^{\mu a} \quad (1X-21)$$

- Si $[a^+, \Delta a^+]$ et $[a, \Delta a]$ ne sont pas nuls, il faut partir de la formule de Baker-Hausdorff [voir Weiss et Maradudin J. Math. Phys. 3, 771 (1962)] :

$$e^x e^y = e^{\mathfrak{z}} \quad (1X-22)$$

où \mathfrak{z} est une somme de polynômes de degrés croissant en x et y

$$\mathfrak{z} = x + y + \frac{1}{2} [x, y] + \frac{1}{12} [[x, y], y] + \frac{1}{12} [[y, x], x] + \dots \quad (1X-23)$$

En écrivant $e^{-x} e^{x+y} = e^{\mathfrak{z}'}$ puis $e^{-y} e^{\mathfrak{z}'} = e^{\mathfrak{z}''}$, puis en calculant \mathfrak{z}' et \mathfrak{z}'' au moyen de (1X-22) et (1X-23), on démontre aisément que

$$e^{x+y} = e^x e^y e^{-\frac{1}{2} [x, y]} + \text{termes d'ordre 3} \dots \quad (1X-24)$$

de sorte qu'à l'ordre 2 inclus en λ , on a

$$e^{\lambda(a^+ + \Delta a^+)} = e^{\lambda a^+} e^{\lambda \Delta a^+} e^{-\frac{1}{2} \lambda^2 [a^+, \Delta a^+]} + \dots$$

$$= e^{\lambda a^+} [1 + \lambda \Delta a^+ + \frac{\lambda^2}{2} (\Delta a^+)^2 + \dots] [1 - \frac{\lambda^2}{2} [a^+, \Delta a^+] + \dots] \quad (1X-25)$$

et de même, en prenant l'adjoint de (1X-25) et en remplaçant λ par μ

$$e^{\mu(a + \Delta a)} = [1 - \frac{\mu^2}{2} [\Delta a, a] + \dots] [1 + \mu \Delta a + \frac{\mu^2}{2} (\Delta a)^2 + \dots] e^{\mu a} \quad (1X-26)$$

- On en déduit finalement que

$$\Delta M = e^{\lambda a^+} [\lambda \Delta a^+ + \mu \Delta a + \frac{\lambda^2}{2} (\Delta a^+)^2 + \frac{\mu^2}{2} (\Delta a)^2 + \lambda \mu \Delta a^+ \Delta a + \dots$$

$$- \frac{\lambda^2}{2} [a^+, \Delta a^+] - \frac{\mu^2}{2} [\Delta a, a] + \dots] e^{\mu a} \quad (1X-27)$$

Notons que dans la 1^{ère} ligne $\Delta a^+ \Delta a$ apparaît et non $\Delta a \Delta a^+$.

Le fait d'arrêter le développement à l'ordre 2 inclus en λ et μ est, pour la 1^{ère} ligne, justifié par le caractère gaussien des forces, pour la 2^{ème} ligne par la petiteur des termes associés aux commutateurs (voir plus loin)

b) Vitesse de variation de $\langle M^{(n)} \rangle$

- Divisons les 2 membres de (IX-27) par Δt et prenons la moyenne sur les réservoirs. Des termes en Δa^+ et Δa donnent naissance aux vitesses d'entraînement V_{a^+} et V_a apparaissant dans les équations de Langevin

$$\frac{d}{dt} a^+ = V_{a^+} + F_{a^+} \quad \frac{d}{dt} a = V_a + F_a \quad (\text{IX-28})$$

Les termes en $(\Delta a^+)^2$, $(\Delta a)^2$, $(\Delta a^+ \Delta a)$ avec coefficients de diffusion $D_{a^+ a^+}$, $D_{a a}$, $D_{a^+ a}$ (on ne met pas de \wedge sur F_a , F_{a^+} et les coefficients de diffusion pour simplifier les notations). On obtient ainsi l'équation suivante pour la vitesse de variation (linéaire) de $\langle M^{(n)} \rangle_R$

$$\frac{d}{dt} \langle M^{(n)} \rangle_R = \langle e^{\lambda a^+} \left[\lambda V_{a^+} + \mu V_a + \lambda^2 D_{a^+ a^+} + \mu^2 D_{a a} + 2\lambda\mu D_{a^+ a} + \dots - \frac{\lambda^2}{2} [a^+, V_{a^+}] - \frac{\mu^2}{2} [V_a, a] + \dots \right] e^{\mu a} \rangle_R \quad (\text{IX-29})$$

- Si l'on revient à l'expression de V_a tirée de l'équation de Langevin (VII-8) du mode laser, on voit que

$$[V_a, a] = -\frac{w^2}{\Gamma} S_0 [a^+ a a, a] = \frac{w^2}{\Gamma} S_0 a^2 \quad (\text{IX-30})$$

$[V_a, a]$ est donc de l'ordre de $w S_0 \left(\frac{w a^+ a}{\Gamma}\right)$, c-à-d $\frac{w a^+ a}{\Gamma}$ fois plus petit que $D_{a^+ a}$ qui est de l'ordre de $w S_0$. Comme on fait un calcul à l'ordre le plus bas en $w a^+ a / \Gamma$, on peut donc négliger la contribution de $[V_a, a]$, de même que celle de $[a^+, V_{a^+}]$ (Des termes d'ordre de grandeur comparable ont été négligés dans le calcul de $D_{a^+ a}$). Comme, d'après le tableau VII-13, $D_{a^+ a^+}$ et $D_{a a}$ sont nuls, on obtient à l'ordre le plus bas en $w a^+ a / \Gamma$

$$\frac{d}{dt} \langle M^{(n)} \rangle_R = \langle e^{\lambda a^+} \left(\lambda V_{a^+} + \mu V_a + 2\lambda\mu D_{a^+ a} \right) e^{\mu a} \rangle_R \quad (\text{IX-31})$$

Il apparaît clairement sur (IX-29) et (IX-31) que seul $D_{a^+ a}$ apparaît dans la vitesse de variation de $\langle M^{(n)} \rangle_R$ (et non $D_{a^+ a^+}$)

- Enfin, on peut utiliser les équations (IX-18) et (IX-19) pour faire disparaître les coefficients λ et μ apparaissant au 2^{ème} membre de (IX-31). En appelant \mathcal{V}_{α^*} , \mathcal{V}_α , $\mathcal{D}_{\alpha^* \alpha}$ les grandeurs clempques correspondant à V_{a^+} , V_a , $D_{a^+ a}$ (qui sont tous des opérateurs rangés sous forme normale - voir VII-8), on obtient :

$$\frac{d}{dt} \langle \mathcal{N} M^{(n)}(\alpha^*, \alpha) \rangle = \langle \mathcal{N} \left\{ \mathcal{V}_{\alpha^*} \frac{\partial}{\partial \alpha^*} M^{(n)}(\alpha^*, \alpha) + \mathcal{V}_\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} M^{(n)}(\alpha^*, \alpha) + 2\mathcal{D}_{\alpha^* \alpha} \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \alpha^*} M^{(n)}(\alpha^*, \alpha) \right\} \rangle \quad (\text{IX-32})$$

④ Point de vue de Schrödinger.

- Dans le point de vue de Schrödinger, c'est $P(\alpha)$ et non $M^{(n)}(\alpha^*, \alpha)$ qui dépend de t dans (IX-15). On en déduit que

$$\frac{d}{dt} \langle \mathcal{N} M^{(n)}(\alpha^*, \alpha) \rangle = \int d^2 \alpha \frac{\partial P(\alpha, t)}{\partial t} M^{(n)}(\alpha^*, \alpha) \quad (\text{IX-33})$$

- Comme d'autre part l'opérateur figurant au 2^{ème} membre de (IX-32) est sous forme normale, on peut écrire ce 2^{ème} membre sous la forme

$$\int d^2\alpha P(\alpha, t) \left[v_{\alpha^*} \frac{\partial}{\partial \alpha^*} m^{(n)} + v_{\alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} m^{(n)} + 2 \mathcal{D}_{\alpha^* \alpha} \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \alpha^*} m^{(n)} \right] \quad (IX-34)$$

c-à-d encore, en effectuant une intégration par parties simple ou double et en utilisant le fait que $P(\alpha, t)$ s'annule pour $|\alpha| \rightarrow \infty$

$$\int d^2\alpha m^{(n)}(\alpha^* \alpha) \left[-\frac{\partial}{\partial \alpha^*} (v_{\alpha^*} P(\alpha, t)) - \frac{\partial}{\partial \alpha} (v_{\alpha} P(\alpha, t)) + 2 \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \alpha^*} (\mathcal{D}_{\alpha^* \alpha} P(\alpha, t)) \right] \quad (IX-35)$$

- En identifiant (IX-33) et (IX-35) et en utilisant le fait que dans $m^{(n)}(\alpha^* \alpha)$, λ et μ sont conjugués, on obtient finalement l'équation de Fokker-Planck

$$\frac{\partial}{\partial t} P(\alpha, \alpha^*, t) = -\frac{\partial}{\partial \alpha^*} \left[v_{\alpha^*}(\alpha, \alpha^*) P(\alpha, \alpha^*, t) \right] - \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[v_{\alpha}(\alpha, \alpha^*) P(\alpha, \alpha^*, t) \right] + 2 \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \alpha^*} \left[\mathcal{D}_{\alpha^* \alpha} P(\alpha, \alpha^*, t) \right] \quad (IX-36)$$

⑤ Diverses formes de l'équation de Fokker-Planck

a) Variables b et τ (voir VII-30)

Soient β et β^* les nombres correspondant à b et b^* . En utilisant les valeurs de v_{β^*} , v_{β} , $\mathcal{D}_{\beta^* \beta}$ tirés de (VII-31) et (VII-32) on obtient :

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial \tau} P(\beta, \beta^*, \tau) = -\frac{\partial}{\partial \beta} [(p - |\beta|^2) \beta P] - \frac{\partial}{\partial \beta^*} [(p - |\beta|^2) \beta^* P] + 4 \frac{\partial^2 P}{\partial \beta \partial \beta^*}} \quad (IX-37)$$

b) Variables x et y

Si l'on pose $\beta = x - iy$ $\beta^* = x + iy$ (IX-38)
on obtient à partir de (IX-37)

$$\frac{\partial}{\partial \tau} P(x, y, \tau) = -\frac{\partial}{\partial x} [(p - x^2 - y^2) x P] - \frac{\partial}{\partial y} [(p - x^2 - y^2) y P] + \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} \quad (IX-39)$$

c) Variables r et φ

Si l'on pose $\beta = r e^{-i\varphi}$ (IX-40)
on obtient à partir de (IX-37)

$$\frac{\partial P}{\partial \tau} = H_r P + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 P}{\partial \varphi^2} \quad (IX-41)$$

$$\text{avec } H_r P \equiv \frac{\partial}{\partial r} \left[(r^3 - pr - \frac{1}{r}) P \right] + \frac{\partial^2}{\partial r^2} P \quad (IX-42)$$

d) Variables $\rho = r^2$ et φ

Enfin, si l'on pose $\rho = r^2$ (IX-43)
on obtient

$$\frac{\partial P}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \rho} [(2\rho^2 - 2p\rho - 4) P] + \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} (4\rho P) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 P}{\partial \varphi^2} \quad (IX-44)$$

① Distribution de probabilité du champ en régime stationnairea) Calcul de la solution stationnaire de l'équation de Fokker-Planck.

- La solution stationnaire correspond à $\frac{\partial P}{\partial t} = 0$. Partons par exemple de (IX-39). Il vient

$$0 = - \frac{\partial}{\partial x} \left[A_x P - \frac{\partial P}{\partial x} \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left[A_y P - \frac{\partial P}{\partial y} \right] \quad (\text{IX-45})$$

où l'on a posé

$$A_x = (p - x^2 - y^2) x \quad A_y = (p - x^2 - y^2) y \quad (\text{IX-46})$$

- Or il est facile de voir que A_x et A_y sont les gradients d'une fonction de r

$$A_x = - \frac{\partial}{\partial x} V(r) \quad A_y = - \frac{\partial}{\partial y} V(r) \quad (\text{IX-47})$$

où

$$V(r) = - p \frac{r^2}{2} + \frac{r^4}{4} \quad (\text{IX-48})$$

n'est autre que le potentiel effectif (dans les unités b, τ) introduit dans la partie qualitative B du chapitre précédent (somme d'un potentiel parabolique dont la courbure s'annule au seuil et change de signe, et d'un potentiel de degré 4).

- On voit alors que l'on peut annuler simultanément les 2 crochets de (IX-45) si l'on pose

$$P = e^{-V(r)} \quad (\text{IX-49})$$

De plus, $P(r)$ tend bien vers 0 quand $r \rightarrow \infty$ et peut être normée. On peut toujours écrire $- \frac{p}{2} r^2 + \frac{r^4}{4} = \frac{1}{4} (r^2 - p)^2 - \frac{p^2}{4}$ et faire rentrer $e^{-p^2/4}$ dans le facteur de normalisation.

Finalement, la densité P correspondant à l'état stationnaire est indépendante de φ (symétrie de révolution) et peut s'écrire, avec la condition de normalisation $\int_0^\infty dr r P(r) = 1$

$$P(r) = N^{-1} e^{-\frac{1}{4}(r^2 - p)^2} \quad (\text{IX-50})$$

avec

$$N = \int_0^\infty r dr e^{-\frac{1}{4}(r^2 - p)^2} = \int_{-p/2}^\infty e^{-u^2} du \quad (\text{IX-51})$$

b) Allure de $P(r)$

- Si l'on porte en abscisse r^2 , en ordonnées P , on obtient une gaussienne centrée en p , de largeur totale (à $1/e$) égale à 4 (voir figure 1 - Contour tracé des références données à la fin des cours)

- Si l'on porte par contre $P(r)$ en fonction de r , il faut effectuer une transformation sur l'axe des abscisses de la figure 1. On obtient une variation plus douce au voisinage de $r=0$ (Vergence horizontale) et une décroissance plus brutale après le maximum (voir figure 2 qui donne l'allure générale).

Fig 1

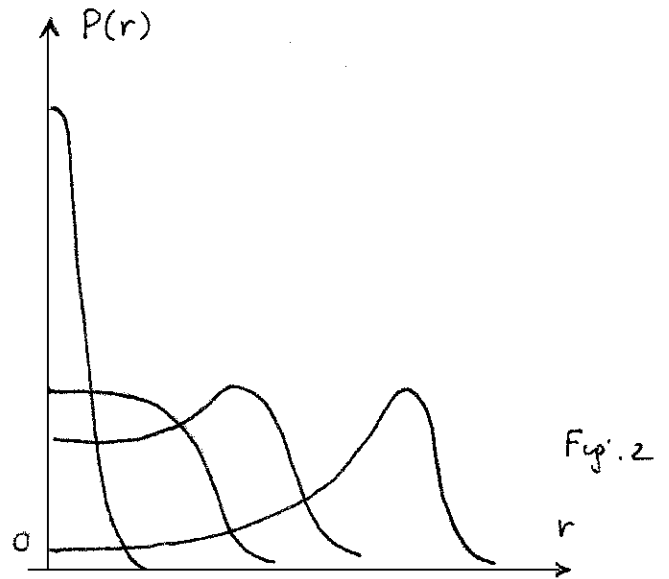
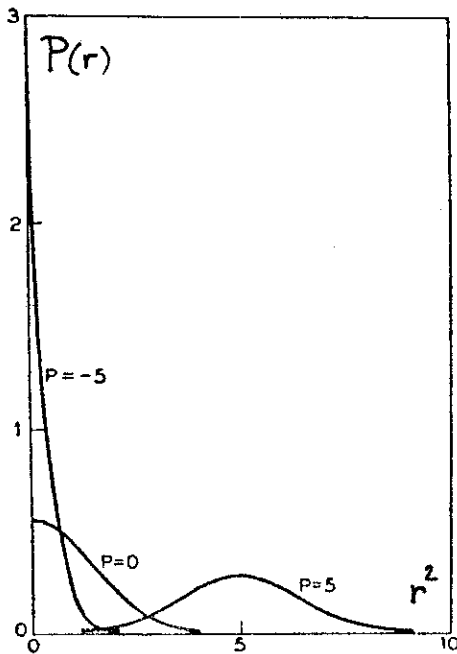


Fig. 2

c) Nombre moyen de photons en régime stationnaire.

Connaissant $P(r)$, on peut calculer

$$\langle b^\dagger b \rangle = \int_0^\infty r^2 P(r) r dr$$

en régime stationnaire, pour chaque valeur du paramètre de pompage. On obtient la courbe en traits pleins de la figure 3 qui raccorde bien les résultats fournis par l'approximation gaussienne et l'approximation quasi-linéaire (voir discussion du § D du chapitre précédent)

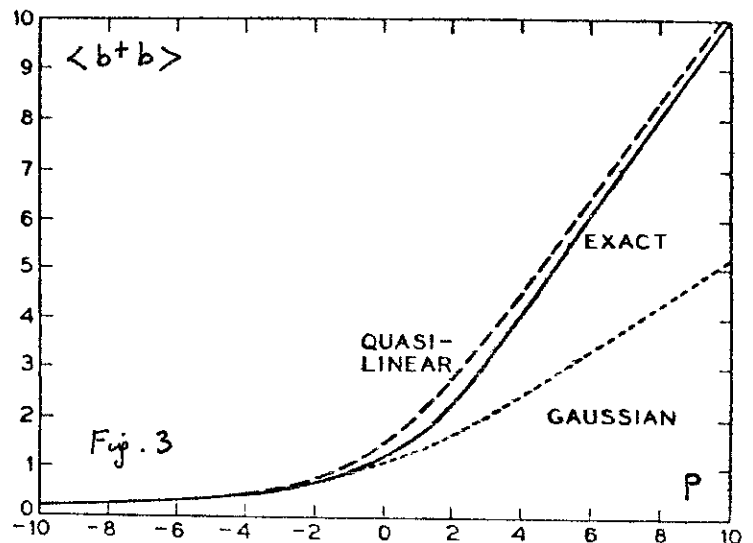


Fig. 3

d) Moments d'ordre supérieur.

Comme $P(r)$ est connue, on peut calculer :

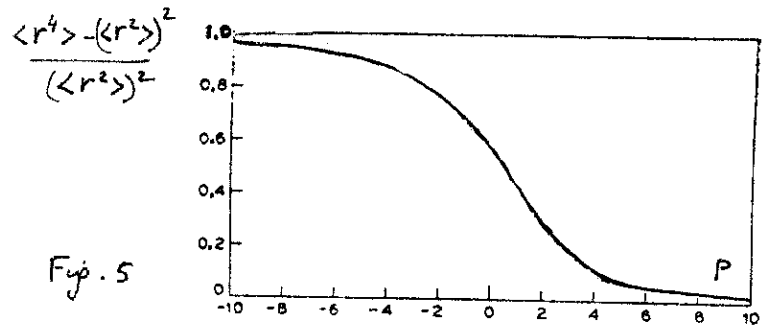
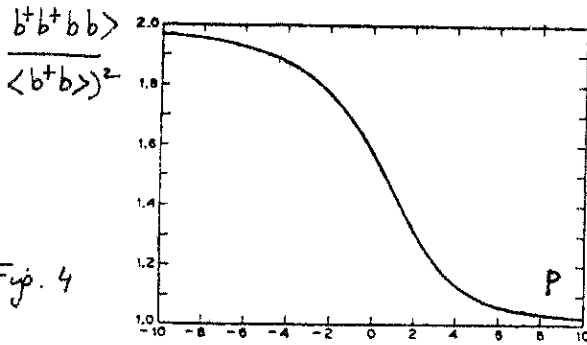
$$\frac{\langle b^\dagger b^\dagger b b \rangle}{(\langle b^\dagger b \rangle)^2} = \frac{\int_0^\infty r^4 P(r) r dr}{\left(\int_0^\infty r^2 P(r) r dr \right)^2} \quad (IX-52)$$

Le résultat représenté sur la figure 4 montre bien que ce rapport évolue depuis 2 au dessus du seuil, c-à-d pour $p < 0$ (approximation gaussienne) jusqu'à 1 au dessus du seuil (approximation quasi-linéaire)

Si l'on retranche 1 à la courbe précédente, on obtient

$$\frac{\langle r^4 \rangle - \langle r^2 \rangle^2}{\langle r^2 \rangle^2}, \quad \text{c-à-d encore le carré de la variance de } r^2 \text{ rapporté}$$

à $\langle r^2 \rangle^2$ et qui donne une idée de la largeur relative de la distribution de probabilité. On voit bien sur la figure 5 que cette largeur relative tend vers 0 bien au dessus du seuil.



② Spectre de fluctuations du champ laser

a) Principe général des calculs

- Pour étudier les fluctuations aux voisinages du seuil, il faut résoudre l'équation de Fokker-Planck dépendant du temps
- Pour cela, on sépare r, φ, τ dans l'équation (IX-41) en cherchant des solutions de la forme

$$P(r, \varphi, \tau) = e^{-\Gamma_{\lambda n} \tau} e^{i\lambda \varphi} R_{\lambda n}(r) \quad (\text{IX-53})$$

P devant reprendre la même valeur lorsqu'on change φ de 2π , on a

$$\lambda = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (\text{IX-54})$$

En reportant (IX-53) dans (IX-41) on obtient l'équation aux valeurs propres

$$\left(H_r - \frac{\lambda^2}{r^2} \right) R_{\lambda n}(r) = -\Gamma_{\lambda n} R_{\lambda n}(r) \quad (\text{IX-55})$$

que l'on peut résoudre numériquement (H_r est donné en IX-42).

- On peut montrer que l'ensemble des solutions (IX-53) forme un système complet permettant en particulier de calculer la fonction de Green de l'équation de Fokker-Planck $P(r, \varphi, \tau | r_0, \varphi_0, 0)$, c-à-d la probabilité conditionnelle d'avoir r et φ à l'instant τ sachant qu'on est parti de r_0 et φ_0 à $\tau=0$

- Sans entrer dans le détail des calculs, indiquons les valeurs propres $\Gamma_{\lambda n}$ qui jouent un rôle important.

- L'état stationnaire correspond à $\Gamma_{00} = 0$ (P indépendant de τ) et à $\lambda = 0$ (P indépendant de φ)
- La valeur propre non nulle la plus petite Γ_{01} , correspondant à $\lambda = 0$ est associée à un "mode" purement radial. Cette valeur propre joue un rôle important dans le spectre des fluctuations d'intensité [$\Gamma_{02}, \Gamma_{03} \dots$ interviennent aussi mais avec de poids plus petits]
- La valeur propre la plus petite Γ_{10} correspondant à $\lambda = 1$ intervient dans le calcul de $\langle e^{-i\varphi(\tau)} \rangle$. On voit donc qu'elle joue un rôle important dans le calcul de la fonction de corrélation du champ (ou intervient $\langle e^{-i(\varphi(\tau) - \varphi(0))} \rangle$) [$\Gamma_{11}, \Gamma_{12} \dots$ interviennent aussi mais avec de poids plus petits].

b) Résultats obtenus

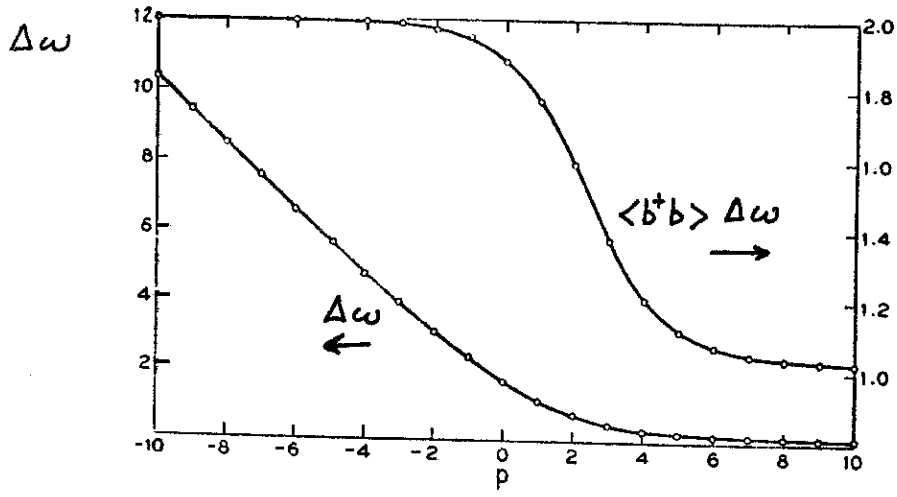


Fig. 6

La courbe de gauche de la figure 6 (échelle verticale de gauche) représente la $1/2$ largeur à mi hauteur de la raie laser $\Delta\omega = \frac{1}{2}$ en fonction du paramètre de pompage p . On retrouve bien en au dessous du seuil $\Delta\omega$ varie comme $-p$ (voir formule VIII-5), alors qu'au dessus du seuil $\Delta\omega$ varie comme $1/p$ (voir formule VIII-49).

La courbe de droite de la figure 6 (échelle verticale de droite) donne les variations avec p de $\langle b^+b \rangle \Delta\omega$. On retrouve bien que $\langle b^+b \rangle \Delta\omega$ passe de manière continue de la valeur 2 au dessous du seuil à la valeur 1 au dessus (voir formule VIII-45).

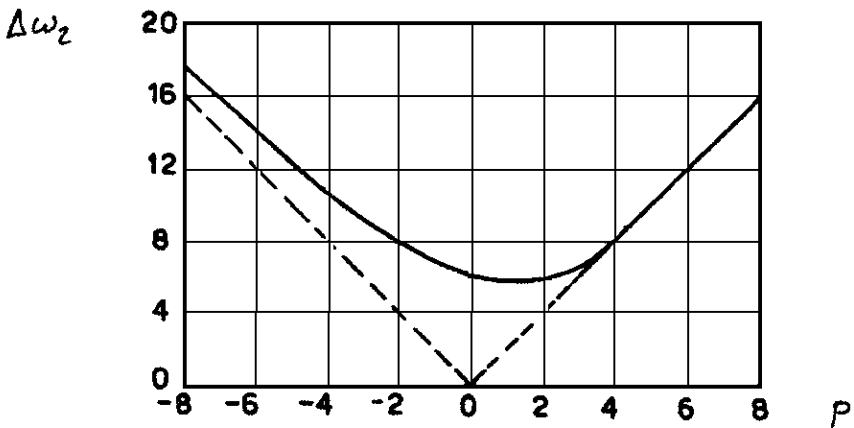


Fig. 7

La figure 7 enfin représente les variations avec le paramètre de pompage p de la $1/2$ largeur à mi hauteur $\Delta\omega_2$ du spectre des fluctuations d'intensité. On retrouve bien une variation en $-2p$ au dessous du seuil (formule VIII-14) et en $+2p$ au dessus du seuil (formule VIII-15).

But de ce chapitre

Donner quelques résultats expérimentaux récents, relatifs aux propriétés statistiques des faisceaux laser, montrant le degré de précision avec lequel les prévisions théoriques basées sur les calculs exposés dans les chapitres précédents ont pu être vérifiées. Peu de transitions de phase ont pu être étudiées en si grand détail.

On n'entre pas ici dans le détail des expériences (le lecteur est renvoyé aux références indiquées après chaque courbe). On indique simplement le but de chaque expérience, la grandeur physique étudiée et les résultats obtenus.

① Etude de l'intensité du laser en fonction du paramètre de pompage (inversion)

But : Apporter une preuve quantitative de l'analogie entre l'oscillation laser monomode et une transition de phase du 2^{ème} ordre (v. $S_0 - S_{cr}$)

Grandeur mesurée : Intensité I en fonction du paramètre de pompage P

- Au dessus du seuil, I est le carré du paramètre d'ordre (v. b) la courbe donnant $I^{1/2}$ en fonction de $S_0 - S_{cr}$ est l'équivalent de la "courbe de coexistence".
- Au dessous du seuil, I est proportionnel au carré des fluctuations du champ électrique (analogie avec une "susceptibilité généralisée") (Voir terminologie pour les transitions de phase du 2^{ème} ordre dans L.P. Kadanoff et al. Rev. Mod. Phys. 39, 395 (1967)).

Résultats obtenus (Comparés avec les courbes données plus haut pages VII-10 et IX-8)

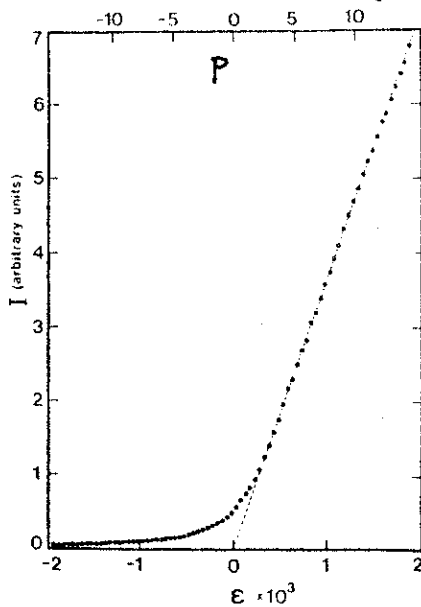


FIG. 1. The average laser intensity as a function of the normalized net gain ϵ (lower scale) and of the pump parameter P (upper scale). Errors are smaller than the dot size. The theoretical curve is not distinguishable from the line interpolating the experimental points.

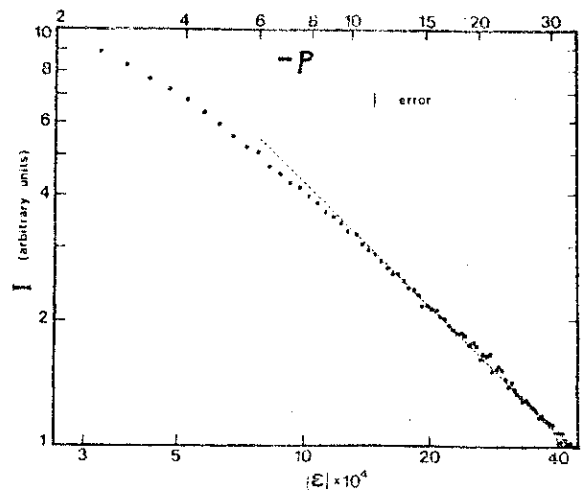


FIG. 2. Logarithmic plot of the average laser intensity below threshold as a function of $|\epsilon|$ and $-P$.

Figures extraites de la référence :
M. CORTI and V. DEGIORGIO
Phys. Rev. Lett. 36, 1173 (1976)

② Structure de la fonction d'autocorrélation $\langle b^+(\tau) b(0) \rangle$ du champ laser.

But - Etude de $G_1(\tau) = \langle b^+(\tau) b(0) \rangle$ au voisinage du seuil. Grandeur importante car sa T.F. donne la répartition spectrale de la lumière laser.

- Le calcul de $G_1(\tau)$ à partir de l'équation de Fokker-Planck discutée dans le chapitre précédent montre que $G_1(\tau)$ est une superposition d'exponentielles décroissantes correspondant à deux modes de diffusion.

On a essentiellement discuté plus haut le comportement avec le paramètre de pompage p du temps de relaxation associé au mode fondamental (diffusion de la phase - voir figure 6 page IX-10).

Les modes supérieurs correspondent à la contribution des fluctuations d'amplitude à $G_1(\tau)$ [comme $r(\tau)r(0)$ dans VIII-40, remplacé par r_0^2 dans la formule approchée VIII-41]. Comme pour les fluctuations d'intensité, le temps de relaxation de ces modes supérieurs commentent par décroître avec p puis croissent de nouveau au dessus du seuil (comportement analogue à celui de la figure 7 page IX-10). Comme l'amplitude est bien stabilisée au dessus du seuil, le poids de modes supérieurs est beaucoup plus petit que celui du mode fondamental.

Malgré la difficulté expérimentale, il a été possible très récemment de mesurer directement $G_1(\tau)$, de montrer que $G_1(\tau)$ est formée de plusieurs exponentielles décroissantes, de mesurer les temps de relaxation et les poids de ces exponentielles, ainsi que leur variation avec la puissance de sortie.

Text très sévère de l'équation de Fokker-Planck discutée plus haut (chapitre IX).

Grandeurs mesurées :

- Il est beaucoup plus difficile de mesurer $G_1(\tau)$ que $G_2(\tau)$ ($G_1(\tau)$ est très sensible aux fluctuations parasites de phase introduites par les vibrations mécaniques, fluctuations thermiques, ...)
- La mesure porte directement sur $G_1(\tau)$ et non sur sa T.F. (le poids des modes supérieurs est en effet moins petit sur $G_1(\tau)$ que sur sa T.F.)
- Méthode interférométrique autodyne utilisant des lignes à retard introduisant des différences de chemins de l'ordre du kilomètre ($\tau \sim 10 \mu s$)
- Diverses astuces pour pouvoir soustraire l'effet des fluctuations parasites.

Référence

A. GUTTNER, H. WELLING, K.H. GERICKE and W. SEIFERT
Phys. Rev. A 18, 1157 (1978)

Résultats

La figure 3 tirée de la référence précédente donne pour 3 puissances de sortie différentes ($\frac{I}{I_{seuil}} = 2, 4, 15$), le départ de $G_1(\tau)$ en fonction de τ (échelle supérieure en μs , échelle inférieure en unités sans dimensions introduite page VII-8).

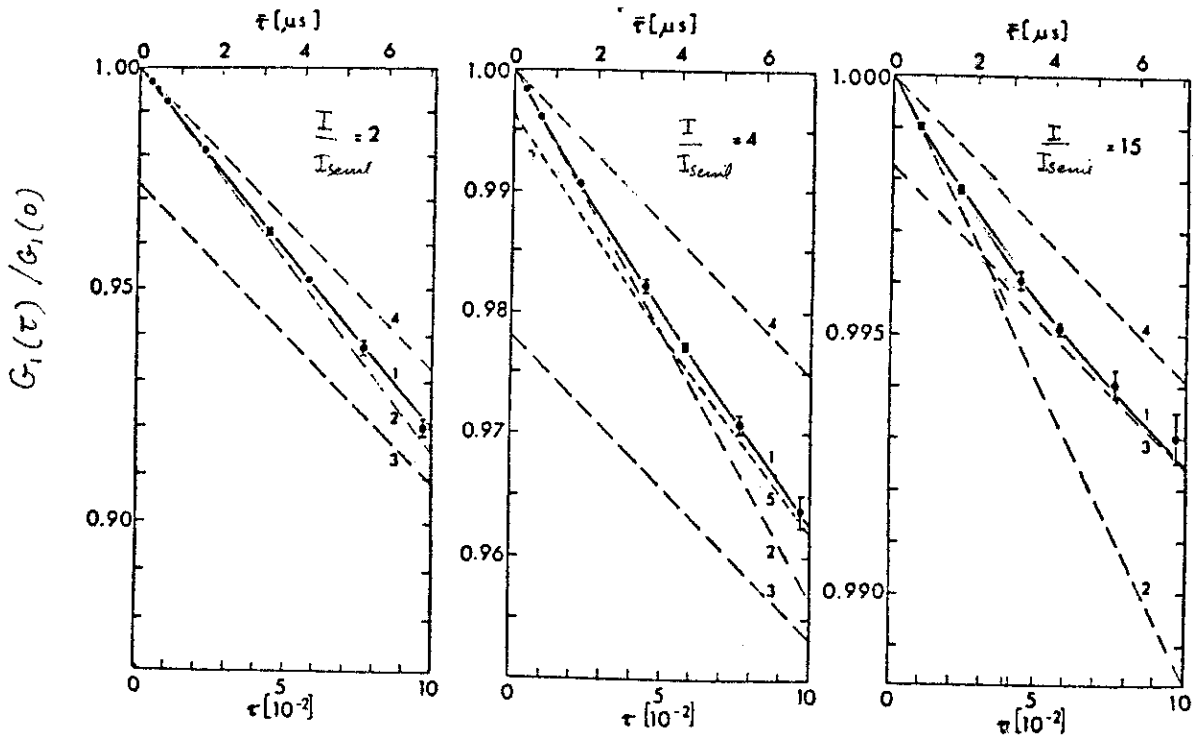


Fig. 3

Courbe 1 : courbe théorique (passant bien par les points expérimentaux)
 Courbe 2 : tangente en $\tau = 0$ Courbe 3 : asymptote
 Courbe 4 : ce que serait $G_1(\tau)/G_1(0)$ si seul le mode fondamental était présent
 Courbe 5 (pour $\frac{I}{I_{seuil}} = 4$) : somme des 2 premiers modes (ce qui montre qu'on peut négliger les modes encore supérieures)

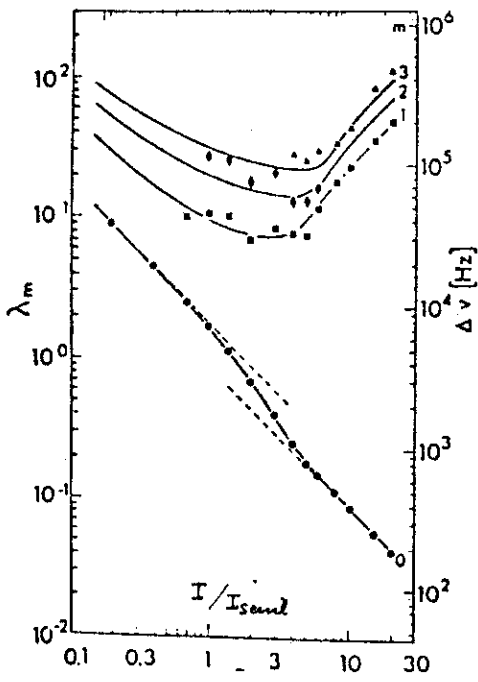


Fig. 4

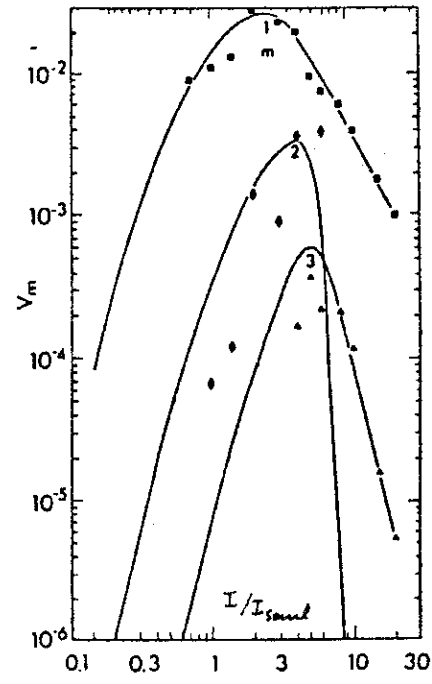


Fig. 5

La figure 4 donne les variations avec la puissance de sortie des temps de relaxation λ_m (ou des largeurs $\Delta \nu_m$) des 4 premiers modes. Courbes théoriques et points expérimentaux. On vérifie bien que λ_0 varie comme $2/\langle b^+b \rangle$ au dessous du seuil, comme $1/\langle b^+b \rangle$ au dessus (voir figure 6 page IX-10). Alors que λ_0 est toujours décroissant, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ passent par un minimum.

La figure 5 donne les poids des modes 1, 2, 3 (qui sont au mieux de l'ordre que quelques %). Courbes théoriques et points expérimentaux.

3) Etude de la fonction de corrélation de l'intensité

Grandeur mesurée : $G_2(\tau) = \langle b^+(0) b^+(\tau) b(\tau) b(0) \rangle$

Buts : - Vérifier la variation avec le taux de pompage p des taux de relaxation de $G_2(\tau)$ [voir figure 7 page IX-10]
- Mettre en évidence la structure fine de $G_2(\tau)$ et l'existence de plusieurs modes de relaxation

Références : les figures 6 et 7 données plus bas sont extraites de M. CORTI, V. DEGIORGIO, F.T. ARECCHI Opt. Commun. 8, 329 (1973)

voir aussi S. CHOPRA and L. MANDEL Coherence and Quantum Optics (ed by L. Mandel and E. Wolf Plenum Press 1973) p. 805.

Résultats

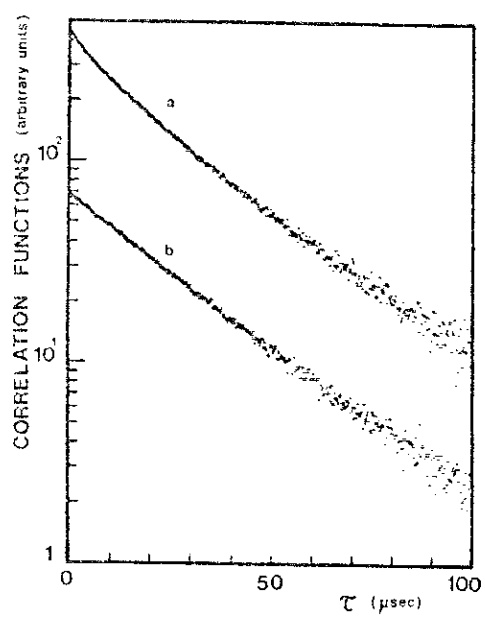
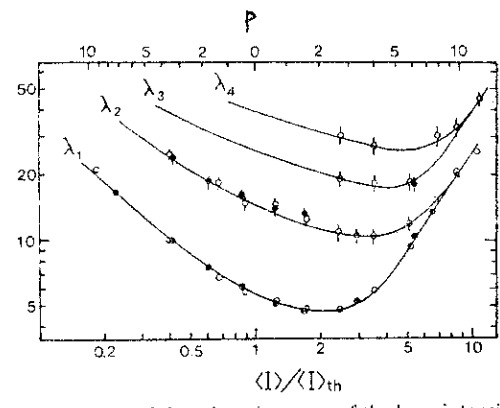


Fig. 6



Plots of the relaxation rates of the laser intensity fluctuations. The full curves represent the theoretically predicted results. The standard deviations for the experimental points are reported only when they exceed the dot size.

Fig. 7

La figure 6 donne un exemple de courbe expérimentale montrant $G_2(\tau)$. Les courbes a et b correspondent à 2 distortions différentes introduites volontairement dans le corrélateur digital. Pour la courbe a, le poids des modes supérieurs est augmenté par la distortion, ce qui fait apparaître clairement l'existence de plusieurs exponentielles dans $G_2(\tau)$.

La figure 7 donne en fonction du paramètre de pompage p (échelle supérieure) ou de I/I_{seuil} (échelle inférieure) les taux de relaxation des 4 premiers modes apparaissant dans $G_2(\tau)$

4) Etude des fonctions de corrélation d'ordre 3 de l'intensité

Grandeur mesurée $\lambda^{(3)}(\tau, \tau') = \frac{\langle \Delta I(t) \Delta I(t+\tau) \Delta I(t+\tau') \rangle}{\langle I \rangle^3}$
où $\Delta I(t) = I(t) - \langle I \rangle$

But : Tester des fonctions de corrélation d'ordre supérieur à 1 et 2. (Moyennes à 3 temps)

References

les courbes données dans la fig 8 ci-dessous sont extraites de
 S. CHOPRA and L. MANDEL Phys. Rev. Lett 30, 60 (1973)
 Voir aussi M. CORTI and V. DEGIORGIO Optics Comm. 11, 1 (1974)
 les courbes théoriques de la figure 8 sont calculées par
 C.D. CANTRELL, M. LAX and W.A. SMITH Phys. Rev A7, 175 (1973)

Résultats

Pour plusieurs valeurs du paramètre de pompage p ($p = -1, 0, \dots$) et
 plusieurs valeurs de τ , on étudie les variations de $\lambda^{(3)}(\tau, \tau + \tau'')$ avec τ''
 (Courbes théoriques - Points expérimentaux)

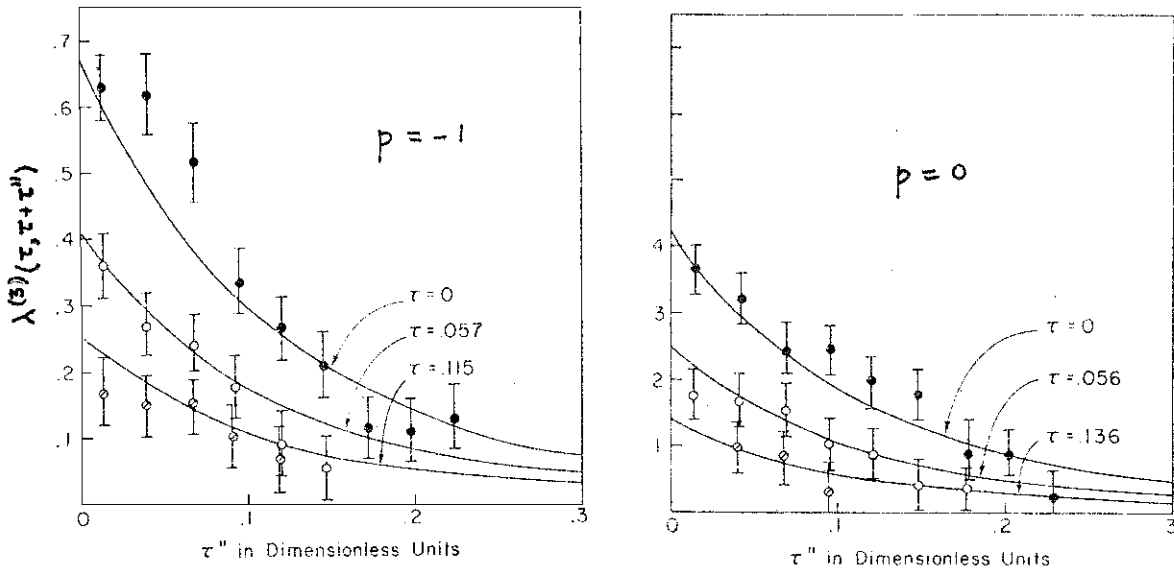


Fig. 8

5) Comptage de photons

Grandeur mesurée

$p(m, T)$

$p(m, T)$ est la probabilité de détecter m photons pendant
 le temps T . T est fixe et on étudie les variations avec m
 de $p(m, T)$.

But

2 cas sont à distinguer suivant que T est grand ou
 petit devant le temps d'évolution caractéristique T_c du champ

a) $T \ll T_c$

Le champ n'évolue pratiquement pas
 pendant T . La mesure de $p(m, T)$ [et des moments
 de $p(m, T)$] donne des informations sur la distribution de
 probabilité stationnaire $P(x)$ du champ.

Rappelons que pour un rayonnement thermique $p(m, T)$
 est (comme la distribution du nombre de photons dans le mode)
 une loi de Bose, alors que pour un état cohérent
 (vers lequel tend le mode laser très au dessus du seuil),
 on doit avoir une loi de Poisson

On peut donc suivre en fonction de l'inversion, l'évolution
 de la statistique du champ. On peut aussi étudier l'évolution en
 régime transitoire de $p(m, T)$, pourvu que T soit court devant

le temps de relaxation de ce régime transitoire (voir figure 9 ci dessous), et observer comment le rayonnement laser s'établit à partir du rayonnement thermique quand on "met en marche" brusquement le laser ("Q-switch")

b) $T \gg T_c$

le champ a alors le temps d'évoluer pendant la mesure. On peut montrer que $p(m, T)$ est alors sensible à toutes les jonctions de corrélations du champ (de tous les ordres). Test particulièrement sévère de la théorie

Références

- Théorie M. Lax and M. Zwanziger Phys Rev A7, 750 (1973) et références in (en particulier aux travaux de Glauber, Kelley et Kleiner)

- Expériences

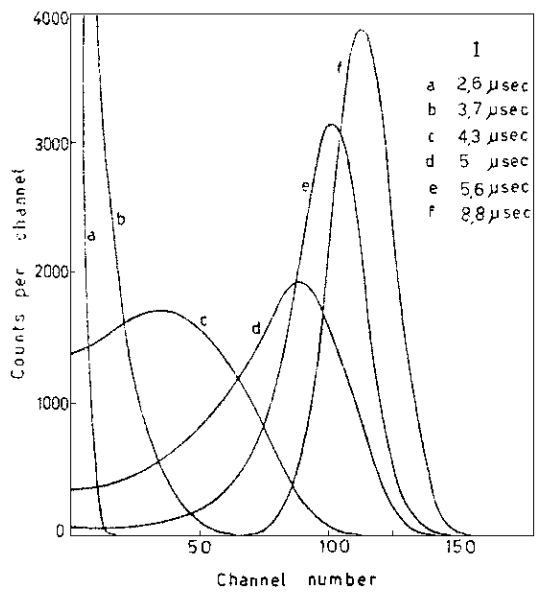
Fig 9 tiré de F.T. ARECCHI, V. DEGIORGIO and B. QUERZOLA Phys Rev Lett 19, 1168 (1967)

Fig 10 tiré de D. MELTZER, W. DAVIS, L. MANDEL Appl. Phys. Lett. 15, 242 (1970)

Fig 11 tiré de E. JAKEMAN, C.J. OLIVER, ER. PIKE, M. LAX and M. ZWANZIGER J. Phys. A3, L52 (1970)

Quelques résultats expérimentaux

a) Cas $T \ll T_c$



Étude de l'évolution transitoire de la statistique du mode laser après un "Q-switch" $T = 50$ nsec est très court devant le temps d'évolution, de l'ordre de 10 μsec.

On voit clairement le passage d'une loi de Bose à une loi de Poisson.

FIG. 9. Experimental statistical distributions with different time delays obtained on a laser transient. The solid lines connect the experimental points which are not shown to make the figure clearer. All distributions are normalized to the same area.

b) Cas général

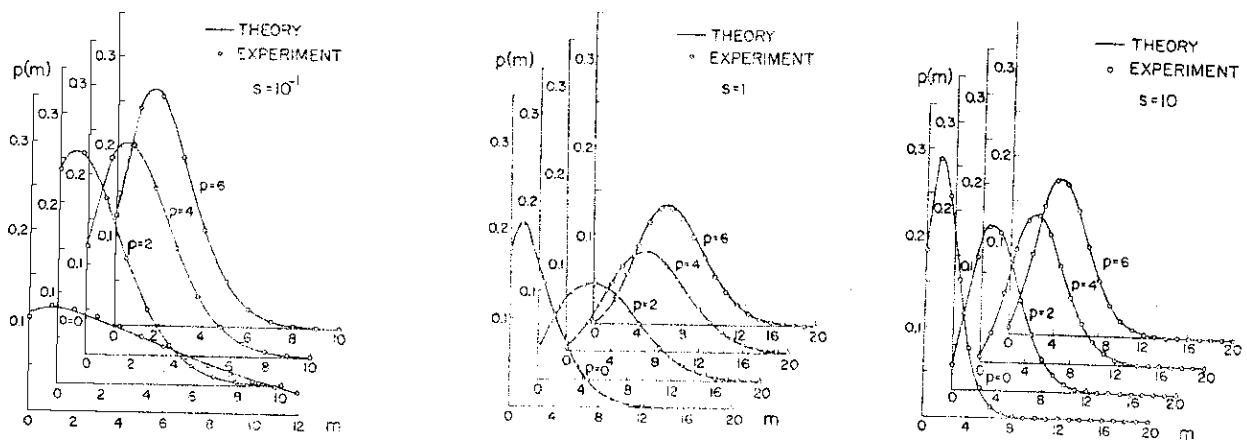


Fig 10 - Etude de $p(m, T)$, pour diverses valeurs du paramètre de pompage ($p = 0, 2, 4, 6$) et diverses valeurs du rapport $s = T/T_c$ ($s = 0.1, 1, 10$)

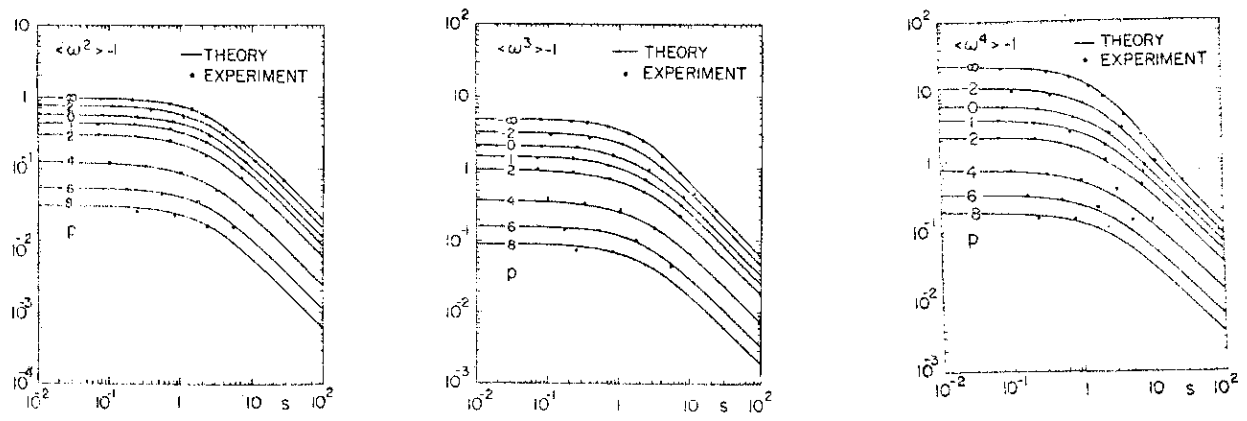


Fig 11 - Etude en fonction de $s = T/T_c$ et pour diverses valeurs du paramètre de pompage p des moments factoriels normalisés $\langle \omega^2 \rangle$, $\langle \omega^3 \rangle$, $\langle \omega^4 \rangle$ de la distribution $p(m, T)$

$$\langle \omega^2 \rangle = \frac{\langle m(m-1) \rangle}{\langle m \rangle^2} \quad \langle \omega^3 \rangle = \frac{\langle m(m-1)(m-2) \rangle}{\langle m \rangle^3} \quad \langle \omega^4 \rangle = \frac{\langle m(m-1)(m-2)(m-3) \rangle}{\langle m \rangle^4}$$

Ouvrages généraux

- Laser Physics - M. Sargent III, M.O. Scully, W.E. Lamb Addison Wesley 1975
- Quantum Optics - Proc. of the 1967 Varenna Summer School - ed R.T. Glauber
Academic Press 1962.
Voir en particulier cours de R.T. Glauber, T. Arecchi, M. Scully, H. Haken et Weidlich
- Quantum Optics ed S.M. McKay and A. Marikland (Academic Press New York 1970)
Voir en particulier cours de H. Haken
- Laser Theory H. Haken (Handbuch der Phys. ed. by S. Flügge vol XXV/2c
Springer 1970)
- Synergetics H. Haken Springer Verlag 1977
- Quantum statistical properties of radiation W.H. Louisell (John Wiley 1973)
- Quantum statistics in Optics and Solid State Physics - Springer Tracts in Modern Physics
Vol 66 - Springer-Verlag (1973) - Articles de Graham et Haake

Articles de revue

- H. Haken "Cooperative phenomena in systems far from thermal equilibrium and in non physical systems" - Rev. Mod. Phys. 47, 67 (1975)
- R. Graham "The phase transition concept and coherence in Atomic emission" in Progress in Optics Vol XII (ed. E. Wolf) North Holland 1974
- H. Risken "Statistical properties of laser light" in Progress in Optics Vol VIII (ed. E. Wolf) North Holland 1970
- M. Lax "Fluctuation and Coherence Phenomena in Classical and Quantum Physics" in Brandeis University Summer Institute (1966 session) Vol II, ed. M. Chretien, E.P. Gross and S. Deser (Gordon and Breach 1968)
- M. Lax "Quantum theory of noise in masers and lasers" in 1966 Tokyo Summer Lectures in Theoretical Physics ed. by R. Kubo and H. Kamimura (Syokabo and Benjamin 1967)

Articles plus spécialisésApproche équation pilote (pour la théorie du laser)

- M.O. Scully and W.E. Lamb
Phys. Rev. 159, 208 (1967)
Phys. Rev. 166, 246 (1968)
Phys. Rev. 179, 179 (1969)
- W. Weidlich and F. Haake
Z. Phys. 185, 30 (1965)
Z. Phys. 186, 203 (1965)

Approche équation de Fokker-Planck (pour la théorie du laser)

- H. Risken Z. Phys. 186, 85 (1965) et 191, 302 (1966)
- R.D. Hempstead and M. Lax Phys. Rev. 161, 350 (1967)

M. Lax and W.H. Louisell I.E.E.E. J. of Quantum Electronics 9E3, 47 (1967)

les courbes données dans le chapitre IX sont tirées de ces 3 références.

Equations de Langevin quantiques

J. R. Senitzky Phys. Rev 119, 670 (1960)

" " Phys. Rev 124, 642 (1961)

M. Lax - Phys. Rev 195, 110 (1966)

H. Sauerbann Z. Phys 188, 480 (1965)

Théorème de régression quantique

M. Lax Phys Rev 129, 2342 (1963)

M. Lax Phys Rev 172, 350 (1968)

Relations d'Einstein généralisées

• Établies par une autre méthode basé sur la conservation des relations de commutation

H. Haken and W. Weidlich Z. Phys 189, 1 (1966)

Quantité de probabilité

Cours de R. J. Glauber dans les Houches 64
Quantum Optics and Electronics

Voir aussi cours Collège de France 1974-75