

**MAGISTÈRE INTERUNIVERSITAIRE DE PHYSIQUE**

**ELECTRODYNAMIQUE ET OPTIQUE**

**S. HAROCHE**

Année 1994-95 Premier fascicule (Chapitres 1 à 3)



# ELECTRODYNAMIQUE ET OPTIQUE

S. HAROCHE

Fascicule n° 1

. Introduction-Plan du cours.....	p 1
. Chapitre I: Les bases de l'Electrodynamique et de l'Optique.....	p 7
. Chapitre II: Quelques illustrations des principes de base de l' Electromagnétisme.....	p 82
. Chapitre III: Rayonnement et diffusion.....	p 145





# ELECTRODYNAMIQUE ET OPTIQUE

## INTRODUCTION - HISTORIQUE - PLAN DU COURS

L'Electrodynamique est le domaine de la physique qui traite de l'interaction de la matière avec le rayonnement électromagnétique. Les forces électromagnétiques constituent l'une des quatre interactions fondamentales de la physique. Elles décrivent l'interaction des particules chargées entre elles, tant à l'échelle atomique qu'à l'échelle macroscopique. L'Electrodynamique joue ainsi un rôle fondamental dans la théorie des atomes ou des molécules (interaction électrons-noyau), mais aussi de la physique de l'état solide et des plasmas, dans l'étude des processus chimiques et biologiques etc... C'est dire que les phénomènes électromagnétiques sont essentiels à la compréhension de toute la physique dans un large domaine de distances s'étendant de l'échelle atomique à l'échelle macroscopique "humaine" (l'interaction gravitationnelle devenant elle très importante à l'échelle astronomique et l'interaction forte à l'échelle subatomique).

D'autre part, le rayonnement électromagnétique (qui couvre une gigantesque gamme de fréquence des rayons  $\gamma$  aux ondes radio) véhicule l'essentiel de l'information qui nous provient du monde physique. En particulier, l'astrophysique est (presque) entièrement tributaire de l'analyse du rayonnement qui nous provient de l'espace (dans une gamme utile de fréquence de plus en plus étendue au fur et à mesure que se développent les détecteurs et les moyens d'échapper aux perturbations de l'atmosphère terrestre). A l'échelle du laboratoire, ce sont encore les mesures électromagnétiques qui fournissent l'essentiel de l'information que nous avons des atomes, des molécules ou des noyaux à l'état dilué ou solide (spectroscopie

optique, résonance magnétique, mesure de conductivité électrique etc..) d'où l'importance énorme de l'électrodynamique en physique fondamentale.

Au plan des applications également, les propriétés des ondes électromagnétiques ont donné lieu à un nombre impressionnant de développements technologiques au cours des cent dernières années. Citons en vrac le domaine des communications avec les ondes radio, le radar, les masers et lasers, les accélérateurs de particules, l'holographie et l'optique cohérente, l'optique non linéaire, le diagnostic médical qui a débuté avec l'utilisation des rayons X il y a cent ans et qui a bénéficié très récemment des techniques de la résonance magnétique nucléaire. La compréhension des principes de base qui ont permis le développement de ces applications fait partie de la formation générale d'un physicien.

L'historique de l'évolution des idées en électrodynamique est également très importante et enrichissante pour toute personne étudiant la physique. Partie de constatations empiriques dans des domaines apparemment non reliés (électrostatique, magnétisme, optique...), l'électrodynamique s'est constituée en un tout cohérent par l'unification de l'électricité et du magnétisme dans le cadre des équations de Maxwell et la reconnaissance qui s'ensuivit du caractère électromagnétique de la lumière (1860-1890). La reconnaissance par Einstein de l'incompatibilité des lois de l'électromagnétisme avec les conceptions du XIX<sup>ème</sup> siècle de temps et d'espace devaient ensuite conduire à la révolution de la relativité restreinte (1905). Parallèlement, l'impossibilité de comprendre à l'aide de l'électrodynamique classique même relativiste, le rayonnement des atomes et celui du corps noir devait par étapes conduire à l'avènement de la mécanique quantique (1900-1930). La combinaison de l'électrodynamique et des principes quantiques conduisit à partir des années 1930 à la notion de champ quantique, donnant un sens précis au concept de photon.

L'Electrodynamique Quantique qui décrit l'échange de photons entre particules chargées constitue ainsi l'aboutissement de la théorie électromagnétique qui permet de rendre compte des propriétés radiatives et de la structure des atomes ou des molécules avec une précision impressionnante. Plus récemment, la théorie quantique du champ électromagnétique a servi de modèle aux théoriciens dans leurs recherches pour la description des autres interactions. Petit à petit, l'idée d'unifier toutes les interactions dans une théorie unique a cessé d'être une utopie inaccessible. Une première unification de l'électromagnétisme et de l'interaction faible a été réalisée en 1967 dans une théorie prédisant à côté du photon l'existence de bosons lourds (W et Z) véhiculant avec celui-ci l'interaction "électrofaible". La découverte expérimentale récente (1982) de ces particules a confirmé cette théorie et montré que l'électromagnétisme devrait être englobé dans un cadre plus vaste. Ce rapide aperçu montre que l'électrodynamique a depuis un siècle été au centre des révolutions successives de la physique.

Dans ce cours, nous comptons nous limiter pour l'essentiel à une présentation de l'électrodynamique classique (dans laquelle le champ n'est pas quantifié). Cette description classique des champs est une excellente approximation dans le cas où le nombre de photon "par mode" du champ est grand (principe de correspondance) et permet de rendre compte correctement d'un très grand nombre de phénomènes de rayonnement. (Nous réservons la dernière leçon pour un aperçu sur la quantification du champ et sur les phénomènes qui en dépendent : émission spontanée, effet Compton...). Nous considérerons comme acquise les connaissances du cours de DEUG ou de classes préparatoires et ne présenterons pas à nouveau la suite des observations et la démarche des idées ayant conduit aux équations de Maxwell. Celles-ci seront posées dès le début du cours, avec l'équation de Lorentz décrivant la

dynamique de particules chargées couplées au champ.. Nous déduirons de ces équations les propriétés essentielles du champ électromagnétique en général et les lois de l'optique comme cas particulier (Chap. I). Nous chercherons ainsi à unifier à partir des équations de Maxwell un certain nombre de résultats fondamentaux qui sont souvent présentés de façon disparate dans l'enseignement traditionnel: les lois de la diffraction, le principe d' Huyghens-Fresnel, le postulat de Fermat de l'optique géométrique sont tous dérivable des équations de Maxwell. Nous ajouterons à ce chapitre général deux compléments importants : le premier montrera (ou rappellera) que les équations de l'électrodynamique satisfont au principe de relativité et sera illustré par le calcul de la transformation des champs dans un changement de repère galiléen ; le second nous montrera comment l'ensemble de l'électrodynamique peut se déduire d'un principe variationnel de moindre action à partir de la fonction de Lagrange du système "charges+ champ". Ce point de vue très général nous permettra de nous familiariser avec l'outil variationnel qui s'est montré extrêmement puissant en physique théorique et donnera une interprétation profonde aux lois de conservation de l'électrodynamique (conservation de l'énergie, de l'impulsion, du moment cinétique). Nous traiterons ensuite au Chapitre II quelques problèmes physiques importants liés à la propagation des champs libres (diffraction - holographie - résolution des instruments d'optique) ou des champs en présence de charges (notion d'indice de réfraction, biréfringence etc...). Ce Chapitre II nous fournira une première occasion d'étudier la machinerie des équations de Maxwell et de leur contenu physique. Nous aborderons ensuite au Chapitre III le rayonnement des charges en mouvement en distinguant le cas des charges ayant une vitesse faible devant la vitesse de la lumière  $c$  (développement multipolaire du rayonnement) puis celui des charges relativistes (rayonnement synchrotron, bremsstrahlung...). Puis nous analyserons au Chapitre IV la notion de cohérence spatiale et temporelle du champ qui joue un rôle essentiel dans la compréhension des effets d'interférence et de diffusion de la lumière. Nous verrons

alors le lien qui existe entre les propriétés statistiques du rayonnement (définies par des fonctions de corrélation) et son spectre de fréquence et l'importance de ces notions pour la description d'expériences variées de diffusion de la lumière.

Jusqu'à ce point du cours, les champs seront supposés se propager dans le vide, entre des charges ponctuelles localisées dans l'espace. En principe, même dans un milieu matériel dense, on pourrait chercher à décrire le champ microscopique local en tout point et toujours raisonner sur le champ "dans le vide". Pratiquement, il apparaît très utile de moyenniser les champs microscopiques dans la matière et de décrire les phénomènes de propagation dans un milieu matériel à l'aide des champs moyens, seuls accessibles à la mesure. La définition de ces champs moyens conduit à considérer les densités de dipôle électrique et magnétique induits sur les atomes du milieu par les champs ("polarisation" du milieu). Dans le cadre de l'optique ou de l'électromagnétisme conventionnel (pré-laser), les champs sont peu intenses et cette "polarisation" se calcule bien en faisant l'approximation de réponse linéaire des atomes ou molécules à la perturbation électromagnétique (l'amplitude des dipôles induits est proportionnelle au champ " $\mathbf{y}$ " par l'atome). Le Chapitre V présentera une théorie simple de la réponse linéaire du milieu atomique basée sur une description quantique de ce milieu et justifiera la forme générale des équations de Maxwell macroscopiques dans la matière. On aura ainsi une théorie de l'indice de réfraction, de l'absorption et de l'amplification linéaire et on étudiera un certain nombre de phénomènes de propagation dans des diélectriques, des métaux et des plasmas. Lorsque l'intensité de l'onde électromagnétique qui se propage dans le milieu devient trop importante, les atomes ne peuvent plus répondre linéairement. L'apparition de termes non linéaires dans la polarisation atomique conduit à toute une série d'effets physiques nouveaux, rendus observable par l'avènement des lasers : génération d'harmoniques et mélange d'ondes, conjugaison de phase etc... Le Chapitre VI sera

consacré à un bref aperçu sur l'optique non linéaire. Ce Chapitre présentera également une théorie simple du laser, un système atomique amplificateur de champs électromagnétiques dans lequel les phénomènes non linéaires jouent un rôle important. Enfin, comme indiqué plus haut, ce cours se conclura (Chap. VII) par une brève introduction à la quantification du champ électromagnétique et une analyse du concept du photon.

### PLAN DU COURS :

- I Bases de l'Electromagnétisme et de l'Optique. Electromagnétisme et relativité. Electrodynamique et principe de moindre action.
- II Quelques illustrations des principes de base de l'Electromagnétisme.
- III Rayonnement et diffusion.
- IV Cohérence et fluctuations.
- V Réponse linéaire et propagation dans les milieux matériels.
- VI Optique non linéaire et lasers.
- VII Quantification du champ et photons.

## CHAPITRE I

### LES BASES DE L'ELECTRODYNAMIQUE ET DE L'OPTIQUE

Les buts de ce premier Chapitre sont les suivants:

1. Enoncer les équations de Maxwell-Lorentz décrivant la dynamique d'un système de charges en interaction avec le champ électromagnétique.
2. Présenter les invariants associés à ces équations.
3. Introduire les potentiels scalaires ( $U$ ) et vecteur ( $A$ ) dont dérivent les champs et discuter de l'indétermination de ces potentiels (choix de jauge).
4. Donner dans quelques cas simples des solutions particulières des équations de propagation du champ libre (ondes plane et sphérique, onde monochromatique).
5. Montrer comment le champ le plus général peut se décomposer en une somme d'ondes planes monochromatiques de vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  et de pulsation  $\omega_{\mathbf{k}}$  reliés entre eux par la relation de dispersion  $\omega_{\mathbf{k}} = c|\mathbf{k}|$ . Montrer que le champ électrique se sépare en une partie transversale (somme d'ondes planes polarisées perpendiculairement à  $\mathbf{k}$ ) et une partie longitudinale (champ électrique parallèle à  $\mathbf{k}$  pour chaque onde plane de la décomposition), alors que le champ magnétique est purement transversal. Donner la forme canonique de la décomposition de la partie transversale du champ en ondes planes qui sera utile au Chapitre VII. Discuter de la polarisation des ondes planes.
6. Aborder l'étude des champs rayonnés par des sources en introduisant le formalisme des fonctions de Green qui décrivent le rayonnement d'une source ponctuelle et percussionnelle.

7. En déduire l'équation des potentiels retardés qui donne sous forme intégrale les champs rayonnés par une distribution arbitraire de charge et de courants.

8. Utiliser enfin le formalisme des fonctions de Green pour établir une équation intégrale approchée donnant le champ dans un volume donné à partir de sa valeur sur la frontière de ce volume (formule de Kirchhoff). Cette formule justifie le principe d'Huygens-Fresnel (H.F.) si important dans la théorie de la diffraction et permet de faire le pont entre les équations de Maxwell et la formulation traditionnelle de l'optique ondulatoire.

9. Conclure par une discussion des aspects ondulatoires et géométriques du rayonnement en faisant le lien entre le principe de H.F. et le principe de Fermat.

### 1°) Les équations de Maxwell-Lorentz

L'Electrodynamique s'intéresse à l'évolution des systèmes de charges (masse  $M_\alpha$ , charge  $q_\alpha$ ). La force  $F_\alpha(t)$  qui s'exerce sur une particule localisée en un point  $r$  à un instant  $t$  ne dépend que de deux vecteurs définis en ce point : le champ électrique  $E(r,t)$  et le champ magnétique  $B(r,t)$ . L'ensemble de  $E$  et  $B$  pour tous les points constitue le champ électromagnétique dont l'évolution dépend en retour de la position et de la vitesse de toutes les charges électriques présentes. En d'autres termes, l'électrodynamique décrit de façon "consistante" l'évolution des systèmes de charges et de champs en interaction mutuelle.



L'état dynamique des particules à l'instant  $t$  est défini par leur position  $\vec{r}_\alpha(t)$  et leur vitesse  $\vec{v}_\alpha = \dot{\vec{r}}_\alpha$ . Celui du champ est défini par l'ensemble  $\{\vec{E}(\vec{r},t), \vec{B}(\vec{r},t)\}$  pour toutes les valeurs de  $\vec{r}$ . Notez que le système de charge a un nombre fini de degrés de liberté (6 par particule) alors que celui des champs est infini ( $\vec{r}$  apparaît comme un paramètre de dénombrement pour le champ au même titre que  $\alpha$  pour les charges).

A partir de  $\{\vec{r}_\alpha, \vec{v}_\alpha\}$ , on définit le champ scalaire de densité de charge  $\rho(\vec{r},t)$  et le champ vectoriel de densité de courant  $\vec{j}(\vec{r},t)$  par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho(\vec{r},t) = \sum_{\alpha} q_{\alpha} \delta[\vec{r} - \vec{r}_{\alpha}(t)] \\ \vec{j}(\vec{r},t) = \sum_{\alpha} q_{\alpha} \vec{v}_{\alpha}(t) \delta[\vec{r} - \vec{r}_{\alpha}(t)] \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{(I-1a)} \\ \text{(I-1b)} \end{array}$$

Les équations dynamiques régissant l'évolution des charges et des champs s'écrivent alors :

$$\begin{array}{l} \text{Equation} \\ \text{de} \\ \text{Maxwell} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{r},t) = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r},t) = - \frac{\partial}{\partial t} \vec{B}(\vec{r},t) \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r},t) = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\vec{r},t) \\ \vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r},t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}(\vec{r},t) + \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \vec{j}(\vec{r},t) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{(I-2a)} \\ \text{(I-2b)} \\ \text{(I-2c)} \\ \text{(I-2d)} \end{array}$$

et

$$M_{\alpha} \frac{d}{dt} \frac{\vec{v}_{\alpha}}{\sqrt{1-v_{\alpha}^2/c^2}} = q_{\alpha} [\vec{E}(\vec{r}_{\alpha}, t) + \vec{v}_{\alpha} \times \vec{B}(\vec{r}_{\alpha}, t)] \quad (I-3)$$

(Equation de Lorentz)

À la limite non relativiste ( $v_{\alpha} \ll c$ ), cette dernière équation se réduit à

$$M_{\alpha} \frac{d\vec{v}_{\alpha}}{dt} = q_{\alpha} [\vec{E}(\vec{r}_{\alpha}, t) + \vec{v}_{\alpha} \times \vec{B}(\vec{r}_{\alpha}, t)] \quad (I-4)$$

Nous adoptons ici le système international d'unités. Dans ces équations,  $c$  est la vitesse de la lumière

$$c = 299792458 \text{ m/s}$$

(par définition légale du mètre)

et  $\epsilon_0$  est une constante, dite constante diélectrique du vide, liée aux unités choisies dans le système MKSA pour exprimer les différentes grandeurs (charges, forces, longueurs). La valeur de la quantité  $\mu_0 = 1/\epsilon_0 c^2$  est fixée par la définition des unités électriques (l'ampère ou Coulomb par seconde est légalement défini à partir de la force exercée entre deux conducteurs filiformes parallèles situés à un mètre de distance) :

$$\mu_0 = 1/\epsilon_0 c^2 = 4\pi \cdot 10^{-7}$$

En principe, la donnée de l'état initial du système à un instant  $t_0$   $\{\vec{E}(\vec{r}, t_0), \vec{B}(\vec{r}, t_0), \vec{r}_{\alpha}(t_0), \vec{v}_{\alpha}(t_0)\}$  pour tout  $\vec{r}$  et  $\alpha$  doit permettre à l'aide des équations (I-2) et (I-3) de déterminer l'état ultérieur du système ( $t > t_0$ ).

Toute l'électrodynamique classique est contenue dans les équations (I-1) à (I-3). Une description plus réaliste nécessite la quantification du système matériel (considérer les  $\vec{r}_{\alpha}$ ,  $\vec{v}_{\alpha}$  comme des opérateurs non commutant) et éventuellement celle du champ électromagnétique (considérer  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  comme des champs d'opérateurs non commutatifs). Pour l'instant nous nous limitons à l'approche doublement classique, suffisante



Cas particulier de I-6 :  $V$  représente l'espace tout entier et il n'y a pas de flux de charges à travers la surface de l'infini :

$$\iiint \rho(\vec{r}) d^3\vec{r} = c^t e \quad (\text{I-7a})$$

Cette équation traduit la conservation globale de la charge et s'écrit aussi (Eq. I-1a) :

$$\sum_{\alpha} q_{\alpha} = c^t e \quad (\text{I-7b})$$

#### b) Conservation de l'énergie

De (I-2 d), on tire :

$$\vec{j} \cdot \vec{E} = \epsilon_0 c^2 \vec{E} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{\partial E^2}{\partial t} \quad (\text{I-8})$$

soit en remarquant que :

$$\vec{E} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{E} + \vec{\nabla} \cdot (\vec{B} \times \vec{E})$$

et en utilisant (I-2 b) :

$$\vec{j} \cdot \vec{E} = - \frac{\epsilon_0}{2} \left[ \frac{\partial E^2}{\partial t} + c^2 \frac{\partial B^2}{\partial t} \right] + \epsilon_0 c^2 \vec{\nabla} \cdot (\vec{B} \times \vec{E})$$

qui se réécrit encore :

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathcal{S}} + \vec{j} \cdot \vec{E} = 0 \quad (\text{I-9})$$

avec

$$\mathcal{U} = \frac{\epsilon_0}{2} [E^2 + c^2 B^2] \quad (\text{I-10})$$

et

$$\vec{\mathcal{S}} = \epsilon_0 c^2 \vec{E} \times \vec{B} \quad (\text{I-11})$$

(I-9) décrit la conservation locale de l'énergie du système charges + champ.  $\mathcal{U}$  (Eq. I-10) est la densité locale d'énergie électromagnétique en  $r$ , somme d'un terme électrique et d'un terme magnétique.  $\mathcal{S}$  (Eq. I-11) est le vecteur de Poynting représentant le flux d'énergie électromagnétique par unité de surface en  $r$ . Le produit  $\vec{j} \cdot \vec{E}$  est la puissance dissipée par le champ sur les charges par unité de volume:

Par intégration dans un volume  $V$ , (I-9) devient :

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \mathcal{U} d^3 \vec{r} + \iiint_V \vec{j} \cdot \vec{E} d^3 \vec{r} + \iint_S \vec{\mathcal{S}} \cdot d^2 \vec{r} = 0 \quad (\text{I-12})$$

$\downarrow$ variation de l'énergie du champ dans $V$	$\downarrow$ puissance e.m. fournie aux charges par le champ (travail de la force de Lorentz)	$\downarrow$ flux d'énergie e.m. à travers la surface frontière de $V$
---	--	--

on peut également écrire (I-12) sous une forme équivalente en utilisant (I-1 b) et (I-3) et les identités qui en découlent :

$$\begin{aligned}
\iiint_V \vec{j} \cdot \vec{E} \, d^3\vec{r} &= \sum_{\alpha \in \mathcal{V}} q_\alpha \iiint_V \vec{v}_\alpha \delta[\vec{r} - \vec{r}_\alpha(t)] \vec{E}(\vec{r}) \, d^3\vec{r} \\
&= \sum_{\alpha \in \mathcal{V}} q_\alpha \vec{v}_\alpha \cdot \vec{E}(\vec{r}_\alpha(t)) \\
&= \sum_{\alpha \in \mathcal{V}} \vec{v}_\alpha \cdot \vec{F}_\alpha = \sum_{\alpha \in \mathcal{V}} M_\alpha \vec{v}_\alpha \frac{d}{dt} \left( \frac{\vec{v}_\alpha}{\sqrt{1 - v_\alpha^2/c^2}} \right) \quad (\text{I-13}) \\
&= \frac{d}{dt} \left\{ \sum_{\alpha \in \mathcal{V}} \frac{M_\alpha c^2}{\sqrt{1 - v_\alpha^2/c^2}} \right\}
\end{aligned}$$

on obtient ainsi :

$$\frac{d}{dt} \left\{ \sum_{\alpha \in \mathcal{V}} \frac{M_\alpha c^2}{\sqrt{1 - v_\alpha^2/c^2}} + \iiint_V \mathfrak{u}(\vec{r}, t) \, d^3\vec{r} \right\} + \iint_S \vec{\mathfrak{S}} \cdot d^2\vec{r} = 0 \quad (\text{I-14})$$

Le premier terme de (I-14) représente la variation de l'énergie (relativiste) des particules contenues dans V, le second terme celle du champ et le troisième le flux d'énergie électromagnétique quittant V à travers la frontière.

A la limite non relativiste ( $v_\alpha \ll c$ ), (I-14) devient :

$$\frac{d}{dt} \left\{ \sum_{\alpha \in \mathcal{V}} \frac{1}{2} M_\alpha v_\alpha^2 + \iiint_V \mathfrak{u}(\vec{r}, t) \, d^3\vec{r} \right\} + \iint_S \vec{\mathfrak{S}} \cdot d^2\vec{r} = 0 \quad (\text{I-15})$$

Etendons enfin le volume V à l'espace tout entier en admettant que le flux de  $\mathfrak{S}$  "à travers la surface de l'infini" s'annule. C'est le cas si le champ est confiné dans une région finie (cavité) et en général dans toute situation physique réelle où le rayonnement a effectivement commencé à un instant donné dans le passé (durée finie de l'"expérience") à une distance finie de l'origine (dimension finie de l'"expérience").

Alors à tout t, le champ n'a pas atteint la surface de l'infini et  $\iint_{S \text{ à l'infini}} \vec{\mathfrak{S}} \cdot d^2\vec{r} = 0$

On a alors :

$$\sum_{\alpha} \frac{M_{\alpha} c^2}{\sqrt{1-v_{\alpha}^2/c^2}} + \frac{\epsilon_0}{2} \iiint (E^2 + c^2 B^2) d^3 \vec{r} = c^t e \quad (\text{I-16})$$

ou à la limite non relativiste :

$$\sum_{\alpha} \frac{1}{2} M_{\alpha} v_{\alpha}^2 + \frac{\epsilon_0}{2} \iiint (E^2 + c^2 B^2) d^3 \vec{r} = c^t e \quad (\text{I-17})$$

Ces équations expriment la conservation globale de l'énergie des charges et du champ électromagnétique.

### c) Conservation de l'impulsion

De même que pour l'énergie, on définit une densité locale d'impulsion du champ électromagnétique et un flux d'impulsion (qui est un tenseur puisqu'il s'agit du flux d'un champ de vecteur). On obtient par des manipulations analogues à celles développées ci-dessus une équation locale de conservation de l'impulsion à trois termes (analogue de I-14) et par intégration sur l'espace tout entier l'équation de conservation globale :

$$\sum_{\alpha} \vec{P}_{\alpha} + \epsilon_0 \iiint \vec{E} \times \vec{B} d^3 \vec{r} = c^t e \quad (\text{I-18})$$

avec

$$\vec{P}_{\alpha} = \frac{M_{\alpha} \vec{v}_{\alpha}}{\sqrt{1-v_{\alpha}^2/c^2}} \quad (\text{I-19a})$$

qui se réduit à

$$\vec{P}_{\alpha} = M_{\alpha} \vec{v}_{\alpha} \quad (\text{I-19b})$$

à l'approximation non relativiste.

(I-18) n'est valable que si le flux d'impulsion à travers la surface de l'infini est nul.

Nous donnons une démonstration de (I-18) dans le complément B<sub>I</sub> de ce chapitre en présentant cette relation comme une conséquence de l'invariance par translation spatiale du Lagrangien du système (tout comme on peut montrer que (I-16) résulte de l'invariance par translation dans le temps). Nous montrerons au Chapitre II que la loi de conservation de l'impulsion est à l'origine du phénomène de pression de radiation.

#### d) Conservation du moment cinétique

Le même argument peut être développé pour le moment cinétique du système charges + champs dont la conservation vient de l'invariance par rotation du Lagrangien du système. L'équation globale de conservation (valable si le flux du moment cinétique du champ à travers la surface de l'infini est nul) s'écrit :

$$\sum_{\alpha} \vec{r}_{\alpha} \times \vec{P}_{\alpha} + \epsilon_0 \iiint d^3\vec{r} \vec{r} \times [\vec{E} \times \vec{B}] = c^{te} \quad (\text{I-20})$$

Insistons encore sur le fait que les formules globales (I-16), (I-18) et (I-20) ne sont pas toujours valables (il faut y ajouter un terme de flux) lorsque les champs s'étendent à l'infini (onde plane stationnaire par exemple).



### 3°) Potentiels et choix de jauge

Il est possible d'exprimer les champs en fonction des potentiels scalaires et vecteurs  $U(\vec{r},t)$  et  $\vec{A}(\vec{r},t)$  par les relations :

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r},t) \quad (\text{I-21a})$$

$$\vec{E}(\vec{r},t) = - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}(\vec{r},t) - \vec{\nabla} \cdot U(\vec{r},t) \quad (\text{I-21b})$$

L'existence d'un potentiel vecteur  $\vec{A}$  satisfaisant (I-21 a) découle de l'équation (I-2a) ( $\vec{B}$  est un champ à divergence nulle). Les équations (I-2a) et (I-21a) entraînent alors l'existence de  $U(\vec{r},t)$  satisfaisant (I-21b) ( $\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$  est un champ à rotationnel nul qui dérive donc d'un potentiel scalaire).

En exprimant  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  en fonction des potentiels, on obtient sans peine les équations de Maxwell pour  $\vec{A}$  et  $U$  :

$$\square U(\vec{r},t) = - \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\vec{r},t) - \frac{\partial}{\partial t} \left[ \vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r},t) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial U}{\partial t} \right] \quad (\text{I-22a})$$

$$\square \vec{A}(\vec{r},t) = - \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \vec{j}(\vec{r},t) + \vec{\nabla} \left[ \vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r},t) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial U}{\partial t} \right] \quad (\text{I-22b})$$

avec 
$$\square = \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad (\text{opérateur d'Alembertien})$$

Les quantités physiques associées au champ (mesurables sans ambiguïté à l'aide d'un détecteur idéal, charge d'épreuve etc...) sont les

vecteurs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$ . Les potentiels sont des intermédiaires de calcul définis de façon non univoque. Etant donné une fonction  $\chi(\mathbf{r},t)$  régulière quelconque, on montre immédiatement que les potentiels  $\mathbf{A}'$  et  $U'$  définis par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{A}'(\vec{r},t) = \vec{A}(\vec{r},t) + \vec{\nabla} \chi(\vec{r},t) \\ U'(\vec{r},t) = U(\vec{r},t) - \frac{\partial \chi(\vec{r},t)}{\partial t} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{(I-23a)} \\ \text{(I-23b)} \end{array}$$

correspondent aux mêmes champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  que ceux qui dérivent de  $\mathbf{A}$  et  $U$ . Un choix de  $\mathbf{A}$  et  $U$  correspond à une jauge particulière et les équations (I-23) définissent un changement de jauge. La liberté du choix de jauge permet d'imposer aux potentiels une contrainte conduisant à des propriétés mathématiques intéressantes. Deux jauges utiles sont :

#### La jauge de Lorentz

$\mathbf{A}$  et  $U$  satisfont à

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial U}{\partial t} = 0 \quad \text{(I-24)}$$

Ce choix simplifie en le découplant les équations d'évolution (I-22) qui deviennent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \square U = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho \\ \square \vec{A} = -\frac{1}{\epsilon_0 c^2} \vec{j} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{(I-25a)} \\ \text{(I-25b)} \end{array}$$

U ne dépend plus que de la densité de charge et A de la densité de courant.

### La jauge de Coulomb

A satisfait à

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \quad (\text{I-26})$$

Le potentiel scalaire satisfait dans cette jauge à l'équation de Poisson de l'électrostatique :

$$\Delta U = - \frac{1}{\epsilon_0} \rho \quad (\text{I-27})$$

### 4°) Ondes libres particulières

On appelle "libres" les champs qui se propagent dans une région de l'espace ne contenant ni charges ni courants. Les équations (I-25) en jauge de Lorentz s'écrivent pour un champ libre :

$$\square U = 0 \quad ; \quad \square \vec{A} = 0 \quad (\text{I-28})$$

ou encore pour les champs E et B :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 & \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{array} \right. \quad (\text{I-29})$$

Soit en séparant les évolutions de  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  (et en utilisant l'identité

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{a} = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{a}) - \Delta \vec{a}$$

$$\square \vec{E} = 0 \quad ; \quad \square \vec{B} = 0 \quad (\text{I-30})$$

(I-28) et (I-30) montrent que  $U$  et une composante quelconque de  $\vec{A}, \vec{E}$  ou  $\vec{B}$  obéissent à l'équation scalaire

$$\square \varphi(\vec{r}, t) = 0 \quad (\text{I-31})$$

Passons en revue quelques solutions particulières de (I-31) correspondant à des situations physiques intéressantes :

#### a) Ondes planes

Cherchons les solutions de (I-31) ne dépendant que d'une variable d'espace  $z$  (propagation à une dimension). (I-31) s'écrit alors :

$$\frac{\partial^2 \varphi(z, t)}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi(z, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{I-32})$$

ou par le changement de variable

$$\xi = z - ct \quad ; \quad \eta = z + ct$$

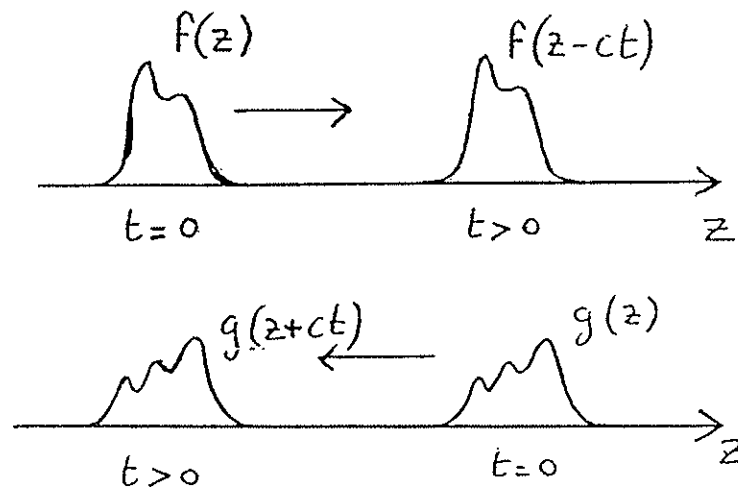
$$\frac{\partial^2 \varphi(\xi, \eta)}{\partial \xi \partial \eta} = 0$$

qui admet pour solution générale  $\varphi(\xi, \eta) = f(\xi) + g(\eta)$  soit :

$$\varphi(z, t) = f(z-ct) + g(z+ct) \quad (\text{I-33})$$

$f(z-ct)$  représente un signal de profil  $f(z)$  se déplaçant sans déformation à la vitesse  $c$  dans la direction Oz.  $g(z+ct)$  un signal (profil  $g(z)$ ) se déplaçant à la même vitesse dans la direction opposée.

$\varphi$ , indépendant de  $x$  et  $y$ , prend la même valeur en tout point d'un plan perpendiculaire à l'axe  $oz$  : il s'agit d'une onde plane. La propagation sans déformation dans le vide de cette onde est une propriété essentielle des ondes électromagnétiques (mise à profit de façon évidente en communication par ondes radio).



### b) Ondes sphériques

Cherchons maintenant les solutions de (I-31) ne dépendant que d'une variable radiale  $r$  à partir d'une origine  $o$ .

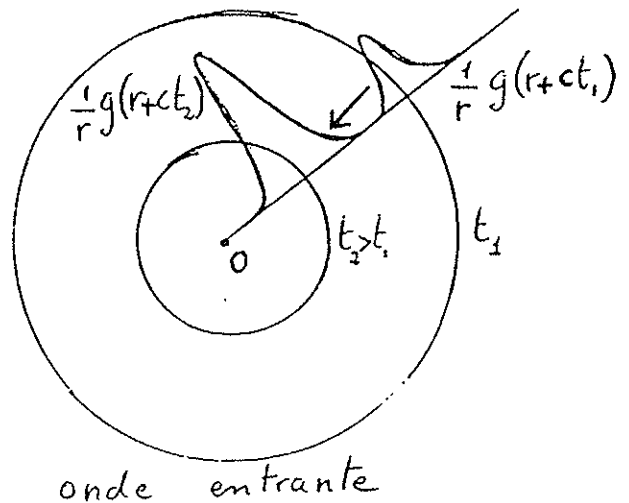
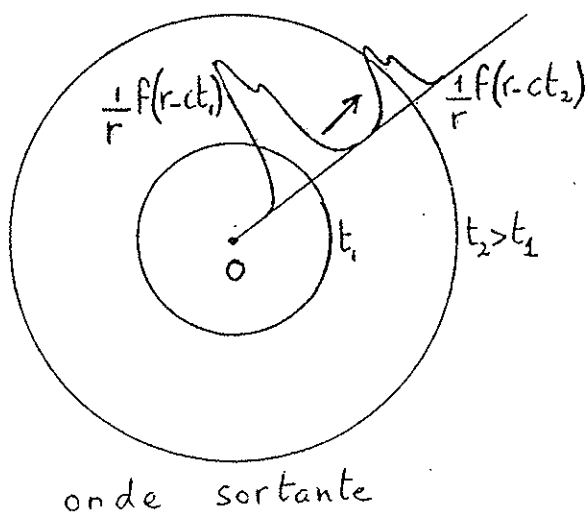
(I-31) devient :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\varphi(r, t)) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{I-34})$$

qui montre que  $r\varphi$  se présente sous une forme analogue à (I-33) :

$$\varphi(r) = \frac{1}{r} f(r-ct) + \frac{1}{r} g(r+ct) \quad (\text{I-35})$$

$1/r \cdot f(r-ct)$  représente un signal à symétrie sphérique s'éloignant de l'origine à la vitesse  $c$  (onde sortante) alors que  $1/r \cdot g(r+ct)$  représente un signal convergeant vers  $r=0$  (onde entrante). Notez la décroissance en  $1/r$  de l'amplitude de l'onde sphérique. Elle correspond à une décroissance en  $1/r^2$  du vecteur de Poynting associé et donc à l'existence d'un flux fini d'énergie électromagnétique à travers la sphère d'un rayon  $r$  arbitrairement grand (propriété également essentielle pour les communications par transmission de signaux électromagnétiques).



### c) Onde monochromatique

Cherchons maintenant une solution de (I-31) avec une dépendance temporelle sinusoïdale s'écrivant (en notation complexe) :

$$\varphi(\vec{r}, t) = \text{Re } \varphi_0(\vec{r}, t) \quad (\text{I-36})$$

avec

$$\varphi_0(\vec{r}, t) = \varphi_0(\vec{r}) e^{-i\omega t} \quad (\text{I-37})$$

(I-31) conduit alors à l'équation de Helmholtz :

$$\Delta \varphi_0(\vec{r}) + \frac{\omega^2}{c^2} \varphi_0 = 0 \quad (\text{I-38})$$

Nous savons que l'opérateur  $\Delta = (\nabla)^2$  admet comme fonctions propres

$$\varphi_k(\vec{r}) = e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \quad (\text{I-39})$$

avec comme valeur propre  $-k^2$  (cf. spectre de l'opérateur  $\mathbf{p} = \frac{\hbar}{i} \nabla$  en mécanique quantique). L'ensemble des  $\varphi_k(\vec{r})$  forme une base pour les fonctions de  $\vec{r}$ . La projection d'un champ quelconque sur cette base correspond à l'opération de transformation de Fourier (voir paragraphe suivant).

L'équation de Helmholtz projetée sur la base de  $\varphi_k$  s'écrit :

$$\left( -k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \right) \varphi_k(\vec{r}) = 0 \quad (\text{I-40})$$

ce qui impose la "relation de dispersion" :

$$\omega = \omega_k = c |\vec{k}| \quad (\text{I-41})$$

On en déduit comme solution particulière de (I-38) les ondes planes monochromatiques

$$\varphi_{\vec{k}}(\vec{r}, t) = \operatorname{Re} \left\{ \alpha e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega_k t)} \right\} \quad (\alpha \text{ complexe quelconque}) \quad (\text{I-42})$$

La solution (I-42) avec  $\vec{k}$  parallèle à Oz constitue évidemment un cas particulier de (I-33) (onde plane monochromatique se propageant le long de Oz). On montre de même l'existence des ondes monochromatiques sphériques de la forme :

$$\varphi_k(\vec{r}, t) = \frac{\alpha}{r} e^{i(kr - \omega_k t)} + \frac{\beta}{r} e^{i(-kr - \omega_k t)} \quad (\text{I-43})$$

comme cas particulier de (I-35).

Rappelons que les expressions présentées ici correspondent à des solutions possibles pour l'une des composantes vectorielles du champ (ou du potentiel) d'une onde électromagnétique. Les différentes composantes associées à une solution donnée ne peuvent être choisies arbitrairement et indépendamment les unes des autres. Elles doivent satisfaire des relations entre elles (les équations de Maxwell), ce qui impose des contraintes aux directions des vecteurs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  (polarisation du champ). Nous discutons ce problème dans un contexte plus général dans le paragraphe qui suit.

## 5°) Décomposition du champ en ondes planes

### Polarisation de ces ondes

#### a) L'électromagnétisme dans l'espace réciproque



Un champ électromagnétique quelconque peut se décomposer en superposition d'ondes planes monochromatiques par transformation de Fourier. Posons par exemple :

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3\vec{k} \vec{E}(\vec{k}, t) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \quad (\text{I-44a})$$

avec

$$\vec{E}(\vec{k}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3\vec{r} \vec{E}(\vec{r}, t) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} \quad (\text{I-44b})$$

Ces deux équations représentant les deux transformations de Fourier inverses. On définit ainsi  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$ ,  $\vec{A}$ ,  $U$ ,  $\tilde{\rho}$  et  $\vec{J}$ , T.F. respectives de  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$ ,  $\vec{A}$ ,  $U$ ,  $\rho$  et  $\vec{J}$ .

La réalité des champs physique entraîne de façon évidente les relations :

$$\vec{E}^*(\vec{k}, t) = \vec{E}(-\vec{k}, t) ; \quad (\text{I-45a})$$

$$\vec{B}^*(\vec{k}, t) = \vec{B}(-\vec{k}, t) \quad (\text{I-45b})$$

En utilisant les propriétés bien connues de la transformation de Fourier, on obtient immédiatement les équations suivantes dans l'espace des  $\vec{k}$  (espace réciproque).

$$\left\{ \begin{array}{ll} i\vec{k} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \tilde{\rho} & (\text{I-46a}) ; \quad i\vec{k} \cdot \vec{B} = 0 \quad (\text{I-46b}) \\ i\vec{k} \times \vec{E} = -\dot{\vec{B}} & (\text{I-46c}) ; \quad i\vec{k} \times \vec{B} = \frac{\dot{\vec{A}}}{c^2} + \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \vec{J} \quad (\text{I-46d}) \end{array} \right.$$

(Equations de Maxwell)

$$i \vec{k} \cdot \vec{j} + \dot{\rho} = 0 \quad (\text{conservation locale de la charge}) ; \quad (\text{I-47})$$

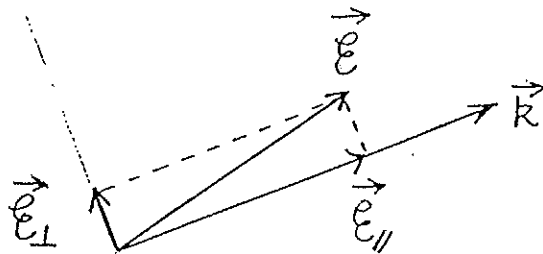
$$\begin{cases} \vec{B} = i\vec{k} \times \vec{A} & \text{Définition des champs} & (\text{I-48a}) \\ \vec{E} = -\dot{\vec{A}} - i\vec{k} \varphi & \text{à partir des potentiels} & (\text{I-48b}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} k^2 \varphi = \frac{\dot{\rho}}{\epsilon_0} + i\vec{k} \cdot \dot{\vec{A}} & \text{Equation} & (\text{I-49a}) \\ \frac{1}{c^2} \ddot{\vec{A}} + k^2 \vec{A} = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \vec{j} - i\vec{k} (i\vec{k} \vec{A} + \frac{1}{c^2} \dot{\varphi}) & \text{des potentiels} & (\text{I-49b}) \end{cases}$$

avec les choix de jauge

$$\begin{cases} i\vec{k} \vec{A} + \frac{1}{c^2} \dot{\varphi} = 0 & \text{Condition de Lorentz} & (\text{I-50}) \\ \vec{k} \vec{A} = 0 & \text{Condition de Coulomb} & (\text{I-51}) \end{cases}$$

b) Champs longitudinaux et transverses ; caractère transversal du champ libre



Dans l'espace réciproque, tout champ vectoriel peut se décomposer en une partie longitudinale et une partie transverse suivant la relation :

$$\vec{E}(\vec{k}, t) = \vec{E}_{\parallel}(\vec{k}, t) + \vec{E}_{\perp}(\vec{k}, t) \quad (\text{I-52})$$

avec

$$\vec{\mathcal{E}}_{\parallel}(\vec{k}, t) = \vec{K} \cdot [\vec{K} \cdot \vec{\mathcal{E}}(\vec{k}, t)] \quad (\text{I-53a})$$

$$\vec{\mathcal{E}}_{\perp}(\vec{k}, t) = \vec{\mathcal{E}} - \vec{\mathcal{E}}_{\parallel}(\vec{k}, t) \quad (\text{I-53b})$$

où  $\vec{K}$  est le vecteur unitaire le long de la direction de  $\vec{k}$  :

$$\vec{K} = \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} \quad (\text{I-54})$$

On définit ainsi les parties longitudinales et transverses du champ dans l'espace ordinaire :

$$\vec{\mathcal{E}}_{\perp}(\vec{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \iiint d^3\vec{k} \vec{\mathcal{E}}_{\perp}(\vec{k}, t) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \quad (\text{I-55})$$

Il résulte de (I-46 b) que  $B(\vec{r}, t)$  est purement transverse (champ polarisé perpendiculairement à la direction de propagation de l'onde plane dans chaque terme de la superposition de Fourier). Le champ électrique présente lui en général une partie transversale et une partie longitudinale. Leur séparation est particulièrement simple en jauge de Coulomb. On a alors d'après (I-51)  $\vec{A}_{\parallel} = 0$  (le potentiel vecteur est transversal en jauge de Coulomb) et d'après (I-48 b) :

$$\vec{\mathcal{E}} = -\dot{\vec{A}}_{\perp} - i\vec{k} \cdot \mathcal{U}$$

ce qui entraîne immédiatement

$$\vec{\mathcal{E}}_{\parallel} = -i\vec{k} \cdot \mathcal{U} \quad \text{et} \quad \vec{\mathcal{E}}_{\perp} = -\dot{\vec{A}}_{\perp} \quad (\text{en jauge de Coulomb}) \quad (\text{I-56})$$

comme d'autre part, dans cette jauge :

$$k^2 \mathcal{U} = \frac{\tilde{\rho}}{\epsilon_0} \quad (\text{I-57})$$

on voit que la partie longitudinale du champ se calcule comme en électrostatique (elle dérive d'un potentiel coulombien), alors que la partie transversale est la dérivée (changé de signe) du potentiel vecteur. Cette séparation n'est vraie qu'en jauge de Coulomb.

Pour un champ libre (pas de charges et de courants), E est comme B purement transversal (d'après I-46 a). Dans chaque onde plane de la superposition, les champs électriques et magnétiques sont perpendiculaires à  $\mathbf{k}$ . Il ne reste qu'à préciser leurs orientations respectives (voir plus loin).

c) Forme canonique de la décomposition du champ libre en ondes planes

Pour un champ libre, (I-46 c) et (I-46 d) se réduisent à :

$$\dot{\vec{\mathcal{E}}}_\perp = ic^2 \vec{\mathbf{k}} \times \vec{\mathcal{B}} \quad (\text{I-58a})$$

et

$$\dot{\vec{\mathcal{B}}} = -i \vec{\mathbf{k}} \times \vec{\mathcal{E}} \quad (\text{I-58b})$$

Il est commode de découpler les variables dynamiques E et B en passant par combinaison linéaire aux variables normales :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\alpha}(\vec{\mathbf{k}}, t) = \frac{-i}{2N(k)} [ \vec{\mathcal{E}}_\perp - c \vec{\mathbf{k}} \times \vec{\mathcal{B}} ] \\ \vec{\beta}(\vec{\mathbf{k}}, t) = \frac{-i}{2N(k)} [ \vec{\mathcal{E}}_\perp + c \vec{\mathbf{k}} \times \vec{\mathcal{B}} ] \end{array} \right. \quad (\text{I-59a})$$

$$(\text{I-59b})$$

Dans ces équations  $N(k)$  est une constante de normalisation a priori arbitraire ne dépendant que de  $k = |\mathbf{k}|$ . Son choix sera fixé au Chapitre VII par des arguments de commodité.

Les relations liées à la réalité des champs (I-45) montrent que  $\alpha$  et  $\beta$  sont liés par

$$\vec{\beta}(\vec{k}, t) = - \vec{\alpha}^*(-\vec{k}, t) \quad (\text{I-60})$$

L'intérêt des variables normales est que leur évolution est découplée, contrairement à celle de  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$ . On montre sans peine à partir de (I-58) et (I-59) que l'on a :

$$\frac{d}{dt} \vec{\alpha}(\vec{k}, t) + i \omega_k \vec{\alpha}(\vec{k}, t) = 0 \quad (\text{I-61})$$

avec

$$\omega_k = c |\vec{k}|$$

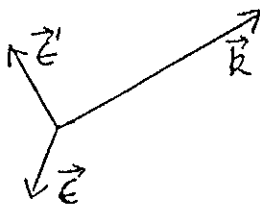
D'où

$$\vec{\alpha}(\vec{k}, t) = \vec{\alpha}(\vec{k}, 0) e^{-i \omega_k t} \quad (\text{I-62})$$

Il suffit alors d'inverser les relations (I-59) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{E}_\perp(\vec{k}, t) = iN(k) [ \vec{\alpha}(\vec{k}, t) - \vec{\alpha}^*(-\vec{k}, t) ] \quad (\text{I-63a}) \\ \vec{B}(\vec{k}, t) = \frac{iN(k)}{c} [ \vec{k} \times \vec{\alpha}(\vec{k}, t) + \vec{k} \times \vec{\alpha}^*(-\vec{k}, t) ] \quad (\text{I-63b}) \end{array} \right.$$

pour obtenir la décomposition canonique du champ libre. Le champ à tout temps  $t > 0$  s'exprime en fonction de son état initial défini par les vecteurs complexes  $\alpha(\mathbf{k}, 0)$ . Ces vecteurs, étant transversaux, peuvent pour chaque valeur de  $\mathbf{k}$  se décomposer sur une base de deux vecteurs orthogonaux  $\mathbf{e}$  et  $\mathbf{e}'$  perpendiculaires à  $\mathbf{k}$  :



$$\begin{aligned} \vec{\alpha}(\vec{k}, 0) &= \vec{e} \alpha_e(\vec{k}, 0) + \vec{e}' \alpha_{e'}(\vec{k}, 0) \\ &= \sum_{\vec{e} \perp \vec{k}} \alpha_e(\vec{k}, 0) \vec{e} \end{aligned} \quad (\text{I-64})$$

Compte tenu de (I-44 a) et (I-63 a), on obtient alors :

$$\begin{aligned} \vec{E}_\perp(\vec{r}, t) &= \frac{i}{(2\pi)^{3/2}} \int \mathcal{N}(\mathbf{k}) d^3 \vec{k} \left[ \left\{ \sum_{\vec{e} \perp \vec{k}} \vec{e} \alpha_e(\vec{k}, 0) \right\} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega_k t)} \right. \\ &\quad \left. - \left\{ \sum_{\vec{e} \perp \vec{k}} \vec{e} \alpha_e^*(-\vec{k}, 0) \right\} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} + \omega_k t)} \right] \end{aligned} \quad (\text{I-65})$$

Soit en changeant la variable  $\mathbf{k}$  en  $-\mathbf{k}$  dans la deuxième intégrale de

(I-65) :

$$\vec{E}_\perp(\vec{r}, t) = \text{Re} \left\{ \vec{E}_\perp^c(\vec{r}, t) \right\} \quad (\text{I-66})$$

avec

$$\vec{E}_\perp^c(\vec{r}, t) = \frac{2i}{(2\pi)^{3/2}} \int \mathcal{N}(\mathbf{k}) d^3 \vec{k} \left\{ \sum_{\vec{e} \perp \vec{k}} \vec{e} \alpha_e(\vec{k}, 0) \right\} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega_k t)} \quad (\text{I-67a})$$

et de même

$$\vec{B}^c(\vec{r}, t) = \text{Re} \vec{B}^c(\vec{r}, t)$$

avec

$$\vec{B}^c(\vec{r}, t) = \frac{2i}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{c} \int \mathcal{N}(\mathbf{k}) d^3 \vec{k} \left\{ \sum_{\vec{e} \perp \vec{k}} (\vec{k} \times \vec{e}) \alpha_e(\vec{k}, 0) \right\} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega_k t)} \quad (\text{I-67b})$$

Les équations (I-67) représentent la décomposition canonique d'un champ électromagnétique libre en ondes planes transversales. La notation complexe est utile pour les calculs. Il faut passer bien entendu aux parties réelles pour exprimer les quantités physiques. L'exposant  $c$  sera omis dans la suite s'il n'y a pas d'ambiguïté. Cette décomposition nous servira pour la quantification du champ au Chapitre VII.

#### d) Polarisation des ondes planes libres

Envisageons une onde plane quelconque de la superposition précédente. Elle s'écrit de façon générale :

$$\vec{E}^c(\vec{r}, t) = (\vec{\varepsilon}_1 E_1^c + \vec{\varepsilon}_2 E_2^c) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega_k t)} \quad (\text{I-68a})$$

$$\vec{B}^c(\vec{r}, t) = \left( -\vec{\varepsilon}_1 \frac{E_2^c}{c} + \frac{\vec{\varepsilon}_2 E_1^c}{c} \right) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega_k t)} \quad (\text{I-68b})$$

(Nous avons choisi  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, K$  trièdre orthonormé direct).  $E_1^c$  et  $E_2^c$  sont les amplitudes complexes du champ le long de  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$ . On peut les écrire, en séparant les amplitudes réelles  $E_{1,2}$  et les phases  $\varphi_{1,2}$  :

$$\begin{cases} E_1^c = E_1 e^{i\varphi_1} \\ E_2^c = E_2 e^{i\varphi_2} \end{cases} \quad (\text{I-69})$$

On obtient alors immédiatement en passant aux champs réels :

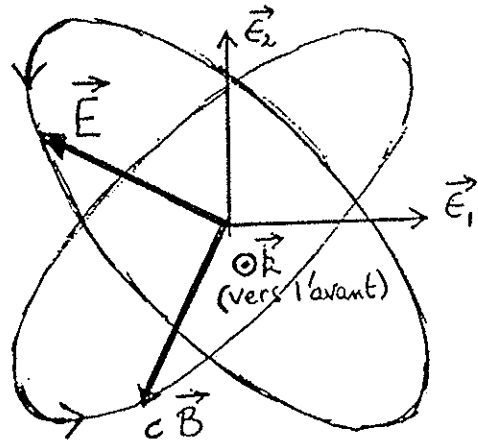
$$\begin{cases} \vec{E}(\vec{r}, t) = E_1 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega_k t + \varphi_1) \vec{\varepsilon}_1 + E_2 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega_k t + \varphi_2) \vec{\varepsilon}_2 \\ \vec{B}(\vec{r}, t) = -\frac{E_2}{c} \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega_k t + \varphi_2) \vec{\varepsilon}_1 + \frac{E_1}{c} \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega_k t + \varphi_1) \vec{\varepsilon}_2 \end{cases} \quad (\text{I-70})$$

On remarque immédiatement sur ces expressions que :

\* Les extrémités de  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  décrivent en général une ellipse dans le plan perpendiculaire à  $\vec{k}$  à la fréquence  $\omega_k$  (polarisation générale du champ elliptique).

\*\* Les directions de  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  sont à chaque instant orthogonales entre elles.

\*\*\* A chaque instant  $|\vec{B}| = |\vec{E}|/c$ . En d'autres termes l'extrémité de  $c\vec{B}$  décrit l'ellipse se déduisant de celle décrite par l'extrémité de  $\vec{E}$  dans la rotation d'angle  $+\pi/2$  autour de  $\vec{k}$



Cas particuliers :

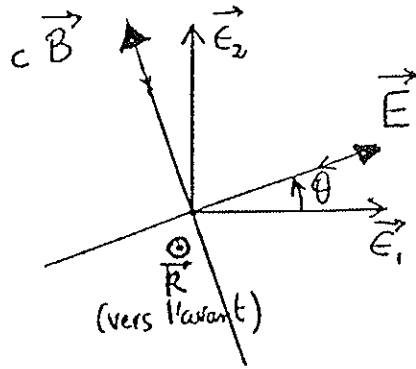
a) Polarisation linéaire :  $\psi_1 = \psi_2 = \psi$

L'ellipse dégénère en un segment de droite. En posant  $E_1 = E_0 \cos\theta$  et  $E_2 = E_0 \sin\theta$ , on obtient

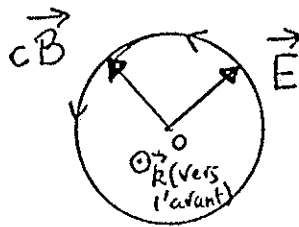
$$\begin{cases} \vec{E}(\vec{r}, t) = E_0 \vec{e}_\theta \cos(\vec{k}\vec{r} - \omega_k t + \psi) \\ \vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{E_0}{c} \vec{e}_{\theta + \pi/2} \cos(\vec{k}\vec{r} - \omega_k t + \psi) \end{cases} \quad (\text{I-71})$$

$\vec{E}$  et  $\vec{B}$  oscillent en phase le long des directions  $\vec{e}_\theta$  et  $\vec{e}_{\theta + \pi/2}$  se déduisant de  $\vec{e}_1$  par les rotations d'angles  $\theta$  et  $\theta + \pi/2$  autour de  $\vec{k}$





b) Polarisation circulaire :  $E_1 = E_2 = E_0$  ;  $\varphi_2 = \varphi_1 + \pi/2$



L'ellipse devient un cercle. Notons que dans ce cas  $E_2^c/E_1^c = \pm i$ . On retiendra qu'une polarisation linéaire se représente de façon complexe par un vecteur

$$E_1^c \vec{\epsilon}_1 + E_2^c \vec{\epsilon}_2$$

dans lequel  $E_1^c/E_2^c$  est réel alors qu'une polarisation circulaire correspond à  $E_1^c/E_2^c$  imaginaire pur de module égal à 1.

### 6°) Fonction de Green : propagation d'une impulsion électromagnétique

Abordons à présent le problème de la résolution des équations des potentiels en présence de sources (Eq. 1-25 dans la jauge de Lorentz). Ces

quatre équations s'écrivent pour U ou une composante quelconque de A sous la forme générale

$$\square \varphi(\vec{r}, t) = - \mathcal{S}(\vec{r}, t) \quad (\text{I-72})$$

où  $\mathcal{S}(\vec{r}, t)$  est le terme source correspondant respectivement à la densité de charge ou à une des composantes de la densité de courant.

Afin de donner une forme générale de la solution de (I-72), il est commode de résoudre l'équation de Green associée :

$$\square G(\vec{r}, t) = - \delta(\vec{r}) \delta(t) \quad (\text{I-73})$$

$G(\vec{r}, t)$  représente le signal créé par une distribution impulsionnelle de source à l'origine. La solution de (I-73) doit manifestement être à symétrie sphérique. D'après le paragraphe 4°, elle doit également satisfaire l'équation  $\square G = 0$  en dehors de l'origine et donc être de la forme  $f(t-r/c)/r$  (pour des raisons physiques évidentes, l'onde entrante doit être exclue). Enfin, l'onde doit être localisée en  $r = 0$  pour  $t = 0$ . Ceci conduit à admettre pour  $G(\vec{r}, t)$  une solution de la forme :

$$G(\vec{r}, t) = c \theta(r) \frac{\delta(t-r/c)}{r} \quad (\text{I-74})$$

représentant un signal sphérique infiniment court divergent de  $r = 0$  à la vitesse  $c$  (la fonction de Heaviside  $\theta(r)$  est là pour rappeler que  $r > 0$  dans (I-74)). Afin de confirmer cette intuition, calculons  $\square G$  :

$$\square \frac{\delta(t-r/c) \theta(r)}{r} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} [\delta(t-r/c) \theta(r)] - \frac{\theta(r)}{rc^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} [\delta(t-r/c)] \quad (\text{I-75})$$

$$= \frac{1}{r} \delta(t-r/c) \delta'(r) - \frac{2}{rc} \delta'(t-r/c) \delta(r)$$

Afin de préciser la distribution au membre de droite de (I-75), faisons-la agir sur une fonction régulière  $f(r, \theta, \varphi, t)$  :

$$\iiint \int \left[ -\frac{2}{rc} \delta'(t-r/c) \delta(r) + \frac{1}{r} \delta(t-r/c) \delta'(r) \right] f(r, \theta, \varphi, t) r^2 dr d\Omega dt$$

$$= \iiint \frac{2}{c} r dr \delta(r) \frac{\partial f}{\partial t} \left( r, \theta, \varphi, \frac{r}{c} \right) d\Omega$$

$$- \iint \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r f \left( r, \theta, \varphi, \frac{r}{c} \right) \right\} \Big|_{r=0} d\Omega \quad (\text{I-76})$$

La première intégrale au deuxième membre de (I-76) est nulle (terme  $rd(r)$ ). La deuxième vaut  $-4\pi f(0,0)$ . Finalement, au sens des distributions :

$$\square \frac{\delta(t-r/c) \theta(r)}{r} = -4\pi \delta(\vec{r}) \delta(t) \quad (\text{I-77})$$

On a donc  $C = \frac{1}{4\pi}$  dans (I-74) et

$$G(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \frac{\delta(t-r/c)}{r} \quad (r > 0) \quad (\text{I-78})$$

Une simple translation dans le temps et dans l'espace donne également

$$G(\vec{r}-\vec{r}_1, t-t_1) = \frac{1}{4\pi} \frac{\delta(t-t_1 - |\vec{r}-\vec{r}_1|/c)}{|\vec{r}-\vec{r}_1|} \quad (\text{I-79})$$

avec

$$\square G(\vec{r}-\vec{r}_1, t-t_1) = -\delta(\vec{r}-\vec{r}_1) \delta(t-t_1) \quad (\text{I-80a})$$

et également

$$\square_1 G(\vec{r}-\vec{r}_1, t-t_1) = -\delta(\vec{r}-\vec{r}_1) \delta(t-t_1) \quad (\text{I-80b})$$

$G(\vec{r}-\vec{r}_1, t-t_1)$  représente l'onde sphérique rayonnée au point  $r$  à l'instant  $t$  par une source percussionnelle située en  $r_1$  à l'instant  $t_1$ . Remarquer que (I-79) contient la causalité et la propagation à la vitesse  $c$ .

Noter que  $G$  est une solution particulière de (I-73), celle qui satisfait les conditions aux limites physiques que nous nous sommes imposées. On obtient une infinité d'autres solutions en ajoutant à (I-78) une solution de l'équation homogène  $\square G = 0$ , par exemple une onde plane du champ libre.

### 7°) Equation des potentiels retardés

Toute distribution de source  $\mathcal{S}(\vec{r}, t)$  peut s'écrire en utilisant la fonction  $\delta$  sous la forme d'une superposition linéaire :

$$\mathcal{S}(\vec{r}, t) = \iiint \int d^3 \vec{r}_1 \cdot dt_1 \mathcal{S}(\vec{r}_1, t_1) \delta(\vec{r}-\vec{r}_1) \delta(t-t_1) \quad (\text{I-81})$$

Elle peut donc être considérée formellement comme une superposition linéaire de sources percussionnelles localisées, le "poids" de la source au point  $r_1$  à l'instant  $t_1$  étant précisément  $\mathcal{S}(r_1, t_1)$ .

L'équation de propagation (I-72) étant linéaire (si  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  sont des solutions correspondant aux sources  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$ ,  $\lambda\varphi_1 + \mu\varphi_2$  est une solution correspondant à la source  $\lambda\mathcal{S}_1 + \mu\mathcal{S}_2$ ), on obtient une solution particulière de (I-72) en superposant les solutions fonction de Green :

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{r}, t) &= \frac{1}{4\pi} \iiint \int d^3 \vec{r}_1 \cdot dt_1 \frac{\delta(t-t_1 - |\vec{r}-\vec{r}_1|/c)}{|\vec{r}-\vec{r}_1|} \mathcal{S}(\vec{r}_1, t_1) \\ &= \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{\mathcal{S}(\vec{r}_1, t - |\vec{r}-\vec{r}_1|/c)}{|\vec{r}-\vec{r}_1|} d^3 \vec{r}_1 \end{aligned} \quad (\text{I-82})$$

(I-82) est la formule des potentiels retardés. C'est la solution de l'équation de propagation du potentiel avec les bonnes conditions aux limites physiques (champ rayonné par les sources). On obtient en remplaçant  $\delta$  par  $\rho$  et  $\mathbf{j}$  :

$$\mathbf{U}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho(\vec{r}_1, t - |\vec{r} - \vec{r}_1|/c)}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} d^3\vec{r}_1 \quad (\text{I-83a})$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \iiint \frac{\vec{j}(\vec{r}_1, t - |\vec{r} - \vec{r}_1|/c)}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} d^3\vec{r}_1 \quad (\text{I-83b})$$

Dans cette dernière équation, on reconnaît la combinaison  $1/4\pi\epsilon_0 c^2$  que l'on écrit traditionnellement  $\mu_0/4\pi$ .

Remarquons que les équations (I-83) ne sont valables que dans la jauge de Lorentz. Elles ont une interprétation physique évidente: le potentiel en un point  $\mathbf{r}$  à l'instant  $t$  dépend de l'état des sources en tous les points de l'espace à des instants antérieurs. Le temps correspondant à chaque point  $\mathbf{r}_1$  est antérieur à  $t$  de l'intervalle correspondant à la propagation du signal de  $\mathbf{r}_1$  à  $\mathbf{r}$  à la vitesse  $c$ . On notera la similitude de ces équations avec celles de l'électrostatique et de la magnétostatique obtenues comme limite des précédentes lorsque  $\rho$  et  $\mathbf{j}$  sont indépendants de  $t$ .

On obtient à partir de (I-83) les champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  grâce à (I-21). Les opérations de dérivation sont cependant parfois subtiles. Nous reviendrons en détail sur ce problème au Chapitre III (Rayonnement).

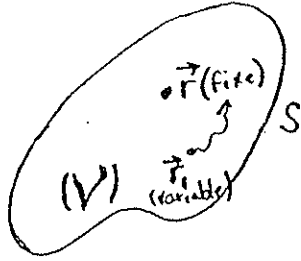
### 8°) Equation intégrale du champ : le principe d'Huyghens-Fresnel

Nous nous proposons de montrer maintenant que les équations de Maxwell impliquent comme une conséquence physique importante le Principe d' Huyghens-Fresnel qui permet de calculer le champ en tout point d'un volume si on en connaît la valeur ainsi que celle de sa dérivée sur le bord de ce volume. Ce principe, reconnu sous une forme ou sous une autre comme une des lois fondamentales de l'optique bien avant l'établissement des équations de Maxwell, a joué un rôle essentiel dans la démonstration des différentes formules bien connues de l'optique ondulatoire. En fait, si l'on admet les équations de Maxwell, la formule d' Huyghens-Fresnel apparaît non plus comme un principe, mais comme une conséquence démontrable, moyennant certaines approximations simples, des équations fondamentales de l'électrodynamique. Cette démonstration, que nous reprenons ici à l'aide du formalisme des fonctions de Green, a été faite pour la première fois par Kirchhoff dans les années 1880.

Livrons-nous pour cette démonstration à une manipulation simple sur les fonctions de Green des équations de propagation du champ. Multiplions membre à membre l'équation (I-72) (prise au point  $r_1, t_1$ ) par  $G(\vec{r}-\vec{r}_1, t-t_1)$ , et l'équation (I-80b) par  $\varphi(\vec{r}_1, t_1)$  et soustrayons. Nous obtenons :

$$\begin{aligned} G(\vec{r}-\vec{r}_1; t-t_1) \square_1 \varphi(\vec{r}_1, t_1) - \varphi(\vec{r}_1, t_1) \square_1 G(\vec{r}-\vec{r}_1; t-t_1) = \\ = -G(\vec{r}-\vec{r}_1, t-t_1) \mathcal{S}(\vec{r}_1, t_1) + \varphi(\vec{r}_1, t_1) \delta(\vec{r}-\vec{r}_1) \delta(t-t_1) \end{aligned} \quad (\text{I-84})$$

Considérons autour d'un point  $r$  une surface fermée quelconque  $S$  limitant un volume  $\mathcal{V}$  et intégrons l'équation (I-84)



sur  $r_1$  dans  $\mathcal{V}$  et sur  $t_1$  entre deux bornes arbitraires  $t_i$  et  $t_f$ . On obtient :

$$\int_{t_i}^{t_f} dt_1 \int_V (G \square_1 \varphi - \varphi \square_1 G) d^3 \vec{r}_1 = \int_{t_i}^{t_f} \int_V -(G \delta - \varphi \delta(\vec{r} - \vec{r}_1) \delta(t - t_1)) d^3 r_1 dt_1$$

soit encore :

$$\int_{t_i}^{t_f} dt_1 \int_V (G \Delta_1 \varphi - \varphi \Delta_1 G) d^3 \vec{r}_1 - \frac{1}{c^2} \int_{t_i}^{t_f} dt_1 \int_V \left( G \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t_1^2} - \varphi \frac{\partial^2 G}{\partial t_1^2} \right) d^3 \vec{r}_1 + \iint_V (G \delta - \varphi \delta(\vec{r} - \vec{r}_1) \delta(t - t_1)) d^3 r_1 dt_1 = 0$$

L'intégrale de volume du 1<sup>er</sup> terme est transformée en intégrale de surface <sup>(\*)</sup> grâce au théorème de Green. L'intégration sur  $t_1$  de la deuxième intégrale se fait à vue ainsi que l'intégrale impliquant les fonctions  $\delta$  au 3<sup>ème</sup> membre. On obtient (en notant par  $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$  la dérivée de  $\varphi$  selon la normale orientée à la surface) :

$$\int_{t_i}^{t_f} dt_1 \int_S \left( G \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial G}{\partial n} \right) d^2 \vec{r}_1 - \frac{1}{c^2} \int_V \left( G \frac{\partial \varphi}{\partial t_1} - \varphi \frac{\partial G}{\partial t_1} \right)_{t_i}^{t_f} d^3 r_1 + \iint_V G(\vec{r} - \vec{r}_1, t - t_1) \delta(\vec{r}_1; t_1) d^3 r_1 dt_1 = \varphi(\vec{r}, t) \quad (I-85)$$

L'expression générale (I-85) est valable quelles que soient les bornes d'intégration  $t_i$  et  $t_f$ . Étendons ces bornes à  $-\infty$  et  $+\infty$ . Il est facile

(\*) On utilise l'identité  $\int (G \Delta_1 \varphi - \varphi \Delta_1 G) d^3 r_1 = \int \nabla_1 \cdot (G \nabla_1 \varphi - \varphi \nabla_1 G) d^3 r_1$  et on remplace l'intégrale de volume de la divergence de  $(G \nabla_1 \varphi - \varphi \nabla_1 G)$  par le flux de ce vecteur sur la frontière  $S$  de  $V$ .

de voir que le crochet dans la 2<sup>ème</sup> intégrale du membre de gauche de (I-85) s'annule identiquement dans  $V$  :  $G(\vec{r}-\vec{r}_1, t-t_1)$  et  $\frac{\partial G}{\partial t_1}(\vec{r}-\vec{r}_1, t-t_1)$

sont en effet nuls pour  $t_1 = t_j$  suffisamment loin dans le passé ( $t_j < t - \sup(r - r_1)/c$ ) et ces quantités sont également nulles pour  $t_1 = t_f$  dès que  $t_f > t$  (voir I79). Il ne reste donc que la première et la troisième intégrales. En effectuant l'intégration sur  $t_1$  dans cette dernière, on obtient :

$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{S(\vec{r}_1, t - |\vec{r} - \vec{r}_1|/c)}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} d^3\vec{r}_1 + \int dt_1 \int_S (G \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial G}{\partial n}) d^2\vec{r}_1 \quad (\text{I-86 } a)$$

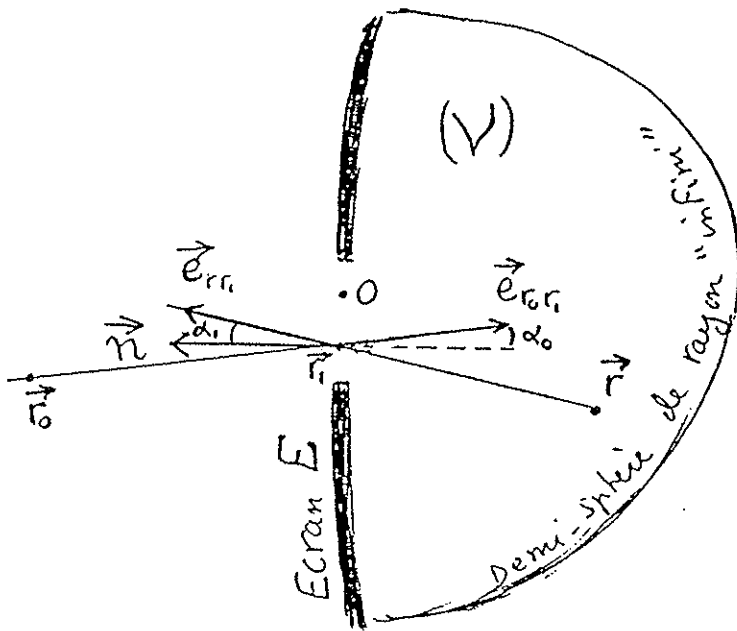
Utilisant la formule des potentiels retardés, nous pouvons aussi écrire:

$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{S(\vec{r}_1, t - |\vec{r} - \vec{r}_1|/c)}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} d^3\vec{r}_1 + \frac{1}{4\pi} \int_{\substack{\text{espace} \\ \text{extérieur à } V}} \frac{S(\vec{r}_1, t - |\vec{r} - \vec{r}_1|/c)}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} d^3\vec{r}_1 \quad (\text{I-86 } b)$$

Ainsi, comparant (I-86a) et (I-86b) nous voyons que le champ créé par les sources extérieures au volume  $V$  peut se calculer par une intégrale de surface portant sur la frontière  $S$  de  $V$  et faisant intervenir le champ et sa dérivée normale sur cette frontière. Il n'est donc pas nécessaire de connaître l'état des sources à l'extérieur d'un volume fermé pour déterminer la contribution de ces sources au champ dans ce volume : il suffit de connaître le champ et sa dérivée



sur la frontière de ce volume. C'est l'idée de base du principe d'Huyghens-Fresnel et de toute la théorie de la diffraction.



Précisons ce principe sur un exemple simple : une source située au point  $r_0$  rayonne une onde monochromatique vers l'ouverture  $O$  percée dans un écran  $E$ . On se propose de déterminer le champ en  $r$  de l'autre côté de l'écran. On applique la formule (I-86) en prenant le volume  $V$  limité par la surface de l'écran et de l'ouverture et une demi-sphère de rayon tendant vers l'infini sur la droite. On admet (hypothèses de Kirchhoff) que le champ est nul sur  $E$  et que dans l'ouverture il prend la valeur qu'il aurait au même point en l'absence de  $E$ . L'intégrale de surface sur la surface de l'infini s'annulant (voir plus haut) (I-86) s'écrit dans ce cas particulier et avec ces hypothèses :

$$\varphi(\vec{r}, t) = \int dt_1 \int_{\text{ouverture}} \left( G \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial G}{\partial n} \right) d^2 \vec{r}_1 \quad (\text{I-87})$$

avec  $\varphi$  donné en notation complexe au point  $r_1$  de l'ouverture par :

$$\varphi(\vec{r}_1, t) = \frac{e^{ik|\vec{r}_1 - \vec{r}_0|} e^{-i\omega t}}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_0|} \quad (\text{I-88})$$

Il reste à calculer  $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \vec{n} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}_1} \varphi$  et  $\frac{\partial G}{\partial n} = \vec{n} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}_1} G$

( $\vec{n}$  : vecteur unitaire normal en chaque point à la surface de l'ouverture, voir figure). On a :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \vec{n} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}_1} \varphi = ik \vec{n} \cdot \vec{e}_{\vec{r}_0 \vec{r}_1} \varphi(\vec{r}_1, t) - \frac{1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_0|} \vec{n} \cdot \vec{e}_{\vec{r}_0 \vec{r}_1} \varphi(\vec{r}_1, t) \quad (\text{I-89})$$

où  $\vec{e}_{\vec{r}_0 \vec{r}_1}$  est le vecteur unitaire dirigé du point  $\vec{r}_0$  vers le point  $\vec{r}_1$ . Si le point  $\vec{r}_0$  se trouve à une distance de l'écran grande devant  $\lambda = 2\pi/k$ , le deuxième terme est négligeable devant le 1<sup>er</sup> dans (I-89) et l'on a :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} \simeq ik \vec{n} \cdot \vec{e}_{\vec{r}_0 \vec{r}_1} \varphi(\vec{r}_1, t) \quad (\text{I-90})$$

De même :

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial n} = \vec{n} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}_1} G &= - \frac{1}{4\pi c} \vec{n} \cdot \vec{e}_{\vec{r}_0 \vec{r}_1} \frac{\delta'(t - t_1 - |\vec{r} - \vec{r}_1|/c)}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} \\ &- \frac{1}{4\pi} \vec{n} \cdot \vec{e}_{\vec{r}_0 \vec{r}_1} \frac{\delta(t - t_1 - |\vec{r} - \vec{r}_1|/c)}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^2} \end{aligned} \quad (\text{I-91})$$

( $\vec{e}_{r r_1}$  : vecteur unitaire dirigé de  $r$  vers  $r_1$  ).

Lorsqu'on multiplie cette distribution par  $\varphi$  et intègre sur  $t_1$ , la

première ligne de (I-91) donne un terme en :  $\frac{\omega}{c} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_1|} \varphi$

alors que la deuxième ligne donne un terme en :  $\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_1|^2} \varphi$ .

Si le point  $r$  se trouve à une distance de l'ouverture grande devant  $\lambda$ , on peut à nouveau négliger le 2<sup>ème</sup> terme et écrire :

$$\frac{\partial G}{\partial n} \simeq - \frac{1}{4\pi c} \vec{n} \cdot \vec{e}_{r r_1} \frac{\delta'(t-t_1 - |\vec{r}-\vec{r}_1|/c)}{|\vec{r}-\vec{r}_1|} \quad (\text{I-92})$$

Moyennant ces approximations, on obtient à partir de (I-87) :

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{r}, t) = & \frac{ik}{4\pi} \int dt_1 \int_{\text{ouverture}} \frac{\delta(t-t_1 - |\vec{r}-\vec{r}_1|/c)}{|\vec{r}-\vec{r}_1|} \varphi(\vec{r}_1, t_1) \vec{n} \cdot \vec{e}_{r_0 r_1} d^2 \vec{r}_1 \\ & + \frac{1}{4\pi c} \int dt_1 \int_{\text{ouverture}} \frac{\delta'(t-t_1 - |\vec{r}-\vec{r}_1|/c)}{|\vec{r}-\vec{r}_1|} \varphi(\vec{r}_1, t_1) \vec{n} \cdot \vec{e}_{r r_1} d^2 \vec{r}_1 \end{aligned} \quad (\text{I-93})$$

Soit encore en notant que

$$\vec{e}_{r_0 r_1} \cdot \vec{n} = -\cos \alpha_0 \quad \text{et} \quad \vec{e}_{r r_1} \cdot \vec{n} = \cos \alpha_1$$

(voir la définition des angles  $\alpha_0$  et  $\alpha_1$  sur la figure ci-dessus) et en effectuant les intégrations sur  $t_1$  :

$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{1}{i\lambda} \int_{\text{ouverture}} \chi \cdot \frac{\varphi(\vec{r}_1, t - |\vec{r} - \vec{r}_1|/c)}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} d^2\vec{r}_1 \quad (\text{I-94})$$

avec

$$\chi = \frac{1}{2} (\cos \alpha_0 + \cos \alpha_1) \quad (\text{I-95})$$

( $\chi$  est le facteur d'inclinaison,  $\alpha_0$  et  $\alpha_1$  étant les angles entre la normale à l'ouverture et les directions de la source et du point d'observation).

L'expression (I-94) résume le principe d'Huyghens-Fresnel. Elle peut encore s'écrire, compte tenu de (I-88) :

$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{1}{i\lambda} \int_{\text{ouverture}} \chi \cdot \frac{\varphi(\vec{r}_1, t) e^{ik|\vec{r} - \vec{r}_1|}}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} d^2\vec{r}_1 \quad (\text{I-96})$$

Tout se passe pour le calcul du champ à droite de l'ouverture comme si on remplaçait la source située en  $r_0$  à gauche et l'écran  $\mathcal{E}$  par une distribution de sources fictives situées sur l'ouverture, l'amplitude de la source fictive au point  $r_1$  de l'ouverture étant proportionnelle à la valeur du champ rayonné en ce point par la source réelle. (Principe des sources virtuelles secondaires). Nous avons raisonné sur une source ponctuelle monochromatique située en  $r_0$ . En appliquant le principe de superposition,

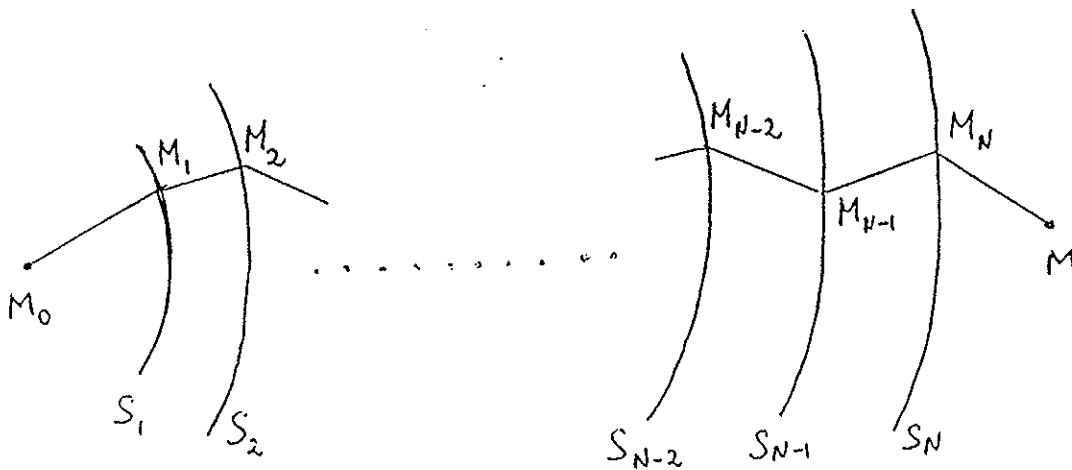
le raisonnement s'étend à une source monochromatique étendue formée d'un ensemble de points, pourvu que l'angle sous laquelle on la voit de l'ouverture soit petit. Dans un grand nombre d'applications, le facteur d'inclinaison  $\chi$  est pris égal à l'unité (petits angles  $\alpha_0$  et  $\alpha_1$ ).

**Remarques :** (I-96) est une formule approchée établie à partir des équations de Maxwell et des hypothèses de Kirchhoff ( nullité du champ et de sa dérivée "derrière" l'écran opaque, non perturbation du champ par les bords du diaphragme dans l'ouverture...). La consistance mathématique de ces hypothèses pose des problèmes dont la discussion sort du cadre de ce cours ( voir par exemple le livre de Jackson). Contentons nous d'indiquer que cette formule fournit une bonne approximation du champ pour des ouvertures pas trop petites. Elle ne sera plus valable si les ouvertures sont inférieures ou de l'ordre de la longueur d'onde . Le traitement complet du problème de la diffraction est très compliqué et technique (il faut en particulier décrire correctement les conditions aux limites sur les bords de l'écran, tenir compte du caractère vectoriel du champ etc..) L'équation (I-96) donne cependant une bonne approximation dans une grande variété d'expériences d'optique. Cette formule a été introduite par Fresnel et permet de retrouver la plupart des lois de l'optique ondulatoire.

9°) Conclusion : la synthèse de l'Electromagnétisme et de l'Optique :  
du principe de Huyghens-Fresnel au principe de Fermat

Nous avons présenté dans ce Chapitre le formalisme général de l'Electrodynamique en déduisant tous les résultats des équations de Maxwell-Lorentz. Nous avons montré comment ces équations prédisent l'existence d'ondes se propageant à la vitesse  $c$  et indiqué comment on pouvait calculer le champ à partir de la distribution des charges électriques et de leurs vitesses à chaque instant et en tout point de l'espace. Nous avons également montré que le champ pouvait être calculé

par le principe d'Huyghens-Fresnel à partir duquel ont été établies au XIX<sup>ème</sup> siècle toutes les lois de l'Optique ondulatoire (phénomènes d'interférence, de diffraction, lois de la réflexion et de la réfraction, etc...). Montrons pour conclure que ce formalisme général contient également, à la limite où les dimensions des ouvertures et des écrans sont grandes devant la longueur d'onde, les résultats de l'optique géométrique (notion de rayon lumineux).



Proposons-nous pour cela d'évaluer le champ produit au point  $M(\mathbf{r})$  par une source ponctuelle située en  $M_0(\mathbf{r}_0)$  en appliquant le principe d'Huyghens-Fresnel de proche en proche, à l'aide d'une succession de surfaces  $S_1, S_2, \dots, S_{N-2}, S_{N-1}, S_N$  réparties entre  $M_0$  et  $M$  (voir figure ci-dessus).

Appliquant la formule (I-96), le champ en  $M$  peut s'écrire :

$$\varphi(M, t) = \left( \frac{1}{i\lambda} \right) \sum_{M_N \in S_N} \chi_N \varphi(M_N, t) \frac{e^{ikM_N M}}{M_N M} \quad (\text{I-97})$$

et de proche en proche :

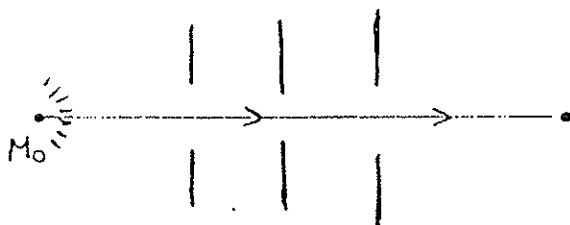
$\varphi(M, t) =$

$$\left(\frac{1}{i\lambda}\right)^N \sum_{\substack{M_1 \in S_1 \\ \vdots \\ M_N \in S_N}} \frac{\chi_1 \chi_2 \dots \chi_{N-1} \chi_N}{M_1 M_0 \cdot M_2 M_1 \dots M_{N-1} M_N \cdot M_N M} \cdot \varphi(M_0, t) \cdot e^{ik(M_0 M_1 + M_1 M_2 + \dots + M_N M)}$$

(I-98)

Le champ au point M apparaît ainsi comme une somme de contributions, une pour chaque "chemin"  $M_0 M_1 M_2 \dots M_{N-1} M_N M$ . Dans cette somme, chaque terme a une amplitude (déterminée par le quotient des  $\chi$  par le produit des distances élémentaires) et une phase déterminée par l'exponentielle  $e^{ikL}$  où  $L=M_0 M_1 + M_1 M_2 + \dots + M_{N-1} M_N + M_N M$  est la longueur du chemin. Lorsqu'on passe dans la sommation d'un chemin à un chemin voisin, le terme d'amplitude varie lentement en comparaison de la phase qui change beaucoup dès que L varie d'une quantité de l'ordre de  $\lambda=2\pi/k$ . En conséquence, les contributions des chemins interfèrent destructivement, sauf au voisinage du chemin de phase stationnaire, c'est-à-dire de la droite

$M_0 M$ . En d'autres termes, on peut interposer des écrans qui bloquent la contribution des chemins hors de cette droite (voir figure ci-contre) sans changer le champ au point M :



c'est ce qu'on exprime en disant que la lumière se propage en ligne droite. Noter que ce résultat n'est valable que si la taille des diaphragmes est

grande devant  $\lambda$ . Sinon, on commence à altérer la contribution de chemins n'interférant plus destructivement avec le chemin de phase stationnaire : on voit apparaître l'importance de la diffraction (déviation de l'optique géométrique) lorsque la dimension des ouvertures devient de l'ordre de  $\lambda$ .

Nous avons raisonné ici sur le champ dans l'espace libre. Nous verrons plus loin que la propagation du champ est décrite dans un milieu matériel à l'aide d'un indice de réfraction  $n(\vec{r})$ , le déphasage du champ sur une distance  $\ell$  devenant  $n(\vec{r}) k\ell = \frac{n(\vec{r}) \omega \ell}{c}$

et  $c/n$  étant la vitesse de phase du champ dans le milieu.

L'équation correspondant à (I-98) dans un milieu matériel fait alors apparaître un terme de phase

$$e^{i \frac{\omega}{c} (n_1 M_0 M_1 + n_2 M_1 M_2 + \dots + n_N M_N M)}$$

et seuls contribuent au champ en M les chemins tels que

$$\delta \left[ \int_{\text{chemin}} \frac{n(\vec{r}) d\ell}{c} \right] = 0 \quad (\text{I-99})$$

pour une petite variation du chemin, ce que l'on exprime encore par

$$\delta T_{\text{chemin}} = 0 \quad (\text{I-100})$$

où  $T_{\text{chemin}}$  est le temps de propagation de la lumière le long du chemin dans



le milieu. Le résultat (I-100) exprime le principe de Fermat : la lumière suit pour se propager d'un point à un autre le chemin correspondant à un extremum du temps de propagation. Ce principe n'est valable que lorsque la diffraction est négligeable. Il permet d'établir les lois bien connues de l'optique des rayons lumineux (lois de Snell-Descartes). Nous avons fait ainsi le pont entre l'Electricité, le Magnétisme et l'Optique et établi toutes les bases de L'Electrodynamique classique.



COMPLEMENT A<sub>I</sub>

## INVARIANCE RELATIVISTE DE L'ELECTRODYNAMIQUE

Les équations de l'Electrodynamique présentent la propriété très importante d'être invariantes par transformation de Lorentz, c'est-à-dire de se mettre sous une forme identique dans tous les référentiels galiléens. Cette invariance, à l'origine de la découverte de la théorie de la relativité, est particulièrement claire lorsqu'on met les équations sous forme covariante, en explicitant le caractère tensoriel des différentes quantités physiques relatives aux champs et aux particules. Dans ce bref résumé, il n'est pas question de refaire un cours de relativité, mais seulement de rappeler le formalisme et de présenter les équations de Maxwell-Lorentz sous leur forme covariante, en en tirant quelques conséquences.

1°) Rappels d'algèbre tensorielle - Notations

Rappelons que les quatre composantes  $x=x^{(1)}$ ,  $x^{(2)}=y$ ,  $x^{(3)}=z$ ,  $x^{(4)}=ct$  d'un évènement se transforment par la transformation de Lorentz. Pour le passage dans un repère en translation à la vitesse  $v$  le long de  $Ox$ , cette transformation s'écrit (transformation de Lorentz spéciale) :

$$\begin{pmatrix} x^{(1')} \\ x^{(2')} \\ x^{(3')} \\ x^{(4')} \end{pmatrix} = L \begin{pmatrix} x^{(1)} \\ x^{(2)} \\ x^{(3)} \\ x^{(4)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{(1)} \\ x^{(2)} \\ x^{(3)} \\ x^{(4)} \end{pmatrix} \quad (A_I^{-1})$$

avec les notations:

$$\beta = v/c : \gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$$



On écrira l'équation (A<sub>I</sub>-1) sous la forme condensée:

$$x'^j = L^j_k x^k$$

en adoptant la règle de sommation d'Einstein sur les indices répétés une fois en position haute dite contravariante et une fois en position basse dite covariante (on somme ici sur l'indice k).

Tout ensemble de quatre quantités se transformant les unes dans les autres suivant cette relation est un quadrivecteur (contravariant).

Exemples :

Quadrivecteur énergie impulsion	$\vec{P}, E/c$
Quadrivecteur gradient	$\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}, -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}$ noté $\nabla^i$

Le produit scalaire de deux vecteurs  $A^i$  et  $B^i$  s'écrit:

$$A \cdot B = g_{ij} A^i B^j = A^1 B^1 + A^2 B^2 + A^3 B^3 - A^4 B^4$$

où  $g_{ij}$  est le tenseur métrique défini par:

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (A_I-2)$$

On notera que la définition du produit scalaire en fonction du tenseur métrique satisfait bien à la règle de sommation sur les indices répétés: on somme sur i et j et le caractère diagonal de  $g_{ij}$  entraîne la présence des seuls termes carrés dans le produit scalaire.

Comme son nom l'indique, le produit scalaire est invariant par transformation de Lorentz :

Exemples :

$$\square = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

---

\* On notera également qu'il existe une autre convention possible pour le produit scalaire correspondant au tenseur métrique opposé  $g_{ij} = -\delta_{ij}$ .

sont des invariants.

A partir de deux vecteurs, on peut former un tenseur à deux indices :

$$T^{ij} = A^i B^j \quad (A_I-3)$$

qui se transforme suivant la loi

$$T'^{ij} = L^i_k L^j_m T^{km} \quad (\text{sommation sur les indices répétés}) \quad (A_I-4)$$

Toute combinaison linéaire de produits tensoriels obéit à la même loi de transformation. Il en est de même du tenseur antisymétrique :

$$F^{ij} = A^i B^j - A^j B^i \quad (A_I-5)$$

### Transformation d'un champ vectoriel ou tensoriel

En électromagnétisme, nous sommes amenés à définir la transformation d'un champ de vecteurs ou de tenseurs défini en chaque point de l'espace temps  $x, y, z, t$ . Dans la transformation de Lorentz  $L$ ,  $x, y, z, t$  deviennent  $x', y', z', t'$ . Le champ au point  $r', t'$  sera transformé du champ au point  $r, t$ . S'il s'agit d'un champ de vecteurs  $A^i(r, t)$ , on aura donc :

$$A'^i(x', y', z', t') = L^i_j A^j(x, y, z, t) \quad (\text{sommation sur les indices répétés}) \quad (A_I-6)$$

soit encore puisque

$$x^i = (L^{-1})^i_j x'^j$$

$$A'^i [x', y', z', t'] = L^i_j A^j [L^{-1}(x')] \quad (A_I-7)$$

Pour trouver le champ en un point du nouveau repère, il faut déterminer par  $L^{-1}$  le point auquel il correspond dans l'ancien repère et effectuer la transformation  $L$  sur le champ en ce point.

De même pour un champ tensoriel :

$$F'^{ij}(x') = L^i_k L^j_m F^{km} [L^{-1}(x')] \quad (A_I-8)$$

## 2°) Caractère tensoriel des grandeurs de l'Electrodynamique

La charge électrique d'une particule est une grandeur scalaire (invariante par transformation de Lorentz). S'il n'en n'était pas ainsi, la charge dépendrait de la vitesse des particules, ce qui serait en contradiction avec la neutralité électrique des atomes ou molécules où les vitesses des électrons et noyaux varient dans une large domaine. Il en résulte que les quatre quantités  $j(r,t)$  et  $cp(r,t)$  constituent un champ de quadrivecteurs.

L'argument pour le démontrer est le suivant : considérons une particule de dimension petite finie, centrée en  $r$  à l'instant  $t$  et ayant un volume  $\Delta V$ . Appelons  $\rho$  la densité de charge (supposée uniforme) de la particule. On a :

$$q = \rho \Delta V$$

Effectuons à présent une transformation de Lorentz. Dans le nouveau repère, la particule a un volume  $\Delta V'$  et une densité de charge  $\rho'$  telle que :

$$\rho' \Delta V' = \rho \Delta V$$

Ainsi  $\rho \Delta V$  est un invariant relativiste. Il en résulte que la quantité

$$\rho \Delta V dx_{\alpha}^1$$

(où  $dx_{\alpha}^1$  représente l'intervalle entre deux événements infiniment proches associés au passage de la particule en deux points voisins) est un quadrivecteur. Il en est de même de la quantité :

$$\rho \Delta V dt \frac{dx_{\alpha}^1}{dt}$$

Or, dans une transformation de Lorentz  $\Delta V dt$  (élément d'hypervolume) est invariant. On en déduit que

$$\rho \frac{dx_{\alpha}^1}{dt}$$

est un quadrivecteur. Faisons à présent tendre vers zéro la taille de la particule.  $\rho$  tend alors vers la distribution de Dirac  $q \delta[\vec{r} - \vec{r}_{\alpha}(t)]$ .

On en déduit que :



$$\left. \begin{aligned} q \frac{dx_\alpha}{dt} \delta[\vec{r} - \vec{r}_\alpha(t)] \\ q \frac{dy_\alpha}{dt} \delta[\vec{r} - \vec{r}_\alpha(t)] \\ q \frac{dz_\alpha}{dt} \delta[\vec{r} - \vec{r}_\alpha(t)] \\ q \quad c \quad \delta[\vec{r} - \vec{r}_\alpha(t)] \end{aligned} \right\}$$

est un quadrivecteur noté  $j^i$

et par sommation sur l'ensemble des particules, il en est de même de  $\vec{j}$  et  $c\rho$ . A partir de cette propriété fondamentale, on déduit immédiatement le caractère tensoriel de toutes les grandeurs de l'électromagnétisme et le caractère invariant des équations de Maxwell. En effet, l'équation :

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} &= 0 \\ \text{s'écrit simplement :} & \\ g_{ij} \nabla^i j^j &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A}_I-9)$$

Il s'agit d'un produit scalaire de deux vecteurs, manifestement invariant relativiste  $\Rightarrow$  cette équation prend la même forme dans tous les repères de Lorentz. L'équation des potentiels (en jauge de Lorentz) impose alors que  $\vec{A}$  et  $U/c$  soient les quatre composantes d'un quadrivecteur noté  $A^i$  :

$$\square A^i = - \frac{1}{\epsilon \cdot c^2} \cdot j^i \quad (\text{A}_I-10)$$

La condition de Lorentz est elle-même invariante relativiste :

$$g_{ij} \nabla^i A^j = 0 \quad (\text{A}_I-11)$$

Notons d'ailleurs en passant que l'équation des potentiels est invariante

relativiste dans n'importe quelle jauge si  $A, U/c$  est un quadrivecteur. Elle s'écrit en effet :

$$\square A^i = - \frac{1}{\epsilon_0 c^2} j^i + \nabla^i (g_{jk} A^k) \quad (\text{A}_I-12)$$

Enfin, les champs  $E$  et  $B$  apparaissent comme les 6 composantes indépendantes du tenseur antisymétrique :

$$F^{ij} = \nabla^i A^j - \nabla^j A^i \quad (\text{A}_I-13)$$

On a en effet immédiatement :

$$F^{ij} = \begin{pmatrix} 0 & B_z & -B_y & -E_x/c \\ -B_z & 0 & B_x & -E_y/c \\ B_y & -B_x & 0 & -E_z/c \\ \frac{E_x}{c} & \frac{E_y}{c} & \frac{E_z}{c} & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A}_I-14)$$

Remarques :

Les équations de Maxwell elles-mêmes se mettent sous la forme covariante : les équations inhomogènes (dépendant de  $\rho$  et  $j$ ) se regroupent sous la forme :

$$g_{ij} \nabla^i F^{jk} = - \frac{1}{\epsilon_0 c^2} j^k \quad (\text{A}_I-15)$$

et les équations homogènes deviennent :

$$\epsilon_{ijkl} \nabla^i F^{jk} = 0 \quad (\text{A}_I-16)$$

où  $\varepsilon_{ijkl}$  est le tenseur d'ordre 4 égal à 1 si  $ijkl$  est obtenu à partir de 1234 par une permutation paire et nul sinon.

L'équation de la dynamique de la particule  $\alpha$  (impulsion  $P_\alpha$ , énergie  $E_\alpha$ ) se met également sous forme covariante :

$$\frac{d P_\alpha^i}{d\tau} = q g_{jk} F^{ij} \frac{d x_\alpha^k}{d\tau} \quad (\text{A}_I\text{-17})$$

Dans cette équation  $d\tau = dt \sqrt{1 - v_\alpha^2/c^2}$

est la différentielle du temps propre de la particule (quantité scalaire).

Les trois équations d'espace ( $i=1,2,3$ ) correspondent à l'équation de Lorentz :

$$\frac{d \vec{P}_\alpha}{dt} = q (\vec{E} + \vec{V}_\alpha \times \vec{B}) \quad (\text{A}_I\text{-18})$$

et l'équation du temps ( $i=4$ ) correspond à la conservation de l'énergie

$$\frac{d E_\alpha}{dt} = q \vec{E} \cdot \vec{V}_\alpha \quad (\text{A}_I\text{-19})$$

(la variation de l'énergie de la particule est égale au travail de la force de Lorentz).

### 3°) Transformation des champs et des potentiels

On déduit du caractère vectoriel des  $A_i$  et tensoriel des  $F_{ik}$  les transformations suivantes pour les potentiels et les champs dans un changement de repère galiléen (nouveau repère en translation à la vitesse  $v$  le long de  $ox$ ) :

$$\begin{cases} A'_x = \gamma A_x - \frac{\beta\gamma}{c} U \\ A'_y = A_y \\ A'_z = A_z \\ \frac{U'}{c} = -\beta\gamma A_x + \gamma \frac{U}{c} \end{cases} \quad (A_I-20)$$

$$\left( \beta = \frac{v}{c} \quad \text{et} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right)$$

et pour les champs

$$\begin{cases} E'_x = E_x \\ E'_y = \gamma (E_y - c\beta B_z) \\ E'_z = \gamma (E_z + c\beta B_y) \end{cases} \quad \begin{cases} B'_x = B_x \\ B'_y = \gamma (B_y + \beta \frac{E_z}{c}) \\ B'_z = \gamma (B_z - \beta \frac{E_y}{c}) \end{cases} \quad (A_I-21)$$

Les champs au 2<sup>ème</sup> membre de ces équations doivent être évalués au point  $L^{-1}(x')$ .

**Remarque importante :** (pour ceux qui connaissent un peu d'algèbre tensorielle) :

Nous avons systématiquement adopté dans ce résumé le point de vue des grandeurs contravariantes ( $\nabla_i, j^i, A_i, F_{ik}$  sont des vecteurs ou des tenseurs contravariants). L'introduction de vecteur covariant tel que

$\nabla_i = g_{ij} \nabla^j$  nous aurait permis de simplifier certaines formules en écrivant le produit scalaire de deux vecteurs sous la forme  $A_j B^j$ . Par exemple, l'équation de conservation de la charge s'écrit :

$$\nabla_j j^j = 0 \quad (\text{sommation sur les indices répétés en position covariante et contravariante})$$

la condition de jauge de Lorentz :

$$\nabla_j A^j = 0$$

les équations de Maxwell :

$$\begin{cases} \nabla_i F^{ij} = -\frac{1}{\epsilon_0 c^2} j^j \\ \epsilon_{ijkl} \nabla^i F^{jk} = 0 \end{cases}$$

et l'équation de la force de Lorentz :

$$\frac{d p_\alpha^i}{d\tau} = q F_j^i \frac{d x_\alpha^j}{d\tau}$$

#### Application : champ d'une charge en mot uniforme

Soit  $O'x'y'z'$  le référentiel propre attaché à la charge obéissant à la loi horaire  $\underline{x} = \underline{v}t$ . Dans ce référentiel :

$$\vec{E}' = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}'}{r'^3} \quad (\text{A}_I-22)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} E'_x = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x'}{[x'^2 + y'^2 + z'^2]^{3/2}} \\ E'_y = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{y'}{[x'^2 + y'^2 + z'^2]^{3/2}} \\ E'_z = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{z'}{[x'^2 + y'^2 + z'^2]^{3/2}} \end{array} \right. \quad (\text{A}_I\text{-23})$$

$$\begin{array}{l} B'_x = 0 \\ B'_y \\ B'_z \end{array}$$

Le référentiel du Laboratoire se déplace à la vitesse  $-v$  le long de  $Ox$ . On en déduit :

$$\left\{ \begin{array}{l} E_x = E'_x \\ E_y = \gamma E'_y \\ E_z = \gamma E'_z \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} B_x = 0 \\ B_y = -\frac{\gamma\beta}{c} E'_z \\ B_z = \frac{\gamma\beta}{c} E'_y \end{array} \right. \quad (\text{A}_I\text{-24})$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = \gamma (x - Vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma (t - Vx/c^2) \end{array} \right.$$

D'où les champs de la charge en mouvement :

$$\left\{ \begin{array}{l} E_x = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma (x - Vt)}{[\gamma^2 (x - Vt)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} \\ E_y = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma y}{[\gamma^2 (x - Vt)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} \\ E_z = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma z}{[\gamma^2 (x - Vt)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} \end{array} \right. \quad (\text{A}_I\text{-25})$$

$$\begin{cases} B_x = 0 \\ B_y = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \gamma V \frac{z}{[\gamma^2 (x-Vt)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} \\ B_z = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \gamma V \frac{y}{[\gamma^2 (x-Vt)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} \end{cases} \quad (\text{A}_I-26)$$

Limite non relativiste  $\gamma \cong 1$

E est le champ de Coulomb instantané centré sur la position de la charge et l'on a :

$$\vec{E} \simeq \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \frac{\vec{r}}{r^3} \quad (\vec{r} \text{ vecteur instantané dirigé de la charge vers le point d'observation})$$

$$\vec{B} \simeq \frac{\mu_0}{4\pi} q \frac{\vec{V} \times \vec{r}}{r^3} \quad (\text{Loi de Biot et Savart})$$

Lorsque  $\frac{v}{c}$  n'est plus très petit, le terme en  $\gamma$  modifie la distribution du champ (applatissage de la distribution).





COMPLEMENT B<sub>1</sub>

## ELECTRODYNAMIQUE ET PRINCIPE VARIATIONNEL

1°) Position du problème : principe variationnel de moindre action

Les équations de l'Electrodynamique peuvent, comme celles d'un système mécanique de particules, se déduire d'un principe variationnel de moindre action. Nous nous proposons dans ce complément de présenter rapidement ce point de vue, qui constitue ce qu'on appelle la théorie Lagrangienne des champs et présente l'électromagnétisme sous une forme directement quantifiable.

La théorie que nous allons présenter généralise, pour un système présentant un nombre infini de degrés de libertés, la théorie Lagrangienne des systèmes mécaniques à nombre fini de degrés de liberté.

L'état dynamique du champ est décrit à tout instant par la donnée de la valeur des composantes du champ en chaque point  $r$  de l'espace  $[E(r,t), B(r,t)]$ . Alternativement, on peut se donner les quatre composantes du quadrivecteur potentiel  $A^j(r,t)$  ainsi que leurs dérivées temporelle et spatiale. Ainsi les quantités  $A^j(r,t)$  et leurs dérivées jouent pour le champ le rôle des quantités  $x^j(\alpha,t)$  et  $\dot{x}^j(\alpha,t)$  qui représentent les coordonnées de la position et de la vitesse des particules matérielles dans le cas d'un système mécanique, avec la correspondance :

$$x^j \Leftrightarrow A^j$$

$$\alpha \Leftrightarrow r$$



l'indice discret  $\alpha$  est remplacé par un indice continu  $r$ . Les "coordonnées des particules" sont remplacées par les données des potentiels en chaque point. Remarquons que les dérivées spatiales de  $A^j$  n'ont pas d'analogie directe pour un système discret.

Le problème variationnel à traiter se pose de la façon suivante :

• On suppose connus les deux états dynamiques du champ correspondant à un instant initial  $t_1$  et un instant final  $t_2$ , c'est-à-dire qu'on se donne en tous points de l'espace les fonctions  $A^j(r, t_1)$  et  $A^j(r, t_2)$  et on se propose de déterminer l'"histoire" du champ entre les instants  $t_1$  et  $t_2$ , c'est-à-dire les fonctions  $A^j(r, t)$  à tous les instants  $t$  tels que  $t_1 < t < t_2$ .

•• Pour effectuer cette détermination, on utilise la méthode suivante : on considère toutes les "histoires" possibles définies par toutes les fonctions  $A^j(r, t)$  satisfaisant aux conditions aux limites

$$\begin{aligned} A^j(r, t_1) &= A_1^j(r) && \text{(fonctions imposées aux} \\ A^j(r, t_2) &= A_2^j(r) && \text{instants } t_1 \text{ et } t_2) \end{aligned} \quad (B_1-1)$$

••• A chaque "histoire" on associe une densité de Lagrangien

$L(A^j(r, t); \dot{A}^j(r, t), \frac{\partial}{\partial x^i} A^j(r, t))$  qui dépend en tout point de l'état dynamique

du champ, c'est-à-dire des potentiels et de leur dérivées temporelles et spatiales ( $i=1,2,3$ ). Cette densité de Lagrangien permet, par intégration sur  $r$  de définir la fonction de Lagrange du système :

$$L = \int d^3r \mathcal{L}(r,t) \quad (\text{B1-2})$$

de la même façon qu'en sommant sur les diverses particules d'un système mécanique, on détermine le Lagrangien total de ce système.

À partir de ce Lagrangien, on définit enfin un nombre  $S$  appelé "action" associée à l'histoire considérée par l'intégration temporelle entre  $t_1$  et  $t_2$  :

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3r \mathcal{L}(r,t) \quad (\text{B1-3})$$

L'"histoire" réelle du champ entre  $t_1$  et  $t_2$  est celle qui rend  $S$  extrémale par rapport à toute variation infinitésimale des fonctions  $A_j$  compatible avec les conditions aux limites imposées.

Les problèmes qui se posent alors sont :

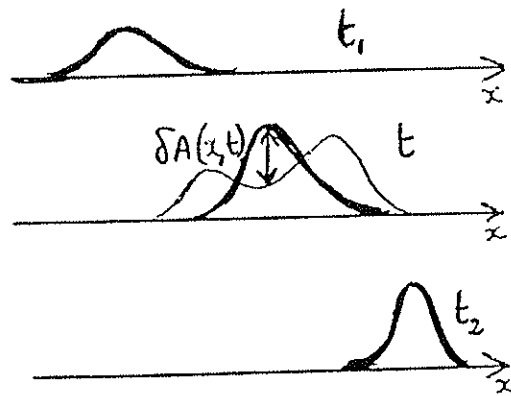
(i) Transformer ce principe variationnel intégral en équation différentielle décrivant la propagation locale du champ (équation de Lagrange).

(ii) Trouver pour chaque situation physique, un Lagrangien dont les équations de Lagrange associées correspondent aux équations différentielles d'évolution du système (dans le cas de l'électromagnétisme, il faut que les équations de Lagrange correspondent aux équations de Maxwell).

2°) Equations de Lagrange pour un champ scalaire dans un espace

à 1 dimension

Avant de passer au problème de l'électromagnétisme (champ à quatre composantes défini dans un espace à trois dimensions), nous allons établir les équations de Lagrange dans une situation plus simple, celle d'un système correspondant à un champ scalaire (une seule fonction  $A$  notée  $A$ ) dans un espace à une dimension (notée  $x$ ). Il s'agit par exemple d'étudier les vibrations transversales d'une corde. ( $A$  représente l'élongation transversale au point  $x$  dans ce cas).



La figure ci-dessus représente en traits gras l'état dynamique initial et final (connus) du système aux instants  $t_1$  et  $t_2$  ainsi que l'état (inconnu) du système à un instant  $t$  intermédiaire. En traits fins, on représente également une histoire "possible" correspondant à une fonction  $A(x,t)$  quelconque et on appelle  $\delta A(x,t)$  la variation entre la solution réelle et l'histoire "possible".

$\delta A(x,t)$  doit satisfaire aux conditions limites :

$$\delta A(x,t_1) = 0$$

$$\delta A(x,t_2) = 0$$

(B1-4)

car toutes les histoires considérées doivent avoir les mêmes états initial et final. De plus, on peut en général imposer la condition :

$$\delta A(x,t) = 0 \quad \text{pour } x = \pm \infty \quad (\text{B1-5})$$

qui implique que le champ est nul à tout instant à l'infini. (Ce qui est toujours vrai d'un champ physique produit par des sources à distance finie). Dans l'exemple de la corde vibrante, ses extrémités sont en général fixes et la dernière condition devient  $\delta A(x_1,t) = \delta A(x_2,t) = 0$  où  $x_1$  et  $x_2$  sont les extrémités de la corde.

Ecrivons la variation de la densité de Lagrangien associée à la variation  $\delta A$  :

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial A} \delta A + \frac{\partial L}{\partial \dot{A}} \delta \dot{A} + \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{\partial A}{\partial x} \right)} \delta \left( \frac{\partial A}{\partial x} \right) \quad (\text{B1-6})$$

Remarquons de plus que l'on a évidemment :

$$\delta \dot{A} = \frac{\partial}{\partial t} (\delta A) \quad \text{et} \quad \delta \left( \frac{\partial A}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (\delta A)$$

ce qui permet de réécrire :

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial A} \delta A + \frac{\partial L}{\partial \dot{A}} \frac{\partial}{\partial t} (\delta A) + \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{\partial A}{\partial x} \right)} \frac{\partial}{\partial x} (\delta A) \quad (\text{B1-7})$$

On en déduit la variation totale du Lagrangien :

$$\delta L = \int \left[ \frac{\partial L}{\partial A} \delta A + \frac{\partial L}{\partial \dot{A}} \frac{\partial}{\partial t} (\delta A) + \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{\partial A}{\partial x} \right)} \frac{\partial}{\partial x} (\delta A) \right] dx \quad (\text{B1-8})$$

On remarque que la dernière partie de l'intégrale s'intègre par parties :

$$\begin{aligned} \int \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{\partial A}{\partial x} \right)} \frac{\partial}{\partial x} (\delta A) dx &= \left[ \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{\partial A}{\partial x} \right)} \delta A \right]_{-\infty}^{+\infty} - \int \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{\partial A}{\partial x} \right)} \right) \delta A dx \\ &= - \int \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{\partial A}{\partial x} \right)} \right) \delta A dx \quad (\text{B1-9}) \end{aligned}$$

(la partie intégrée est nulle car  $\delta A = 0$  à l'infini).

D'où la variation de l'action :

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \int \left[ \frac{\partial L}{\partial A} \delta A + \frac{\partial L}{\partial \dot{A}} \frac{\partial}{\partial t} \delta A - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{\partial A}{\partial x} \right)} \right) \delta A \right] dx dt \quad (\text{B1-10})$$

Le 2<sup>ème</sup> terme de l'intégrale ci-dessus s'intègre également par parties sur le temps, avec une partie intégrée nulle ( $\delta A(t_1) = \delta A(t_2) = 0$ ) : on a donc enfin :

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \int dx \left[ \frac{\partial L}{\partial A} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial \dot{A}} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{\partial A}{\partial x} \right)} \right) \right] \delta A \quad (\text{B}_I-11)$$

Le principe variationnel impose  $\delta S = 0$  pour toute variation infinitésimale  $\delta A(x,t)$ . Choisissons :

$$\delta A(x,t) = \epsilon \delta(x-x_0) \delta(t-t_0)$$

La condition  $\delta S = 0$  impose alors, pour tout  $x_0$  et  $t_0$  que l'on ait :

$$\frac{\partial L}{\partial A} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial \dot{A}} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{\partial A}{\partial x} \right)} \right) = 0 \quad (\text{B}_I-12)$$

C'est l'équation de Lagrange pour un champ scalaire à une dimension.

**Exercice :** Montrer que pour une corde vibrante, l'équation de propagation  $\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = 0$  ( $v$  : vitesse de propagation de l'onde dépendant de la tension et de la densité linéaire), dérive d'une densité de Lagrangien de la forme :

$$L = \frac{1}{v^2} \dot{A}^2 - \left( \frac{\partial A}{\partial x} \right)^2$$

3°) Généralisation pour un champ à quatre composantes dans l'espace à trois dimensions. Lagrangien du champ électromagnétique



Le raisonnement variationnel précédent se généralise aisément à un problème où l'on a quatre fonctions  $A_j$  et où  $x$  est remplacé par  $r = (x,y,z)$ . On obtient immédiatement les quatre équations de Lagrange (obtenues en faisant varier indépendamment les  $A_j$ ) :

$$\frac{\partial L}{\partial A_j} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial \dot{A}_j} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial A_j}{\partial x}\right)} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial A_j}{\partial y}\right)} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial A_j}{\partial z}\right)} = 0 \quad (\text{BI-13})$$

Il nous reste à trouver la densité du Lagrangien  $L$  pour laquelle les équations ci-dessus se réduisent aux équations de Maxwell. Nous pouvons pour cela nous laisser guider par des arguments de symétrie, d'invariance relativiste, etc...

$L$  doit dépendre de  $A_j$ ,  $\dot{A}_j$  et  $\frac{\partial A_j}{\partial x^i}$  ainsi bien entendu que de  $\rho$  et  $j$ .  $L$  n'a pas une forme unique. Plusieurs Lagrangiens peuvent en effet conduire aux mêmes équations de Lagrange. Nous nous contenterons de donner ici le Lagrangien habituellement utilisé :

$$L = \frac{c_0}{2} (E^2 - c^2 B^2) + g_{ij} A^i j^j \quad (\text{BI-14})$$

( $E$  et  $B$  doivent bien sûr être remplacés par leurs expressions en fonction de  $A_j$  pour écrire les équations de Lagrange).

Notons que  $L$  se met également sous la forme :

$$L = - \frac{z_0 c^2}{4} g_{ik} g_{jm} F^{ij} F^{km} + g_{ij} A^i j^j \quad (\text{BI-15})$$

ou encore, en utilisant les notations covariantes et contravariantes :

$$L = - \frac{\epsilon_0 c^2}{4} F^j_k F^k_j + A_j j^j \quad (\text{BI-16})$$

Il reste bien sûr à montrer que ce Lagrangien correspond bien aux équations de Maxwell habituelles.

#### 4°) Les équations de Maxwell à partir des équations de Lagrange

En explicitant  $L$ , on obtient :

$$L = \frac{\epsilon_0}{2} \{ (\dot{\mathbf{A}} + \nabla U)^2 - c^2 (\nabla \times \mathbf{A})^2 \} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{j} - \rho U \quad (\text{BI-17})$$

(on revient à présent aux notations habituelles des potentiels vecteurs et scalaires). On obtient alors :

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial A^i} &= j^i \quad (i=1,2,3) \quad ; \quad \frac{\partial L}{\partial U} = -\rho \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{A}^i} &= -\epsilon_0 E_i \quad (i=1,2,3) \quad ; \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{U}} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{\partial A^x}{\partial x} \right)} &= 0 \quad ; \quad \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{\partial A^y}{\partial x} \right)} = -\epsilon_0 c^2 B_z \quad ; \quad \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{\partial A^z}{\partial x} \right)} = \epsilon_0 c^2 B_y \quad ; \quad \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)} = -\epsilon_0 E_x \\ \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{\partial A^x}{\partial y} \right)} &= \epsilon_0 c^2 B_z \quad ; \quad \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{\partial A^y}{\partial y} \right)} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{\partial A^z}{\partial y} \right)} = -\epsilon_0 c^2 E_x \quad ; \quad \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{\partial U}{\partial y} \right)} = -\epsilon_0 E_y \\ \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{\partial A^x}{\partial z} \right)} &= -\epsilon_0 c^2 B_y \quad ; \quad \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{\partial A^y}{\partial z} \right)} = \epsilon_0 c^2 B_x \quad ; \quad \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{\partial A^z}{\partial z} \right)} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{\partial U}{\partial z} \right)} = -\epsilon_0 E_z \end{aligned}$$

(B1-18)

D'où l'équation de Lagrange en U :

$$-\rho + \epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (\text{B1-19})$$

l'équation de Lagrange en  $A_x$  :

$$j_x + \epsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} - \epsilon_0 c^2 \frac{\partial B_z}{\partial y} + \epsilon_0 c^2 \frac{\partial B_y}{\partial z} = 0$$

Soit encore :

$$(\nabla \times \mathbf{B})_x - \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_x}{\partial t} - \frac{1}{\epsilon_0 c^2} j_x = 0 \quad (\text{B1-20})$$

De même pour les équations de Lagrange en  $A_y$  et  $A_z$ . On retrouve bien ainsi deux des équations de Maxwell :

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho / \epsilon_0 \quad (\text{B1-21})$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \mathbf{j} \quad (\text{B1-22})$$

Les deux autres :

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

sont bien entendu implicitement contenues dans la définition de  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  à partir de  $\mathbf{A}$  et  $U$ .

5°) Lagrangien du système charges + champ en interaction.

La force de Lorentz à partir des équations de Lagrange

Nous avons supposé jusqu'à présent que l'état des charges était imposé a priori (données des fonctions  $j$  et  $\rho$ ). En fait, les particules chargées font également partie du système dynamique et leurs variables dynamiques (positions, vitesses) doivent apparaître comme telles dans le Lagrangien du système global charges + champ.

Il nous faut donc exprimer le terme d'interaction dans le Lagrangien en fonction des  $r_\alpha$  et  $\dot{r}_\alpha$  des particules, ce que l'on obtient simplement en explicitant  $\rho$  et  $j$  :

$$\rho = \sum_{\alpha} q_{\alpha} \delta[\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\alpha}(t)]$$

$$\mathbf{j} = \sum_{\alpha} q_{\alpha} \dot{\mathbf{r}}_{\alpha} \delta[\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\alpha}(t)]$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned} & \iiint [ \mathbf{A}(\mathbf{r},t) \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r},t) - U(\mathbf{r},t) \rho(\mathbf{r},t) ] d^3r \\ &= \sum_{\alpha} \{ q_{\alpha} \dot{\mathbf{r}}_{\alpha} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}_{\alpha},t) - q_{\alpha} U(\mathbf{r}_{\alpha},t) \} \end{aligned} \quad (\text{B1-23})$$

Il faut bien entendu que le Lagrangien global décrive également l'évolution des particules libres en absence de couplage avec le champ (à la limite où les  $q_\alpha \rightarrow 0$ ). Il faut donc ajouter le Lagrangien des particules libres, qui s'écrit :

$$L_{\text{particules}} = \sum_{\alpha} \{ -m_{\alpha} c^2 \sqrt{1 - \dot{\mathbf{r}}_{\alpha}^2 / c^2} \} \quad (\text{B1-24})$$

ou à la limite non relativiste :

$$L_{\text{particules}} \cong \sum_{\alpha} \frac{m_{\alpha} \dot{\mathbf{r}}_{\alpha}^2}{2} \quad (\text{B1-25})$$

Finalement, le système charges + champ est décrit par le Lagrangien global :

$$L = \sum_{\alpha} \{ -m_{\alpha} c^2 \sqrt{1 - \dot{\mathbf{r}}_{\alpha}^2 / c^2} \} + \frac{\epsilon_0}{2} \iiint (\mathbf{E}^2 - c^2 \mathbf{B}^2) d^3\mathbf{r} + \sum_{\alpha} \{ q_{\alpha} \dot{\mathbf{r}}_{\alpha} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}_{\alpha} t) - q_{\alpha} U(\mathbf{r}_{\alpha} t) \} \quad (\text{B1-26})$$

et se met sous la forme d'une somme de 3 termes : le Lagrangien des particules, celui du champ et le terme d'interaction.

Nous avons déjà montré que ce Lagrangien conduit, pour une distribution de champ et de courants donnés aux équations de Maxwell. Il reste à montrer que pour un champ imposé, il conduit par variation des

trajectoires des particules à l'équation de la dynamique avec la force de Lorentz. Il suffit pour cela d'expliciter l'équation de Lagrange pour un système à nombre fini de degrés de liberté :

$$\frac{\partial L}{\partial x_\alpha^j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\alpha^j} = 0 \quad (j = 1, 2, 3) \quad (\text{B1-27})$$

avec :

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_\alpha^j} &= q_\alpha \mathbf{r}_\alpha \frac{\partial A}{\partial x_\alpha^j}(\mathbf{r}_\alpha t) - q_\alpha \frac{\partial U}{\partial x_\alpha^j}(\mathbf{r}_\alpha t) \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\alpha^j} &= \frac{m_\alpha \dot{x}_\alpha^j}{\sqrt{1 - \dot{\mathbf{r}}_\alpha^2/c^2}} + q_\alpha A_j(\mathbf{r}_\alpha t) \\ &= P_\alpha^j + q_\alpha A_j(\mathbf{r}_\alpha t) \end{aligned} \quad (\text{B1-28})$$

On obtient alors pour  $j = 1$  :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} P_x^\alpha + q_\alpha \frac{d}{dt} A_x(\mathbf{r}, t) &= q_\alpha \left[ \dot{x}_\alpha \frac{\partial A_x}{\partial x}(\mathbf{r}_\alpha t) + \dot{y}_\alpha \frac{\partial A_y}{\partial x}(\mathbf{r}_\alpha t) + \dot{z}_\alpha \frac{\partial A_z}{\partial x}(\mathbf{r}_\alpha t) \right] \\ &\quad - q_\alpha \frac{\partial U}{\partial x}(\mathbf{r}_\alpha t) \end{aligned} \quad (\text{B1-29})$$

Mais d'autre part :

$$\frac{d}{dt} A_x(\mathbf{r}_\alpha t) = \dot{x}_\alpha \frac{\partial A_x}{\partial x} + \dot{y}_\alpha \frac{\partial A_x}{\partial y} + \dot{z}_\alpha \frac{\partial A_x}{\partial z} + \frac{\partial A_x}{\partial t} \quad (\text{B1-30})$$

d'où enfin :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} P_{\alpha x} &= - q_\alpha \left[ \frac{\partial A_x}{\partial t}(\mathbf{r}_\alpha t) + \frac{\partial U}{\partial x}(\mathbf{r}_\alpha t) \right] \\ &\quad + q_\alpha \left[ \dot{y}_\alpha \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) + \dot{z}_\alpha \left( \frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{B1-31})$$

Soit encore :

$$\frac{d}{dt} P_{\alpha x} = q_{\alpha} E_x(\mathbf{r}_{\alpha}, t) + q_{\alpha} [ \dot{\mathbf{r}}_{\alpha} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}_{\alpha}, t) ]_x \quad (\text{B1-32})$$

Les équations en  $j = 2$  et  $3$  donnent évidemment les composantes sur  $Oy$  et  $Oz$  et finalement on retrouve bien la loi de la dynamique avec la force de Lorentz :

$$\frac{d}{dt} \mathbf{P}_{\alpha} = q_{\alpha} [ \mathbf{E}(\mathbf{r}_{\alpha}, t) + \dot{\mathbf{r}}_{\alpha} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}_{\alpha}, t) ] \quad (\text{B1-33})$$

Ceci achève de démontrer l'équivalence entre le point de vue variationnel du Lagrangien et la présentation habituelle de l'électrodynamique à partir des équations de Maxwell-Lorentz.

### 6°) Symétries du Lagrangien et lois de conservation

Comme en dynamique des particules, le formalisme Lagrangien est très utile pour mettre en évidence les lois de conservation du système à partir des lois d'invariance de son Lagrangien dans une transformation élémentaire. On montre de façon générale que l'invariance du Lagrangien par translation dans le temps (changement d'origine) entraîne la conservation d'une quantité qu'on appelle l'énergie du système. Son invariance par translation d'espace (changement de repère par translation) entraîne la conservation d'un vecteur qu'on appelle l'impulsion et son invariance par rotation (rotation des axes de coordonnées) entraîne la conservation d'un pseudo-vecteur appelé le moment cinétique du système.

A titre d'exemple, explicitons le raisonnement dans le cas de la translation d'espace (conservation de l'impulsion).

(i) Effectuons une translation de vecteur  $\mathbf{a}$  du système d'axes de coordonnées repérant le système. Dans le nouveau repère, on a évidemment :

$$\mathbf{r}'_{\alpha} = \mathbf{r}_{\alpha} - \mathbf{a} \quad (\text{E1-34a})$$

$$A^j(\mathbf{r}) = A^j(\mathbf{r} + \mathbf{a}) \quad (\text{E1-34b})$$

(noter le changement de signe de  $\mathbf{a}$  dans les expressions du changement de repère pour les variables des particules ( $\mathbf{r}_{\alpha}$  est la variable) et pour le champ ( $\mathbf{r}$  est un indice repérant chaque point de l'espace)).

Pour une transformation infinitésimale  $\boldsymbol{\varepsilon}$ , on a de même :

$$\mathbf{r}'_{\alpha} = \mathbf{r}_{\alpha} - \boldsymbol{\varepsilon} \quad (\text{E1-35a})$$

$$A^j(\mathbf{r}) = A^j(\mathbf{r}, t) + \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \nabla A^j(\mathbf{r}, t) \quad (\text{E1-35b})$$

(ii) Vérifions sur l'expression de  $L$  que la fonction de Lagrange est bien invariante par translation d'un vecteur quelconque  $\mathbf{a}$ . (Cette propriété mathématique résulte évidemment de l'homogénéité de l'espace) :

a)  $\dot{\mathbf{r}}'_{\alpha} = \dot{\mathbf{r}}_{\alpha}$  et le Lagrangien des particules est invariant ;

b)  $\epsilon_0 \iiint (\mathbf{E}^2 - c^2 \mathbf{B}^2) d^3\mathbf{r}$  est une intégrale portant sur tout l'espace évidemment invariante par changement d'origine ;

c) on a  $A^j(\mathbf{r}'_{\alpha}, t) = A^j(\mathbf{r}_{\alpha} - \mathbf{a}, t) = A^j(\mathbf{r}_{\alpha}, t)$ , de même  $U(\mathbf{r}'_{\alpha}, t) = U(\mathbf{r}_{\alpha}, t)$ , et le terme d'interaction champ particule est également invariant.



(iii) Explicitons mathématiquement la conséquence de cette invariance pour une translation infinitésimale d vecteur  $\epsilon$  quelconque du repère. Pour simplifier les notations, raisonnons tout d'abord sur un champ scalaire  $A$  dans un espace à une dimension  $x$  interagissant avec des particules  $\alpha$  se déplaçant le long de cette dimension ( $\epsilon$  est alors une translation infinitésimale dans la même direction). La variation du Lagrangien s'écrit :

$$\delta L = - \sum_{\alpha} \frac{\partial L}{\partial x_{\alpha}} \epsilon + \int \left( \frac{\partial L}{\partial A} \delta A + \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{\partial A}{\partial x} \right)} \delta \left( \frac{\partial A}{\partial x} \right) + \frac{\partial L}{\partial \dot{A}} \delta \dot{A} \right) dx \quad (\text{BI-36})$$

$$\text{avec } \delta A = \epsilon \frac{\partial A}{\partial x} \quad (\text{BI-37a})$$

$$\delta \dot{A} = \frac{\partial}{\partial t} (\delta A) \quad (\text{BI-37b})$$

La 2<sup>ème</sup> intégrale s'intègre par parties en remarquant que  $\delta \left( \frac{\partial A}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (\delta A)$  et la partie toute intégrée donne zéro (le champ dans les deux repères s'annule à l'infini). On a donc :

$$\delta L = - \sum_{\alpha} \frac{\partial L}{\partial x_{\alpha}} \epsilon + \int \left( \left[ \frac{\partial L}{\partial A} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{\partial A}{\partial x} \right)} \right] \delta A + \frac{\partial L}{\partial \dot{A}} \frac{\partial}{\partial t} \delta A \right) dx = 0$$

(BI-38)

l'équation précédente étant vérifiée pour tout  $\epsilon$  et tout champ  $A$ .

(iv) Considérons maintenant les trajectoires (histoires) réellement suivies par le système. Sur une telle trajectoire, les équations de Lagrange sont satisfaites et l'on a :

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\alpha} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\alpha} \quad \text{pour les particules} \quad (\text{BI-39})$$

$$\frac{\partial L}{\partial A} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial L}{\partial A} + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial \dot{A}} \quad \text{pour le champ} \quad (\text{BI-40})$$

Pour tout état dynamique réellement atteint par le système, on doit donc avoir  $\forall \alpha$  :

$$\frac{d}{dt} \sum_{\alpha} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\alpha} \cdot \epsilon - \frac{d}{dt} \int \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{A}} \frac{\partial A}{\partial x} \right) dx \cdot \epsilon = 0 \quad (\text{BI-41})$$

ce qui impose que :

$$\sum_{\alpha} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\alpha} - \int \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{A}} \frac{\partial A}{\partial x} \right) dx \quad \text{est une constante du mouvement.} \quad (\text{BI-42})$$

Si il y a plusieurs composantes  $A^j$  du champ et plusieurs dimensions, on montre de même que :

$$\sum_{\alpha} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\alpha} - \sum_j \iiint \left( \frac{\partial L}{\partial A^j} \frac{\partial A^j}{\partial x} \right) d^3r = P_x \quad (\text{BI-43})$$

est une constante du mouvement, avec une définition identique pour  $P_y$  et  $P_z$ .

(v) Il ne reste plus qu'à expliciter  $P$  à partir du Lagrangien.

On a immédiatement :

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\alpha} = \frac{m_\alpha \dot{x}_\alpha}{\sqrt{1 - \dot{\mathbf{r}}_\alpha^2/c^2}} + q_\alpha A_x(\mathbf{r}_\alpha, t) \quad (\text{B1-44})$$

On a déjà calculé  $\frac{\partial L}{\partial \dot{A}_j}$ . On a donc :

$$P_x = \sum_\alpha \left\{ \frac{m_\alpha \dot{x}_\alpha}{\sqrt{1 - \dot{\mathbf{r}}_\alpha^2/c^2}} + q_\alpha A_x(\mathbf{r}_\alpha, t) \right\} + \epsilon_0 \iiint (E_x \frac{\partial A_x}{\partial x} + E_y \frac{\partial A_y}{\partial x} + E_z \frac{\partial A_z}{\partial x}) d^3r \quad (\text{B1-45})$$

On transforme l'intégrale ci-dessus en lui retranchant l'intégrale de la divergence de  $\mathbf{E} A_x$  qui s'annule (champ nul sur la surface de l'infini) :

$$\begin{aligned} & \iiint (E_x \frac{\partial A_x}{\partial x} + E_y \frac{\partial A_y}{\partial y} + E_z \frac{\partial A_z}{\partial z}) d^3r \\ &= \iiint \left\{ E_x \frac{\partial A_x}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} (E_x A_x) + E_y \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} (E_y A_x) + E_z \frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial z} (E_z A_x) \right\} d^3r \\ &= \iiint \left\{ -A_x \frac{\partial E_x}{\partial x} + E_y \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) - A_x \frac{\partial E_y}{\partial y} + E_z \left( \frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z} \right) - A_x \frac{\partial E_z}{\partial z} \right\} d^3r \\ &= - \iiint A_x \nabla \cdot \mathbf{E} d^3r + \iiint (\mathbf{E} \times \mathbf{B})_x d^3r \quad (\text{B1-46}) \end{aligned}$$

D'où :

$$P_x = \sum_{\alpha} \frac{m_{\alpha} \dot{x}_{\alpha}}{\sqrt{1-\dot{\mathbf{r}}_{\alpha}^2/c^2}} + \sum_{\alpha} q_{\alpha} A_x(\mathbf{r}_{\alpha}t) - \epsilon_0 \iiint A_x \cdot \nabla \cdot \mathbf{E} d^3r + \epsilon_0 \iiint (\mathbf{E} \times \mathbf{B})_x d^3r \quad (\text{B1-47})$$

On constate alors sans peine que les 2<sup>ème</sup> et 3<sup>ème</sup> termes s'annulent en utilisant l'équation de Maxwell :

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} = \sum_{\alpha} \frac{q_{\alpha}}{\epsilon_0} \delta[\mathbf{r}-\mathbf{r}_{\alpha}]$$

et en effectuant l'intégration sur  $\mathbf{r}$ . D'où enfin :

$$P_x = \sum_{\alpha} \frac{m_{\alpha} \dot{x}_{\alpha}}{\sqrt{1-\dot{\mathbf{r}}_{\alpha}^2/c^2}} + \epsilon_0 \iiint (\mathbf{E} \times \mathbf{B})_x d^3r = \text{cte} \quad (\text{B1-48})$$

et en calculant de même pour  $x$  et  $y$  :

$$\mathbf{P} = \sum_{\alpha} \frac{m_{\alpha} \dot{\mathbf{r}}_{\alpha}}{\sqrt{1-\dot{\mathbf{r}}_{\alpha}^2/c^2}} + \epsilon_0 \iiint (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) d^3r = \text{cte} \quad (\text{B1-49})$$

Relation qui exprime la conservation de l'impulsion du système charge + champs.

**Attention :** on a établi cette relation en admettant que les champs correspondent à un flux de  $\mathbf{E} \wedge \mathbf{A}^i$  nul à travers la surface de l'infini. Sinon, il

faudrait introduire un terme supplémentaire lié au flux d'impulsion à travers la surface de l'infini (voir commentaire au Chapitre I, § 2 c ).



## CHAPITRE II

### QUELQUES ILLUSTRATIONS DES PRINCIPES DE BASE DE L'ELECTROMAGNETISME

Nous nous proposons dans ce chapitre de décrire un certain nombre de phénomènes simples liés à la propagation du champ électromagnétique, ce qui nous donnera l'occasion de nous familiariser avec les idées de base introduites au Chapitre I.

Nous analysons dans les sections 1 à 4 quelques conséquences importantes du principe d'Huyghens-Fresnel (H.F.) en discutant :

1. des phénomènes d'interférence et de diffraction en lumière monochromatique.

2. du principe de reconstruction des images par holographie.

3. de la limite de résolution et de la scintillation des instruments d'optique.

4. de la propagation de faisceaux lumineux à profil transversal gaussien, ce qui nous permettra de décrire un modèle simple de cavité optique ouverte formée par des miroirs sphériques.

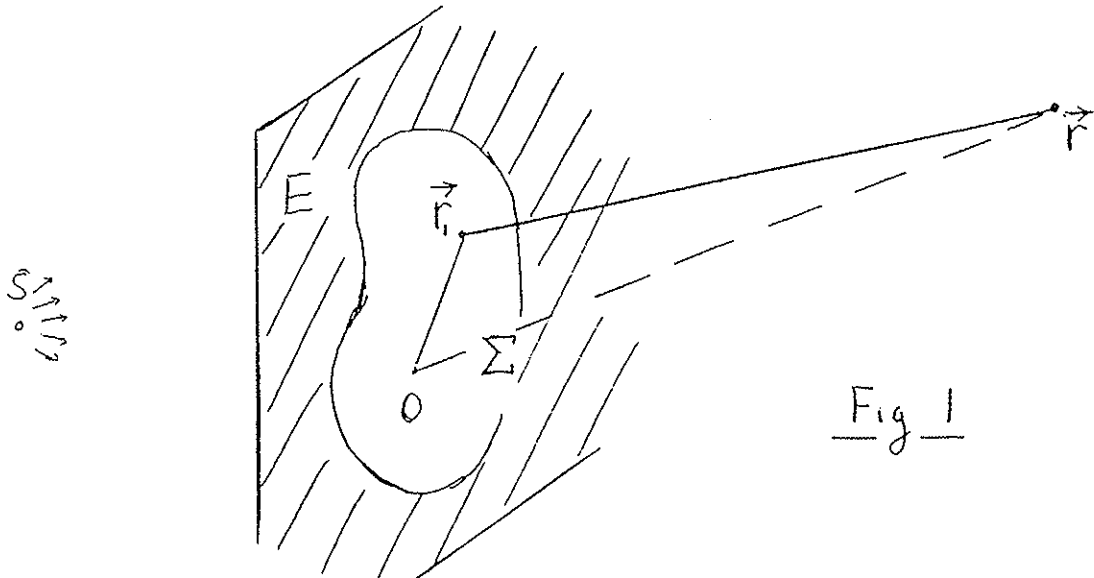
Dans les sections 5 à 7, nous abordons sur quelques exemples simples le problème de l'interaction entre champs et charges en discutant de la propagation d'une onde monochromatique plane dans un milieu de charges libres. Nous étudierons plus particulièrement :

5. l'interaction d'une onde plane polarisée linéairement avec un plan de charges, ce qui nous permettra de discuter sur un modèle très simple de la pression de radiation sur une surface matérielle ainsi que de la réflexion, de la transmission et de l'absorption du champ électromagnétique.

6. la transmission d'une onde dans un milieu uniformément chargé de longueur finie, ce qui nous permettra d'introduire la notion d'indice de réfraction et de longueur caractéristique d'absorption.

7. l'interaction d'une onde polarisée circulairement et d'un milieu chargé pour discuter de l'échange de moment cinétique entre le rayonnement et la matière. Nous décrirons à ce sujet un modèle simple de milieu transparent anisotrope présentant le phénomène de biréfringence et transformant en champ polarisé circulairement un champ ayant initialement une polarisation linéaire ( lame dite quart d'onde).

### 1°) Diffraction et interférence en lumière monochromatique



Calculons le champ à grande distance d'une ouverture  $\Sigma$  percée dans un écran E et éclairée par une source S créant un champ  $\varphi(r_1)$  dans l'ouverture ( Fig 1). Appliquons la formule d'H.F. en faisant l'approximation  $\chi=1$  (faible inclinaison des rayons sur la normale à l'ouverture). On a :

$$\varphi(r) \cong \frac{1}{i\lambda} \int_{\Sigma} d^2r_1 \varphi(r_1) \frac{e^{ik|r-r_1|}}{|r-r_1|} \quad (11-1)$$



Développons la distance  $|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|$  en puissance de  $\frac{r_1}{r}$ . ( $\mathbf{r}$  est le rayon vecteur du point d'observation à partir d'une origine 0 arbitraire dans l'ouverture):

$$\begin{aligned} |\mathbf{r}-\mathbf{r}_1| &= (r^2 + r_1^2 - 2\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r})^{1/2} = r \left[ 1 + \frac{r_1^2}{r^2} - \frac{2\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}}{r^2} \right]^{1/2} \\ &= r \left[ 1 - \frac{\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}}{r^2} + \frac{1}{2} \left( \frac{r_1^2}{r^2} - \frac{(\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r})^2}{r^4} \right) + \dots \right] \end{aligned} \quad (\text{II-2})$$

Le terme de phase de l'equ (II-1) s'écrit alors :

$$\exp ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1| = \exp ikr \times \exp \left\{ -ik \frac{\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}}{r} + \frac{ik}{2} \left( \frac{r_1^2}{r} - \frac{(\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r})^2}{r^3} \right) + \dots \right\} \quad (\text{II-3})$$

Evaluons l'ordre de grandeur des contributions successives à la phase au point  $\mathbf{r}$  :

$$k \frac{\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}}{r} \approx k r_1 \approx \frac{2\pi a}{\lambda} \quad (\text{II-4})$$

( $a$  est la "taille" de l'ouverture ;  $\lambda$  la longueur d'onde).

$$\frac{kr_1^2}{r} \approx \frac{k(\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r})^2}{r^3} \approx \frac{2\pi a^2}{r \lambda} \quad (\text{II-5})$$

Si on se place en un point  $\mathbf{r}$  suffisamment loin de l'ouverture pour que la condition :

$$r \gg \frac{2\pi a^2}{\lambda} \quad (\text{II-6})$$

soit remplie, seul le 1<sup>er</sup> terme de (II-3) contribue à la phase et (II-1) s'écrit :

$$\varphi(\mathbf{r}) \cong \frac{e^{ikr}}{i\lambda r} \int_{\Sigma} d^2\mathbf{r}_1 \varphi(\mathbf{r}_1) e^{-i\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r}_1} \quad (\text{II-7})$$

On néglige la variation relativement faible du terme en  $\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|}$  dans II-1 et on pose  $\mathbf{k}_r = k \frac{\mathbf{r}}{r}$  ( $\mathbf{k}_r$  : vecteur d'onde dans la direction d'observation).

Ainsi l'amplitude du champ diffracté au point  $\mathbf{r}$  à grande distance apparaît -à un facteur de phase et d'amplitude près- comme la transformée de Fourier de la distribution du champ dans l'ouverture. C'est le résultat essentiel de la théorie de la diffraction à grande distance. Posons :

$$\tilde{\varphi}(u,v) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma} dx_1 dy_1 \varphi(x_1, y_1) e^{-i(ux_1 + vy_1)} \quad (\text{II-8})$$

On a alors en effet :

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{k}{ir} e^{ikr} \tilde{\varphi}(k_{rx}, k_{ry}) \quad (\text{II-9})$$

$$\text{avec } \begin{aligned} k_{rx} &= \frac{kx}{r} \\ k_{ry} &= \frac{ky}{r} \end{aligned} \quad (\text{II-10})$$

Les propriétés de la diffraction se déduisent immédiatement de celles de la transformée de Fourier :

(i) La diffraction par une ouverture de dimension  $a$  correspond à un étalement  $\Delta k_r \sim \frac{1}{a}$ , c'est-à-dire à une tache angulaire de rayon :

$$\Delta \theta \sim \frac{\Delta k_r}{k} \sim \frac{\lambda}{a} \quad (\text{II-11})$$

La forme exacte de la figure de diffraction dépend de la forme de l'ouverture. Pour une ouverture rectangulaire ou circulaire, on a des taches de diffraction dont la distribution d'amplitude est donnée par des fonctions bien connues (fonction en  $\sin x/x$  ou fonction d'Airy), présentant des maxima et des minima associés à des franges ou des anneaux de diffraction.

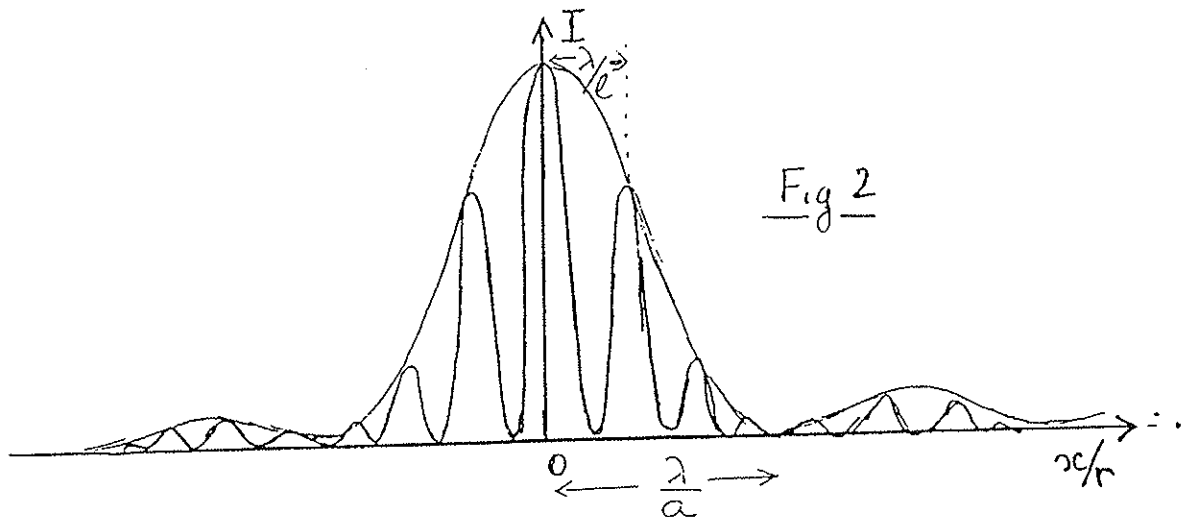
(ii) La diffraction par deux ouvertures translattées l'une de l'autre par la longueur  $l$  s'obtiendra en faisant la T.F. du produit de convolution du champ d'une des ouvertures par la distribution de translation  $\delta(\mathbf{r}-l/2) + \delta(\mathbf{r}+l/2)$ . On a effet dans le plan de l'écran :

$$\varphi(\mathbf{r}_1) = \int \left[ \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_1' - \frac{l}{2}) \varphi(\mathbf{r}_1') + \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_1' + \frac{l}{2}) \varphi(\mathbf{r}_1') \right] d^2 \mathbf{r}_1'$$

Or on sait que la T.F. d'un produit de convolution est le produit des T.F. Il suffit donc de multiplier  $\tilde{\varphi}(\mathbf{k}_r)$  par la T.F. de  $\delta(\mathbf{r} - \frac{l}{2}) + \delta(\mathbf{r} + \frac{l}{2})$  qui n'est autre que  $e^{-i\mathbf{k}_r l/2} + e^{i\mathbf{k}_r l/2} = 2 \cos \frac{\mathbf{k}_r l}{2}$ . D'où le champ à grande distance :

$$\varphi(r) = A \cos \frac{k_r l}{2} \cdot \tilde{\varphi}(k_r) \quad (\text{II-12})$$

L'image de diffraction d'une ouverture unique (de largeur angulaire  $\frac{\lambda}{a}$ ) est modulée par la fonction  $\cos \frac{k_r l}{2}$ , d'interfrange  $\frac{\lambda}{l}$ . On obtient pour l'intensité  $I = |\varphi(r)|^2$  la figure d'interférence bien connue de l'expérience d'Young ( Fig 2). On a supposé ici que les ouvertures sont des fentes parallèles à Oy et l'on a représenté les variations de I en fonction de  $x/r$ .



Notons enfin que la linéarité des formules de diffraction (II-1) et (II-7) conduit directement au théorème de Babinet : le champ diffracté par une ouverture  $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$  telle que  $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \emptyset$  est la somme des champs diffractés par  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  séparément. En particulier, si  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  sont complémentaires ( $\Sigma_1 \cup \Sigma_2 = \text{plan tout entier}$ ), on a :

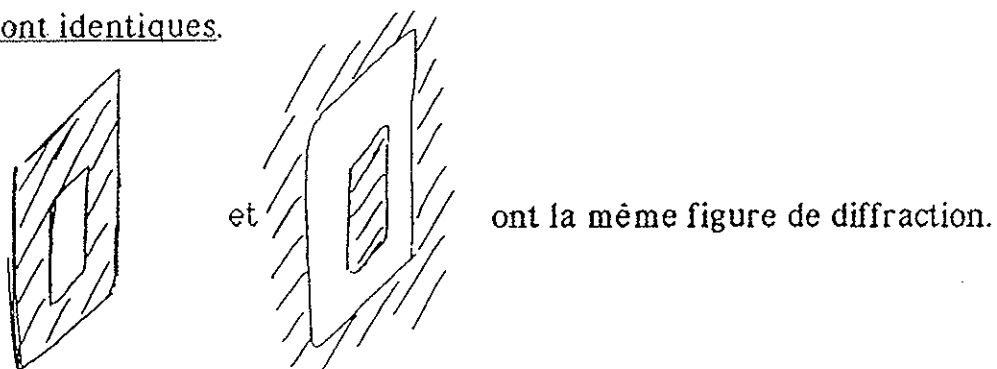
$$\Psi_1 + \Psi_2 = \Psi_{\text{onde incidente}} \quad (\text{II-13})$$

Ainsi, si l'on éclaire deux écrans complémentaires (un "trou" et son "bouchon") par une onde plane perpendiculaire à cet écran, on a dans toute direction autre que la direction de cette onde :

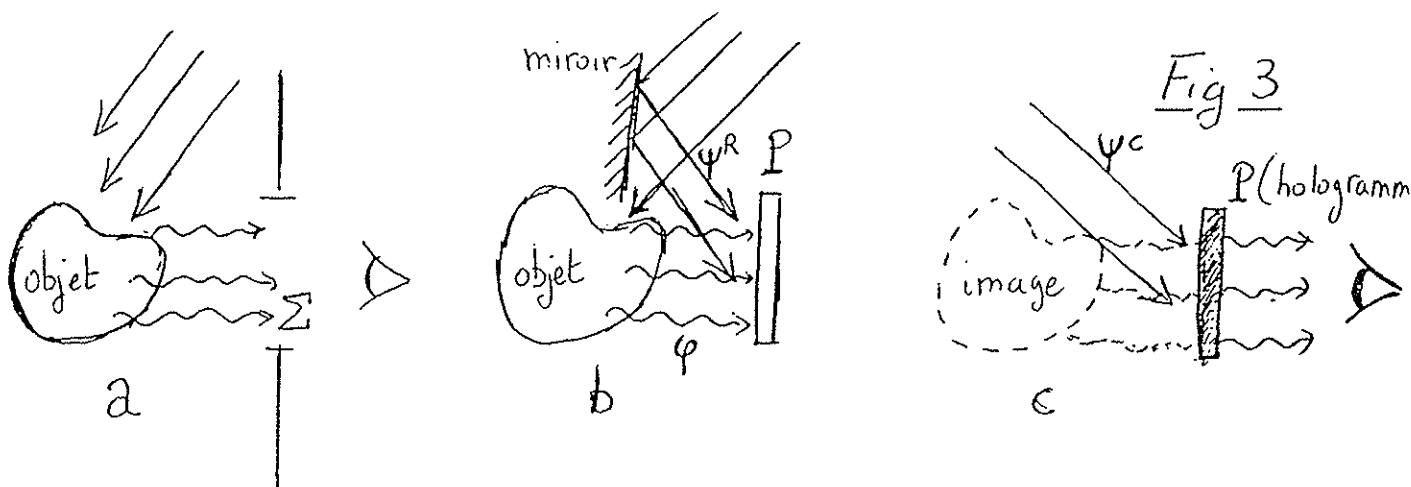
$$\psi_1 = -\psi_2 \quad (\text{II-14})$$

$$\text{et } |\psi_1|^2 = |\psi_2|^2 \quad (\text{II-15})$$

(puisque l'onde incidente ne possède pas de composante de Fourier dans cette direction). Les figures de diffraction des deux écrans complémentaires sont identiques.



## 2°) Principe de l'holographie ( en lumière monochromatique)



Comme autre illustration du principe d'Huyghens-Fresnel, abordons le problème de la reconstitution des ondes diffusées par un objet éclairé en lumière monochromatique. L'onde reçue par un récepteur (oeil) placé derrière l'ouverture  $\Sigma$  ne dépend que du champ (amplitude et phase) dans

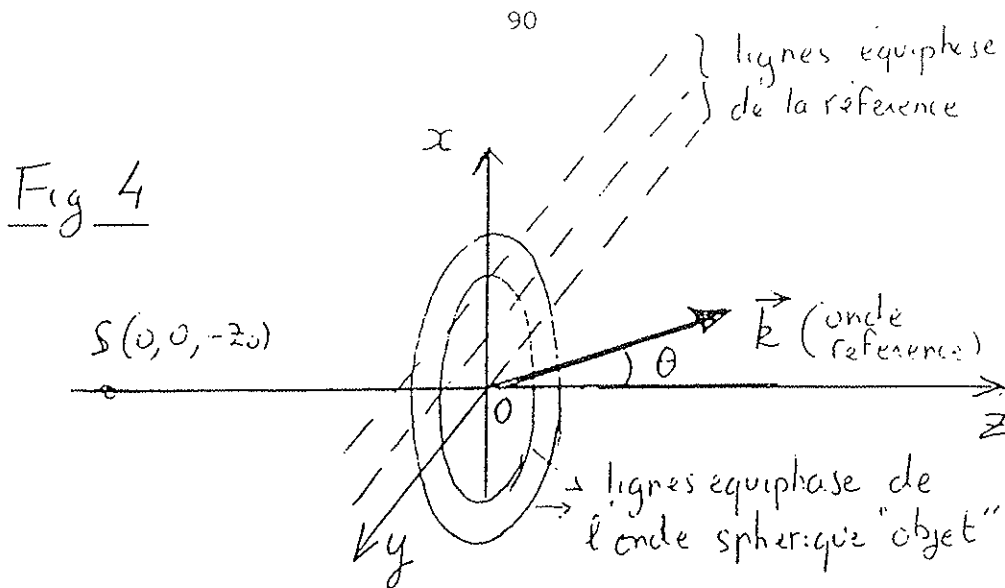
le plan de  $\Sigma$  (Fig 3a). L'holographie fournit un moyen de garder cette distribution d'amplitude et de phase en mémoire sur une plaque photographique P. L'idée consiste à disposer P en  $\Sigma$  et à y faire interférer l'onde  $\varphi(\mathbf{r})$  diffusée par l'objet et une onde de référence  $\psi^R(\mathbf{r})$  provenant de la source qui éclaire l'objet et réfléchi vers  $\Sigma$  à l'aide d'un miroir (Fig 3b). Après développement, P va présenter une transmission  $T(\mathbf{r})$  proportionnelle à l'intensité reçue, c'est-à-dire à :

$$\begin{aligned} I &= |\varphi(\mathbf{r}) + \psi^R(\mathbf{r})|^2 \\ &= |\varphi(\mathbf{r})|^2 + |\psi^R(\mathbf{r})|^2 + \varphi^*(\mathbf{r}) \psi^R(\mathbf{r}) \\ &\quad + \psi^{R*}(\mathbf{r}) \varphi(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (\text{II-16})$$

On supprime alors l'objet et l'on éclaire P avec un faisceau de reconstruction décrit par un champ  $\psi^c(\mathbf{r})$  ( Fig 3c). La lumière transmise à la droite de P correspond au champ  $\psi^t(\mathbf{r})$  :

$$\begin{aligned} \psi^t(\mathbf{r}) &\propto [ |\varphi(\mathbf{r})|^2 + |\psi^R(\mathbf{r})|^2 ] \psi^c(\mathbf{r}) \\ &\quad + \varphi^*(\mathbf{r}) \psi^R(\mathbf{r}) \psi^c(\mathbf{r}) \\ &\quad + \psi^{R*}(\mathbf{r}) \psi^c(\mathbf{r}) \varphi(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (\text{II-17})$$

Si l'onde  $\psi^c(\mathbf{r})$  est identique à  $\psi^R(\mathbf{r})$  et est constante sur P, le dernier terme de (II-17) va donner une contribution proportionnelle à  $\varphi(\mathbf{r})$ , c'est-à-dire d'après le principe H.F, une image identique à l'objet pour un détecteur situé à droite de P. C'est le principe de l'holographie qui fournit une image tridimensionnelle des objets. Les autres termes de (II-17) vont fournir des ondes parasites qu'il convient d'éliminer pour les applications pratiques de l'holographie. Appliquons ces idées générales au problème simple de l'image holographique d'une source ponctuelle.



Soit une source ponctuelle  $S$  située au point  $-z_0$  sur l'axe  $Oz$  (Fig 4). L'hologramme est réalisé dans le plan  $xoy$  à l'aide d'une onde de référence plane de vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  dans le plan  $xoz$  faisant l'angle  $\theta$  avec  $Oz$ . L'onde source dans le plan  $xoy$  s'écrit :

$$\varphi_S(\mathbf{r}) \equiv \frac{A}{[z_0^2 + x^2 + y^2]^{1/2}} e^{ik(z_0^2 + x^2 + y^2)^{1/2}}$$

soit en supposant la dimension de l'hologramme petite devant  $z_0$ , c'est-à-dire :

$$[z_0^2 + x^2 + y^2]^{1/2} \equiv z_0 \left[ 1 + \frac{x^2 + y^2}{2z_0^2} + \dots \right]$$

$$\varphi_S(x, y) \equiv \frac{A}{z_0} e^{ikz_0} e^{\frac{ik}{2z_0}(x^2 + y^2)}$$

(II-18)

(les lignes equiphases du champ de la source ponctuelle dans le plan de l'hologramme sont évidemment les cercles  $x^2 + y^2 = C^{te}$  centrés sur  $O$ ).

L'onde de référence supposée plane, se propageant suivant une direction faisant l'angle  $\theta$  avec la normale à l'hologramme, correspond au champ:

$$\varphi_R(x,y) = A_r e^{ikx \sin \theta}$$

(ses lignes équiphases sont des droites parallèles à Oy dans le plan xoy).

L'intensité enregistrée sur l'hologramme est :

$$\begin{aligned} I(x,y) = |\varphi_S(\mathbf{r}) + \varphi^R(\mathbf{r})|^2 = & \frac{A_S^2}{z_0^2} + A_r^2 + \frac{A_r^* A_S}{z_0} e^{ikz_0} e^{\frac{ik}{2z_0} (x^2 + y^2) - ikx \sin \theta} \\ & + \frac{A_r A_S^*}{z_0} e^{-ikz_0} e^{-\frac{ik}{2z_0} (x^2 + y^2) + ikx \sin \theta} \end{aligned} \quad (II-19)$$

Après impression de l'hologramme, on obtient une plaque présentant un coefficient de transmission  $T(x,y) = \alpha I(x,y)$ .

Eclairons alors l'hologramme avec une onde de reconstruction de champ:

$$\varphi_c(x,y) = A_c e^{ikx \sin \theta'}$$

(faisceau incliné d'un angle  $\theta'$  sur Oz).

On obtient, immédiatement à droite du plan  $z=0$  :

$$\begin{aligned} \varphi_t(x,y) &= \alpha I(x,y) \varphi_c(x,y) \\ &= \left( \frac{A_S^2}{z_0} + A_r^2 \right) A_c e^{ikx \sin \theta'} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& + \frac{A_r^* A_s}{z_0} A_c e^{ikz_0} e^{\frac{ik}{2z_0} (x^2 + y^2)} e^{ikx(\sin\theta' - \sin\theta)} \\
& + \frac{A_r A_s^*}{z_0} A_c e^{-ikz_0} e^{\frac{-ik}{2z_0} (x^2 + y^2)} e^{ikx(\sin\theta' + \sin\theta)} \quad (II-20)
\end{aligned}$$

Avant d'interpréter physiquement les résultats, remarquons que l'on a :

$$\begin{aligned}
\frac{k}{2z_0} (x^2 + y^2) + kx(\sin\theta' - \sin\theta) &= \frac{k}{2z_0} [(x - z_0(\sin\theta - \sin\theta'))^2 + y^2] - \frac{kz_0}{2} (\sin\theta - \sin\theta')^2 \\
-\frac{k}{2z_0} (x^2 + y^2) + kx(\sin\theta' + \sin\theta) &= -\frac{k}{2z_0} [(x - z_0(\sin\theta + \sin\theta'))^2 + y^2] + \frac{kz_0}{2} (\sin\theta + \sin\theta')^2
\end{aligned}$$

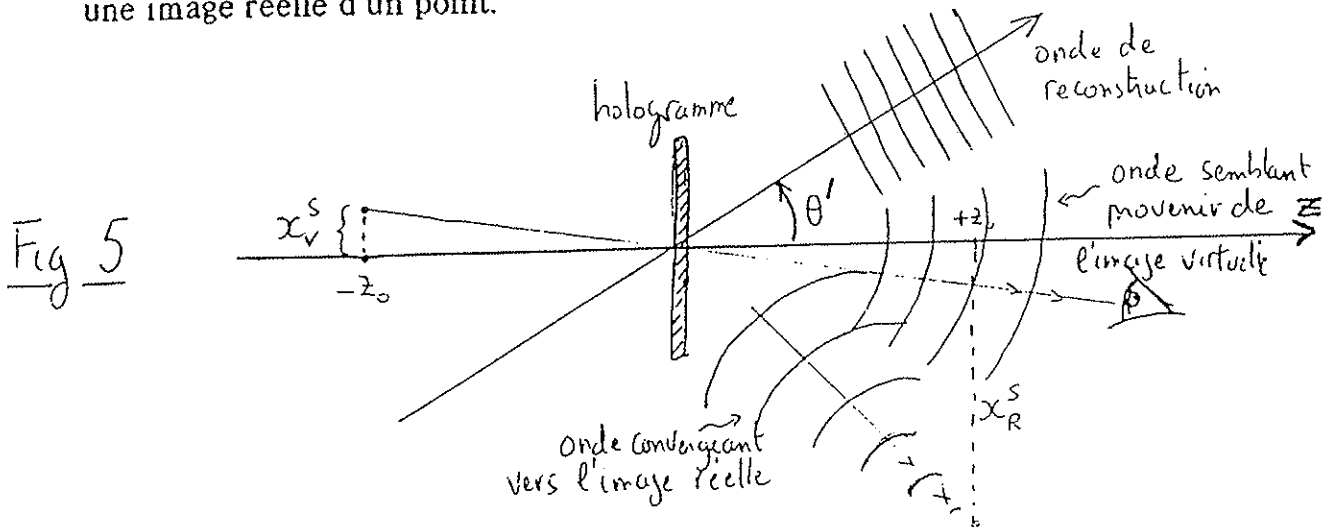
Appliquons à présent le principe de Huyghens-Fresnel pour évaluer le champ transmis à la droite de l'hologramme : la 1<sup>ère</sup> ligne de (II-20) recompose à droite l'onde de reconstruction ; la 2<sup>ème</sup> ligne de (II-20) correspond à une onde sphérique sortante centrée dans le plan de cote  $-z_0$  (plan de la source initiale), au point de coordonnées:

$$\begin{aligned}
x_v^S &= z_0 (\sin\theta - \sin\theta') \\
y_v^S &= 0 \quad (II-21)
\end{aligned}$$

Ce terme correspond donc à une image virtuelle (Fig 5). La 3<sup>ème</sup> ligne de (II-20) correspond à une onde sphérique entrante convergeant dans le plan de cote  $+z_0$  symétrique du plan de la source par rapport au plan de l'hologramme, au point de coordonnées:

$$\begin{aligned}
x_r^S &= z_0 (\sin\theta + \sin\theta') \\
y_r^S &= 0 \quad (II-22)
\end{aligned}$$

Ce terme correspond donc à une image réelle (Fig 5). L'hologramme fournit ainsi en général, en plus du faisceau reconstituer, une image virtuelle et une image réelle d'un point.



Dans le cas particulier où  $\theta = \theta'$ , l'image virtuelle est confondue avec l'objet si l'hologramme est déplacé au point où il a été impressionné. Notons que l'on peut séparer les différentes ondes par leur direction de propagation. L'oeil peut être placé en un point où il ne voit que l'image virtuelle donnant une reconstruction tridimensionnelle d'un objet formé d'un ensemble de points.

#### Quelques propriétés de l'holographie :

- L'hologramme représente la transformée de Fourier de l'onde objet. Chaque point de l'objet est délocalisé sur l'ensemble de l'hologramme.
- Reconstruire l'objet à partir d'un fragment de l'hologramme revient à le regarder à travers un diaphragme. On altère donc par diffraction la qualité de l'image, mais on voit toujours l'image de l'objet tout entier.
- On peut éclairer la plaque photographique à travers un verre dépoli situé entre l'objet et la plaque. L'utilisation du même verre dépoli sur le trajet de l'onde de reconstruction éliminera les aberrations et reconstruira

une image réelle non perturbée. En effet le verre dépoli a pour effet de multiplier le champ par un terme de phase complexe. Ce terme est donc complexe conjugué dans les expressions de  $A_S^*$  et dans celle de  $A_C$  dont le produit apparaît dans le champ correspondant à l'image réelle fournie par l'hologramme ( 3<sup>ème</sup> ligne de II-20 ). On observera donc en disposant le verre dépoli sur le faisceau de reconstruction une image réelle non affectée par les aberrations perturbant le champ initialement vu en  $\Sigma$

- On peut utiliser l'holographie pour étudier des déformations mécaniques ; supposons en effet que le point S (0,0,-z<sub>0</sub>) se déplace en S' (a,0,-z<sub>0</sub>) et enregistrons successivement sur la même plaque les hologrammes des points S et S'. En supposant pour simplifier  $\theta'=\theta$ , on obtient pour l'onde image virtuelle :

$$\varphi_c(x,y) = \frac{A_r^* A_S}{z_0} A_c \left\{ e^{\frac{ik}{2z_0} (x^2 + y^2)} + e^{\frac{ik}{2z_0} ((x-a)^2 + y^2)} \right\} \quad (\text{II-23})$$

En d'autres termes, on obtient une contribution où les champs de S et S' interfèrent : tout se passe comme si on réalisait l'expérience des trous d'Young bien que les champs qui interfèrent aient été enregistrés à des instants différents. L'image d'interférence fournira des franges et l'interfrange permettra de mesurer la distance SS', c'est-à-dire la déformation de l'objet avec une sensibilité de l'ordre d'une fraction de  $\lambda$ . On peut même étudier les déformations d'un objet en temps réel. On enregistre pour cela un hologramme de l'objet "non déformé" et on examine à travers cet hologramme, replacé dans sa position initiale d'enregistrement, la lumière diffusée par l'objet qui se déforme. On fait alors interférer le champ diffusé par l'objet avec celui de son image holographique de référence. Il s'agit là du principe, dont il existe de très nombreuses

variantes. de l'interferométrie par holographie, une des applications très importantes des hologrammes.

Nous avons décrit ici le principe des hologrammes lus en transmission. Pour les applications artistiques de l'holographie (reconstitution tridimensionnelle des objets), on utilise surtout les hologrammes lus en réflexion. On utilise pour cela une configuration dans laquelle l'onde de référence et l'onde objet sont dirigées en sens inverse de façon à produire des ondes stationnaires au niveau de la plaque photographique. Celle-ci est alors impressionnée en épaisseur et présente des variations périodiques d'opacité ou d'indice. La lumière de reconstruction est dirigée dans la direction de l'onde de référence, c'est à dire en réflexion. Cette lumière se reflète alors sélectivement lorsque sa longueur d'onde correspond au pas du réseau enregistré dans l'épaisseur de la plaque, c'est à dire lorsque sa longueur d'onde correspond à celle du laser qui a servi à produire l'hologramme (à condition toutefois que la plaque n'ait pas rétréci au cours de son traitement auquel cas la couleur de reconstruction subit un décalage caractéristique vers le bleu). Si l'hologramme est éclairé en lumière blanche, une composante de son spectre sera principalement utile à la lecture et l'hologramme sera visible, mais ses couleurs seront altérées par rapport à l'objet original. Ainsi l'hologramme peut être lu en lumière blanche, alors que son enregistrement nécessite une lumière cohérente (laser) de façon à assurer la qualité des interférences sur la plaque photographique entre la lumière diffusée par l'objet et la référence (voir au chapitre IV la discussion du lien entre cohérence et visibilité des interférences).

3°) Limite de résolution des instruments astronomiques. Diffraction et aberrations atmosphériques (discussion simple en lumière monochromatique)

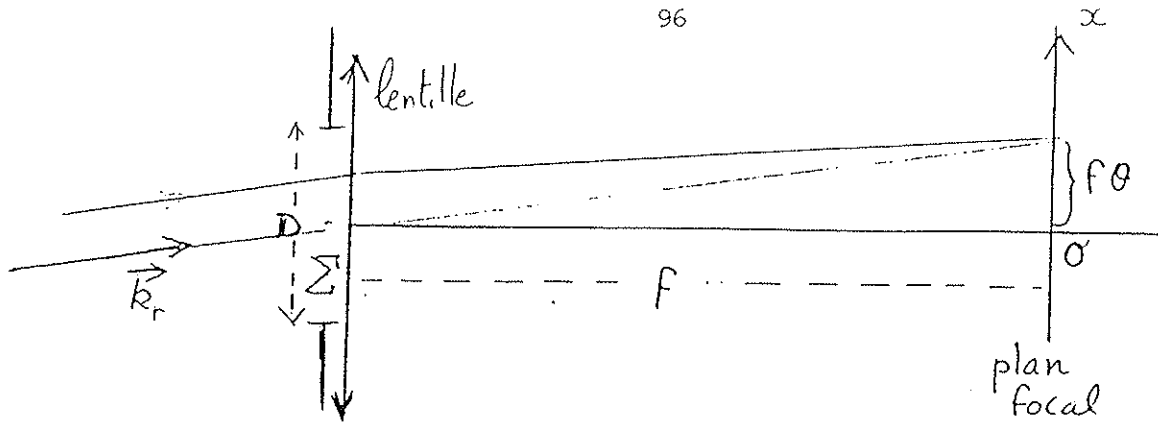


Fig 6

Nous décrivons de façon schématique un instrument d'optique astronomique (téléscope-lunette) en le traitant comme un diaphragme  $\Sigma$  de diamètre  $D$  suivi d'une lentille de distance focale  $f$  ramenant à distance finie le champ rayonné "à l'infini" dans chaque direction  $\vec{k}_r$  (Fig 6). L'onde reçue dans le plan focal de l'instrument sera -d'après (II 9) - la T.F. de la distribution du champ dans l'ouverture :

$$\varphi_{\text{plan focal}}(x,y) \propto \tilde{\varphi} \left( \frac{kx}{f}, \frac{ky}{f} \right) \quad (\text{II-24})$$

$$\text{avec } \tilde{\varphi} \left( \frac{kx}{f}, \frac{ky}{f} \right) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma} dx_1 dy_1 \varphi(x_1, y_1) e^{-i \frac{k}{f} (xx_1 + yy_1)} \quad (\text{II-25})$$

Des propriétés générales de la T.F., on déduit immédiatement qu'un point objet à l'infini -qui donne une onde plane de la forme  $e^{ikx_1 \sin \theta}$  dans l'ouverture- donnera dans le plan focal une tache de diffraction au point  $x=f\theta, y=0$ , de largeur  $\delta$  telle que  $k\delta/f \sim \frac{1}{D}$  ou encore :

$$\delta \sim f \lambda / D \quad (\text{II-26})$$

Deux points objet (étoile double) ne seront distingués que si leur séparation angulaire est telle que :

$$\delta\theta > \lambda/D$$

ce qui correspond à la limite de résolution ultime de l'instrument ( $10^{-7}$  radian pour  $D \sim 5\text{m}$  et  $\lambda \sim 0.5\mu\text{m}$ ). [De même, en radioastronomie, on peut effectuer la corrélation temporelle des signaux radio reçus par deux observatoires séparés d'une distance  $D$  et on a encore  $\delta\theta > \lambda/D$ , avec cette fois  $\lambda \sim 0.1\text{ m}$  et  $D \sim 1000\text{ km}$ , ce qui donne une résolution ultime du même ordre de grandeur].

En fait, la résolution de l'instrument est souvent limitée bien avant ces valeurs par les aberrations atmosphériques. Les variations locales de l'indice de réfraction de l'air déforment les surfaces d'onde : une onde plane provenant d'une source ponctuelle à l'infini présente au niveau de l'ouverture une phase  $w(x,y,t)$  aléatoire :

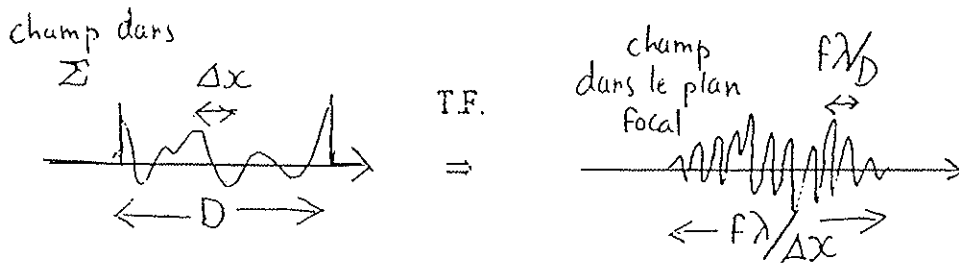
$$\varphi(x_1, y_1, t) = A e^{i w(x_1, y_1, t)} \quad (\text{II-27})$$

Le calcul des propriétés statistiques de  $w(x_1, y_1, t)$  dépend du modèle d'atmosphère. Nous admettons comme un fait d'expérience que  $w(x_1, y_1, t)$  varie sur des temps caractéristiques  $\Delta t \sim 10^{-4}$  à  $10^{-1}$  s et que les variations spatiales s'effectuent sur des distances caractéristiques  $\Delta x, \Delta y \sim 1\text{mm}$  à  $1\text{m}$ , suivant les conditions atmosphériques (altitude, turbulences de l'air, etc...).

D'après le principe H.F., l'image d'un point à l'infini sera à present décrite dans le plan focal par le champ :

$$\varphi_{\text{plan focal}}(x,y,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma} dx_1 dy_1 e^{i\varphi(x_1,y_1,t)} e^{-i \frac{k}{f} (xx_1 + yy_1)} \quad (\text{II-28})$$

La variation dans le temps de l'image correspond au phénomène de scintillation. A t donné, l'image est la T.F. de  $e^{i\varphi(x_1,y_1,t)}$  tronquée au diamètre de l'ouverture  $\Sigma$  (diamètre D). Il résulte des propriétés générales de la T.F. que cette image aura, si  $\Delta x < D$ , un étalement  $f\lambda/\Delta x$  avec une structure "granulaire" de taille  $f\lambda/D$  :



L'intensité  $I(x,y,t) = |\varphi_{\text{plan focal}}(x,y,t)|^2$  sera une distribution appelée speckle ayant l'aspect indiqué sur la figure 7 ci-dessous : le "speckle" apparaît comme une distribution aléatoire de taches de diffraction élémentaires réparties sur une surface de dimension  $f\lambda/\Delta x$ . Le speckle se déforme lentement en un temps caractéristique  $\Delta t$  (scintillation des étoiles).

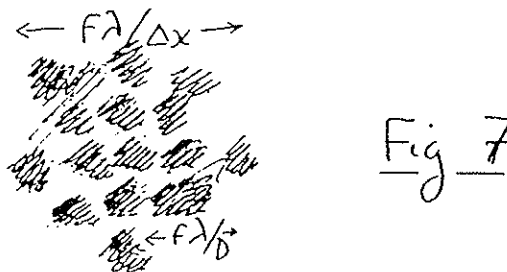


Fig 7

Il ressort de cette analyse que la résolution est limitée à un angle :

$$\delta\theta > \lambda/\Delta x \quad (\text{II-29})$$

(chevauchement des speckles de deux points dès que cette condition n'est pas remplie) et la résolution de l'instrument est limitée par les aberrations atmosphériques dès que  $\Delta x < D$ .

Montrons maintenant qu'il est possible grâce à une méthode élégante due à Labeyrie (interférométrie de "speckle") de moyenner les speckles provenant de deux étoiles telles que  $\delta\theta < \lambda/\Delta x$  de façon à éliminer les aberrations atmosphériques et à bénéficier de toute la résolution de l'instrument. L'idée de la méthode repose sur le fait que les ondes provenant de deux sources très proches traversent les mêmes fluctuations d'indice. Il suffit pour cela de l'on ait :

$$\delta\theta < D/L \quad (II-30)$$

où  $L \sim 10\text{km}$  est la hauteur de la colonne atmosphérique.

Supposons pour fixer les idées que l'une des sources soit dans la direction  $oz$  perpendiculaire à  $\Sigma$  et l'autre dans une direction faisant l'angle  $\theta$  avec la première, dans le plan  $xoz$ . Les ondes provenant de deux sources sont alors dans le plan  $\Sigma$  décrites par les amplitudes complexes :

$$\begin{aligned} \varphi_1(x_1, y_1, t) &\propto e^{i\omega(x_1, y_1, t)} \\ \varphi_2(x_1, y_1, t) &\propto e^{ik\theta x_1} e^{i\omega(x_1, y_1, t)} \end{aligned} \quad (II-31)$$

et possèdent le même terme d'aberration.



Ces deux ondes sont bien sûr définies à une phase aléatoire près. En d'autres termes, elles n'interfèrent pas et l'on observe dans le plan focal de l'instrument la superposition de deux intensités  $I_1$  et  $I_2$  :

$$I_1(x,y,t) = \left| \int_{\Sigma} e^{i\omega(x_1,y_1,t)} e^{-i \frac{k}{f} (xx_1+yy_1)} dx_1 dy_1 \right|^2 \quad (\text{II-32a})$$

$$I_2(x,y,t) = \left| \int_{\Sigma} e^{ik\theta x_1} e^{i\omega(x_1,y_1,t)} e^{-i \frac{k}{f} (xx_1+yy_1)} dx_1 dy_1 \right|^2 \quad (\text{II-32b})$$

ou encore :

$$I_2(x,y,t) = \left| \int_{\Sigma} e^{i\omega(x_1,y_1,t)} e^{-i \frac{k}{f} ((x-f\theta)x_1+yy_1)} dx_1 dy_1 \right|^2 \quad (\text{II-33})$$

On obtient la superposition de 2 speckles identiques simplement translatés l'un par rapport à l'autre de  $f\theta$ . Bien entendu, les deux speckles se chevauchent dès que  $\theta < \lambda/\Delta x$ .

Effectuons maintenant la T.F. de la somme des deux speckles ainsi obtenus :

$$\int [ I_1(x,y,t) + I_1(x-f\theta,y,t) ] e^{i(xu+yv)} dx dy = g_1(u,v,t) [1 + e^{if\theta u}] \quad (\text{II-34})$$

On obtient ainsi le produit d'une distribution aléatoire, variant dans le temps,  $g_1(u,v,t)$ , (elle-même T.F. du speckle  $I_1(x,y,t)$ ) par une modulation certaine  $[1 + e^{if\theta u}]$ .

$g_I(u,v,t)$  possède un étalement  $D/f\lambda$ , inverse de la granularité de  $I_1$ . La modulation est sinusoidale le long de l'axe  $u$  avec une période  $2\pi/f\theta$ . Le carré du module de cette T.F. s'écrit :

$$|g(u,v,t)|^2 = 2|g_I(u,v,t)|^2 [1 + \cos(f\theta u)] \quad (II-35)$$

La distribution  $|g(u,v,t)|^2$  se présente comme une distribution aléatoire à 2 dimensions avec des lignes de zéro (franges) séparés par  $\Delta u = \pi/f\theta$  (Fig 8a). Le contraste de ces franges n'est pas bon puisqu'elles modulent un signal de "bruit" aléatoire. Refaisons cependant la mesure un grand nombre de fois, deux mesures successives étant séparées par un intervalle de temps supérieur à  $\Delta t$ , temps caractéristique de scintillation. La moyenne des résultats obtenus sera :

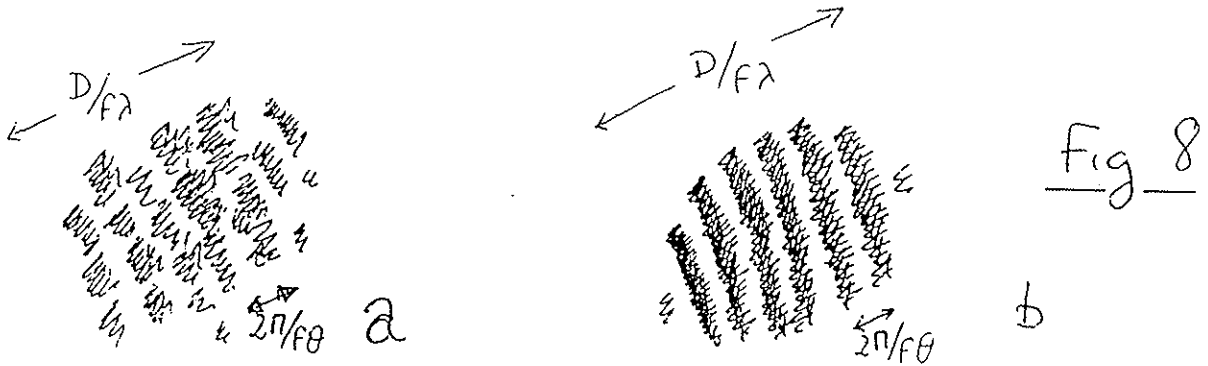
$$\overline{|g(u,v)|^2} = 2\overline{|g_I(u,v,t)|^2} [1 + \cos f\theta u] \quad (II-36)$$

Les speckles successifs étant aléatoires et non corrélés entre eux,  $\overline{|g_I(u,v,t)|^2}$  est une distribution sensiblement constante en  $u$  et  $v$  ("teinte plate"), et les franges apparaissent maintenant nettement (Fig 8b). L'interfrange est net et mesurable dès que  $\frac{2\pi}{f\theta} < \frac{D}{f\lambda}$ , soit :

$$\theta > \lambda/D \quad (II-37)$$

On retrouve la limite de la diffraction et les aberrations ont été éliminées ! La mesure de l'interfrange donne la séparation angulaire des

deux points et la direction des franges la direction de l'axe joignant ces deux points.



Reste une question à discuter : comment effectue-t-on en pratique les diverses opérations de T.F. et d'élevation au carré ? Il existe maintenant une méthode évidente, utilisant l'ordinateur : une caméra T.V. extrêmement sensible enregistre les images dans le plan focal de l'instrument, l'image est digitalisée, puis transformée de Fourier par l'ordinateur qui prend ensuite le carré de cette T.F. et effectue la moyenne. Il y a une quinzaine d'années, avant les microordinateurs rapides, l'astronome Labeyrie, inventeur de cette méthode d'élimination des aberrations atmosphériques, utilisait un procédé entièrement optique :

(i) Enregistrement de l'image  $I_1(x,y,t) + I_2(x,y,t)$  sur une plaque photo dans le plan focal de l'instrument.

(ii) Eclairage de la plaque photo en lumière parallèle comme un hologramme, avec une lentille derrière la plaque : on obtient dans le plan focal de cette lentille une distribution d'intensité proportionnelle à  $|g(u,v,t)|^2$  que l'on enregistre sur une 2<sup>ème</sup> plaque photo.

(iii) On recommence la mesure en des temps  $t_1, t_2, t_3$  successifs et on empile les unes sur les autres les plaques photos obtenues au cours de l'opération (ii). La transmission de l'empilement donne en chaque point  $\overline{|g(u,v)|^2}$ . On observe ainsi directement les franges d'interférence des speckles..

Notons pour finir que l'utilisation des lentilles pour faire de la TF instantanée, dont on vient de donner un exemple ici, est un procédé très général en traitement des images. L'équation (II-25) montre qu'une simple lentille permet de réaliser une transformation de Fourier instantanée d'une distribution à deux dimensions. Il suffit de l'éclairer en lumière parallèle et de la recouvrir dans son plan par un masque présentant en transmission la distribution dont on veut faire la TF. On obtiendra alors dans le plan focal de la lentille un champ dont l'amplitude reproduit la TF cherchée.

#### 4°) Propagation d'un faisceau monochromatique gaussien

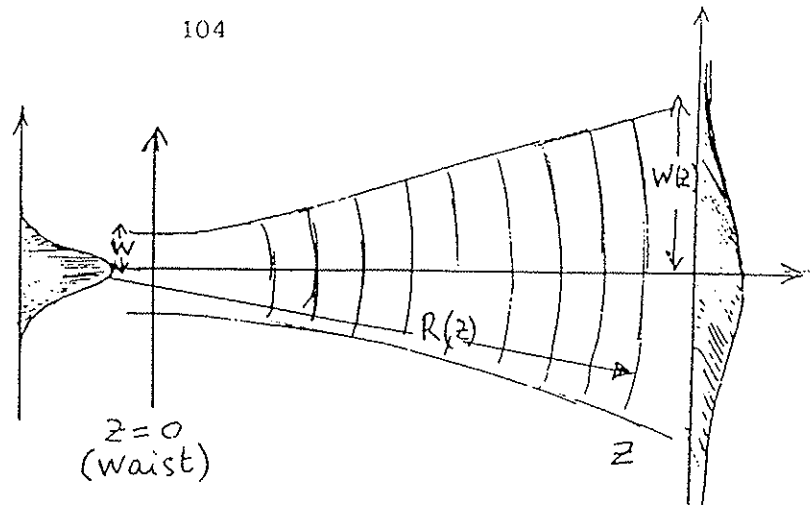
Comme dernière application du principe H.F., considérons le problème de la propagation d'un faisceau monochromatique à profil transversal gaussien. Il s'agit du modèle le plus simple d'un faisceau laser.

Considérons dans le plan  $z=0$  une onde équiphase présentant un profil d'amplitude gaussien ( Fig 9):

$$\varphi_0(x_1, y_1) = e^{-(x_1^2 + y_1^2)/w^2} \quad (\text{II-38})$$

$w$  sera appelé le diamètre minimum ou "waist" du faisceau.

Fig 9



Nous allons montrer que dans un plan  $z > 0$ , cette onde possède une dépendance transversale de la forme:

$$\varphi(x,y,z) \sim e^{\frac{ik}{2R(z)}(x^2+y^2)} e^{-(x^2+y^2)/w^2(z)} \quad (\text{II-39})$$

où  $R(z)$  et  $w(z)$  sont des fonctions de  $z$  que l'on va préciser. Le terme de phase de (II-39) est à comparer à celui qui apparaît dans l'expression d'une onde sphérique dans un plan normal à l'axe  $Oz$  ( voir Equ. II-18). Dans ce plan, l'onde représente donc une onde sphérique sortante de rayon de courbure  $R(z)$ , qui semble issue du point  $x=y=0$ ,  $z_0=z-R(z)$ . Cette onde sphérique possède de plus un profil transversal gaussien de "diamètre"  $w(z)$ .

L'application du principe H.F. permet de calculer l'onde en un point  $z > 0$  connaissant son expression (II-38) dans le plan  $z=0$ . En faisant l'approximation  $\chi=1$  (faisceau gaussien suffisamment "étroit"), on a:

$$\varphi(x,y,z) = \frac{1}{i\lambda} \iint \frac{dx_1 dy_1 e^{ik[(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+z^2]^{1/2}}}{\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+z^2}} e^{-(x_1^2+y_1^2)/w^2} \quad (\text{II-40})$$

On peut dans cette expression remplacer le dénominateur par  $z$  et développer le terme de phase au 2<sup>ème</sup> ordre inclus :

$$k[(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + z^2]^{1/2} = k \left[ z + \frac{(x-x_1)^2}{2z} + \frac{(y-y_1)^2}{2z} + \dots \right] \quad (\text{II-41})$$

ce qui se justifie si la condition :

$$\frac{k w^4}{z^3} \ll 1 \quad \text{ou encore} \quad z \gg \left( \frac{2\pi w^4}{\lambda} \right)^{1/3} \quad (\text{II-42})$$

est remplie (ce que nous supposons par la suite). On écrira alors :

$$\varphi(x,y,z) \equiv \frac{1}{i\lambda} \frac{e^{ikz}}{z} \iint dx_1 dy_1 e^{\frac{ik}{2z} ((x-x_1)^2 + (y-y_1)^2)} e^{-(x_1^2 + y_1^2)/w^2} \quad (\text{II-43})$$

Soit encore en remaniant de façon évidente :

$$\varphi(x,y,z) \equiv \frac{1}{i\lambda} \frac{e^{ikz}}{z} e^{-(x^2 + y^2)/w^2 (1 + 2iz/kw^2)}$$

$$\iint dx_1 dy_1 \exp \left\{ i \frac{k}{2z} \left( 1 + \frac{2iz}{kw^2} \right) \left[ (x_1 - \frac{x}{1 + \frac{2iz}{kw^2}})^2 + (y_1 - \frac{y}{1 + \frac{2iz}{kw^2}})^2 \right] \right\}$$

(II-44)

L'intégrale double ci-dessus se calcule simplement en faisant le changement de variable dans le plan complexe :

$$x_0 = x_1 - \frac{x}{1 + \frac{2iz}{kw^2}} \quad ; \quad y_0 = y_1 - \frac{y}{1 + \frac{2iz}{kw^2}} \quad (\text{II-45})$$

Elle se met tout d'abord sous la forme :

$$\int_c \int_c dx_0 dy_0 e^{\alpha(x_0^2 + y_0^2)} \quad \left( \alpha = -\frac{1}{w^2} + \frac{ik}{2z} \right) \quad (\text{II-46})$$

l'intégrale en  $x_0$  (et celle en  $y_0$ ) portant sur une droite  $c$  du plan complexe parallèle à l'axe réel. On remarque ensuite que l'on peut, pour évaluer chacune de ces deux intégrales, translater l'axe d'intégration sur l'axe réel (l'intégrale sur un contour fermé axe réel +  $c$  est nulle), puis on remplace l'intégrale double  $dx_0 dy_0$  par une intégrale en coordonnées sphériques (élément d'intégration  $\rho d\rho d\theta$ ) :

$$\iint \rho d\rho d\theta e^{\alpha\rho^2} = -\frac{\pi}{\alpha}$$

Finalement :

$$\varphi(x,y,z) \equiv \frac{1}{i\lambda} \cdot \frac{e^{ikz}}{z} \cdot \frac{\pi}{\frac{1}{w^2} - \frac{ik}{2z}} \cdot \exp \left\{ \frac{-(x^2 + y^2)}{w^2 \left( 1 + \frac{2iz}{kw^2} \right)} \right\} \quad (\text{II-47})$$

En identifiant avec l'onde sphérique à profil gaussien donnée a priori (Equ II-39), on obtient :

$$\frac{(1-2iz/kw^2)}{w^2 + \frac{4z^2}{k^2w^2}} = \frac{1}{w^2(z)} - \frac{ik}{2R(z)} \quad (\text{II-48})$$

$$\text{soit } R(z) = z + \frac{k^2w^4}{4z} = z + \left(\frac{\pi w^2}{\lambda}\right)^2 \frac{1}{z} \quad (\text{II-49})$$

$$w(z) = w \cdot \sqrt{1 + \frac{4z^2}{k^2w^4}} = w \sqrt{1 + \left(\frac{\lambda z}{\pi w^2}\right)^2} \quad (\text{II-50})$$

Remarquons enfin que l'on a :

$$\frac{1}{i\lambda} \frac{1}{z \left[ \frac{1}{w^2} - \frac{ik}{2z} \right]} = \frac{1}{z\lambda \sqrt{\frac{1}{w^4} + \frac{k^2}{4z^2}}} \exp -i \Psi(z) \quad \text{avec } \text{tg } \Psi(z) = \frac{z\lambda}{\pi w^2} \quad (\text{II-51})$$

soit encore :

$$\frac{1}{i\lambda} \frac{1}{z \left[ \frac{1}{w^2} - \frac{ik}{2z} \right]} = \frac{w}{\pi w(z)} \exp -i \psi(z) \quad (\text{II-52})$$

ce qui permet d'écrire finalement :

$$\varphi(x,y,z) = \frac{w}{w(z)} e^{i[kz - \psi(z)]} e^{\frac{ik}{2R(z)}(x^2+y^2)} e^{-(x^2+y^2)/w^2(z)} \quad (\text{II-53})$$

Le champ dans le plan de côte  $z$  apparaît bien comme celui d'une onde sphérique sortant du point  $x_0=y_0=0$ ,  $z_0=z-R(z)$ , de rayon de courbure  $R(z)$  et limitée transversalement selon une gaussienne de dimension  $w(z)$ .



Au déphasage attendu le long de l'axe Oz ( terme  $e^{ikz}$ ) s'ajoute un déphasage supplémentaire moins intuitivement évident (terme  $e^{-i\psi(z)}$ ).

Notons que l'Equ (II-53) redonne l'expression (II-38) pour  $z=0$ , un résultat non évident dans la mesure où les approximations faites pour l'établir ne sont pas a priori justifiées pour  $z$  petit. On en conclura que (II-53) est en fait une approximation satisfaisante de la solution exacte des équations de propagation du champ même au voisinage de  $z=0$ . Remarquons que les formules donnant  $R(z)$  et  $w(z)$  prennent une forme asymptotique simple pour  $z \gg \frac{\pi w^2}{\lambda}$  (régime de diffraction à grande distance). On a alors :

$$w(z) \cong \frac{\lambda z}{\pi w} \quad (\text{II-54a})$$

$$R(z) \cong z \quad (\text{II-54b})$$

L'ouverture angulaire du faisceau est  $\frac{w(z)}{z} \sim \frac{\lambda}{\pi w}$  et obéit aux lois de la diffraction à l'infini : plus  $w$  (diamètre minimum ou waist du faisceau gaussien) est petit, plus l'angle d'ouverture est grand.

La quantité

$$Z_R = \frac{\pi w^2}{\lambda}$$

représente le paramètre de Rayleigh du faisceau gaussien et correspond à la longueur caractéristique sur laquelle il peut rester "focalisé" sans trop diverger. L'introduction de ce paramètre permet de récrire les formules (II-49),( II-50) et (II-51) sous la forme condensée:

$$R(z) = z + \frac{Z_R^2}{z} \quad (\text{II-49}')$$

$$w(z) = w \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_R}\right)^2} \quad (\text{II-50'})$$

$$\text{tg } \Psi(z) = \frac{z}{z_R} \quad (\text{II-51'})$$

Notons que le passage à travers la valeur  $z=0$  du champ gaussien correspond à sa focalisation optimale et donc au "foyer" du faisceau. Le passage par le foyer s'accompagne d'un déphasage "supplémentaire" de l'ordre de  $\pi$  lorsque  $z$  évolue de quelques  $z_R$  de part et d'autre du foyer (Equ II-51').

Les faisceaux à profil transversal gaussien peuvent être générés par les lasers. Les propriétés générales de focalisation et de divergence développées ici permettent de comprendre les propriétés géométriques de la lumière laser.

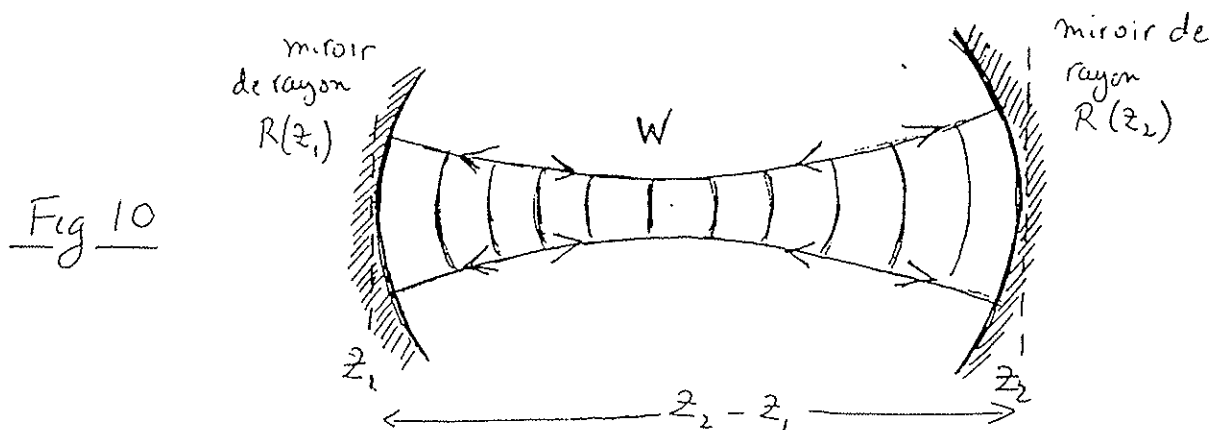
Par exemple, si  $w \sim 1 \text{ mm}$  et  $\lambda \sim 0.5 \mu\text{m}$ , on a :

$$z_R = \frac{\pi w^2}{\lambda} \cong 10^4 \text{ mm}$$

un faisceau laser de 1 mm de diamètre reste à peu près parallèle sur une dizaine de mètres ; si la taille du faisceau est élargie à 1 m (téléscope),  $z_R$  est multiplié par  $10^6$  et devient de l'ordre de  $10^4 \text{ km}$  !

Enfin les propriétés des faisceaux Gaussiens permettent de discuter qualitativement des cavités ouvertes à miroirs sphériques habituellement utilisées dans les lasers. Supposons que la calotte sphérique de sommet  $x=y=0$ ,  $z=z_1$ , de rayon  $R(z_1)$ , centrée au point de cote  $z_1 - R(z_1)$  soit une surface métallisée. Les rayons lumineux associés au champ Gaussien sont alors normaux en tout point à cette surface: le champ stationnaire constitué par l'onde Gaussienne incidente et son "image" obtenue par réflexion sur

eux-même des rayons est donc une solution des équations de propagation du champ en présence du miroir sphérique ainsi disposé (principe de la métallisation des surfaces d'onde en optique). En plaçant deux miroirs sphériques adaptés de rayons  $R(z_1)$  et  $R(z_2)$  aux points  $z_1$  et  $z_2$ , on réalise donc une cavité optique possédant pour mode résonnant l'onde stationnaire Gaussienne constituée par la superposition des champs Gaussiens se propageant dans les deux sens ( voir Figure 10 ci-dessous). C'est le principe des cavités optiques des lasers. Il faut également que le déphasage  $k(z_1 - z_2) - \psi(z_1) + \psi(z_2)$  soit un multiple de  $\pi$  (condition d'onde stationnaire). Notons que dans de telles cavités très largement ouvertes sur le côté, le champ est néanmoins limité transversalement.



Remarquons pour conclure qu'il n'est pas surprenant qu'un champ à profil transversal gaussien garde le même profil en se propageant. Nous avons vu que l'opération qui permet de déterminer le champ dans un plan lorsqu'on en connaît la valeur dans un autre plan s'apparente, moyennant certaines approximations, à une transformation de Fourier. Or dans une telle transformation, une Gaussienne reste une Gaussienne. Cette propriété est d'ailleurs bien connue en Mécanique quantique: la fonction d'onde de l'état fondamental de l'oscillateur harmonique est une gaussienne, tout

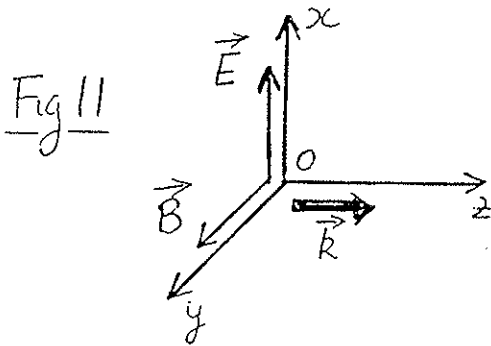
comme sa transformée de Fourier qui représente le même état en représentation d'impulsion. Cette remarque nous permet de trouver sans calcul d'autres "modes" du champ qui se propagent sans se déformer: les fonctions obtenues en multipliant une Gaussienne par un polynôme de Hermite qui représentent les états excités de l'oscillateur harmonique quantique sont également inchangées par TF. On en déduit qu'un champ dont le profil dans un plan transverse est une Gaussienne que multiplie un polynôme de Hermite de paramètres convenablement choisis doit se propager également sans déformation (à une courbure des surfaces d'onde près). Ces solutions du problème de propagation du champ libre correspondent à des modes dits d'ordre plus élevé que le champ Gaussien étudié dans ce paragraphe. Ces modes sont également réalisés par des faisceaux lasers. On pourra trouver une étude plus détaillée des faisceaux gaussiens dans le livre "Lasers" de A.Siegman ( University Science Books).

##### 5°) Interaction d'une onde plane avec une nappe de charges libres :

première approche des phénomènes de transmission et de réflexion de la lumière. Pression de radiation

Nous nous sommes limités jusqu'à présent à considérer des exemples de propagation du champ dans l'espace libre. Il nous a fallu cependant introduire de façon phénoménologique la notion d'écran opaque, de milieu réfringent (lentilles), de milieu d'incidence variable, etc... Pour décrire ces milieux, il nous faut évidemment aborder de façon plus précise le problème de l'interaction des champs avec les charges, décrite par les équations de Maxwell. Nous nous proposons ici d'aborder à l'aide d'un modèle très simple l'étude de ces équations en montrant leur contenu physique. Nous supposerons que la matière est formée de charges libres (électrons) mises

en mouvement par les champs et nous traiterons le cas très simple de l'interaction d'une onde monochromatique plane se propageant le long de  $oz$  avec une distribution uniforme de charges dans le plan  $z=0$ . Nous commencerons par considérer le cas d'un champ incident polarisé linéairement le long de  $ox$  (voir figure 11).



Le champ incident s'écrira donc (en notation complexe) :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_i &= E_0 \mathbf{e}_x e^{i(kz-\omega t)} \\ \mathbf{B}_i &= \frac{E_0}{c} \mathbf{e}_y e^{i(kz-\omega t)} \end{aligned} \quad (\text{II-55})$$

Les champs physiques sont les parties réelles des champs complexes. Les charges électriques  $q$ , de masse  $m$  sont réparties uniformément dans le plan  $z=0$ , sur une épaisseur infinitésimale  $\delta$  ( $\delta \ll \lambda$ ). On appellera  $\mathcal{N}$  la densité volumique et  $\Sigma$  la densité superficielle de charges :

$$\mathcal{N} = \Sigma / \delta \quad (\text{II-56})$$

L'équation du mouvement de chaque charge dans le champ  $\mathbf{E}, \mathbf{B}$  est à la limite non relativiste :

$$m \ddot{\mathbf{r}} = q(\mathbf{E} + \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}) \quad (\text{II-57})$$

On ajoute phénoménologiquement un amortissement visqueux des charges (couplage avec un "réservoir" évacuant l'énergie) décrivant la résistance du milieu. On complète ainsi l'équation précédente sous la forme :

$$m \ddot{\mathbf{r}} + m \gamma \dot{\mathbf{r}} = q(\mathbf{E} + \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}) \quad (\text{II-58})$$

$\gamma$ , homogène à l'inverse d'un temps est le taux d'amortissement des charges. Il est clair d'après (II-58) que les charges seront d'autant plus rapides dans un champ donné -et donc rayonneront d'autant plus- que leur masse est plus faible. Le modèle choisi représente donc bien un milieu électriquement neutre formé de charges  $q$  de faible masse  $m$  (électrons) et de charges  $-q$  beaucoup plus massive (ions, noyaux), seuls les électrons contribuant notablement à la densité de courant du milieu- (modèle simple de plasma ou de métal).

Enfin, les électrons étant non relativistes, on peut en première approximation négliger le terme en  $q \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B} \sim q \frac{\dot{\mathbf{r}} E}{c}$  devant le terme en  $qE$  et écrire :

$$\ddot{\mathbf{r}} + \gamma \dot{\mathbf{r}} \equiv q \frac{\mathbf{E}(t)}{m} \quad (\text{II-59})$$

Nous allons à présent considérer l'interaction de l'onde plane définie ci-dessus avec ce plan de charges en nous plaçant successivement du "point de vue" des charges, puis de celui du champ.

#### a) Point de vue des charges

Chaque charge du plan  $z=0$  va être mise en mouvement le long de  $ox$  par le champ électrique de l'onde plane. L'équation correspondante s'écrit :

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} = \frac{qE_0}{m} e^{-i\omega t} \quad (\text{II-60})$$

soit en régime stationnaire :

$$\bar{x} = \frac{-1}{\omega^2 + i\gamma\omega} \frac{qE_0}{m} e^{-i\omega t} \quad (\text{II-61})$$

Il en résulte un "dipôle induit" par charge :

$$p = q \bar{x} = \epsilon_0 \alpha E_0 e^{-i\omega t} = \epsilon_0 (\alpha' + i\alpha'') E_0 e^{-i\omega t}$$

( $\alpha$  est homogène à un volume) (II-62)

correspondant à la polarisabilité complexe :

$$\alpha = -\frac{q^2}{m\epsilon_0} \frac{1}{\omega^2 + i\gamma\omega} = \alpha' + i\alpha'' \quad (\text{II-63})$$

$$\alpha' = -\frac{q^2}{m\epsilon_0} \frac{1}{\omega^2 + \gamma^2} \quad ; \quad \alpha'' = \frac{q^2}{m\epsilon_0} \frac{\gamma}{\omega} \frac{1}{\omega^2 + \gamma^2} \quad (\text{II-62})$$

$\alpha'$  et  $\alpha''$  correspondent évidemment aux composantes du dipôle en phase et en quadrature avec le champ. Le dipôle physique est en effet :

$$\Re(p) = \epsilon_0 \alpha' E_0 \cos\omega t + \epsilon_0 \alpha'' E_0 \sin\omega t \quad (\text{II-65})$$

La puissance reçue par la charge est en moyenne :

$$W = \overline{\mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{r}}} = \overline{\mathbf{E} \cdot \dot{\mathbf{p}}} = \epsilon_0 \frac{\alpha'' \omega}{2} E_0^2 \quad (\text{II-66})$$

et est proportionnelle à la partie imaginaire de la polarisabilité. Le flux d'énergie absorbé par l'ensemble des charges par unité de surface est alors simplement :

$$\Phi = \epsilon_0 \frac{\alpha'' \omega \Sigma}{2} E_0^2 \quad (\text{II-67})$$

**Remarques :** (i) Il est clair d'après ces expressions qu'il n'y a absorption d'énergie par la surface que parce qu'il y a un amortissement non nul ( $\gamma \neq 0$ ). L'énergie cinétique des charges étant en moyenne constante, l'énergie fournie par le champ aux charges ne peut qu'être dissipée dans le réseau responsable de la relaxation (échauffement par effet Joule).

(ii) Nous avons supposé que chaque charge ne se déplace que sous l'effet du champ incident  $E_0$ . Elle subit en fait aussi le champ rayonné par toutes les autres charges. Nous supposons le milieu assez dilué pour que ce champ soit très petit devant  $E_0$ . Nous reviendrons sur ce point plus loin.

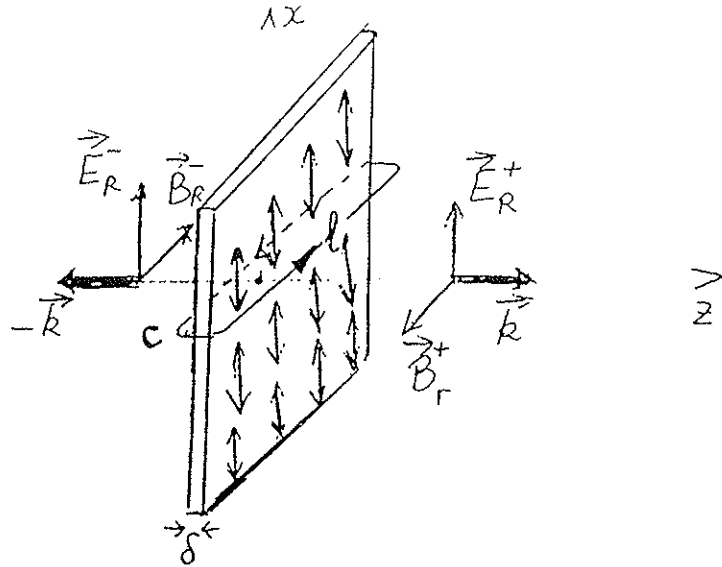
#### b) Point de vue du champ

Qu'arrive-t-il au champ incident arrivant sur le plan des charges en  $z=0$  ? Le champ résultant est la somme du champ rayonné par la source de l'onde plane située à l'infini et du champ rayonné par les charges du plan (principe de superposition dû à la linéarité des équations de Maxwell). Il suffit donc d'ajouter à  $E_i$ ,  $B_i$  le champ rayonné par les charges  $E_r$ ,  $B_r$  (voir Fig 12) :

$$E_{\text{Total}} = E_i + E_r \quad ; \quad B_{\text{Total}} = B_i + B_r \quad (\text{II-68})$$



Fig 12



$E_r, B_r$  est le champ rayonné par une nappe de courant oscillant dans le plan  $z=0$ . Ce champ doit évidemment satisfaire les symétries imposées par les conditions aux limites : la source étant invariante dans n'importe quelles translation du plan  $xoy$ ,  $E_r$  ne peut qu'être constitué d'ondes planes indépendantes de  $x$  et  $y$ , c'est-à-dire se propageant le long de  $\pm oz$  (que nous appellerons respectivement  $E_r^\pm, B_r^\pm$  (voir figure 12)). De plus, le champ doit à tout instant être symétrique dans une réflexion dans le plan  $xoy$  puisque cette réflexion conserve la distribution des courants. Il en résulte qu'il s'agit de deux ondes planes ayant des vecteurs d'onde  $+k$  et  $-k$  opposés, des champs électriques égaux et des champs magnétiques opposés en deux points symétriques par rapport au plan  $z=0$  :

$$\begin{aligned} E_r^+ &= E_r^- \\ B_r^+ &= -B_r^- \quad (\text{en deux points symétriques } xyz \text{ et } xy-z) \quad (II-69) \end{aligned}$$

( $E$  est en effet un vecteur polaire dont les composantes parallèles au plan se conservent alors que  $B$  est un vecteur axial dont les composantes parallèles au plan se renversent). Il ne reste plus qu'à fixer l'amplitude et la phase de ces champs, ce que l'on peut faire en utilisant l'équation de Maxwell-Ampère I-2d :

$$\nabla \times \mathbf{B}_r = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}_r}{\partial t} + \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \mathbf{j} \quad (\text{II-70})$$

avec

$$\mathbf{j} = N q \dot{\mathbf{x}} \mathbf{e}_x = N \dot{p} \mathbf{e}_x = -i\omega N p \mathbf{e}_x \quad (\text{II-71})$$

Sous forme intégrée cette équation s'écrit :

$$\int_c \mathbf{B}_r \cdot d\mathbf{l} = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \int_S \int \mathbf{j} \cdot d\mathbf{n} + \frac{1}{c^2} \int_S \int \frac{\partial \mathbf{E}_r}{\partial t} \cdot d\mathbf{n} \quad (\text{II-72})$$

On choisit le contour  $c$  de la figure (rectangle de longueur  $l$  parallèle à  $oy$  et d'épaisseur  $\delta$  parallèle à  $oz$ , parcouru dans le sens direct).  $S$  est une surface s'appuyant sur ce contour. On obtient :

$$-(B_r^+ - B_r^-) l = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \delta \cdot l \cdot (-i\omega N p) + \frac{1}{c^2} \delta \cdot l \frac{\partial E_r}{\partial t}$$

Lorsque  $\delta \rightarrow 0$  le deuxième terme du membre de droite s'annule car  $E_r$  et  $\frac{\partial E_r}{\partial t}$  restent finis en  $z=0$  alors que  $N\delta$  tend vers  $\Sigma$ , densité superficielle des charges. Finalement, en remarquant que  $B_r^+ = -B_r^-$  :

$$B_r^+(z=0) = \frac{i}{2\epsilon_0 c^2} \Sigma \omega p \quad (\text{II-74})$$

soit encore :

$$B_r^+(z=0) = \frac{i\Sigma}{2c^2} \omega \alpha E_0 \mathbf{e}_y e^{-i\omega t} \quad (\text{II-75})$$

et donc

$$\mathbf{E}_r^+(z=0) = \frac{i\Sigma}{2c} \omega \alpha E_0 \mathbf{e}_x e^{-i\omega t} \quad (\text{II-76})$$

On obtient ainsi les expressions des deux ondes planes :

$$\begin{cases} \mathbf{E}_r^+(z,t) = \frac{i\Sigma}{2c} \omega \alpha E_0 \mathbf{e}_x e^{i(kz-\omega t)} \\ \mathbf{B}_r^+(z,t) = \frac{i\Sigma}{2c^2} \omega \alpha E_0 \mathbf{e}_y e^{i(kz-\omega t)} \end{cases} \quad (z > 0) \quad (\text{II-77})$$

$$\text{et } \begin{cases} \mathbf{E}_r^-(z,t) = \frac{i\Sigma}{2c} \omega \alpha E_0 \mathbf{e}_x e^{-i(kz+\omega t)} \\ \mathbf{B}_r^-(z,t) = -\frac{i\Sigma}{2c^2} \omega \alpha E_0 \mathbf{e}_y e^{-i(kz+\omega t)} \end{cases} \quad (z < 0) \quad (\text{II-78})$$

On en déduit alors immédiatement l'onde totale  $\mathbf{E}_T(z,t)$  transmise vers l'avant :

$$\begin{cases} \mathbf{E}_T(z,t) = \mathbf{E}_i(z,t) + \mathbf{E}_r^+(z,t) = \left[ 1 + i \frac{\Sigma\omega\alpha}{2c} \right] E_0 \mathbf{e}_x e^{i(kz-\omega t)} \\ \mathbf{B}_T(z,t) = \mathbf{B}_i(z,t) + \mathbf{B}_r^+(z,t) = \left[ 1 + i \frac{\Sigma\omega\alpha}{2c} \right] \frac{E_0}{c} \mathbf{e}_y e^{i(kz-\omega t)} \end{cases} \quad (z > 0) \quad (\text{II-79})$$

$$\text{et l'onde réfléchi } (z < 0) \begin{cases} \mathbf{E}_{\text{Réfléchi}} = \mathbf{E}_r^- \\ \mathbf{B}_{\text{Réfléchi}} = \mathbf{B}_r^- \end{cases} \quad (\text{II-80})$$

Ce calcul simple fait ainsi apparaître l'onde transmise comme résultant de l'interférence de l'onde incidente avec l'onde rayonnée vers

l'avant par le plan de dipôle. L'onde réfléchie provient du rayonnement vers l'arrière de ces dipôles.

Interprétation physique de  $\alpha'$  et  $\alpha''$  :

On pose :

$$1 + \frac{i\Sigma\omega\alpha}{2c} = 1 + i \frac{\Sigma\omega\alpha'}{2c} - \frac{\Sigma\omega\alpha''}{2c} \quad (\text{II-81})$$

A la limite des petites densités, (II-81) peut s'écrire :

$$1 + i \frac{\Sigma\omega\alpha}{2c} = e^{i\Sigma\omega\alpha'/2c} e^{-\Sigma\omega\alpha''/2c} \quad (\text{II-82})$$

A la partie réelle de la susceptibilité correspond un déphasage du champ transmis. A la partie imaginaire de la susceptibilité correspond une atténuation de l'onde transmise (si  $\alpha'' > 0$ ).

### c) Conservation de l'énergie

Le vecteur de Poynting de l'onde incidente est :

$$\mathcal{S}_i = \epsilon_0 c^2 \overline{\mathbf{E}_i \times \mathbf{B}_i} = \epsilon_0 c \frac{E_0^2}{2} \mathbf{e}_z \quad (\text{II-83})$$

Le vecteur de Poynting de l'onde transmise est (au 1<sup>er</sup> ordre en  $\Sigma$ ) :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_t &= \epsilon_0 c^2 \overline{\mathbf{E}_T \times \mathbf{B}_T} = \frac{\epsilon_0 c}{2} E_0^2 \left( 1 - \frac{\Sigma\omega\alpha''}{c} \right) \mathbf{e}_z \\ &= \left[ \frac{\epsilon_0 c}{2} E_0^2 - \epsilon_0 \frac{\Sigma\omega\alpha'' E_0^2}{2} \right] \mathbf{e}_z \end{aligned} \quad (\text{II-84})$$

Le vecteur de Poynting de l'onde réfléchie est du 2<sup>ème</sup> ordre en  $\Sigma$  :

$$S_R = 0(\Sigma) \quad (\text{II-85})$$

Ainsi, au 1<sup>er</sup> ordre en  $\Sigma$ , on a :

$$|S_i - S_t| = \epsilon_0 \frac{\Sigma \omega \alpha'' E_0^2}{2} = \Phi = \text{flux d'énergie cédé au plan des charges} \quad (\text{II-86})$$

Le travail du champ sur les charges se traduit par une atténuation du champ transmis vers l'avant (absorption dans le milieu).

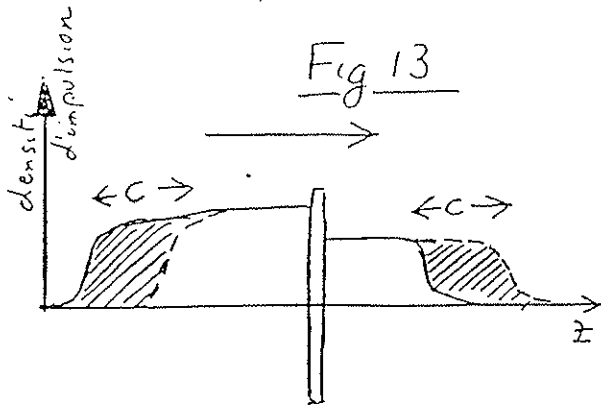
#### d) Pression de radiation

Tenons compte à présent de l'effet (en  $v/c$ ) de la force magnétique de l'onde sur les charges. A l'ordre le plus bas  $\mathbf{B} \sim \mathbf{B}_c = \frac{E_0}{c} \mathbf{e}_y e^{-i\omega t}$  et l'on a :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\text{magnétique}} &\equiv \overline{q \mathbf{v}(t) \times \mathbf{B}_i(t)} \\ &= \overline{(-\epsilon_0 \alpha' E_0 \omega \sin \omega t + \epsilon_0 \alpha'' E_0 \omega \cos \omega t) \frac{E_0}{c} \cos \omega t \mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_y} \\ &= \epsilon_0 \frac{\alpha'' \omega E_0^2}{2c} \mathbf{e}_z \end{aligned} \quad (\text{II-87})$$

soit par unité de surface, la pression de radiation :

$$\Pi = \epsilon_0 \frac{\Sigma \alpha'' \omega E_0^2}{2c} \quad (\text{II-88})$$



Ceci est en accord avec les résultats généraux concernant la conservation de l'impulsion du système charges + champ.

En  $z < 0$ , la densité d'impulsion du champ est

en effet  $\epsilon_0 \overline{\mathbf{E}_i \times \mathbf{B}_i} = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2c}$ . En  $z > 0$ , elle est devenue  $\epsilon_0 \overline{\mathbf{E}_T \times \mathbf{B}_T} \equiv \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2c}$

$\left[ 1 - \frac{\Sigma \omega \alpha''}{c} \right]$ . Supposons que l'onde plane soit un train d'onde limité dans

le futur et le passé (cf. figure 13) : en une seconde, l'unité de surface normale au plan est traversée par un cylindre de volume  $c$ . L'impulsion du champ a donc diminué par unité de surface de  $\epsilon_0 \frac{E_0^2 \Sigma \omega \alpha''}{2c}$ , ce qui correspond exactement à la pression de radiation qui peut être interprétée comme l'augmentation par unité de temps et de surface de l'impulsion du plan de charges.

Notons le lien qui existe entre la quantité d'énergie et la quantité d'impulsion cédée par seconde par le champ aux charges :

$$\frac{\Pi}{\Phi} = \frac{1}{c}$$

Cette relation deviendra parfaitement claire lorsqu'on décrira le champ en termes de photons d'énergie  $h\nu$  et d'impulsion  $h\nu/c$ .

e) Cas d'une densité importante des charges : modèle d'écran opaque et de miroir

Si  $\Sigma$  devient grand, on ne peut plus se limiter aux approximations ci-dessus et en particulier négliger la réaction de  $E_R$  sur les charges. On écrira, puisque  $E_R$  est continu en  $z=0$  :

$$p = \epsilon_0 \alpha (E_0 + E_R) e^{-i\omega t} \quad (\text{II-89})$$

et en  $z=0$

$$B_{R^+} = \frac{i}{2\epsilon_0 c^2} \Sigma \omega p = \frac{i}{2c^2} \Sigma \omega \alpha (E_0 + E_R) \quad (\text{II-90})$$

Soit encore puisque  $E_R = c B_{R^+}$  :

$$E_R = \frac{i}{2c} \Sigma \omega \alpha (E_0 + E_R) \quad (\text{II-91})$$

ou

$$E_R = \frac{i}{2c} \Sigma \omega \alpha \frac{E_0}{1 - \frac{i}{2c} \Sigma \omega \alpha} \quad (\text{II-92})$$

Dans le cas particulier d'une forte densité telle que  $\frac{\Sigma \omega |\alpha|}{2c} \gg 1$ , on a :

$$E_R \cong -E_0$$

et donc :

$$E_T = E_R + E_0 = 0 \quad (\text{II-93})$$

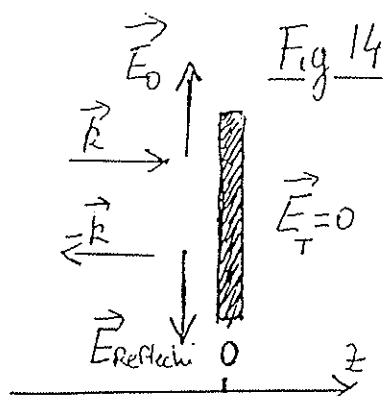
avec

$$E_{\text{réfléchi}} = E_R = -E_0 \quad (\text{II-94})$$

Le plan des charges réfléchit entièrement le champ et ne transmet plus rien !







Nous avons là un modèle très simple d'écran opaque (vu de  $z > 0$ ) et de miroir (vu de  $z < 0$ ). (Voir Fig 14)

Remarquons qu'un écran opaque bloque la lumière par un phénomène d'interférence destructrice vers l'avant.

Remarquons également que l'on retrouve sur cet exemple simple la condition aux limites des conducteurs parfaits (voir chapitre V) :

$$E_{\text{total}}^{\text{tangential}}(\text{surface}) = E_0 + E_{\text{réfléchi}} = 0 \quad (\text{II-95})$$

(la composante totale du champ tangential s'annule sur le miroir).

(Par contre,  $B_{\text{tangential}} = 0$  et c'est  $B_{\text{normal}}$  qui doit être nul).

**Remarque :** Lien avec le principe d'H.F. :

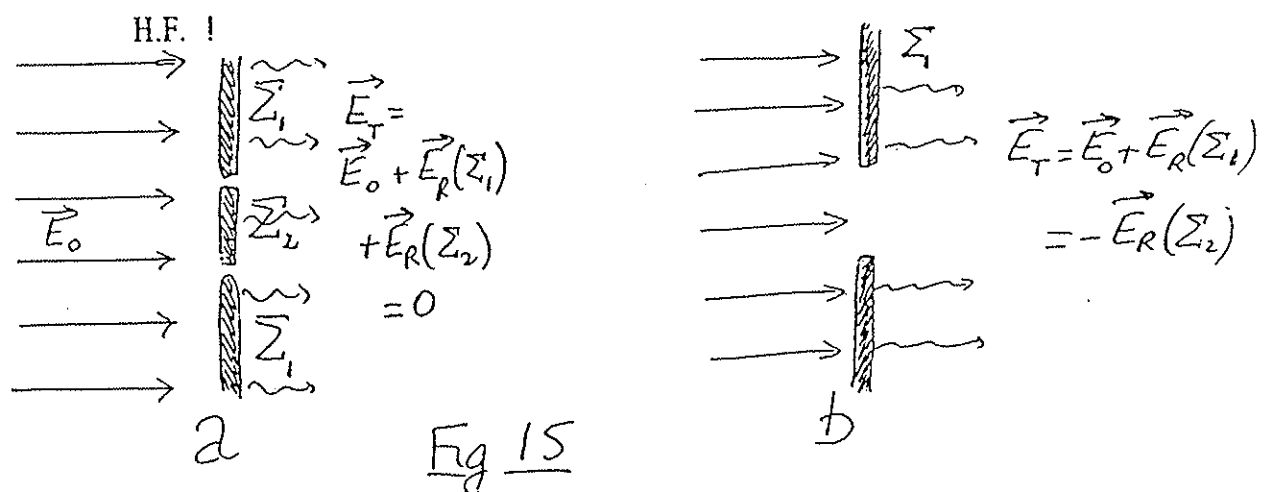
Considérons un écran opaque formé de deux parties  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  et éclairé par une onde plane  $E_0$  venant de la gauche (Fig 15 a). Le champ nul à droite résulte de l'interférence destructrice entre  $E_0$  et  $E_R$  qui peut lui-même s'écrire  $E_R(\Sigma_1) + E_R(\Sigma_2)$  :

$$E_0 + E_R(\Sigma_1) + E_R(\Sigma_2) = 0 \quad (\text{II-96})$$

Enlevons le "bouchon"  $\Sigma_2$  (Fig 15b) en supposant que cela n'affecte pas la distribution des dipôles dans  $\Sigma_1$  (hypothèse de Kirchhoff). On a alors :

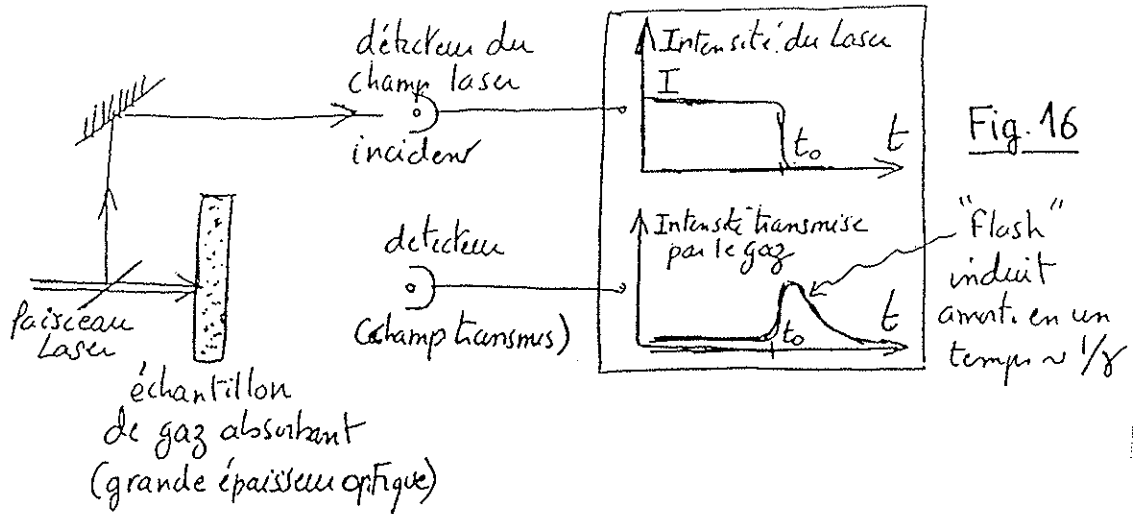
$$E_T = E_0 + E_R(\Sigma_1) = -E_R(\Sigma_2) \quad (\text{II-97})$$

Tout se passe comme si seuls des dipôles situés à l'emplacement du bouchon rayonnaient. On retrouve les principaux aspects du principe de



f) Une illustration expérimentale du principe de fonctionnement d'un écran opaque : expérience d'induction optique (Fig 16)

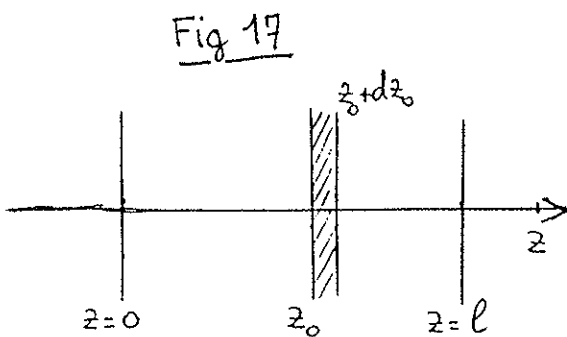
On envoie sur un échantillon gazeux la lumière d'un faisceau laser d'intensité  $I$ . Le gaz absorbe la lumière si bien que le détecteur mesure une intensité transmise nulle. Celle-ci résulte de l'interférence destructrice du champ laser et du champ rayonné vers l'avant par les atomes du milieu. A  $t_0$ , on coupe brusquement le laser. On voit alors apparaître un "flash" lumineux sur le détecteur : l'écran opaque transmet de la lumière lorsqu'on éteint le laser ! Les dipôles du milieu qui oscillent à la fréquence  $\omega$  mettent en effet un temps  $1/\gamma$  à réagir à la coupure du champ  $E_0$ . Tant qu'ils n'ont pas relaxé vers zéro, l'écran émet de la lumière qui n'est plus compensée par le champ laser. L'effet s'apparente à un phénomène d'induction électromagnétique... Il est difficile à observer car en général les temps d'interruption des faisceaux sont beaucoup plus long que  $1/\gamma$  et les dipôles de l'écran suivent adiabaticquement les variations de  $E_0$ .



6° ) Propagation d'une onde plane dans un milieu uniformément chargé d'épaisseur finie :

a) Propagation vers l'avant : indice de réfraction, coefficient d'absorption ou d'amplification.

Revenons au cas d'un milieu dilué (on néglige la réaction des dipôles sur eux - mêmes ) et considérons à présent un milieu d'épaisseur finie  $l \gg \lambda$  compris entre  $z=0$  et  $z=l$ . ( Fig 17). Le champ transmis vers



l'avant en tout point  $z > l$  peut se calculer simplement en superposant  $E_0$  et le champ rayonné par toutes les tranches du milieu entre  $z=0$  et  $z=l$ . La contribution  $dE_R^+(z_0)$  de la tranche comprise entre  $z_0$  et  $z_0 + dz_0$  aura au point  $z$  la forme :

$$dE_R^+(z_0) = i \frac{N\omega\alpha}{2c} dz_0 \times E_0 e^{i(kz_0 - \omega t)} \mathbf{e}_x \times e^{i k(z-z_0)} \quad (II-98)$$

coefficient calculé au paragraphe 5b	champ "vu" par les dipôles dans le plan $z_0$	déphasage dû à à la propagation entre $z_0$ et $z$
---	---	--

En intégrant de  $z=0$  à  $z=l$ , on trouve :

$$E_{R^+} = \int_0^l d E_{R^+}(z_0) = i \frac{N\omega\alpha}{2c} l E_0 e^{i(kz-\omega t)} e_x \quad (\text{II-99})$$

et

$$E_T = E_0 \left[ 1 + i \frac{Nl\omega\alpha}{2c} \right] e^{i(kz-\omega t)} e_x \quad (\text{II-100})$$

Posons alors (faibles densités) :

$$1 + i \frac{Nl\omega\alpha}{2c} \cong \exp i \frac{N\omega\alpha}{2c} l \quad (\text{II-101})$$

et

$$e^{ikz} = e^{ik(z-l)} e^{ikl} \quad (\text{II-102})$$

On peut récrire  $E_T$  sous la forme :

$$E_T = E_0 e_x e^{-i\omega t} e^{ik(z-l)} e^{ik(1+N\alpha/2\chi)} \quad (\text{II-103})$$

propagation sur  
la longueur  $z-l$   
dans le vide

facteur multiplicatif dû  
à la propagation sur la  
longueur  $l$  dans le milieu

On pose alors :

$$n = 1 + \frac{N\alpha}{2} = 1 + \frac{N\alpha'}{2} + i \frac{N\alpha''}{2} \quad (\text{II-104})$$

$n$  est l'indice (complexe) de réfraction du milieu.

$k\left(1 + \frac{N\alpha'}{2}\right)$  représente la fréquence spatiale de l'onde dans le milieu.

La modification de cette quantité par rapport à sa valeur  $k$  dans le vide signifie que l'onde possède dans le milieu une vitesse de phase  $\frac{c}{1 + \frac{N\alpha'}{2}}$

différente de sa valeur  $c$  dans le vide.

$\frac{kN\alpha''}{2}$  représente l'inverse de la longueur caractéristique d'absorption de l'onde par le milieu matériel (si  $\alpha'' > 0$ ). On a en effet :

$$|E_T(z)|^2 \sim e^{-kN\alpha''z} = e^{-z/z_0} \quad \text{avec} \quad \frac{1}{z_0} = kN\alpha'' = \frac{2\pi N\alpha''}{\lambda} \quad (\text{II-105})$$

On retrouve le fait que  $\alpha''$  décrit les échanges d'énergie entre les charges et le champ alors que  $\alpha'$  décrit les effets de déphasage à la traversée du milieu. Dans un milieu réel,  $\alpha'$  et  $\alpha''$  dépendent de  $\omega$  d'où les effets de dispersion de l'indice. Notons également que si le milieu possède une composante imaginaire négative de sa polarisabilité ( $\alpha'' < 0$ ), la propagation de l'intensité se fera suivant une exponentielle croissante et le champ sera amplifié. De tels milieux sont réalisés dans les lasers (voir Chapitres V et VI).

b) Propagation vers l'arrière : interférences des champs réfléchis par les interfaces

Un calcul analogue permet de déterminer le champ réfléchi par l'échantillon d'épaisseur  $l$  :

$$dE_R^-(z_0) = i \frac{N\omega\alpha}{2c} dz_0 E_0 e^{i(kz_0 - \omega t)} \underbrace{e^{+ik(z_0 - z)}}_{\text{déphasage dû à la propagation}} e_x \quad (\text{II-106})$$

entre  $z_0$  et  $z < 0$  ;  $z_0 - z > 0$

On en déduit :

$$E_R^-(z) : \int_0^l dE_R^-(z_0) = \frac{iN\omega\alpha}{2c} E_0 e^{-i(kz + \omega t)} e_x \int_0^l e^{2ikz_0} dz_0$$

$$= \frac{iN\alpha}{2} e^{ikt} \operatorname{sinc}kl E_0 e_x e^{-i(kz + \omega t)} \quad (\text{II-107})$$

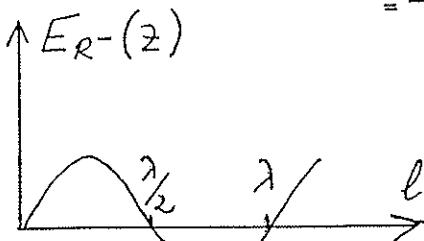


Fig 18

Alors que le champ rayonné vers l'avant croît linéairement avec  $l$ , le champ réfléchi varie en  $\operatorname{sinc}kl$ . Si  $l = \frac{q\lambda}{2}$ , le signal réfléchi

s'annule (Fig 18). Pour un milieu d'indice réel, le coefficient de réflexion est proportionnel à  $n-1$  (terme  $N\alpha/2$  dans II-107). Nous retrouverons tous ces résultats plus loin (Chapitre V) et nous montrerons à partir des formules générales qu'une lame réfringente réfléchit une onde avec une amplitude qui dépend à la fois de l'indice du milieu et de son épaisseur (ce dernier résultat étant interprété comme un effet d'interférence de la lumière réfléchie sur les dioptries d'entrée et de sortie de la lame). Le point de vue adopté ici montre que la lumière réfléchie résulte en fait de l'interférence vers l'arrière de la lumière rétroémise par toutes les tranches du milieu. Le fait que le même résultat puisse s'interpréter comme dû à des effets localisés aux interfaces provient de ce qu'il existe comme nous l'avons

montré une relation entre le champ dans un volume et le champ sur les limites de ce volume. Notons cependant que la réalité physique correspond à la description donnée ici: la réflexion par un milieu transparent est un phénomène de volume et non de surface, même s'il peut être commode de le voir comme un effet localisé sur les interfaces.

7°) Interaction d'un plan de charges libres avec une onde plane polarisée circulairement : échanges de moment angulaire entre champ et matière.

Revenons à un plan de charges d'épaisseur  $\delta \ll \lambda$  et considérons son interaction avec une onde plane polarisée circulairement (*à gauche*):

$$\mathbf{E}_i = E_0 (\mathbf{e}_x + i \mathbf{e}_y) e^{i(kz - \omega t)} \quad (\text{II-108})$$

correspondant au champ physique (réel) :

$$\Re(\mathbf{E}_i) = E_0 [ \mathbf{e}_x \cos(kz - \omega t) - \mathbf{e}_y \sin(kz - \omega t) ]$$

et à un flux d'énergie :

$$\mathbf{S}_i = \epsilon_0 c E_0^2 \mathbf{e}_z \quad (\text{II-109})$$

Un électron libre du plan de charges ( $z=0$ ) va évoluer suivant l'équation :

$$\ddot{\mathbf{r}} + \gamma \dot{\mathbf{r}} = \frac{qE_0}{m} (\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y) e^{-i\omega t} \quad (\text{II-110})$$

qui admet la solution stationnaire :

$$q \mathbf{r} = -\frac{q^2}{m} E_0 \frac{1}{\omega^2 + i\gamma\omega} (\mathbf{e}_x + i \mathbf{e}_y) e^{-i\omega t} = \varepsilon_0 \alpha (\mathbf{e}_x + i \mathbf{e}_y) e^{-i\omega t} E_0 \quad (\text{II-111})$$

$\alpha$  étant toujours donné par :

$$\alpha = -\frac{q^2}{m\varepsilon_0} \frac{1}{\omega^2 + i\gamma\omega} \quad (\text{II-112})$$

Posons alors :

$$\alpha = \alpha_0 e^{-i\psi_0} \quad (\text{II-113})$$

$$\text{avec } \alpha_0 = -\frac{q^2}{m\varepsilon_0} \frac{1}{\sqrt{\omega^4 + \gamma^2\omega^2}} \quad ; \quad \text{tg } \psi_0 = \frac{\gamma}{\omega} \quad (0 < \psi_0 < \frac{\pi}{2}) \quad (\text{II-114})$$

On a :

$$\begin{aligned} q \mathbf{r} &= \varepsilon_0 \alpha_0 (\mathbf{e}_x + i \mathbf{e}_y) e^{-i(\psi_0 + \omega t)} E_0 \\ \text{Re}(q\mathbf{r}) &= \varepsilon_0 \alpha_0 [ \mathbf{e}_x \cos(\omega t + \psi_0) + \mathbf{e}_y \sin(\omega t + \psi_0) ] E_0 \end{aligned} \quad (\text{II-115})$$

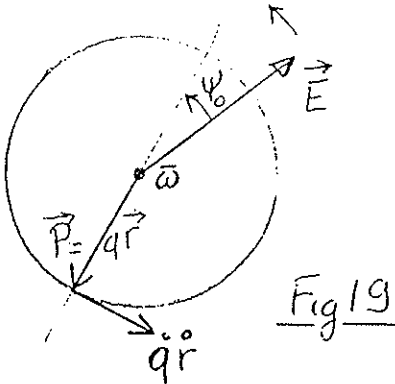
#### a) Couple exercé par le champ sur une lame absorbante

Le dipôle induit tourne à la fréquence  $\omega$  avec un déphasage  $\psi_0$  dépendant de l'amortissement (voir Fig 19 précisant les angles).

La puissance moyenne dissipée par le champ sur chaque charge est :

$$\overline{W} = q \mathbf{E} \cdot \dot{\mathbf{r}} = \varepsilon_0 |\alpha_0| E_0^2 \omega \sin \psi_0 \quad (\text{II-116})$$





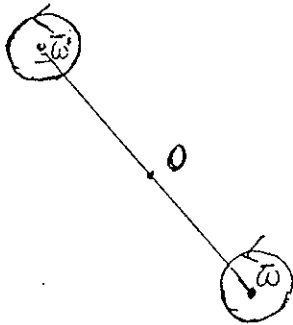
Par unité de surface, la puissance absorbée est donc :

$$\Phi = \epsilon_0 |\alpha_0| E_0^2 \omega \sin \psi_0 \Sigma \quad (\text{II-117})$$

Calculons à présent le couple  $\mathbf{C}$  de la force agissant sur chaque charge par rapport à son centre de rotation  $\bar{\omega}$ . On a, en négligeant la force magnétique:

$$\mathbf{C} = q \mathbf{r} \times \mathbf{E} = + \epsilon_0 |\alpha_0| E_0^2 \sin \psi_0 \mathbf{e}_z \quad (\text{II-118})$$

Si on exprime maintenant ce couple par rapport à un point origine  $O$  quelconque dans le plan, on trouve le nouveau couple  $\mathbf{C}_0$ :



$$\mathbf{C}_0 = q (\mathbf{O}\bar{\omega} + \mathbf{r}) \times \mathbf{E} = q \mathbf{O}\bar{\omega} \times \mathbf{E} + \mathbf{C}$$

Associons maintenant les charges 2 à 2 symétriquement par rapport au point  $O$ .

La somme des couples de deux charges symétriques sera manifestement égale à  $2\mathbf{C}$ .

En d'autres termes, la contribution de chaque charge au couple exercé par la force de Lorentz est en moyenne égale à  $\mathbf{C}$  et le couple exercé par unité de surface sera :

$$\mathbf{C}_{\text{unité de surface}} = \epsilon_0 |\alpha_0| E_0^2 \Sigma \sin \psi_0 \mathbf{e}_z \quad (\text{II-119})$$

Mais ce couple n'est autre que le moment cinétique cédé par unité de temps et de surface au plan de charges.

$$C_{\text{unité de surface}} = \frac{d}{dt} (\mathcal{M}_{\text{lame}} \text{ par unité de surface}) = \epsilon_0 |\alpha_0| E_0^2 \Sigma \sin \psi_0 \mathbf{e}_z \quad (\text{II-120})$$

On constate ainsi qu'à une quantité d'énergie  $\Phi$  cédée par le champ polarisé circulairement correspond une quantité de moment cinétique  $\frac{\Phi}{\omega}$ .

Lorsqu'on introduira la notion de photons, ceci reviendra à associer à chaque photon polarisé circulairement un moment cinétique égal à  $\pm \hbar$  le long de sa direction de propagation.

• Remarquons qu'il est nécessaire que l'onde soit polarisée circulairement (ou elliptiquement) pour transporter du moment angulaire. L'absorption d'une onde polarisée linéairement par un plan de charges libres ne donne lieu à aucun couple car  $\mathbf{r}$  est parallèle à  $\mathbf{E}$  à tout instant. Ce résultat peut s'interpréter en remarquant qu'une polarisation linéaire  $\mathbf{e}_x$  peut s'écrire comme la superposition de deux polarisations circulaires en sens inverse dont les moments cinétiques se compensent :

$$\mathbf{e}_x = \frac{\mathbf{e}_x + i\mathbf{e}_y}{2} + \frac{(\mathbf{e}_x - i\mathbf{e}_y)}{2} \quad (\text{II-121})$$

•• Dans le modèle décrit ici, le moment cinétique n'est pas absorbé par les charges puisque celles-ci sont en régime stationnaire et tournent donc à vitesse angulaire constante. C'est le réseau (ions positifs) qui doit encaisser le moment cinétique et l'ensemble de la lame matérielle subit un couple qui tend à la mettre en rotation (cet effet a été expérimentalement observé). Notons que cet échange ne se fait que si  $\psi_0 \neq 0$ , c'est-à-dire encore  $\gamma \neq 0$  : il

faut qu'il y ait dissipation pour que le moment cinétique soit échangé dans ce cas.

b) Interprétation physique des résultats précédents à partir des lois générales de conservation

Il est instructif d'analyser les résultats que nous venons d'établir à partir de la loi de conservation du moment cinétique du système charges + champ (Equ. I-20). Il semblerait pour cela qu'il suffise de calculer la densité de moment cinétique contenue dans le champ en chaque point,  $\mathbf{r} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{B})$ . On constate tout de suite une difficulté : pour une onde plane se propageant le long de  $oz$ ,  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  est parallèle à  $oz$  et  $\mathbf{r} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{B})$  est partout perpendiculaire à  $oz$ . Or le moment cinétique échangé avec le plan  $z=0$  est

précisément aligné le long de  $oz$ ! La difficulté traduit une indétermination mathématique évidente: si la densité de moment cinétique du champ le long de  $oz$  est nulle, la section de l'onde plane est infinie et le calcul du moment porté par une telle onde doit être  $\infty$  : mené avec précaution! Pour s'en tirer par un argument physique, il suffit de remplacer l'onde plane arrivant sur la lame par un paquet d'onde limité transversalement. Cette onde acquiert alors une densité de moment angulaire non nulle le long de  $oz$  et le moment total transporté à travers la section de l'onde se calcule alors sans problème. Le résultat est d'ailleurs comme nous le vérifierons indépendamment du diamètre du faisceau et permet donc de lever l'ambiguïté pour une onde de dimension transversale tendant vers l'infini. Notons que le fait de limiter spatialement l'onde à une région finie de l'espace permet de ne pas avoir à considérer le flux de moment cinétique à travers la surface de l'infini et d'exprimer la conservation du moment cinétique par l'équation simple (I-20) ( voir remarque p 16).

Commençons donc par déterminer de façon générale la structure d'une onde plane limitée transversalement en raisonnant par approximations successives.

Partons d'une onde plane de la forme :

$$\mathbf{E} = E_0 (a \mathbf{e}_x + b \mathbf{e}_y) e^{i(kz - \omega t)} \quad (a, b \text{ complexes}) \quad (\text{II-122})$$

et supposons que  $E_0$  est une fonction lentement variable de  $x$  et  $y$  (variant sur des distances caractéristiques grandes devant  $\lambda$ ). On a alors:

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{a \partial E_0(x, y)}{\partial x} ; \quad \frac{\partial E_y}{\partial y} = \frac{b \partial E_0}{\partial y} \quad (\text{II-123})$$

La relation  $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$  impose alors :

$$\frac{\partial E_z}{\partial z} = -a \frac{\partial E_0}{\partial x} - b \frac{\partial E_0}{\partial y} \quad (\text{II-124})$$

Le champ présente donc nécessairement en plus une composante le long de  $oz$ ,  $E_0' \mathbf{e}_z e^{i(kz - \omega t)}$  telle que :

$$ik E_0' + \frac{\partial E_0'}{\partial z} = -a \frac{\partial E_0}{\partial x} - b \frac{\partial E_0}{\partial y} \quad (\text{II-125})$$

Les variations de l'amplitude de  $E$  étant petites à l'échelle de  $\lambda$ ,  $\frac{\partial E_0'}{\partial z}$  est négligeable devant  $kE_0'$  et l'on a finalement :

$$\mathbf{E} = \left\{ E_0(x, y) (a \mathbf{e}_x + b \mathbf{e}_y) + \frac{i}{k} \left( a \frac{\partial E_0}{\partial x} + b \frac{\partial E_0}{\partial y} \right) \mathbf{e}_z \right\} e^{i(kz - \omega t)} \quad (\text{II-126})$$

La limitation transversale du champ fait apparaître une composante de la polarisation le long de  $oz$ , c'est-à-dire une composante du champ ayant un vecteur d'onde incliné sur  $oz$ . Ceci n'est rien d'autre que le

phénomène de diffraction. C'est l'apparition de cette composant de  $\mathbf{E}$  parallèle à  $oz$  qui donne à la densité de moment cinétique une composante le long de  $oz$ .

Avant d'aller plus loin, il nous faut évaluer à cet ordre du calcul le champ magnétique : il suffit pour cela de calculer  $\nabla \times \mathbf{E}$  :

$$\begin{aligned} (\nabla \times \mathbf{E})_x &= \left\{ -i k b E_0 + \frac{i}{k} \left[ a \frac{\partial^2 E_0}{\partial x \partial y} + b \frac{\partial^2 E_0}{\partial y^2} \right] \right\} e^{i(kz - \omega t)} \\ (\nabla \times \mathbf{E})_y &= \left\{ +i k a E_0 - \frac{i}{k} \left[ a \frac{\partial^2 E_0}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 E_0}{\partial x \partial y} \right] \right\} e^{i(kz - \omega t)} \quad (\text{II-127}) \\ (\nabla \times \mathbf{E})_z &= \left( -a \frac{\partial E_0}{\partial y} + b \frac{\partial E_0}{\partial x} \right) e^{i(kz - \omega t)} \end{aligned}$$

Soit en négligeant les contributions des dérivées secondes (très petites si  $E_0$  varie lentement à l'échelle de  $\lambda$ ):

$$\mathbf{B} = \left\{ -\frac{E_0}{c} (b \mathbf{e}_x - a \mathbf{e}_y) - \frac{i}{ck} \left( b \frac{\partial E_0}{\partial x} - a \frac{\partial E_0}{\partial y} \right) \mathbf{e}_z \right\} e^{i(kz - \omega t)} \quad (\text{II-128})$$

Nous pouvons calculer maintenant  $\mathbf{r} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{B})$ . Il faut d'abord évaluer les champs physiques qui sont les parties réelles des champs ci-dessus :

$$\mathbf{E}^R = \frac{\mathbf{E} + \mathbf{E}^*}{2} \quad ; \quad \mathbf{B}^R = \frac{\mathbf{B} + \mathbf{B}^*}{2} \quad (\text{II-129})$$

Seule la partie de  $\mathbf{E}^R \times \mathbf{B}^R$  à fréquence nulle contribue à la valeur moyenne, soit :

$$(\mathbf{E}^R \times \mathbf{B}^R)_{\text{fréquence nulle}} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}^*}{4} + \frac{\mathbf{E}^* \times \mathbf{B}}{4} = \frac{1}{2} \text{Re}(\mathbf{E} \times \mathbf{B}^*) \quad (\text{II-130})$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \times \mathbf{B}^* = & -\frac{E_0^2}{c} (a\mathbf{e}_x + b\mathbf{e}_y) \times (b^*\mathbf{e}_x - a^*\mathbf{e}_y) - \frac{iE_0}{ck} \left( a \frac{\partial E_0}{\partial x} + b \frac{\partial E_0}{\partial y} \right) \mathbf{e}_z \times (b^*\mathbf{e}_x - a^*\mathbf{e}_y) \\ & + \frac{iE_0}{ck} \left[ b^* \frac{\partial E_0}{\partial x} - a^* \frac{\partial E_0}{\partial y} \right] (a\mathbf{e}_x + b\mathbf{e}_y) \times \mathbf{e}_z \end{aligned} \quad (\text{II-131})$$

(en négligeant des termes en  $(\partial E_0/\partial x)^2$ ).

D'où :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \text{Re}[\mathbf{E} \times \mathbf{B}^*] = & + \frac{E_0^2}{2c} (aa^* + bb^*) \mathbf{e}_z - \frac{iE_0}{2ck} \left[ (ab^* - a^*b) \frac{\partial E_0}{\partial x} \mathbf{e}_y \right. \\ & \left. + (a^*b - ab^*) \frac{\partial E_0}{\partial y} \mathbf{e}_x \right] \end{aligned} \quad (\text{II-132})$$

et enfin la densité de moment cinétique le long de oz :

$$\varepsilon_0 [\mathbf{r} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{B})]_z = -\varepsilon_0 \frac{iE_0}{2ck} (ab^* - a^*b) \left[ x \frac{\partial E_0}{\partial x} + y \frac{\partial E_0}{\partial y} \right] \quad (\text{II-133})$$

que l'on peut écrire encore :

$$\varepsilon_0 [\mathbf{r} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{B})]_z = -\frac{i\varepsilon_0}{4ck} (ab^* - a^*b) \left[ x \frac{\partial E_0^2}{\partial x} + y \frac{\partial E_0^2}{\partial y} \right] \quad (\text{II-134})$$

Le moment cinétique "pénétrant" par unité de temps dans le plan  $z=0$  est donc :

$$\frac{d\mathcal{M}_{\text{entrée}}}{dt} = -\frac{i\varepsilon_0}{4k} (ab^* - a^*b) \iint \left( x \frac{\partial E_0^2}{\partial x} + y \frac{\partial E_0^2}{\partial y} \right) dx dy \quad (\text{II-135})$$

L'intégrale se calcule immédiatement par changement de coordonnées (on considère que  $E_0(x,y)$  est à symétrie cylindrique et ne dépend que de  $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$  ;  $x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} = \rho \frac{\partial}{\partial \rho}$  et  $dx dy = \rho d\rho d\theta$ ) d'où :

$$\frac{d\mathcal{M}_{\text{entrée}}}{dt} = -\frac{i\varepsilon_0}{4k} (ab^* - a^*b) \int d\theta \int_0^{\infty} \rho^2 d\rho \frac{\partial}{\partial \rho} E_0^2(\rho) \quad (\text{II-136})$$

L'intégrale en  $\rho$  s'intègre par parties :

$$\int_0^{+\infty} \rho^2 d\rho \frac{\partial E_0^2}{\partial \rho} = \left[ \rho^2 E_0^2 \right]_0^{+\infty} - 2 \int_0^{+\infty} \rho d\rho E_0^2(\rho) \quad (\text{II-137})$$

La partie intégrée est nulle car  $E_0^2(\infty) = 0$  et

$$\frac{d\mathcal{M}_{\text{entrée}}}{dt} = \frac{i\varepsilon_0}{2k} (ab^* - a^*b) \iint \rho d\rho d\theta E_0^2(\rho) \quad (\text{II-137})$$

A la sortie de la lame,  $E_0^2$  est devenu  $E_0^2 \left(1 - \frac{\Sigma \omega \alpha''}{c}\right)$  (voir paragraphe précédent).

Finalement, le moment cinétique perdu par le champ par unité de temps est :

$$\frac{d}{dt} (\mathcal{M}_{\text{entrée}} - \mathcal{M}_{\text{sortie}}) = \frac{i}{2ck} \varepsilon_0 \Sigma \omega \alpha'' (ab^* - a^*b) \iint \rho d\rho d\theta E_0^2 \quad (\text{II-138})$$

soit encore, en remarquant que :

$$\alpha'' = I_m(\alpha) = -\alpha_0 \sin\psi_0 = |\alpha_0| \sin\psi_0 \quad (\text{II-139})$$

$$\frac{d}{dt} (\mathcal{M}_{\text{entrée}} - \mathcal{M}_{\text{sortie}}) = \frac{i\epsilon_0}{2ck} (ab^* - a^*b) \Sigma \omega |\alpha_0| \sin\psi_0 \int_{\text{lame}} \int E_0^2(x,y) dx dy \quad (\text{II-140})$$

Pour un champ polarisé circulairement à gauche ( $\mathbf{e}_x + i\mathbf{e}_y$ ) :

$$a = 1, b = i \text{ et } ab^* - a^*b = -2i \quad (\text{II-141})$$

soit finalement :

$$\frac{d}{dt} (\mathcal{M}_{\text{entrée}} - \mathcal{M}_{\text{sortie}}) = \epsilon_0 |\alpha_0| \Sigma \sin\psi_0 \iint E_0^2(x,y) dx dy \quad (\text{II-142})$$

En rapprochant ce résultat de l'équation (II-120), on trouve :

$$\frac{d}{dt} (\mathcal{M}_{\text{entrée}}^{\text{champ}} - \mathcal{M}_{\text{sortie}}^{\text{champ}}) = \frac{d}{dt} \mathcal{M}_{\text{lame}} \text{ intégrée sur la surface} \quad (\text{II-143})$$

ce qui montre bien que le moment cinétique perdu par le champ a été gagné par la matière.

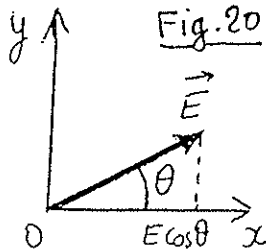
Remarquons que pour un champ polarisé linéairement,  $a$  et  $b$  sont réels et le moment cinétique transporté par le champ est nul.

c) Modèle simple de lame biréfringente : création de moment angulaire dans le champ



Considérons à présent une situation physique différente : la lame de charges a une polarisabilité anisotrope réelle : en d'autres termes il s'agit d'une lame parfaitement transparente, mais présentant un indice différent pour deux champs polarisés à angle droit. Nous allons montrer qu'une onde électromagnétique polarisée linéairement tombant sur cette lame va en général donner naissance à une onde transmise polarisée elliptiquement, c'est-à-dire transportant du moment cinétique. L'échange de moment cinétique entre le rayonnement et la matière est de nature dispersive (phénomène lié à l'indice) alors qu'il était absorptif dans le cas précédent.

Choisissons un modèle très simple où les électrons du milieu sont soumis à une contrainte les obligeant à se déplacer préférentiellement dans une direction donnée (ox). Cette situation se rencontre dans des cristaux où le potentiel électronique est anisotrope. Considérons un champ électrique



polarisé linéairement dans la direction faisant l'angle  $\theta$  avec l'axe ox (Fig 20)

On a évidemment en régime stationnaire :

$$P_x = \epsilon_0 \alpha_x E_0 \cos\theta e^{i\omega t}$$

$$P_y = 0$$

où  $\alpha_x = \alpha$  est donné par l'expression générale établie plus haut. On suppose de plus le milieu non absorbant ( $\gamma$  négligeable et  $\alpha_x = \alpha$  réel).

**Remarque :** Le raisonnement présenté ici suppose pour simplifier  $\alpha_y = 0$ . Il se généralise sans difficulté au cas  $\alpha_y \neq \alpha_x$ .

Il n'y a donc pas d'échange d'énergie entre le champ et les charges ( $p_x$  et  $E$  en phase à tout instant) et :

$$\Phi = 0$$

Il y a cependant un couple non nul exercé par le champ sur le plan, comme on s'en rend compte en calculant le couple exercé sur une charge :

$$\mathbf{C}_0 = \overline{\mathbf{p} \times \mathbf{E}} = \overline{P_x E_y - P_y E_x} = \epsilon_0 \alpha E_0^2 \sin\theta \cos\theta \overline{\cos^2 \omega t} \mathbf{e}_z = \epsilon_0 \frac{\alpha E_0^2 \sin\theta \cos\theta}{2} \mathbf{e}_z \quad (\text{II-144})$$

puis le couple par unité de surface

$$\frac{d\mathcal{M}_{\text{ame}}}{dt} = \Sigma \mathbf{C}_0 = \epsilon_0 \frac{\Sigma \alpha E_0^2 \sin\theta \cos\theta}{2} \mathbf{e}_z. \quad (\text{II-145})$$

En d'autres termes, une onde polarisée linéairement (c'est-à-dire ne transportant pas de moment angulaire le long de sa direction de propagation) peut céder du moment angulaire à un milieu anisotrope sans être absorbée.

La conservation du moment cinétique exige que l'onde transmise emporte le moment cinétique opposé. Vérifions-le.

La composante le long de oy se propage sans altération car  $\alpha_y = 0$ .

On a donc pour  $z > 0$  :

$$E_y = E_0 \sin\theta e^{i(kz - \omega t)}$$

La composante le long de ox subit quant à elle un déphasage calculé plus haut. A l'approximation des faibles densités :

$$\begin{aligned}
 E_x &= E_0 \cos\theta \left[ 1 + i \frac{\sum \omega \alpha'}{2c} \right] e^{i(kz - \omega t)} \\
 &= E_0 \cos\theta [ 1 + i\beta ] e^{i(kz - \omega t)} \quad \text{avec} \quad \beta = \frac{\sum \omega \alpha'}{2c}
 \end{aligned} \tag{II-146}$$

$\beta \neq 0$  signifie qu'il est apparu un déphasage entre  $E_x$  et  $E_y$  : l'onde est devenue elliptique et a acquis du moment cinétique.

D'après les résultats de la section précédente, le flux du moment cinétique créé est :

$$\frac{d\mathcal{M}}{dt} = \frac{i\varepsilon_0}{2k} (ab^* - a^*b) E_0^2 \mathbf{e}_z \tag{II-147}$$

avec ici :  $a = \cos\theta (1 + i\beta)$

$$b = \sin\theta$$

soit :

$$\begin{aligned}
 \frac{d\mathcal{M}_{\text{champ}}}{dt} &= \frac{i\varepsilon_0}{2k} \sin\theta \cos\theta [ (1+i\beta) - (1-i\beta) ] E_0^2 \mathbf{e}_z = -\frac{\varepsilon_0}{k} \beta \sin\theta \cos\theta E_0^2 \mathbf{e}_z \\
 &= -\varepsilon_0 \frac{\sum \alpha' \sin\theta \cos\theta E_0^2}{2} \mathbf{e}_z
 \end{aligned} \tag{II-148}$$

On trouve bien, par unité de surface :

$$\frac{d\mathcal{M}_{\text{lame}}}{dt} + \frac{d\mathcal{M}_{\text{champ}}}{dt} = 0 \tag{II-149}$$

**Remarque :** Dans le cas d'une lame d'épaisseur finie, les résultats précédents se généralisent aisément (voir plus haut) en remplaçant  $1+i\beta$  par  $e^{i(N\omega\alpha'/2c)}$ . On peut alors remarquer que  $1 + \frac{N\alpha'}{2}$  correspond à l'indice

$n_x$  pour une onde polarisée le long de l'axe  $ox$  alors que l'indice  $n_y$  pour une onde polarisée le long de l'autre axe est 1 dans notre modèle. On a donc la généralisation immédiate:

$$1 + i\beta \rightarrow e^{i(2\pi l/\lambda)(n_x - n_y)}$$

Pour obtenir une onde polarisée circulairement à la sortie de la lame, il faut donc avoir  $\theta = \pi/4$  et :

$$\frac{2\pi l}{\lambda} (n_x - n_y) = (2q + 1) \frac{\pi}{2} \quad (\text{II-150})$$

$$\text{soit : } (n_x - n_y) l = (2q + 1) \frac{\lambda}{4}$$

La différence des chemins optiques pour des ondes polarisées le long de  $ox$  et  $oy$  doit être égale à un nombre impair du quart de longueur d'onde dans le vide (lame dite "quart d'onde").

Le milieu décrit ici, qui possède deux indices de réfraction différents pour deux ondes polarisées à angle droit l'une de l'autre, est dit biréfringent. Remarquons que la différence des deux indices dépend de la fréquence (voir les expressions de la polarisabilité du milieu). Ainsi, les effets de polarisation étudiés ici dépendent donc aussi, pour une lame donnée, de la longueur d'onde du rayonnement.

Les divers effets physiques décrits dans ce chapitre montrent l'importance fondamentale de la notion d'interférence en électromagnétisme et en optique. Cette notion apparaît clairement avec le principe d'Huyghens-Fresnel qui décrit l'interférence des ondes sphériques

issues de tous les points de l'ouverture que l'on étudie. Elle est essentielle également à la compréhension des phénomènes de propagation et de réflexion des ondes dans un milieu matériel: les champs qui se propagent résultent de l'interférence du champ incident et du champ rayonné par le mouvement des charges du milieu, lui même induit par le champ présent. Les effets de polarisation sont aussi des effets d'interférence: la génération d'une onde polarisée elliptiquement ou circulairement peut résulter de la superposition de champs polarisés dans des directions différentes, avec un décalage de phase dans ces deux directions. Cette notion d'interférence qui apparaît ici dans un contexte purement classique se retrouve dans le traitement quantique de l'Electrodynamique ( voir Chapitre VII). On s'intéresse alors à la probabilité de détecter un photon en un point à un instant donné, qui se présente comme le carré d'une amplitude complexe, elle même somme de contributions correspondant aux différentes "histoires" possibles du photon. Dans le cas où l'on cherche par exemple à calculer la probabilité de détecter un photon à la sortie d'un milieu transparent éclairé par une source très peu intense, il faudra sommer les amplitudes correspondant à l'absorption d'un photon de la source et à la réémission d'un photon diffusé par chaque atome du milieu. L'analogie avec le calcul du champ classique développé dans ce chapitre est évidente. Nous reviendrons sur cette notion essentielle d'interférence, classique ou quantique, aux chapitres IV, V et VII. Une discussion lumineuse de ce concept peut être trouvée dans les oeuvres pédagogiques de R. Feynman (dans "Lectures in Physics" pour l'aspect classique et "QED, The Strange Theory of Light and Matter" ,Princeton University Press, pour l'aspect quantique).



### CHAPITRE III

#### RAYONNEMENT ET DIFFUSION

Nous étudions dans ce chapitre les propriétés du champ rayonné par des charges en mouvement. Par rayonnement nous entendons la contribution du champ qui décroît à grande distance des sources en  $1/r$ , c'est à dire qui correspond à un flux non nul d'énergie à travers la surface de l'infini. Nous allons étudier le rayonnement optique des atomes ou des molécules, mais aussi celui des antennes radio et celui des particules relativistes (électrons ou protons dans des accélérateurs, particules cosmiques ou interstellaires accélérées dans des champs magnétiques ou électriques).

La propriété essentielle sur laquelle il convient d'insister en introduction est que seules les particules chargées accélérées rayonnent. Le principe d'invariance relativiste permet en effet de montrer simplement qu'une charge en mouvement de translation uniforme produit un champ décroissant en  $1/r^2$ . Dans le référentiel Galiléen attaché à la charge le champ est un pur champ électrostatique donné par la loi de Coulomb et un changement quelconque de repère galiléen ( voir équations A1-21) ne peut transformer un champ décroissant en  $1/r^2$  en champ en  $1/r$ . Ce résultat physique important, établi ici à partir d'un argument purement classique, se retrouve également en électrodynamique quantique: il est immédiat de montrer que l'émission "réelle" d'un photon par une particule immobile ne permet pas de conserver à la fois l'énergie et l'impulsion du système "charge + champ"; une telle émission est donc impossible. Par application du principe de relativité, il en est de même de l'émission d'un photon par une

particule en mouvement de translation uniforme. L'étude du rayonnement traite donc essentiellement de l'interaction entre le champ électromagnétique et des particules chargées accélérées.

Nous envisagerons dans les six premiers paragraphes de ce Chapitre le cas pratique important de sources de rayonnement monochromatique, localisées dans une petite région de l'espace. Une antenne radio alimentée par un oscillateur de fréquence fixée représente une telle situation. Il en est de même à une autre échelle des atomes ou des molécules dans lesquels les charges sont localisées dans un tout petit volume de dimension  $\rho_0 \approx a_0$  (1Å) et oscillent aux fréquences de Bohr du système. Adoptant au départ un point de vue classique, nous commencerons donc par analyser le cas limite d'une distribution  $\delta$  monochromatique de courant localisée en  $r=0$  et montrerons qu'il lui est associé un dipôle électrique oscillant. Nous étudierons la structure du champ rayonné par une telle source en séparant les contributions à grande portée ( $r \gg \lambda$ ) des contributions à courte portée ( $r \ll \lambda$ ). Nous verrons que le champ rayonné à grande distance est proportionnel au carré de la fréquence, c'est-à-dire bien à l'accélération des charges. Nous étudierons en détail la structure (polarisation, diagramme de rayonnement) du champ du dipôle électrique à grande distance et calculerons la puissance qu'il rayonne (§ III-1).

En fait, une source physique ne peut être rigoureusement ponctuelle. Nous montrerons au § III-2 que l'extension finie de la source (sur une dimension  $\rho_0$ ) conduit à développer le champ rayonné en puissance de  $\rho_0/\lambda$ , ou ce qui revient au même de  $v/c$  ( $v$  = vitesse des charges). Le terme dipolaire électrique est le terme d'ordre zéro de ce développement. Le terme d'ordre un en  $\rho_0/\lambda$  ou  $v/c$  correspond aux contributions dipolaire



magnétique et quadrupolaire électrique, dont nous analyserons également les diagrammes de rayonnement.

Nous donnerons ensuite (§ III-3) des exemples concrets de distributions de charges et de courant classiques correspondant à des dipôles ou à des quadrupoles. Puis nous nous intéresserons au cas du rayonnement d'un atome, dont l'état dynamique est décrit par la Mécanique Quantique. Nous montrerons qu'un atome dans une superposition linéaire d'états propres de l'énergie correspond en général à un dipôle électrique moyen oscillant aux fréquences de Bohr des transitions entre ces états (§ III-4). Nous généraliserons également dans le cadre quantique les notions de dipôle magnétique et de quadrupole électrique (§ III-5).

Souvent les charges qui rayonnent sont elles-mêmes accélérées par un champ électromagnétique incident. Leur rayonnement correspond alors à une redistribution du champ dans des directions différentes de celle dans laquelle se propage le champ incident. C'est le phénomène très important de diffusion de la lumière. Nous abordons au § III-6 ce problème, d'abord en traitant classiquement le mouvement des charges (modèle de l'électron élastiquement lié), puis en considérant un diffuseur atomique traité par la Mécanique Quantique. Nous justifierons à cette occasion le modèle classique en montrant qu'un ensemble d'atomes ou de molécules quantiques interagissant avec un champ électromagnétique peu intense (approximation linéaire) se comportent vis-à-vis de la diffusion comme une collection d'oscillateurs harmoniques classiques. Nous analyserons différents types de diffusion, suivant les ordres de grandeur respectifs de la fréquence du champ incident et des fréquences de résonance atomique (diffusion Rayleigh, Thomson, résonnante, ...).

Jusqu'à ce stade, nous aurons considéré uniquement les cas des charges localisées dans de "petits" volumes, à la limite non relativiste. Nous concluons ce chapitre (§ III-7) par une analyse du rayonnement de particules en mouvement quelconque et envisagerons en particulier le cas de particules relativistes ou ultra-relativistes (rayonnement des accélérateurs). Pour alléger la présentation, nous reporterons dans deux compléments la démonstration détaillée de certains résultats utilisés dans le cours du chapitre.

### 1°) Champ d'un dipôle électrique ponctuel monochromatique

Considérons pour commencer le cas d'une densité de courant très localisée au voisinage de  $r=0$  et oscillant à la pulsation  $\omega$  le long de l'axe  $oz$ . (Il s'agit par exemple d'une source constituée par une charge vibrant avec une toute petite amplitude). Nous poserons:

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = \Re \left\{ j_{\omega} e^{-i\omega t} \delta(\vec{r}) \vec{e}_z \right\} \quad (\text{III-1})$$

Notons tout de suite que l'équation de conservation de la charge (équ 1-5) impose d'associer à  $\vec{j}$  une densité de charge:

$$\rho(\vec{r}, t) = \Re \left\{ \rho_{\omega} e^{-i\omega t} \delta(x) \delta(y) \delta'(z) \right\} \quad (\text{III-2})$$

avec

$$\rho_{\omega} = -\frac{i}{\omega} j_{\omega} \quad (\text{III-3})$$

(la densité de charge oscille en quadrature avec le courant). Il sera utile dans la suite d'introduire le dipôle électrique d'une distribution de charges, défini par:

$$\vec{D} = \int \vec{r} \rho(\vec{r}, t) d^3 \vec{r} \quad (\text{III-4})$$

La distribution considérée ici correspond donc au dipôle oscillant

$$\vec{D} = \Re e \left\{ D_{\omega} e^{-i \omega t} \vec{e}_z \right\} \quad (\text{III-5})$$

avec

$$D_{\omega} = \frac{i}{\omega} j_{\omega} \quad (\text{III-6})$$

Pour calculer le champ de ce dipôle, nous partons de la formule générale des potentiels retardés (équation I- 83b) :

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\vec{j}(\vec{r}', t') d^3 \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (t' = t - |\vec{r} - \vec{r}'|/c)$$

et nous obtenons immédiatement:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} j_{\omega} \frac{e^{-i \omega(t-r/c)}}{r} \vec{e}_z \quad (\text{III-7})$$

(nous adoptons la notation complexe. Les champs physiques sont les parties

reelles des quantites complexes correspondantes. Nous ne le préciserons plus explicitement, sauf cas particulier).

Pour calculer le champ électromagnétique en dehors de la source à partir de (III-7), le plus commode est de calculer d'abord  $\vec{B}$  (par  $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ ), puis  $\vec{E}$  à partir de l'équation de Maxwell:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

valable en dehors des charges. On obtient alors:

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} j_\omega \vec{\nabla} \times \left[ \frac{e^{-i\omega(t-r/c)}}{r} \vec{e}_z \right] \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} j_\omega \left\{ \vec{\nabla} \left( \frac{e^{-i\omega(t-r/c)}}{r} \right) \right\} \times \vec{e}_z \quad (\text{III-8}) \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} j_\omega \frac{d}{dr} \left( \frac{e^{-i\omega(t-r/c)}}{r} \right) \left( \vec{n} \times \vec{e}_z \right) \end{aligned}$$

avec  $\vec{n} = \vec{r}/r$  : vecteur unitaire dirigé de la source vers l'observateur.

#### a) Champ à grande distance (champ rayonné).

Le champ fait ainsi apparaître la dérivée par rapport à la position du point d'observation du terme

$$\frac{e^{-i\omega(t-r/c)}}{r} = \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r}$$

La partie correspondant à la dérivée de  $1/r$  va donner une contribution en  $1/r^2$ . Intéressons-nous pour commencer à la contribution du champ ne décroissant qu'en  $1/r$  (champ rayonné à grande distance). Cette contribution provient de la dérivation du temps retardé par rapport à  $r$  dans le terme de phase ( $e^{ikr}$ ). Ce résultat est général: c'est parce que le champ observé dépend de l'état de la source au temps retardé, autrement dit parce que la propagation s'effectue à vitesse  $c$  finie, qu'il existe des termes en  $1/r$  dans l'expression des champs, c'est-à-dire en fin de compte que le rayonnement existe.

Nous obtenons donc, à grande distance :

$$\vec{B} \simeq \frac{\mu_0}{4\pi} j_\omega \frac{ik}{r} e^{i(kr - \omega t)} \left( \vec{n} \times \vec{e}_z \right)$$

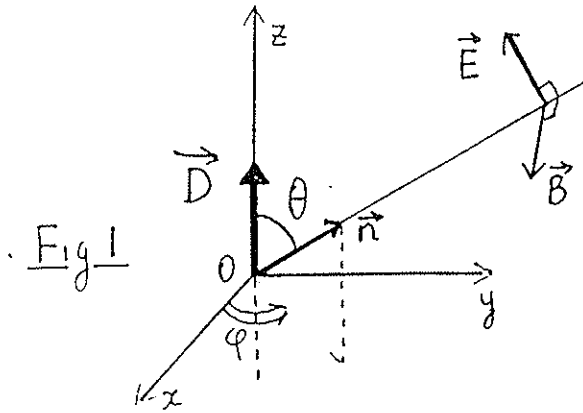
ou encore

$$\vec{B} \simeq \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{k\omega}{r} D_\omega e^{i(kr - \omega t)} \left( \vec{n} \times \vec{e}_z \right) \quad (\text{III-9})$$

Le champ électrique, toujours à grande distance, s'écrit de même (en utilisant la relation  $\vec{\nabla} \times \vec{B} = -\frac{i\omega}{c^2} \vec{E}$ ):

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\omega^2}{c^2} \frac{1}{r} D_\omega e^{i(kr - \omega t)} \left( \vec{n} \times \vec{e}_z \right) \times \vec{n} \quad (\text{III-10})$$

On remarque que le champ à grande distance a une structure d'onde plane avec  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  formant un trièdre direct et  $|\mathbf{B}| = |\mathbf{E}|/c$ .



Pour étudier le diagramme de rayonnement, il suffit donc de préciser la variation de  $\mathbf{E}$  avec la direction de  $\mathbf{n}$  (voir Fig 1 ci-contre).  $\mathbf{E}$  se trouve dans le plan  $\mathbf{D}, \mathbf{n}$  et est perpendiculaire à  $\mathbf{n}$ . Le module de  $\mathbf{E}$  est proportionnel à  $\sin\theta$ ; le rayonnement est maximum dans le

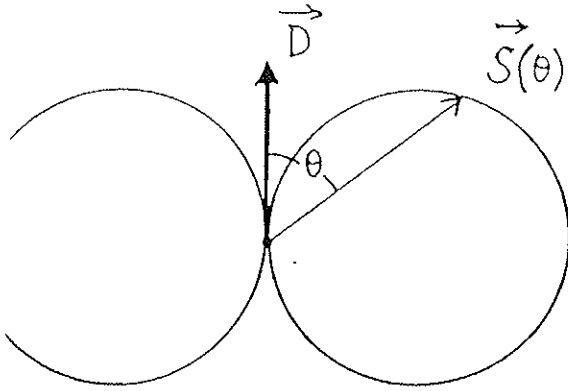
plan perpendiculaire au dipôle  $\mathbf{D}$  et nul dans la direction du dipôle. Pour calculer le flux d'énergie rayonné, déterminons la valeur moyenne du vecteur de Poynting dans la direction  $\theta, \varphi$  : (la moyenne est prise sur une période de l'oscillation). Il faut pour ce calcul distinguer la notation complexe des champs physiques réels :

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{S}} &= \varepsilon_0 c^2 \overline{\vec{\mathbf{E}}_{\text{réel}} \times \vec{\mathbf{B}}_{\text{réel}}} = \frac{\varepsilon_0 c^2}{4} \left[ \vec{\mathbf{E}}_{\omega} e^{-i\omega t} + \vec{\mathbf{E}}_{\omega}^* e^{i\omega t} \right] \times \left[ \vec{\mathbf{B}}_{\omega} e^{-i\omega t} + \vec{\mathbf{B}}_{\omega}^* e^{i\omega t} \right] \\ &= \frac{\varepsilon_0 c^2}{2} \vec{\mathbf{E}}_{\omega} \times \vec{\mathbf{B}}_{\omega}^* \end{aligned} \quad (\text{III-11})$$

ou encore

$$\overline{\mathbf{S}} = \frac{D_{\omega}^2}{32\pi^2 \varepsilon_0 c^3} \frac{\omega^4}{r^2} \sin^2\theta \vec{\mathbf{n}} \quad (\text{III-12})$$

On voit sur cette expression que la puissance rayonnée dans la direction  $\theta$  varie en  $\sin^2\theta$ . Si on porte dans chaque direction une longueur proportionnelle à l'intensité rayonnée dans cette direction, on obtient le diagramme de rayonnement caractéristique du dipôle électrique (Fig. 2 ci-



contre). Quant à la puissance totale rayonnée par le dipôle, elle s'obtient en intégrant le vecteur de Poynting sur la sphère de rayon  $r$  :

Fig 2

$$\begin{aligned}
 P_{d.e.} &= \int \vec{S}(r, \theta, \varphi) r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \\
 &= \frac{D_{\omega}^2}{12\pi\epsilon_0 c^3} \omega^4
 \end{aligned}
 \tag{III-13}$$

Le champ étant proportionnel à  $\omega^2$ , c'est-à-dire à l'accélération des charges, la puissance rayonnée est proportionnelle à  $\omega^4$ .

Il est important de remarquer que la puissance rayonnée correspond à un amortissement du dipôle oscillant. En d'autres termes, la conservation de l'énergie implique que le dipôle reçoive d'une source extérieure (générateur électrique, champ incident accélérant les charges, etc...) l'énergie qu'il rayonne à chaque instant. Si le dipôle n'est pas entretenu, il va s'amortir en un temps fini.

Supposons que le dipôle étudié soit constitué par une charge  $q$  de masse  $m$  effectuant une oscillation harmonique d'amplitude  $x_0$  le long de  $oz$ . Son énergie mécanique est alors

$$E_0 = \frac{1}{2} m\omega^2 x_0^2
 \tag{III-14}$$

et la puissance rayonnée correspondant au dipôle  $D_{\omega} = q x_0$  est d'après (III-13) :

$$\mathcal{P}_{d.e.}(x_0) = \frac{q^2 \omega^4}{12\pi\epsilon_0 c^3} x_0^2 \quad (\text{III-15})$$

La fraction de l'énergie mécanique dissipée par unité de temps par le rayonnement de la charge est donc indépendante de  $x_0$  et l'on a :

$$\frac{dE(x_0)}{E(x_0)} = - \frac{q^2 \omega^2}{6\pi\epsilon_0 mc^3} dt \quad (\text{III-16})$$

ce qui montre que l'énergie mécanique du dipôle s'amortit exponentiellement avec un taux d'amortissement radiatif :

$$\gamma = \frac{1}{\tau} = \frac{q^2 \omega^2}{6\pi\epsilon_0 mc^3} \quad (\text{III-17})$$

Nous verrons que le rayonnement optique d'un atome peut être en général assimilé à celui d'un petit dipôle électrique oscillant aux fréquences de Bohr atomiques. La formule (III-17) permet d'estimer qualitativement l'ordre de grandeur du temps de désexcitation radiative d'un niveau atomique. Estimons pour cela la quantité sans dimension (facteur de qualité de la raie atomique) :

$$\frac{\gamma}{\omega} = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 mc^3} \omega \quad (\text{III-18})$$

Dans cette expression,  $\omega$  est une fréquence de Bohr atomique, typiquement de l'ordre de

$$\frac{R}{h} \sim \alpha^2 \frac{mc^2}{h}$$



ou  $R$  est la constante de Rydberg et

$$\alpha = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} = \frac{1}{137}$$

est la "constante de structure fine" (voir cours de Mécanique Quantique). On a donc :

$$\frac{\gamma}{\omega} \sim \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 \hbar c} \alpha^2 \sim \alpha^3 \sim 10^{-7} \quad (\text{III-19})$$

On trouve ainsi un taux d'amortissement radiatif de l'ordre de  $10^{-7}\omega$  avec  $\omega \approx 10^{16} \text{S}^{-1}$ , soit  $\gamma \approx 10^9 \text{S}^{-1}$  et  $\tau \approx 10^{-9} \text{S}$ . Il s'agit là d'un ordre de grandeur tout à fait raisonnable pour un niveau d'énergie atomique excité (le temps caractéristique d'amortissement du niveau 2p de l'atome d'Hydrogène est en fait  $1,6 \cdot 10^{-9} \text{ s}$ ). On ne peut cependant décrire correctement le rayonnement d'un atome isolé que dans le cadre de l'Electrodynamique Quantique et le calcul présenté ici ne prétend pas être plus qu'une estimation simple d'un ordre de grandeur.

#### b) Champ à distance quelconque.

Nous ne nous sommes intéressés jusqu'ici qu'au champ rayonné à grande distance. Il est possible de calculer à partir de (III-8) le champ exact du dipôle, quel que soit  $r$ . Récrivons pour cela  $\vec{B}$  sous la forme :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{j}_\omega \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left\{ \frac{e^{i(kr - \omega t)}}{r} \right\} \left( \vec{r} \times \vec{e}_z \right)$$

puis déterminons  $\vec{E}$  à partir de  $-i\omega\vec{E} = c^2 \nabla \times \vec{B}$  :

$$\vec{E} = \frac{i}{\omega} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} j_\omega \vec{\nabla} \times \left[ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left\{ \frac{e^{i(kr - \omega t)}}{r} \right\} \left( \vec{r} \times \vec{e}_z \right) \right] \quad (\text{III-20})$$

Utilisons alors la relation d'algèbre vectorielle :

$$\vec{\nabla} \times [ f(r) \vec{V}(\vec{r}) ] = \frac{d}{dt} f(r) \left\{ \frac{\vec{r}}{r} \times \vec{V}(\vec{r}) \right\} + f(r) \vec{\nabla} \times \vec{V}(\vec{r}) \quad (\text{III-21})$$

Il vient :

$$\vec{E} = \frac{D_\omega}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \frac{e^{i(kr - \omega t)}}{r} \right) \vec{r} \times \left( \vec{r} \times \vec{e}_z \right) + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( \frac{e^{i(kr - \omega t)}}{r} \right) \vec{\nabla} \times \left( \vec{r} \times \vec{e}_z \right) \right\} \quad (\text{III-22})$$

On se sert enfin de l'identité

$$\vec{\nabla} \times \left( \vec{r} \times \vec{e}_z \right) = -2\vec{e}_z \quad (\text{III-23})$$

et on introduit le vecteur  $\vec{n} = \vec{r}/r$  :

$$\vec{E} = \frac{D_\omega}{4\pi\epsilon_0} e^{-i\omega t} \left\{ r \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \frac{e^{ikr}}{r} \right) \vec{n} \times \left( \vec{n} \times \vec{e}_z \right) - \frac{2}{r} \frac{d}{dr} \left( \frac{e^{ikr}}{r} \right) \vec{e}_z \right\} \quad (\text{III-24})$$

ou encore, en effectuant les dérivations par rapport à  $r$  :

$$\vec{E} = \vec{E}_\omega e^{-i\omega t} \quad (\text{III-25})$$

avec

$$\vec{E}_\omega = \frac{D_\omega}{4\pi\epsilon_0} e^{ikr} \left[ \frac{k^2}{r} (\vec{n} \times \vec{e}_z) \times \vec{n} - \left( \frac{ik}{r^2} - \frac{1}{r^3} \right) \left[ 3\vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{e}_z) + 2\vec{e}_z \right] \right] \quad (\text{III-26a})$$

ou encore, en notant que  $\vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{e}_z) = (\vec{n} \cdot \vec{e}_z) \vec{n} - \vec{e}_z$ :

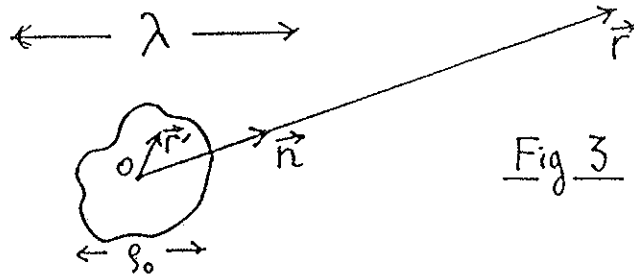
$$\vec{E}_\omega = \frac{D_\omega}{4\pi\epsilon_0} e^{ikr} \left[ \frac{k^2}{r} (\vec{n} \times \vec{e}_z) \times \vec{n} + \left( \frac{1}{r^3} - \frac{ik}{r^2} \right) \left[ 3(\vec{n} \cdot \vec{e}_z) \vec{n} - \vec{e}_z \right] \right] \quad (\text{III-26b})$$

Le champ électrique exact du dipôle ponctuel apparaît ainsi comme une somme de trois contributions décroissant respectivement en  $1/r$ ,  $1/r^2$  et  $1/r^3$ . La première correspond au champ rayonné à grande distance étudié plus haut. Les deux autres vont séparément, ou en interférant avec la 1<sup>ère</sup> donnée des contributions au vecteur de Poynting dont le flux à travers une surface de  $r \rightarrow \infty$  va s'annuler. On peut donc les négliger totalement pour le calcul du rayonnement. En remarquant que  $k=2\pi/\lambda$ , on constate que les 2<sup>ème</sup> et 3<sup>ème</sup> termes de (III-26) sont d'un ordre  $\lambda/r$  et  $\lambda^2/r^2$  fois les premières. La contribution rayonnée en  $1/r$  domine donc dans l'expression du champ pour  $r \gg \lambda$ , alors que celle en  $1/r^3$  domine pour  $r \ll \lambda$  (champs à grande et petite distance respectivement).

Remarquons enfin que le champ à distance  $r \ll \lambda$  correspond en fait au champ tel qu'on l'obtiendrait sans tenir compte de la propagation, par les lois de l'électrostatique. De même, si à  $r$  donné, on fait tendre  $\omega$  et  $k$  vers zéro ( $\lambda \rightarrow \infty$ ), il ne reste plus que le champ en  $1/r^3$  qui n'est autre que le champ d'un dipôle ponctuel statique en  $r=0$ . (En guise d'exercice, vous pouvez retrouver son expression à partir du potentiel scalaire d'un dipôle électrique statique constitué de deux charges opposées  $+q$  et  $-q$  à la distance  $\epsilon$  l'un de l'autre en faisant tendre  $\epsilon$  vers zéro avec  $\epsilon q = D$ ).

2) Sources localisées dans un volume d'extension finie :

Principe du développement multipolaire de la distribution de courants



Considérons à présent le cas d'une source monochromatique non ponctuelle mais de petite dimension (devant la distance d'observation  $r$  et aussi devant la longueur d'onde  $\lambda$  du rayonnement - voir Fig 3 ). Le potentiel vecteur (en jauge de Lorentz) s'écrit de façon générale au point  $r$  à l'instant  $t$ :

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} e^{-i\omega t} \iiint \frac{\vec{j}_\omega(\vec{r}') e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} d^3\vec{r}' \quad (\text{III-27})$$

A une distance grande devant la dimension de la source, on peut développer l'exponentielle de phase de la même façon que dans le problème de la diffraction:

$$\exp ik|\vec{r}-\vec{r}'| = \exp \left\{ ikr \left[ 1 - \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^2} + \dots \right] \right\} \quad (\text{III-28})$$

On peut arrêter le développement au premier ordre dès que  $r \gg 2\pi\rho_0^2/\lambda$  où  $\rho_0$  est l'ordre de grandeur de la dimension de la source. D'où :

$$\vec{A}(\vec{r}, t) \simeq \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{i(kr - \omega t)}}{r} \iiint \vec{j}_\omega(\vec{r}') e^{-i\vec{k}\vec{n}\cdot\vec{r}'} d^3\vec{r}' \quad (\text{III-29})$$

(On a négligé comme d'habitude les variations de  $|\vec{r}-\vec{r}'|^{-1}$  et remplacé cette quantité par  $1/r$ ).

$A(\vec{r}, t)$  est ainsi proportionnel à la transformée de Fourier de la distribution de courant prise pour le vecteur d'onde  $k\vec{n}$  pointant dans la direction d'observation. Ce résultat est tout à fait analogue à celui de la théorie de la diffraction.

Si maintenant la source n'est pas trop étendue par rapport à  $\lambda$ , il est commode d'effectuer un développement en série de l'exponentielle sous le signe d'intégration de III-29. On obtient alors ce que l'on appelle le développement multipolaire du potentiel vecteur :

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \sum_{p=0}^{\infty} \vec{A}^{(p)}(\vec{r}, t) \quad (\text{III-30})$$

avec

$$\vec{A}^{(p)}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{i(kr - \omega t)}}{r} \frac{(-ik)^p}{p!} \iiint (\vec{n}\cdot\vec{r}')^p \vec{j}_\omega(\vec{r}') d^3\vec{r}' \quad (\text{III-31})$$

Ce développement, en puissance de  $k\rho_0 = 2\pi\rho_0/\lambda$  est rapidement convergent si la source est de dimension petite par rapport à  $\lambda$ . On se contentera donc

dans ce cas de garder le terme dominant, c'est-à-dire le premier terme non nul.

Il est clair que le terme d'ordre zéro (seul non nul à la limite où  $\rho_0=0$ ) ne peut être que le terme dipolaire électrique étudié plus haut. On a en effet, pour la composante x (par exemple) :

$$A_x^{(0)}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{i(kr - \omega t)}}{r} \iiint_V d^3\vec{r}' j_{\omega x}(\vec{r}') \quad (\text{III-32})$$

Utilisons l'identité :

$$\vec{\nabla}(\vec{x}' \cdot \vec{j}_\omega) - \vec{x}'(\vec{\nabla} \cdot \vec{j}_\omega) = \vec{j}_{\omega x} \quad (\text{III-33})$$

qui s'écrit encore en intégrant sur un volume  $\mathcal{V}$  de surface  $S$  contenant toutes les charges :

$$\iiint_V d^3\vec{r}' j_{\omega x}(\vec{r}') = \iint_S (\vec{x}' \cdot \vec{j}_\omega) \vec{d}s - \iiint_V \vec{x}'(\vec{\nabla} \cdot \vec{j}_\omega) d^3\vec{r}' \quad (\text{III-34})$$

On remarque que le flux d'un vecteur proportionnel à  $\vec{j}_\omega$  est nul sur la surface  $S$  (puisque toutes les charges restent à l'intérieur). Quant à la dernière intégrale, on la transforme avec la relation  $\vec{\nabla} \cdot \vec{j}_\omega = i\omega \rho_\omega$ , ce qui fait apparaître la composante  $D_{\omega x}$  du dipôle électrique le long de  $ox$ . Finalement, en raisonnant de même pour  $y$  et  $z$ , on obtient:

$$\vec{A}^{(0)}(\vec{r}, t) = -i \frac{\mu_0}{4\pi} \omega \frac{\vec{D}_\omega e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}}{r} \quad (\text{III-35})$$

ce qui n'est autre que l'expression III-7 (avec un dipôle dans une direction quelconque, pas forcément parallèle à oz).

Remarquons que pour certaines distributions de courant, il peut se trouver que pour des raisons de symétrie particulières le dipôle électrique soit nul:

$$\vec{D}_\omega = \iiint \vec{r}' \rho(\vec{r}') d^3 r' = 0$$

Dans ce cas, le rayonnement à grande distance sera caractérisé par une autre intégrale de la distribution de courants, correspondant à  $p > 0$ . La manipulation de l'intégrale de III-31 pour  $p=1$  peut se faire de façon analogue à ce que nous venons de montrer pour  $p=0$  (voir complément AIII). Elle fait apparaître deux nouvelles quantités : le dipôle magnétique de la distribution de courants :

$$\vec{M} = \frac{1}{2} \iiint_V (\vec{r}' \times \vec{j}_\omega(\vec{r}')) d^3 r' \quad (\text{III-36})$$

et son quadrupole électrique  $\vec{Q}$ , tenseur symétrique à trace nulle de composantes:

$$Q_{ij} = \iiint [3 x'_i x'_j - \sum_k (x'_k)^2 \delta_{ij}] \rho(\vec{r}') d^3 r' \quad (\text{III-37})$$

( $x'_i, x'_j, x'_k$  mis pour  $x', y', z'$  avec  $i, j, k = 1, 2, 3$ )

$$\delta_{ij} = 1 \text{ si } i=j$$

$$\delta_{ij} = 0 \text{ si } i \neq j$$

Les potentiels correspondants sont :

$$\vec{A}_{d.m}^{(1)} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{i(kr - \omega t)}}{r} ik \vec{n} \times \vec{M} \quad (\text{III-38})$$

$$\vec{A}_{o.e}^{(1)} = - \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{i(kr - \omega t)}}{r} \frac{\omega^2}{6c} \vec{n} \cdot \vec{Q} \quad (\text{III-39})$$

où  $\vec{n}$ .  $\vec{Q}$  est le vecteur dont la composante  $j$  est  $\sum n_i Q_{ij}$ . On a ainsi au premier ordre inclus en  $2\pi r_0/\lambda$  :

$$\vec{A} = \vec{A}_{d.e}^{(0)} + \vec{A}_{d.m}^{(1)} + \vec{A}_{o.e}^{(1)} \quad (\text{III-40})$$

avec  $A_{de}^{(0)}$ ,  $A_{dm}^{(1)}$  et  $A_{qe}^{(1)}$  donnés respectivement par (III-35), (III-38) et (III-39).

Les champs magnétiques rayonnés par les contributions dipolaire magnétique et quadrupolaire électriques s'obtiennent -pour  $r$  grand- en effectuant le rotationnel de  $\vec{A}$  et en n'y gardant que la dérivée du terme de phase en  $e^{ikr}$ . On obtient alors le champ électrique en évaluant  $\nabla \times \vec{B}$  avec la même approximation:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{B}_{d.m} = \frac{\mu_0}{4\pi} k^2 \frac{e^{i(kr - \omega t)}}{r} (\vec{n} \times \vec{M}) \times \vec{n} \quad (\text{III-41}) \\ \vec{E}_{d.m} = \frac{\mu_0}{4\pi} \omega k \frac{e^{i(kr - \omega t)}}{r} (\vec{M} \times \vec{n}) \quad (\text{III-42}) \end{array} \right.$$



et

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{B}_{o.e} = - \frac{i\mu_0}{4\pi} \frac{\omega^2}{6c} k \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r} \vec{n} \times (\vec{n} \cdot \vec{Q}) \\ \vec{E}_{o.e} = \frac{i\mu_0}{4\pi} \frac{\omega^2 k}{6} \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r} \vec{n} \times [ \vec{n} \times (\vec{n} \cdot \vec{Q}) ] \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{(III-43)} \\ \text{(III-44)} \end{array}$$

Il est intéressant de comparer les ordres de grandeur des champs dipolaire magnétique et dipolaire électrique. On trouve

$$\left| \frac{E_{d.m}}{E_{d.e}} \right| \sim \frac{\frac{\mu_0}{4\pi} \omega k |\vec{M}|}{\frac{\mu_0}{4\pi} \omega^2 |\vec{D}|} = \frac{|\vec{M}|}{c |\vec{D}|} \quad \text{(III-45)}$$

Or  $\vec{M}$  est d'après (III-36) de l'ordre de  $q\rho_0 v$  où  $v$  est l'ordre de grandeur de la vitesse des charges et  $\rho_0$  l'extension de leurs trajectoires (taille de la source). Quant à  $|\vec{D}|$ , il est de l'ordre de  $q\rho_0$ . On a donc

$$\left| \frac{E_{d.m}}{E_{d.e}} \right| \sim \frac{v}{c} \quad \text{(III-46)}$$

Ce résultat semble a priori différent de celui auquel on s'attendait, puisque nous avons en fait effectué un développement en  $2\pi\rho_0/\lambda$ . Nous constatons cependant que

$$\frac{2\pi\rho_0}{\lambda} = \frac{\rho_0 \omega}{c}$$

et que  $\rho_0\omega$  est en fait de l'ordre de  $v$  (les charges parcourent une distance de l'ordre de  $\rho_0$  avec une pulsation  $\omega$ ). On a donc bien

$$\frac{2\pi\rho_0}{\lambda} \sim \frac{v}{c}$$

et le développement multipolaire peut indifféremment être considéré comme un développement en puissance de  $\rho_0/\lambda$  ou de  $v/c$ .

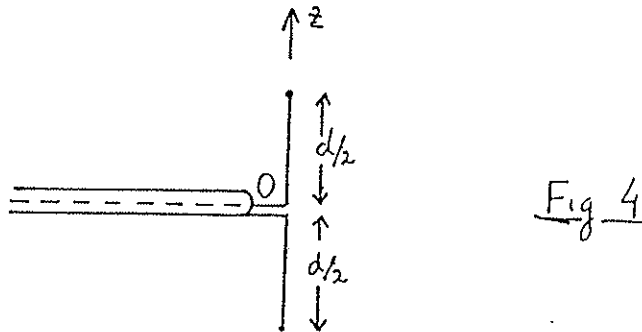
Nous précisons au complément AIII la forme des diagrammes de rayonnement quadrupolaire électrique et dipolaire magnétique. Concluons ici en résumant les propriétés importantes révélées par ce calcul :

Le rayonnement d'une distribution monochromatique de courants restreinte à un volume de dimension finie apparaît comme une somme de contributions. En général, la contribution principale correspond au rayonnement du dipôle électrique de la distribution. Les deux corrections suivantes (du premier ordre en  $\rho_0/\lambda$  ou  $v/c$  pour les champs, du 2<sup>ème</sup> ordre en  $\rho_0^2/\lambda^2$  ou  $v^2/c^2$  pour les puissances rayonnées) sont la contribution dipolaire magnétique liée à l'existence d'un courant oscillant tournant (boucle oscillante de courant) et la contribution quadrupolaire électrique liée à la présence d'une distribution quadrupolaire oscillante des charges. A la limite non relativiste, les termes dipolaire magnétique ou quadrupolaire électrique ne sont importants que si -pour des raisons de symétrie de distribution des charges et de courant- le terme dipolaire électrique est nul. Lorsque la dimension de la source, ou  $v$ , augmente, les corrections dipolaires magnétiques, quadrupolaires électriques et les termes supérieurs du développement deviennent de plus en plus importants et ne peuvent

plus être négligés même si le dipôle électrique n'est pas nul (voir dernière section)

### 3°) Exemples de sources localisées classiques

#### a) Antenne linéaire parcourue par un courant oscillant



Comme premier exemple de source classique localisée considérons une antenne linéaire parcourue par un courant oscillant à la pulsation  $\omega$ , la longueur  $d$  de l'antenne étant petite devant la longueur d'onde du rayonnement. L'antenne est alimentée en son centre  $O$  et la distribution du courant est symétrique par rapport à  $O$  (voir Fig 4). La densité de courant  $\vec{j}$  doit évidemment s'annuler aux deux extrémités libres de l'antenne ce qui conduit à prendre comme modèle simple de distribution de courant:

$$\vec{j} = I_0 \left( 1 - 2 \frac{|z|}{d} \right) \delta(x) \delta(y) e^{-i\omega t} \vec{e}_z \quad (\text{III-47})$$

Dans cette expression  $I_0$  est l'amplitude du courant circulant dans l'antenne en son centre ( $z=0$ ). Le potentiel vecteur rayonné par cette antenne à grande distance ( $r \gg d$ ), au point de coordonnées sphériques  $r, \theta, \phi$  s'obtient immédiatement à l'aide de (III-29):

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} I_0 \frac{e^{i(kr - \omega t)}}{r} \vec{e}_z \int_{-d/2}^{d/2} \left(1 - 2 \frac{|z'|}{d}\right) e^{-ikz' \cos \theta} dz' \quad (\text{III-48})$$

La contribution principale (dipolaire électrique) du potentiel vecteur de l'antenne s'écrit à grande distance:

$$\begin{aligned} \vec{A}_0(\vec{r}, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi} I_0 \frac{e^{i(kr - \omega t)}}{r} \vec{e}_z \int_{-d/2}^{d/2} \left(1 - 2 \frac{|z'|}{d}\right) dz' \\ &= \frac{\mu_0}{8\pi} I_0 d \frac{e^{i(kr - \omega t)}}{r} \vec{e}_z \end{aligned} \quad (\text{III-49})$$

Il est facile à partir de cette expression de calculer  $B$  et le diagramme de rayonnement de l'antenne. On trouve pour la puissance totale rayonnée:

$$\mathcal{P}_{d.e.} = \frac{I_0^2 d^2 \omega^2}{48\pi\epsilon_0 c^3} \quad (\text{III-50})$$

Celle-ci peut s'écrire aussi:

$$\mathcal{P} = \frac{I_0^2}{2} R_{rad} \quad (\text{III-51})$$

où

$$R_{rad} = \frac{d^2 \omega^2}{24\pi\epsilon_0 c^3} = \frac{\pi}{6\epsilon_0 c} \left(\frac{d}{\lambda}\right)^2 = 197,26 \left(\frac{d}{\lambda}\right)^2 \text{ ohm} \quad (\text{III-52})$$

apparaît comme une résistance, la résistance radiative de l'antenne. Notons que cette expression n'est valable qu'à l'approximation dipolaire électrique c'est à dire pour  $d/\lambda \ll 1$ . Remarquons également qu'au lieu de calculer directement  $A_0$  à partir de (III-32), on aurait pu déterminer la densité de

charge le long de l'antenne en calculant la divergence de  $\vec{j}$ , puis le dipole électrique à l'aide de l'équation (III-4) et enfin obtenir la puissance de l'antenne par (III-13). Le lecteur pourra en guise d'exercice vérifier l'équivalence des deux calculs.

b) Antenne dipolaire magnétique

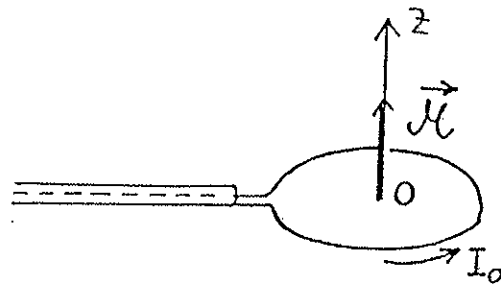


Fig 5

Considérons maintenant une petite boucle conductrice circulaire de rayon  $r_0 \ll \lambda$ , contenue dans le plan  $xoy$  et parcourue par un courant  $I_0 e^{-i\omega t}$ , oscillant avec la pulsation  $\omega$ , ce courant étant uniforme le long de la boucle ( Fig 5). Il est clair que la divergence de la densité de courant est nulle en tout point ( le flux de courant entrant dans un arc infinitésimal de la boucle est égal à celui qui en sort). En conséquence, il n'y a pas de densité de charge oscillante et le dipole électrique de cette antenne est nul ( ce que l'on peut également vérifier à partir de l'équation III-32 qui montre que la contribution dipolaire électrique au potentiel vecteur est nulle dans ce cas). Il faut alors chercher la contribution suivante au rayonnement ( termes  $p=1$  dans III-30). La nullité de la densité de charge oscillante entraîne que le quadrupole électrique est aussi nul ( voir III-37) et il ne reste donc à cet ordre que le dipôle magnétique à évaluer. Un calcul élémentaire à partir de (III-36) donne alors:

$$\vec{M} = \pi r_0^2 I_0 \vec{e}_z \quad (\text{III-53})$$

qui montre que le dipôle magnétique est normal au plan de la boucle et égal au produit de sa surface par l'amplitude du courant. Le rayonnement de cette antenne présente donc les caractéristiques du rayonnement dipolaire magnétique étudié plus haut et dans le complément AIII. En particulier (formule AIII-12), sa puissance rayonnée est:

$$\mathcal{P}_{d.m.} = \frac{\pi r_0^4 \omega^4 I_0^2}{12 \epsilon_0 c^3} = \frac{4 \pi^5}{3 \epsilon_0 c} \left( \frac{r_0}{\lambda} \right)^4 I_0^2 \quad (\text{III-54})$$

ce qui correspond à une résistance d'antenne

$$R_{rad} = \frac{8 \pi^5}{3 \epsilon_0 c} \left( \frac{r_0}{\lambda} \right)^4 = \frac{\pi^2}{6 \epsilon_0 c} \left( \frac{2 \pi r_0}{\lambda} \right)^4 \quad (\text{III-55})$$

### c) Particule ponctuelle oscillante

Considérons comme dernier exemple de source classique le cas d'une charge ponctuelle  $q$  oscillant avec une amplitude  $a_0$  le long de l'axe  $oz$  à la pulsation  $\omega$  ( $z = a_0 \cos \omega t$ ). La densité de courant associée s'écrit :

$$\vec{j} = -q a_0 \omega \sin \omega t \delta(x) \delta(y) \delta(z - a_0 \cos \omega t) \vec{e}_z \quad (\text{III-56})$$

Effectuons un développement limité de la dernière distribution  $\delta$  :

$$\delta(z - a_0 \cos \omega t) = \delta(z) - a_0 \cos \omega t \delta'(z) + \dots \quad (\text{III-57})$$

on en déduit :

(III-58)

$$j_z = -q a_0 \omega \sin \omega t \left[ \delta(\vec{r}) - a_0 \cos \omega t \delta(x) \delta(y) \delta'(z) + \dots \right] //$$

On voit qu'une telle source présente une contribution principale qui en notation complexe s'écrit :

$$j_z^{(0)} = -i q a_0 \omega e^{-i \omega t} \delta(\vec{r}) \quad (\text{III-59})$$

correspondant à un dipôle électrique ponctuel

$$\vec{D} = q a_0 e^{-i \omega t} \vec{e}_z \quad (\text{III-60})$$

A ce terme principal s'ajoute au deuxième ordre en  $a_0$  une petite correction oscillant à la fréquence harmonique  $2\omega$  (terme en  $\sin(\omega t)\cos(\omega t)$ ). De façon générale, aux ordres suivants apparaissent des corrections aux fréquences multiples de  $\omega$ ... Montrons que la composante en  $a_0^2$  correspond à un quadrupole électrique. Le courant associé s'écrit :

$$j_z^{(1)} = \frac{i q a_0^2 \omega}{2} e^{-2i \omega t} \delta(x) \delta(y) \delta'(z) \quad (\text{III-61})$$

La divergence de ce courant est:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = \frac{\partial j_z}{\partial z} = \frac{i q a_0^2 \omega}{2} \delta(x) \delta(y) \delta''(z) e^{-2i \omega t} \quad (\text{III-62})$$

Il lui correspond la densité de charge oscillant à  $2\omega$  :

$$\rho_{2\omega} = \frac{1}{2i\omega} \frac{\partial j_z}{\partial z} = \frac{q a_0^2}{4} e^{-2i \omega t} \delta(x) \delta(y) \delta''(z) \quad (\text{III-63})$$

et le quadrupole:

$$Q_{zz}^{1\omega} = 2 \int \rho_{z\omega} z^2 d^3r = \frac{q a_0^2}{2} \quad (\text{III-64})$$

On a évidemment  $Q_{xx} = Q_{yy} = -Q_{zz}/2$  (voir appendice AIII) et tous les autres éléments de  $\vec{Q}$  sont nuls.

Le potentiel vecteur de la charge ponctuelle oscillante s'écrit donc au deuxième ordre inclus en  $a_0$ :

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{q a_0}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{e^{i(kr - \omega t)}}{r} \left[ -i\omega \vec{e}_z \right] \quad \text{dipole électrique}$$

$$- \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\omega^2}{c} \frac{q a_0^2}{r} \frac{z}{r} \frac{e^{2i(kr - \omega t)}}{r} \quad \text{quadrupole électrique}$$

(III-65)

(voir Appendice III)

On peut, si  $a_0/\lambda \ll 1$ , négliger le terme quadrupolaire oscillant à  $2\omega$  et assimiler l'oscillateur à un dipôle électrique pur à  $\omega$ .

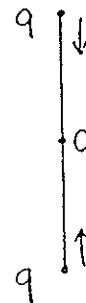


Fig 6



Considérons à présent deux charges identiques  $q$  oscillant en opposition de phase le long de  $oz$  (fig 6). Le dipôle électrique associé est exactement nul, mais les quadrupoles des deux charges s'ajoutent. Nous avons là un exemple de quadrupôle pur :

$$Q_0 = 2q a_0^2$$

oscillant à la fréquence  $2\omega$ . Une telle distribution va donc rayonner un champ quadrupolaire de structure très différente (et d'amplitude beaucoup plus petite) que le champ dipolaire d'un dipôle unique. En fait, les champs dipolaires des deux charges s'annulent par interférence destructive et il ne reste que la petite correction quadrupolaire oscillant avec la pulsation  $2\omega$ .

#### 4) Dipôle électrique atomique ou moléculaire

Nous savons que la charge oscillante classique que nous venons de décrire, tout comme n'importe quel autre modèle attribuant à la charge une trajectoire classique, ne saurait représenter de façon satisfaisante un électron atomique. Il faut pour décrire la dynamique de l'atome renoncer à la notion de trajectoire électronique et adopter le point de vue de la Mécanique Quantique. Il faut également, si l'on veut être rigoureux, traiter quantiquement le champ et seule l'Electrodynamique Quantique fournit un cadre pleinement satisfaisant pour étudier le rayonnement des atomes ou des molécules. Le rayonnement apparaît dans ce cadre comme résultant de processus élémentaires d'émission de photons par les électrons effectuant des sauts quantiques entre niveaux d'énergie de l'atome ou de la molécule. Nous donnerons un aperçu qualitatif de l'Electrodynamique Quantique au chapitre VII. Nous nous bornerons ici à une approche dite semi-classique

qui consiste à traiter quantiquement les atomes et classiquement le champ avec lequel ils interagissent. Cette approche est satisfaisante pour décrire le rayonnement d'atomes en interaction avec des champs suffisamment intenses, contenant un très grand nombre de photons (on peut montrer alors comme cas particulier du Principe de Correspondance que la description classique du champ est correcte). Une telle situation se rencontre par exemple lorsqu'un grand nombre d'atomes rayonnent en étant tous dans le même état quantique. Le champ est alors intense et l'on peut considérer que chaque atome de l'ensemble est un objet quantique couplé à un champ classique. Nous adopterons ici ce point de vue qui va nous permettre de présenter simplement la notion de dipôle électrique atomique.

Nous savons qu'en Mécanique Quantique une grandeur physique est représentée par un opérateur agissant dans l'espace des états du système étudié. Cet opérateur s'obtient en général par "quantification" de la grandeur classique correspondante. Un ensemble de charges ponctuelles  $q_\alpha$  situées aux points  $r_\alpha$  possède classiquement un dipôle électrique s'écrivant d'après (III-4) et (I-1a):

$$\vec{D} = \sum_{\alpha} q_{\alpha} \vec{r}_{\alpha} \quad (\text{III-66})$$

L'opérateur dipôle électrique  $D$  d'un atome sera donc défini par

$$\vec{D} = q \sum_{\alpha} \vec{r}_{\alpha} \quad (\text{III-67})$$

où les  $r_{\alpha}$  sont les opérateurs position des électrons atomiques de charge  $q$  ( $\alpha = 1$  à  $Z$ ) repérées par rapport au noyau. (\*)

(Nous adopterons pour les opérateurs quantiques une notation italique pour les différencier des quantités classiques correspondantes.)

---

(\*) Notons que la position du noyau n'intervient pas explicitement dans (III-67). On peut éliminer cette variable parce qu'il n'y a dans l'atome qu'un noyau. On décrit alors la position des électrons par leur position relative au noyau  $r_{\alpha}$ . (Rappelons qu'il faut alors en toute rigueur remplacer la masse des électrons dans le hamiltonien par leur masse réduite.) Pour une molécule, les positions des noyaux apparaissent bien sûr explicitement par leurs opérateurs dans l'expression du dipôle (la vibration de la position relative des noyaux peut être associée à un dipôle électrique oscillant.)

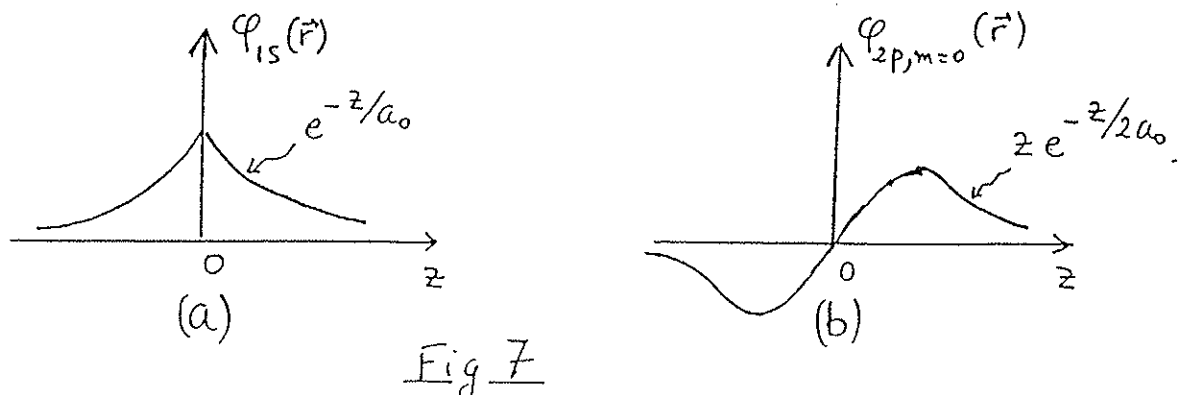
Pour simplifier au maximum la discussion, nous commençons par considérer le cas d'un atome d'hydrogène à un seul électron (position  $r$ ). Son opérateur dipôle électrique est alors simplement  $D = q\mathbf{r}$ . L'état fondamental de cet atome  $|\Phi_{1s}\rangle$ , d'énergie  $E_{1s}$ , possède une fonction d'onde associée:

$$\varphi_{1s}(\vec{r}) = \langle \vec{r} | \varphi_{1s} \rangle = c_1 e^{-r/a_0} \quad (\text{III-68})$$

et l'état excité  $|\Phi_{2p,m=0}\rangle$ , d'énergie  $E_{2p}$ , a une fonction d'onde:

$$\varphi_{2p,0}(\vec{r}) = \langle \vec{r} | \varphi_{2p,0} \rangle = c_2 \cos\theta \frac{r}{a_0} e^{-r/2a_0} \quad (\text{III-69})$$

(Voir Cours de Mécanique Quantique;  $c_1$  et  $c_2$  sont des constantes de normalisation;  $a_0$  le rayon de Bohr et  $\theta$  l'angle polaire du rayon vecteur de l'électron avec l'axe de quantification  $Oz$ ). La fonction d'onde de l'état fondamental possède la symétrie sphérique autour de l'origine. Quant à l'état  $\Phi_{2p,m=0}$ , c'est un sous-niveau excité qui possède la symétrie de révolution autour de l'axe de quantification  $Oz$ .



Les figures 7a et 7b représentent les variations le long de  $Oz$  des amplitudes  $\varphi_{1s}(r)$  et  $\varphi_{2p,m=0}(r)$ . La symétrie de ces fonctions par rapport à

l'origine entraîne que  $r$  et donc  $D$  ont une valeur moyenne nulle dans ces deux états:

$$\langle \varphi_{1s} | \vec{D} | \varphi_{1s} \rangle = \langle \varphi_{2p,0} | \vec{D} | \varphi_{2p,0} \rangle = 0 \quad (\text{III-70})$$

Un ensemble de mesures du dipôle électrique toutes effectuées sur un atome initialement préparé dans l'état fondamental (ou dans l'état excité considéré) donnera des résultats distribués statistiquement autour de zéro. Considérons maintenant le même atome dans la superposition linéaire  $|\Psi(t)\rangle$  des deux états précédents:

$$|\psi(t)\rangle = \alpha_1 e^{-iE_{1s}t/\hbar} |\varphi_{1s}\rangle + \alpha_2 e^{-iE_{2p,0}t/\hbar} |\varphi_{2p,0}\rangle \quad (\text{III-71})$$

Dans cette expression  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  sont des amplitudes complexes constantes. On notera la présence des facteurs exponentiels oscillant aux fréquences de Bohr associées aux énergies des deux états de la superposition. Ces facteurs font que  $|\Psi(t)\rangle$  est manifestement une solution de l'équation de Schrodinger atomique dépendant du temps et représente donc un état dynamique possible de l'atome isolé. La valeur moyenne de la composante  $D_z$  du dipôle dans cet état:

$$\langle D_z \rangle = q \langle \psi(t) | z | \psi(t) \rangle \quad (\text{III-72})$$

se calcule alors simplement en remplaçant  $|\Psi(t)\rangle$  par son expression (III-71) et en remarquant que la valeur moyenne de  $D_z$  dans chacun des deux états  $|\varphi_{1s}\rangle$  et  $|\varphi_{2p,m=0}\rangle$  est nulle (équ III-70). On trouve alors:

$$\langle D_z \rangle = q \alpha_1^* \alpha_2 e^{-i(E_{2p} - E_{1s})t/\hbar} \langle \varphi_{1s} | z | \varphi_{2p,0} \rangle + \text{c.c.} \quad (\text{III-73})$$

La valeur moyenne dans l'état  $|\Psi(t)\rangle$  de la composante  $z$  du dipôle électrique est proportionnelle à l'élément de matrice:

$$\langle \varphi_{1s} | z | \varphi_{2p,0} \rangle = \int \varphi_{1s}^*(\vec{r}) z \varphi_{2p,0}(\vec{r}) d^3\vec{r} \quad (\text{III-74})$$

Finalement, on peut écrire:

$$\langle D_z \rangle = \Re \left\{ D_{\omega_0} e^{-i\omega_0 t} \right\} \quad (\text{III-75})$$

avec

$$\omega_0 = (E_{2p} - E_{1s})/\hbar \quad (\text{III-76})$$

et

$$D_{\omega_0} = 2q \alpha_1^* \alpha_2 \int \varphi_{1s}^*(\vec{r}) z \varphi_{2p,0}(\vec{r}) d^3\vec{r} \quad (\text{III-77})$$

L'intégrale (III-74) est exactement calculable dans l'hydrogène et vaut:

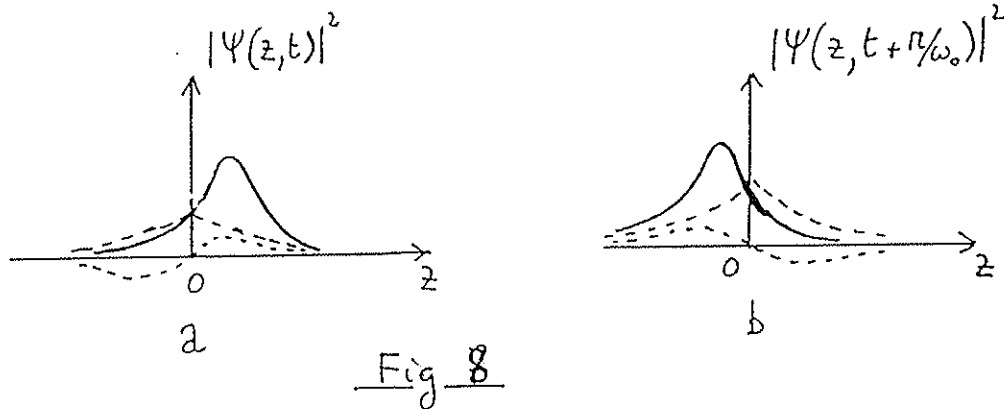
$$\left( \frac{2^{3/2}}{3} \right)^5 a_0 \sim 0.7 a_0$$

Pour une superposition d'états "maximale" dans laquelle  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1/\sqrt{2}$  on trouve donc un dipôle moyen oscillant d'amplitude:

$$D_{\omega_0} = 0.7 q a_0 \quad (\text{III-78})$$

Ainsi, alors que chacun des deux états  $|\varphi_{1s}\rangle$  et  $|\varphi_{2p,m=0}\rangle$  a un dipôle moyen nul, leur superposition correspond à un dipôle moyen oscillant non nul. L'interprétation physique de ce résultat est claire (Fig 8): à un instant

donne (fig 7a) les amplitudes  $\Phi_{1S}(r)$  et  $\Phi_{2P,m=0}(r)$  s'ajoutent pour  $z > 0$  et se retranchent pour  $z < 0$ , ce qui conduit à une densité de charge dont le centre de gravité est décalé vers  $z > 0$ . Une demi-période plus tard, <sup>(fig 8b)</sup> les signes de la superposition sont inversés et la charge a son centre de gravité en  $z < 0$  : on comprend ainsi l'oscillation du dipôle moyen à la fréquence de Bohr  $\omega_0$ .



Nous retiendrons de cet exemple simple (qui se généralise à un atome à plusieurs électrons ou même à une molécule) la propriété importante suivante: un système quantique dans une superposition linéaire de deux états propres de l'énergie possède une valeur moyenne non nulle du dipôle électrique oscillant à la fréquence de Bohr associée à la transition entre ces deux états, pourvu que l'opérateur dipôle électrique  $D = qr$  (ou  $D = \sum_{\alpha} q_{\alpha} r_{\alpha}$  pour un système à plusieurs électrons) possède un élément de matrice non nul entre ces deux états. Lorsque cet élément de matrice est non nul, son ordre de grandeur est au plus de l'ordre de  $qa_0$  (unité atomique de dipôle électrique).

Considérons à présent un ensemble de  $N$  atomes (ou molécules) tous dans le même état quantique  $|\Psi(t)\rangle$  et localisés dans un petit volume devant  $\lambda$ . Le dipôle électrique moyen de cet ensemble sera égal à  $N$  fois la valeur moyenne du dipôle de chaque atome, soit  $N\langle D \rangle$ . Mais alors que le dipôle mesuré sur chaque atome fluctue beaucoup de façon aléatoire d'une

mesure à l'autre, les lois élémentaires de la statistique indiquent que le dipôle somme aura une fluctuation relative beaucoup plus faible (décroissant en  $1/\sqrt{N}$ ). Ainsi, à la limite des grandes valeurs de  $N$ , le dipôle de l'ensemble pourra être considéré comme une grandeur classique certaine. Il est alors naturel de considérer ce dipôle somme comme la source "classique" du champ rayonné par ces atomes. C'est l'approche semi-classique que nous adopterons ici: chaque atome d'une source macroscopique contribue à rayonner un champ classique par son dipôle "moyen" (au sens de la mesure en mécanique quantique) et on s'attend à ce que ce modèle soit une bonne approximation de la réalité (quantique) à la limite des grands nombres d'atomes. Il reste bien sûr à comprendre comment un échantillon d'atomes peut se trouver préparé dans une superposition d'états de la forme (III-71). Nous aborderons ce point plus loin (§ III-6).

*Remarque:* Les arguments qui précèdent semblent indiquer qu'un échantillon d'atomes ne rayonne pas (tout au moins sous forme dipolaire électrique) si tous les atomes se trouvent initialement dans un état propre de l'énergie ( $\Phi_{1S}$  ou  $\Phi_{2p}$  dans notre exemple). Ce résultat n'est bien sûr pas surprenant pour l'état fondamental. Il l'est plus pour l'état excité ( $\Phi_{2p}$ ): on sait qu'un atome d'hydrogène dans cet état émet spontanément un photon en revenant à l'état fondamental. Une source formée d'atomes préparés dans l'état excité doit donc rayonner de la lumière et le champ émis doit pouvoir être décrit classiquement s'il y a beaucoup d'atomes. Nous verrons au chapitre IV que ce champ est en fait un champ "incohérent" dont la phase est fluctuante, que l'on peut voir comme résultant de l'émission de trains d'ondes de phases incorrélatées par les différents atomes. Le raisonnement développé ici, qui s'attache aux valeurs moyennes de l'amplitude du dipôle, ne permet pas de décrire ce champ d'émission spontanée: le champ résultant d'une somme de contributions

de phases aléatoires est en valeur moyenne nul (phase équirépartie de 0 à  $2\pi$ ) alors que son carré (intensité) peut avoir une valeur moyenne non nulle. Pour obtenir cette intensité, il faut calculer la valeur moyenne du carré du dipôle de chaque atome, ce qui donne l'intensité moyenne rayonnée par radiateur élémentaire, puis sommer ces intensités sur l'ensemble de l'échantillon. Il est alors facile de voir que la valeur moyenne de  $z^2$  est non nulle dans l'état excité et on obtient bien une intensité non nulle pour une source d'atomes tous portés dans cet état. Insistons bien sur le fait que la nullité d'une valeur moyenne quantique ne signifie pas que le résultat d'une mesure donne un résultat nul: l'électron dans l'état  $\Phi_{2p}$  peut être "mesuré" n'importe où autour du proton et le dipôle de l'atome avoir une valeur positive ou négative quelconque. Le dipôle d'un ensemble d'atomes résulte alors de la sommation de dipôles prenant des valeurs aléatoires autour de zéro. Cette somme fluctue elle-même autour de zéro. Elle est nulle en moyenne, alors que son carré ne l'est pas. Ses fluctuations sont comme nous l'avons vu plus haut d'autant plus petites en valeur relative que l'ensemble est plus grand mais elles ne sont pas nulles et ce sont elles qui permettent de rendre compte du champ d'émission spontanée de l'échantillon atomique. Il reste que le point de vue développé ici ne permet pas de décrire le rayonnement spontané d'un atome isolé ni d'expliquer la différence fondamentale entre les propriétés radiatives des états atomiques excités qui rayonnent et l'état fondamental qui est stable. Il faut pour cela faire appel à l'Electrodynamique Quantique qui traite quantiquement les atomes et le champ. Nous nous limiterons dans la suite de ce chapitre au cas où les atomes sont préparés dans un état quantique "cohérent" correspondant à un dipôle oscillant moyen non nul, situation dans laquelle le rayonnement émis par une collection d'atomes a une phase bien définie et où l'approche semi-classique en terme de dipôle moyen est suffisante pour décrire la source.



### 5) Dipole magnétique et quadrupole électrique atomique

On peut généraliser aisément la discussion précédente à la description du dipole magnétique ou du quadrupole électrique atomique. On associe à ces quantités des opérateurs quantiques et on calcule la valeur moyenne de ces opérateurs dans l'état du système. Si cet état contient une superposition linéaire d'états propres de l'énergie atomique entre lesquels il existe un élément de matrice non nul des opérateurs dipôle magnétique ou quadrupole électrique, l'atome possède un dipôle magnétique ou quadrupole électrique moyen oscillant à la fréquence de Bohr correspondante.

Pour définir le dipôle magnétique quantique, partons de l'expression classique( III-36) dans laquelle nous remplaçons  $\mathbf{j}$  par le courant des électrons atomiques :

$$\vec{\mathcal{M}} = \frac{q}{2} \sum_{\alpha} \vec{r}_{\alpha} \times \vec{v}_{\alpha} \quad (\text{III-79})$$

(La somme sur  $\alpha$  porte sur l'ensemble des électrons de l'atome). On obtient alors (à la limite non relativiste):

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{M}} &= \frac{q}{2m} \sum_{\alpha} \vec{r}_{\alpha} \times \vec{p}_{\alpha} = \frac{q}{2m} \sum_{\alpha} \vec{\ell}_{\alpha} \\ &= \frac{q}{2m} \vec{L} \end{aligned} \quad (\text{III-80})$$

On montre ainsi que l'opérateur dipôle magnétique est proportionnel au moment cinétique orbital électronique total  $L = \sum_{\alpha} \ell_{\alpha}$ . (La constante de proportionnalité  $q/2m$  porte le nom de rapport gyromagnétique orbital).

La Mécanique Quantique relativiste montre qu'il faut ajouter à ce magnétisme orbital un magnétisme de spin décrit par l'opérateur :

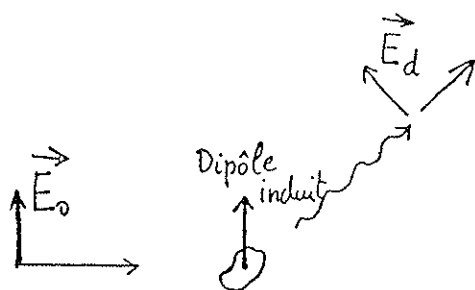
$$\vec{M}_s = \frac{q}{m} \sum_{\alpha} \vec{s}_{\alpha} = \frac{q}{m} \vec{S} \quad (\text{III-81})$$

où  $S = \sum_{\alpha} s_{\alpha}$  est le moment cinétique total de spin, somme des spins individuels  $s_{\alpha}$  des électrons atomiques. (Il faut noter que le rapport gyromagnétique de spin,  $q/m$ , est d'après l'équation relativiste de Dirac, le double du rapport gyromagnétique orbital. Nous négligeons ici la petite correction "radiative" qui fait que le rapport gyromagnétique de spin diffère en fait de  $q/m$  d'une quantité de l'ordre de  $10^{-3}$ , voir Chapitre VII). Notons enfin que si le noyau de l'atome lui même porte un spin nucléaire  $I$ , il lui est aussi associé un moment magnétique, environ mille fois plus petit que le moment magnétique de spin électronique. C'est le moment magnétique du noyau dont on détecte le champ rayonné dans les expériences de résonance magnétique nucléaire (RMN).

Quant à l'opérateur quadrupole électrique, il se déduit simplement de (III-37) :

$$\vec{Q}_{ij} = q \left[ \sum_{\alpha} 3x_{\alpha}^{(i)} x_{\alpha}^{(j)} - \sum_{\alpha} \sum_R (x_{\alpha}^{(R)})^2 \delta_{ij} \right] \quad (\text{III-82})$$

où  $x_{\alpha}^{(i)}$ ,  $(x_{\alpha}^{(j)})$  sont les opérateurs position de l'électron  $\alpha$  dans la direction  $i, (j)$ . ( $i, j = x, y, z$ ).

6) Rayonnement induit : diffusionFig 9

Appliquons à présent les résultats établis aux paragraphes précédents au problème important de la diffusion de la lumière par un système de charges. Supposons qu'une onde plane, de champ électrique  $E_0$ , arrive sur une distribution de charges au voisinage de  $r = 0$ . L'onde va mettre ces charges en vibration. A cette vibration va correspondre un dipôle électrique oscillant qui rayonne un champ diffusé  $E_d$  dans toutes les directions de l'espace (suivant le diagramme de rayonnement dipolaire). Une partie de l'énergie rayonné incidente se trouve ainsi redistribuée dans des directions différentes de l'onde incidente (voir Fig 9) : il s'agit du phénomène de diffusion. Envisageons ce phénomène d'abord dans un point de vue classique :

a) Diffusion par une particule chargée classique élastiquement liée

Considérons une particule (charge  $q$ , masse  $m$ ) retenue en  $r = 0$  par une force élastique (fréquence du mouvement harmonique  $\omega_0$ ), en présence d'un faible amortissement visqueux (constante  $\gamma$ ). Le mouvement de cette particule dans le champ électrique de l'onde (polarisée le long de  $oz$ ) s'écrit :

$$m \ddot{z} + m \gamma \dot{z} + m \omega_0^2 z = q E_0 e^{-i \omega t} \quad (\text{III-83})$$

ce qui correspond au dipôle stationnaire oscillant :

$$D_{\omega} = \frac{q^2 E_0}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} \quad (\text{III-84})$$

Le dipôle induit est proportionnel à l'amplitude  $E_0$  du champ. Il est commode de l'écrire

$$D_{\omega} = \varepsilon_0 \alpha_c \ell(\omega) E_0 \quad (\text{III-85})$$

où

$$\alpha_c \ell(\omega) = \frac{q^2}{m\varepsilon_0} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} \quad (\text{III-86})$$

est la polarisabilité complexe de l'oscillateur harmonique. Noter que l'amortissement ( $\gamma = 0$ ) introduit en général un déphasage entre le dipôle induit et le champ et empêche la divergence à résonance ( $\omega_0 = \omega$ ).

A ce dipôle induit correspond un champ diffusé en  $\sin^2\theta$  : ainsi la diffusion est nulle si l'on regarde dans la direction de polarisation de  $E_0$ , maximum et polarisée le long de  $E_0$  si on regarde dans la direction perpendiculaire.

La puissance diffusée s'écrit d'après (III-13) :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\text{diff}}(\omega) &= \frac{\varepsilon_0}{12\pi c^3} \omega^4 |\alpha(\omega)|^2 E_0^2 \\ &= \frac{q^4}{m^2} \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} \frac{\omega^4}{12\pi\varepsilon_0 c^3} E_0^2 \end{aligned} \quad (\text{III-87})$$

Rapportons cette puissance au flux d'énergie incidente

$$\Phi_0 = |\vec{S}_0| = \frac{\epsilon_0 c E_0^2}{2}$$

On peut écrire

$$\mathcal{P}_{diff}(\omega) = \sigma_T(\omega) \Phi_0 \quad (\text{III-88})$$

où  $\sigma_T(\omega)$  est la section efficace totale de diffusion (homogène à une surface):

$$\begin{aligned} \sigma_T(\omega) &= \frac{1}{6\pi} \left( \frac{\omega}{c} \right)^4 |\alpha(\omega)|^2 \\ &= \frac{q^4}{m^2} \frac{\omega^4}{6\pi\epsilon_0^2 c^4} \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} \end{aligned} \quad (\text{III-89})$$

La section efficace de diffusion varie ainsi énormément avec la fréquence du champ incident. Envisageons les différents cas où  $\omega \gg \omega_0$ ,  $\omega \ll \omega_0$ ,  $\omega = \omega_0$ :

(i) Diffusion Thomson ( $\omega \gg \omega_0$ ,  $\gamma$ )

On a alors :

$$\alpha(\omega) \simeq - \frac{q^2}{m\epsilon_0 \omega^2} \quad (\text{III-90})$$

et

$$\sigma_r(\omega) \simeq \frac{q^4}{6\pi m^2 \varepsilon_0^2 c^4} = \frac{8\pi}{3} r_c^2 \ell \quad (\text{III-91})$$

en introduisant le "rayon classique" de la charge :

$$r_c \ell = \frac{q^2}{4\pi \varepsilon_0 m c^2} \quad (\text{III-92})$$

Pour un electron le rayon classique est:

$$r_c \ell = \frac{q^2}{4\pi \varepsilon_0 \hbar c} \frac{\hbar}{m c} = \frac{\alpha \hbar}{m c} = 2,8 \cdot 10^{-15} \text{ m}$$

A haute fréquence, une particule liée se comporte vis-à-vis de la diffusion comme si elle était libre ( $\omega_0 = 0$ ) avec une section efficace de diffusion égale à  $8\pi/3$  le carré du "rayon classique" de cette charge.

(ii) Diffusion Rayleigh ( $\omega \ll \omega_0$ )

On a alors :

$$\alpha(\omega) \simeq \frac{q^2}{m \varepsilon_0 \omega_0^2} \quad (\text{III-93})$$

et

$$\sigma_r(\omega) = \frac{8\pi}{3} r_c^2 \ell \times \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^4 \quad (\text{III-94})$$

A faible fréquence, la diffusion est plus petite que dans le cas haute fréquence, avec une section efficace égale à la section efficace Thomson multipliée par le rapport  $(\omega/\omega_0)^4$ . La section efficace de diffusion Rayleigh augmente ainsi très vite avec la fréquence.

(iii) Diffusion résonnante ( $\omega = \omega_0$  ;  $\gamma \neq 0$ )

On a alors

$$\alpha(\omega) = \frac{i q^2}{m \varepsilon_0} \frac{1}{\gamma \omega} \quad (\text{III-95})$$

Notons que  $\alpha(\omega)$  est imaginaire pur à résonance : le dipôle induit est en quadrature avec le champ : c'est pour cette valeur de la fréquence que la puissance dissipée par le dipôle est maximum. C'est là aussi que la section efficace de diffusion est maximale :

$$\sigma_T(\omega_0) = \frac{8\pi}{3} r_c^2 \ell \left( \frac{\omega_0^2}{\gamma^2} \right) \quad (\text{III-96})$$

La section efficace de diffusion dépend maintenant de  $\gamma$ . Évaluons-la dans le cas où l'amortissement du dipôle induit est purement radiatif (c'est-à-dire ou il est précisément dû à l'existence du champ rediffusé).  $\gamma$  est alors donné par (III-17), ce qui correspond à :

$$\frac{\omega_0^2}{\gamma^2} = \frac{36\pi^2 \varepsilon_0^2 m^2 c^6}{q^4 \omega_0^2}$$

et

$$\sigma_T(\omega_0) = \frac{q^4}{6\pi m^2 \varepsilon_0^2 c^4} \times \frac{36\pi^2 \varepsilon_0^2 m^2 c^6}{q^4 \omega_0^2} = \frac{6\pi c^2}{\omega_0^2} = \frac{3}{2\pi} \lambda_0^2 \quad (\text{III-97})$$

A résonance, la section efficace de diffusion purement radiative est égale au carré de la longueur d'onde résonnante multiplié par  $3/2\pi$ .

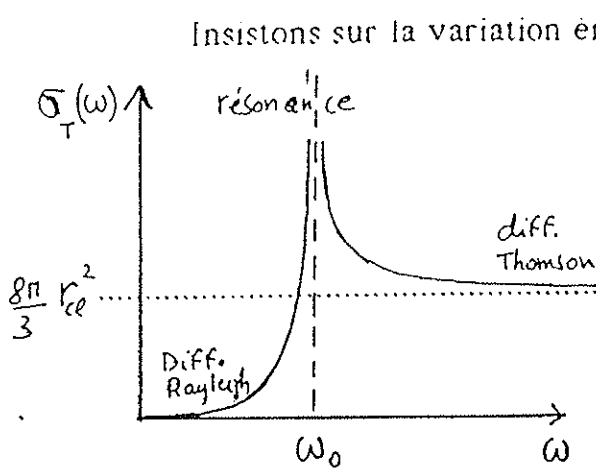


Fig 10

est représentée sur la figure 10.

Insistons sur la variation énorme de  $\sigma_T(\omega)$  avec la fréquence. Pour un électron oscillant à une fréquence optique on a  $\lambda_0 \sim 5 \cdot 10^{-7} \text{ m}$  alors que  $r_{cl} \sim 10^{-15} \text{ m}$ . On en déduit, en ordre de grandeur:

$$\frac{\sigma_{\text{Thomson}}}{\sigma_{\text{résonnant}}} \approx 10^{-18} !$$

L'allure de la variation de  $\sigma_T(\omega)$  avec  $\omega$

b) Diffusion par un atome ou une molécule quantique

Reprenons l'analyse précédente en traitant quantiquement le système diffuseur (atome ou molécule).

Avant l'arrivée de l'onde incidente, l'atome (molécule) se trouve dans son état quantique fondamental  $|f\rangle$ . Le passage du champ va se traduire par la création sur le système atomique d'une superposition linéaire d'états quantiques, à laquelle va être associée un dipôle électrique moyen induit (voir § III-4). Tout le problème consiste donc à calculer cette superposition. Pour cela il nous faut résoudre l'équation de Schrödinger du mouvement de l'atome en présence du champ  $E_0$ , et donc connaître le Hamiltonien de l'atome en présence du champ.

(i) Hamiltonien de l'atome en présence du champ:

Ce hamiltonien est formellement identique au Hamiltonien classique décrivant le mouvement des électrons en présence du champ extérieur



irradiant le système. Il suffit d'y remplacer les grandeurs classiques par les opérateurs quantiques associés. Pour obtenir ce hamiltonien, il faut partir du point de vue de Lagrange, et non plus des équations de Lorentz (qui correspondent elles au point de vue de Newton, non directement quantifiable). Partant du Lagrangien du système "atome + champ classique" décrit dans le complément B<sub>I</sub> du Chapitre I, on définit la variable canoniquement conjuguée de la position  $r_\alpha$  de chaque charge (impulsion  $p_\alpha$ ), puis la fonction de Hamilton des variables  $r_\alpha$  et  $p_\alpha$ . On passe alors aux observables quantiques  $r_\alpha$  et  $p_\alpha$  et on obtient sans peine le hamiltonien des électrons atomiques en présence d'un champ classique extérieur décrit par un potentiel vecteur  $A(r, t)$ :

$$H(\vec{r}_\alpha, \vec{p}_\alpha) = H_0 - \frac{q}{m} \sum_{\alpha} \vec{p}_\alpha \cdot \vec{A}(\vec{r}_\alpha, t) + \frac{q^2}{2m} \sum_{\alpha} A^2(\vec{r}_\alpha, t) \quad (\text{III-98})$$

Nous établissons cette équation rigoureusement dans le complément B<sub>III</sub> de ce chapitre, dans le cas simple de l'atome d'hydrogène (un seul électron) puis la généralisons de façon intuitive au cas où il y a plusieurs électrons. Dans (III-98) le premier terme,  $H_0$ , est le Hamiltonien de l'atome isolé et les deux termes suivants décrivent les "perturbations" produites sur l'atome par le champ extérieur. On a choisi une jauge où le champ électromagnétique appliqué dérive d'un pur potentiel vecteur, avec un potentiel scalaire  $U=0$ . On suppose de plus que la condition  $\nabla \cdot A=0$  est satisfaite. Enfin on a considéré que l'électron est une particule sans spin et l'on néglige donc les termes de couplage entre le moment magnétique de spin des électrons et le champ magnétique du rayonnement. Notons enfin que dans (III-98) les arguments  $r_\alpha$  des fonctions  $A(r_\alpha, t)$  sont les opérateurs

position des électrons (et non des simples vecteurs classiques). On utilise donc ici la notion de fonction d'opérateur (à laquelle on peut donner un sens en développant formellement la fonction  $A$  en série). En fait, cette complication n'apparaît pas dans le problème qui nous intéresse ici, le couplage de l'atome avec le champ électrique d'une onde plane, de longueur d'onde très grande devant la dimension  $a_0$  de l'atome. Nous montrons dans ce cas dans le complément BIII que l'on peut remplacer dans l'argument du potentiel vecteur les  $r_\alpha$  par 0, ce qui revient encore à effectuer un développement des termes de perturbation du Hamiltonien en puissances de  $a_0/\lambda$  et à ne garder que le terme d'ordre zéro: il est logique de faire cette approximation ici, puisque nous assimilons l'atome à son dipôle électrique dans le calcul du champ qu'il rayonne. Cette approximation dans le calcul du terme de couplage entre l'atome et le champ, qui revient à négliger les variations de phase du champ sur la dimension de l'atome, porte d'ailleurs le nom d'approximation dipolaire électrique. On montre également que pour des champs pas trop intenses le terme en  $A^2$  dans (III-98) est négligeable et le Hamiltonien s'écrit finalement:

$$H = H_0 - \frac{q}{m} \sum_{\alpha} \vec{p}_{\alpha} \cdot \vec{A}(0, t) \quad (\text{III-99})$$

On peut alors l'exprimer de façon équivalente en fonction du champ électrique  $E_0$  de l'onde plane (supposée polarisée le long de  $Oz$ ) et l'on trouve:

$$H = H_0 + H_{\text{int}}^{(DE)}(t) \quad (\text{III-100})$$

avec

$$H_{int}^{(DE)}(t) = \frac{q E_0}{m\omega} p_z \sin\omega t \quad (\text{III-101})$$

Nous allons maintenant utiliser ce Hamiltonien pour étudier l'évolution de la fonction d'onde atomique sous l'effet de l'onde plane qui perturbe l'atome.

(ii) Dipôle atomique moyen induit au premier ordre

Limitons nous pour simplifier les notations au cas d'un atome à un seul électron (Hydrogène). Il s'agit de résoudre l'équation

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\phi(t)\rangle = \left[ H_0 + H_{int}^{(DE)}(t) \right] |\phi(t)\rangle \quad (\text{III-102})$$

avec la condition initiale

$$|\phi(0)\rangle = |f\rangle \quad (\text{III-103})$$

Il s'agit là d'un calcul classique de perturbation dépendant du temps. On développe  $|\psi\rangle$  en puissance de la perturbation (c'est-à-dire de  $E_0$ ):

$$|\phi\rangle = |\phi\rangle^{(0)} + |\phi\rangle^{(1)} + \dots \quad (\text{III-104})$$

et on substitue ce développement dans (III-102) en identifiant les termes du même ordre en  $E_0$  dans les deux membres. La fonction d'onde à l'ordre zéro satisfait à:

$$i\hbar \frac{\partial |\phi\rangle^0}{\partial t} = H_0 |\phi\rangle^0 \quad (\text{III-105})$$

et s'écrit donc compte tenu de (III-103):

$$|\Phi(t)\rangle^{(0)} = e^{-iE_f t/\hbar} |f\rangle \quad (\text{III-106})$$

A l'ordre un, on obtient :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Phi\rangle^{(1)} = H_0 |\Phi\rangle^{(1)} + H_{int}^{(DE)}(t) |\Phi\rangle^{(0)} \quad (\text{III-107})$$

Pour résoudre cette équation, on développe  $|\Psi\rangle^{(1)}$  sur la base des états propres de  $H_0$  (ensemble de l'état fondamental  $|f\rangle$  et de tous les états excités notés  $|j\rangle$ ):

$$|\Phi\rangle^{(1)} = c_f^{(1)}(t) |f\rangle + \sum_j c_j^{(1)}(t) |j\rangle \quad (\text{III-108})$$

En projetant sur chaque "bra"  $\langle j|$  l'équation (III-107) et en y remplaçant  $|\Psi\rangle^{(0)}$  par son expression (III-106), on obtient :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} c_j^{(1)}(t) = E_j c_j^{(1)}(t) + \langle j| H_{int}^{(DE)}(t) |f\rangle e^{-iE_f t/\hbar} \quad (\text{III-109})$$

Intégrons "par variation de la constante". Faisons le changement de variable:

$$c_j^{(1)}(t) = e^{-iE_j t/\hbar} b_j^{(1)}(t) \quad (\text{III-110})$$

On obtient alors immédiatement:

$$\dot{b}_j^{(1)}(t) = \frac{1}{i\hbar} e^{i\omega_j t} \langle j| H_{int}^{(DE)}(t) |f\rangle \quad (\text{III-111})$$

et

$$b_j^{(1)}(t) = \frac{1}{i\hbar} \int_0^t \langle j | H_{int}^{(DE)}(t') | f \rangle e^{i\omega_{jf}t'} dt' \quad (\text{III-112})$$

avec la définition de la fréquence de Bohr:

$$\omega_{j,f} = (E_j - E_f) / \hbar$$

On remplace alors dans (III-112)  $H_{int}^{DE}(t')$  par son expression (III-101) et on intègre sans peine:

$$b_j^{(1)}(t) = - \frac{qE_0}{2m\hbar\omega} \langle j | p_z | f \rangle \left[ \frac{e^{i(\omega + \omega_{jf})t} - 1}{i(\omega + \omega_{jf})} - \frac{e^{i(\omega_{jf} - \omega)t} - 1}{i(\omega_{jf} - \omega)} \right] \quad (\text{III-113})$$

ou encore :

$$c_j^{(1)}(t) = i \frac{qE_0}{2m\hbar\omega} e^{-iE_f t / \hbar} \langle j | p_z | f \rangle \left[ \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega_{jf}t}}{\omega + \omega_{jf}} - \frac{e^{-i\omega t} - e^{-i\omega_{jf}t}}{\omega_{jf} - \omega} \right] \quad (\text{III-114})$$

Le dipôle induit se calcule à partir de l'expression de la fonction d'onde comme nous l'avons vu au §(III-4). En nous limitant aux termes du premier ordre en  $E_0$ , on trouve :

$$\langle D_z \rangle = \langle \psi(t) | qz | \psi(t) \rangle = {}^{(0)} \langle \psi | qz | \psi \rangle^{(1)} + c.c. \quad (\text{III-115})$$

soit

$$\langle D_z \rangle = \sum_j \left[ \langle f | qz | j \rangle c_j^{(1)}(t) e^{iE_f t / \hbar} + c_j^{*(1)}(t) \langle j | qz | f \rangle e^{-iE_f t / \hbar} \right] \quad (\text{III-116})$$

Le dipôle moyen, combinaison linéaire des  $C_j^{(1)}(t)$ , apparaît comme une somme de termes oscillant à la fréquence du champ  $\omega$  et de termes

"propres" oscillant aux fréquences de Bohr atomiques (voir equ III-114). Le dipôle associé à la superposition donnée par l'équation (III-71) n'était lui module qu'à la fréquence atomique  $\omega_0$ . Dans le problème que nous traitons maintenant l'atome n'est en effet pas "libre" et son oscillation est "forcée" à la fréquence du champ, comme dans le cas de l'oscillateur classique étudié au §III-5a. Quant aux termes "propres" aux fréquences de Bohr atomiques, ils correspondent manifestement à des solutions transitoires liées au caractère percussif du problème (atome brusquement introduit dans le champ à  $t = 0$ ). Le problème classique du § III-5a) donne aussi une solution en  $e^{i\omega_0 t}$  qui s'amortit en un temps de l'ordre de  $1/\gamma$  et qu'on a négligé dans notre analyse en ne calculant que le régime forcé. En fait, si notre modèle quantique tenait compte des processus d'amortissement atomiques, les termes oscillant aux fréquences de Bohr dans (III-114) s'amortiraient aussi. En éliminant donc ces termes "propres" qui finissent par s'amortir dans les expressions (III-114) et en reportant les  $C_j^{(1)}$  ainsi modifiés dans (III-116), on obtient :

$$\langle D_z \rangle = \frac{i q^2 E_0}{2m \hbar \omega} \sum_j \langle j | p_z | f \rangle \langle f | z | j \rangle \left( \frac{e^{i\omega t}}{\omega_{j f} + \omega} - \frac{e^{-i\omega t}}{\omega_{j f} - \omega} \right) + c.c. \quad (\text{III-117})$$

Cette expression fait intervenir les éléments de matrice de  $z$  et de  $p_z$ . On peut exprimer ces derniers en fonction de ceux de  $z$  en remarquant que l'on a :

$$[z, H_0] = \left[ z, \frac{p_z^2}{2m} \right] = i \hbar \frac{p_z}{m} \quad (\text{III-118})$$

ce qui permet d'écrire:

$$\langle j | p_z | f \rangle = \frac{m}{i\hbar} \langle j | z H_0 - H_0 z | f \rangle = i\omega_{j,f} m \langle j | z | f \rangle \quad (\text{III-119})$$

On a donc:

$$\langle D_z \rangle = \frac{-q^2 E_0}{2\hbar} \sum_j \frac{\omega_{j,f}}{\omega} |\langle j | z | f \rangle|^2 \left( \frac{e^{i\omega t}}{\omega_{j,f} + \omega} - \frac{e^{-i\omega t}}{\omega_{j,f} - \omega} \right) + \text{c.c.} \quad (\text{III-120})$$

On regroupe enfin les termes différemment en isolant les termes en  $e^{-i\omega t}$ :

$$\langle D_z \rangle = \frac{q^2 E_0}{2\hbar} \sum_j \frac{\omega_{j,f}}{\omega} |\langle j | z | f \rangle|^2 e^{-i\omega t} \left( \frac{1}{\omega_{j,f} - \omega} - \frac{1}{\omega_{j,f} + \omega} \right) + \text{c.c.} \quad (\text{III-121})$$

On obtient ainsi finalement l'expression en notation complexe du dipôle moyen induit au premier ordre:

$$\langle D_z \rangle = \epsilon_0 \alpha_0(\omega) E_0 \quad (\text{III-122})$$

avec

$$\alpha_0(\omega) = \frac{2q^2}{\hbar \epsilon_0} \sum_j \frac{\omega_{j,f} |\langle j | z | f \rangle|^2}{\omega_{j,f}^2 - \omega^2} \quad (\text{III-123})$$

Cette expression n'est valable que hors de resonance ( $\omega$  différent de tous les  $\omega_{jf}$ ) car nous n'avons pas introduit de mécanismes dissipatifs analogues au facteur  $\gamma$  des équations classiques. On notera la similitude de (III-123) avec (III-86) ou on fait  $\gamma = 0$ . On peut en effet écrire :

$$\alpha_0(\omega) = \sum_j f_{j,f} \alpha_c \rho(\omega; \omega_{j,f}) \quad (\text{III-124})$$

en définissant la "force d'oscillateur"  $f_{jf}$  de la transition  $f \rightarrow j$  par :

$$f_{j,f} = \frac{2m \omega_{j,f} |\langle j | z | f \rangle|^2}{\hbar} \quad (\text{III-125})$$

$f_{jf}$  est bien entendu une quantité positive sans dimension.

Ainsi, vis-à-vis du phénomène de diffusion, l'atome se comporte comme un ensemble statistique d'oscillateurs classiques dont les fréquences sont distribuées suivant les fréquences de Bohr atomiques, le "poids" de l'oscillateur correspondant à la transition  $f \rightarrow j$  étant  $f_{jf}$ . Ce résultat n'est vrai qu'à l'approximation linéaire de ce calcul quantique, c'est-à-dire pour des champs  $E_0$  suffisamment petits (voir Chapitre VI).

Pour confirmer cette interprétation, montrons que les  $f_{jf}$  se comportent bien comme une distribution de probabilité et satisfont à la condition

$$\sum_j f_{j,f} = 1 \quad (\text{III-126})$$

(règle de Reich-Thomas-Kuhn).



On écrit pour cela :

$$\sum_j f_{j,f} = \sum_j \frac{2m}{\hbar^2} (E_j - E_f) \langle f | z | j \rangle \langle j | z | f \rangle \quad (\text{III-127})$$

et on remplace  $\langle j | z | f \rangle$  par l'expression tirée de (III-119) :

$$\sum_j f_{j,f} = \sum_j \frac{2m}{\hbar} \langle f | z | j \rangle \frac{1}{im} \langle j | p_z | f \rangle = \frac{2}{i\hbar} \langle f | z p_z | f \rangle \quad (\text{III-128})$$

(on a utilisé la relation de fermeture  $\sum |j\rangle\langle j| = 1$ ).

On peut associer à (III-128) l'équation complexe conjuguée :

$$\sum_j f_{j,f} = -\frac{2}{i\hbar} \langle f | p_z z | f \rangle \quad (\text{III-129})$$

soit en prenant la demi-somme de (III-128) et (III-129) :

$$\sum_j f_{j,f} = \frac{1}{i\hbar} \langle f | z p_z - p_z z | f \rangle = 1$$

ce qui correspond bien au résultat annoncé !

**Note :** pour un atome à  $Z$  électrons, on trouve de même :

$$\sum_j f_{j,f} = Z \quad (\text{III-130})$$

En principe, la somme des forces d'oscillateurs comprend un nombre infini de termes, puisque l'état fondamental de l'atome est couplé par des éléments de matrice non nuls du dipôle électrique à un nombre infini d'états atomiques excités. En général cependant la plupart des forces

d'oscillateur sont très petites et seul un petit nombre de transitions  $f \rightarrow j$  contribue à l'essentiel des sommes (III-126) ou (III-130).

### (iii) Discussion physique

L'analyse qui précède justifie le modèle classique de l'électron élastiquement lié pour traiter, à l'approximation linéaire, les problèmes de propagation et de diffusion de la lumière dans un milieu matériel formé d'atomes ou de molécules. La Mécanique Quantique n'intervient finalement que pour fournir la valeur des fréquences de résonance du milieu (fréquences de Bohr déduites du spectre de  $H_0$ ) et la distribution statistique des oscillateurs classiques sur ces fréquences (forces d'oscillateur). Une fois ces paramètres fixés, tout se passe (pour des champs suffisamment faibles tout au moins) comme si le rayonnement interagissait avec des oscillateurs harmoniques classiques. Ce résultat explique les succès remarquables de la théorie classique de la diffusion et de la propagation des champs dans la matière. C'est l'équivalence entre atomes quantiques et oscillateurs classiques (à l'approximation linéaire) qui explique que les modèles à la Thomson d'électrons élastiquement liés ont eu une telle réussite pour rendre compte des effets tels que la diffusion de la lumière ou encore de l'indice de réfraction d'un milieu matériel, et cela bien avant l'avènement de la Mécanique Quantique. Il suffisait dans ces théories classiques d'adopter comme données phénoménologiques les valeurs des fréquences et des forces d'oscillateur qui ne devaient en fin de compte être justifiées que par la théorie quantique des atomes.

Nous pouvons maintenant rapidement retourner au problème de la diffusion par un atome ou une molécule, la section efficace s'écrit à présent

$$\sigma_T(\omega) = \frac{\omega^4}{6\pi c^4} |\alpha_Q(\omega)|^2 \quad (\text{III-131})$$

avec  $\alpha_Q(\omega)$  donné par (III-123) ou (III-124). Envisageons à nouveau les différents cas limite suivant la fréquence de la lumière incidente:

Diffusion Thomson : si  $\omega$  est beaucoup plus grand que tous les  $\omega_{jf}$  pour lesquels les forces d'oscillateur sont appréciables, on peut remplacer  $\alpha_{cI}(\omega, \omega_{jf})$  par  $\alpha_{cI}(\omega, 0)$  dans (III-124) qui se factorise pour donner:

$$\alpha_Q(\omega) \simeq - \frac{q^2}{m\epsilon_0 \omega^2} \sum_j f_{jf} = - \frac{q^2}{m\epsilon_0 \omega^2} \quad (\text{III-132})$$

On obtient ainsi le même résultat que pour un électron classique, libre de surcroit:

$$\sigma_T(\omega) = \frac{8\pi}{3} r_c^2 \ell \quad (\text{III-133})$$

Si la fréquence du champ est grande devant toutes les fréquences électroniques de l'atome (toutes au moins devant celles qui sont associées aux forces d'oscillateur prépondérantes), la liaison de l'électron au noyau peut être négligée pour évaluer la section efficace de diffusion, qui prend la même valeur que celle d'un électron libre classique (la diffusion des rayons x correspond à ce régime de diffusion Thomson).

Notes : 1) Nous n'avons considéré ici que le cas d'un atome à un électron.

Pour  $Z$  électrons, on a :

$$\sum_j f_{j,f} = Z \text{ et } \sigma_r(\omega) = Z^2 \frac{8\pi}{3} r_c^2 \ell$$

(diffusion dite "cohérente" par les  $Z$  électrons de l'atome).

2) Le régime de diffusion Thomson ne s'étend pas aux fréquences très élevées. Lorsque la fréquence devient telle que  $\hbar\omega \approx mc^2$  (domaine du rayonnement  $\gamma$ ), on observe l'effet Compton. La fréquence de la lumière diffusée devient plus petite que celle de la lumière incidente (diffusion "inélastique") ce qui ne peut être décrit dans le point de vue de champ classique adopté ici (où l'atome ne peut rayonner qu'à la fréquence du champ incident qui le fait vibrer; diffusion élastique). L'effet Compton est dû à un échange d'impulsion entre le photon énergétique incident et l'électron et ne peut être compris que dans le cadre de l'Electrodynamique Quantique. D'autres effets purement quantiques (création de paires électron positron par absorption de rayons  $\gamma$ ...) apparaissent d'ailleurs à hautes énergie du photon.

Diffusion Rayleigh : si  $\omega$  est très inférieur à toutes les fréquences de résonance atomique, (III-123) devient:

$$\alpha_Q(\omega) = \frac{q^2}{m\epsilon_0} \sum_j \left\{ \frac{f_{j,f}}{\omega_{j,f}^2} \right\} = \frac{2q^2}{\hbar\epsilon_0} \sum_j \frac{|\langle j|z|f \rangle|^2}{\omega_{j,f}} \quad (\text{III-134})$$

$\alpha_Q(\omega)$  est alors indépendant de  $\omega$  et l'on a

$$\sigma_T(\omega) = \frac{8\pi}{3} r_c^2 \ell \left| \sum_j \frac{f_{j,f}}{\omega_{j,f}^2} \right|^2 \omega^4 \quad (\text{III-135})$$

La section efficace de diffusion est comme dans le modèle classique proportionnelle à  $\omega^4$ .

C'est le cas par exemple de la diffusion d'une onde optique ( $\omega \approx 3 \cdot 10^{15} \text{s}^{-1}$ ) par un atome d'H ( $\omega_{j,f} > 10^{16} \text{s}^{-1}$ ) ou plus généralement de la diffusion de la lumière visible par les molécules atmosphériques comme  $\text{O}_2$  et  $\text{N}_2$ . On comprend ainsi que la lumière bleue soit diffusée environ 10 fois plus que la rouge et la couleur du ciel en résulte (voir aussi Chapitre IV).

Diffusion résonnante : L'équation (III-123) montre que l'on a une augmentation très importante de la lumière diffusée à chaque fois que

$$\omega = \omega_{j,f} \quad (\text{avec } f_{j,f} \neq 0) .$$

Le modèle adopté ici, où l'on ne tient pas compte de l'amortissement du dipôle atomique, conduit à une divergence de la polarisabilité à résonance, manifestement non physique. Tenir compte des mécanismes d'amortissement du dipôle optique dans un traitement quantique n'est pas simple et sort du cadre de ce Cours. Contentons nous d'indiquer que l'amortissement de la composante du dipôle associée à chacune des transitions  $f \rightarrow j$  est, comme dans le point de vue classique, caractérisé par une constante de temps  $\tau_{ij} = 1/\gamma_{ij}$ . Cette constante d'amortissement dépend de la transition. On montre que sous l'effet de l'amortissement les divergences de (III-123) sont remplacées par des résonances de la diffusion. La section efficace de diffusion devient très importante autour de

chaque  $\omega_{jf}$  (tel que  $f_{jf} \neq 0$ ), sur un intervalle de fréquence de l'ordre de  $\gamma_{jf}$ . L'étude de la résonance optique est à la base de la spectroscopie: la détermination des fréquences résonnantes fournit directement le spectre des transitions atomiques. L'intensité des résonances renseigne sur les forces d'oscillateur et donc sur les éléments de matrice du dipôle atomique. Quant à l'étude de la largeur des résonances, elle permet de déterminer expérimentalement les constantes  $\gamma_{jf}$  et donc d'étudier les mécanismes dissipatifs responsables de l'amortissement des dipôles atomiques.

*Remarques : (i) Nous avons décrit ici la diffusion par le dipôle électrique moyen d'un atome ou d'une molécule unique. Le champ macroscopique rayonné par un milieu formé d'un grand nombre  $N$  d'atomes ou de molécules est égal à la somme des champs rayonnés par ces centres diffuseurs élémentaires. Si les atomes sont absolument identiques, immobiles et situés au même endroit (ou tout au moins dans un volume de dimension petite devant  $\lambda$ ) le champ résultant est simplement égal à  $N$  fois le champ du dipôle moyen calculé plus haut et l'intensité diffusée dans chaque direction  $N^2$  fois plus grande que celle que diffuse chaque atome. Une telle situation est cependant rarement rencontrée. En fait, dans le phénomène physique de la diffusion, il y a aussi un aspect statistique, la diffusion résultant de l'interférence des champs rayonnés par un ensemble d'atomes dans un gaz, un liquide ou un solide, ces atomes étant distribués dans un volume qui peut être grand devant  $\lambda$  et subissant des fluctuations de toutes sortes (en position et en vitesse notamment). Ces fluctuations sont de nature statistique, essentiellement différente des fluctuations quantiques évoquées plus haut. Elles font que le champ global diffusé par le milieu n'est pas uniquement déterminé par la réponse quantique moyenne*

de chaque atome, mais aussi par les propriétés statistiques d'ensemble du diffuseur. Nous aborderons cet aspect statistique du problème, très important, aux Chapitres IV.

(ii) Nous avons surtout considéré ici les sections efficaces totales de diffusion. Nous aurions pu tout aussi bien déterminer le champ diffusé par le dipôle atomique moyen dans une direction donnée. Le cas particulier de la diffusion vers l'avant est très important. Nous avons montré au Chapitre II que c'était l'interférence du champ incident avec le champ diffusé vers l'avant par les charges du milieu qui expliquait le déphasage introduit par le milieu sur le champ qui s'y propage et que la notion d'indice de réfraction en découlait. Il est donc évident qu'il y a un lien direct entre l'indice d'un milieu atomique et la polarisabilité de ces atomes, qui est proportionnelle au dipôle induit sur ces atomes par le champ incident. Ce lien sera explicité au chapitre V.

## 7 °) Rayonnement des particules relativistes.

Nous n'avons considéré jusqu'ici que le rayonnement des charges localisées dans l'espace et peu rapides ( $\beta = v/c \ll 1$ ). Nous terminons cette étude par une analyse du rayonnement de charges classiques en mouvement quelconque, avec une attention particulière au cas relativiste ou ultra-relativiste ( $\beta \sim 1$ ).

Posons le problème de la façon suivante : nous nous donnons la loi cinématique du mouvement d'une charge  $q$ , soit  $S_0(t)$ , et nous nous proposons de déterminer le champ rayonné par cette charge au point  $r$  à l'instant  $t$  ( Fig. 11)

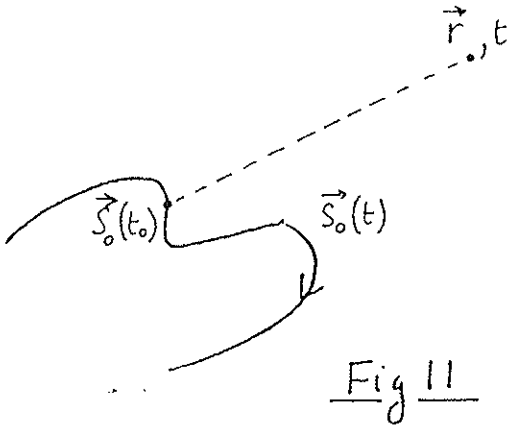


Fig II

D'après ce que nous savons, l'état du champ en  $r$  à l'instant  $t$  va dépendre de l'état dynamique de la charge à un instant antérieur (temps retardé)  $t_0$  tel que :

$$t_0 = t - \frac{|\vec{r} - \vec{s}(t_0)|}{c} \quad (\text{III-136})$$

Il est clair que cette équation implicite ne possède pour tout  $r$  et  $t$  qu'une solution au plus. (S'il y en avait deux, il est facile de montrer que cela signifierait que la particule se propage plus vite que  $c$ !).

Le calcul du champ passe par celui des potentiels qui sont commodément exprimés par la formule dite de Liénart-Wiechert.

#### a) Potentiels de Liénart-Wiechert

Reprenons l'expression générale des potentiels retardés, qui s'écrit pour  $U$  :

$$U(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho(\vec{r}', t')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3\vec{r}' \quad \text{avec} \quad t' = t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c} \quad (\text{III-137})$$

Nous pouvons récrire cette équation avec la définition de  $t'$  sous la forme :



$$U(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \int \frac{\rho(\vec{r}', t') \delta(t' - t + |\vec{r} - \vec{r}'|/c)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r' dt' \quad (\text{III-138})$$

Nous voulons particulariser cette formule pour la densité de charge correspondant à une particule ponctuelle suivant la trajectoire  $S_0(t)$ :

$$\rho(\vec{r}', t') = q \delta[\vec{r}' - \vec{S}_0(t')] \quad (\text{III-139})$$

Il vient :

$$U(\vec{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \iiint \int \frac{\delta[\vec{r}' - \vec{S}_0(t')] \delta[t' - t + |\vec{r} - \vec{r}'|/c]}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r' dt' \quad (\text{III-140})$$

Cette équation intégrée sur  $r'$  donne :

$$U(\vec{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\delta[t' - t + |\vec{r} - \vec{S}_0(t')|/c]}{|\vec{r} - \vec{S}_0(t')|} dt' \quad (\text{III-141})$$

L'argument de la fonction  $\delta$  dans (III-141) est une fonction de  $t'$  :

$$g(t') = t' - t + |\vec{r} - \vec{S}_0(t')|/c \quad (\text{III-142})$$

Cette fonction,  $g(t')$ , s'annule au plus pour une valeur  $t_0$  qui est précisément la solution de l'équation implicite (III-136). Au voisinage de cette valeur  $t_0$ , on peut écrire:

$$\begin{aligned} g(t') &= g(t_0) + (t' - t_0) g'(t_0) \\ &= (t' - t_0) g'(t_0) \end{aligned} \quad (\text{III-143})$$

ce qui montre que la fonction  $\delta$  de (III-141) s'écrit:

$$\delta[g(t')] = \delta[(t' - t_0) g'(t_0)] = \frac{1}{g'(t_0)} \delta[t' - t_0] \quad (\text{III-144})$$

On peut alors effectuer l'intégration sur  $t'$  dans (III-141) et on obtient :

$$U(\vec{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{g'(t_0)} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{S}_0(t_0)|} \quad (\text{III-145})$$

Pour calculer  $g'(t_0)$ , nous remarquons que

$$\frac{\partial}{\partial t'} |\vec{r} - \vec{S}_0(t')|/c = - \frac{\vec{n}(t') \cdot \vec{V}_0(t')}{c} \quad (\text{III-146})$$

où

$$\vec{n}(t') = \frac{\vec{r} - \vec{S}_0(t')}{|\vec{r} - \vec{S}_0(t')|} \quad (\text{III-147})$$

est le vecteur unitaire pointant de la charge vers le point où le champ est calculé. D'où finalement :

$$U(\vec{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{1 - \frac{\vec{n}(t_0) \cdot \vec{V}(t_0)}{c}} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{S}_0(t_0)|} \quad (\text{III-148})$$

et de même

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\vec{V}(t_0)}{1 - \frac{\vec{n}(t_0) \cdot \vec{V}(t_0)}{c}} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{S}_0(t_0)|} \quad (\text{III-149})$$

Les formules (III-148) et (III-149) sont dues à Liénard et Wiechert. Le facteur  $1/g'(t_0)$  décrit le fait que le champ se trouve considérablement augmenté dans la direction de "visée" de la particule à l'instant retardé, si celle-ci a une vitesse proche de  $c$ . On a en effet

$$1 - \frac{\vec{n} \cdot \vec{V}}{c} \simeq 0 \quad \text{pour } \vec{n} \text{ parallèle à } \vec{V} \text{ lorsque } v \sim c.$$

Le fait que les potentiels (et donc comme nous le verrons les champs) sont particulièrement importants dans la direction parallèle à la vitesse retardée d'une particule relativiste peut se comprendre physiquement de façon simple. Considérons pour simplifier le cas d'une trajectoire rectiligne de la source (Fig 12). L'observateur au point  $O$ , dans la direction du vecteur vitesse de la particule, détecte au temps  $t$  un champ dont le potentiel dépend de la position et de la vitesse de la particule aux instants  $t_1, t_2, t_3, \dots, t_n, t_{n+1}, t_{n+2}, \dots$  antérieurs au temps  $t$ . On discrétise l'opération d'intégration continue qui donne le potentiel en choisissant un "pas" élémentaire  $\delta t$  séparant les instants successifs que l'on considère. Le potentiel scalaire (vecteur) en  $O$  à l'instant  $t$  s'obtient en divisant par  $c(t-t_1)$  la valeur de la densité de charge (de courant) à la distance  $c(t-t_1)$  de  $O$ , en évaluant de même la contribution associée aux instants  $t_2, t_3, \dots$  jusqu'à l'instant  $t$  et en sommant ces contributions. L'instant  $t_1$  est évidemment rejeté à l'infini dans le passé. On voit ainsi que l'"information" qui permet de calculer le potentiel en  $O$  est collectée sur une couronne sphérique d'épaisseur  $c\delta t$  qui converge à la vitesse de la lumière vers le point  $O$ .

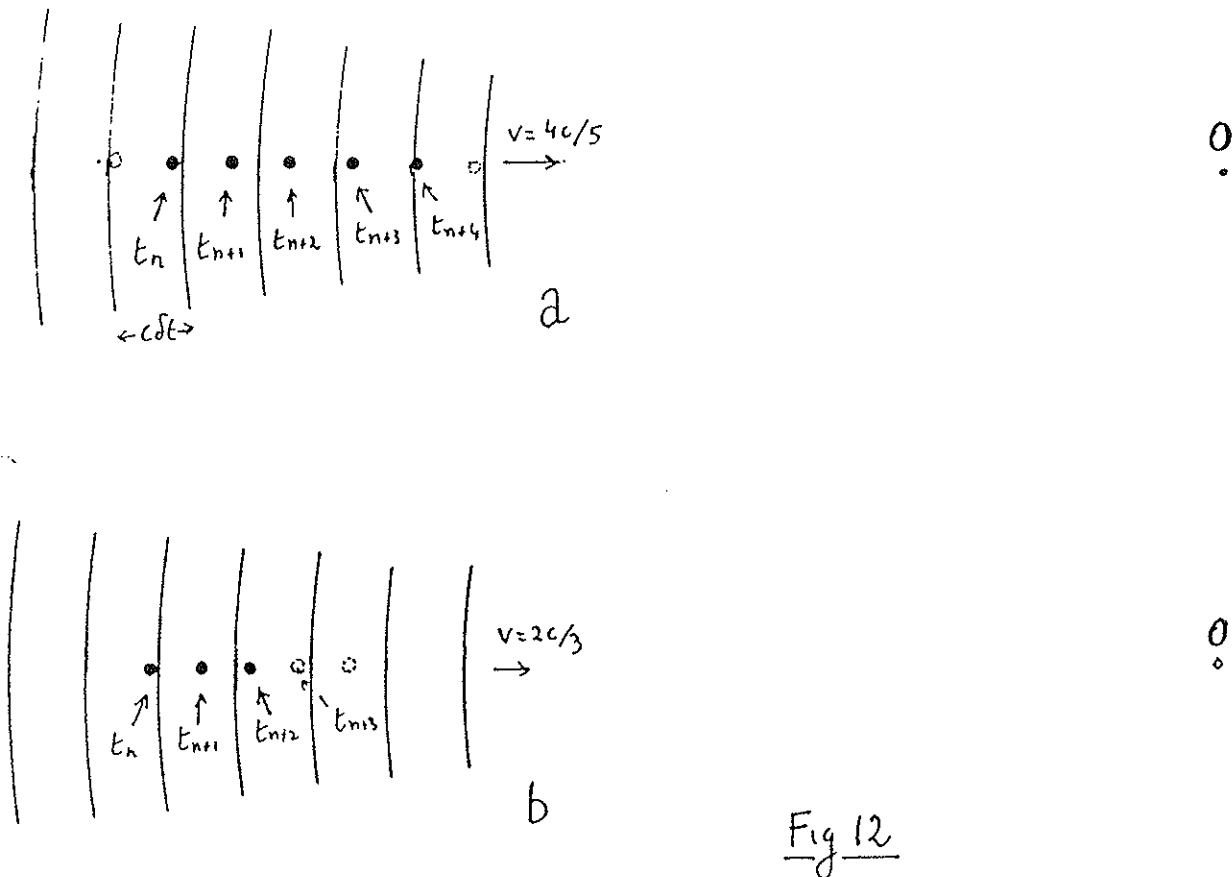


Fig 12

atteint à l'instant  $t$ . La figure 12a visualise la situation correspondant à une particule chargée dont la vitesse  $v$  à l'instant retardé est égale à  $4c/5$ . Nous avons représenté la particule aux cinq instants  $t_n, t_{n+1}, t_{n+2}, t_{n+3}, t_{n+4}$ , l'instant  $t_n$  correspondant à celui où la particule se trouve à l'avant de la couronne de collection d'"information" et l'instant  $t_{n+4}$  correspondant à celui où l'arrière de cette même couronne atteint la charge. L'intervalle de temps  $\tau$  pendant lequel la charge se trouve dans la couronne est en effet tel que  $v\tau = c(\tau - \delta t)$  et l'on a donc  $\tau/\delta t = 1/(1-v/c) = 5$  dans le cas considéré. Nous voyons que la particule accompagne dans ce cas l'onde convergente de collection d'information pendant un temps  $5\delta t$  et le potentiel en O résulte alors de la sommation de cinq termes. Par contraste, la figure 12b représente une situation où la particule a une vitesse  $v'$  plus faible à

l'instant retarde ( $2c/3$ ). L'instant  $t_n$  correspond toujours au moment où l'onde de collection d'information atteint la particule si bien que le terme en  $1/r$  du potentiel vecteur sera le même que pour la particule plus rapide considérée plus haut. Cependant, la couronne sphérique est maintenant traversée par la particule beaucoup plus vite (en  $3\delta t$  seulement) et le potentiel en  $O$  sera les trois cinquièmes de ce qu'il était pour la particule plus rapide. On voit donc qu'en plus de la dépendance en  $1/r$ , le potentiel doit dépendre de la vitesse retardée de la charge le long de la direction d'observation, cette dépendance donnant une contribution en  $1/(1-v/c)$ , divergente lorsque la vitesse tend vers  $c$  (la particule reste alors un temps infini dans la couronne de collection d'information). Si la particule a à l'instant retardé une vitesse inclinée sur la direction d'observation, il est facile de se convaincre que le facteur cinématique d'amplification décrit ici ne doit dépendre que de la projection de la vitesse sur cette direction. Ce sont bien toutes ces propriétés qui sont traduites par les relations (III-148 et 149). . . Ainsi, le potentiel en un point  $r$  crée par une particule relativiste sera particulièrement grand lorsque le vecteur vitesse de la particule balayera cette position : le rayonnement des particules relativistes se présente donc sous la forme de bouffées très brèves et intenses de rayonnement (voir SIII-7 c).

#### b) Champ à grande distance d'une charge en mouvement quelconque

Il reste à calculer les champs à partir des potentiels. Ceux-ci sont des fonctions explicites de  $r$  et implicites de  $r$  et de  $t$  par l'intermédiaire de  $t_0$  qui est lui-même fonction de  $r$  et de  $t$  (III-136). Il est donc utile de

déterminer pour commencer les dérivées de  $t_0$  par rapport à  $t$  et à  $r$ . A partir de III-136, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial t_0}{\partial t} &= 1 - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} |\vec{r} - \vec{s}(t_0)| \\ &= 1 - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t_0} |\vec{r} - \vec{s}(t_0)| \frac{\partial t_0}{\partial t} \\ &= 1 + \frac{\vec{n}(t_0) \cdot \vec{v}(t_0)}{c} \frac{\partial t_0}{\partial t} \end{aligned}$$

Donc

$$\frac{\partial t_0}{\partial t} = \frac{1}{1 - \frac{\vec{n}(t_0) \cdot \vec{v}(t_0)}{c}} = \frac{1}{g'(t_0)} \quad (\text{III-150})$$

De même

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}_r t_0 &= - \vec{\nabla}_r \frac{|\vec{r} - \vec{s}(t_0)|}{c} = - \frac{\vec{n}(t_0)}{c} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t_0} |\vec{r} - \vec{s}(t_0)| \vec{\nabla}_r t_0 \\ &= - \frac{\vec{n}(t_0)}{c} + \frac{\vec{n}(t_0) \cdot \vec{v}(t_0)}{c} \vec{\nabla}_r t_0 \end{aligned}$$

Donc :

$$\vec{\nabla}_r t_0 = - \frac{1}{g'(t_0)} \frac{\vec{n}(t_0)}{c} \quad (\text{III-151})$$

Nous pouvons maintenant calculer le champ électrique  $\vec{E}$  rayonné par la charge à grande distance :

$$\vec{E} = - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla}_r U$$

Dans l'expression de  $\partial \vec{A} / \partial t$  nous ne conservons que le terme qui provient de la dérivée de  $v_0(t_0) / g'(t_0)$  car la dérivée de  $1 / |\vec{r} - \vec{s}_0(t_0)|$  donne un champ en  $1 / |\vec{r} - \vec{s}_0(t_0)|^2$  :

$$-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t_0} \frac{\partial t_0}{\partial t} \simeq -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{S}_0(t_0)|} \left[ \frac{\vec{a}(t_0)}{g'(t_0)} - \frac{\vec{v}(t_0) g''(t_0)}{g'^2(t_0)} \right] \frac{1}{g'(t_0)} \quad (\text{III-152})$$

(on a introduit  $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$  : accélération de la charge). De même :

$$\left. \begin{aligned} -\vec{\nabla}_r U &\simeq -\frac{\partial U}{\partial t_0} \vec{\nabla}_r t_0 \\ \text{(en négligeant les termes en } \frac{1}{r^2}) \\ \text{soit} \\ -\vec{\nabla}_r U &= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{S}_0(t_0)|} \left( \frac{-g''(t_0)}{g'^2(t_0)} \right) \left( \frac{-1}{g'(t_0)} \right) \frac{\vec{n}(t_0)}{c} \end{aligned} \right\} \quad (\text{III-153})$$

Il reste à évaluer  $g''(t_0)$  :

$$g''(t_0) = -\frac{1}{c} \frac{d\vec{n}}{dt_0} \cdot \vec{v}(t_0) - \frac{1}{c} \vec{n}(t_0) \cdot \vec{a}(t_0) \quad (\text{III-154})$$

le 1<sup>er</sup> terme s'écrit

$$-\frac{1}{c} \frac{d}{dt_0} \frac{(\vec{r}-\vec{S}(t_0))}{|\vec{r}-\vec{S}(t_0)|} \cdot \vec{v}(t_0)$$

et comporte des termes au moins en  $1/r$ , qui multipliés par les termes en  $1/r$  de (III-152) et (III-153) donnent une contribution en  $1/r^2$  négligeable.

On écrira donc

$$g''(t_0) \simeq -\frac{1}{c} \vec{n}(t_0) \cdot \vec{a}(t_0) .$$

et on obtient finalement en regroupant  $-\partial\mathbf{A}/\partial t - \nabla_r U$  :

$$\vec{E} = - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{S}(t_0)|} \frac{1}{|g'(t_0)|^3} \left[ g'(t_0)\vec{a} + \vec{V}(t_0) \left( \frac{\vec{a}(t_0) \cdot \vec{n}(t_0)}{c} \right) - \left( \vec{a}(t_0) \cdot \vec{n}(t_0) \right) \vec{n}(t_0) \right] \quad (\text{III-155})$$

réarrangeons le crochet de (III-155) :

$$\left[ \right] = \left( 1 - \frac{\vec{n} \cdot \vec{V}}{c} \right) \vec{a} - (\vec{a} \cdot \vec{n}) \left( \vec{n} - \frac{\vec{V}}{c} \right) = \vec{n} \times \left[ \vec{a} \times \left( \vec{n} - \frac{\vec{V}}{c} \right) \right]$$

D'où

$$\vec{E}(\text{ grande distance}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{S}(t_0)|} \frac{1}{\left( 1 - \frac{\vec{n}(t_0) \cdot \vec{V}(t_0)}{c} \right)^3} \vec{n}(t_0) \times \left[ \left( \vec{n}(t_0) - \frac{\vec{V}(t_0)}{c} \right) \times \vec{a}(t_0) \right] \quad (\text{III-156})$$

• Le champ rayonné est proportionnel à l'accélération de la charge  $a(t_0)$  . Il est perpendiculaire à la direction d'observation retardée  $\mathbf{n}(t_0)$ .

•• Le facteur en  $1/(1-\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}/c)^3$  montre l'effet de directivité du rayonnement, encore plus fort sur  $\mathbf{E}$  que sur  $\mathbf{A}$  ou  $\mathbf{U}$ .

••• Le champ magnétique  $\mathbf{B}$  s'obtient immédiatement en exprimant la structure d'onde plane à grande distance.



Calculons enfin le vecteur de Poynting à grande distance. Il s'écrit :

$$\begin{aligned}\vec{S} &= \varepsilon_0 c^2 \vec{E} \times \vec{B} \\ &= \varepsilon_0 c |\vec{E}| \cdot \vec{n} \\ &= \frac{q^2}{16\pi^2 \varepsilon_0 c^3} \frac{\left[ \vec{n} \times \left[ \left( \vec{n} - \frac{\vec{v}}{c} \right) \times \vec{a} \right] \right]^2}{|\vec{r} - \vec{S}(t_0)|^2 (g'(t_0))^6} \vec{n}\end{aligned}\quad (\text{III-157})$$

La puissance reçue dans l'angle solide  $d\Omega$  et l'intervalle de temps  $dt$  autour de  $t$  et de la direction  $\mathbf{n}$  sera :

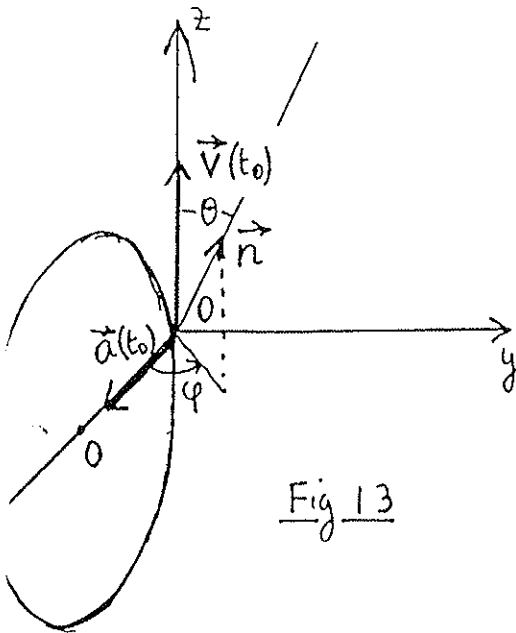
$$dW = R^2 d\Omega (\vec{S} \cdot \vec{n}) \underline{dt} \quad (\text{III-158})$$

En remarquant que l'on a  $dt = g'(t_0)dt_0$ , on en déduit que la puissance rayonnée rapportée au temps d'émission de la particule s'écrit

$$\frac{d\mathcal{P}}{d\Omega} = R^2 (\vec{S} \cdot \vec{n}) g'(t_0) = \frac{q^2}{16\pi^2 \varepsilon_0 c^3} \frac{\left[ \vec{n} \times \left[ \left( \vec{n} - \frac{\vec{v}}{c} \right) \times \vec{a} \right] \right]^2}{\left( 1 - \frac{\vec{n} \cdot \vec{v}}{c} \right)^5} \quad (\text{III-159})$$

### c) Rayonnement synchrotron

Envisageons en guise d'exemple d'application de la formule précédente le cas du rayonnement d'une particule relativiste tournant à la fréquence  $\omega$  sur un cercle de rayon  $R$  (électron dans un synchrotron). Orientons à l'instant  $t_0$  le système d'axe comme l'indique la figure 13 ci-après:  $\mathbf{v}(t_0)$  définit l'axe  $oz$  et  $\mathbf{a}(t_0)$  l'axe  $ox$  :



Le point d'observation est défini par les angles polaires  $\theta$  et  $\varphi$ .

Récrivons :

$$\vec{n} \times \left[ \left( \vec{n} - \frac{\vec{v}}{c} \right) \times \vec{a} \right] = (\vec{n} \cdot \vec{a}) \left( \vec{n} - \frac{\vec{v}}{c} \right) - \left( 1 - \frac{\vec{n} \cdot \vec{v}}{c} \right) \vec{a}$$

et

$$\left[ \vec{n} \times \left[ \left( \vec{n} - \frac{\vec{v}}{c} \right) \times \vec{a} \right] \right]^2 = (\vec{n} \cdot \vec{a})^2 \left[ 1 + \frac{v^2}{c^2} - 2 \frac{\vec{n} \cdot \vec{v}}{c} \right] + \left( 1 - \frac{\vec{n} \cdot \vec{v}}{c} \right)^2 a^2$$

$$- 2 (\vec{n} \cdot \vec{a})^2 \left( 1 - \frac{\vec{n} \cdot \vec{v}}{c} \right)$$

$$= - (\vec{n} \cdot \vec{a})^2 \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right) + a^2 \left( 1 - \frac{\vec{n} \cdot \vec{v}}{c} \right)^2$$

soit en fonction des angles  $\theta$  et  $\varphi$  :

$$\left[ \vec{n} \times \left[ \left( \vec{n} - \frac{\vec{v}}{c} \right) \times \vec{a} \right] \right]^2 = a^2 (1 - \beta \cos \theta)^2 - a^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi (1 - \beta^2) \quad (\beta = v/c)$$

(III-160)

et

$$\frac{d\mathcal{P}}{d\Omega} = \frac{q^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} \frac{a^2}{(1 - \beta \cos \theta)^3} \left[ 1 - \frac{\sin^2 \theta \cos^2 \varphi (1 - \beta^2)}{(1 - \beta \cos \theta)^2} \right] \quad \text{(III-161)}$$

A la limite ultra-relativiste ( $\beta \sim 1$ ), l'émission est fortement concentrée autour de  $\theta = 0$ .

Autour du maximum d'émission, on a

$$\begin{array}{l}
 \text{et} \\
 \text{avec} \\
 \text{de meme} \\
 \text{Finalement}
 \end{array}
 \left.
 \begin{array}{l}
 \cos\theta \sim 1 - \frac{\theta^2}{2} \quad ; \quad \sin\theta \sim \theta \\
 \frac{1}{1-\beta\cos\theta} \sim \frac{1}{1-\beta+\frac{\beta\theta^2}{2}} = \frac{1+\beta}{1-\beta^2+\frac{\beta(1+\beta)\theta^2}{2}} \sim \frac{2}{1-\beta^2+\theta^2} = \frac{2\gamma^2}{1+\gamma^2\theta^2} \\
 \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \\
 1-\beta^2 = \frac{1}{\gamma^2} \\
 \frac{d\mathcal{P}}{d\Omega} = \frac{q^2 a^2}{2\pi^2 \epsilon_0 c^3} \gamma^6 \frac{1}{(1+\gamma^2\theta^2)^3} \left( 1 - \frac{4\gamma^2\theta^2 \cos^2\varphi}{(1+\gamma^2\theta^2)^2} \right)
 \end{array}
 \right\} \quad \text{(III-162)}$$

( Attention: on utilise dans ce paragraphe le symbole  $\gamma$  pour mesurer le caractère relativiste de la particule. Ne pas confondre avec les taux d'amortissement introduits dans les sections précédentes! )

Pour  $\theta = 0$ , le rayonnement présente un maximum

$$\frac{d\mathcal{P}}{d\Omega} (\theta=0) = \frac{q^2 a^2}{2\pi^2 \epsilon_0 c^3} \gamma^6 \quad \text{(III-163)}$$

La largeur angulaire du lobe d'émission vers l'avant est

$$\Delta\theta \sim \frac{1}{\gamma} \quad \text{(III-164)}$$

ce qui correspond à un angle solide d'émission  $\pi/\gamma^2$  et à une puissance totale rayonnée

$$\mathcal{P} \sim \frac{q^2 a^2}{2\pi\epsilon_0 c^3} \gamma^4 \quad \text{(III-165)}$$

Il est facile d'évaluer également la durée de l'impulsion reçue en un point.

Elle correspond à une dispersion des temps retardés telle que

$$\omega \Delta t_0 \sim \frac{1}{\gamma} \quad (\text{III-166})$$

soit

$$\Delta t_0 = \frac{1}{\omega \gamma} \quad (\text{III-167})$$

or

$$\frac{\Delta t_0}{\Delta t} \sim \frac{1}{1 - V/c} \quad (\text{III-168})$$

On en déduit

$$\Delta t = \Delta t_0 \left( 1 - \frac{V}{c} \right) = \frac{1}{\omega \gamma} \left( 1 - \frac{V}{c} \right) \quad (\text{III-169})$$

Mais

$$1 - \frac{V}{c} = \frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{1 + \frac{V}{c}} \simeq \frac{1}{2\gamma^2} \quad (\text{III-170})$$

D'où finalement

$$\Delta t \simeq \frac{1}{2\gamma^3 \omega_0} \quad (\text{III-171})$$

La largeur spectrale  $\Delta\omega_0$  de la "bouffée" de rayonnement est l'inverse de la durée de l'impulsion (propriété élémentaire de la transformée de Fourier):

$$\Delta\omega_0 = \frac{1}{\Delta t} = 2\gamma^3 \omega_0 \quad (\text{III-172})$$

Application numérique à un synchrotron

Energie des particules :  $E_0 = 10 \text{ GeV}$

Champ magnétique  $B_0 = 3 \text{ kG} = 0,3 \text{ T}$ .

on a  $\gamma mc^2 = E_0$  soit  $\gamma = \frac{E_0}{mc^2} \simeq 2 \cdot 10^4$  (électron très relativiste)

D'autre part, la fréquence cyclotron est

$$\omega_0 = \frac{q B_0}{\gamma m} \simeq 2,5 \cdot 10^6 \text{ rad/sec}$$

et le rayon de l'orbite

$$R = \frac{mc}{q B_0} \sqrt{\gamma^2 - 1} \simeq \frac{mc}{q B_0} \gamma \simeq 120 \text{ m} .$$

On trouve

$$\Delta\omega_0 = 2\gamma^3 \omega_0 \simeq 10^{19} \text{ rad/sec} !$$

Spectre large avec un étalement dans le domaine des rayons X !

Puissance rayonnée ( $a \sim \omega_0 c$ )

$$\mathcal{P} = \frac{q^2 \omega_0^2 c^2}{2\pi\epsilon_0 c^3} \gamma^4 = \frac{q^2 \omega_0^2}{2\pi\epsilon_0 c} \gamma^4$$

Perte d'énergie par tour :

$$\mathcal{P} \times \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{q^2 \omega_0}{\epsilon_0 c} \gamma^4$$

Perte relative d'énergie par tour :

$$\frac{\mathcal{P} \times 2\pi/\omega_0}{\gamma mc^2} = \frac{q^2 \omega_0 \gamma^3}{\epsilon_0 mc^3} \sim 10^{-3}$$

Ainsi, si on n'entretient pas le mouvement, l'électron serait freiné très rapidement. Les pertes par rayonnement doivent être compensées par entretien du mouvement (énergie microonde fournie de façon résonnante aux particules). Le rayonnement synchrotron est utilisé comme source de rayons x pour de nombreuses expériences de physique.

*Remarque : Une particule non-relativiste tournant avec la pulsation  $\omega$  rayonne essentiellement un champ à la même fréquence (combinaison de deux dipôles électriques oscillant en quadrature). Lorsque la particule devient ultra-relativiste ( $v/c \sim 1$ ), on voit apparaître des composantes du champ à des fréquences très élevées de l'ordre de  $\gamma^3 \omega$ . Nous avons eu un aperçu du début de ce processus lorsque nous avons considéré au § 3 les premières corrections en  $v/c$  au rayonnement d'un dipôle. Nous avons vu apparaître une composante quadrupolaire en  $v/c$  à la pulsation  $2\omega$ . On conçoit que lorsque  $v/c \rightarrow 1$ , les harmoniques de rang de plus en plus élevé apparaissent dans le rayonnement de la charge qui évolue ainsi du cas monochromatique ( $v/c \ll 1$ ) au rayonnement synchrotron à bande spectrale très large ( $v/c \sim 1$ ).*

#### d) Rayonnement de freinage - Bremsstrahlung

Nous venons de montrer une nouvelle fois que le champ rayonné par une charge en mouvement est proportionnel à son accélération. Rappelons encore qu'une particule en translation uniforme, aussi rapide soit-elle, ne rayonne pas et conserve donc son énergie mécanique. C'est le cas par exemple de particules cosmiques chargées qui parcourent des distances énormes sans perte d'énergie. La situation est différente lorsque la particule chargée entre dans un champ magnétique : elle subit alors une accélération et perd de l'énergie par rayonnement synchrotron. Il en est de même lorsqu'elle entre en collision avec une autre particule chargée (voir Fig. 14). Elle subit alors une diffusion coulombienne au cours de laquelle elle acquiert une accélération transitoire  $a(t)$ . Elle rayonne alors pendant la collision et le système émerge de la collision avec une perte d'énergie mécanique : il y a freinage radiatif ou Bremsstrahlung. Ce phénomène joue

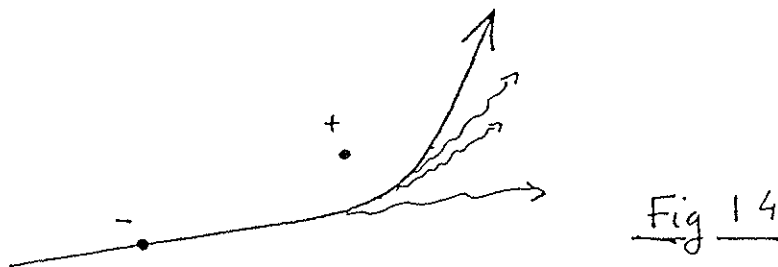


Fig 14

un rôle essentiel dans les plasmas. Il constitue un mécanisme important de transfert d'énergie de la matière au rayonnement. Ce rayonnement présente un spectre continu, d'autant plus large que les particules sont plus relativistes. Les formules générales de cette section peuvent être utilisées pour le calculer. C'est par ce mécanisme de Bremsstrahlung que les étoiles rayonnent en grande partie leur énergie : la matière stellaire à haute température reçoit son énergie de réactions nucléaires de fusion et rayonne cette énergie dans l'espace par rayonnement de freinage.





## COMPLEMENT AIII

RAYONNEMENT DIPOLAIRE MAGNETIQUE ET QUADRUPOLAIRE  
ELECTRIQUE

Evaluons le terme  $p = 1$  du développement (III-30) :

$$\vec{A}^{(1)}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{i(kr - \omega t)}}{r} (-ik) \iiint_V (\vec{n} \cdot \vec{r}') \vec{j}_\omega(\vec{r}') d^3 r' \quad (\text{A}_{\text{III}}-1)$$

L'expression sous le signe somme peut se mettre sous la forme :

$$\begin{aligned} (\vec{n} \cdot \vec{r}') \vec{j}_\omega(\vec{r}') &= \frac{1}{2} \left\{ (\vec{n} \cdot \vec{r}') \vec{j}_\omega(\vec{r}') - \vec{r}' \cdot (\vec{j}_\omega \cdot \vec{n}) \right\} \\ &+ \frac{1}{2} \left\{ (\vec{n} \cdot \vec{r}') \vec{j}_\omega(\vec{r}') + \vec{r}' \cdot (\vec{j}_\omega \cdot \vec{n}) \right\} \end{aligned} \quad (\text{A}_{\text{III}}-2)$$

Etudions successivement les deux parties de AIII-2.

(i) Premier terme : utilisant la relation

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c} \quad (\text{A}_{\text{III}}-3)$$

On récrit ce termes sous la forme

$$\frac{1}{2} \vec{n} \times (\vec{j}_\omega \times \vec{r}')$$

et sa contribution au potentiel vecteur sous la forme :



$$\vec{A}_{d.m.}^{(1)}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{i(kr - \omega t)}}{r} ik \vec{n} \times \vec{M} \quad (\text{A}_{III-4})$$

avec

$$\vec{M} = \frac{1}{2} \iiint_V (\vec{r}' \times \vec{j}_\omega(\vec{r}')) d^3\vec{r}' \quad (\text{A}_{III-5})$$

(ii) Second terme : calculons la composante  $x$  de ce terme (en utilisant la relation III-33) :

$$\frac{1}{2} \left\{ (\vec{n} \cdot \vec{r}') j_{\omega x} + x' (\vec{j}_\omega \cdot \vec{n}) \right\} = \frac{1}{2} \left\{ (\vec{n} \cdot \vec{r}') \vec{\nabla} (x' \vec{j}_\omega) - (\vec{n} \cdot \vec{r}') x' \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_\omega + x' (\vec{j}_\omega \cdot \vec{n}) \right\} \quad (\text{A}_{III-6})$$

soit encore

$$\frac{1}{2} \left\{ (\vec{n} \cdot \vec{r}') j_{\omega x} + x' (\vec{j}_\omega \cdot \vec{n}) \right\} = \frac{1}{2} \left\{ \vec{\nabla} [ (\vec{n} \cdot \vec{r}') x' \vec{j}_\omega ] - x' \vec{j}_\omega \cdot \vec{\nabla} (\vec{n} \cdot \vec{r}') - (\vec{n} \cdot \vec{r}') x' \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_\omega + x' (\vec{j}_\omega \cdot \vec{n}) \right\} \quad (\text{A}_{III-7})$$

En remarquant alors que

$$\vec{\nabla} (\vec{n} \cdot \vec{r}') = \vec{n}$$

on constate que les 2<sup>ème</sup> et 4<sup>ème</sup> termes au membre de droite de (A<sub>III-7</sub>) se compensent. L'intégrale dans  $V$  du 1<sup>er</sup> terme va se réduire à une intégrale de surface nulle ( $\vec{j}$  s'annule sur le contour de la distribution de la source). Finalement, il ne reste que le 3<sup>ème</sup> terme dans lequel on peut remplacer  $\vec{\nabla} \cdot \vec{j}_\omega$  par  $i\omega \rho_\omega$ . On obtient donc

$$\vec{A}_{0E}^{(1)} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{i(kr - \omega t)}}{r} \frac{ik}{2} \cdot i\omega \cdot \iiint_V (\vec{n} \cdot \vec{r}')_{x'} \rho_L(\vec{r}') d^3 r' \quad (A_{III}^{-8})$$

On définit habituellement le quadrupole électrique d'une distribution de charges par le tenseur  $\vec{Q}$  de composantes:

$$Q_{ij} = \iiint [3 x'_i x'_j - \sum (x'_k)^2 \delta_{ij}] \rho(\vec{r}') d^3 r' \quad (A_{III} 9)$$

Il s'agit d'un tenseur symétrique à trace nulle. Sa contraction avec le vecteur  $\vec{n}$  définit un vecteur  $\vec{n} \cdot \vec{Q}$  dont les composantes s'obtiennent par la règle de sommation sur les indices répétés:

$$(\vec{n} \cdot \vec{Q})_j = \sum_i n_i Q_{ij}.$$

L'intégrale contenue dans l'équation A<sub>III</sub>8 s'écrit donc:

$$(\vec{n} \cdot \vec{Q})_{x/3} + (n_x/3) \iiint (x'^2 + y'^2 + z'^2) \rho(\vec{r}') d^3 r'$$

$\vec{A}_{QE}$  possède ainsi une composante parallèle au vecteur  $\vec{n} \cdot \vec{Q}$  et une composante parallèle à  $\vec{n}$ . Cette dernière ne contribue pas au rayonnement en  $1/r$  car l'on a:

$$\vec{\nabla} \times \left[ \frac{e^{ikr}}{r} \vec{n} \right] \approx \vec{\nabla} \left( \frac{e^{ikr}}{r} \right) \times \vec{n} \approx \frac{ik}{r} \vec{n} \times \vec{n} = 0$$

On peut donc simplement écrire:

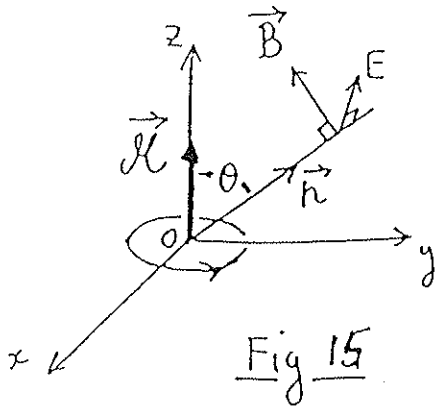
$$\vec{A}_{QE}^{(1)} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\omega^2}{6c} \frac{e^{i(kr - \omega t)}}{r} \vec{n} \cdot \vec{Q} \quad (A_{III} 10)$$

Les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{H}$  dérivés des potentiels  $\vec{A}$  et  $\phi$  sont donnés par les formules (III-41 à III-44). Étudions successivement la structure des rayonnements dipolaires magnétiques et quadrupolaires électriques.

#### a) Champ dipolaire magnétique

En comparant les formules (III-41) et (III-42) à (III-9) et (III-10) on constate la similitude entre la structure des rayonnements dipolaires électriques et magnétiques:  $\mathcal{M}$  remplace  $\mathcal{D}$  et les polarisations des champs électriques et magnétiques sont inversées (voir figure 15).

Le vecteur de Poynting, orienté le long de  $oz$  vaut



$$\vec{S}_{dm} = \frac{M^2}{32 \pi^2 \epsilon_0 c^3} \frac{\omega^4}{r^2} \sin^2 \theta \vec{n} \quad (\text{A}_{III}^{-11})$$

à rapprocher de (III-12).

La puissance totale rayonnée est :

$$\mathcal{P}_{dm} = \frac{M^2 \omega^4}{12 \pi \epsilon_0 c^3} \quad (\text{A}_{III}^{-12})$$

On constate sans peine que

$$\left| \frac{\mathcal{P}_{dm}}{\mathcal{P}_{de}} \right| \sim \frac{v^2}{c^2} \quad (\text{A}_{III}^{-13})$$

#### b) Champ quadrupolaire électrique

Nous ne l'expliciterons que pour un quadrupole électrique présentant la symétrie de révolution autour de Oz, pour lequel les diverses composantes sont:

$$Q_{zz} = Q_0 = \iiint (3z^2 - x^2 - y^2 - z^2) \rho(r) d^3r = 2 \iiint (z^2 - x^2) \rho(r) d^3r$$

$$Q_{xx} = \iiint (3x^2 - x^2 - y^2 - z^2) \rho(r) d^3r = \iiint (x^2 - z^2) \rho(r) d^3r = -Q_0/2 = Q_{yy}$$

$$Q_{xy} = Q_{xz} = Q_{yz} = 0. \quad (\text{A}_{III}^{-14})$$

On appellera alors  $Q_0$  le "quadrupole électrique" de cette distribution symétrique. Utilisant les règles de sommation habituelles, on a:

$$(\vec{n} \cdot \vec{Q})_x = n_x Q_{xx} = -n_x Q_0/2 ; (\vec{n} \cdot \vec{Q})_y = n_y Q_{yy} = -n_y Q_0/2 ; (\vec{n} \cdot \vec{Q})_z = n_z Q_{zz} = n_z Q_0$$

soit encore:

$$\vec{n} \cdot \vec{Q} = -(Q_0/2) \vec{n} + (3Q_0/2) \frac{z}{r} \vec{e}_z.$$

Remarquant à nouveau que la partie du potentiel vecteur parallèle à  $\vec{n}$  ne contribue pas au rayonnement, on peut donc écrire:

$$\vec{A}_{qe} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\omega^2}{4c} Q_0 \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r} \frac{z}{r} \vec{e}_z$$

D'après III-43, le champ  $B_{QE}$  est perpendiculaire au plan  $\pi$ ,  $e_z$  et  $E_{QE}$  est contenu dans ce plan (Fig 16). Le champ  $B_{QE}$  dans la direction  $\theta$  a une amplitude

$$|B_{QE}(\theta)| = \frac{\mu_0 \omega^2 k}{4\pi 4c} \frac{1}{r} Q_0 \sin\theta \cos\theta \quad (A_{III}-15)$$

et le vecteur de Poynting vaut donc

$$\vec{S}_{QE} = \frac{Q_0^2}{512 \pi^2 \epsilon_0 c^5} \frac{\omega^6}{r^2} \sin^2\theta \cos^2\theta \vec{n} \quad (A_{III}-16)$$

avec une puissance totale rayonnée

$$\mathcal{P}_{QE} = \int S_{QE} r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi = \frac{Q_0^2}{360 \pi \epsilon_0 c^5} \omega^6 \quad (A_{III}-17)$$

On trouve alors

$$\left| \frac{\mathcal{P}_{QE}}{\mathcal{P}_{DE}} \right| = \frac{Q_0^2 k^2}{g_0 D^2} \sim \frac{a_0^2 k^2}{g_0}$$

( $a_0$  : amplitude d'oscillation des charges).

Le diagramme de rayonnement du quadrupole électrique à symétrie de révolution autour de  $Oz$  est différent de celui des dipôles électriques et magnétiques alignés le long de  $Oz$  ( qui sont eux en  $\sin^2\theta$  ).

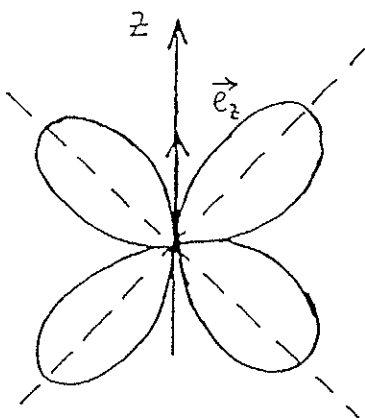


Fig. 17

Le rayonnement est nul dans la direction  $oz$  et dans le plan perpendiculaire à  $oz$  et maximum dans les directions à  $45^\circ$  de l'alignement du quadrupole (Fig. 17).

## COMPLEMENT BIII

HAMILTONIEN D'UN ATOME DANS UN CHAMP ELECTROMAGNETIQUE1) Forme générale du Hamiltonien de l'atome dans un champ extérieur

Rappelons pour commencer, l'expression du Hamiltonien classique d'une charge dans un champ extérieur imposé (A, U). On part du Lagrangien (équation BI-26) qui (à un terme ne dépendant que du champ près) s'écrit (limite non relativiste) :

$$L = \frac{1}{2} m v^2 + q [\vec{v} \cdot \vec{A}(\vec{r}, t) - U(\vec{r}, t)] \quad (\text{B}_{\text{III}}^{-1})$$

On définit le moment conjugué de la variable  $r_\alpha$  par :

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = m \vec{v} + q \vec{A}(\vec{r}, t) \quad (\text{B}_{\text{III}}^{-2})$$

et la fonction de Hamilton classique:

$$H(\vec{r}, \vec{p}) = \dot{\vec{r}} \cdot \vec{p} - L = \frac{1}{2m} [\vec{p} - q \vec{A}(\vec{r}, t)]^2 + q U(\vec{r}, t) \quad (\text{B}_{\text{III}}^{-3})$$

On peut aisément vérifier que les équations de Hamilton-Jacobi avec ce Hamiltonien redonnent bien l'équation de Newton avec la force de Lorentz. Le Hamiltonien quantique associé au même problème s'écrit donc (en rangeant les termes dans un ordre différent):

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + q U(\vec{r}, t) - \frac{q}{2m} [\vec{p} \cdot \vec{A}(\vec{r}, t) + \vec{A}(\vec{r}, t) \cdot \vec{p}] + \frac{q^2}{2m} A^2(\vec{r}, t) \quad (\text{B}_{\text{III}}^{-4})$$

Dans (BIII-4) les quantités  $r$  et  $p$  sont maintenant des opérateurs qui ne commutent pas. On notera que l'on a écrit le double produit de  $p$  et de  $A(r,t)$  sous une forme symétrique car a priori  $p$  ne commute pas non plus avec une fonction de  $r$ .

Particularisons maintenant le problème au cas de l'électron de l'atome d'hydrogène irradié par une onde électromagnétique plane extérieure. Cet électron interagit avec le potentiel électrostatique du proton et le potentiel (a priori scalaire et vecteur) du champ de l'onde plane. Le potentiel scalaire de Coulomb du proton est:

$$U_0(\vec{r}) = - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \quad (\text{BIII-5})$$

Quant au potentiel de l'onde plane,  $(\mathbf{A}, U)$ , on peut choisir la jauge dans laquelle il est purement vectoriel:

$$U = 0 \quad (\text{BIII-6})$$

et dans laquelle la divergence de  $\mathbf{A}$  est nulle (ce qui est dans ce cas aussi bien la condition de jauge de Lorentz que de Coulomb):

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \quad (\text{BIII-7})$$

Pour préciser la polarisation du champ appliqué, on prendra par exemple le champ électrique sous la forme:

$$\vec{E} = E_0 \cos(ky - \omega t) \vec{e}_z \quad (\text{BIII-8})$$

qui dérive du pur potentiel vecteur:

$$\vec{A}(y, t) = \frac{E_0}{\omega} \sin(ky - \omega t) \vec{e}_z \quad (\text{BIII-9})$$

obéissant bien à la condition (BIII-7). Regroupant les contributions du champ électrostatique du noyau et celle du champ extérieur de l'onde plane, on obtient immédiatement :



$$H = H_0 - \frac{q}{2m} [\vec{p} \cdot \vec{A}(\vec{r}, t) + \vec{A}(\vec{r}, t) \cdot \vec{p}] + \frac{q^2}{2m} A^2(\vec{r}, t) \quad (\text{B}_{\text{III}}-10)$$

où

$$H_0 = \frac{p^2}{2m} - \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \quad (\text{B}_{\text{III}}-11)$$

est le hamiltonien bien connu de l'électron hydrogénoïde non perturbé. Les termes en  $A$  et  $A^2$  qui s'ajoutent à  $H_0$  dans (B<sub>III</sub>-10) décrivent la "perturbation" électromagnétique subie par l'atome du fait de son irradiation. On peut d'ailleurs légèrement simplifier cette expression en remarquant que la condition de jauge (B<sub>III</sub>-7) entraîne que  $A(\vec{r}, t)$  et  $\vec{p}$  commutent dans ce cas particulier (ce que l'on voit tout de suite en remarquant que  $\vec{p}$  n'est rien d'autre que l'opérateur  $(\hbar/i)\nabla$ ). On écrit donc (B<sub>III</sub>-10) sous la forme :

$$H = H_0 - \frac{q}{m} \vec{p} \cdot \vec{A}(\vec{r}, t) + \frac{q^2}{2m} A^2(\vec{r}, t) \quad (\text{B}_{\text{III}}-12)$$

On admettra (ce qui semble intuitif) que (B<sub>III</sub>-12) se généralise au cas d'un atome à  $Z$  électrons ( $\alpha = 1, 2, \dots, Z$ ) sous la forme :

$$H = H_0 - \frac{q}{m} \sum_{\alpha} \vec{p}_{\alpha} \cdot \vec{A}(\vec{r}_{\alpha}, t) + \frac{q^2}{2m} \sum_{\alpha} A^2(\vec{r}_{\alpha}, t) \quad (\text{B}_{\text{III}}-13)$$

où  $H_0$  représente maintenant le hamiltonien non perturbé de l'atome libre à  $Z$  électrons (qui englobe dans son terme d'énergie potentielle l'interaction attractive coulombienne du noyau et les termes d'interaction répulsive entre les électrons). Le hamiltonien (B<sub>III</sub>-13), qui dérive d'un Lagrangien non relativiste pour des particules sans spin décrit tous les effets du

couplage de l'onde avec les électrons, à l'exclusion de ceux qui dépendent du moment magnétique de spin de ceux-ci.

Revenons à présent pour simplifier au cas d'un seul électron hydrogénoïde et explicitons dans le Hamiltonien (B<sub>III</sub>-12) le potentiel vecteur à l'aide de (B<sub>III</sub>-9) (onde polarisée le long de Oz):

$$H = H_0 - \frac{qE_0}{m\omega} p_z \sin(ky - \omega t) + \frac{q^2 E_0^2}{2m\omega^2} \sin^2(ky - \omega t) \quad (\text{B}_{\text{III}}-14)$$

L'interaction avec le champ extérieur fait ainsi apparaître deux termes de couplage, respectivement en  $E_0$  et  $E_0^2$ . Pour des champs optiques pas trop intenses l'effet du terme en  $E_0^2$  est souvent négligeable. Dans le problème qui nous intéresse principalement dans ce chapitre, qui est le calcul du dipôle induit au premier ordre en  $E_0$  on peut évidemment négliger cette contribution du deuxième ordre au couplage atome-champ. On écrira donc:

$$H = H_0 - \frac{qE_0}{m\omega} p_z \sin(ky - \omega t) \quad (\text{B}_{\text{III}}-15)$$

## 2) Approximation dipolaire électrique

Dans le hamiltonien (B<sub>III</sub>-15), l'opérateur  $y$  de position de l'électron apparaît en argument de la fonction sinus. On peut donner un sens à cette notion de fonction d'opérateur en développant cette fonction en série, suivant les puissances croissantes de  $ky$ . Tout élément de matrice de la perturbation se présentera ainsi comme une série de termes de la forme  $k \langle y^n \rangle$  où  $\langle y^n \rangle$  dénote un élément de matrice caractéristique de  $y^n$ . L'ordre

de grandeur de  $\langle r \rangle$  pour un état hydrogénoïde est évidemment  $a_0$ , le rayon de Bohr ( $a_0 = 0.53$  Angstroem). Le développement en série de la perturbation est donc un développement en puissances de  $a_0/\lambda$ . Dans le domaine optique, en fait pour des rayonnements s'étendant en fréquence jusqu'au domaine des rayons  $\gamma$ ,  $\lambda$  est très grand devant la taille de l'atome et on peut limiter le développement à l'ordre zéro, ce qui revient à négliger la variation de phase spatiale du champ sur la dimension de la fonction d'onde atomique. On a alors:

$$H = H_0 + H_{int}^{D \cdot E} (t) \quad (B_{III}-16)$$

avec

$$H_{int}^{D \cdot E} (t) = \frac{qE_0}{m\omega} p_z \sin\omega t \quad (B_{III}-17)$$

Le Hamiltonien de couplage atome-champ dépend alors des observables de l'atome uniquement par l'intermédiaire de l'impulsion électronique  $p$ . Nous montrons dans le § III-6 ( Equ.III-119) que les éléments de matrice de  $p_z$  sont proportionnels à ceux de  $z$ . Le terme  $H_{int}^{DE}(t)$  apparaît ainsi comme décrivant l'interaction du champ électrique de l'onde avec le dipôle électrique  $qz$  de l'atome. Décrire l'interaction de l'atome et du champ à l'aide du terme  $H_{int}^{DE}$  porte le nom d'approximation dipolaire électrique. Cette approximation est bien sûr consistante avec celle qui consiste à assimiler l'atome à son dipôle électrique quand on calcule le champ qu'il diffuse (voir § III-6). C'est donc le Hamiltonien (BIII-16) que l'on utilise

pour calculer l'évolution de l'atome et son dipôle moyen induit. Pour un atome à  $Z$  électrons (BIII-17) se généralise immédiatement pour donner:

$$H_{int}^D \cdot E \cdot (t) = \frac{qE_0}{m\omega} \sin\omega t \left( \sum_{\alpha} p_{z\alpha} \right) \quad (B_{III}-18)$$

Remarques: 1) Le Hamiltonien (BIII-10) décrivant la dynamique d'un atome dans un champ extérieur dépend bien sûr de la jauge choisie pour exprimer les potentiels. Des choix de jauge différents de celui adopté ici sont possibles et conduiraient à d'autres formes de Hamiltoniens. Bien entendu, toutes les prédictions physiques de la théorie (par exemple l'expression du dipôle moyen induit par le champ sur un atome) sont indépendantes du choix de la jauge.

2) Nous avons limité ici le développement de l'interaction atome-champ à l'ordre zéro en  $a_0/\lambda$ , (approximation consistante avec un calcul du champ dipolaire électrique rayonné). On peut bien entendu, si c'est nécessaire, poursuivre le développement de (BIII-15) en puissances de  $a_0/\lambda$ . On montre alors, qu'à l'ordre un apparaît un terme dipolaire magnétique décrivant le couplage du champ magnétique de l'onde avec le moment magnétique orbital de l'atome (rappelons que notre modèle néglige le magnétisme de spin) et un terme quadrupolaire électrique décrivant l'interaction du gradient de champ de l'onde avec le quadrupole de l'atome. On peut pousser le calcul aux ordres plus élevés et faire apparaître les contributions multipolaires successives correspondant aux distributions d'ordre plus élevées des distributions de charges et de courants dans l'atome. Il s'agit là d'une méthode tout à fait générale pour traiter de l'interaction d'un champ avec un système de charges localisées dans un volume petit devant la longueur d'onde du champ.

MAGISTÈRE INTERUNIVERSITAIRE DE PHYSIQUE

ELECTRODYNAMIQUE ET OPTIQUE

S. HAROCHE

Année 1994-95 • Second fascicule (Chapitres 4 et 5)



# ELECTRODYNAMIQUE ET OPTIQUE

S. HAROCHE

Fascicule n° 2

. Chapitre IV: Coherence et fluctuations.....	p 229
. Chapitre V: Champs dans la matière. Milieux linéaires.....	P 305





## CHAPITRE IV

### COHERENCE ET FLUCTUATIONS

Jusqu'à présent, nous avons surtout considéré les propriétés de champs monochromatiques "cohérents". De tels champs sont rayonnés par des sources elles-mêmes monochromatiques, dont les différents éléments oscillent avec une même phase bien définie (antenne radio, laser, ensemble d'atomes pilotés par la même onde monochromatique cohérente). En réalité, la plupart des champs rencontrés dans la nature (qu'il s'agisse de la lumière d'une lampe, du soleil ou d'une étoile) sont "incohérents". Leurs sources sont constituées d'oscillateurs élémentaires dont la phase fluctue dans le temps et qui n'ont pas de relation de phase bien définie entre eux. Ces champs "incohérents" présentent des fluctuations importantes d'amplitude et de phase. La relation entre les phases du champ en un même point et à deux instants différents n'est bien définie que si ces deux instants ne diffèrent pas de plus que le "temps de corrélation" du rayonnement. De même, les phases relatives du champ à un même instant mais en deux points différents d'un même plan normal à la direction de propagation ne sont bien définies que si ces deux points sont à une distance inférieure la "longueur de corrélation" du rayonnement. Temps et longueur de corrélation sont définis à partir de fonctions statistiques qu'on appelle les fonctions de corrélation spatio-temporelles du champ, qui elles mêmes dépendent des propriétés statistiques et géométriques des sources ou de celles des milieux diffuseurs traversés. Ces fonctions de corrélation jouent un rôle essentiel dans l'analyse d'une expérience d'interférence ou de diffusion de la lumière. Suivant que les temps ou longueurs de corrélation seront "grands" ou "petits" à une échelle qui reste à préciser pour chaque expérience considérée, les effets d'interférence

seront ou non observables et on dira qu'il y a manifestation de "cohérence" ou "incohérence". Donnons deux exemples simples pour illustrer ces notions:

**Exemple 1:** Realisons l'expérience d'interférence des trous d'Young avec une source étendue. Lorsque les deux trous sont suffisamment rapprochés, on observe la figure d'interférence bien connue (Fig 1a). Eloignons alors les deux trous sans rien changer d'autre au dispositif. A partir d'une certaine distance, on constate que le contraste des franges diminue et les interférences finissent par disparaître complètement lorsque la distance des deux trous est assez grande (Fig 1b). On passe ainsi d'un régime d'interférence cohérent à un régime incohérent. Comment comprendre et caractériser ce phénomène qui joue un rôle important en astronomie optique par exemple?

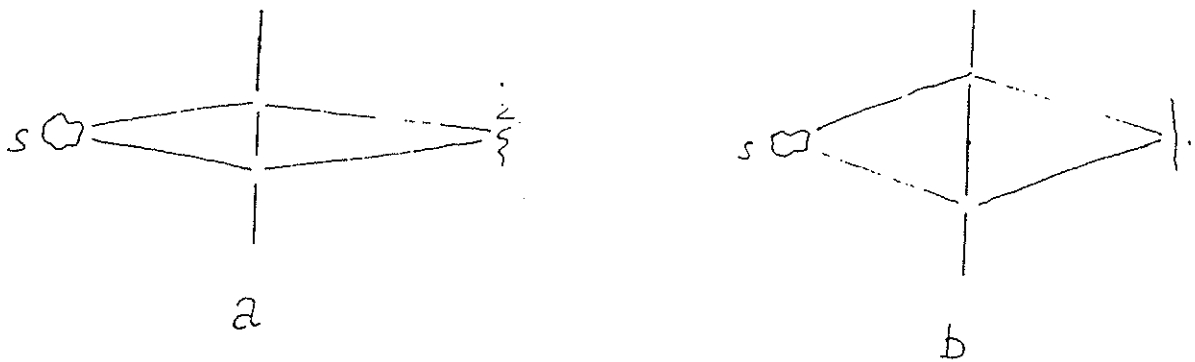
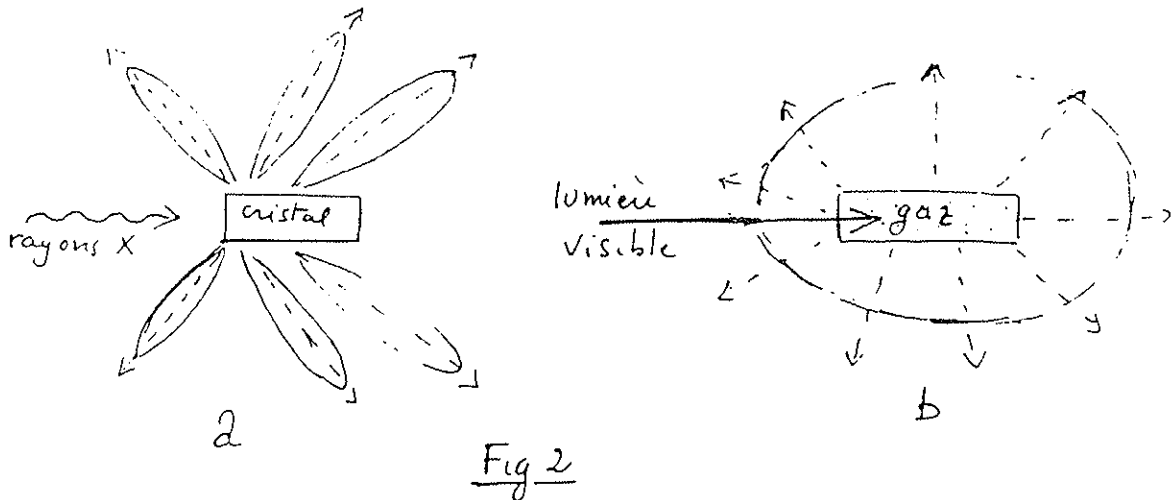


Fig 1

**Exemple 2 :** Considerons la diffusion d'une onde monochromatique plane par un milieu matériel étendu dans deux cas différents: Si l'onde est diffusée par un arrangement régulier d'atomes séparés par des distances de l'ordre de la longueur d'onde (c'est par exemple le cas de la diffusion des rayons  $X$  par un cristal), on constate que le champ diffuse est la superposition des champs émis par chaque atome et un diagramme d'interférence anisotrope caractéristique est observé ( Fig 2a). Si au contraire l'onde est diffusée par un milieu désordonné ( gaz ), on constate que ce sont les intensités diffusées par chaque atome qui s'ajoutent, sans donner lieu à aucune interférence ( Fig 2b). La diffusion est cohérente dans

le premier cas, incohérente dans le second. Comment relier cette différence essentielle de comportement des deux milieux diffuseurs à leurs propriétés statistiques?



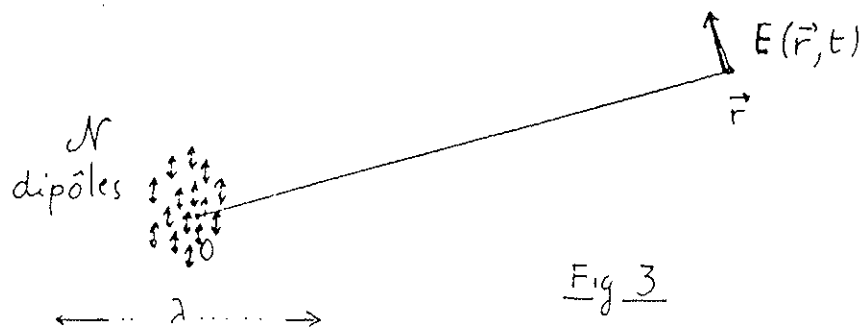
Le but de ce chapitre est de décrire un modèle très général de champ incohérent, d'étudier ses propriétés statistiques, et d'introduire à cette occasion les notions de fonction de corrélation et de densité spectrale qui permettent de décrire les propriétés statistiques d'un champ quelconque. Nous utiliserons enfin ces notions pour analyser un certain nombre d'expériences où le concept de cohérence est essentiel.

Nous commençons (§ IV-1) par présenter un modèle simple et très général de champ incohérent, le champ gaussien dont nous donnons quelques exemples. Puis nous introduisons les notions importantes de fonctions de corrélations temporelles du champ et de l'intensité (§ IV-2) et montrons comment ces fonctions peuvent être directement "mesurées" par des expériences d'interférence. Nous relierons ensuite (§ IV-3) ces fonctions de corrélation à une autre quantité importante qui caractérise un champ, sa densité spectrale. Nous décrivons également un dispositif permettant de mesurer cette densité, par une expérience "complémentaire" de celle permettant de mesurer la fonction de corrélation temporelle. Nous passons ensuite à la définition de la cohérence spatiale en introduisant les fonctions de corrélation dans l'espace pour un champ monochromatique, avant de généraliser le concept de fonction de corrélation en définissant des

fonctions de corrélation spatio-temporelles ( § IV-4). Nous abordons ensuite (§IV-5) l'étude de la lumière diffusée par un milieu statistique d'atomes ou de molécules et montrons de façon tout à fait générale comment la distribution angulaire et spectrale du champ diffusé est reliée à la fonction de corrélation des fluctuations de l'indice du milieu. Nous analysons alors en guise d'illustration( §IV-6) un certain nombre de situations intéressantes ( diffusion par un cristal, par un gaz, par une onde acoustique dans un milieu matériel).

### 1°) Champ incoherent - Champ gaussien

#### a) Modele simple de source

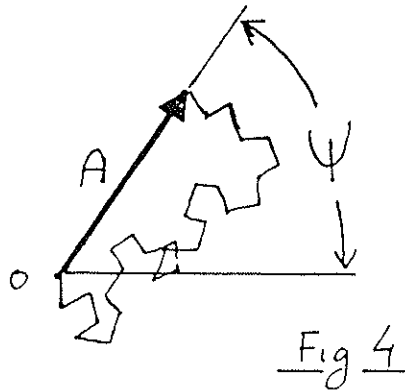


Considerons un ensemble de  $N$  dipôles oscillants parallèles, ayant tous même fréquence  $\omega = 2\pi c/\lambda$  et même amplitude, mais des phases différentes  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_1, \dots, \varphi_N$ . Ces dipôles sont confinés dans un volume de dimensions linéaires petites devant  $\lambda$  ( cette hypothèse simplificatrice nous permet d'éviter d'avoir à tenir compte du déphasage pendant la propagation du champ dans la source, qui n'ajoute rien d'essentiel ici). Le champ en un point  $r$  loin de la source s'obtient en ajoutant les champs rayonnés par chaque dipôle (Fig 3). L'ouverture angulaire de la source vue

de  $r$  étant faible, on suppose tous ces champs parallèles si bien que l'on peut considérer le champ comme une grandeur scalaire  $E(r,t)$  et l'on a:

$$E(\vec{r}, t) = E_0 \left( \sum_i e^{i\varphi_i} \right) e^{-i\omega t} \quad (\text{IV-1})$$

( $E_0$  est le champ produit en  $r$  par un dipôle de phase  $\varphi=0$ ). L'amplitude  $A$  et la phase  $\psi$  de la somme  $\sum e^{i\varphi_i}$  sont construites sur la figure 4 qui représente le champ résultant dans le plan complexe: si les phases  $\varphi_i$  sont aléatoires, l'extrémité du vecteur représenté par  $Ae^{i\psi}$  résulte d'une "marche au hasard" à deux dimensions.



Supposons de plus que chaque dipôle a une probabilité de changer de phase de façon aléatoire après un temps lui aussi aléatoire. Appelons  $\pi(\tau)$  la probabilité pour qu'un dipôle ne subisse aucun déphasage pendant l'intervalle de temps  $\tau$ .

De façon générale, la fonction  $\pi(\tau)$  aura l'allure représentée sur la

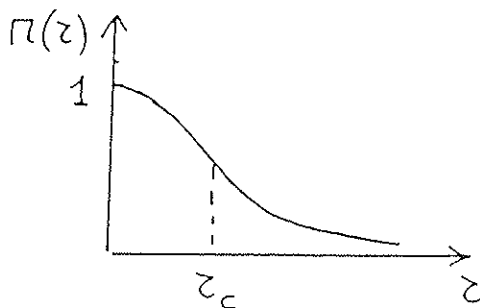


Fig 5

figure 5 ci-contre :  $\pi(\tau)$  tend vers zéro pour  $\tau$  grand et a une "largeur" caractéristique  $\tau_c$  représentant le temps moyen entre deux sauts de phase.

De façon évidente, tant que  $t < \tau_c$ , le champ des  $N$  dipôles garde pratiquement une amplitude  $A_1$  et une phase  $\psi_1$  bien définie. Au fur et à mesure que les dipôles de l'échantillon se déphasent les uns après les autres, l'amplitude et la phase globales changent et deviennent  $A_2 \psi_2, A_3 \psi_3$  etc... le changement se produisant en un temps caractéristique de l'ordre de  $\tau_c$ . La figure 6 représente une réalisation possible du champ résultant (c'est bien sûr la partie réelle du complexe  $Ae^{i\psi}$ ). Cette figure correspond au cas d'une loi  $\pi(\tau)$  présentant un saut abrupt autour de  $\tau = \tau_c$ . Dans le cas plus physique d'une loi  $\pi(\tau)$  ayant une dérivée plus continue et présentant un maximum autour de  $\tau = 0$  (voir Fig 5), on s'attend bien sûr à des variations plus "lisses" de l'amplitude et de la phase, mais le fait suivant essentiel demeure : la mémoire de phase de l'onde se perd après un temps de l'ordre de  $\tau_c$ . On appellera  $\tau_c$  le temps de corrélation du champ. Si on observe le champ sur un intervalle de temps court devant ce temps de corrélation, il apparaît comme un train d'onde quasi monochromatique. Sur un intervalle de temps long, il se présente par contre comme une succession de trains d'onde de phases et d'amplitudes non corrélées. Notons également comme fait important que les fluctuations de l'intensité du champ ( de  $A^2$ ) et celles de la phase  $\psi$  sont deux aspects du même phénomène de marche au hasard dans le plan complexe et ne peuvent être dissociés.

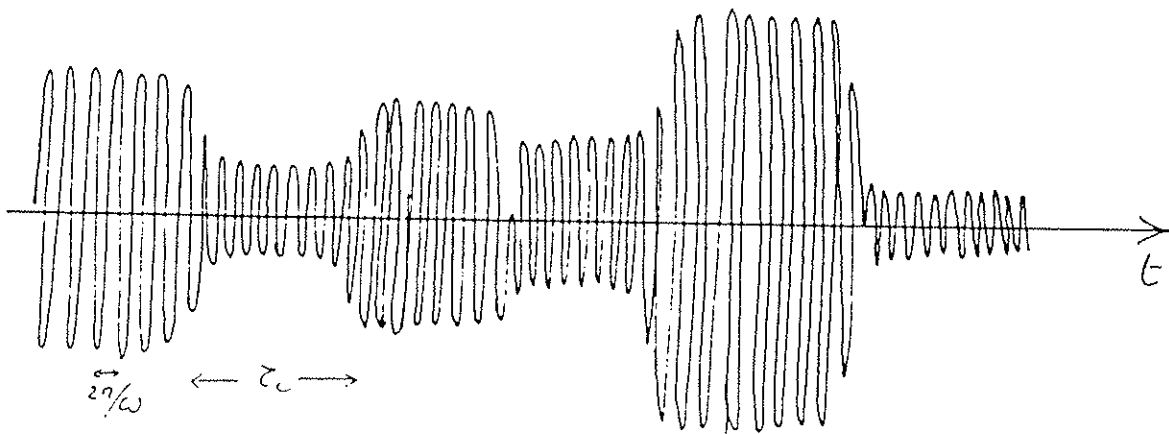


Fig 6

Nous pouvons à titre d'exemple considérer un modèle de source pour lequel la loi de probabilité  $\pi(\tau)$  a la forme simple d'une exponentielle décroissante. Supposons que les dipôles soient portés par des atomes ou des molécules d'un gaz et que les déphasages proviennent des phénomènes de collisions entre atomes. A chaque collision, le dipôle atomique perd sa mémoire de phase et reprend après la collision son oscillation avec une phase non corrélée à celle qu'il avait avant la collision. La théorie cinétique des gaz parfaits nous apprend que la probabilité pour une molécule de subir une collision pendant un intervalle de temps  $d\tau$  est uniforme et vaut  $d\tau/\tau_c$  ou  $\tau_c = l/v$ ,  $l$  étant le libre parcours moyen des atomes et  $v$  leur vitesse moyenne. La probabilité  $\pi(\tau + d\tau)$  pour qu'un atome n'ait subi aucune collision pendant l'intervalle de temps  $\tau + d\tau$  s'écrit évidemment :

$$\pi(\tau + d\tau) = \pi(\tau) \left[ 1 - \frac{d\tau}{\tau_c} \right] \quad (\text{IV-2})$$

ce qui entraîne

$$\frac{d\pi(\tau)}{d\tau} = - \frac{1}{\tau_c} \pi(\tau) \quad (\text{IV-3})$$

et

$$\pi(\tau) = e^{-\tau/\tau_c} \quad (\text{IV-4})$$

Pour un tel gaz, la loi  $\pi(\tau)$  est une exponentielle de temps caractéristique  $l/v$ . Quel que soit  $\pi(\tau)$ , on supposera toujours dans la suite que la condition suivante est satisfaite

$$\omega \tau_c \gg 1$$

(IV-5)

ce qui signifie que les dipôles oscillent sur un très grand nombre de périodes avant de se déphaser, ou encore que chaque train d'onde constituant le champ correspond à un très grand nombre d'oscillations. On dira alors que le champ est quasi-monochromatique.

b) Grandeurs moyennes et fluctuations d'un champ incohérent.

Definition d un champ gaussien

Nous allons maintenant étudier quelques propriétés statistiques importantes de la source que nous venons de décrire.

*iii) Intensité moyenne et champ moyen*

La plupart des détecteurs du champ électromagnétique (photomultiplicateurs, photodiodes etc..) sont sensibles à une fonction quadratique du champ: essentiellement, ils "mesurent" le carré du champ électrique  $I(r,t) = E^*(r,t)E(r,t)$  au point  $r$  où se trouve le détecteur (on omettra à partir de maintenant pour simplifier les notations la mention de ce point). La constante de temps de "réponse" de ces détecteurs est toujours grande devant la période optique (de l'ordre de  $10^{-15}$ s) si bien qu'ils intègrent le carré du champ sur un grand nombre d'oscillations rapides et mesurent en fait l'intensité moyenne sur un intervalle de temps égal à leur temps de réponse caractéristique. Si leur constante de temps est grande devant  $\tau_c$  ils intègrent même l'intensité sur un intervalle long devant le



temps caractéristique des fluctuations du champ. On dit qu'ils mesurent alors la valeur moyenne  $\overline{I(t)}$  de l'intensité:

$$\overline{I(t)} = \frac{1}{T} \int_0^T I(t) dt \quad (T \gg \tau_c) \quad (\text{IV-6})$$

Nous noterons en général une telle moyenne par une barre horizontale au-dessus de la quantité à laquelle elle correspond. (Rappelons que cette opération de moyenne est effectuée sur un intervalle de temps long devant le temps de corrélation et a fortiori la période optique). Compte tenu des définitions précédentes, on a pour la source décrite plus haut:

$$\overline{I(t)} = E_0^2 \overline{\left| \sum_i e^{i\varphi_i(t)} \right|^2} = E_0^2 \sum_{i,j} \overline{\left\{ e^{i[\varphi_i(t) - \varphi_j(t)]} \right\}} \quad (\text{IV-7})$$

Les termes  $i \neq j$  de la somme précédente ont évidemment une moyenne nulle car sur un temps long devant  $\tau_c$ ,  $\varphi_i(t) - \varphi_j(t)$  parcourt de façon aléatoire l'intervalle 0 et  $2\pi$ . Seuls les  $N$  termes  $i=j$  restent et l'on a :

$$\overline{I} = \overline{I(t)} = N E_0^2 \quad (\text{IV-8})$$

Ainsi, l'intensité moyenne est la somme des intensités rayonnées par chaque dipôle de la source. En ce sens, on peut dire que la source est incohérente: les champs rayonnés par différents atomes n'interferent pas en moyenne et leurs intensités s'ajoutent.

Si l'on cherche à mesurer non plus l'intensité, mais le champ lui-même à l'aide d'un détecteur usuel, on peut faire battre ce champ avec un champ de référence monochromatique  $E_r e^{i\omega t}$  et détecter le terme quadratique d'interférence  $\text{Re} \{ E_0 (\sum e^{i\varphi_j}) E_r^* \}$ .  $E_r$  étant connu, on accède par cette

méthode "hétérodyne" à la mesure de l'amplitude du champ. On élimine ainsi l'oscillation rapide en  $e^{-i\omega t}$ , dont la moyenne temporelle est trivialement nulle. On constate cependant que pour le champ décrit par (IV-1) la valeur moyenne de ce signal hétérodyne sur un temps long devant  $\tau_c$  est encore nulle, car la phase  $\psi$  du terme  $\sum e^{i\varphi_i}$  parcourt l'intervalle  $0-2\pi$  de façon aléatoire. On dira donc que ce champ a une valeur moyenne nulle.

*Notons que la moyenne peut avoir en physique statistique une autre définition: au lieu de ne considérer qu'une réalisation de la source et d'intégrer la grandeur physique étudiée sur un intervalle de temps long devant  $\tau_c$ , on peut envisager un ensemble de sources identiques, chacune formée des mêmes  $N$  atomes et préparée de la même façon et moyennner la grandeur physique à laquelle on s'intéresse sur cet ensemble de réalisations à un instant donné. Il est intuitivement évident que si la source est stationnaire (si ses propriétés sont invariantes par translation dans le temps) ces deux définitions de la moyenne sont équivalentes: mesurer une grandeur physique à des instants séparés par un intervalle grand devant  $\tau_c$  sur une source unique revient à observer des réalisations statistiquement indépendantes du même champ. Nous utiliserons ainsi indifféremment les concepts équivalents de moyenne temporelle ou de moyenne statistique, même si pratiquement, on sera plus facilement à même de réaliser l'opération de moyennage temporel (on dispose rarement d'un ensemble canonique de sources identiques!)*

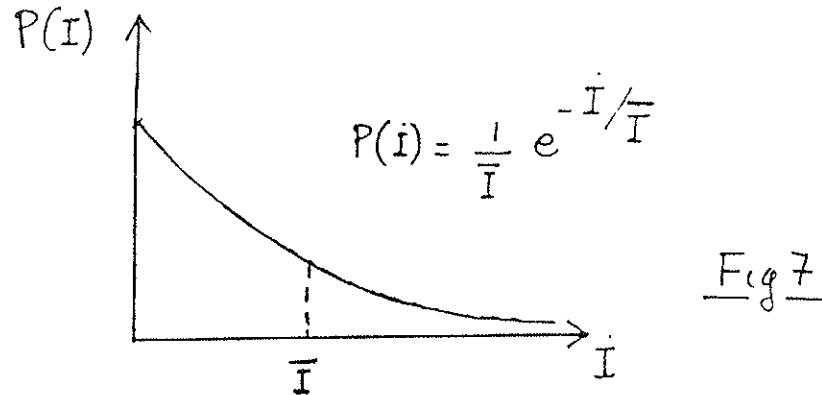
#### *iii) Distribution des intensités instantanées*

Supposons maintenant que l'on dispose d'un détecteur quadratique rapide avant un temps de réponse très petit devant  $\tau_c$  : mesurons  $I(t)$  en un temps très court devant  $\tau_c$  et répétons la mesure à des instants  $t_1, t_2, \dots, t_p$  distribués sur un intervalle de temps long devant  $\tau_c$ . Construisons enfin l'histogramme des valeurs trouvées. On obtient ainsi évidemment, à la limite où le nombre de mesures devient infini, la loi de probabilité de l'intensité. Appelons  $P(I)dI$  la probabilité pour que l'intensité mesurée soit comprise entre  $I$  et  $I+dI$ . Quelle est la fonction  $P(I)$ ? Le problème que nous nous posons est en fait celui de la statistique d'une marche aléatoire à deux dimensions: la distribution des extrémités des vecteurs représentant les amplitudes complexes  $Ae^{i\psi}$  sur la figure 4 est celle d'une marche au hasard dans le plan. Or on sait que dans une telle marche la probabilité de se trouver à une distance  $A$  de l'origine après un grand nombre de "pas" est une fonction Gaussienne de la forme  $\exp(-A^2/A_0^2)$  où  $A_0$  est la valeur quadratique moyenne de l'écart à l'origine. On en déduit donc que  $P(I)$  s'écrit.

$$P(I) = \frac{1}{\bar{I}} e^{-I/\bar{I}} \quad (\text{IV-9})$$

où  $\bar{I}$  est bien sûr la valeur moyenne (IV-8). La fonction  $P(I)$  est représentée sur la Figure 7. L'intensité la plus probable est zéro et l'intensité moyenne  $\bar{I} = NEu^2$ . La probabilité de mesurer une grande valeur de  $I$  est d'autant plus petite que cette valeur est plus grande. En d'autres termes, les fluctuations du champ sont d'autant plus rares qu'elles sont plus grandes. Un champ ayant une telle loi de probabilité pour son intensité instantanée est appelé pour une raison évidente champ gaussien. Nous dirons que c'est

un champ gaussien quasi-monochromatique si sa fréquence et son temps de corrélation satisfont la relation (IV-5).



*iii) Valeurs moyennes des puissances de I. Dispersion de I*

Supposons que nous disposons d'un détecteur permettant de mesurer  $I(t)$  à un instant  $t$  donné (en fait effectuant la moyenne de  $I$  sur un intervalle autour de  $t$  court devant  $\tau_c$  et long devant  $1/\omega$ ). À l'aide de ce détecteur on mesure par la même opération toute fonction de  $I$ , par exemple  $I(t)^n$ . En moyennant un grand nombre de mesures réparties sur un intervalle de temps long devant  $\tau_c$ , on construit la valeur moyenne  $\overline{I^n}$ . On a évidemment :

$$\overline{I^n} = \int P(I) I^n dI \quad (\text{IV-10})$$

et pour un champ gaussien

$$\overline{I^n} = \frac{1}{\bar{I}} \int e^{-I/\bar{I}} I^n dI = n! (\bar{I})^n \quad (\text{IV-11})$$

Pour un tel champ, la moyenne de la puissance  $n^{\text{ième}}$  de l'intensité est égale

a n! fois l'intensité moyenne à la puissance n. En d'autres termes, les grandes fluctuations sont "favorisées" dans l'opération qui consiste à calculer  $I^n$ .

On déduit en particulier de (IV-11) l'écart quadratique moyen d'un champ gaussien, qui mesure la dispersion caractéristique des intensités instantanées :

$$\Delta I = \sqrt{I^2 - (\bar{I})^2} = \bar{I} \quad (\text{IV-12})$$

Pour un champ gaussien la dispersion de I est égale à sa valeur moyenne.

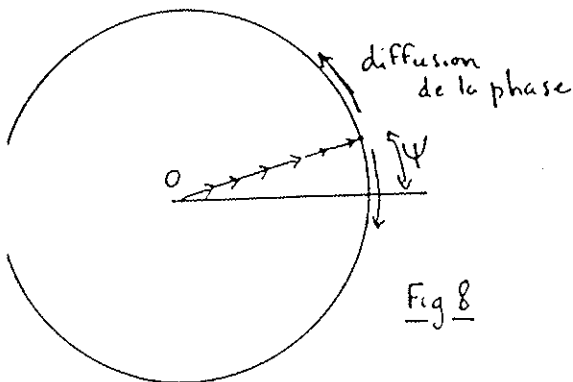
*iv) Caractère général du modèle de champ gaussien.*

Le modèle de champ gaussien quasi-monochromatique que nous venons de décrire est en fait une bonne description d'une grande variété de situations physiques où le champ observé est la somme de champs de fréquence bien définie, rayonnés par des sources élémentaires non corrélées. Le champ résulte alors d'une sommation de variables aléatoires indépendantes et obéit à une loi de probabilité gaussienne. C'est le cas d'une source d'atomes excités dans un gaz par une décharge électrique. Les atomes sont alors portés à des instants aléatoires par bombardement électronique dans un état excité, à partir duquel ils rayonnent, essentiellement par émission spontanée, en retombant vers leur état fondamental. Ils sont alors réexcités et le rayonnement observé résulte de la situation stationnaire atteinte par le système. Nous avons vu au Chapitre III qu'un atome dans un état propre de l'énergie a en général une valeur moyenne nulle du dipôle électrique. Si nous cherchons à nous représenter classiquement un ensemble de tels atomes, nous sommes donc conduits à les assimiler à des dipôles de phases aléatoires. Sur chaque dipôle, la phase change de façon également aléatoire à chaque fois que l'atome subit l'un des cycles excitation-rayonnement spontané décrit plus haut. On retrouve ainsi tous les ingrédients du modèle analysé plus haut: le champ rayonné est gaussien. Une source thermique (lampe à filament incandescent) vue

à travers un filtre en fréquence à bande passante étroite ( voir §IV-3 ci-dessous) produit également un champ qui est à une bonne approximation gaussien quasi-monochromatique. Il en est de même d'une source astronomique (soleil, étoile) vue à travers un filtre en fréquence.

*iv) Différence entre champ cohérent et champ gaussien*

Nous opposerons aux champs gaussiens les champs de sources cohérentes ( antennes radios, lasers...) dans lesquels les radiateurs élémentaires (électrons, atomes) ont leurs vibrations en phase. Dans de telles sources, il finit toujours par y avoir des fluctuations de phase, caractérisées par un temps de corrélation  $\tau_c$ , mais celles-ci affectent tous les oscillateurs ensemble. Ce caractère collectif des fluctuations change complètement les propriétés statistiques du rayonnement. La figure (8)



complexe, l'extrémité du vecteur  $Ae^{i\psi}$  étant à présent toujours à la distance  $NE_0$  de l'origine ( comparer à la Fig 4).

Après un temps long devant  $\tau_c$ , tous les oscillateurs élémentaires se retrouveront avec une même phase différant de

l'ancienne d'une même quantité aléatoire. Le champ sera alors représenté par un autre vecteur de même norme: il diffuse sur un cercle alors que le vecteur représentant un champ gaussien diffuse dans un plan. Les distributions statistiques des points représentant un ensemble de mesures du champ réparties sur un intervalle de temps long devant  $\tau_c$  sont donc très différentes dans le cas cohérent (fig 9a) et dans le cas gaussien ( fig 9b). Les fluctuations de phase d'un champ cohérent ne se répercutent pas sur son intensité, contrairement à ce qui se passe pour un champ gaussien. On a pour un champ cohérent:

$$\overline{I^n} = (\overline{I})^n \quad \text{et} \quad \Delta I = 0 \quad (\text{IV-13})$$

relations qui sont à opposer à (IV-11) et (IV-12). Nous verrons plus bas que d'autres propriétés statistiques des champs cohérents et des champs gaussiens sont également très différentes.



Fig 9

2) Fonction d'autocorrélation temporelle a deux temps

a) Corrélations d'amplitude (interférences ordinaires)

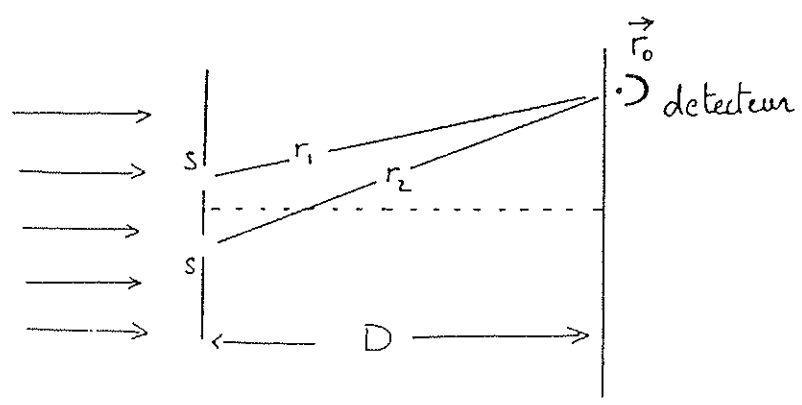


Fig 10

Les moyennes a un temps définies dans la section précédente ne sont en general pas suffisantes pour rendre compte d'expériences réalisées sur le champ. Considerons l'expérience des trous d'Young représentée sur la Fig 10: le champ, de temps de corrélation  $\tau_c$ , d'une source ponctuelle située à l'infini arrive sur un écran normal au plan d'onde percé de deux trous (de section  $s$  tres petite<sup>(\*)</sup>).  $r_1$  et  $r_2$  sont les distances des deux trous au point d'observation  $r_0$ , situe dans un plan a la distance  $D$  de l'écran. Le principe d'Huyghens montre que le champ en  $r_0$  est la somme des contributions correspondant a chacun des deux trous:

---

(\*) On suppose  $s \ll \lambda^2$ ; on peut alors négliger la différence de marche entre deux points d'un même trou et le point d'observation. L'intégrale d'Huyghens-Fresnel se réduit alors à la multiplication du champ par  $s$  (voir IV-14). Cette condition signifie aussi que la diffraction par un trou donne une onde éclairant quasi-uniformément l'écran: la visibilité des franges d'interférence ne sera pas limitée par la diffraction.

$$\begin{cases} E_1 = \frac{S}{i\lambda r_1} E_0(t - r_1/c) \\ E_2 = \frac{S}{i\lambda r_2} E_0(t - r_2/c) \end{cases} \quad (\text{IV-14})$$

Dans (IV-14),  $E_{ij}$  représente le champ en un point quelconque de l'écran percé, puisque la source ponctuelle à l'infini rayonne sur ce plan une onde plane. Le détecteur, s'il a un temps de réponse très supérieur à  $\tau_c$ , mesure au point  $r_{ij}$  l'intensité moyenne :

$$\overline{|E(\vec{r}_0, t)|^2} = \frac{S^2}{\lambda^2 D^2} \left[ \overline{|E_0(t - r_1/c)|^2} + \overline{|E_0(t - r_2/c)|^2} + 2\Re \left\{ \overline{E_0^*(t - r_1/c) E_0(t - r_2/c)} \right\} \right] \quad (\text{IV-15})$$

On a évidemment :

$$\overline{|E_0(t - r_1/c)|^2} = \overline{|E_0(t - r_2/c)|^2} = \bar{I} \quad (\text{IV-16})$$

Quant au dernier terme de (IV-15), il dépend de la moyenne du produit de la valeur du champ sur l'écran, à deux instants séparés de  $\tau = \frac{r_1 - r_2}{c}$ . Nous poserons de façon générale

$$g(\tau) = \overline{E^*(\vec{r}, t) E(\vec{r}, t - \tau)} = \frac{1}{T} \int_0^T E^*(\vec{r}, t) E(\vec{r}, t - \tau) dt \quad (T \gg \tau_c) \quad (\text{VI-17})$$

et nous appellerons cette moyenne à deux temps, qui ne dépend que de  $\tau$



(et non de  $t$ ), la fonction d'autocorrélation temporelle du champ électrique au point  $r$ . Nous omettrons quand il n'y a pas d'ambiguïté la mention de  $r$ . Remarquons que  $g(\tau)$  est a priori définie pour des valeurs positives et négatives de  $\tau$ .

Le dispositif constitué des deux trous et du détecteur réalise ainsi une mesure de la fonction d'autocorrélation temporelle du champ dans son plan d'entrée. Il en est de même de tous les interféromètres à deux ondes dont le principe est de dédoubler le champ en deux chemins optiques différents et de le recombinaer avec un retard variable entre les deux voies. Il est facile d'évaluer  $g(\tau)$  pour le type de source décrit au § précédent. On a

$$\overline{E^*(t) E(t-\tau)} = \sum_{i,j} \overline{\left\{ e^{i[\varphi_j(t-\tau) - \varphi_i(t)]} \right\}} E_0^2 e^{i\omega\tau} \quad (\text{IV-18})$$

A nouveau, nous séparons les contributions  $i=j$  de celles pour lesquelles  $i \neq j$ . Pour  $i \neq j$ , l'ensemble des termes donne zéro quel que soit  $\tau$ , car les phases des deux dipôles différents sont incorrélées<sup>(\*)</sup>. Reste à évaluer :

$$\sum_i \overline{e^{i[\varphi_i(t-\tau) - \varphi_i(t)]}} \quad (\text{IV-19})$$

Chaque dipôle donne dans cette somme une contribution égale à 1 s'il n'a pas subi de déphasage pendant le temps  $\tau$ . Sinon, il donne un terme à phase aléatoire et la somme sur les différents dipôles ayant été déphasés donne zéro. La fraction du nombre total de dipôles n'ayant pas subi de collision pendant le temps  $\tau$  est par définition  $\mathcal{N}(\tau)$  et la contribution totale des dipôles à la somme (IV-19) est donc  $\mathcal{N}(\tau)$ :

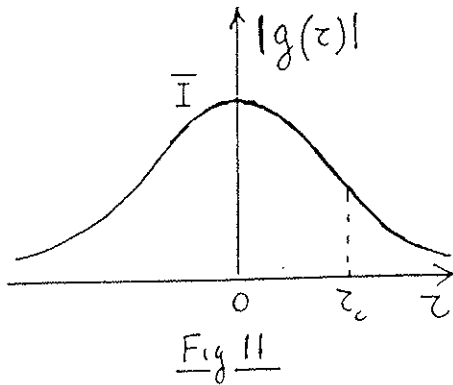
---

(\*) Cette hypothèse fondamentale de décorrélation entre dipôles élémentaires constituants n'est pas valable pour les sources cohérentes (lasers, antennes radioélectriques), ce qui explique leurs propriétés statistiques très différentes de celles des sources étudiées ici.

$$\sum_i \overline{e^{i[\varphi_1(t-\tau) - \varphi_1(t)]}} = \mathcal{N} \pi(|\tau|) \quad (\text{IV-20})$$

On notera que c'est la valeur absolue de  $\tau$  qui intervient dans (IV-20) puisque seule compte la probabilité pour qu'il n'y ait pas eu de déphasage d'un dipôle pendant le temps  $|\tau|$ , quel que soit le signe de  $\tau$ .  $g(\tau)$  apparaît ainsi comme une fonction complexe, oscillant à la fréquence de l'onde "porteuse" et dont le module est proportionnel à  $\pi(|\tau|)$ :

$$g(\tau) = \mathcal{N} E_0^2 e^{i\omega\tau} \pi(|\tau|) = \bar{I} e^{i\omega\tau} \pi(|\tau|) \quad (\text{IV-21})$$



Les variations de  $|g(\tau)|$ , fonction paire de  $\tau$ , traduisent ainsi celles de  $\pi(\tau)$  (voir Fig 11).  $g(0)$  est égal à l'intensité moyenne  $\bar{I}$  et  $|g(\tau)|$  tend vers zéro lorsque  $\tau$  tend vers l'infini. La largeur en temps de  $|g(\tau)|$  mesure le temps de corrélation du champ, ou encore son temps de mémoire de phase. En particulier, pour une loi  $\pi(\tau)$  exponentielle, on a :

$$g(\tau) = \bar{I} e^{i\omega\tau} e^{-|\tau|/\tau_c} \quad (\text{IV-22})$$

Nous pouvons pour cette fonction  $g(\tau)$  particulière expliciter le calcul du signal d'interférence dans l'expérience de Young :

$$\bar{I}(\vec{r}_0) = \frac{2S^2}{\lambda^2 D^2} \left[ \bar{I} + \bar{I} \cos \frac{\omega}{c} (r_1 - r_2) e^{-|r_1 - r_2|/c\tau_c} \right] \quad (\text{IV-23})$$

L'interfrange correspond à une différence de marche  $\delta r$  égale à la longueur

d'onde  $\lambda$ . Le domaine de visibilité des franges correspond lui à la longueur de cohérence  $\Delta r = c\tau_c$  (voir Fig 12). Un grand nombre de franges seront visibles si l'inégalité  $c\tau_c \gg \lambda$  est satisfaite, ce qui est bien sûr équivalent à la

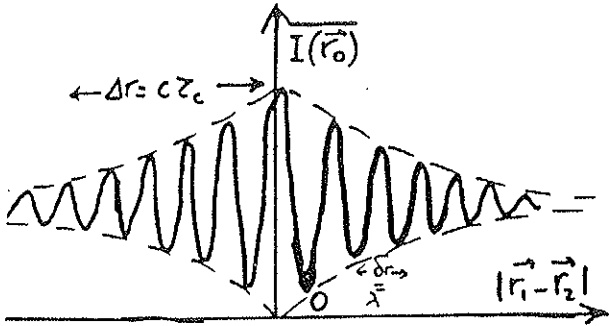


Fig 12

relation de quasi monochromaticité (IV-17). On notera que la disparition des franges pour  $|r_1 - r_2|$  grand a ici une origine différente de celle décrite au chapitre II: il ne s'agit pas d'un effet de diffraction puisque chaque trou éclaire

uniformément l'écran (voir note p 243), mais d'une perte de cohérence liée au temps de corrélation fini du champ.

Bien entendu, la définition (IV-17) de la fonction  $g(\tau)$  peut également s'interpréter comme la moyenne sur un ensemble de réalisations de la source du produit du champ à deux instants séparés par l'intervalle  $\tau$ .

b) Corrélation d'intensité (expérience d'Hanbury-Brown et Twiss)

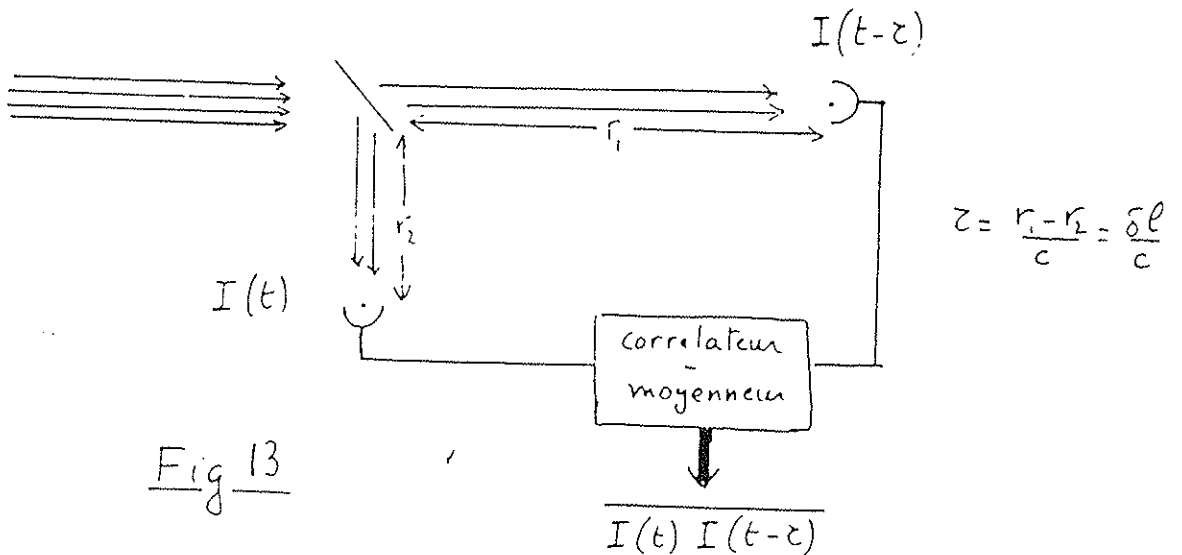


Fig 13

Considerons a present l'experience suivante ( Fig 13): le champ d'une source ponctuelle a l'infini est separe en deux par une lame semi-reflechissante transmettant la moitie de l'intensite dans chaque voie. On place un detecteur rapide (temps de reponse inferieur a  $\tau_c$ ) sur chaque faisceau. La difference  $\delta l$  des distances des deux detecteurs a la lame separatrice introduit un retard variable  $\tau = \delta l / c$  entre les instants de detection de l'intensite sur les deux voies. Un correlateur electronique fait le produit des deux intensites mesurees et un moyeneur en prend la moyenne sur un temps  $t \gg \tau_c$ . Dans cette experience, tout se passe comme si l'on mesurait en fait dans le plan d'entree de l'appareil ( la lame separatrice) la moyenne  $\overline{I(t)I(t-\tau)}$  du produit de l'intensite a deux instants separees par l'interval de temps  $\tau$ .

Evaluons cette nouvelle fonction d'autocorrelation pour notre modele de source :

$$\begin{aligned} \overline{I(t)I(t-\tau)} &= \overline{E^*(t) E^*(t-\tau) E(t-\tau) E(t)} \\ &= E_0^4 \sum_{i,j,k,\ell} \overline{e^{-i\varphi_i(t)} e^{-i\varphi_j(t-\tau)} e^{i\varphi_k(t-\tau)} e^{i\varphi_\ell(t)}} \quad (\text{IV-24}) \\ &\quad \times e^{i\omega t} e^{i\omega(t-\tau)} e^{-i\omega(t-\tau)} e^{-i\omega t} \end{aligned}$$

Il existe deux types de termes non nuls dans la somme precedente :

(i) Si  $i=l$  et  $j=k$ , la moyenne du produit d'exponentielles vaut 1 dans chaque produit. Il y a  $N^2$  termes de ce type. La contribution de ces termes est donc  $N^2 E_0^4 = (\bar{I})^2$ .

(ii) Si  $i=k$  et  $j=l$ , on a  $N^2$  termes du type :

$$\overline{e^{i[\varphi_i(t-\tau) - \varphi_i(t)]}} \times \overline{e^{i[\varphi_j(t) - \varphi_j(t-\tau)]}} \quad (\text{IV-25})$$

valant chacun en moyenne  $\pi^2(|\tau|)$  (même raisonnement qu'au § IV-2a).

Tous les autres termes de (IV-24) correspondent manifestement à une moyenne nulle. D'où pour un tel champ gaussien :

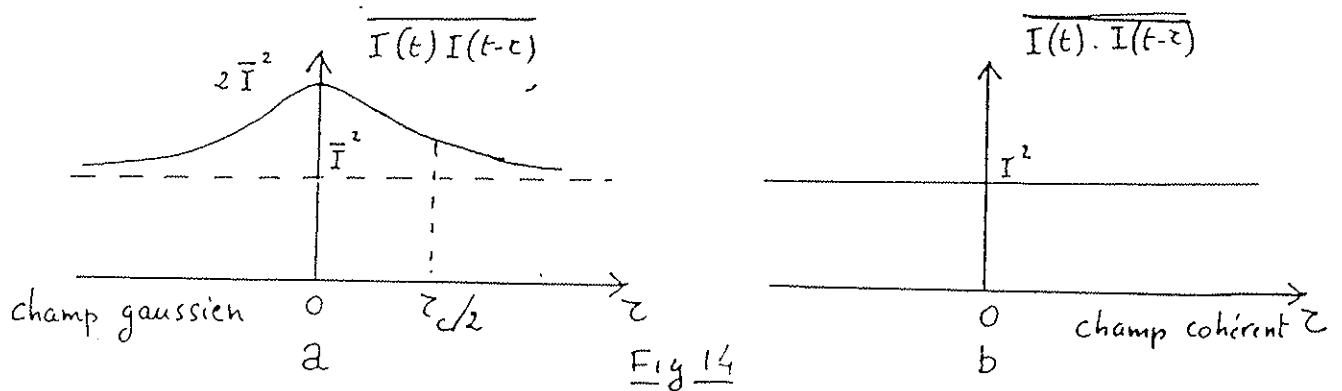
$$\overline{I(t) I(t-\tau)} = (\bar{I})^2 + |g(\tau)|^2 \quad (\text{IV-26})$$

Dans le cas particulier d'une loi de probabilité  $\pi(\tau) = e^{-\tau/\tau_c}$  (IV-26)

devient:

$$\overline{I(t) I(t-\tau)} = (\bar{I})^2 \left[ 1 + e^{-2|\tau|/\tau_c} \right] \quad (\text{IV-27})$$

La fonction de corrélation  $\overline{I(t)I(t-\tau)}$  a dans ce cas une "largeur"  $\tau_c/2$ . De façon générale, l'intensité d'un champ gaussien a un temps de corrélation environ deux fois plus court que le champ électrique lui-même (Fig 14a)



L'allure générale de la fonction de corrélation temporelle d'intensité se comprend bien intuitivement: à  $\tau = 0$ , on retrouve simplement la valeur  $\overline{I^2}$  qui pour un champ gaussien vaut  $2(\bar{I})^2$  (voir équ IV-11); aux temps  $\tau$  longs par contre, la corrélation entre les deux mesures de l'intensité a totalement disparu et  $\overline{I(t)I(t-\tau)}$  est simplement égal à  $(\bar{I})^2$ . Le passage entre ces deux valeurs s'effectue bien sûr sur un intervalle de l'ordre de  $\tau_c/2$ . Lorsque l'on mesure l'intensité à deux instants très rapprochés, on obtient à chaque fluctuation positive du champ une contribution au produit beaucoup plus

(\*) Ceci ne serait pas vrai pour un champ cohérent, rayonné par un laser ou une antenne radio. Voir note page 245.

importante que le carré de la valeur moyenne de l'intensité et c'est ce qui explique l'existence d'un maximum de  $\overline{I(t)I(t-\tau)}$  pour  $\tau=0$ . Cet effet est d'ailleurs beaucoup plus marqué si on calcule des fonctions de corrélation d'ordre plus élevé, faisant intervenir des puissances plus grandes de  $I$  (manifestations du terme  $n!$  dans les équations (IV-11)). Notons le comportement très différent d'un champ cohérent dont les valeurs moyennes des intensités obéissent aux équations (IV-13) et pour lequel  $\overline{I(t)I(t-\tau)}$  est une fonction constante égale à  $(\bar{I})^2$  (Fig 14b).

On peut donc aussi bien mesurer le temps de corrélation d'un champ *gaussien* par une expérience d'interférence ordinaire que par une expérience de corrélation d'intensité (Hanbury-Brown et Twiss). Dans ce cas, il faut disposer de deux détecteurs rapides identiques de temps de corrélation inférieur à  $\tau_c$  (ce qui n'est pratiquement possible que pour  $\tau_c > 10^{-9}$  s).

En général les expériences de corrélation d'intensité de ce type sont effectuées sur des champs d'intensité très faible, la lumière d'une étoile par exemple (voir § IV-4). Dans ce cas, on utilise des photomultiplicateurs et le signal qu'ils détectent correspond à une arrivée discrète de photons (photoelectrons). Il conviendrait pour analyser en détail une telle expérience de quantifier le champ. On peut cependant raisonner par analogie et comprendre qualitativement une telle expérience de "comptage de photons" à la lumière de l'analyse développée plus haut: la figure 15 représente en fonction du temps des signaux détectés sur les deux voies pour un retard  $\tau$  petit (fig 15 a) ou grand (fig 15 b) par rapport à  $\tau_c/2$ . Le

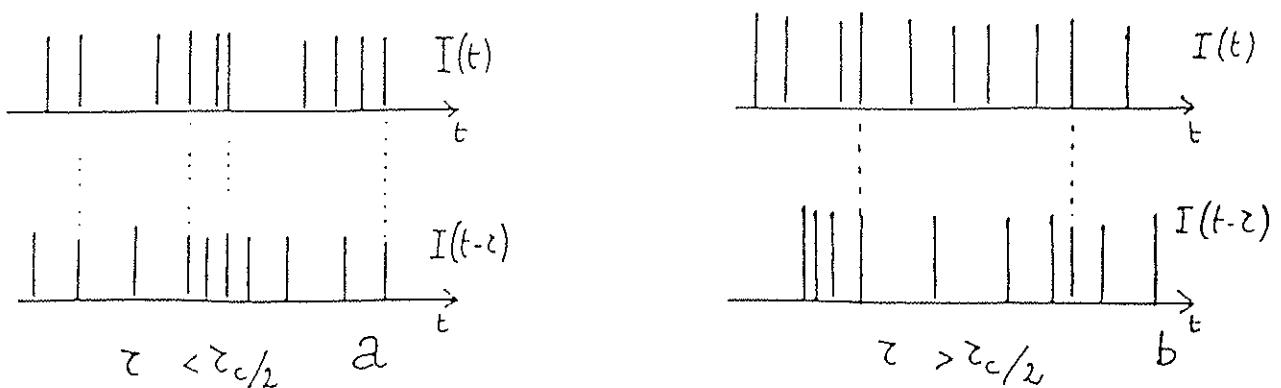


Fig 15

nombre moyen d'impulsions, le même dans chaque voie, mesure l'intensité moyenne du rayonnement. On peut ainsi relier cette intensité à la probabilité moyenne  $P$  de détecter un photon par unité de temps. Le signal de corrélation temporelle s'obtient "naivement" en effectuant pour chaque valeur de  $\tau$  le produit des deux "peignes" d'impulsions. La valeur du résultat dépend donc de la coïncidence des arrivées des photons dans les deux voies. On s'attend donc, pour une source incohérente à observer plus de coïncidences dans le cas  $\tau < \tau_c/2$  que dans le cas  $\tau > \tau_c/2$ . Dire qu'il y a un maximum de la corrélation d'intensité sur un intervalle  $\tau_c/2$  autour de  $\tau = 0$  revient à dire que lorsqu'un photon arrive sur la lame d'entrée de l'appareil et qu'il est "aiguillé" aléatoirement dans une des deux voies, il y a pendant un temps de l'ordre de  $\tau_c$  une probabilité par unité de temps plus grande que  $P$  qu'un autre photon arrive également sur la lame (et soit aiguillé dans l'autre voie). Comme la lame elle-même répartit aléatoirement les photons vers les deux détecteurs, la conclusion immédiate est que les photons ont tendance à arriver "groupés" sur la lame séparatrice. En fait, l'expérience que l'on effectue est une expérience de comptage en coïncidence: l'arrivée d'un photon sur une voie déclenche une horloge et l'on mesure le temps d'arrivée du premier photon qui suit sur l'autre voie. On répète la mesure un grand nombre de fois et l'on peut alors reconstruire la probabilité conditionnelle pour qu'un photon arrive un instant  $\tau$  après qu'un photon ait été détecté. Cette probabilité conditionnelle présente un maximum autour de  $\tau = 0$ , sur un intervalle de l'ordre de  $\tau_c$ . Cette propriété de groupement des photons ("bunching" en anglais) est une caractéristique des champs gaussiens. On peut en effet faire la même expérience avec le faisceau cohérent d'un laser atténué de façon à ce que les photons arrivent un à un sur la lame. On observe alors

une probabilité conditionnelle constante, qui reflète le comportement de la fonction de corrélation classique de l'intensité pour ce champ (Fig 14b). Ainsi, le caractère cohérent ou incohérent d'un champ se manifeste également dans la statistique des temps d'arrivée de ses photons. Insistons enfin sur l'origine fondamentalement classique de l'effet de groupement: il reflète simplement, à la limite des champs très faible, l'existence de fluctuations positives de l'intensité instantanée du champ gaussien.

### 3°) Fonction de corrélation temporelle et densité spectrale : théorème de Wiener-Khintchine

Nous allons nous intéresser à présent à une nouvelle fonction, le spectre du rayonnement et établir une relation importante entre ce qu'on appelle la densité spectrale du rayonnement et sa fonction de corrélation temporelle  $g(\tau)$ . Poursuivant la méthode employée dans ce Chapitre, nous associerons aux objets mathématiques introduits la description d'un système expérimental simple permettant de les mesurer. Pour le spectre, il s'agit du filtre linéaire monochromatique.

#### a) Definition du spectre analyse de Fourier de la dependance temporelle du rayonnement

Introduisons la transformée de Fourier  $\bar{E}(\vec{r}, \nu)$  du champ  $E(\vec{r}, t)$ :

$$\bar{E}(\vec{r}, \nu) = \frac{1}{2\pi} \int E(\vec{r}, t) e^{i\nu t} dt \quad (\text{IV-28})$$

la relation de Fourier inverse ( décomposition de Fourier du champ) s'écrivant:



$$E(\vec{r}, t) = \int \underline{E}(\nu) e^{-i\nu t} d\nu \quad (\text{IV-29})$$

Si  $E(t)$  est une fonction aléatoire, il en est bien sûr de même de  $\underline{E}(\nu)$ .

(Note : nous écrivons  $\nu$  au lieu de  $\omega$  pour la pulsation, car nous réservons  $\omega$  pour la fréquence fixée de la "porteuse" du champ incohérent; nous omettrons dans la suite la mention de  $r$  dans l'expression de la T.F)

Il y a une difficulté mathématique à la définition (IV-28): si  $E(t)$  est non bornée dans le temps,  $\underline{E}(\nu)$  n'est mathématiquement pas définie.

En fait, pratiquement,  $E(t)$  est toujours borné dans un intervalle  $-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}$  correspondant au temps de mesure ou d'interaction du champ avec les appareils. On définira donc un champ "physique"  $E_T(t)$ , obtenu en tronquant  $E(t)$  dans l'intervalle  $-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}$  et on écrira :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{E}_T(\nu) = \frac{1}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} E(t) e^{i\nu t} dt \\ E_T(t) = \int \underline{E}_T(\nu) e^{-i\nu t} d\nu \end{array} \right. \quad (\text{IV-30})$$

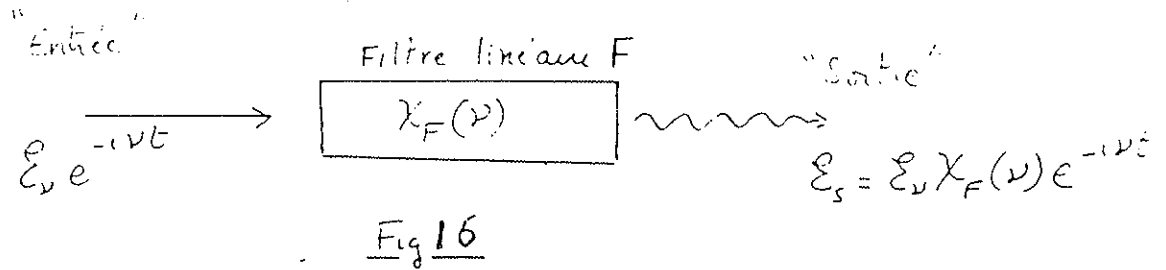
$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{E}_T(\nu) = \frac{1}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} E(t) e^{i\nu t} dt \\ E_T(t) = \int \underline{E}_T(\nu) e^{-i\nu t} d\nu \end{array} \right. \quad (\text{IV-31})$$

La fonction  $J(\nu)$  définie par:

$$J(\nu) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left( \frac{2\pi}{T} \underline{E}_T^*(\nu) \underline{E}_T(\nu) \right) \quad (\text{IV-32})$$

s'appelle la densité spectrale du rayonnement. Nous allons montrer qu'il s'agit d'une quantité certaine (non aléatoire). Nous allons indiquer aussi comment on mesure pratiquement  $J(\nu)$  et établir sa relation à  $g(\tau)$ .

#### b) Le filtre linéaire monochromatique



Nous appellerons filtre lineaire un dispositif F qui "repond" lineairement au champ appliqué (Fig 16). Nous supposerons qu'il fait correspondre a un champ monochromatique  $E_{\nu} e^{-i\nu t}$  "entrant" un "signal de sortie :

$$E_s = E_{\nu} \chi_F(\nu) e^{-i\nu t} \quad (\text{IV-33})$$

ou  $\chi_F(\nu)$  est par définition la fonction de réponse complexe du filtre. Notons l'analogie avec la reponse lineaire d'un système atomique ou  $E_s$  est remplacé par le dipôle induit et la fonction de reponse  $\chi$  par la polarisabilite  $\alpha$ . Le caractère complexe de  $\chi_F(\nu)$  tient compte du déphasage existant generalement entre l'"entrée" et la "sortie". On montre de façon generale qu'il existe entre les fonctions partie réelle et imaginaire de  $\chi_F(\nu)$  une relation exprimant le principe de causalite ( relation de Kramers-Kronig qui manifeste essentiellement le fait que le filtre ne peut "repondre" avant d'avoir été excité , voir chapitre V)

La linearite du filtre fait qu'au champ (IV-31) correspond la reponse:

$$E_s(t) = \int E_{\nu}(\nu) \chi_F(\nu) e^{-i\nu t} d\nu \quad (\text{IV-34})$$

(Remarque : Choisissons pour  $E(t)$  une percussion (fonction  $\delta$ ) en  $t=0$ .  $E(\nu)$  est alors une constante et (IV-34) montre que la "reponse" percussionnelle est la transformee de Fourier de la fonction de reponse du filtre).

Plaçons maintenant un détecteur après le filtre et calculons l'intensité moyenne qu'il mesure.

$$\overline{E_s^*(t) E_s(t)} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt \iint d\nu d\nu' \mathcal{E}_T^*(\nu) \mathcal{E}_T(\nu') \chi_F^*(\nu) \chi_F(\nu') e^{i(\nu-\nu')t} \quad (\text{IV-35})$$

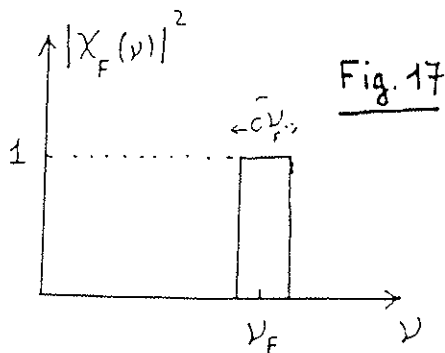
L'intégrale sur  $t$  dans (IV-35) s'écrit :

$$\int_{-T/2}^{T/2} dt e^{i(\nu-\nu')t} = \frac{\sin(\nu-\nu') T/2}{(\nu-\nu') / 2} \quad (\text{IV-36})$$

Il s'agit d'une fonction de diffraction d'intégrale égale à  $2\pi$ , qui a une largeur  $2\pi/T$  tendant vers zéro lorsque  $T$  tend vers l'infini. On l'assimilera donc pour  $T$  grand à  $2\pi\delta(\nu-\nu')$ .

Donc :

$$\overline{I_s(t)} = \overline{E_s^*(t) E_s(t)} = \frac{2\pi}{T} \int d\nu |\mathcal{E}_T(\nu)|^2 |\chi_F(\nu)|^2 \quad (\text{IV-37})$$



Choisissons un filtre linéaire ayant une fonction de réponse dont le carré du module est un creneau de largeur  $\Delta\nu_F$  autour d'une valeur centrale  $\nu_F$  (Fig 17). On aura pour un tel filtre :

$$\overline{I_s} = \frac{2\pi}{T} |\mathcal{E}_T(\nu_F)|^2 \Delta\nu_F \quad (\text{IV-38})$$

Il n'est à la limite ou  $T$  est très grand autre que la densité spectrale  $J(\nu)$  définie en (IV-32), multipliée par la largeur du filtre.

$|v|$  étant définie ici comme une valeur moyenne est bien sûr une fonction certaine ou tout aspect aléatoire a disparu.

**Remarque :** Que signifie physiquement  $T$  grand ? Il faut que la fonction de diffraction (IV-36) soit assimilable à une fonction  $\delta$ , de "largeur" très inférieure à celle de  $|\chi_F(v)|^2$ , soit :

$$\frac{2\pi}{T} \ll \delta \nu_f \quad \text{ou encore} \quad T > 2\pi/\delta \nu_f$$

La mesure doit donc durer suffisamment longtemps pour ne pas limiter la précision définie par la largeur du filtre (on peut faire le lien avec les relations d'incertitude!).

Il existe une relation simple entre l'intégrale sur  $\nu$  de  $J(\nu)$  et la moyenne sur le temps de  $|E(t)|^2$ , qui n'est autre que l'expression de la relation de Parseval-Plancherel (conservation de la norme par TF):

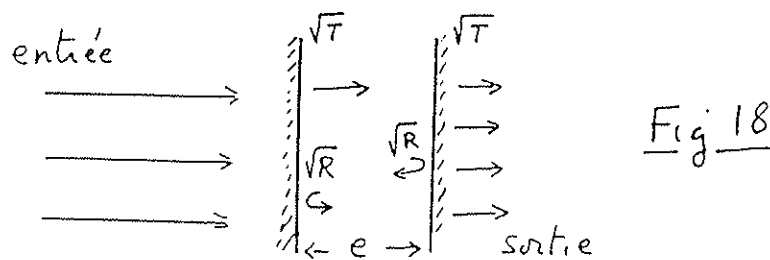
$$\int J(\nu) d\nu = \lim_{(T \rightarrow \infty)} \left\{ \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |E(t)|^2 dt \right\} = \overline{|E(t)|^2} \quad (\text{IV-39})$$

Cette relation sobtient d'ailleurs de façon évidente comme cas particulier de (IV-37) en prenant comme filtre particulier l'opération identité (filtre "blanc" de fonction de réponse  $\chi_F(\nu)=1$ ). On a alors  $E_S(t) = E(t)$  et (IV-37) n'est autre que (IV-39) dans ce cas. Cette relation donne une interprétation simple à  $J(\nu)$ : l'énergie contenue dans le champ, proportionnelle à  $\overline{|E(t)|^2}$ , se trouve répartie en fréquence suivant la distribution  $J(\nu)$ . On voit également d'après cette formule que  $J(\nu)$  est homogène au carré du champ divisé par une fréquence. La quantité

$$S(\nu) = (\epsilon_0 c / 2) J(\nu) \quad (\text{IV-40})$$

s'exprime donc en Watt (m<sup>-2</sup>) (Hz)<sup>-1</sup>. Elle représente la densité spectrale de la norme du vecteur de Poynting du rayonnement.

Terminons ce paragraphe par la description d'un modèle simple de filtre linéaire monochromatique, l'étalon Fabry-Perot (Fig 18) On considère deux lames partiellement réfléchissantes, de coefficient de réflexion R et de transmission T pour les intensités,  $\sqrt{R}$  et  $\sqrt{T}$  pour les amplitudes et d'épaisseur e, introduisant un déphasage aller-retour  $\phi = \frac{2e\nu}{c}$ . On suppose enfin qu'il n'y a pas de pertes (T + R = 1).



Le champ à la sortie correspondant à une onde incidente monochromatique de pulsation  $\nu$  s'écrit :

$$E_s = E_0 T [ 1 + R e^{i\phi} + R^2 e^{2i\phi} + \dots ] = E_0 \frac{T}{1 - R e^{2i\phi} e^{i\nu/c}}$$

La fonction de réponse complexe du filtre est donc :

$$x_f(\nu) = \frac{T}{1 - R e^{2i\phi} e^{i\nu/c}} \quad (\text{IV-41})$$

et le carré de son module vaut:

$$|x_f(\nu)|^2 = \frac{(1-R)^2}{1+R^2-2R\cos(2e\nu/c)} = \frac{1}{1 + \frac{4R}{(1-R)^2} \sin^2(e\nu/c)} \quad (\text{IV-42})$$

Le filtre est donc résonnant pour:

$$\sin \frac{e\nu}{c} = 0 \quad \rightarrow \quad \nu_m = m \frac{\pi c}{e} \quad (\text{IV-43})$$

La largeur des résonances  $\delta\nu_f$  est telle que:

$$\frac{e\delta\nu_f}{2c} \sim \frac{1-R}{2} \quad (\text{IV-44})$$

soit:

$$\delta\nu_f = (1-R) \frac{c}{e} \quad (\text{IV-45})$$

Plus  $1-R$  est proche de zero, plus le filtre est "fin". La Fig 19a représente la fonction  $|\chi_f(\nu)|^2$  de ce filtre. Pour obtenir un pic unique et un filtre monochromatique, il suffit d'empiler deux étalons Fabry-Perot d'épaisseur  $e$  et  $e'$ . En réglant convenablement les épaisseurs, on peut s'arranger pour que l'ensemble ne laisse passer qu'une composante de fréquence (Fig 19b). On peut ensuite balayer cette fréquence (en changeant  $e$  et  $e'$ , en modifiant l'indice du milieu entre les miroirs etc...). En plaçant derrière ce filtre un détecteur, on dispose ainsi d'un système conceptuellement très simple pour mesurer  $I(\nu)$ . C'est sur ce principe que fonctionne toute une classe de monochromateurs.

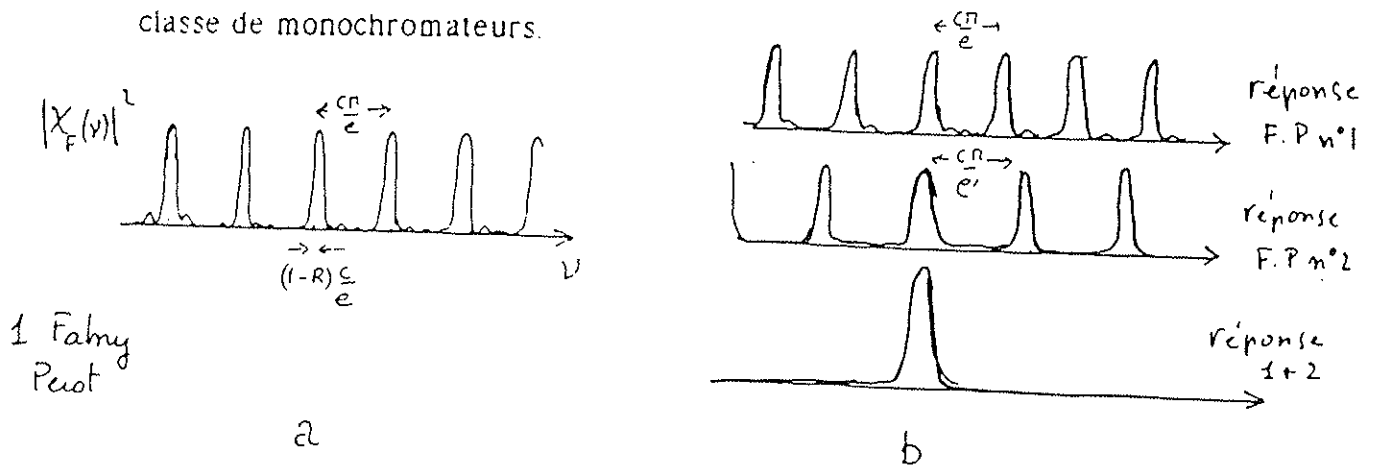


Fig 19

c) Lien entre  $g(\tau)$  et  $J(\nu)$  : théorème de Wiener-Khinchine

Nous sommes maintenant en mesure d'établir un lien simple entre  $J(\nu)$  et  $g(\tau)$ . On a :

$$g(\tau) = \overline{E^*(t) E(t-\tau)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \overline{E_T^*(t) E_T(t-\tau)}$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt \int_{\tau} \mathcal{E}_T^*(\nu) \mathcal{E}_T(\nu') e^{i(\nu-\nu')t} e^{i\nu'\tau} d\nu d\nu' \right\} \quad (\text{IV-46})$$

Remplaçons à nouveau l'intégrale sur  $t$  dans (IV-46) par  $2\pi\delta(\nu-\nu')$ . On trouve :

$$g(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \frac{2\pi}{T} \int |\mathcal{E}_T(\nu)|^2 e^{i\nu\tau} d\nu \right\} \quad (\text{IV-47})$$

$$= \int J(\nu) e^{i\nu\tau} d\nu$$

Soit en inversant :  $J(\nu) = \frac{1}{2\pi} \int g(\tau) e^{-i\nu\tau} d\tau$  (IV-48)

Fonction de corrélation et densité spectrale sont donc TF l'une de l'autre.

$g(\tau)$  ayant une "largeur"  $\tau_c$ , on en déduit que  $J(\nu)$  a une largeur en  $\nu$  de l'ordre de  $1/\tau_c$ . La largeur spectrale d'un champ est donc l'inverse du temps de corrélation de sa phase. Tous les résultats établis dans ce paragraphe sont très généraux et ne dépendent pas des propriétés statistiques du champ étudié. Ils sont donc valables aussi bien pour un champ cohérent que pour un champ gaussien. Dans le cas particulier d'un champ à fonction de corrélation exponentielle (équ IV-22), on obtient pour  $J(\nu)$ :

$$J(\nu) = \frac{\overline{I}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\omega-\nu)\tau} e^{-|\tau|/\tau_c} d\tau$$

$$\frac{\overline{I}}{\pi\tau_c} \quad (\text{IV-49})$$

$$= \frac{1}{(\omega-\nu)^2 + \frac{1}{\tau_c^2}}$$

La densité spectrale est alors une fonction Lorentzienne de largeur à mi-hauteur  $2/\tau_c$ , centrée en  $\nu = \omega$ . (voir Fig 20).

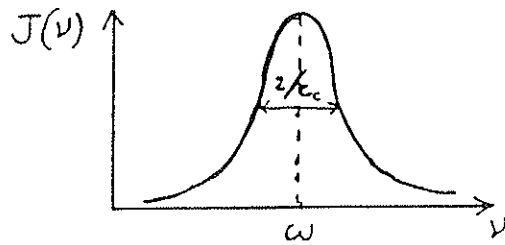


Fig 20

Insistons en conclusion sur la complémentarité des approches temporelle et spectrale : temps de corrélation court signifie spectre large et inversement. Un filtre interférentiel qui sélectionne une composante spectrale étroite "lisse" en même temps les fluctuations et allonge le temps de corrélation du champ (voir Fig 21). Le mécanisme de "lissage" des fluctuations est d'ailleurs facile à comprendre dans le cas du filtre Fabry-Perot agissant sur un champ gaussien: supposons qu'une fluctuation rapide du champ arrive sur l'étalon. Au cours des réflexions successives entre les deux lames, cette fluctuation va se trouver "repliée" sur elle-même et donc allongée dans le temps, conduisant à un signal de sortie beaucoup plus lisse. L'étalon résonnant se comporte ainsi à la manière d'une cloche qui allonge une percussion brève en un son très long, filtrant les composantes rapides des vibrations qui l'excitent.

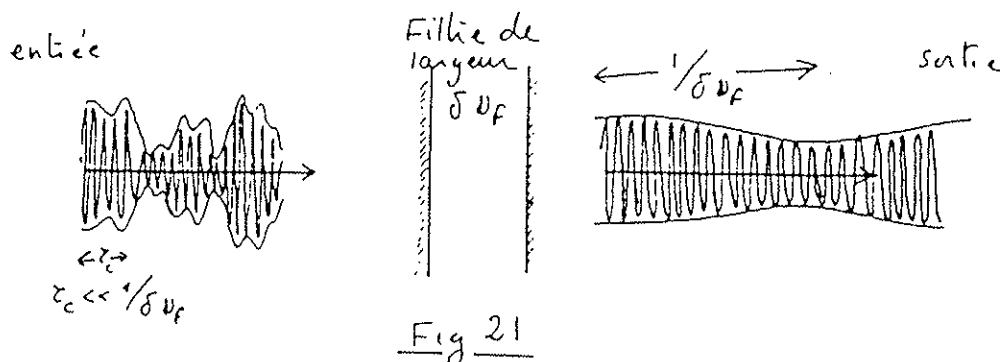


Fig 21



d) Description qualitative du spectre de quelques champs gaussiens simples

Etudions maintenant brièvement le spectre de quelques types simples de sources incohérentes:

(i) *Source constituée par des atomes immobiles rayonnant par émission spontanée sur une transition atomique  $i \rightarrow f$  entre deux niveaux d'énergie  $i$  et  $f$ .* Nous avons décrit une telle source au § IV-1. Chaque atome émet une succession de "trains d'onde" incorrélés entre eux et à un instant donné, les champs émis par deux atomes différents n'ont pas de relation de phase entre eux. La probabilité pour qu'un atome donné reste excité pendant un temps  $\tau$  avant d'émettre un photon est  $\exp(-\tau/\tau_{fi})$ , où  $\tau_{fi}$  est par définition la durée de vie radiative du niveau. Il est alors logique d'admettre, ce qu'une analyse quantique du problème confirme, que  $\tau_{fi}$  représente le temps de corrélation de l'intensité du champ émis par la source. Le temps de corrélation du champ lui-même est alors  $2\tau_{fi}$  et la fonction d'autocorrélation temporelle du champ est:

$$g(\tau) = \exp(i\omega_{if}\tau) \exp(-|\tau|/2\tau_{fi}) \quad (\text{IV-50})$$

Le spectre est alors une fonction de Lorentz du type (IV-49), de largeur  $\Delta\nu = 1/\tau_{fi}$ , centrée à la fréquence atomique  $\omega = \omega_{if}$  (fréquence de Bohr de la transition). Les "fréquences indiquées ici sont en fait des pulsations (voir

définition de  $\nu$ ). La largeur en Hertz du spectre d'émission spontanée est donc:

$$\Delta\nu / 2\pi = 1/(2\pi\tau_i) \quad (\text{IV-51})$$

$\Delta\nu / 2\pi$  est appelé largeur naturelle de la transition atomique. Il s'agit de la largeur minimum que peut avoir le spectre d'une source fonctionnant sur la transition atomique en question. Le temps de corrélation est alors déterminé en effet par le processus de rayonnement lui même, qui est responsable de la durée de vie finie du niveau excité qui rayonne. Dans le cas d'une lampe spectrale à atomes de Sodium fonctionnant sur la raie de résonance optique (transition  $3p-3s$  à une longueur d'onde de 5890Å), la durée de vie du niveau  $3p$  est  $16 \cdot 10^{-9}$ s et la largeur naturelle vaut 10 MHz. En fait la raie jaune d'émission d'une telle lampe est en général beaucoup plus large car, comme nous l'analysons ci-dessous, d'autres causes de perturbations interrompent la phase d'oscillation des atomes plus vite que ne le fait l'émission des photons.

(ii) *source formée par des atomes subissant des collisions dans un gaz* Supposons à présent que les atomes dans un gaz subissent des collisions entre eux ou avec d'autres particules (électrons dans une décharge). Ces collisions ont comme nous l'avons vu au §IV-1 pour effet d'interrompre la phase d'oscillation de chaque atome et sont responsables

d'un processus de perte de mémoire de phase obéissant encore à une loi de probabilité exponentielle. Si le temps de collision  $\tau_c = l/v$  est plus court que  $\tau_{ri}$ , la raie va être élargie par les collisions. La forme de raie reste Lorentzienne, mais sa largeur devient  $\Delta\nu_{col}/2\pi = v/2\pi l$ . Dans une lampe à sodium à forte pression, ce sont les collisions qui élargissent principalement la raie, dont la largeur peut typiquement atteindre  $10^{11}$  à  $10^{12}$  Hz, c'est à dire quatre à cinq ordres de grandeur de plus que la largeur naturelle.

(iii) *Source formée d'atomes en mouvement sans collisions.* Nous avons jusqu'ici négligé une autre cause importante de largeur spectrale: l'effet Doppler. Si un atome est en mouvement dans un gaz, le champ qu'il rayonne vers un observateur immobile a une fréquence  $\omega_i(1+v/c)$  ( $v$  est la projection algébrique de la vitesse atomique sur la droite reliant l'atome au point d'observation). Nous retrouverons ce résultat élémentaire bien connu au §IV-6. Il en résulte qu'un gaz formé d'atomes en agitation thermique à la température  $T$  est en fait la superposition incohérente de sources de fréquences différentes, distribuées sur un intervalle de fréquence  $\Delta\nu_{Dop} \approx \bar{v}/c$ , où  $\bar{v} = \sqrt{k_B T/M}$  est la vitesse quadratique moyenne des atomes <sup>dans une direction</sup> ( $k_B$  est la constante de Boltzmann et  $M$  la masse de l'atome). Les largeurs Doppler typiques sont de l'ordre de  $10^9$  à  $10^{10}$  Hz. La forme de la raie Doppler n'est pas Lorentzienne, mais Gaussienne puisque la distribution des vitesses dans un gaz est elle-même une fonction Gaussienne de la vitesse. L'effet Doppler est la cause prépondérante de largeur des raies d'émission spectrales pour des lampes à sodium basse pression. À haute pression, l'effet des collisions domine (comparer les ordres de grandeur  $\Delta\nu_{Dop}$  et  $\Delta\nu_{col}$  mentionnés plus haut), ce qui explique que nous avons pu dans notre analyse de l'effet des collisions envisager une situation où l'on néglige en première approximation l'effet Doppler. Dans les cas intermédiaires où plusieurs causes de déphasage atomique sont du même ordre de grandeur,

L'analyse de la forme de raie est plus complexe ( les raies peuvent avoir une forme convoluée de Lorentzienne et de Gaussienne appelée profil de Voigt).

*Remarque: le terme de Gaussien donné aux champs étudiés dans ce chapitre fait référence à la loi de distribution de l'intensité du champ et non à la forme de son profil spectral. Nous avons vu sur les exemples qui précèdent qu'un champ Gaussien peut avoir un spectre Lorentzien, ou Gaussien, ou autre. Réciproquement, un champ peut avoir un spectre à profil Gaussien sans être Gaussien au sens statistique où nous l'avons défini.*

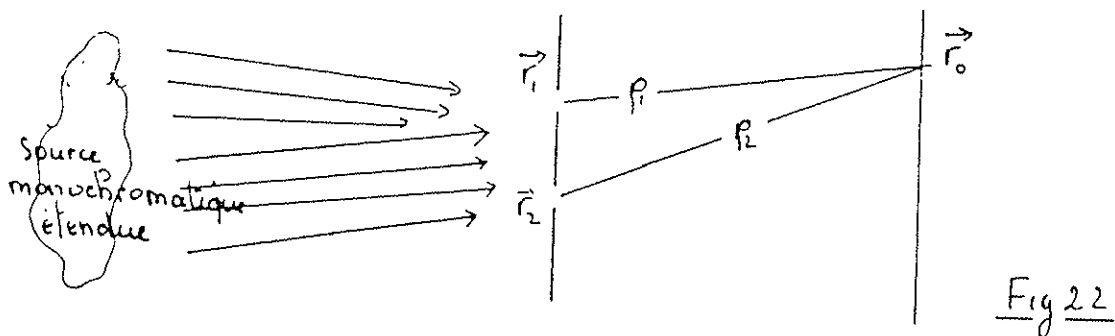
#### 4\*) Corrélation spatiale du champ et distribution angulaire d'une source étendue. Corrélation spatio-temporelle.

Nous avons jusqu'ici calculé les corrélations temporelles du champ en un point. En explicitant les coordonnées d'espace, nous aurions dû noter en fait  $g(t) = E^*(r,t)E(r,t-\tau)$  et de même remplacer la notation condensée  $I(t)I(t-\tau)$  par  $I(r,t)I(r,t-\tau)$ . En fait, la plupart des expériences d'interférence mesurent le produit des valeurs du champ en deux points d'espace et de temps différent. C'est d'ailleurs le cas des deux expériences décrites plus haut (Young et Hanbury-Brown et Twiss). Ce n'est que parce que nous avons considéré le cas particulier où l'onde étudiée a une structure géométrique d'onde plane (elle est rayonnée par un point source à l'infini) que nous avons pu formellement assimiler le champ en deux points du même plan d'onde ( le plan d'entrée de l'interféromètre)

au champ en un même point  $r$  et considérer le dispositif de dédoublement des ondes comme un pur dispositif de retard temporel.

Dans les cas réels intéressants, l'onde n'est pas rigoureusement plane (la source est étendue) et l'expression de produits de la forme  $E^*(r_1, t_1)E(r_2, t_2)$  fait intervenir le concept de cohérence spatio-temporelle, plus général que le concept de cohérence temporelle pure. Ce concept est important pour les problèmes d'interférence et d'imagerie en Astronomie. Nous n'en donnerons ici qu'un aperçu simple.

Pour bien séparer le concept de corrélation spatiale de celui de corrélation temporelle, nous envisagerons pour commencer le cas d'un champ provenant d'une source étendue, mais monochromatique, (en pratique de temps de corrélation tel que  $\tau_c$  est beaucoup plus long que la différence de marche de l'interféromètre utilisé) et montrerons que c'est alors la corrélation spatiale, de la forme  $\overline{E^*(r_1, t)E(r_2, t)}$  ou  $\overline{I(r_1, t)I(r_2, t)}$  qui caractérise le processus d'interférence.



Revenons pour commencer au problème des trous d'Young avec ce champ (Fig 22). Appelons  $r_1$  et  $r_2$  la position des trous et  $r_0$  le point d'observation sur l'écran, aux distances  $p_1$  ( $p_2$ ) des trous. On a d'après le principe d'Huyghens, à un facteur numérique près :

$$\overline{I(\vec{r}_0, t)} = \overline{I(\vec{r}_1, t - \frac{p_1}{c})} + \overline{I(\vec{r}_2, t - \frac{p_2}{c})} + 2\text{Re} \overline{E^*(\vec{r}_1, t - \frac{p_1}{c}) E(\vec{r}_2, t - \frac{p_2}{c})} \quad (\text{IV-52})$$

Le champ étant maintenant monochromatique, on a de plus :

$$\begin{cases} E^*(\vec{r}_1, t - \frac{p_1}{c}) = E^*(\vec{r}_1, t) e^{-i\omega p_1/c} \\ E(\vec{r}_2, t - \frac{p_2}{c}) = E(\vec{r}_2, t) e^{+i\omega p_2/c} \end{cases} \quad (\text{IV-53})$$

d'où :

$$\bar{I}(\vec{r}_0, t) = 2\bar{I} + 2\Re e \left\{ \overline{E^*(\vec{r}_1, t) E(\vec{r}_2, t) e^{i\omega(p_2 - p_1)/c}} \right\} \quad (\text{IV-54})$$

on voit que c'est à présent la fonction de corrélation spatiale :

$$g(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \overline{E^*(\vec{r}_1, t) E(\vec{r}_2, t)} \quad (\text{IV-55})$$

qui joue un rôle important dans la description de l'interférence sur l'écran.

Evaluons l'expression de  $g(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$  pour un champ monochromatique gaussien produit par une source étendue. Raisonnons comme au paragraphe précédent.

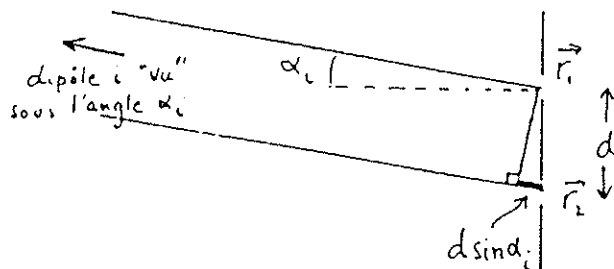


Fig 23

Supposons que la source, située à grande distance, possède un diamètre angulaire fini et commençons par considérer un dipôle i "vu" de

l'interferometre sous l'angle  $\alpha_i$  ( fig 2 ). On a manifestement entre les champs  $E_i(r_1)$  et  $E_i(r_2)$  rayonnés par ce dipôle aux deux points  $r_1$  et  $r_2$  la relation :

$$E_i(\vec{r}_2, t) = E_i(\vec{r}_1, t) e^{i k d \sin \alpha_i} \quad (\text{IV-56})$$

ou  $d$  est la distance  $|r_1 - r_2|$  des deux trous. D'où pour la corrélation:

$$\begin{aligned} \overline{E_i^*(\vec{r}_1, t) E_i(\vec{r}_2, t)} &= \overline{|E_i(\vec{r}_1, t)|^2} e^{i k d \sin \alpha_i} \\ &= \bar{I}_i e^{i k d \sin \alpha_i} \end{aligned} \quad (\text{IV-57})$$

Evaluons ensuite la fonction de corrélation spatiale du champ rayonné par l'ensemble des dipôles  $i$  et  $j$  "vus" sous les angles  $\alpha_i, \alpha_j$  ..

$$\overline{E^*(\vec{r}_1, t) E(\vec{r}_2, t)} = \sum_{i, j} \overline{E_i^*(\vec{r}_1, t) E_j(\vec{r}_2, t)} \quad (\text{IV-58})$$

Les termes croisés  $i \neq j$  de cette somme sont nuls (non-corrélation des phases de dipôles différents<sup>(\*)</sup>). Il reste donc :

$$\overline{E^*(\vec{r}_1, t) E(\vec{r}_2, t)} = \sum_i \bar{I}_i e^{i k d \sin \alpha_i} \quad (\text{IV-59})$$

Pour évaluer la somme (IV-59) nous remarquons que l'on peut poser:

$$k d \sin \alpha_i = \vec{k}_i \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = \vec{n}_i \frac{\omega}{c} (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \quad (\text{IV-60})$$

ou  $\vec{k}_i$  est le vecteur d'onde le long de la droite joignant l'interféromètre au point  $i$  de la source ( $\vec{n}_i$  : vecteur unitaire dans cette direction).

En passant de la somme (IV-59) à une intégrale, on obtient enfin :

(\*) Ici encore, ceci n'est vrai que si le champ est incohérent. Le calcul de la corrélation spatiale serait très différent pour le champ d'un laser.

$$g(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \int \bar{I}(\Omega_1) e^{i \frac{\omega}{c} \vec{n}_1 \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)} d\Omega_1 \quad (\text{IV-61})$$

l'intégration portant sur la direction de la droite joignant le point d'observation à la source ( $d\Omega_1$  est l'élément de l'angle solide sous lequel on voit la source; voir Fig 24). Ainsi la fonction de corrélation spatiale relative a deux points d'un même plan normal a la direction moyenne de propagation du champ, apparaît comme la TF de la distribution angulaire de la source, vue d'un point de ce plan.

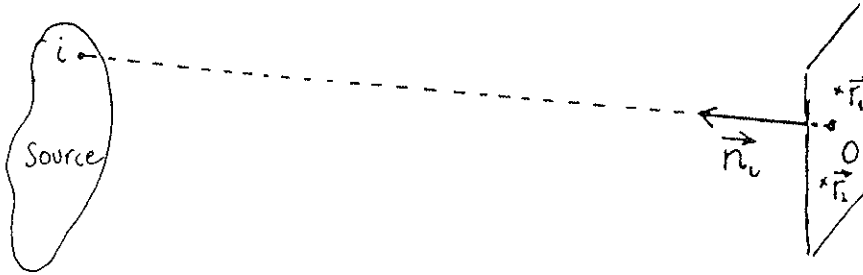


Fig 24

Remarquons le parallélisme entre corrélations temporelles et spatiales pour des champs gaussiens:

- la fonction de corrélation temporelle d'une onde plane non monochromatique est la TF de sa distribution spectrale

- la fonction de corrélation spatiale d'une onde non plane monochromatique est la TF de la distribution angulaire de son intensité .

Si la source a une largeur angulaire  $\alpha_0$ ,  $g(r_1, r_2)$  est une fonction de  $|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$  présentant une largeur  $\Delta r = \lambda / \alpha_0$ , les points  $r_1$  et  $r_2$  étant dans un plan normal a la direction de la source.  $\Delta r$  est la longueur de corrélation  $du$



rayonnement monochromatique étudié. La visibilité des franges est directement liée à  $g(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$  comme on le voit sur l'équation (IV-54) : si on écarte les 2 trous, la visibilité disparaît lorsque la distance entre les deux points atteint la valeur  $\Delta r = \lambda/\alpha_0$  : ce résultat permet de mesurer la largeur angulaire de la source. C'est le principe de l'interféromètre astronomique de Michelson utilisé pour mesurer le diamètre des étoiles (Fig 25). La lumière de l'étoile est filtrée en fréquence afin d'allonger son temps de corrélation et ne pas limiter la visibilité des franges par les fluctuations temporelles du champ. La lumière filtrée est recueillie sur deux miroirs mobiles et recombinaison au centre de l'interféromètre et l'on y examine les franges. Celles-ci s'éteignent lorsque la distance des deux miroirs atteint la valeur  $\lambda/\alpha_0$ . La résolution ainsi obtenue est celle d'un télescope unique de diamètre égal à la distance maximum des miroirs! ( voir chapitre II)

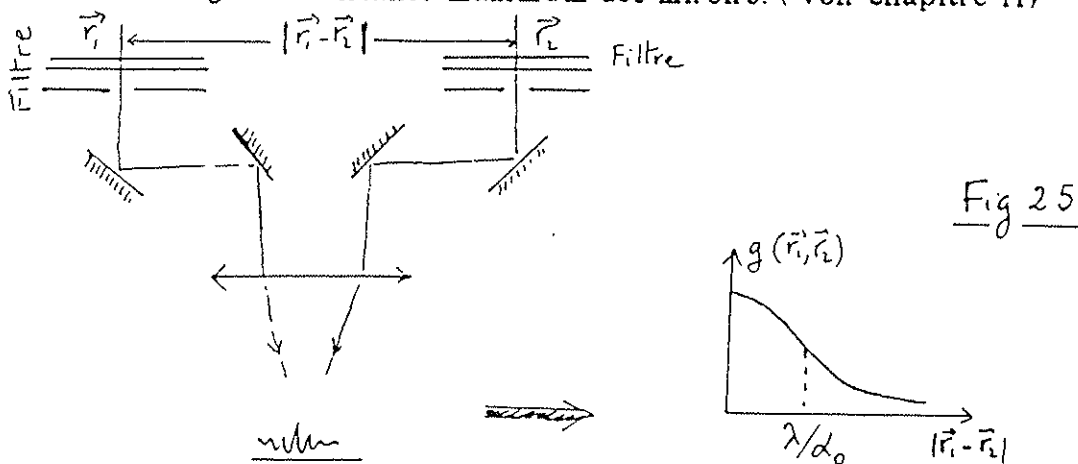


Fig 25

La notion de corrélation spatiale s'étend également aux corrélations d'intensité du type de celles qui interviennent dans l'expérience de Hanbury-Brown et Twiss ( Fig 26). Considérons deux détecteurs à la distance  $d$  l'un de l'autre recueillant aux points  $r_1$  et  $r_2$  la lumière filtrée en fréquence d'une étoile et à l'aide d'un corrélateur-intégrateur (ou d'une technique de comptage de photon appropriée), mesurons la quantité :

$$\overline{I(\vec{r}_1, t) I(\vec{r}_2, t)} = E^*(\vec{r}_1, t) E^*(\vec{r}_2, t) E(\vec{r}_2, t) E(\vec{r}_1, t) \quad (\text{IV-62})$$

D'une manière analogue au raisonnement fait pour les corrélations temporelles, on montre sans peine, pour un champ gaussien, la relation:

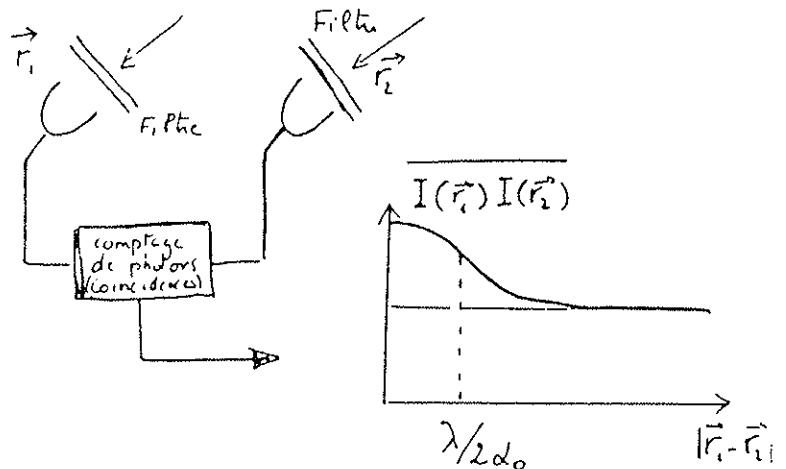
$$\overline{I(\vec{r}_1, t) I(\vec{r}_2, t)} = \overline{I}^2 + |g(\vec{r}_1, \vec{r}_2)|^2 \quad (\text{IV-63})$$

avec bien entendu:

$$|g(\vec{r}_1, \vec{r}_1)|^2 = \overline{I}^2 \quad (\text{IV-64})$$

La mesure de la perte de corrélation d'intensité ( ou de la disparition de l'effet de groupement de photons) en fonction de la séparation  $|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$  revient à mesurer la largeur de  $|g(\vec{r}_1, \vec{r}_2)|^2$  et donc encore à mesurer le diamètre  $\alpha_0$ ! Il s'agit d'un appareil plus simple qu'un interféromètre Michelson, qui n'est pas directement sensible à la phase du champ et aux instabilités atmosphériques. Les deux détecteurs sont placés aux foyers de deux petits télescopes afin de collecter le maximum de photons et les télescopes sont mobiles sur des rails. Avec une séparation maximum  $D_{\max}$  de 500m, on peut en principe résoudre avec de la lumière de  $\lambda = 0.5\mu$  un diamètre apparent  $\alpha_{\min} = \lambda / D_{\max} = 10^{-9}$  radians!

Fig 2 G



Notons pour finir la différence des propriétés de cohérence spatiale des champs gaussiens et des champs cohérents. Les sources gaussiennes usuelles (lampes, soleil) vues en un point sous un angle typique de l'ordre du degré, ont une longueur de corrélation spatiale de l'ordre de  $100\lambda$ , c'est à dire d'une fraction de mm. Il en est tout autrement de la lumière d'un laser, dans laquelle les différents émetteurs (atomes) de la source rayonnent en phase et pour laquelle l'approximation de décorrélation faite à la page 267 pour calculer  $g(r_1, r_2)$  n'est pas valable. Ces rayonnements peuvent avoir des longueurs de corrélation spatiales très grandes, de l'ordre du m ou plus. C'est ce qui explique l'aspect très différent de la lumière diffusée par un écran rugueux éclairé par un laser (présentant une granularité typique de "speckle") de celui du même écran éclairé par une lampe classique d'intensité et de pureté spectrale identiques (éclairage "plat").

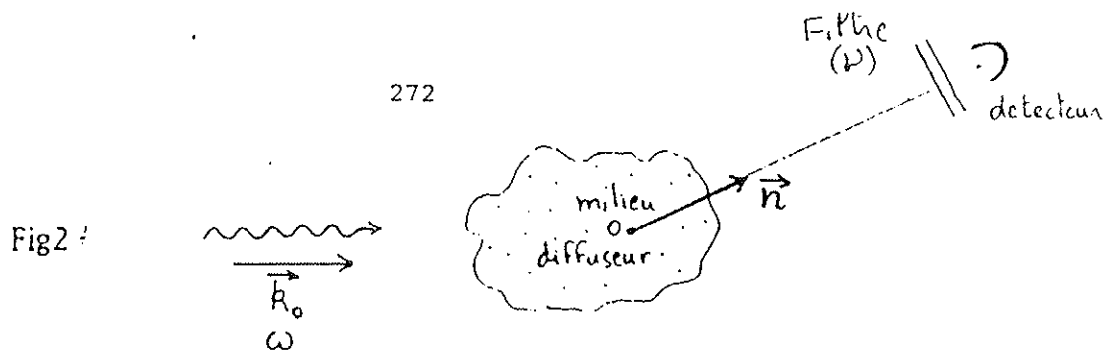
Pour des raisons de simplicité, nous nous sommes restreints ici à l'étude de cas limites où les cohérences temporelle et spatiale peuvent être décrites séparément. Dans un cas plus général, la source a à la fois une distribution spectrale et un diamètre angulaire non négligeables. Il faut alors considérer les corrélations spatio-temporelles du type:

$$g(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \tau) = \overline{E^*(\vec{r}_1, t) E(\vec{r}_2, t-\tau)} \quad (\text{IV-65})$$

dont l'expression intervient dans l'analyse d'une expérience d'interférence.

Nous ne considérerons pas plus en détail cette situation générale ici.

5\*) Cohérence spatio-temporelle de la lumière diffusée par un milieu matériel : lien avec les fluctuations du milieu.



Nous allons maintenant nous intéresser aux propriétés statistiques de la lumière diffusée par un milieu matériel. Nous considérons la situation générale représentée sur la Fig 27: une onde monochromatique plane de vecteur d'onde  $\mathbf{k}_0$  est diffusée par un ensemble d'atomes dont la répartition spatiale est décrite par une distribution qui peut être "ordonnée" (représentée par une fonction bien définie de la position dans le milieu) ou aléatoire (décrite à l'aide de fonctions de corrélations statistiques). Cette distribution d'atomes peut de plus varier dans le temps sous l'effet du mouvement des atomes et cette variation temporelle peut elle aussi être "ordonnée" (onde acoustique de fréquence et vecteur d'onde donnés par exemple) ou bien être une fonction aléatoire du temps (fluctuation temporelle de la densité sans ordre à grande distance). Enfin, la réponse intrinsèque de chaque atome (sa polarisabilité à la fréquence du champ incident) peut elle même varier sous l'effet de perturbations aléatoires qu'il subit de la part de son environnement. On dispose dans la direction définie par le vecteur unitaire  $\mathbf{n}$  un détecteur précédé d'un filtre monochromatique centré à la fréquence  $\nu$  et on mesure l'intensité diffusée à travers le filtre. En variant  $\mathbf{n}$  et  $\nu$ , c'est à dire en tournant la direction de visée du détecteur et en balayant la fréquence du filtre, on mesure la distribution angulaire et spectrale  $I(\mathbf{n}, \nu)$  de la lumière diffusée. Comme nous allons le voir, cette distribution, qui reflète les propriétés statistiques de la lumière, est directement reliée à une fonction de corrélation spatio-temporelle décrivant les fluctuations d'indice du milieu diffuseur. L'étude de la lumière fournit donc une information très riche sur le milieu qui la diffuse. On

notera l'analogie avec le problème étudié aux paragraphes précédents. Nous cherchions alors à relier les propriétés statistiques du champ à celles de sa source. Dans le problème qui nous intéresse ici, la source supposée à l'infini et ponctuelle, n'a ni fluctuations temporelles ni extension angulaire (elle rayonne une onde monochromatique plane cohérente), mais c'est le milieu que la lumière traverse qui introduit les fluctuations et dispersions angulaires que l'on cherche à détecter.

Le problème abordé ici complète en fait le traitement de la diffusion abordé au Chapitre III : on y a établi les propriétés de la lumière diffusée par un dipôle unique. Il nous faut maintenant sommer les réponses des dipôles individuels en tenant compte de la distribution statistique des dipôles dans le milieu. Nous allons procéder par étapes, en donnant d'abord l'expression du champ diffusé par un atome immobile en un point, puis en sommant sur une distribution statique de dipôles, enfin en tenant compte du mouvement des particules et de leur variation éventuelle de polarisabilité. Une fois l'expression la plus générale du champ diffusé obtenue, nous calculerons sa fonction de corrélation temporelle au niveau du détecteur et enfin son spectre. Nous verrons alors que ce spectre est en général une fonction de la direction d'observation, ce qui nous conduira directement à l'expression de  $J(\mathbf{n}, \nu)$ . Nous analyserons enfin à l'aide de l'expression générale obtenue un certain nombre de problèmes de diffusion intéressants.

a) Dipôle induit par le champ incident sur un atome immobile au point  $\mathbf{r}$ ;

On notera :

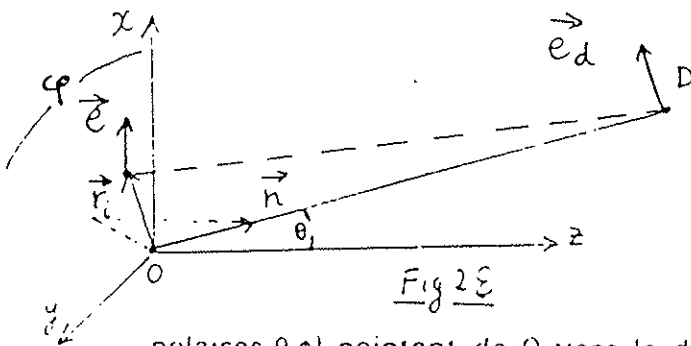
$$\mathcal{E}_\omega \vec{e} e^{i(\vec{k}_0 \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad (\text{IV-66})$$

l'onde plane monochromatique incidente de vecteur d'onde  $\vec{k}_0$ , de pulsation  $\omega$ , de direction de polarisation  $\vec{e}$ . On prendra l'axe Oz le long de  $\vec{k}_0$  et la direction de polarisation  $\vec{e}$  le long de Ox (voir Fig 28). On negligera l'effet du champ diffusé par un dipôle sur un autre (polarisabilité atomique assez faible ou densité du milieu assez petite pour pouvoir négliger la "diffusion multiple"). On supposera enfin que la polarisabilité atomique est isotrope (dipôle induit parallèle au champ). Le dipôle  $i$  situé en  $\vec{r}_i$  s'écrit (cf III-85):

$$\vec{p}_i = \epsilon_0 \alpha_i(\omega) \mathcal{E}_\omega \vec{e} e^{i(\vec{k}_0 \cdot \vec{r}_i - \omega t)} \quad (\text{IV-67})$$

où  $\alpha_i(\omega)$  est la polarisabilité complexe du dipôle  $i$  à la fréquence  $\omega$ , que nous supposons pour l'instant constante dans le temps.

b) Champ diffusé dans la direction  $\vec{n}$  à la distance  $R$  du milieu par le dipôle  $i$



On repère le milieu à partir d'une origine  $O$ . On définit la direction d'observation par le vecteur unitaire  $\vec{n}$  (angles polaires  $\theta, \phi$ ) pointant de  $O$  vers le détecteur  $D$  et on suppose la distance  $R=OD$  très grande devant les dimensions du milieu si bien que l'on voit de  $D$  le milieu sous un tout petit angle (Fig 28). Le champ  $\mathcal{E}_d^i$  diffusé par l'atome  $i$  est pratiquement perpendiculaire à  $\vec{n}$  et contenu dans le plan défini par  $\vec{e}$  et  $\vec{n}$ .

On appelle  $\vec{e}_d = (\vec{n} \times \vec{e}) \times \vec{n}$  le vecteur polarisation du champ diffuse. On a, conformément aux résultats du Chapitre III :

$$\vec{E}_d^i = \frac{e^{ik|\vec{R}_0 - \vec{r}_1|}}{R} \times \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\omega^2}{c^2} \vec{e}_d(\theta, \varphi) e^{-i\omega t} \times \epsilon_0 \alpha_i(\omega) \mathcal{E}_\omega e^{i\vec{k}_0 \cdot \vec{r}_1} \quad (\text{IV-68})$$

On remarquera que la dépendance angulaire de  $\vec{E}_d^i$  est contenue dans le vecteur  $\vec{e}_d$  dont la norme est égale au sinus de l'angle formé par les vecteurs  $\vec{n}$  et  $\vec{e}$ . On fait sur l'expression (IV-68) l'approximation habituelle valable pour  $R$  grand devant les dimensions de la source:

$$|\vec{R}\vec{n} - \vec{r}_1| = R - \vec{n} \cdot \vec{r}_1 \quad \text{et} \quad e^{ik|\vec{R}\vec{n} - \vec{r}_1|} = e^{ikR} e^{-i\vec{k}_0 \cdot \vec{r}_1} \quad (\text{IV-69})$$

et on met finalement  $\vec{E}_d^i$  sous la forme:

$$\vec{E}_d^i = \frac{1}{4\pi} \frac{\omega^2}{c^2} \alpha_i(\omega) \mathcal{E}_\omega \vec{e}_d(\theta, \varphi) \frac{e^{ikR}}{R} e^{i(\vec{k}_0 - \vec{k}_n) \cdot \vec{r}_1} e^{-i\omega t} \quad (\text{IV-70})$$

### c) Champ diffusé par l'ensemble des dipôles supposés immobiles

Sommons maintenant sur  $i$  en négligeant la variation de  $\theta$  et de  $\varphi$  de  $\vec{e}_d$  (milieu vu sous un petit angle du point d'observation). On obtient :

$$\vec{E}_d^i = \frac{1}{4\pi} \frac{\omega^2}{c^2} \vec{e}_d(\theta, \varphi) \frac{e^{ikR}}{R} \sum_i \left\{ \alpha_i(\omega) \mathcal{E}_\omega e^{i(\vec{k}_0 - \vec{k}_n) \cdot \vec{r}_1} \right\} \quad (\text{IV-71})$$

On définit alors le vecteur  $\vec{K}$  représentant le "transfert de vecteur d'onde" au cours de la diffusion dans la direction  $\vec{n}$ :

$$\vec{K} = \vec{k}_n - \vec{k}_0 \quad (\text{IV-72})$$

et l'on obtient:

$$\vec{E}_d = \underbrace{\frac{1}{4\pi} \frac{\omega^2}{c^2} \vec{e}_\alpha(\theta, \varphi) \frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{R}}}{R} \epsilon_\omega}_{\text{Facteur proportionnel à la diffusion d'un atome unique en } O} \underbrace{\sum_i \left\{ \epsilon_0 \alpha_i(\omega) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}_i} \right\}}_{\text{T.F. de la distribution des dipôles}} \quad (\text{IV-73})$$

Le champ diffusé apparaît ainsi comme le produit du champ que diffuserait un atome unique placé au point O par un facteur de forme dépendant de la repartition spatiale des atomes. Ce facteur n'est autre que la transformée de Fourier prise pour le vecteur  $\mathbf{K}$  de la distribution des dipôles dans le milieu.

#### d) Généralisation à des particules en mouvement

Si les particules diffusantes peuvent se déplacer,  $E_d^i(t)$  dépend de l'état de chaque atome  $i$  à l'instant retardé  $t_0$  tel que  $t_0 = t - \frac{|\mathbf{R} - \mathbf{r}_i(t_0)|}{c}$ . Les positions  $\mathbf{r}_i$  dans l'exponentielle de (IV-73) deviennent donc des fonctions du temps par l'intermédiaire du temps retardé  $t_0$ . En principe, on doit considérer des instants retardés différents pour les différents atomes, avec une dispersion  $\Delta t$  des temps retardés de l'ordre de  $L/c$  où  $L$  est la longueur caractéristique du milieu. Les atomes se déplaçant avec une vitesse caractéristique  $v$ , nous admettrons cependant que la condition:

$$v \Delta t \ll \lambda \quad (\text{IV-74})$$

est satisfaite. Le déplacement des atomes pendant le temps que la lumière met à traverser le milieu est alors négligeable (ils bougent de beaucoup



moins qu'une longueur d'onde). On peut alors négliger la variation du temps retardé d'un atome à l'autre et ne considérer pour tout le milieu qu'un temps retardé moyen:

$$t_0 = t - R/c \quad (\text{IV-75})$$

La condition (IV-74) s'écrit encore :

$$vL/c \ll \lambda \quad (\text{IV-76})$$

soit:

$$L \ll (c/v)\lambda \quad (\text{IV-77})$$

pour un milieu d'atomes se déplaçant à des vitesses thermiques,  $\frac{c}{v}$  est de l'ordre de  $10^6$  et la condition (IV-77) implique que le milieu diffuseur a des dimensions inférieures au mètre, si  $\lambda$  est une longueur d'onde optique caractéristique. Cette restriction qui permet de simplifier quelque peu l'analyse du problème n'est d'ailleurs pas essentielle. On pourrait généraliser sans peine les résultats établis ici au cas d'un milieu plus étendu (en le divisant en "tranches" d'épaisseur  $(c/v)\lambda$  et en associant un temps retardé à chaque tranche), mais on introduit alors des complications formelles, sans rien changer d'essentiel à la physique du phénomène de diffusion. Compte tenu de cette restriction, (IV-73) devient simplement:

$$\vec{E}_d(t) = \frac{1}{4\pi} \frac{\omega^2}{c^2} \vec{e}_d(\theta, \varphi) \frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{R}}}{R} e^{-i\omega t} \mathcal{E}_\omega \left\{ \sum_i \alpha_i(\omega, \tau_0) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}_i(\tau_0)} \right\} \quad (\text{IV-7})$$

avec  $n_i$  défini par (IV-75). Notons que pour être tout a fait général nous faisons dependre du temps la polarisabilite de l'atome  $i$ , afin de tenir compte egalement des fluctuations eventuelles de cette quantite.

Afin de remplacer dans (IV-78) la sommation discrete sur les atomes par une integrale, il est commode d'introduire la densite microscopique de polarisabilite au point  $\vec{r}$  et a l'instant  $t$  par la relation:

$$\delta n(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} \sum_i \alpha_i(\omega, t) \delta[\vec{r} - \vec{r}_i(t)] \quad (\text{IV-79})$$

Nous avons vu au chapitre II, et nous montrerons de facon plus precise au Chapitre V, que si le produit  $N\alpha$  de la polarisabilite atomique par la densite du milieu est assez faible, l'indice du milieu est simplement:

$$n = 1 + N\alpha/2 \quad (\text{IV-80})$$

Comparant (IV-79) et (IV-80), on constate que  $\delta n(\vec{r}, t)$  n'est autre, pour le milieu de faible indice considere ici, que la difference a l'unité de l'indice de refraction local a l'instant  $t$ ,  $n(\vec{r}, t)$ :

$$n(\vec{r}, t) = 1 + \delta n(\vec{r}, t) \quad (\text{IV-81})$$

On peut alors ecrire:

$$\sum_i \alpha_i(\omega, t_0) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}_i(t_0)} = 2 \int \delta n(\vec{r}, t_0) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} d^3\vec{r} \quad (\text{IV-82})$$

et le champ diffuse se met sous la forme simple:

$$\vec{E}_d(t) = C(\omega, \theta, \varphi, R) e^{-i\omega t} \int \delta n(\vec{r}, t_0) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} d^3\vec{r} \quad (\text{IV-83})$$

ou  $\vec{C}(\omega, \theta, \varphi, R)$  est un vecteur indépendant de la distribution atomique dans le milieu, décrivant la dépendance radiale et angulaire du champ diffusé à la distance  $R$  et dans la direction  $\theta, \varphi$  par un atome immobile à l'origine

$$\vec{C}(\omega, \theta, \varphi, R) = \frac{1}{2\pi} \frac{\omega^2}{c^2} \vec{e}_d(\theta, \varphi) \frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{R}}}{R} \mathcal{E}_\omega \quad (\text{IV-84})$$

### e) Spectre de la lumière diffusée

On peut déterminer maintenant la fonction de corrélation du champ dans la direction  $\theta, \varphi$ . On trouve sans peine:

$$\overline{E_d^*(t) E_d(t-\tau)} = |\vec{C}|^2 e^{i\omega\tau} \iint \overline{\delta n^*(\vec{r}, t_0) \delta n(\vec{r}', t_0 - \tau)} e^{i\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')} d^3\vec{r} \cdot d^3\vec{r}' \quad (\text{IV-85})$$

La barre qui surmonte l'expression (IV-85) représente au choix une intégration sur  $t$  (ou ce qui revient au même sur  $t_0 = t - R/c$ ), portant sur un intervalle de temps long devant le temps de corrélation des fluctuations du système ou encore une moyenne d'ensemble sur un grand nombre de réalisations du milieu diffuseur. Enfin, en effectuant la transformée de Fourier de (IV-85), on obtient le spectre  $J(\vec{K}, \nu)$  de la lumière diffusée dans la direction considérée.

$$J(\vec{K}, \nu) = \frac{|\vec{C}|^2}{2\pi} \iiint \overline{\delta n^*(\vec{r}, t_0) \delta n(\vec{r}', t_0 - \tau)} e^{i[\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{r}') - (\nu - \omega)\tau]} d^3\vec{r} \cdot d^3\vec{r}' \cdot d\tau \quad (\text{IV-86})$$

On peut enfin dans (IV-86) faire le changement de variable  $\vec{r}' = \vec{r} - \vec{\rho}$ , pour obtenir:

$$J(\vec{K}, \nu) = \frac{|\vec{C}|^2}{2\pi} \int \Gamma(\vec{\rho}, \tau) e^{i\vec{k} \cdot \vec{\rho}} e^{-i(\nu - \omega)\tau} d^3\vec{\rho} d\tau \quad (\text{IV-87})$$

en introduisant la fonction de corrélation spatio-temporelle de l'écart à l'unité de l'indice du milieu,  $\Gamma(\vec{\rho}, \tau)$  définie par:

$$\Gamma(\vec{\rho}, \tau) = \int \overline{\delta n^*(\vec{r}, t_0) \delta n(\vec{r} - \vec{\rho}, t_0 - \tau)} d^3\vec{r} \quad (\text{IV-88})$$

$J(\vec{K}, \nu)$  est ainsi le produit de la fonction de réponse d'un atome unique, (terme  $|\vec{C}|^2$ ), par la transformée de Fourier à quatre dimensions de la fonction de corrélation  $\Gamma(\vec{\rho}, \tau)$  qui joue donc un rôle essentiel dans l'analyse de tout problème de diffusion. La formule (IV-87) résume de façon condensée toute la physique du phénomène de diffusion. Elle tient compte des effets d'interférence entre les ondes diffusées par tous les atomes du milieu vers le détecteur et montre que tous ces effets sont finalement contenus dans une expression mathématique très simple et compacte.

Notons que  $J(\vec{K}, \nu)$  dépend de la direction d'observation par deux facteurs: la réponse atomique individuelle dépend des angles  $\theta$  et  $\phi$  (dépendance contenue dans la norme du vecteur  $\vec{e}_d = (\vec{n} \times \vec{e}) \times \vec{n}$  dont dépend  $\vec{C}$ ) et la transformée de Fourier de  $\Gamma(\vec{\rho}, \tau)$  dépend aussi de la direction  $\vec{n}$  par l'intermédiaire de  $\vec{K}$ .

Il est physiquement plus parlant de remplacer la densité spectrale  $J(\vec{K}, \nu)$  par la quantité proportionnelle:

$$\begin{aligned} S(\vec{K}, \nu) &= \frac{\epsilon_0 c}{2} J(\vec{K}, \nu) \\ &= \frac{\epsilon_0 c}{2} \frac{|\vec{C}|^2}{2\pi} \int \Gamma(\vec{\rho}, \tau) e^{i\vec{k} \cdot \vec{\rho}} e^{-i(\nu - \omega)\tau} d^3\vec{\rho} d\tau \end{aligned} \quad (\text{IV-89})$$

qui n'est autre que la composante spectrale du vecteur de Poynting du rayonnement diffuse dans la direction correspondant au transfert de vecteur d'onde  $\vec{K}$  (direction  $k\vec{n} = k_0 + \vec{K}$ ). Nous utiliserons donc (IV-89) de préférence à (IV-87) dans la suite.

Rappelons que cette formule est valable à la limite des petits indices, tels que l'on puisse négliger les phénomènes de diffusion multiple (effets du champ déjà diffusé par un atome sur un autre).

Dans le cas où le milieu diffuseur est statique, la fonction de corrélation (IV-88) est indépendante de  $\tau$  (temps de corrélation infini de

l'indice) et la transformée de Fourier en  $\tau$  dans l'équation (IV-89) donne évidemment la distribution  $2\pi\delta(\nu-\omega)$ . La diffusion s'effectue alors exactement à la fréquence du champ incident. On dit qu'elle est élastique (dans le point de vue quantique, elle conserve l'énergie du photon diffusé). Ce n'est que si le milieu présente des fluctuations temporelles que le spectre de la lumière diffusée fait apparaître des composantes de fréquence  $\nu \neq \omega$ . On dit alors que la diffusion est inélastique. Nous verrons que le changement de fréquence de la lumière est alors en général dû à l'effet Doppler dans le milieu diffuseur.

Il peut être enfin utile de déterminer la distribution angulaire intégrée sur les fréquences,  $S(\vec{K})$ , qui décrit le résultat d'une expérience de diffusion dans laquelle on ne s'intéresse qu'à l'intensité totale diffusée dans une direction donnée sans utiliser de filtre devant le détecteur. On a:

$$\begin{aligned} S(\vec{K}) &= \int S(\vec{K}, \nu) d\nu \\ &= \frac{\epsilon_0 c}{4\pi} |\vec{C}|^2 \int \Gamma(\vec{\rho}, \tau) e^{i\vec{K} \cdot \vec{\rho}} e^{-i(\nu-\omega)\tau} d^3\vec{\rho} d\tau d\nu \end{aligned}$$

L'intégrale sur  $\nu$  donne la distribution  $2\pi\delta(\tau)$ , ce qui permet l'intégration immédiate sur  $\tau$  et l'on obtient:

$$S(\vec{K}) = \frac{\epsilon_0 c}{2} |\vec{C}|^2 \int \Gamma(\vec{\rho}, 0) e^{i\vec{K} \cdot \vec{\rho}} d^3\vec{\rho} \quad (\text{IV-90})$$

Ainsi la distribution angulaire de l'intensité totale diffusée dépend de la transformée de Fourier de la fonction de corrélation spatiale de l'indice,  $\Gamma(\vec{\rho}, 0)$ .

Considérons à présent quelques exemples importants de phénomènes de diffusion que nous pouvons expliquer simplement à l'aide de la formule générale (IV-89).

6) Etude de quelques phénomènes de diffusion

a) : Diffusion d'une onde optique par un milieu homogène  
d'atomes immobiles

Considérons un milieu homogène (de densité et d'indice uniforme) composé d'atomes immobiles : l'indice microscopique défini par (IV-79) pourra être considéré comme continu si il y a beaucoup d'atomes régulièrement distribués dans  $\lambda^3$  : c'est le cas d'un cristal parfait diffusant de la lumière visible. Nous appellerons  $V$  le volume du cristal et nous supposerons toutes ses dimensions très grandes devant  $\lambda$  pour pouvoir négliger tous les problèmes de "bord" et de diffraction. On écrira alors :

$$\delta n(\vec{r}, t) = \delta n = \text{cte} \quad (\text{IV-91})$$

et la fonction de corrélation de l'indice est simplement:

$$\Gamma(\vec{\rho}, \tau) = V |\delta n|^2 = V |n-1|^2 \quad (\text{IV-92})$$

$S(\vec{K}, \nu)$  est alors la T.F. d'une fonction constante. Elle n'est non nulle que pour  $\vec{K}=\vec{0}$  et  $\nu=\omega$ . La somme sur  $\rho$  étendue au volume  $V$  du facteur de phase  $e^{i\vec{K}\rho}$  évalué pour  $\vec{K}=\vec{0}$  donne le volume  $V$ . Compte tenu de (IV-92), l'intégration de (IV-89) donne immédiatement:

$$S(\vec{K}=\vec{0}, \nu) = \frac{\epsilon_0 c}{2} |\vec{C}|^2 V^2 |n-1|^2 \delta(\nu-\omega) \quad (\text{IV-93})$$

Le milieu ne peut diffuser que vers l'avant à la fréquence de l'onde incidente ( $\nu = \omega$ ) : on trouve donc qu'un milieu homogène ne diffuse pas de

lumière latéralement. Nous avons déjà entrevu ce résultat au Chapitre II ou nous avons montré qu'une onde plane se propageant dans un milieu matériel homogène indéfini donnait naissance à une onde rayonnée par ce milieu dans la même direction. Comme chaque atome du milieu diffuse latéralement, cela signifie qu'il y a interférence destructive parfaite des ondes diffusées dans toute direction autre que  $K=0$ . Notons également que (IV-93) montre que l'intensité diffusée vers l'avant est proportionnelle à  $V^2 |n-1|^2$ , c'est à dire  $\lambda^2 N^2$ , puisque  $n-1$  est proportionnel à  $N$ , densité atomique dans le milieu. Or  $VN$  n'est autre que le nombre total d'atomes diffuseurs,  $N$ . Ce résultat exprime que la diffusion d'un milieu homogène vers l'avant est cohérente: les champs diffusés par les différents atomes interfèrent entre eux et l'intensité diffusée vers l'avant est proportionnelle au carré du nombre d'atomes.

Comme nous l'avons vu au chapitre II, la lumière diffusée élastiquement vers l'avant interfère avec l'onde incidente pour constituer l'onde transmise. Dans le terme d'interférence entre champ incident et champ diffusé vers l'avant, la densité du milieu n'intervient bien sûr qu'une fois et le champ transmis est donc, à la limite des indices très petits, une fonction linéaire et non quadratique de la densité (voir chapitre II).

Nous reviendrons sur le problème de la propagation dans un milieu homogène au Chapitre V.

Remarques: *1) Nous avons vu au § II.5 qu'un milieu homogène diffuse également vers l'arrière. Mais il s'agit d'un effet de "bord" qui dépend de la longueur  $L$  du milieu et qui peut être décrit comme une interférence entre les ondes réfléchies sur les dioptries d'entrée et de sortie. De façon plus précise, les tranches d'épaisseur  $\lambda/4$  successives interfèrent de façon destructive vers l'arrière et seule subsiste la contribution de la tranche "incomplète" non compensée. Cette contribution donne un champ  $\lambda/L$  fois*

*plus petit que vers l'avant, négligeable à la limite où l'on considère un milieu étendu.*

*(ii) Si le milieu homogène a une dimension transversale finie  $a$ , on voit immédiatement que l'intégrale sur l'espace dans (IV-79) fait apparaître non plus une distribution  $\delta(\mathbf{K})$  mais une fonction de largeur  $1/a$  en  $\mathbf{K}$ : On retrouve la dispersion angulaire du phénomène de diffraction. La diffusion vers l'avant a lieu dans un angle d'autant plus petit que le milieu est transversalement plus étendu.*

*(iii) La théorie présentée ici est limitée au cas des indices proches de l'unité (milieu dilué dans lequel on néglige la réaction du champ diffuse par un atome sur un autre, ce qu'on appelle encore la diffusion multiple). Le résultat essentiel trouvé ici, le fait qu'un milieu homogène et statique ne diffuse pas de lumière, demeure vrai cependant même si l'indice est grand. Ainsi un cristal régulier (dont l'indice peut être de l'ordre de 1,5 à 2) ne diffuse pas du tout de lumière visible (voir Chapitre V).*

b) Diffusion des rayons X par une distribution régulière d'atomes immobiles - Diffusion de Bragg par les cristaux.

Le remplacement de la distribution (IV-79) par une fonction d'indice continue  $n$  est bien sûr justifié que s'il y a beaucoup d'atomes dans un volume de l'ordre de  $\lambda^3$ . Pour un champ de très courte longueur d'onde (rayons X) le caractère discret du milieu diffuseur devient essentiel. Pour traiter le problème de la diffusion par un cristal dont la maille  $a$  est de l'ordre de  $\lambda$ , il faut revenir à la sommation discrète (IV-79), ou ce qui revient au même remplacer dans (IV-88) l'indice continu  $\delta n$  par la somme (IV-79):



$$\delta n = (\alpha/2) \sum_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \quad (\text{IV-94})$$

On suppose que la polarisabilité  $\alpha$  est indépendante du temps et la même pour tous les atomes immobiles du réseau cristallin (pas de dépendance en temps de l'indice). La position  $\mathbf{r}_i$  de l'atome  $i$  est repérée par la donnée de trois coordonnées entières  $n_{ix}, n_{iy}, n_{iz}$ :

$$\mathbf{r}_i = a( n_{ix}\mathbf{e}_x + n_{iy}\mathbf{e}_y + n_{iz}\mathbf{e}_z ) \quad (\text{IV-95})$$

( $a$  est la maille élémentaire du cristal supposé ici cubique pour simplifier;  $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$  sont les vecteurs unitaires le long des axes du cristal dans les trois directions d'espace). La fonction de corrélation de l'indice, indépendante du temps s'écrit alors:

$$\begin{aligned} \Gamma(\vec{\rho}, \tau) &= \frac{|\alpha|^2}{4} \sum_{i,j} \int \delta[\vec{r} - \vec{r}_i] \delta[\vec{r} - \vec{\rho} - \vec{r}_j] d^3\vec{r} \\ &= \frac{|\alpha|^2}{4} \sum_{i,j} \delta[\vec{r}_i - \vec{r}_j - \vec{\rho}] \end{aligned} \quad (\text{IV-96})$$

et on obtient immédiatement à l'aide de (IV-96) la distribution du rayonnement diffuse dans la direction  $\mathbf{K}$  (ce rayonnement est à la fréquence  $\omega$ , la diffusion est élastique):

$$\begin{aligned} S(\vec{K}, \nu) &= \frac{\epsilon_0 c}{8} |\bar{C}|^2 |\alpha|^2 \delta(\nu - \omega) \sum_{i,j} e^{i\vec{K} \cdot (\vec{r}_i - \vec{r}_j)} \\ &= \frac{\epsilon_0 c}{8} |\bar{C}|^2 |\alpha|^2 \delta(\nu - \omega) \left| \sum_i e^{i\vec{K} \cdot \vec{r}_i} \right|^2 \end{aligned} \quad (\text{IV-97})$$

On voit alors apparaître de façon claire dans (IV-97) l'interférence des contributions de chaque atome à la diffusion. La somme des exponentielles complexes dans (IV-97) se factorise suivant les trois directions d'espace. En

appelant  $N_0$  le nombre d'atomes le long de chaque direction (cristal cubique de cote  $N_0 a$ : on a évidemment  $N = N_0^3$ ), on obtient:

$$S(\vec{K}, \nu) = \frac{\epsilon_0 c}{8} |\vec{C}|^2 |\alpha|^2 \delta(\nu - \omega) \left| \frac{\sin\left(\frac{K_x N_0 a}{2}\right)}{\sin\left(\frac{K_x a}{2}\right)} \right|^2 \times \left| \frac{\sin\left(\frac{K_y N_0 a}{2}\right)}{\sin\left(\frac{K_y a}{2}\right)} \right|^2 \times \left| \frac{\sin\left(\frac{K_z N_0 a}{2}\right)}{\sin\left(\frac{K_z a}{2}\right)} \right|^2 \quad (\text{IV-98})$$

Le diagramme de rayonnement apparait comme le produit de trois fonctions dependant respectivement de  $K_x, K_y, K_z$ . Ce sont des fonctions de diffraction bien connues qui presentent des maxima pour:

$$\begin{cases} K_x = m_x \frac{2\pi}{a} \\ K_y = m_y \frac{2\pi}{a} \\ K_z = m_z \frac{2\pi}{a} \end{cases} \quad (\text{IV-99})$$

ou  $m_x, m_y, m_z$  sont trois entiers quelconques. La largeur de chacun des pics autour d'un maximum est  $\Delta K = 1/(N_0 a)$ , ce qui décrit simplement l'effet de diffraction global du cristal (les pics deviennent infiniment fins à la limite ou la taille du cristal est infinie).

Pour déterminer les directions de diffusion définies par les relations (IV-98), on utilise une construction géométrique classique. Représentons le vecteur  $\mathbf{K}$  dans l'espace en lui choisissant une origine fixe  $O$  (voir Fig 29). Les relations (IV-99) montrent que la diffusion n'est non nulle que si l'extrémité de  $\mathbf{K}$  appartient à un réseau de points défini à partir de  $O$  par les coordonnées  $m_x(2\pi/a)$ ,  $m_y(2\pi/a)$ ,  $m_z(2\pi/a)$ . Ce réseau, représenté seulement selon deux dimensions sur la Fig (29) s'appelle le réseau réciproque. Pour achever la détermination de  $\mathbf{K}$  il faut également tenir compte d'une autre condition.  $\mathbf{K}$  représente un transfert de vecteur d'onde

au cours d'une diffusion élastique: c'est donc la base d'un triangle isocèle dont les côtés sont les vecteurs  $\mathbf{k}_0$  et  $\mathbf{k}$  ( voir Fig 29). Il suffit donc de choisir un point M quelconque du réseau réciproque et de déterminer les intersections des cercles (sphères dans l'espace) de centres O et M et de rayon k. On obtient ainsi les sommets possibles du triangle isocèle en question, dont l'angle  $\theta$  est précisément l'angle de diffusion cherché. Nous voyons que cette construction détermine en fait  $\mathbf{k}_0$  pour un cristal d'orientation donnée (déterminée par les vecteurs  $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ ). En fait, dans une expérience c'est en général la direction du faisceau de rayons X incident qui est fixée et on tourne le cristal jusqu'à obtenir la disposition souhaitée. Une autre méthode, plus élégante, consiste à réduire le cristal en poudre. Il existe alors toujours des microcristaux orientés dans la bonne direction pour permettre la diffusion dans l'angle  $\theta$ . On observe alors des cônes de rayonnement, de révolution autour de la direction du faisceau incident. La détermination des angles  $\theta$ , dits "angles de Bragg" est immédiate. On a par simple inspection de la figure:

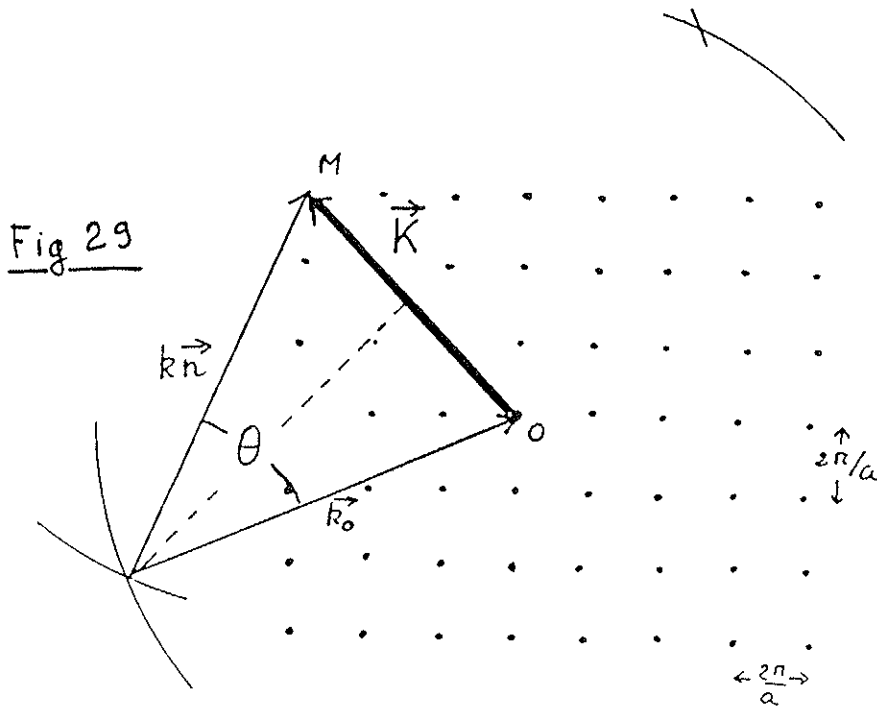
$$K = 2k \sin \frac{\theta}{2} \quad (\text{IV-100})$$

soit en remplaçant K par ses valeurs possibles:

$$\sin \frac{\theta}{2} = \frac{\lambda}{2a} \sqrt{m_x^2 + m_y^2 + m_z^2} \quad (\text{IV-101})$$

On voit qu'il n'y a de solution autre que la solution triviale  $\theta = 0$  que si  $\lambda/2a$  est inférieur à l'unité. On retrouve le fait qu'aux grandes longueurs d'onde une distribution régulière d'atomes ne diffuse que vers l'avant! La diffusion de Bragg, qui permet de reconstruire directement le réseau réciproque est un outil puissant d'étude de systèmes cristallins. On peut en étendre l'usage

a la diffusion par des structures plus complexes, molécules biologiques etc...Le principe est toujours le même: par transformée de Fourier de la figure de diffraction, on remonte à la structure de l'objet. Remarquons pour finir que cette diffusion est un phénomène cohérent: les champs rayonnés par les différents atomes interfèrent. L'intensité des pics est proportionnelle à  $N^2$ .



*Remarque: A la limite des très courtes longueurs d'onde, l'approximation dipolaire électrique que nous faisons dans ce traitement pour décrire la réponse de chaque atome n'est plus justifiée. Nous sommes précisément dans un cas où  $\lambda$  est de l'ordre de la dimension atomique et nous avons vu au chapitre III qu'il faut alors tenir compte également du rayonnement de la distribution quadrupolaire des charges (ainsi que des autres termes multipolaires éventuels). Le rayonnement de chaque atome n'est alors plus donné exactement par l'expression (IV-68). Cela signifie simplement que le terme  $|\vec{C}|^2$  qui se factorise dans l'expression du champ diffusé est en toute rigueur différent du terme dipolaire pour des rayons X. Toute l'analyse faite ici qui concerne le diagramme de rayonnement diffusé par le*

*crystal de façon cohérente reste bien sur valable. Les directions de Bragg définies plus haut sont évidemment correctes. De façon générale, le terme de dépendance en  $K$  de la diffusion qui ne dépend que de la TF de la fonction de corrélation des positions atomiques reste le même. Seule change la dépendance angulaire globale, contenue dans le cas dipolaire dans le terme  $|C|^2$ . On doit en fait remplacer ce terme par le terme correspondant décrivant le diagramme de rayonnement caractéristique des multipôles.*

c) Diffusion par un milieu continu statique avec inhomogénéités spatiales.

Revenons maintenant à la diffusion par un milieu continu, dans lequel on peut négliger la structure atomique (diffusion d'un champ optique de longueur d'onde grande devant la distance entre atomes). Nous supposons que le milieu est statique, mais qu'il présente des variations spatiales aléatoires d'indice (fluctuation de densité ou de polarisabilité). Il s'agit par exemple d'un cristal avec défauts, ou d'un verre inhomogène.

On écrira, en définissant un indice moyen  $\delta n$  et une partie spatialement fluctuante  $\delta n_f(\mathbf{r})$  :

$$\delta n(\vec{r}) = \delta n + \delta n_f(\vec{r}) \quad (\text{IV-102})$$

avec, par définition :

$$\int \delta n_f(\vec{r}) \, d^3\vec{r} = 0 \quad (\text{IV-103})$$

On peut alors mettre la fonction de corrélation  $\Gamma(\rho)$  (qui ne dépend pas de  $\tau$  dans ce cas) sous la forme:

$$\Gamma(\vec{\rho}) = \int \left[ |\delta n|^2 + \delta n^* \delta n_{, (\vec{r}-\vec{\rho})} + \delta n_{, (\vec{r})} \delta n + \delta n_{, (\vec{r})}^* \delta n_{, (\vec{r}-\vec{\rho})} \right] d^3 \vec{r} \quad (\text{IV-104})$$

Le premier terme en  $|\delta n|^2$  dans (IV-104) contribue uniquement à la diffusion cohérente vers l'avant (il correspond à la composante diffusée en  $\delta(\mathbf{K})$  étudiée au § précédent). Quant aux deuxième et troisième terme dans (IV-104), ils sont manifestement nuls d'après (IV-103). Ainsi, on peut séparer  $\Gamma(\rho, \tau)$  en deux termes, le premier décrivant la diffusion cohérente vers l'avant par la partie homogène de l'indice, le second la diffusion par les fluctuations de l'indice autour de sa moyenne:

$$\Gamma(\vec{\rho}) = v |\delta n|^2 + \Gamma_{, (\vec{\rho})} \quad (\text{IV-105})$$

Dans (IV-105),  $\Gamma_{, (\vec{\rho})}$  est défini par:

$$\Gamma_{, (\vec{\rho})} = \int \delta n_{, (\vec{r})}^* \delta n_{, (\vec{r}-\vec{\rho})} d^3 \vec{r} \quad (\text{IV-106})$$

Si on s'intéresse uniquement à la diffusion latérale dans une direction  $\mathbf{K} \neq 0$ , on peut remplacer dans l'expression (IV-89),  $\Gamma(\rho)$  par  $\Gamma_{, (\vec{\rho})}$ :

$$S(\vec{K}, \nu) = \frac{\epsilon_0 c}{2} |\vec{C}|^2 \delta(\nu - \omega) \int \Gamma_{, (\vec{\rho})} e^{i \vec{K} \cdot \vec{\rho}} d^3 \vec{\rho} \quad (\text{IV-107})$$

et la distribution de la lumière diffusée latéralement apparaît simplement comme la transformée de Fourier spatiale de la fonction de corrélation de la fluctuation d'indice. Une distribution aléatoire de "défauts" ayant chacun une dimension de l'ordre de  $\rho_0$  se manifeste par le fait que  $\Gamma_f(\rho)$  a une longueur de corrélation de l'ordre de  $\rho_0$ . La lumière diffusée est alors répartie sur une largeur angulaire  $\lambda/\rho_0$  caractéristique de la portée de ces fluctuations. On comprend ainsi qu'un cristal imparfait diffuse de la lumière ainsi qu'un verre inhomogène. L'ouverture angulaire du diagramme de diffusion est d'autant plus grande que  $\rho_0$  est plus petit. A la limite où la taille des fluctuations devient de l'ordre de la longueur d'onde, la diffusion devient quasiment isotrope.

$\Gamma_f(\rho)$  peut également être une fonction périodique dont la périodicité spatiale est comparable à la longueur d'onde de la lumière (milieu ayant une structure de réseau) : la diffusion s'effectuera alors dans les directions discrètes correspondant à la T.F. de cette fonction périodique. Nous retrouverons ce problème plus loin lorsque nous nous intéresserons plus généralement à la diffusion par des ondes acoustiques qui se propagent dans le milieu.

#### d) Diffusion Rayleigh par un gaz parfait.

Abordons maintenant la diffusion de la lumière par un gaz d'atomes. Il s'agit là bien sûr d'un problème de très grande importance pratique. La diffusion atmosphérique joue un rôle essentiel dans la vie quotidienne. On comprend tout de suite à la lumière de l'analyse qui précède que le modèle statique d'un gaz ayant une distribution uniforme de particules est inadéquat : un tel gaz ne diffuserait rien. Or l'expérience montre que l'air

diffuse plus de lumière qu'un cristal parfait, malgré une différence de trois à quatre ordres de grandeur en densité! La diffusion par un gaz est donc une manifestation éclatante des fluctuations locales de densité. Nous nous proposons d'étudier ce phénomène ici, comme exemple intéressant du lien entre la théorie électromagnétique et la mécanique statistique.

Les atomes d'un gaz se déplacent dans le milieu et les fluctuations de l'indice sont essentiellement liées aux variations de densité locale dues au mouvement des atomes. Pour ne pas trop compliquer, nous admettrons que la polarisabilité  $\alpha_i(\omega)$  est la même pour tous les atomes et indépendante du temps. Les fluctuations de l'indice reflètent alors uniquement celle de la densité dans le gaz. On posera donc:

$$\delta n_f(\mathbf{r}, t) = (\alpha/2) \delta n_f(\mathbf{r}, t) \quad (\text{IV-108})$$

ou  $\delta n_f$  (notation *italique*) est la fluctuation de densité autour de la densité moyenne, responsable de la fluctuation d'indice. On notera que  $\delta n_f$  est homogène à l'inverse d'un volume alors que  $\delta n_f$  est sans dimension ( $\alpha$  est un volume). Contrairement au cas statique du § précédent, les fluctuations dépendent à présent de  $\mathbf{r}$  et de  $t$ . On définit alors comme au § précédent la fonction de corrélation spatio-temporelle des fluctuations d'indice:

$$\Gamma_f^{(d)}(\vec{\rho}, \tau) = \frac{|\alpha|^2}{4} \Gamma_f^{(d)}(\vec{\rho}, \tau) \quad (\text{IV-109})$$

qui est directement proportionnelle à la fonction de corrélation spatio-temporelle des fluctuations de densité  $\Gamma_f^{(d)}(\vec{\rho}, \tau)$ :

$$\Gamma_f^{(d)}(\vec{\rho}, \tau) = \int \overline{\delta n_f(\vec{r}, t) \delta n_f(\vec{r}-\vec{\rho}, t-\tau)} d^3 \vec{r} \quad (\text{IV-110})$$



La distribution angulaire et spectrale du rayonnement dans toute direction  $\mathbf{K}=\mathbf{0}$  s'écrit alors:

$$S(\vec{K}, \nu) = \frac{\epsilon_0 c}{2} \frac{|\vec{C}|^2 |\alpha|^2}{8\pi} \int \Gamma_f^{(d)}(\vec{\rho}, \tau) e^{i\vec{K} \cdot \vec{\rho}} e^{-i(\nu - \omega)\tau} d^3 \vec{\rho} d\tau \quad (\text{IV-111})$$

Nous allons nous intéresser successivement à la distribution angulaire de l'intensité globale diffusée dans chaque direction, puis au spectre de la lumière diffusée.

(i) Intensité globale  $S(\mathbf{K})$  diffusée dans une direction donnée.

Cette quantité s'obtient en intégrant (IV-111) sur  $\nu$  (voir equ IV-90):

$$S(\vec{K}) = \frac{\epsilon_0 c}{8} |\vec{C}|^2 |\alpha|^2 \int \Gamma_f^{(d)}(\vec{\rho}, 0) e^{i\vec{K} \cdot \vec{\rho}} d^3 \vec{\rho} \quad (\text{IV-112})$$

Il nous faut donc évaluer la fonction de corrélation purement spatiale des fluctuations de densité dans un gaz parfait:

$$\Gamma_f^{(d)}(\vec{\rho}, 0) = \overline{\delta n_f(\vec{r}, t) \delta n_f(\vec{r} - \vec{\rho}, t)} d^3 \vec{r} \quad (\text{IV-113})$$

Cette quantité mesure les corrélations entre les fluctuations de deux cellules du gaz au même instant. Par définition même d'un gaz parfait forme de particules sans interaction, cette quantité est proportionnelle à la distribution  $\delta(\mathbf{p})$ . En effet, dire que toutes les configurations du gaz sont équiprobables revient à dire qu'il y a autant de chance de trouver dans deux cellules arbitrairement proches des fluctuations de même signe ou de signe contraire. La moyenne sur le temps  $t$  exprimée par la barre dans (IV-110) signifie que toutes ces configurations équiprobables sont explorées et

on ne peut que trouver  $\Gamma_f^{(d)}(\vec{0}, 0)$  dès lors que  $\vec{p} \neq 0$ . Il ne nous reste plus qu'à préciser la valeur de  $\Gamma_f^{(d)}(\vec{0}, 0)$ , c'est à dire évaluer la moyenne du carré de la fluctuation de densité en un point:

$$\Gamma_f^{(d)}(\vec{0}, 0) = \int \overline{|\delta n_f(\vec{r}, t)|^2} d^3 \vec{r} \quad (\text{IV-114})$$

Considérons une cellule de volume  $\Delta V$  arbitrairement petit de gaz au point  $r$ . Dans cette cellule, la fluctuation du nombre de molécules est  $\delta n_f(r, t)/\Delta V$ . Or nous savons que la valeur quadratique moyenne de la fluctuation du nombre de molécules dans une cellule est la racine du nombre de molécules qu'elle contient. D'où:

$$|\delta n_f(r, t)|^2 (\Delta V)^2 = N \Delta V \quad (\text{IV-115})$$

Soit:

$$|\delta n_f(r, t)|^2 = N/\Delta V \quad (\text{IV-116})$$

Remplaçons maintenant l'intégrale dans (IV-114) par une somme discrète portant sur des volumes  $\Delta V$  identiques pavant le volume  $V$ . On obtient:

$$\Gamma_f^{(d)}(\vec{0}, 0) = NV/\Delta V = N/\Delta V \quad (\text{IV-117})$$

Bien sûr  $\Gamma_f^{(d)}(\vec{p}, 0)$  est devenue dans cette opération de discrétisation une distribution de support  $\Delta V$ . A la limite où  $\Delta V$  tend vers zéro, une distribution de support  $\Delta V$  et de valeur  $N/\Delta V$  tend manifestement vers la distribution de Dirac  $N \delta(\vec{p})$ . Ainsi:

$$\Gamma_f^{(d)}(\rho, 0) = N \delta(\rho) \quad (\text{IV-118})$$

Reportant cette expression dans (IV-112) on constate que la diffusion par les fluctuations de densité du gaz est répartie de façon isotrope (à la dépendance angulaire de  $|C|^2$  près) et est proportionnelle au nombre total de molécules du gaz  $N$  (et non à son carré!):

$$S(\bar{K} \neq 0) = \frac{\epsilon_0 c}{8} |\bar{C}|^2 |\alpha|^2 N \quad (\text{IV-119})$$

Pour calculer l'intensité totale diffusée par un gaz il suffit donc de multiplier par le nombre total de molécules l'intensité moyenne que diffuse une molécule unique dans la même direction (terme  $(\epsilon_0 c/g) |C|^2 |\alpha|^2$ ). Il n'y a pas d'interférence entre atomes différents: la diffusion est incohérente. Ce résultat simple est bien sûr dû au caractère aléatoire de la distribution des atomes dans le milieu. Les champs émis par des atomes différents ne peuvent interférer que vers l'avant. Latéralement, toutes les interférences sont brouillées ce qui est une conséquence de l'absence de corrélations des densités en deux points distincts. L'intensité diffusée latéralement, qui fait intervenir un carré de fluctuation (equ IV-110) apparaît finalement comme proportionnelle au nombre d'atomes car la valeur moyenne du carré d'une fluctuation est précisément égale au nombre de particules dans une cellule!

(ii) Spectre de la lumière diffusée:

Pour évaluer la dépendance spectrale de la lumière diffusée, il nous faut connaître non plus seulement  $\Gamma_f^{(d)}(\rho, 0)$ , mais plus généralement  $\Gamma_f^{(d)}(\rho, \tau)$ . Le calcul complet de cette expression, du ressort de la

Mécanique statistique, sort du cadre de ce cours. Bornons nous ici à une analyse qualitative. La corrélation  $\Gamma_f^{(d)}(\mathbf{p}, \tau)$  dépend manifestement de la probabilité de trouver une même molécule en un point  $\mathbf{r}$  à un instant  $t$  et au point  $\mathbf{r} + \mathbf{p}$  à l'instant  $t + \tau$ . Si la molécule n'a pas subi de collision pendant le temps  $\tau$ , cette probabilité est directement reliée à la probabilité de trouver dans le gaz une molécule de vitesse  $\mathbf{v} = \mathbf{p} / \tau$  dont on sait qu'il s'agit d'une loi de probabilité gaussienne (distribution de Maxwell des vitesses). On trouve ainsi dans la fonction de corrélation cherchée un terme en  $\exp(-\mathbf{p}^2 / (\tau v)^2)$  où  $v$  est une vitesse caractéristique égale à un facteur de l'ordre de l'unité près à la vitesse quadratique moyenne des molécules (on constate sans peine qu'une telle fonction tend bien vers la distribution  $\delta(\mathbf{p})$  lorsque  $\tau$  tend vers zéro). La transformée de Fourier spatiale de cette fonction donne une Gaussienne de largeur inverse, c'est à dire une fonction de la forme  $\exp(-(\tau v)^2 \mathbf{K}^2)$ . En effectuant finalement la transformée de Fourier temporelle de cette fonction, on obtient un spectre en  $\exp(-(\nu - \omega)^2 / v^2 \mathbf{K}^2)$ : La lumière émise dans la direction  $\mathbf{K}$  présente un élargissement spectral de l'ordre de  $v\mathbf{K}$ . Il s'agit de l'effet Doppler: les dipôles animés de vitesses différentes rayonnent à des fréquences différentes dans la direction d'observation sur une largeur spectrale proportionnelle à la vitesse moyenne des molécules. Notons que le spectre Doppler est corréle à la direction d'observation: dans une direction proche de la direction avant ( $\mathbf{K}$  petit), l'élargissement est faible. Il est au contraire maximum vers l'arrière ( $\mathbf{K} = 2k_0$  prend sa valeur maximale). Il est facile de comprendre cet effet par une simple analyse qualitative de l'effet dont le soin est laissé au lecteur.

Enfin, il faut également tenir compte dans l'expression de  $\Gamma_f^{(d)}(\mathbf{p}, \tau)$  du fait que seule une fraction des molécules n'a pas subi de collision pendant l'intervalle  $\tau$  et ajouter la contribution éventuelle des molécules

ayant subi des collisions pendant ce temps. En première approximation, on multipliera donc la fonction de corrélation donnée ci-dessus par  $\pi(\tau) = \exp(-\tau/\tau_{\text{col}})$ , probabilité pour qu'une molécule n'ait pas subi de collision pendant  $\tau$  (voir § IV-1;  $\tau_{\text{col}} = l/v$  est le temps de collision et  $l$  le parcours moyen). La transformée de Fourier de  $\pi(\tau)$  étant une Lorentzienne, le spectre obtenu sera donc le produit de convolution de la gaussienne décrivant l'effet Doppler par la Lorentzienne de largeur  $1/\tau_{\text{col}} = v/l$  décrivant l'effet des collisions (profil de Voigt; voir § IV-2). A faible pression ( $l \gg \lambda$ ) les collisions sont négligeables et l'élargissement Doppler domine. A forte pression ( $l \ll \lambda$ ) c'est au contraire l'élargissement collisionnel qui s'impose. (\*)

*Remarque: Notons que l'intensité diffusée dépend de la longueur d'onde  $\omega$  du rayonnement incident par l'intermédiaire de la réponse atomique  $\alpha$  (voir chapitre III). A la limite des fréquences faibles devant les fréquences de résonance moléculaires (diffusion Rayleigh)  $|\alpha|^2$  est proportionnel à  $\omega^4$  et la diffusion du gaz croît très vite avec la fréquence. C'est ce qui explique la couleur bleue du ciel.*

e) Diffusion par une onde acoustique. Effet Brillouin.

Considérons pour finir une onde de fluctuation de densité dans un milieu matériel (onde acoustique sonore ou hypersonore dans un liquide, un solide ou un gaz). Cette onde produit une variation d'indice de la forme :

$$n = n_0 + n_1 \cos(\vec{k}_s \cdot \vec{r} - \omega_s t) \quad (\text{IV-120})$$

$\vec{k}_s$  et  $\omega_s$  sont les vecteurs d'onde et pulsation de l'onde *acoustique*, dont la vitesse de phase dans le milieu est :

---

(\*) Notons qu'il faudrait en toute rigueur ajouter dans l'expression de  $\Gamma(\rho, \tau)$  la contribution des molécules ayant subi une ou plusieurs collisions pendant l'intervalle de temps  $\tau$ . Ces contributions qui deviennent importantes a forte pression dépendent des potentiels d'interaction entre molécules. Ces contributions induisent des corrections non Lorentziennes au profil spectral.

$$v_s = \omega_s / k_s \quad (\text{IV-121})$$

La lumière diffusée dans une direction  $\mathbf{K} \neq 0$  ne peut provenir que de la fonction de corrélation des fluctuations de l'indice et l'on trouve, après un raisonnement identique à celui fait plus haut:

$$\Gamma_f(\vec{\rho}, \tau) = n_1^2 \int \overline{\cos(\vec{k}_s \cdot \vec{r} - \omega_s t_0) \cos[\vec{k}_s \cdot (\vec{r} - \vec{\rho}) - \omega_s (t_0 - \tau)]} d^3 \vec{r} \quad (\text{IV-122})$$

Developpons les cosinus. On obtient:

$$\Gamma_f(\vec{\rho}, \tau) = \frac{n_1^2}{4} \int \left[ e^{i(\vec{k}_s \cdot \vec{\rho} - \omega_s \tau)} + e^{-i(\vec{k}_s \cdot \vec{\rho} - \omega_s \tau)} + e^{i\vec{k}_s \cdot (2\vec{r} - \vec{\rho})} \frac{1}{e^{-i\omega_s (2t_0 - \tau)}} + e^{-i\vec{k}_s \cdot (2\vec{r} - \vec{\rho})} \frac{1}{e^{i\omega_s (2t_0 - \tau)}} \right] d^3 \vec{r} \quad (\text{IV-123})$$

La moyenne sur  $t_0$  (représentée par la barre) annule les deux derniers termes oscillant dans (IV-123). Il reste simplement :

$$\Gamma_f(\vec{\rho}, \tau) = v \frac{n_1^2}{2} \cos(\vec{k}_s \cdot \vec{\rho} - \omega_s \tau) \quad (\text{IV-124})$$

et la fonction de corrélation de l'indice a la structure de l'onde acoustique. La TF de (IV-124), décomposée en deux exponentielles, donne alors la distribution  $S(\mathbf{K}, \nu)$  comme une somme de deux termes, TF spatio-temporelles de fonctions constantes:

$$S(\mathbf{K}, \nu) = S_1(\mathbf{K}, \nu) + S_2(\mathbf{K}, \nu) \quad (\text{IV-125})$$

$S_1$  n'est donc non nul que pour:

$$\mathbf{K} = -\mathbf{k}_s \text{ et } \nu = \omega - \omega_s \quad (\text{IV-126})$$

Quant à  $S_2$ , il n'est non nul que si

$$\mathbf{K} = \mathbf{k}_s \text{ et } \nu = \omega + \omega_s \quad (\text{IV-127})$$

On obtient d'ailleurs immédiatement les valeurs de  $S_1$  et  $S_2$  dans les directions respectives où ces termes sont non nuls:

$$S_1(\vec{\mathbf{K}} = -\vec{\mathbf{k}}_s, \nu) = \frac{\epsilon_0 c}{8} |\vec{\mathbf{C}}|^2 \nu^2 n_1^2 \delta(\nu - \omega + \omega_s) \quad (\text{IV-128})$$

$$S_2(\vec{\mathbf{K}} = \vec{\mathbf{k}}_s, \nu) = \frac{\epsilon_0 c}{8} |\vec{\mathbf{C}}|^2 \nu^2 n_1^2 \delta(\nu - \omega - \omega_s) \quad (\text{IV-129})$$

Nous pouvons recire les formules (IV-126 et 127) sous une forme equivalente en posant:

$$\mathbf{k}_d = \mathbf{k}_d \text{ (vecteur d'onde diffusé)} \quad (\text{IV-130})$$

et en remplaçant  $\mathbf{K}$  par sa valeur  $\mathbf{k}_d - \mathbf{k}_0$  (voir equ IV-72). La condition (IV-128) devient alors:

$$\mathbf{k}_d = \mathbf{k}_0 - \mathbf{k}_s \text{ et } \nu = \omega - \omega_s \quad (\text{IV-131})$$

et la condition (IV-129):

$$\mathbf{k}_d = \mathbf{k}_0 + \mathbf{k}_s \text{ et } \nu = \omega + \omega_s \quad (\text{IV-132})$$

La diffusion s'effectue donc dans deux directions et a deux fréquences bien définies.

Avant d'interpréter physiquement ces deux conditions, commençons par estimer quelques ordres de grandeur. Les fréquences et vecteurs d'onde optiques ont comme valeurs typiques:

$$\bullet \omega \sim 10^{16} \text{ s}^{-1} \quad , \quad |k_0| \sim |k_d| \simeq \frac{2\pi}{\lambda} \sim 10^7 \text{ m}^{-1}$$

Quant à l'onde acoustique, sa fréquence et sa vitesse de phase sont *variables dans une large gamme*. Nous prendrons par exemple:

$$\bullet \omega_s \sim 10^8 \text{ s}^{-1} \text{ (onde acoustique de 100 MHz)}$$

$$v_s \sim 10^4 \text{ m/s (vitesse du son dans un solide)}$$

ce qui correspond à un vecteur d'onde très petit devant les vecteurs d'onde optiques:

$$k_s = \frac{\omega_s}{v_s} \simeq 6 \cdot 10^4 \text{ m}^{-1} \ll |k_0| \quad , \quad |k_d|$$

La diffusion s'effectue ainsi (voir équ IV-131 et 132) avec changement très petit de vecteur d'onde optique, c'est-à-dire sous tout petit angle. Envisageons maintenant successivement les deux solutions (IV-131) et (IV-132):

$$(i) \text{ Solution } \mathbf{k}_d = \mathbf{k}_0 + \mathbf{k}_s \quad v = \omega + \omega_s$$

La figure (30) montre la disposition des trois vecteurs d'onde dans ce cas.  $\mathbf{k}_s$  et  $\mathbf{k}_0$  ayant pratiquement même module, le triangle formé par les trois vecteurs d'onde est isocèle et l'on a



$$\sin(\theta/2) = k_s/2k_0$$

(IV-133)

Tout se passe comme si le vecteur d'onde incident était réfléchi suivant la loi de Descartes ( réflexion spéculaire) sur les plans d'onde acoustique normaux à  $k_s$ , l'incidence sur ces plans d'onde étant très "rasante" ( elle se fait sous l'angle  $(\pi-\theta)/2$ ). La condition (IV-133) est alors très claire: elle correspond à l'angle pour lequel la réflexion sur deux maxima successifs de l'onde acoustique renvoie en phase la lumière dans la direction spéculaire. Il s'agit d'une condition similaire à la condition de Bragg pour la diffusion des rayons X.

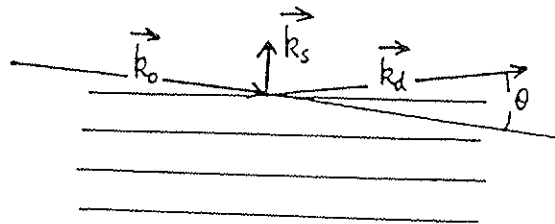


Fig 30

Quant à la condition sur les fréquences, elle s'explique toujours par l'effet Doppler: la fréquence  $\nu$  du champ diffusé est plus élevée que celle du champ incident parce que la lumière est "réfléchi" sur des plans d'onde qui vont vers la source: la projection de la vitesse des plans d'onde acoustique sur la direction du vecteur d'onde incident est  $v_s \sin(\theta/2)$ . Tout se passe donc comme si la lumière "réfléchi" sur les plans d'onde provenait d'une image se dirigeant vers l'observateur à la vitesse  $2v_s \sin(\theta/2)$  et on prédit un déplacement Doppler vers le bleu égal à  $2\omega(v_s/c)\sin(\theta/2)$ . Remplaçant alors  $\sin(\theta/2)$  par sa valeur (IV-133), on met ce déplacement de fréquence

sous la forme  $\omega(v_s/c)(k_s/k_0)$  qui n'est autre que  $\omega_s$  (compte tenu des relations de dispersion entre  $\omega$  et  $k_0$  d'une part et  $\omega_s$  et  $k_s$  d'autre part). On retrouve bien la condition (IV-131) sur les fréquences!

(ii) Solution  $k_d = k_0 - k_s$  et  $\nu = \omega - \omega_s$ .

La figure (31) représente maintenant la situation. Cette fois l'onde se réfléchit sur l'arrière des plans d'onde. La condition de Bragg est la même et le décalage de fréquence est maintenant négatif: l'onde est en effet réfléchi par des plans d'onde qui s'éloignent de la source. Nous ne recommencerons pas les calculs qui sont similaires à ceux que nous avons développés plus haut.

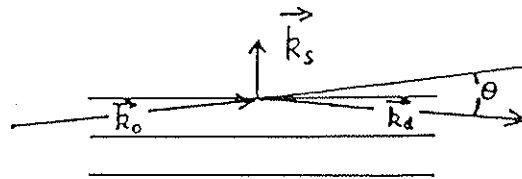


Fig 31

L'effet de diffusion sur des ondes acoustiques dans un solide, un liquide ou un gaz porte le nom d'effet Brillouin ou encore d'effet acousto-optique. Il peut être utilisé pour étudier les propriétés des ondes acoustiques dans les milieux (étude expérimentale des relations de dispersion entre  $k_s$  et  $\omega_s$ ). Il peut également être employé en physique des lasers pour modifier la direction ou la fréquence d'un faisceau lumineux. On génère par exemple dans un cristal à un instant donné une onde acoustique qui permet de défléchir en un temps très court le faisceau d'un laser et de déplacer sa fréquence.

Notons pour finir que l'effet Brillouin décrit ici est bien entendu un phénomène de diffusion cohérente: on le voit en particulier au fait que les

intensités diffusées (IV-128) et (IV-129) sont proportionnelles à  $V^2 n_1^2$ , donc au carré du nombre d'atomes.

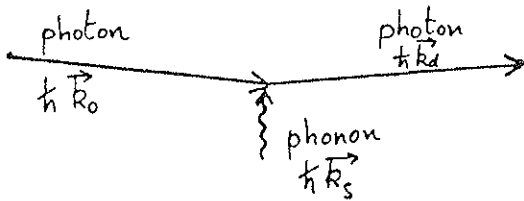


Fig 32

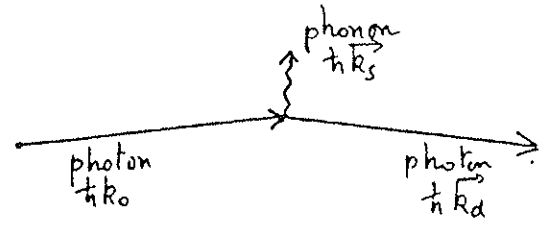


Fig 33

*Remarque: Les relations (IV-131) et (IV-132) ont une interprétation physique très simple si l'on se représente le processus de diffusion Brillouin en termes quantiques. L'onde acoustique peut en effet, tout comme le champ optique être décrite à l'aide de quanta de vibration, les phonons.  $\hbar \vec{k}_s$  et  $\hbar \omega_s$  sont alors l'impulsion et l'énergie d'un phonon, tout comme  $\hbar \vec{k}_i$ ,  $\hbar \omega$  et  $\hbar \vec{k}_d$ ,  $\hbar \nu$  sont respectivement l'énergie-impulsion du photon incident et celle du photon diffusé. Le processus (i) étudié ci-dessus correspond alors à l'annihilation du photon incident et d'un phonon de l'onde acoustique et la création simultanée d'un photon diffusé (voir Fig.32). Les relations (IV-131) ne sont rien d'autre que l'expression de la conservation de l'énergie et de l'impulsion de l'ensemble "champ optique + milieu diffuseur" au cours de ce processus. De même le mécanisme de diffusion (ii) correspond à l'annihilation du photon incident et à la création simultanée du photon diffusé et d'un phonon (voir fig. 33). Les relations (IV-132) expriment la conservation d'énergie et d'impulsion dans ce cas.*



## CHAPITRE V

### CHAMPS DANS LA MATIERE. MILIEUX LINEAIRES.

Nous abordons dans ce Chapitre le problème général de la propagation des ondes électromagnétiques dans un milieu matériel. Nous avons vu au Chapitre II -sur un exemple très simple- que le champ traversant la matière résultait de l'interférence entre le champ "incident" (créé par les sources extérieures) et le champ diffusé vers l'avant par les charges du milieu. Il nous faut maintenant généraliser et formaliser ce point de vue en établissant et en analysant les équations de propagation du champ dans un milieu matériel.

Dans un premier temps, il nous faut définir ce qu'on appelle "champ" dans le milieu matériel : il est clair que les distributions des charges et de courant -et donc les champs- sont en fait des fonctions très compliquées de la position instantanée des atomes, des molécules ou des ions et des électrons dans ces systèmes. Les champs ont donc une structure microscopique -variant sur des dimensions de l'ordre de l'angstrom. Ils doivent aussi avoir une variation "lente" sur des distances caractéristiques de l'ordre de la longueur d'onde  $\lambda$  dans le milieu (c'est-à-dire de l'ordre de quelques milliers d'Å dans le domaine optique). En général, les effets physiques auxquels on s'intéresse sont insensibles à la structure microscopique des champs (par exemple, la mesure du champ implique l'introduction d'une sonde dont les dimensions sont toujours très grandes devant les dimensions atomiques). Par contre, ces effets sont sensibles à la

variation du champ à l'échelle de la longueur d'onde (effets de propagation, d'interférence, de diffraction). On renoncera donc en général à chercher à décrire la structure microscopique des champs et des courants, pour s'intéresser à l'évolution de champs moyennés sur une distance caractéristique  $s_0$  intermédiaire entre la dimension atomique et la longueur d'onde. Nous précisons donc pour commencer (§ V-1°) cette notion de champ moyen que l'on appelle le champ macroscopique dans le milieu. Il apparaît alors immédiatement que les champs électriques et magnétiques macroscopiques dépendent de distributions moyennées de charges et de courants dans le milieu. Il est commode de séparer dans ces distributions une contribution provenant des charges susceptibles de se déplacer sur de grandes distances dans le milieu (ions, électrons de conduction) et une contribution provenant des charges "liées", localisées dans les atomes, molécules ou ions du milieu (noyaux, électrons liés aux noyaux...). Nous montrerons au § V-2 que les distributions moyennes de charges et de courants associées aux particules liées s'expriment simplement à partir d'un développement en puissances de  $a_0/\lambda$  faisant apparaître comme termes successifs la densité de moment dipolaire électrique moyen  $\mathbf{P}(\mathbf{r},t)$ , la densité de moment dipolaire magnétique moyen  $\mathbf{M}(\mathbf{r},t)$ , la densité de moment quadrupolaire électrique  $\mathbf{Q}'(\mathbf{r},t)$  etc... Nous serons alors en mesure de donner l'expression générale des équations de Maxwell dans la matière qui couplent les champs moyens à ces densités de dipôles et de quadrupôles (§ V-3). Nous analyserons ensuite le contenu physique de ces équations en étudiant comment la conservation de l'énergie du système champ-milieu matériel s'y exprime (§ V-4). Pour résoudre ces équations, il nous faut évidemment être capables de calculer les densités des dipôles, quadrupôles associées aux atomes et molécules du milieu ainsi que la

densité de courant macroscopique dans le milieu. Ces distributions sont elles-même induites par les champs. En première approximation, pour des champs suffisamment faibles, on suppose que les distributions induites de dipôles et de courants sont proportionnelles aux champs. C'est l'hypothèse de la réponse linéaire du milieu. On définit cette réponse linéaire par la donnée de quantités complexes, généralement tensorielles et dépendant de la fréquence que l'on appelle les susceptibilités linéaires du milieu (la conductivité électrique, la susceptibilité électrique et la susceptibilité magnétique). Nous définissons ces susceptibilités au §V-5 et nous nous restreignons dans la suite au cas où elles sont scalaires (milieux isotropes). Nous discutons ensuite du caractère généralement complexe de ces susceptibilités et les relierons directement aux quantités d'énergie échangées entre le champ et le milieu (§V-6). Nous montrons ensuite que le principe de causalité ( qui exprime que le milieu ne peut répondre à un champ avant que celui-ci ne soit présent) entraîne en général des contraintes très précises sur les susceptibilités, et en particulier l'existence d'une relation remarquable entre leurs parties réelle et imaginaire ( relations de Kramers-Kronig; §V-7). Nous abordons ensuite la description de différents types de milieux présentant une polarisation de nature électrique ou magnétique en commençant par analyser la réponse linéaire de ces milieux au niveau moléculaire. Nous faisons la distinction entre deux types de réponses linéaires de natures différentes, celle des milieux polaires dans lesquels les dipôles macroscopiques sont, au moins en partie, produits par l'orientation dans le champ de dipôles microscopiques initialement distribués de façon aléatoire et celle des milieux non polaires dans lesquels il ne préexiste pas de dipôles, mais où ceux-ci sont induits sur chaque atome par le champ. Nous passons en revue ces deux types de milieux, dans le cas d'une

polarisation de nature dipolaire électrique aussi bien que dans celui d'une polarisation de nature magnétique ( les milieux polaires étant dans ce dernier cas appelés "paramagnétiques" et les milieux non polaires "diamagnétiques") (§V-8). Nous mentionnons également dans ce paragraphe l'existence du magnétisme d'origine nucléaire et donnons une description qualitative d'une expérience de Résonance Magnétique Nucléaire. Nous abordons ensuite un problème important dont la résolution conditionne le calcul des susceptibilités: le champ agissant en moyenne sur un atome ou une molécule du milieu n'est en toute rigueur pas le champ macroscopique que nous avons défini plus haut. Du fait de ses interactions avec ses voisins, une molécule perturbe son environnement qui est donc en moyenne différent de celui d'un point quelconque du milieu. Le champ moyen produit sur une molécule par toutes les autres charges du problème s'appelle le champ local. Nous analysons au §V-9 la relation entre champ local et champ macroscopique et donnons une expression assez générale du champ local. Nous montrons également que champ local et champ macroscopique se confondent dans un milieu dilué. Nous sommes alors en mesure de donner l'expression générale de la susceptibilité linéaire d'un milieu diélectrique (§V-10). Nous montrons que pour un milieu non polaire cette expression se déduit très simplement du calcul quantique des polarisabilités atomiques fait au Chapitre III et nous justifions le modèle classique de l'électron de Thomson: lorsqu'on cherche à décrire les propriétés diélectriques d'un milieu non polaire, tout se passe à l'approximation linéaire comme si ce milieu était constitué par un ensemble d'électrons élastiquement liés interagissant avec le champ. La mécanique quantique fournit les fréquences d'oscillation de ces électrons, qui sont également les fréquences pour lesquelles le milieu absorbe de l'énergie



électromagnétique. On peut interpréter ce phénomène d'absorption en termes de photons en définissant la probabilité d'absorption par unité de temps d'un photon par l'atome, proportionnelle à l'intensité du champ. Nous montrons ensuite comment on peut créer une situation dans laquelle le milieu diélectrique, au lieu d'absorber, amplifie le champ par émission induite de photons (§V-11). Ce processus, symétrique du phénomène d'absorption, ne peut être compris que dans une théorie quantique du milieu atomique et n'a pas d'équivalent dans le modèle de l'électron classique élastiquement lié. Ce phénomène joue évidemment un rôle essentiel dans les lasers. Le § V-12 est consacré au calcul simple et classique de la conductivité d'un métal. Ici encore un modèle classique d'électrons libre (modèle de Drude) décrit tout au moins qualitativement assez bien les propriétés, en dernier ressort quantiques, du métal. Nous abordons enfin le problème de la propagation du champ dans un milieu matériel homogène et isotrope au §V-13 où nous étudions la propagation dans un diélectrique isolant (propriétés de l'indice de réfraction complexe) et dans un métal (étude de l'effet de peau, de l'effet de coupure à haute fréquence). L'étude du problème de propagation doit être complétée par celle du passage du champ d'un milieu à un autre: les sources du champ sont en effet généralement extérieures au milieu et il est essentiel de déterminer comment le champ se raccorde entre le vide et un milieu matériel et plus généralement entre deux milieux (§V-14). Nous retrouvons alors les lois bien connues de la réflexion et de la transmission par une interface entre deux diélectriques (lois de Snell- Descartes et relations de Fresnel) ainsi que les propriétés réfléchrices des métaux.

### 1\*) Notion de champ macroscopique dans un milieu matériel

En toute rigueur, les équations de Maxwell "dans le vide" sont toujours valables : tout milieu matériel est en effet "vide" à l'échelle microscopique et il est possible d'écrire pour les champs microscopiques locaux  $\vec{e}$  et  $\vec{b}$  les équations :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \cdot \vec{e} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad ; \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{b} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{e} = - \frac{\partial \vec{b}}{\partial t} \quad ; \quad \vec{\nabla} \times \vec{b} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{e}}{\partial t} + \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \vec{j} \end{array} \right. \quad (\text{V-1})$$

où  $\rho$  et  $\vec{j}$  sont les distributions microscopiques de charges et de courants. Par leur complexité, ces quantités ne sont cependant d'aucune utilité en général. On s'intéressera donc plutôt à des champs "macroscopiques"  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  obtenus en faisant la moyenne de  $\vec{e}$  et  $\vec{b}$  autour de chaque point  $r$  du milieu, sur un volume de dimension linéaire  $s_0$ , intermédiaire entre l'échelle atomique et la longueur d'onde :

$$a \ll s_0 \ll \lambda_0 \quad (\text{V-2})$$

$a$  est la distance interatomique ou moléculaire moyenne dans le milieu et  $\lambda_0$  la longueur d'onde caractéristique de l'onde. Pour un milieu condensé,  $a$  est de l'ordre de quelques  $a_0$ , rayon de Bohr. Pour un gaz dilué,  $a$  peut valoir quelques centaines d'angstroms. La relation (V-2) implique que l'on moyenne sur un volume contenant beaucoup d'atomes, mais petit devant  $\lambda_0$

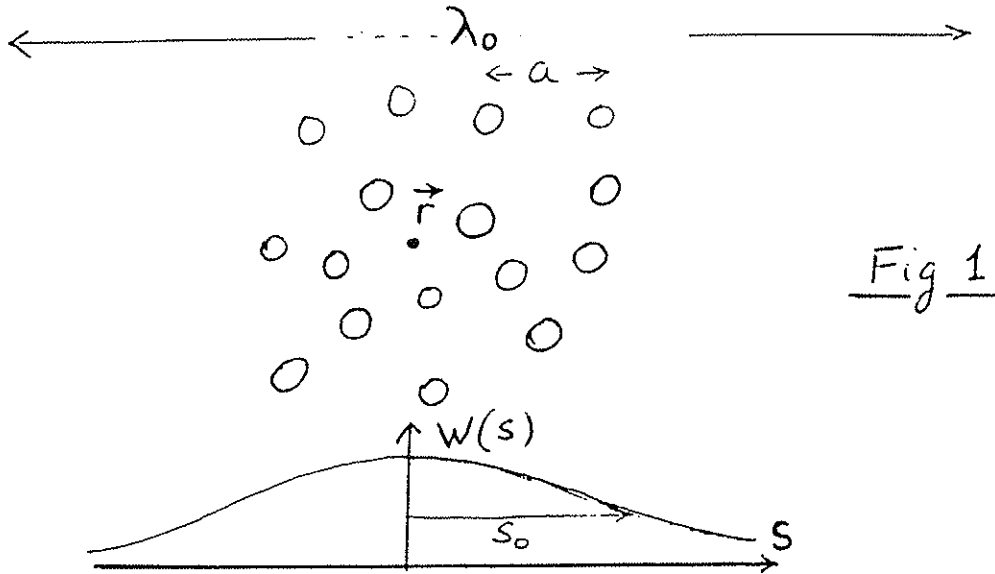


Fig 1

(Fig 1). Ce procédé de moyennage cesse d'être valable pour décrire des milieux extrêmement dilués interagissant avec des champs optiques ou encore la propagation des champs de longueur d'onde très courte (rayons X) dans un solide (cristal pour lequel  $a \sim \lambda_0$ ). Pour effectuer mathématiquement cette opération de moyennage, on introduit une "fonction de lissage"  $W(\mathbf{s})$  de largeur  $s_0$  normalisée à l'unité et à symétrie sphérique et l'on pose :

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r}, t) &= \int d^3 \vec{s} W(\vec{s}) \vec{e}(\vec{r}-\vec{s}, t) \\ \vec{B}(\vec{r}, t) &= \int d^3 \vec{s} W(\vec{s}) \vec{b}(\vec{r}-\vec{s}, t)\end{aligned}\tag{V-3}$$

avec une définition analogue pour les densités moyennes des charges et courants :

$$\begin{aligned}\langle \rho(\vec{r}, t) \rangle &= \int d^3 \vec{s} W(\vec{s}) \rho(\vec{r}-\vec{s}, t) \\ \langle \vec{j}(\vec{r}, t) \rangle &= \int d^3 \vec{s} W(\vec{s}) \vec{j}(\vec{r}-\vec{s}, t)\end{aligned}\tag{V-4}$$

Nous admettrons -on peut s'en convaincre aisément- que la forme analytique exacte et la largeur  $s_0$  de la fonction de lissage (pourvu qu'elle satisfasse à la relation V-2) importent peu : les valeurs moyennes obtenues n'en dépendent en général que de façon tout à fait négligeable, à condition qu'il y ait beaucoup d'atomes dans  $s_0^3$  et que les propriétés statistiques du milieu (densité des atomes ou des molécules) varient peu sur la dimension  $s_0$ . On peut pour fixer les idées choisir une forme analytique simple pour  $W(\vec{s})$  :

$$W(\vec{s}) = \frac{\pi^{-3/2}}{s_0^3} e^{-|\vec{s}|^2/s_0^2} \quad (\text{V-5})$$

Cette forme a le mérite d'être dérivable pour tout  $\vec{s}$  et de correspondre à un lissage régulier. (Il est préférable, puisque nous serons amenés à dériver cette fonction de lissage, d'éviter les fonctions créneaux qui présentent une discontinuité brutale sur leur frontière).

L'opération de moyennage ainsi définie étant linéaire et commutant manifestement avec les opérations de dérivations par rapport à  $\vec{r}$  et  $t$ , on obtient à partir de V-1 et V-3 :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\langle \rho(\vec{r}, t) \rangle}{\epsilon_0} \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \langle \vec{j}(\vec{r}, t) \rangle \end{array} \right. \quad (\text{V-6})$$

Il nous faut donc expliciter maintenant les moyennes  $\langle \rho(\vec{r}, t) \rangle$  et  $\langle \vec{j}(\vec{r}, t) \rangle$ .

2\*) Distributions moyennes des charges et de courants : les polarisations dipolaires et quadrupolaires du milieu

a) Séparation des densités microscopiques de charges et de courants en parties "libre" et "liée".

En toute généralité, les distributions microscopiques de charge et de courant s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho(\vec{r}, t) = \sum_{\alpha} q_{\alpha} \delta[\vec{r} - \vec{r}_{\alpha}(t)] \\ \vec{j}(\vec{r}, t) = \sum_{\alpha} q_{\alpha} \vec{v}_{\alpha} \delta[\vec{r} - \vec{r}_{\alpha}(t)] \end{array} \right. \quad (V-7)$$

où les sommes portent sur toutes les charges  $\alpha$  du milieu. Séparons ces charges en deux catégories :

(i) Les charges "libres" sans structure interne capables de se déplacer indépendamment les unes des autres dans le milieu (électrons de conduction dans un métal...). Appelons  $q_{\alpha l}$  ces charges.

(ii) Les charges "liées" à un atome ou une molécule (noyaux, électrons liés). Identifions par un indice  $m$  chaque "entité" atomique, ionique ou moléculaire (que nous appellerons pour simplifier "molécule") et notons  $q_m^r$  les charges élémentaires de cette "entité". On peut alors

decomposer V-7 sous la forme :

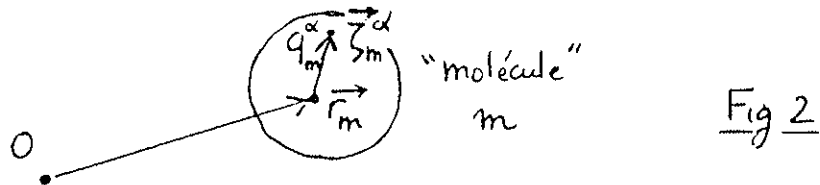
$$\left\{ \begin{array}{l} \rho(\vec{r}, t) = \rho_{l i b r e}(\vec{r}, t) + \rho_{l i e}(\vec{r}, t) \\ \vec{j}(\vec{r}, t) = \vec{j}_{l i b r e}(\vec{r}, t) + \vec{j}_{l i e}(\vec{r}, t) \end{array} \right. \quad (V-8)$$

avec:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_{\text{libre}}(\vec{r}, t) = \sum_{\alpha \ell} q_{\alpha \ell} \delta[\vec{r} - \vec{r}_{\alpha \ell}(t)] \\ \vec{j}_{\text{libre}}(\vec{r}, t) = \sum_{\alpha \ell} q_{\alpha \ell} \vec{v}_{\alpha \ell} \delta[\vec{r} - \vec{r}_{\alpha \ell}(t)] \end{array} \right. \quad (\text{V-9})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_{\text{lié}}(\vec{r}, t) = \sum_m \sum_{\alpha} q_m^{\alpha} \delta[\vec{r} - \vec{r}_m - \vec{\zeta}_m^{\alpha}] \\ \vec{j}_{\text{lié}}(\vec{r}, t) = \sum_m \sum_{\alpha} q_m^{\alpha} (\vec{v}_m + \dot{\vec{\zeta}}_m^{\alpha}) \delta[\vec{r} - \vec{r}_m - \vec{\zeta}_m^{\alpha}] \end{array} \right. \quad (\text{V-10})$$

Dans (V-10),  $\vec{r}_m$ ,  $\vec{v}_m$  représentent la position et la vitesse du centre de masse de l'"entité"  $m$  et  $\vec{\zeta}_m^{\alpha}$ ,  $\dot{\vec{\zeta}}_m^{\alpha}$  la position et la vitesse relative de la charge  $q_m^{\alpha}$  par rapport à ce centre de masse ( par exemple position et vitesse des électrons relativement au noyau dans un atome; voir Fig2).



b) Densités microscopiques de dipôles électrique et magnétique et de quadrupôle électrique.

Nous avons vu au Chapitre III que le rayonnement d'une distribution de charges et de courants localisée dans un volume petit devant  $\lambda_0^3$  était commodément défini par la donnée du dipôle électrique et éventuellement du dipôle magnétique et quadrupôle électrique associés à

cette distribution. Rappelons que nous avons été amenés à définir pour un système localisé  $m$  un dipôle électrique qui avec les notations de ce Chapitre s'écrit:

$$\vec{p}_m = \sum_{\alpha} q_m^{\alpha} \vec{z}_m^{\alpha} \quad (V-11)$$

De même le dipôle magnétique de  $m$  est:

$$\vec{m}_m = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} q_m^{\alpha} \vec{z}_m^{\alpha} \times \dot{\vec{z}}_m^{\alpha} \quad (V-12)$$

Nous définissons enfin le quadrupole électrique  $\vec{Q}'_m$  comme un tenseur dont la composante  $ij$  est: (\*)

$$Q'_{m,ij} = 3 \sum_{\alpha} q_m^{\alpha} z_{m,i}^{\alpha} z_{m,j}^{\alpha} \quad (V-13)$$

A ces quantités, nous pouvons associer des densités microscopiques de dipôle électrique et magnétique et de quadrupôle :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{p}(\vec{r}, t) = \sum_m \vec{P}_m \delta[\vec{r} - \vec{r}_m] \\ \vec{m}(\vec{r}, t) = \sum_m \vec{M}_m \delta[\vec{r} - \vec{r}_m] \\ \vec{q}(\vec{r}, t) = \sum_m \vec{Q}'_m \delta[\vec{r} - \vec{r}_m] \end{array} \right. \quad (V-14)$$

c) Valeurs moyennes des quantités microscopiques.

(\*) Nous noterons la différence avec la définition du quadrupole électrique adoptée au Chapitre III, ce qui explique la notation  $Q'$  au lieu de  $Q$ . Le tenseur défini ici possède une trace non nulle. La présente définition conduit dans la suite à des expressions plus simples que celles que l'on obtiendrait en adoptant la définition du chapitre III.

Passons maintenant au moyennage de ces quantités microscopiques à l'aide de la fonction  $W(\mathbf{s})$ . Généralisant les relations (V-4), on obtient immédiatement :

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle \rho_{\text{libre}}(\vec{r}, t) \rangle = \sum_{\alpha \ell} q_{\alpha \ell} W(\vec{r} - \vec{r}_{\alpha \ell}) \\ \langle \vec{j}_{\text{libre}}(\vec{r}, t) \rangle = \sum_{\alpha \ell} q_{\alpha \ell} \vec{v}_{\alpha \ell} W(\vec{r} - \vec{r}_{\alpha \ell}) \end{array} \right. \quad (\text{V-15})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle \rho_{\text{lié}}(\vec{r}, t) \rangle = \sum_m \sum_{\alpha} q_m^{\alpha} W(\vec{r} - \vec{r}_m - \vec{\zeta}_m^{\alpha}) \\ \langle \vec{j}_{\text{lié}}(\vec{r}, t) \rangle = \sum_m \sum_{\alpha} q_m^{\alpha} (\vec{v}_m + \dot{\vec{\zeta}}_m^{\alpha}) W(\vec{r} - \vec{r}_m - \vec{\zeta}_m^{\alpha}) \end{array} \right. \quad (\text{V-16a})$$

$$(\text{V-16b})$$

et de même

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{P}(\vec{r}, t) = \sum_m \vec{p}_m W(\vec{r} - \vec{r}_m) \\ \vec{M}(\vec{r}, t) = \sum_m \vec{M}_m W(\vec{r} - \vec{r}_m) \\ \vec{Q}'(\vec{r}, t) = \sum_m \vec{Q}'_m W(\vec{r} - \vec{r}_m) \end{array} \right. \quad (\text{V-17})$$

Dans l'opération de "lissage", les fonctions  $\delta$  singulières ont partout été remplacées par le facteur de forme  $W$ : on a ainsi remplacé des sommes de distributions à support infiniment étroit par des sommes de distributions à support "fini"  $s_0$ . Il est clair sur ces expressions que les valeurs moyennes obtenues ne doivent pas en pratique dépendre du choix de  $W$  : si par exemple on change la largeur de la fonction de lissage en faisant varier  $s_0$  dans l'expression V-5, la variation du facteur de normalisation  $1/s_0^3$  est



compensée par la variation du nombre de molécules à prendre pratiquement en compte dans chacune des sommes (V-15) à (V-17).

Nous allons maintenant montrer que  $\langle \rho_{1ie}(\vec{r}, t) \rangle$  et  $\langle \vec{j}_{1ie}(\vec{r}, t) \rangle$  s'expriment simplement à partir des distributions moyennes  $\vec{P}$ ,  $\vec{M}$  et  $\vec{Q}$ . Effectuons pour cela le développement de Taylor, supposé rapidement convergent pour  $a_0 \ll s_0$ , de la fonction  $W(\vec{r}-\vec{r}_m-\vec{\zeta}_m^\alpha)$  au point  $\vec{r}-\vec{r}_m$ :

$$W(\vec{r}-\vec{r}_m-\vec{\zeta}_m^\alpha) = W(\vec{r}-\vec{r}_m) - \vec{\zeta}_m^\alpha \cdot \vec{\nabla} W(\vec{r}-\vec{r}_m) + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \zeta_{m,i}^\alpha \zeta_{m,j}^\alpha \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} W(\vec{r}-\vec{r}_m) + \dots \quad (V-18)$$

Substituons ce développement dans les équations (V-16):

$$\langle \rho_{1ie}(\vec{r}, t) \rangle = \sum_{m,\alpha} \left\{ q_m^\alpha W(\vec{r}-\vec{r}_m) - q_m^\alpha \vec{\zeta}_m^\alpha \cdot \vec{\nabla} W(\vec{r}-\vec{r}_m) + \frac{1}{2} q_m^\alpha \sum_{i,j} \zeta_{m,i}^\alpha \zeta_{m,j}^\alpha \frac{\partial^2 W(\vec{r}-\vec{r}_m)}{\partial x^i \partial x^j} \right\} + \dots \quad (V-19)$$

$$\langle \vec{j}_{1ie}(\vec{r}, t) \rangle = \sum_{m,\alpha} \left\{ q_m^\alpha (\vec{v}_m + \dot{\vec{\zeta}}_m^\alpha) W(\vec{r}-\vec{r}_m) - q_m^\alpha (\vec{v}_m + \dot{\vec{\zeta}}_m^\alpha) \left( \vec{\zeta}_m^\alpha \cdot \vec{\nabla} W(\vec{r}-\vec{r}_m) \right) + \frac{1}{2} q_m^\alpha \sum_{i,j} (\vec{v}_m + \dot{\vec{\zeta}}_m^\alpha) \left( \zeta_{m,i}^\alpha \zeta_{m,j}^\alpha \frac{\partial^2 W}{\partial x^i \partial x^j}(\vec{r}-\vec{r}_m) \right) + \dots \right\} \quad (V-20)$$

Le premier terme dans (V-19) correspond à la densité moyenne de charge "moléculaire". Ce terme est nul si les molécules du milieu sont neutres ( $\sum_\alpha (q_m^\alpha) = 0$ ). Si le milieu est formé d'ions de charges  $q_m = \sum_\alpha (q_m^\alpha) \neq 0$ , ce terme peut être ajouté à la contribution des charges libres (V-15). Nous redéfinirons donc les densités moyennes de charge et de courant "libres" par les relations:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_{\text{macro}} = \sum_{\alpha, \ell} q_{\alpha \ell} W(\vec{r} - \vec{r}_{\alpha \ell}) + \sum_m q_m W(\vec{r} - \vec{r}_m) \\ \vec{j}_{\text{macro}} = \sum_{\alpha \ell} q_{\alpha} \vec{v}_{\alpha \ell} W(\vec{r} - \vec{r}_{\alpha \ell}) + \sum_m q_m \vec{v}_m W(\vec{r} - \vec{r}_m) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{(V-21a)} \\ \text{(V-21b)} \end{array}$$

où les  $q_{\alpha \ell}$  sont les charges des particules libres "élémentaires" et les  $q_m$  les charges des ions et nous ne tiendrons plus compte du premier terme de (V-19). Nous appellerons les quantités définies par les équations (V-21) les densités de charge et de courant "macroscopiques" du milieu. Elles dépendent de la distribution des électrons libres dans le milieu, mais aussi de celle des charges ioniques éventuelles; ainsi, le courant dans un métal sera décrit par le premier terme de (V-21b) alors que celui d'une solution ionique sera décrit par le second terme.

Le deuxième terme de (V-19) n'est autre que  $-\nabla P(\vec{r}, t)$  et le troisième s'écrit de façon condensée  $\frac{1}{6} \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \vec{Q}'$  où  $\vec{\nabla} \vec{Q}'$  est le vecteur obtenu en contractant l'opérateur gradient et le tenseur  $\vec{Q}'$ :

$$(\vec{\nabla} \cdot \vec{Q}')_i = \sum_j \nabla_j Q'_{ij}$$

D'où finalement :

$$\langle \rho_{\text{tot}}(\vec{r}, t) \rangle = -\vec{\nabla} \left[ \bar{P}(\vec{r}, t) - \frac{1}{6} \vec{\nabla} \cdot \vec{Q}'(\vec{r}, t) + \dots \right] \quad \text{(V-22)}$$

Nous verrons plus loin que les champs moyens et densités moyennes de polarisation définis ici varient spatialement sur des distances caractéristiques de l'ordre de la longueur d'onde  $\lambda$  du rayonnement. Il en résulte que  $\vec{\nabla} \cdot \vec{Q}'$  est typiquement de l'ordre de  $Q'/\lambda$ . Comme les quadrupôles atomiques ou moléculaires sont intrinsèquement de l'ordre des dipôles électriques multipliés par  $a_0$ , le deuxième terme de (V-22) est en

fait de l'ordre de  $a_0/\lambda$  fois le premier. On se limitera donc souvent au premier terme (sauf bien sûr si pour des raisons de symétrie il est nul) et l'on écrira:

$$\langle \rho_{11e}(\vec{r}, t) \rangle \simeq - \vec{\nabla} \cdot \vec{P}(\vec{r}, t) \quad (V-23)$$

Considérons de même l'expression (V-20) donnant  $\langle j_{1ie}(\vec{r}, t) \rangle$ . La contribution en  $\mathbf{v}_m$  dans le premier terme a en fait été reportée dans l'expression de  $\mathbf{j}_{macro}$  (V-21b). En toute rigueur les autres termes de (V-20) dépendent également de  $\mathbf{v}_m$ . Il est facile de se convaincre cependant qu'en général cette dépendance peut être négligée, à condition que le milieu matériel considéré soit globalement immobile.  $\mathbf{v}_m$  est en effet la vitesse d'entraînement de la "molécule"  $m$ , très petite devant la vitesse des électrons légers à l'intérieur de chaque molécule décrite par les  $\dot{\xi}_m^\alpha$ . La vitesse d'entraînement est elle même la résultante d'une vitesse d'agitation thermique, très faible à l'échelle des vitesses électroniques et, si la "molécule" est chargée, d'une vitesse "induite" par la force électromagnétique agissant sur la "molécule". La vitesse d'agitation thermique varie aléatoirement d'une "molécule" à l'autre et sa contribution à (V-20) est ainsi non seulement intrinsèquement très faible, mais en plus moyennée pratiquement à zéro sur l'ensemble de molécules à l'intérieur du support de la fonction de lissage. Quant à la vitesse "induite" des ions, elle est bien sûr très faible devant celle des électrons et sera aussi généralement négligeable devant chacun des  $\dot{\xi}_m^\alpha$  dans (V-20). Notons cependant que nous avons déjà tenu compte de son effet essentiel en l'englobant dans la définition du courant macroscopique dans le milieu (équation V-21b). Si le milieu est en mouvement dans son ensemble avec la

vitesse  $\mathbf{V}$ , il est clair que le raisonnement précédent n'est plus valable. Il convient alors de remplacer tous les  $\mathbf{v}_m$  par  $\mathbf{V}$  dans (V-20) et il faut alors tenir compte de la contribution linéaire en  $\mathbf{V}$  à la densité de courants "liés". Nous excluerons pour l'instant le cas de milieux en mouvement et nous récrivons donc  $\langle \mathbf{j}_{\text{lié}} \rangle$  sous la forme:

$$\begin{aligned} \langle \vec{j}_{\text{lié}}(\vec{r}, t) \rangle &= \sum_{m, \alpha} q_m^\alpha \dot{\vec{z}}_m^\alpha W(\vec{r} - \vec{r}_m) - \sum_{m, \alpha} q_m^\alpha \dot{\vec{z}}_m^\alpha (\vec{z}_m^\alpha \cdot \vec{\nabla} W(\vec{r} - \vec{r}_m)) \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{m, \alpha} q_m^\alpha \sum_{i, j} \dot{\vec{z}}_m^\alpha (\zeta_{m,i}^\alpha \zeta_{m,j}^\alpha \frac{\partial^2 W}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{r} - \vec{r}_m)) + \dots \end{aligned} \quad (\text{V-24})$$

On reconnaît à présent dans le premier terme de (V-24) la dérivée par rapport au temps de  $\bar{P}(\vec{r}, t)$  défini par (V-17). On a en effet:

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{P}(\vec{r}, t) = \sum_{m, \alpha} \left\{ q_m^\alpha \dot{\vec{z}}_m^\alpha W(\vec{r} - \vec{r}_m) - q_m^\alpha \vec{z}_m^\alpha (\vec{v}_m \cdot \vec{\nabla} W(\vec{r} - \vec{r}_m)) \right\} \quad (\text{V-25})$$

soit en négligeant le terme en  $\mathbf{v}_m$ , ce qui est consistant avec les remarques faites plus haut:

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{P}(\vec{r}, t) \simeq \sum_{m, \alpha} q_m^\alpha \dot{\vec{z}}_m^\alpha W(\vec{r} - \vec{r}_m) \quad (\text{V-26})$$

Intéressons nous maintenant au deuxième terme de (V-24). Utilisant une technique déjà rencontrée au Chapitre III, réarrangeons le sous la forme:

$$\begin{aligned} \sum_{m, \alpha} -q_m^\alpha \dot{\vec{z}}_m^\alpha (\vec{z}_m^\alpha \cdot \vec{\nabla} W(\vec{r} - \vec{r}_m)) &= \\ &- \sum_{m, \alpha} q_m^\alpha \frac{1}{2} \left\{ \left( (\vec{\nabla} W(\vec{r} - \vec{r}_m) \cdot \vec{z}_m^\alpha) \dot{\vec{z}}_m^\alpha - \vec{z}_m^\alpha (\dot{\vec{z}}_m^\alpha \cdot \vec{\nabla} W(\vec{r} - \vec{r}_m)) \right) \right\} \\ &- \sum_{m, \alpha} q_m^\alpha \frac{1}{2} \left\{ \left( (\vec{\nabla} W(\vec{r} - \vec{r}_m) \cdot \vec{z}_m^\alpha) \dot{\vec{z}}_m^\alpha + \vec{z}_m^\alpha (\dot{\vec{z}}_m^\alpha \cdot \vec{\nabla} W(\vec{r} - \vec{r}_m)) \right) \right\} \end{aligned} \quad (\text{V-27})$$

La 1<sup>ère</sup> ligne de (V-27) se réécrit sous la forme d'un double produit vectoriel dans lequel on reconnaît le rotationnel de la densité dipolaire magnétique du milieu:

$$\sum_{m, \alpha} q_{\alpha}^{\alpha} \frac{1}{2} \vec{\nabla} w(\vec{r}-\vec{r}_{\alpha}) \times \{ \vec{\zeta}_{\alpha}^{\alpha} \times \vec{\zeta}_{\alpha}^{\alpha} \} = \vec{\nabla} \times \vec{M}(\vec{r}, t) \quad (V-28)$$

Quant à la 2<sup>ème</sup> ligne de (V-27), elle correspond à la dérivée par rapport au temps de  $-\frac{1}{6}(\vec{\nabla} \cdot \vec{Q})$ :

$$-\frac{1}{6} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \cdot \vec{Q}) = -\frac{1}{2} \sum_{m\alpha} q_{\alpha}^{\alpha} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \sum_{i,j} \nabla_i w(\vec{r}-\vec{r}_{\alpha}) \zeta_{\alpha,i}^{\alpha} \zeta_{\alpha,j}^{\alpha} \right\} \quad (V-29)$$

Le 3<sup>ème</sup> terme de V-24 est d'un ordre  $a_0/\lambda_0$  fois plus petit que le second. Il fait intervenir la dérivée par rapport au temps de distributions cubiques de charges (moments octupolaires) qu'il est cohérent de négliger dans la mesure où nous nous n'en avons déjà pas tenu compte dans l'expression de  $\langle \vec{j}_{lie} \rangle$  (voir V-22). Finalement, on écrira donc:

$$\langle \vec{j}_{lie}(\vec{r}, t) \rangle = \frac{\partial}{\partial t} [\vec{P}(\vec{r}, t) - \frac{1}{6} \vec{\nabla} \cdot \vec{Q}(\vec{r}, t)] + \vec{\nabla} \times \vec{M}(\vec{r}, t) + \dots \quad (V-30)$$

Dans l'analyse présentée ici, nous n'avons tenu compte que du magnétisme "orbital", associé au déplacement des électrons dans les atomes ou molécules. Il existe aussi un magnétisme intrinsèque de spin électronique ou nucléaire. Nous admettrons qu'il faut ajouter sa contribution à l'expression de  $\vec{M}$  dans (V-30) pour obtenir la densité totale des courants liés.

Nous avons donné ici une dérivation aussi rigoureuse que possible des relations existant entre  $\langle \vec{j}_{lie} \rangle$ ,  $\langle \vec{j}_{lie} \rangle$  et  $\vec{P}$ ,  $\vec{M}$ ,  $\vec{Q}$ . Il est facile de comprendre à l'aide de modèles simples le sens physique des relations (V-23) et (V-

30). La figure 3 représente une lame diélectrique constituée de molécules neutres polarisées le long de Oz. Si la densité et la polarisation sont homogènes, il est clair que les charges liées ont une densité nulle dans le volume, mais qu'il apparaît une nappe de charges positives d'un côté et négatives de l'autre, à la séparation avec le milieu extérieur (en  $z=+L/2$  et  $z=-L/2$ ). Cette nappe de charge correspond à la variation brutale de  $P(r,t)$  et sa densité (fonction  $\delta(z \pm L/2)$ ) est manifestement égale à la valeur non nulle de  $-\nabla P(r,t)$  en  $z=+L/2$  et  $z=-L/2$ . Si cette densité de polarisation oscille dans le temps, il lui est de plus associé un "courant" oscillant dans le milieu, manifestement égal à  $\partial P/\partial t$ . On comprend ainsi le sens du premier terme des équations (V-22) et (V-30).

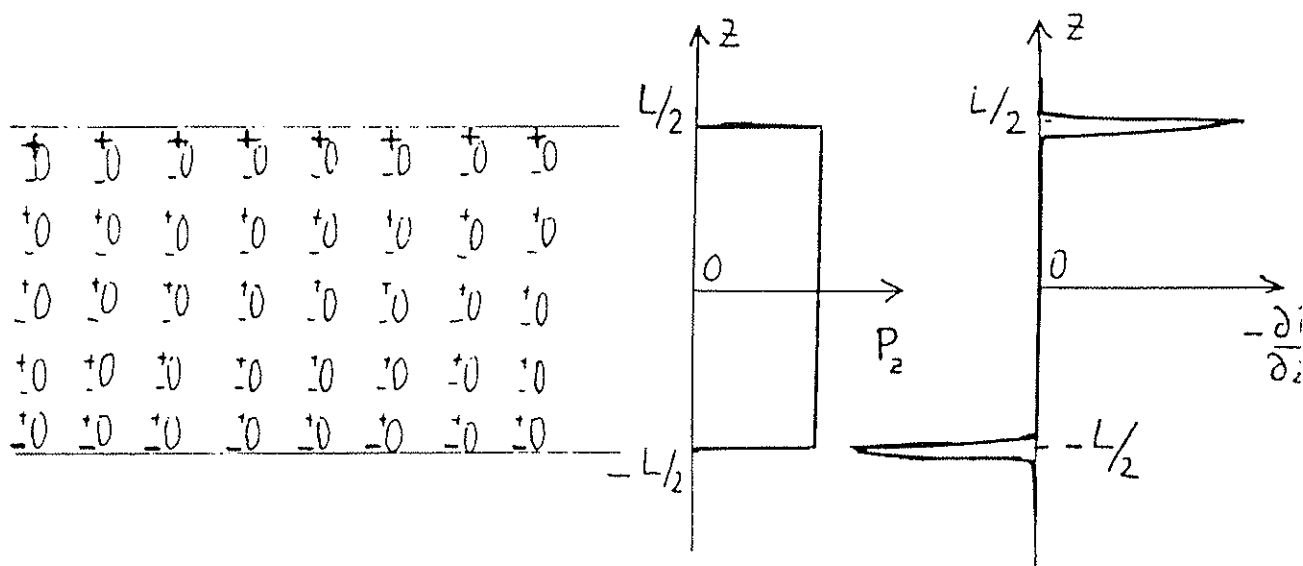


Fig 3

Considérons à présent un cylindre de matière possédant une densité homogène de dipôles magnétiques ("barreau aimanté"; voir Fig4). Il y a alors dans le milieu une distribution uniforme de petites boucles de courant

associées à chaque "molécule". Dans le volume, les éléments de courant associés à deux boucles adjacentes se compensent et le courant moyen est nul. Il reste cependant sur la surface latérale une densité superficielle de courants non compensés, qui tournent autour de l'axe du barreau. Il est facile de voir que l'aimantation moyenne  $\mathbf{M}(\mathbf{r})$  possède en raison de sa discontinuité un rotationnel non nul sur cette surface latérale, et ce rotationnel, orienté selon la tangente à la surface normale à l'axe du barreau est précisément égal à la densité de courant non compensée. On comprend ainsi le sens physique du dernier terme de (V-30).

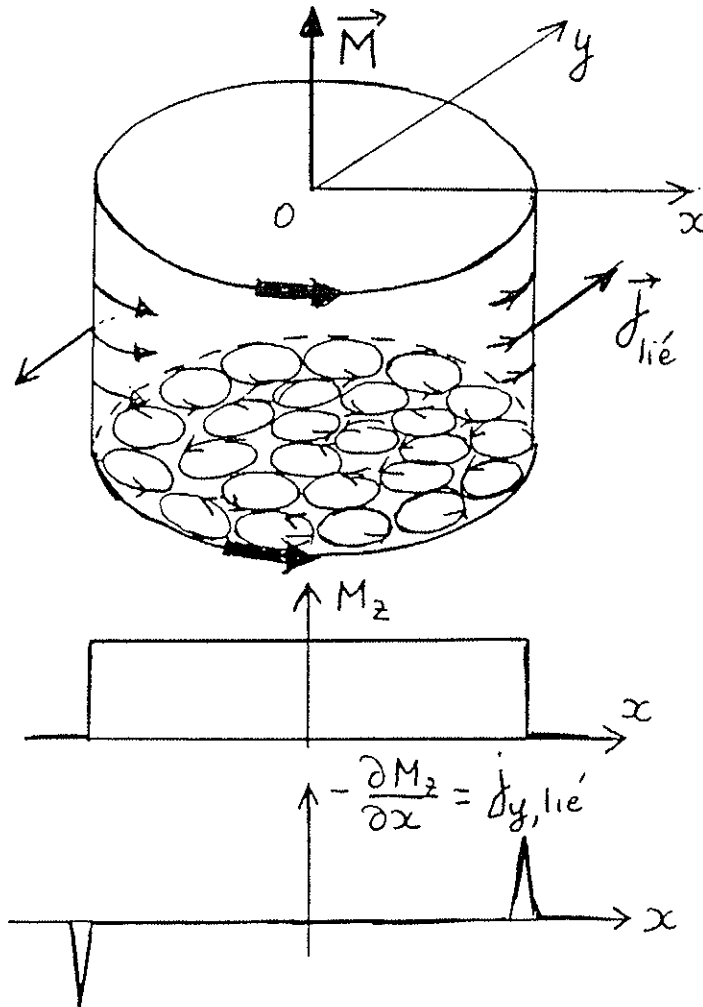


Fig 4

3°) Equations de Maxwell dans la matière.

En regroupant les équations (V-15), (V-22) et (V-30) dans (V-6), on obtient immédiatement:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho_{macro}(\vec{r}, t)}{\epsilon_0} - \frac{1}{\epsilon_0} \vec{\nabla} \cdot \left[ \vec{P}(\vec{r}, t) - \frac{1}{2} \vec{\nabla} \cdot \vec{Q}(\vec{r}, t) \right] \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\vec{j}_{macro}(\vec{r}, t)}{\epsilon_0 c^2} + \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \vec{P}(\vec{r}, t) - \frac{1}{2} \vec{\nabla} \cdot \vec{Q}(\vec{r}, t) \right] \\ \quad + \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \vec{\nabla} \times \vec{M}(\vec{r}, t) \end{array} \right. \quad (V-31)$$

Pour simplifier formellement ces équations, on introduit traditionnellement les vecteurs "induction"  $\vec{D}(\vec{r}, t)$  et  $\vec{H}(\vec{r}, t)$  "dérivés" des champs moyens  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  et  $\vec{B}(\vec{r}, t)$  et définis par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} - \frac{1}{2} \vec{\nabla} \cdot \vec{Q} \\ \vec{H} = \epsilon_0 c^2 \vec{B} - \vec{M} \end{array} \right. \quad (V-32)$$

On obtient alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_{macro} \\ \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j}_{macro} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{array} \right. \quad (V-33)$$



Ces équations, qui ne font plus apparaître explicitement que les densités moyennes de charge et de courant "macroscopiques", sont formellement simples et rappellent beaucoup les équations de Maxwell microscopiques "exactes". Il faut bien comprendre cependant qu'elles cachent en fait toute la complexité physique du problème dans  $\mathbf{H}$  et  $\mathbf{D}$  qui dépendent de la polarisation électrique et magnétique du milieu, elles-mêmes dépendantes des champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  qui y règnent. Notons aussi que ces équations sont valables pour un milieu immobile.

Si le milieu est en translation uniforme à la vitesse  $\mathbf{V}$ , il faut, comme nous l'avons déjà remarqué plus haut, tenir compte de la vitesse d'entraînement des charges liées dans les équations (V-20) et (V-25). En y remplaçant  $\mathbf{v}_m$  par  $\mathbf{V}$  et au prix d'une manipulation fastidieuse mais facile, on montre que  $\langle \mathbf{j}_{lié} \rangle$  devient:

$$\langle \vec{j}_{lié} \rangle = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} - \frac{1}{6} \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \cdot \vec{Q}' - \vec{\nabla} \times [\vec{V} \times (\vec{P} - \frac{1}{6} \vec{\nabla} \cdot \vec{Q}')] + \vec{\nabla} \times \vec{M} \quad (V-34)$$

Seule la dernière équation de Maxwell (V-31) est alors changée. Elle devient:

$$\vec{\nabla} \times [\vec{H} + \vec{V} \times (\vec{D} - \epsilon_0 \vec{E})] = \vec{j}_{macro} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (V-35)$$

$\mathbf{H}$  et  $\mathbf{D}$  étant toujours définis par les relations (V-32). Remarquons que cette équation, établie en admettant la règle d'addition classique des vitesses n'est valable qu'à la limite non relativiste  $V \ll c$ . Le cas d'un milieu matériel macroscopique se déplaçant à vitesse relativiste :

ne sera pas considéré ici. Nous supposons d'ailleurs en général  $V=0$  et n'avons signalé l'équation (V-35) que comme un résultat que le lecteur pourra essayer de rétablir en guise d'exercice.

Pour traiter un problème de propagation dans un milieu matériel, il faut expliciter les relations existant entre  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\rho_{\text{macro}}$ ,  $\mathbf{j}_{\text{macro}}$  d'une part et  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  d'autre part, c'est à dire en fin de compte être capable de relier les densités macroscopiques de charge et de courant et les densités dipolaires et quadrupolaires  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{M}$  et  $\mathbf{Q}'$  aux champs moyens régnant dans le milieu  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$ . Nous nous limiterons à l'étude de milieux pour lesquels la densité de charge macroscopique en volume est nulle ( ce qui est généralement le cas dans un conducteur ou un isolant localement neutre). Nous négligerons également les contributions quadrupolaires, généralement petites devant celle des dipôles électriques. Les seuls termes "source" du milieu que nous serons amenés à considérer seront donc  $\mathbf{j}_{\text{macro}}$ ,  $\mathbf{P}$  et  $\mathbf{M}$ . Leur non nullité dans un milieu donné correspond respectivement aux propriétés conductrice, diélectrique et magnétique de ce milieu.

En l'absence de champ appliqué au milieu matériel, ces distributions ont des valeurs d'équilibre que nous noterons  $\mathbf{j}_{0,\text{macro}}$ ,  $\mathbf{P}_0$  et  $\mathbf{M}_0$ . L'existence d'un courant permanent  $\mathbf{j}_{0,\text{macro}}$  sans champ imposé correspond au phénomène de supraconductivité, se manifestant dans certains métaux ou oxydes métalliques à basse température. L'existence d'une densité dipolaire électrique permanente  $\mathbf{P}_0$  correspond au

phénomène de ferroélectricité. Le milieu est constitué de molécules "polaires", portant chacune un dipôle électrique permanent et ces dipôles sont alignés dans la même direction. Quant à un milieu pour lequel  $\mathbf{M}_0$  est non nul, il s'agit d'un ferromagnétique formé d'atomes portant chacun un dipôle magnétique permanent (généralement lié au spin des électrons), ces dipôles magnétiques étant alignés dans la même direction. L'existence de tels termes permanents non nuls dans un milieu correspond à des propriétés collectives décrivant un ordre macroscopique à distance grande devant l'échelle atomique dans ce milieu. Pour comprendre ces propriétés d'ordre collectif, il faut faire appel à la Mécanique Quantique, à un niveau qui sort du cadre de ce cours. Nous ne dirons donc rien de plus dans ici de ces types de milieu et nous supposerons toujours

$$\mathbf{j}_{0,\text{macro}} = \mathbf{P}_0 = \mathbf{M}_0 = \mathbf{0}$$

Il est clair d'autre part que l'existence de sources permanentes dans un milieu correspond à des propriétés statiques et nous nous intéressons ici prioritairement aux propriétés dynamiques, associées aux oscillations des densités de courant et de dipôle dans le milieu. Il faut bien sûr pour trouver ces oscillations considérer la "réponse" du milieu au champ qui s'y propage.

#### 4) Considérations énergétiques.

Commençons par envisager de façon générale comment s'exprime le principe de conservation de l'énergie dans un milieu matériel qui interagit avec un champ électromagnétique selon les équations (V-31). La puissance

fournie par unité de volume au point  $r$  par le champ au milieu s'écrit: (\*)

$$W = \vec{E} \cdot \vec{j}_{macro} + \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{M}) \quad (V-36)$$

Le premier terme de (V-36) représente la puissance fournie aux charges délocalisées, le second et le troisième décrivent les échanges d'énergie avec les courants liés associés respectivement aux dipôles électriques et dipôles magnétiques du milieu (voir V-30). Nous n'avons pas inclus, pour alléger les notations, la contribution quadrupolaire électrique dans (V-36) que nous supposons négligeable et que le lecteur pourrait rajouter sans difficulté. Les différents termes de (V-36) représentent des valeurs moyennes spatiales de quantités microscopiques, ces moyennes étant effectuées autour de chaque point  $r$  sur une dimension caractéristique  $s_0$ . Nous noterons bien sûr que seul le champ électrique  $E$  contribue aux échanges énergétiques, le travail des forces magnétiques étant toujours nul puisque ces forces sont normales au déplacement des charges microscopiques. On peut réécrire le terme magnétique de (V-36) en utilisant la relation d'analyse vectorielle:

$$\vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{M}) = \vec{M} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) + \vec{\nabla} \cdot (\vec{M} \times \vec{E}) \quad (V-37)$$

On met alors la puissance moyenne échangée sous la forme:

$$W = \vec{E} \cdot \vec{j}_{macro} + \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} - \vec{M} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\vec{M} \times \vec{E}) \quad (V-38)$$

---

(\*) La puissance microscopique échangée par unité de volume entre le champ et la matière est  $e \cdot j$ . On peut toujours écrire:  $e = E + (e - E)$  et  $j = j_{macro} + \partial P / \partial t + \nabla \times M + (j - j_{macro} - \partial P / \partial t - \nabla \times M)$ , les quantités entre parenthèses étant les fluctuations des grandeurs correspondantes autour de leur moyenne. Dans l'expression de  $e \cdot j$ , les termes "croisés" linéaires en fluctuation ont une intégrale nulle sur le volume de lissage. Quant à l'intégrale du produit de la fluctuation du champ par celle du courant, c'est une quantité petite s'il y a beaucoup de particules dans le volume de "lissage". On peut donc pour évaluer la puissance remplacer les quantités microscopiques par leurs moyennes et on en déduit l'expression (V-36).

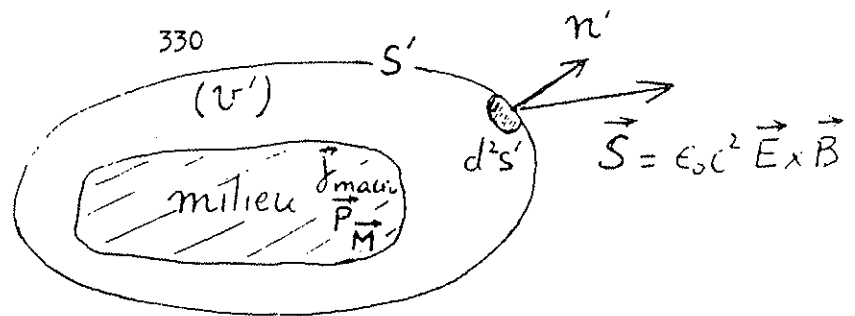
Incluons a present l'expression (V-38) dans une équation générale de conservation. La puissance fournie par le champ aux charges dans un volume  $\mathcal{V}$ , augmentée de la variation d'énergie du champ dans ce volume est égale à l'opposé du flux d'énergie électromagnétique à travers la surface  $\mathcal{S}$  qui le limite (équation I-12). On peut donc exprimer la conservation de l'énergie sous forme de l'égalité à zéro d'une intégrale étendue au volume  $\mathcal{V}$ :

$$\int_{\mathcal{V}} \left[ \vec{E} \cdot \vec{j}_{macro} + \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} - \vec{M} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot [\vec{M} \times \vec{E}] + \frac{\epsilon_0}{2} \frac{\partial E^2}{\partial t} + \frac{\epsilon_0 c^2}{2} \frac{\partial B^2}{\partial t} + \epsilon_0 c^2 \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) \right] d^3 \vec{r} = 0 \quad (V-39)$$

On reconnaît sous le signe somme dans (V-39) la puissance échangée par unité de volume entre les charges du milieu et le champ (4 premiers termes), la dérivée de la densité d'énergie électromagnétique moyenne (5ème et 6ème termes) et la divergence du vecteur de Poynting moyen (7ème terme). L'intégrale de volume du 4ème terme de (V-39) peut être remplacée par l'intégrale de surface décrivant le flux de  $\vec{M} \times \vec{E}$  à travers la surface limite de  $\mathcal{V}$ . Etendons  $\mathcal{V}$  à un volume  $\mathcal{V}'$  plus grand que le milieu et l'englobant tout entier (voir Fig5).  $\vec{M} \times \vec{E}$  est alors nul sur sa frontière  $\mathcal{S}'$  et la conservation globale de l'énergie entre le champ et l'ensemble du milieu matériel se réduit à:

$$\int_{\mathcal{V}'} \left[ \vec{E} \cdot \vec{j}_{macro} + \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} - \vec{M} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \frac{\epsilon_0}{2} \frac{\partial}{\partial t} (E^2 + c^2 B^2) + \epsilon_0 c^2 \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) \right] d^3 \vec{r} = 0 \quad (V-40)$$

Fig 5



Considérons maintenant une situation stationnaire: le milieu est irradié par un champ dont l'intensité est en moyenne constante dans le temps. Ce peut être le cas d'un champ monochromatique, ou plus généralement d'une superposition de champs monochromatiques. Le terme de variation d'énergie électromagnétique dans (V-40) est alors nul et l'équation de conservation se réduit à:

$$\int_{V'} (\vec{E} \cdot \vec{J}_{macro} + \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} - \vec{M} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}) d^3 \vec{r} = - \epsilon_0 c^2 \iint_{S'} (\vec{E} \times \vec{B}) \cdot \vec{n}' \cdot d^2 s' \quad (V-41)$$

Les trois termes du membre de gauche de (V-41) représentent respectivement la puissance cédée par le champ aux courants macroscopiques du milieu (effet Joule), celle qui est cédée aux dipôles électriques induits ("pertes diélectriques") et celle qui est fournie aux dipôles magnétiques ("pertes magnétiques"). Le membre de droite de (V-41) représente le flux changé de signe du vecteur de Poynting du champ à travers la surface limite  $S'$  entourant l'ensemble du milieu. Notons que s'il n'y a pas de difficulté à interpréter localement les deux premiers termes du membre de gauche de (V-41), il n'en va pas de même du terme magnétique: le terme  $\nabla \cdot (\vec{M} \times \vec{E})$  a une intégrale de volume étendue sur l'ensemble du milieu nulle, mais une contribution en chaque point  $r$  dans le milieu qui peut être non nulle et s'ajouter au terme  $-\vec{M} \cdot \partial \vec{B} / \partial t$  pour décrire les échanges locaux d'énergie avec les dipôles magnétiques du milieu. L'équation (V-41), à l'interprétation globale particulièrement simple, est

celle que nous utiliserons dans la suite pour analyser les mécanismes énergétiques dans un milieu où se propage un champ.

Il est possible de donner à l'équation générale (V-39) une apparence formelle plus simple, en y introduisant les expressions (V-32) des champs dérivés  $\mathbf{D}$  et  $\mathbf{H}$ . Regroupant les 2ème et 5ème termes dans l'intégrale sous la forme  $\mathbf{E} \cdot \partial \mathbf{D} / \partial t$ , les 3ème et 6ème sous la forme  $\mathbf{H} \cdot \partial \mathbf{B} / \partial t$  et les 4ème et 7ème sous la forme  $\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H})$ , on obtient:

$$\int_V \left[ \vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{j}}_{\text{macro}} + \vec{\mathbf{E}} \cdot \frac{\partial \vec{\mathbf{D}}}{\partial t} + \vec{\mathbf{H}} \cdot \frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\vec{\mathbf{E}} \times \vec{\mathbf{H}}) \right] d^3 \vec{\mathbf{r}} = 0 \quad (\text{V-42})$$

La simplicité du résultat, formellement analogue à celui qui exprime la conservation de l'énergie des équations microscopiques, ne doit pas nous tromper: toute la complexité du problème est cachée dans les expressions de  $\mathbf{D}$  et  $\mathbf{H}$  qui dépendent de  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  et des propriétés microscopiques du milieu. La quantité  $\mathbf{E} \cdot \partial \mathbf{D} / \partial t + \mathbf{H} \cdot \partial \mathbf{B} / \partial t$  peut apparaître formellement comme la variation de la "densité d'énergie électromagnétique dans le milieu", mais cette quantité contient en fait sous une forme "cachée" les échanges d'énergie avec les courants microscopiques de nature dipolaire électrique et la partie à valeur moyenne spatiale non nulle des échanges d'énergie avec les courants microscopiques de nature dipolaire magnétique. De même  $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$  peut apparaître formellement comme le "flux d'énergie électromagnétique dans le milieu", mais il s'ajoute en fait au "vrai" flux  $\epsilon_0 c^2 \mathbf{E} \times \mathbf{B}$  une quantité  $-\mathbf{E} \times \mathbf{M}$  dont la divergence, à moyenne nulle dans le milieu, représente en fait une contribution locale à l'échange d'énergie du champ avec les dipôles magnétiques induits. Il vaut donc mieux, quand on a à étudier des échanges énergétiques, utiliser les formules (V-39) ou (V-41) qui font intervenir les densités de dipôles induits plutôt que (V-42) qui, bien que traiteusement

simple, regroupe des termes d'origines physiques différentes de façon un peu trompeuse.

5) Approximation de la "réponse" linéaire du milieu atomique. Les susceptibilités linéaires. Caractère tensoriel de ces susceptibilités.

Il nous faut maintenant chercher à préciser la nature des relations reliant les densités de courant macroscopiques et de dipôles électriques et magnétiques aux champs se propageant dans le milieu. Considérons pour commencer le cas d'un champ monochromatique défini en chaque point  $\mathbf{r}$  du milieu par les amplitudes complexes  $\mathbf{E}_\omega(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}$  et  $\mathbf{B}_\omega(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}$ . Les relations existant entre  $\mathbf{j}_{\text{macro}}$ ,  $\mathbf{P}$  et  $\mathbf{M}$  d'une part et  $\mathbf{E}_\omega$  et  $\mathbf{B}_\omega$  d'autre part dépendent des propriétés microscopiques, quantiques et statistiques du milieu. Prenons l'exemple d'un milieu diélectrique. Nous avons déjà vu au Chapitre III comment on détermine au premier ordre le dipôle moyen induit par un champ extérieur monochromatique sur un atome ou une molécule. Le problème que nous nous posons ici est plus compliqué. Il convient d'abord de déterminer ce qu'est réellement le champ moyen "vu" par un atome du milieu, puis après avoir calculé son effet, sommer les contributions atomiques individuelles pour construire la densité moyenne de dipôles  $\mathbf{P}$ . Le calcul du dipôle induit nous a montré qu'en première approximation la "réponse" du milieu à un champ monochromatique est une fonction de même fréquence, dont l'amplitude est proportionnelle au champ moyen vu par les atomes. Cette linéarité aux faibles "excitations" est tout à fait générale. Quel que soit le modèle décrivant le milieu,  $\mathbf{j}_{\text{macro}}$ ,  $\mathbf{P}$  et  $\mathbf{M}$  sont des fonctions de  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  que l'on peut si le champ est



suffisamment faible calculer par "perturbation". Les termes d'ordre zero de ce calcul correspondent aux valeurs d'équilibre des distributions moyennes correspondantes en absence de champ appliqué et les termes d'ordre un décrivent ce qu'on appelle la réponse linéaire du milieu.

L'approximation de la réponse linéaire présente le très grand intérêt de rendre le problème du couplage champ-milieu simplement traitable par analyse de Fourier. Si les champs ne sont pas monochromatiques, on peut toujours, moyennant un troncage rendant les intégrales convergentes (voir Chapitre IV) les mettre sous la forme d'intégrales de Fourier:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \int \vec{E}_{\omega}(\vec{r}) e^{-i\omega t} d\omega \quad (V-43)$$

Pour déterminer la réponse linéaire du milieu à ce champ, il suffit de connaître sa réponse à chacune de ses composantes monochromatiques, que l'on appellera respectivement  $\vec{j}_{\omega, \text{macro}}(\vec{r})$ ,  $\vec{P}_{\omega}(\vec{r})$  et  $\vec{M}_{\omega}(\vec{r})$ , puis de sommer ces réponses sous une forme analogue à (V-43). Tout le problème est alors ramené à la détermination de la réponse linéaire du milieu au champ monochromatique  $\vec{E}_{\omega}(\vec{r})e^{-i\omega t}$ ,  $\vec{B}_{\omega}(\vec{r})e^{-i\omega t}$ . De façon évidente, la densité de dipôle électrique et le courant macroscopique dépendent au premier ordre de  $\vec{E}_{\omega}$  alors que la densité de dipôle magnétique dépend de  $\vec{B}_{\omega}$ . La réponse linéaire du milieu est donc définie par trois quantités complexes définies en chaque point  $\vec{r}$  et dépendant de la fréquence, qui sont en général des tenseurs du deuxième ordre, et que l'on appelle la "susceptibilité" électrique  $\chi^{e}_{ij}(\omega, \vec{r})$ , la susceptibilité magnétique  $\chi^{m}_{ij}(\omega, \vec{r})$  et la conductivité électrique  $\sigma_{ij}(\omega, \vec{r})$ . On définit traditionnellement ces quantités par les relations:

$$P_{\omega}^{(1)}(\vec{r}) = \epsilon_0 \chi_{1j}^e(\omega, \vec{r}) E_{\omega}^j(\vec{r}) \quad (V-44a)$$

$$M_{\omega}^{(1)}(\vec{r}) = \chi_{1j}^m(\omega, \vec{r}) H_{\omega}^j(\vec{r}) \quad (V-44b)$$

$$j_{\omega, macro}^{(1)}(\vec{r}) = \sigma_{1j}(\omega, \vec{r}) E_{\omega}^j(\vec{r}) \quad (V-44c)$$

Avec les définitions (V-44a et b), les susceptibilités électriques et magnétiques sont sans dimension. La conductivité électrique s'exprime quant à elle en  $\text{ohm}^{-1}\text{m}^{-1}$ . Remarquons que pour traiter de façon plus symétrique les effets électriques et magnétiques, on attendrait plutôt pour la susceptibilité magnétique la définition:

$$M_{\omega}^{(i)}(r) = \epsilon_0 c^2 \tilde{\chi}^{m_{ij}}(\omega, r) B_{\omega}^j(r) \quad (V-44b')$$

qui relie  $\vec{M}$  au champ  $\vec{B}$  et non au champ dérivé  $\vec{H}$  (tout comme  $\vec{P}$  est relié à  $\vec{E}$  et non à  $\vec{D}$ ). La définition que nous adoptons est cependant celle qui est traditionnelle. Il est d'ailleurs facile de montrer que l'on a  $\chi = \tilde{\chi} / (1 - \tilde{\chi})$  et pour des milieux non ferromagnétiques pour lesquels  $\chi$  et  $\tilde{\chi}$  sont très petits, les deux définitions sont pratiquement identiques.

Le caractère tensoriel des susceptibilités et conductivité signifie que la réponse linéaire du milieu n'est pas nécessairement parallèle au champ qui l'induit. Nous avons ainsi montré au Chapitre II qu'un milieu dans lequel les

électrons se déplacent plus facilement dans la direction  $x$  que dans la direction  $y$  aura généralement une polarisation dipolaire électrique orientée dans une direction différente de celle du champ. De façon générale il existe pour chaque type de réponse (dipôle électrique, magnétique, courant électrique) un système d'axes appelés axes principaux du milieu pour lequel le tenseur de susceptibilité correspondant est diagonal. Les champs orientés selon ces axes donnent lieu à une réponse qui leur est parallèle, mais avec une amplitude complexe qui peut être différente suivant la direction principale considérée. La réponse n'est en général pas parallèle au champ inducteur lorsque ce champ a une direction quelconque en dehors de ces axes. Nous ne dirons rien de plus des milieux anisotropes à susceptibilité ou conductivité tensorielle et ne considérerons explicitement dans la suite que des milieux "symétriques", qui répondent aux champs de façon isotrope. Leur susceptibilité ou conductivité est alors un scalaire, noté  $\chi^e(\omega, r)$ ,  $\chi^m(\omega, r)$  ou  $\sigma(\omega, r)$  et l'on a simplement pour de tels milieux:

$$\vec{P}_{\omega}(\vec{r}) = \epsilon_0 \chi^e(\omega, \vec{r}) \vec{E}_{\omega}(\vec{r}) \quad (\text{V-45a})$$

$$\vec{M}_{\omega}(\vec{r}) = \chi^m(\omega, \vec{r}) \vec{H}_{\omega}(\vec{r}) \quad (\text{V-45b})$$

$$\vec{j}_{\omega, \text{macro}}(\vec{r}) = \sigma(\omega, \vec{r}) \vec{E}_{\omega}(\vec{r}) \quad (\text{V-45c})$$

Nous expliciterons plus bas le calcul de la réponse linéaire pour certains modèles simples de milieux isotropes (conducteurs, diélectriques isolants). Nous commençons par établir un certain nombre de propriétés tout à fait générales des susceptibilités linéaires (nous appellerons dans la suite susceptibilité au sens large non seulement  $\chi^e$  et  $\chi^m$  mais aussi la quantité  $\sigma$ ).

*Remarque: Nous nous limitons dans ce chapitre au cas où les susceptibilités du milieu sont indépendantes du temps. Nous n'étudierons donc pas des milieux fluctuants dans lesquels la densité ou la polarisabilité moléculaire varient. Nous avons étudié sur quelques exemples simples l'effet de fluctuations temporelles de l'indice d'un milieu au chapitre IV. Nous ne reviendrons pas sur ces effets ici.*

#### 6) Caractère complexe des susceptibilités: échanges d'énergie entre champ et matière.

Une caractéristique essentielle des susceptibilités linéaires est leur nature complexe: la réponse du milieu présente en général un déphasage avec le champ inducteur, décrit par la présence d'une partie imaginaire des

susceptibilités. Nous écrivons donc, en séparant les parties réelles et imaginaires:

$$\chi^e(\omega, \vec{r}) = \chi^{e'}(\omega, \vec{r}) + i \chi^{e''}(\omega, \vec{r}) \quad (\text{V-46a})$$

$$\chi^m(\omega, \vec{r}) = \chi^{m'}(\omega, \vec{r}) + i \chi^{m''}(\omega, \vec{r}) \quad (\text{V-46b})$$

$$\sigma(\omega, \vec{r}) = \sigma'(\omega, \vec{r}) + i \sigma''(\omega, \vec{r}) \quad (\text{V-46c})$$

La partie imaginaire de  $\chi^e$  et  $\chi^m$  et la partie réelle de  $\sigma$  sont directement proportionnelles à l'énergie échangée localement entre les champs et le milieu. Il suffit pour s'en convaincre de revenir à l'équation (V-41) et de l'appliquer à une situation linéaire et monochromatique, en remplaçant  $\mathbf{j}_{\omega, \text{macro}}(\mathbf{r})$ ,  $\mathbf{P}_{\omega}(\mathbf{r})$  et  $\mathbf{M}_{\omega}(\mathbf{r})$  par leurs expressions (V-45). En revenant aux notations réelles des différentes quantités et en effectuant une moyenne temporelle sur une période optique, on obtient sans peine:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_V [\sigma'(\omega, \vec{r}) |\vec{E}_{\omega}(\vec{r})|^2 + \varepsilon_0 \omega \chi^{e''}(\omega, \vec{r}) |\vec{E}_{\omega}(\vec{r})|^2 \\ & + \mu_0 \omega \chi^{m''}(\omega, \vec{r}) |\vec{H}_{\omega}(\vec{r})|^2] d^3 \vec{r} = - \frac{\varepsilon_0 c}{2} \int_S [\vec{E}_{\omega} \times \vec{B}_{\omega}^*] \cdot \vec{n}' \cdot d^2 s' \end{aligned} \quad (\text{V-47})$$

ce qui montre bien que les puissances échangées avec les courants macroscopiques et les dipôles électriques et magnétiques oscillants sont respectivement proportionnelles à  $\sigma'$ ,  $\chi^{e''}$  et  $\chi^{m''}$ . Nous avons déjà montré au chapitre III que la réponse linéaire dipolaire électrique d'un atome présentait une partie imaginaire liée aux processus d'amortissement des charges: par exemple, les dipôles élémentaires subissent des collisions au cours desquelles une partie de l'énergie d'oscillation est cédée à des degrés de liberté externes de l'atome (énergie cinétique d'agitation thermique). De

même, les électrons de conduction subissent dans un métal des collisions avec le réseau d'ions positifs qui s'échauffe. Il faut bien comprendre que dans les régimes stationnaires que nous considérons ici, l'énergie cédée par le champ aux charges est "rendue" par celles-ci au "réseau". Il est donc naturel que  $\sigma$ ,  $\chi^e$  et  $\chi^m$  dépendent d'effets d'amortissement dissipatifs. Nous reviendrons sur ce point plus loin.

7) Réponse linéaire à un champ ayant une dépendance temporelle quelconque. Variation avec la fréquence des susceptibilités linéaires. Relations de dispersion.

La dépendance en fréquence des susceptibilités linéaires décrit la plus ou moins grande facilité des atomes, molécules ou électrons du milieu à "répondre" aux champs qu'ils "voient" selon la fréquence de ces champs. La réponse à un champ ayant une dépendance temporelle quelconque fait donc intervenir tout le "spectre de fréquence" de la susceptibilité correspondante (y compris les valeurs négatives de  $\omega$ ). Par exemple, la densité dipolaire électrique induite par le champ (V-43) s'écrit:

$$\vec{P}(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \chi^e(\omega, \vec{r}) \vec{E}_\omega(\vec{r}) e^{-i\omega t} d\omega \quad (V-48)$$

La réalité des quantités physiques  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{P}$  entraîne évidemment la relation:

$$\chi^e(-\omega, \vec{r}) = \chi^{e*}(\omega, \vec{r}) \quad (V-49)$$

On peut maintenant remplacer dans (V-48)  $\mathbf{E}_\omega$  par son expression en fonction de  $\mathbf{E}(t)$  (transformée de Fourier inverse):

$$\vec{E}_\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{E}(t') e^{i\omega t'} dt' \quad (V-50)$$

et on obtient la réponse linéaire sous la forme:

$$\vec{P}(t) = \frac{\epsilon_0}{2\pi} \int \chi^e(\omega) \vec{E}(t') e^{i\omega(t'-t)} d\omega dt' \quad (V-51)$$

soit en posant  $t'=t-\tau$ :

$$\vec{P}(t) = \frac{\epsilon_0}{2\pi} \int \chi^e(\omega) \vec{E}(t-\tau) e^{-i\omega\tau} d\omega d\tau \quad (V-52)$$

On peut alors effectuer l'intégration sur  $\omega$  dans (V-52) et écrire:

$$\vec{P}(t) = \frac{\epsilon_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G(\tau) \vec{E}(t-\tau) d\tau \quad (V-53)$$

en définissant la fonction  $G(\tau)$  par:

$$G(\tau) = \int \chi^e(\omega) e^{-i\omega\tau} d\omega \quad (V-54)$$

L'équation (V-53) montre un aspect essentiel de la "réponse" linéaire: celle-ci dépend a priori (linéairement) de la valeur du champ exciteur à tous les instants  $t-\tau$  différents du temps  $t$  où l'on considère la réponse. Il est clair cependant qu'un système physique réel ne peut répondre avant d'avoir été excité (principe de causalité) et l'on doit donc avoir:

$$(V-55) \quad G(\tau)=0 \text{ pour } \tau < 0$$

$G(\tau)$ , transformée de Fourier de la susceptibilité, porte pour des raisons évidentes le nom de "réponse percussionnelle". On a en effet d'après (V-53) pour un champ excitateur en fonction  $\delta(t)$ :

$$P(t) = \frac{\epsilon_0}{2\pi} G(t) \quad (\text{V-56})$$

et la condition (V-55) exprime simplement que la réponse à une percussion ne peut précéder celle-ci. La réponse linéaire à une excitation quelconque apparaît ainsi comme une superposition de réponses percussionnelles "causales".

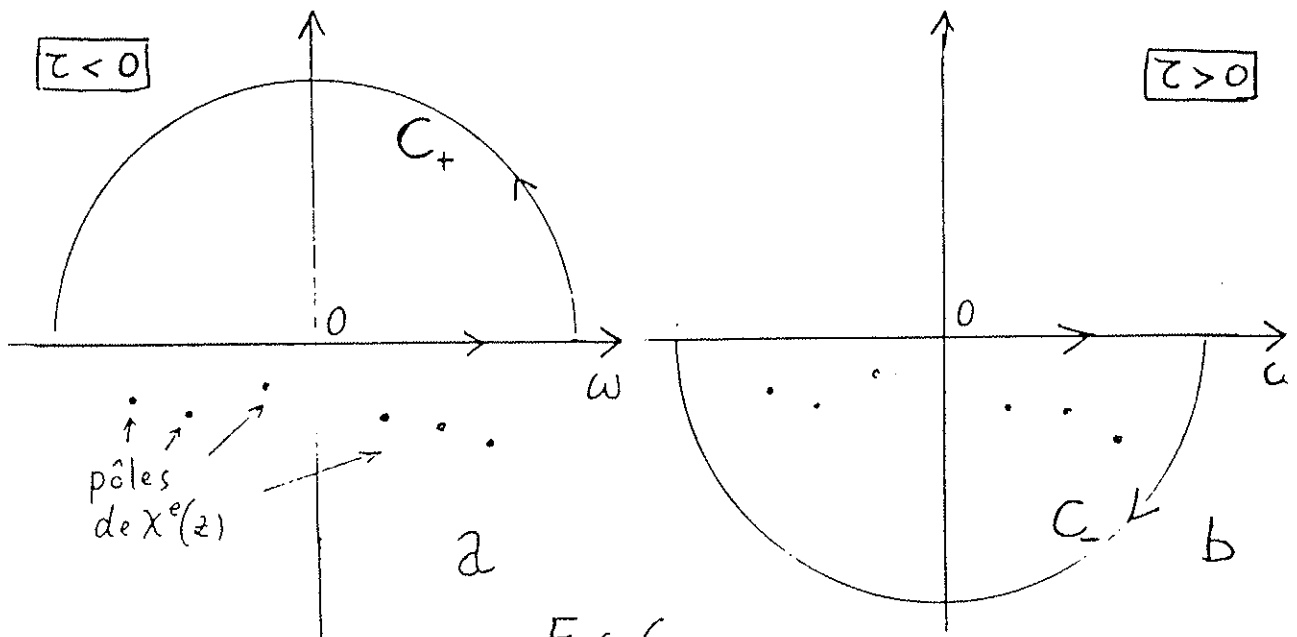
La condition de causalité (V-55) impose de façon générale une relation importante entre les parties réelle et imaginaire des susceptibilités. Sans entrer dans les détails, nous présentons ici rapidement cet aspect intéressant de la théorie de la réponse linéaire.

La fonction complexe  $\chi^e(\omega)$ , dont les valeurs n'ont un sens physique direct que pour les valeurs réelles de  $\omega$ , peut être prolongée analytiquement dans le plan complexe sous la forme d'une fonction  $\chi^e(z)$  prenant sur l'axe réel la valeur "physique"  $\chi^e(\omega)$ . Nous verrons plus loin des exemples simples de calcul explicite de  $\chi^e(\omega)$  qui se prêtent à un prolongement évident.  $\chi^e(z)$  ne peut évidemment posséder de pôle sur l'axe réel car un tel pôle correspondrait à une divergence du dipôle induit pour une excitation à la fréquence correspondante. Par contre,  $\chi^e$  présente des pôles en dehors de l'axe réel, en des points dont la partie réelle correspond aux fréquences de résonance des atomes du milieu et la partie imaginaire aux taux d'amortissement des dipôles induits (ce résultat a déjà été rencontré au chapitre III, dans l'expression de la polarisabilité atomique, qui est une forme de réponse linéaire). A l'infini  $|\chi^e(z)|$  tend vers zéro

suffisamment vite pour que l'intégrale de la susceptibilité sur un contour dans le plan complexe de rayon augmentant indéfiniment tende vers zéro. Nous ne présenterons pas d'argument général pour justifier ce résultat (ce qui peut se faire à partir de considérations sur le comportement physique de  $G(\tau)$  aux temps courts), mais le vérifierons sur toutes les formes explicites de susceptibilités que nous rencontrerons plus loin. Calculons alors l'intégrale (V-54) donnant la réponse percussionnelle  $G(\tau)$  par intégration dans le plan complexe, en complétant l'intégration sur l'axe réel par un contour à l'infini dans le plan complexe (Fig 6). Envisageons deux contours pour compléter l'intégration: le premier,  $C_+$  referme le contour par un demi-cercle de rayon "infini" dans le demi-plan supérieur (Fig 6a); le second,  $C_-$  complète l'intégration sur l'axe réel par un demi-cercle de rayon "infini" dans le demi-plan inférieur (Fig 6b). En raison du terme exponentiel  $\exp(-i\omega\tau)$  dans l'intégrale (V-54), il nous faut pour éviter la divergence et pouvoir négliger la contribution du demi-cercle à l'intégrale utiliser le contour  $C_+$  pour  $\tau$  négatif et le contour  $C_-$  pour  $\tau$  positif:

$$G(\tau) = \int_{C_+} \chi^e(z) e^{-iz\tau} dz \quad ; \quad G(\tau) = \int_{C_-} \chi^e(z) e^{-iz\tau} dz \quad (\text{V-57})$$

( $\tau < 0$ )  ( $\tau > 0$ )





La nullité de  $G(\tau)$  pour  $\tau < 0$  impose donc en général l'absence de pôles de  $\chi^e(z)$  dans le demi-plan supérieur : ainsi, en général la fonction  $\chi^e(z)$  est analytique pour  $\text{Im}(z) > 0$ . La causalité est alors automatiquement assurée. Choisissons maintenant un point  $z_0$  quelconque dans le demi-plan supérieur et formons la fonction analytique  $(1/2i\pi)\chi^e(z)/(z-z_0)$ , qui par construction possède le pôle unique  $z=z_0$  dans le demi-plan supérieur. L'application du théorème des résidus à cette fonction donne immédiatement par intégration sur le contour  $C_+$ :

$$\chi^e(z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C_+} \frac{\chi^e(z)}{z-z_0} dz \quad (V-58)$$

Supposons maintenant que le point  $z_0$  s'approche de l'axe réel avec une partie réelle  $\omega$ , remplaçons dans (V-58)  $z_0$  par  $\omega + i\varepsilon$  et faisons tendre  $\varepsilon$  vers zéro par valeur positive. On obtient alors immédiatement:

$$\chi^e(\omega) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2i\pi} \int_{C_+} \frac{\chi^e(z) dz}{z-\omega-i\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2i\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\chi^e(\omega') d\omega'}{\omega'-\omega-i\varepsilon} \quad (V-59)$$

Séparons dans l'intégrale (V-59) les parties réelle et imaginaire de la fraction  $1/(\omega'-\omega-i\varepsilon)$ :

$$\frac{1}{\omega'-\omega-i\varepsilon} = \frac{\omega'-\omega}{(\omega'-\omega)^2 + \varepsilon^2} + i \frac{\varepsilon}{(\omega'-\omega)^2 + \varepsilon^2} \quad (V-60)$$

Lorsque  $\varepsilon$  tend vers zéro, on reconnaît dans le premier terme la distribution  $P(1/(\omega'-\omega))$ . Quant au second terme, il tend vers  $i\pi\delta(\omega'-\omega)$ . On en déduit que (V-59) se met sous la forme:

$$\chi^e(\omega) = \frac{1}{2i\pi} P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\chi^e(\omega')}{\omega'-\omega} d\omega' + \frac{1}{2} \chi^e(\omega) \quad (V-61)$$

ou encore:

$$\chi^e(\omega) = \frac{P}{i\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\chi^e(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' \quad (V-62)$$

soit en separant les parties reelle et imaginaire:

$$\chi^{e'}(\omega) = \frac{P}{\pi} \int \frac{\chi^{e''}(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' \quad (V-63a)$$

$$\chi^{e''}(\omega) = -\frac{P}{\pi} \int \frac{\chi^{e'}(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' \quad (V-63b)$$

Ainsi, la causalite de la réponse lineaire entraine que la partie réelle de la susceptibilité est égale à l'intégrale (V-63a) construite sur sa partie imaginaire et réciproquement la partie imaginaire est égale à l'intégrale (V-63b) construite sur sa partie réelle. Les relations très générales (V-63) portent le nom de relations de Kramers -Kronig. Elles montrent qu'une susceptibilité lineaire satisfaisant au principe de causalité a une partie réelle et une partie imaginaire non nulle, au moins à certaines fréquences, et précise la relation entre ces parties. Il n'y a en particulier pas de sens physique à considérer des systemes sans aucune dissipation qui auraient une susceptibilité purement réelle et ne presenteraient aucun échange d'énergie avec le champ à aucune fréquence. Nous avons vu que la partie imaginaire de  $\chi^e$  décrit les phénomènes d'absorption d'énergie dans le milieu. Nous verrons que la partie réelle décrit le phénomène d'indice qui fait que le champ a dans le milieu matériel une vitesse de phase différente

de  $c$  et dépendant de  $\omega$ . Les relations de Kramers -Kronig impliquent donc que la variation en fréquence de l'indice d'un milieu (ce qu'on appelle sa dispersion) est reliée à ses résonances d'absorption (variation en fréquence de la partie imaginaire de la susceptibilité). Les résultats établis ici pour la susceptibilité dipolaire électrique se généralisent aux autres formes de susceptibilités linéaires.

8) Les différents types de susceptibilités. Polarisabilité moléculaire électrique et magnétique de milieux polaires ou non polaires. Diamagnétisme et paramagnétisme. Magnétisme nucléaire.

Après les considérations très générales des paragraphes précédents, nous abordons maintenant l'étude spécifique de quelques milieux particuliers. Nous commencerons par considérer le cas de milieux non conducteurs, pour lesquels  $\sigma(\omega) = 0$  et nous traiterons le cas de la conductivité électrique au §V-12. Les milieux diélectriques ou magnétiques se subdivisent eux-même en deux catégories: les milieux "polaires" où chaque molécule possède un moment dipolaire (électrique ou magnétique) intrinsèque qui s'oriente dans le champ macroscopique du milieu, et les milieux non-polaires dont les atomes ne portent intrinsèquement pas de dipôles, mais qui acquièrent un dipôle induit dans le champ appliqué. Dans ce paragraphe, nous allons étudier simplement les caractéristiques de la réponse linéaire de ces milieux à l'échelle moléculaire. Nous aborderons le calcul des susceptibilités macroscopiques au paragraphe suivant.

## a) Polarisabilité électrique induite:

Commençons par considérer le cas d'un milieu non polaire, formé de molécules dans lesquelles le centre de gravité des charges positives et négatives coïncide. Appelons  $\vec{E}_\omega$  le champ électrique monochromatique appliqué à une molécule du milieu. Nous avons vu au Chapitre III que, à l'approximation linéaire, la molécule acquiert dans ce champ un dipôle induit  $\vec{p}$ :

$$\vec{p}_\omega = \epsilon_0 \alpha(\omega) \vec{E}_\omega \quad (\text{V-64})$$

$\vec{p}$  est lié au déplacement du centre de gravité de la charge électronique par rapport aux noyaux produit par le champ appliqué, comme nous l'avons analysé sur un exemple simple au Chapitre III.  $\alpha(\omega)$  est la polarisabilité complexe homogène à un volume. Dans le modèle classique de l'électron élastiquement lié,  $\alpha(\omega)$  est donné par (cf III-86):

$$\alpha_c(\omega, \omega_0) = \frac{q^2}{m\epsilon_0} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} \quad (\text{V-65})$$

Nous avons montré que la Mécanique Quantique permet de calculer une expression plus réaliste de  $\alpha(\omega)$  (cf III-123):

$$\alpha_0(\omega) = \frac{2q^2}{\hbar\epsilon_0} \sum_j \frac{\omega_{jf} |\langle j|z|f\rangle|^2}{\omega_{jf}^2 - \omega^2} \quad (\text{V-66})$$

qui apparaît comme une moyenne de "réponses" d'oscillateurs harmoniques classiques dont les fréquences sont les fréquences de Bohr  $\omega_{jf}$  de la molécule (dont l'état fondamental est  $f$ , les états excités  $j$ ). La relation

(V-66) ne tient pas compte de l'amortissement du dipôle, inclus dans le modèle classique. On admettra qu'il est possible de généraliser cette formule en introduisant un taux d'amortissement  $\gamma_{jf}$  pour chaque "oscillateur de fréquence  $\omega_{jf}$  et l'on écrira:

$$\begin{aligned}\alpha_o(\omega) &= \frac{2q^2}{\hbar\epsilon_o} \sum_j \frac{\omega_{j,f} |\langle j|z|f\rangle|^2}{\omega_{j,f}^2 - \omega^2 - i\gamma_{j,f}\omega} \\ &= \sum_j f_{j,f} \alpha_o(\omega, \omega_{j,f})\end{aligned}\quad (V-67)$$

où la force d'oscillateur  $f_{jf}$  est définie par (III-125):

$$f_{j,f} = \frac{2m \omega_{j,f} |\langle j|z|f\rangle|^2}{\hbar} \quad (V-68)$$

Il est instructif d'évaluer l'ordre de grandeur de la polarisabilité atomique donnée par (V-67). Envisageons une fréquence  $\omega$  petite devant les fréquences de Bohr caractéristiques du système ( $\omega \ll \omega_{jf}$ ). On a alors:

$$\alpha_o(\omega) \simeq \frac{2q^2}{\hbar\epsilon_o} \sum_j \frac{|\langle j|z|f\rangle|^2}{\omega_{j,f}} \quad (V-69)$$

En général, un petit nombre de termes contribuent essentiellement à cette somme. Pour ces termes,  $\hbar\omega_{jf}$  est de l'ordre de  $E_{at}$ , énergie de liaison des électrons dans la molécule, et  $\langle j|z|f\rangle$  est de l'ordre de  $a_0$ , rayon de Bohr. On a donc:

$$\alpha_o(\omega) \sim \frac{2q^2}{\epsilon_o} \frac{a_0^2}{\hbar\omega_{j,f}} \sim \frac{2q^2}{\epsilon_o} \frac{a_0^2}{E_{at}} \quad (V-70)$$

Or l'énergie de liaison électronique dans un atome ou une molécule est de l'ordre de:

$$E_{a,t} = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \frac{1}{a_0} \quad (\text{V-71})$$

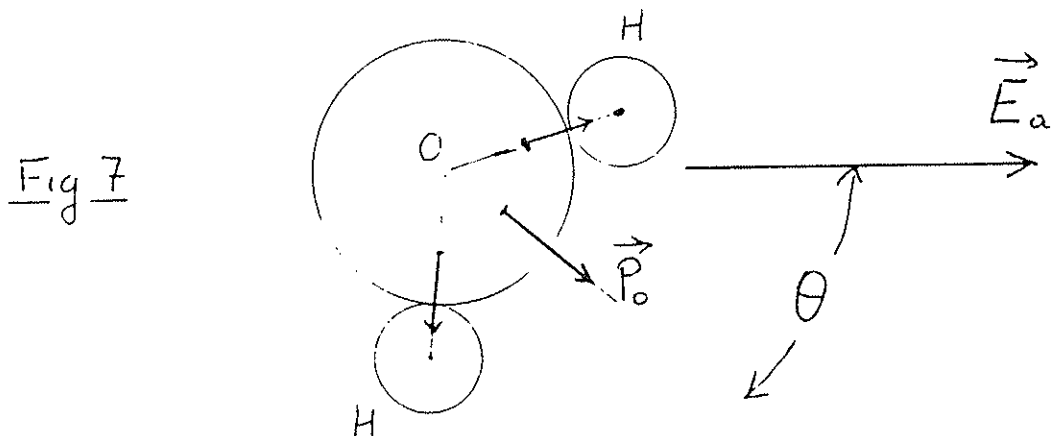
D'où l'ordre de grandeur typique:

$$\alpha_0 (\omega \ll \omega_{j,r}) \sim 16\pi a_0^3 \sim 50a_0^3 \quad (\text{V-72})$$

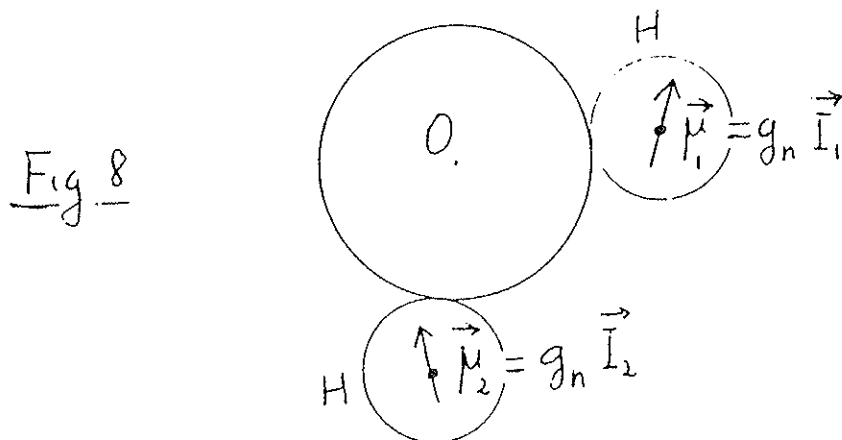
Ainsi, loin de résonance, la polarisabilité moléculaire typique est de l'ordre du volume de la distribution électronique de la molécule ( dont le "rayon" est de quelques  $a_0$  ). Cette polarisabilité devient bien sûr beaucoup plus grande au voisinage d'une résonance.

b) Polarisation électrique d'orientation moléculaire:

Considérons maintenant un milieu formé de molécules polaires. La figure (7) représente schématiquement l'exemple de la molécule d'eau. Les électrons des deux atomes d'hydrogène ont une probabilité importante de se trouver au voisinage de l'atome d'oxygène. Chaque liaison O-H est ainsi polarisée, avec un dipôle élémentaire pointant de O vers H. Il en résulte un



spin nucléaire ( terme  $\sum_{\text{noyaux}} g_n I_n$ ) : les  $g_n$  sont les facteurs "gyromagnétiques" de proportionnalité entre les moments de spin des noyaux et leur moment magnétique, environ 1000 fois plus petits que le facteur  $q/2m$  décrivant le facteur gyromagnétique électronique). Le moment magnétique "intrinsèque" de la molécule correspond à la valeur moyenne de l'opérateur(V-83) dans l'état quantique fondamental du système. La Mécanique quantique et le principe de Pauli nous apprennent que les électrons "cherchent" à s'apparier pour annuler si possible la projection de leur moment orbital et de leur spin dans une direction donnée (règle de complétude des sous-couches et couches électroniques dans la classification périodique des atomes, règle de Lewis du doublet d'électrons dans la liaison chimique). Ainsi, si les sous -couches électroniques sont "complètes", le moment magnétique électronique intrinsèque de l'atome ou de la molécule est nul. On dit que le système est diamagnétique. Lorsque les sous-couches sont incomplètes, il reste le moment magnétique orbital et/ou de spin de l'électron ou des électrons non appariés: le système possède un paramagnétisme électronique. C'est le cas des atomes à sous couche non "fermée" comme H, les alcalins .... Même lorsque le système est diamagnétique électronique, il peut posséder un (petit) magnétisme intrinsèque nucléaire. Par exemple, la molécule d'eau possède un magnétisme nucléaire dû aux deux protons qui chacun portent un petit moment magnétique (Fig 8).

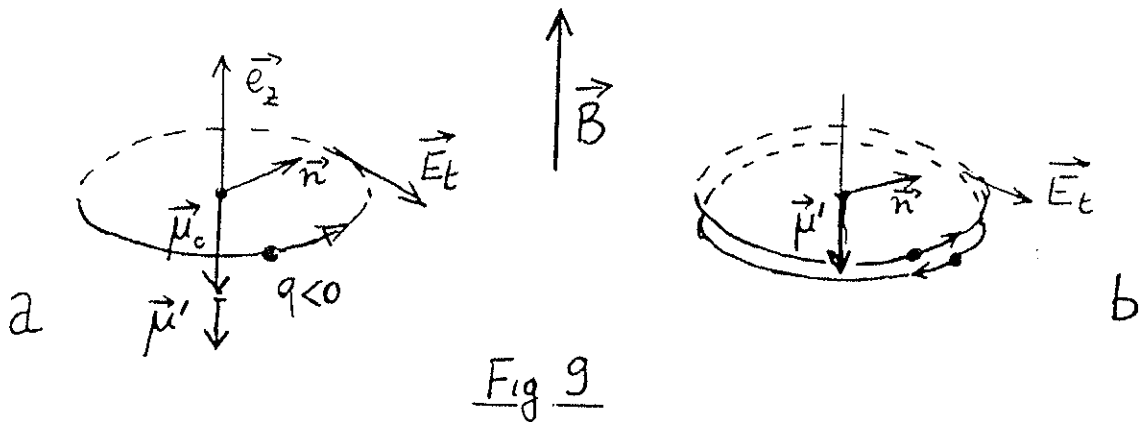






Ceci étant rappelé, l'analyse de la polarisabilité magnétique moléculaire est semblable à celle que nous avons faite plus haut pour la polarisabilité électrique:

(a) polarisabilité magnétique induite:



Pour comprendre son mécanisme, considérons un petit modèle atomique classique: un électron tourne à la fréquence  $\omega_0$  sur un cercle de rayon  $r$  autour d'un noyau ( Fig9a). Ce système possède évidemment un dipôle magnétique intrinsèque dans la direction Oz. Pour modéliser un système diamagnétique, il suffit de considérer deux électrons tournant sur des trajectoires identiques en sens inverse (Fig9b). Appliquons maintenant un champ magnétique dans la direction Oz en le faisant croître de 0 à sa valeur finale  $B$ . A l'instant  $t$ , la variation du flux magnétique à travers la boucle décrite par l'électron de la fig 9a fait apparaître un champ électrique tangentiel  $E_t$ . Dans la direction repérée par le vecteur unitaire  $\mathbf{n}$  dans le plan de la boucle,  $E_t$  s'écrit.

$$\vec{E}_t = - \frac{r}{2} \frac{\partial B}{\partial t} (\vec{e}_z \times \vec{n}) \quad (V-84)$$

ce champ exerce sur l'électron une force qui fait varier sa vitesse tangentielle  $v_t$  :

$$m \frac{d\vec{v}_t}{dt} = - \frac{qr}{2} \frac{\partial B}{\partial t} (\vec{e}_z \times \vec{n}) \quad (V-85)$$

et donc, à l'issue du branchement du champ, la variation de vitesse de l'électron est:

$$\Delta\vec{v}_t = - \frac{qr}{2m} B (\vec{e}_z \times \vec{n}) \quad (V-86)$$

(on peut montrer aisément que le rayon de l'orbite ne change pas, la force centrifuge associée à la variation de vitesse tangentielle de l'électron étant exactement compensée par la force magnétique). Il est facile de voir que ce résultat se généralise aisément au cas des deux électrons de la figure 9b formant un système diamagnétique. Chaque électron subit la variation tangentielle de vitesse donnée par (V-86) ( $q$  étant négatif, l'électron tournant dans le sens direct va plus vite, l'autre moins vite). Or une variation de vitesse  $\Delta v_t$  correspond à une variation de moment magnétique associé à chaque électron  $(qr/2)\Delta v_t$  le long de  $Oz$ . On a donc pour le système une variation globale de moment magnétique  $\Delta\mu'_z$  donnée par:

$$\Delta\mu'_z = - \frac{q^2}{4m} \left( \sum_i r_i^2 \right) B \quad (V-87)$$

où la somme sur  $i$  porte sur les deux (en général  $Z$ ) électrons du système. On montre que pour un système dans lequel les électrons tournent dans des plans quelconques, le magnétisme induit est toujours donné par une

expression analogue à (V-87) dans laquelle on remplace  $r_i^2$  par la valeur moyenne du carré de l'élongation de l'électron  $i$  dans la direction normale à celle du champ magnétique. Pour un champ le long de Oz, la contribution de l'électron  $i$  est donc proportionnelle à  $\langle x_i^2 + y_i^2 \rangle$ . L'équation (V-87) permet de définir une polarisabilité magnétique homogène à un volume:

$$\alpha^{(m)} = - \frac{q^2}{4m\epsilon_0 c^2} \cdot \left( \sum_i \langle x_i^2 + y_i^2 \rangle \right) \quad (\text{V-88})$$

L'analyse qui précède montre bien que ce magnétisme induit existe aussi bien pour une molécule diamagnétique que pour un système paramagnétique (le moment induit s'ajoutant alors au magnétisme intrinsèque). Il est important de noter que la polarisabilité magnétique induite est négative: le raisonnement classique que nous venons de faire permet bien d'en comprendre l'origine: il s'agit d'un simple effet d'induction: le système électronique tend à s'opposer à la variation de flux magnétique induit à travers les orbitales électroniques lorsque le champ magnétique perturbateur est établi. Le lecteur pourra montrer en guise d'exercice qu'une polarisabilité magnétique induite typique est environ 4 ordres de grandeur  $((q^2/4m\epsilon_0 kc)^2)$  fois plus petite qu'une polarisabilité électronique induite typique.

Remarque: Interpretation quantique du diamagnétisme.

*Il est très instructif d'analyser le diamagnétisme dans le cadre de la Mécanique quantique. Prenons pour fixer les idées le cas de l'atome d'hydrogène dont l'électron est, dans l'état fondamental sur une "orbitale" S de moment angulaire  $l = 0$ . Si l'on ne tient pas compte du spin, il s'agit d'un système diamagnétique. Montrons cependant que dans un champ extérieur  $B$ , il acquiert un moment magnétique orbital non nul. Il nous faut pour bien comprendre revenir à la définition du moment magnétique*

orbital d'un système quantique . Pour un système lié constitué par une particule de charge  $q$  gravitant autour de l'origine, le moment magnétique est décrit par l'opérateur  $q/2 (\mathbf{r} \times \mathbf{v})$  où  $\mathbf{r}$  et  $\mathbf{v}$  sont les opérateurs position et vitesse de la particule. En champ nul, on peut remplacer l'opérateur  $\mathbf{v}$  par  $\mathbf{p} / m$  où  $\mathbf{p}$  est l'opérateur impulsion de la charge et on trouve bien que le moment magnétique est proportionnel au moment angulaire  $\mathbf{r} \times \mathbf{p}$ , dont la valeur dans l'état fondamental de l'Hydrogène est nulle. Par contre, si l'atome est dans un champ magnétique extérieur dérivant d'un potentiel vecteur  $\mathbf{A}$ , il faut bien faire attention à la définition de l'opérateur vitesse: nous savons que si l'on appelle  $H$  le hamiltonien du système, on a (cf equ BIII-3):

$$d\mathbf{r}/dt = \partial H / \partial \mathbf{p} = 1/m (\mathbf{p} - q \mathbf{A}(\mathbf{r}))$$

et la vitesse n'est plus proportionnelle à l'impulsion  $\mathbf{p}$  mais à  $\mathbf{p} - q\mathbf{A}$ . Le moment magnétique du système devient alors:

$$\boldsymbol{\mu} = q/2m (\mathbf{r} \times (\mathbf{p} - q \mathbf{A}(\mathbf{r}))) = q/2m \mathbf{L} - q^2/2m (\mathbf{r} \times \mathbf{A}(\mathbf{r}))$$

La valeur moyenne du moment magnétique dans l'état  $1s$  de l'hydrogène devient donc:

$$\langle \boldsymbol{\mu} \rangle = - (q^2/2m) \langle 1s | \mathbf{r} \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) | 1s \rangle$$

(x, pour un champ magnétique statique  $\mathbf{B}$ , on peut choisir le potentiel vecteur:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = (1/2) (\mathbf{B} \times \mathbf{r}).$$

On en déduit donc:

$$\langle \boldsymbol{\mu} \rangle = - (q^2/4m) \langle 1s | \mathbf{r} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{r}) | 1s \rangle$$

soit après un remaniement évident du double produit vectoriel:

$$\langle \boldsymbol{\mu} \rangle = - (q^2/4m) (\langle 1s | \mathbf{r}^2 | 1s \rangle \mathbf{B} - \langle 1s | (\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{r} | 1s \rangle)$$

Choisissons pour axe Oz la direction du champ  $\mathbf{B}$ . Le vecteur  $(\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{r}$  est alors simplement  $(z B_z) \mathbf{r}$ , opérateur dont seule la composante  $z^2 B_z$  a une valeur moyenne non nulle dans l'état  $1s$ . On a donc finalement, en notant que  $\mathbf{r}^2 - z^2 = x^2 + y^2$ :

$$\langle \mu_z \rangle = - (q^2/4m) \langle 1s | x^2 + y^2 | 1s \rangle B_z$$

On retrouve ainsi tous les résultats établis classiquement (comparer à V-88). Nous n'avons considéré ici que la réponse diamagnétique à un champ statique. Nous n'aborderons pas le problème du calcul de la polarisabilité diamagnétique dynamique d'un système quantique.

( $\beta$ ) Polarisabilité magnétique d'orientation:

Elle n'existe que pour les milieux paramagnétiques électroniques ou ceux qui possèdent un magnétisme nucléaire intrinsèque. Les dipôles magnétiques s'orientent dans le champ magnétique appliqué, et à basse

fréquence ce phénomène domine le magnétisme induit. L'équilibre thermodynamique du système est comme dans le cas électrique décrit par la loi de Boltzmann. L'énergie magnétique  $W$  s'écrit:

$$W = - \vec{\mu}_0 \cdot \vec{B} \quad (V-89)$$

où  $\mu_0$  est le moment magnétique intrinsèque "moléculaire". Une caractéristique importante de cette énergie magnétique est qu'elle est quantifiée: on sait que la projection sur une direction donnée du moment cinétique d'un système quantique ne peut prendre que des valeurs discrètes en unités de  $\hbar$  (moment angulaire orbital) ou de  $\hbar/2$  (spin). La projection du moment magnétique le long du champ, qui est simplement proportionnelle au moment cinétique, est aussi quantifiée. Envisageons le cas le plus simple possible d'un moment cinétique  $1/2$ : c'est le cas par exemple des protons des molécules d'eau. On appellera  $\mu_n$  le moment magnétique intrinsèque, proportionnel au moment de spin  $I$  du proton:

$$\vec{\mu}_n = g_n \vec{I} \quad (V-90)$$

L'énergie magnétique de ces protons dans le champ  $B_0 \mathbf{e}_z$  s'écrit:

$$W_n = - g_n B_0 I_z = \omega_0 I_z \quad (V-91)$$

ou

$$\omega_0 = -g_N B_0$$

est la "pulsation de Larmor" du proton et vaut  $-2.68 \cdot 10^8 \text{ rad.s}^{-1}$  pour un champ de 1 Tesla. On notera que cette fréquence est négative. Appelons  $\pi_+$  et  $\pi_-$  les fractions respectives de protons ayant leur spin orienté le long du champ (état propre  $+\hbar/2$  le long de  $Oz$ ) et opposé au champ (état propre  $-\hbar/2$ ). En champ nul on a évidemment  $\pi_+ = \pi_-$  et autant de spins pointent le long de l'axe de quantification  $Oz$  que dans la direction opposée (Fig 10a). Dans le champ  $B_0 \mathbf{e}_z$ , on a :

$$\pi_{\pm} = \frac{e^{\mp \hbar \omega_0 / 2 k_B T}}{e^{\hbar \omega_0 / 2 k_B T} + e^{-\hbar \omega_0 / 2 k_B T}} \quad (\text{V-92})$$

$\omega_0$  étant négatif, on constate que plus de dipôles pointent le long du champ que dans la direction opposée (Fig 10b) et la valeur moyenne  $\langle \mu_z \rangle$  du dipôle dans la direction du champ est positive et vaut:

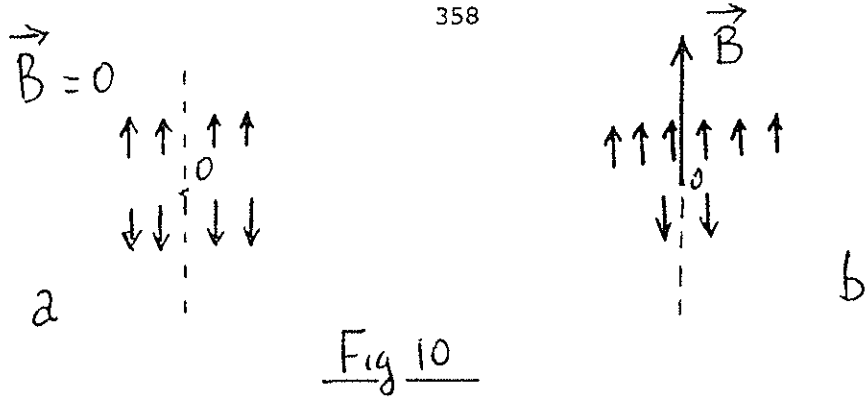
$$\langle \mu_z \rangle = \frac{g_N \hbar}{2} [\pi_+ - \pi_-] = -\frac{g_N \hbar}{2} \text{th} \left( \frac{\hbar \omega_0}{2 k_B T} \right) \quad (\text{V-93})$$

Pour un petit champ magnétique, on obtient par un développement limite:

$$\langle \mu_z \rangle = \frac{g_N^2 \hbar^2}{4 k_B T} B_0 \quad (\text{V-94})$$

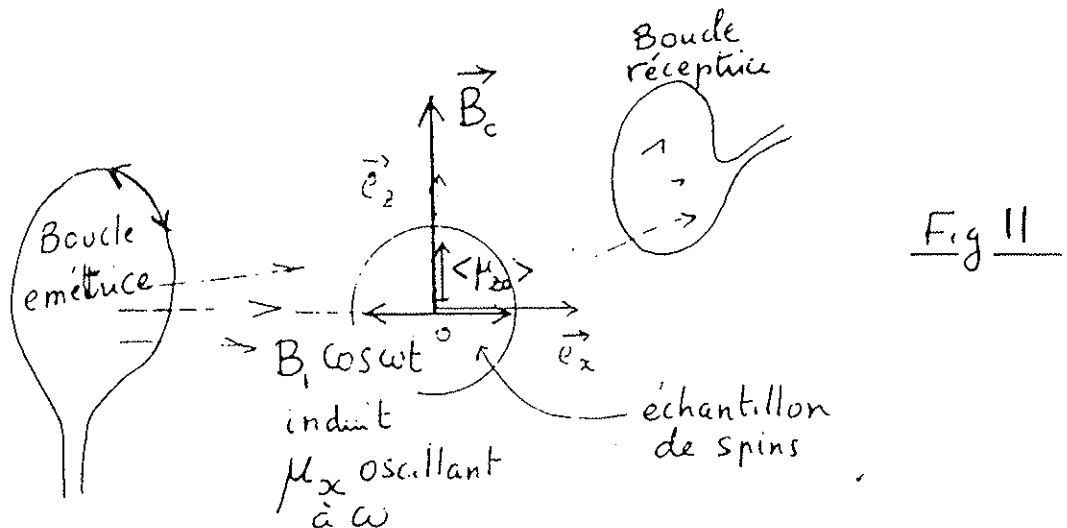
ce qui correspond à la polarisabilité magnétique d'orientation (positive):

$$\alpha_{or}^{(B)} = \frac{g_N^2 \hbar^2}{4 k_B T \epsilon_0 c^2} \quad (\text{V-95})$$



On trouverait un résultat analogue pour un système paramagnétique électronique, en y remplaçant  $g_n$  par le rapport gyromagnétique électronique,  $10^3$  à  $10^4$  fois plus grand, et en remplaçant la somme de Boltzmann (V-93) par une somme de  $2J + 1$  exponentielles au lieu de 2 (dans le cas d'un moment angulaire électronique  $J$ ). Le lecteur pourra montrer qu'en ordre de grandeur,  $\alpha_{or}^{(m)}$  est pour une molécule paramagnétique électronique environ  $10^4$  fois plus petit que la polarisabilité électrique d'orientation d'une molécule polaire ( $10^{10}$  fois plus petit pour un système paramagnétique nucléaire!). La polarisabilité paramagnétique électronique est par contre beaucoup plus grande que la polarisabilité diamagnétique (surtout à basse température), ce qui explique que les propriétés diamagnétiques soient généralement, dans les substances paramagnétiques, masquées par le paramagnétisme.

(y) Principe de la resonance magnétique nucléaire.





Nous sommes maintenant en mesure de décrire qualitativement le principe d'une expérience de résonance magnétique nucléaire (RMN). Supposons que le milieu étudié possède un magnétisme nucléaire ( il s'agit par exemple d'un échantillon d'eau). Plaçons le dans un champ magnétique  $B_0$  orienté le long de Oz (Fig11). Il y acquiert une orientation magnétique  $\langle \mu_{z0} \rangle \neq 0$  (V-94). Irradions à présent simultanément ce milieu à l'aide d'un champ magnétique oscillant  $B_1 \cos(\omega t) \mathbf{e}_x$ , orienté normalement à Oz. Ce champ est produit par une petite bobine alimentée en courant alternatif (Fig11). Le hamiltonien des protons dans le champ total  $B_0 \mathbf{e}_z + B_1(t) \mathbf{e}_x$  s'écrit:

$$H = \omega_0 I_z - g_n B_1 \cos \omega t I_x \quad (V-96)$$

Il apparaît ainsi comme la somme d'un hamiltonien indépendant du temps  $H_0$ , diagonal dans la base des états propres de  $I_z$ , et d'une "perturbation" à la fréquence  $\omega$  proportionnelle à  $I_x$ . La séparation en énergie des états propres de  $H_0$  est  $\hbar \omega_0$ , proportionnelle à  $B_0$ . La perturbation oscillante possède un élément de matrice non nul entre les niveaux d'énergie propres de  $H_0$ . On a en effet, d'après les propriétés bien connues d'un spin 1/2:

$$\langle -\frac{1}{2} | I_x | +\frac{1}{2} \rangle = \hbar/2 \quad (V-97)$$

On retrouve ainsi tous les ingrédients du modèle étudié au chapitre III dans le cas des phénomènes dipolaires électriques: le système de spin est soumis à une perturbation oscillante qui couple deux états propres d'énergies différentes. On peut alors reprendre, mutatis mutandis, les mêmes calculs et l'on trouve que la valeur moyenne de  $\mu_x + i\mu_y$  présente une composante tournant à la fréquence du champ,  $\mu_\omega e^{-i\omega t}$ , qui manifeste une variation résonnante lorsque la condition:

$$(V-98) \quad \omega = -\omega_0$$

est satisfaite.  $\langle \mu_x + i\mu_y \rangle$  s'écrit:

$$(V-99) \quad \langle \mu_x + i\mu_y \rangle = \mu_\omega e^{-i\omega t} \sim \frac{-g_n B_1 \langle \mu_{z0} \rangle}{(\omega + \omega_0) - i\gamma} e^{-i\omega t}$$

où  $\gamma$  représente le taux d'amortissement des dipôles magnétiques sous l'effet de leur couplage au réseau dissipatif. Comment détecte-t-on cette résonance? Le dipôle magnétique tournant induit rayonne à son tour un champ magnétique oscillant qu'il suffit de détecter en disposant une bobine réceptrice au voisinage de l'échantillon (voir Fig 11). Le courant induit dans cette bobine par la variation de flux alternatif produit par l'échantillon subit une variation résonnante lorsque la condition (V-98) est remplie. Il s'agit ainsi d'une expérience de diffusion résonnante, de nature dipolaire magnétique. Le signal mesure est bien sûr proportionnel au nombre de protons. Ce type d'expérience est un moyen d'analyse puissant en chimie et biochimie (il permet au choix de mesurer la densité de substances paramagnétiques, des temps d'amortissement par l'analyse de la largeur

des raies, des champs magnétiques etc...) Disons quelques mots de l'utilisation de la méthode en diagnostic médical. Le principe de la méthode est de réaliser une carte en trois dimensions de la densité de protons dans un organisme vivant. On le place dans un fort champ magnétique (bobines supraconductrices de plusieurs Teslas) présentant un gradient connu. On peut alors faire correspondre à chaque point  $r$  de l'organisme la valeur  $-g_N B_0(r) = \omega_0(r)$  de la fréquence de résonance des protons en ce point. On irradie alors le système avec un champ radiofréquence dont on varie la fréquence  $\omega$ . Lorsque cette fréquence correspond à la condition de résonance en un point, on détecte un signal induit dans la bobine réceptrice proportionnel à la densité des protons en ce point. Un ordinateur reconstruit la carte de densité et par suite l'image de la région de l'organisme irradié par ordinateur à l'issue du balayage<sup>(\*)</sup>. La technique n'est pas dangereuse (pas d'irradiation par des rayonnements ionisants) et très précise. Elle peut d'ailleurs fournir d'autres renseignements que la simple image (mesure des temps de relaxation des spins qui donnent des indications sur la nature physicochimique de leur environnement). Les fréquences typiques utilisées pour ces expériences sont de l'ordre de la centaine de Mégahertz (un champ de 3 Teslas correspond à une fréquence angulaire de rotation des spins des protons de  $8 \cdot 10^8 \text{ rad s}^{-1}$ ).

#### 9) Calcul des susceptibilités à partir des polarisabilités moléculaires.

Notion de champ local.

Il semble à première vue que pour calculer la susceptibilité moléculaire, il suffise de multiplier la réponse moléculaire moyenne (décrite par la polarisabilité moléculaire) par la densité  $N$  du milieu au

---

(\*) En fait la technique de RMN médicale est en général légèrement différente de celle décrite ici. Le magnétisme est induit en impulsion et non en régime stationnaire: une impulsion de radiofréquence crée un moment magnétique transversal au point de l'échantillon où la condition de résonance est satisfaite et l'on détecte le champ transitoire rayonné par ce moment pendant qu'il s'amortit.

point considéré. Une telle démarche revient en fait à considérer que le champ appliqué en moyenne à chaque molécule est le champ macroscopique défini au §V-1. Si comme nous le verrons plus bas, ceci est vrai à suffisamment faible densité, il n'en est pas de même pour le champ électrique dans un milieu relativement dense. Du fait de son interaction avec ses voisines, la présence d'une molécule en un point tend en effet à modifier autour d'elle la répartition des autres particules si bien que l'environnement d'une molécule est statistiquement différent de celui d'un point arbitraire dans le milieu. Reprenons pour bien comprendre l'analyse faite au § V-1 . Cherchons à déterminer le champ moyen "vu" par une molécule au point  $r$ , que l'on appellera le champ local  $E_{loc}(r)$ . Pour cela, nous commençons par séparer les charges du milieu en deux parties: celles qui sont "loin" de  $r$ , pratiquement à une distance de l'ordre de  $\lambda$  ou plus, qui créent en  $r$  un champ microscopique  $e_{loin}(r)$ , et celles qui sont dans le voisinage de  $r$  ( à une distance inférieure à  $\lambda$ ) qui y créent un champ microscopique  $e_{voisin}(r)$ . Le champ  $e_{loin}$  englobe évidemment le champ des sources extérieures au milieu. Quant au champ  $e_{voisin}$ , c'est le champ des dipôles moléculaires microscopiques du voisinage du point  $r$ , qui peut se calculer par la formule de l'électrostatique, même si le champ est oscillant (champ d'un dipôle dans la région  $r < \lambda$ ). Pour déterminer le champ local en  $r$ , il faut en principe définir autour de  $r$  un volume de "lissage"  $V(r)$  petit devant  $\lambda^3$  et moyenner sur ce volume le champ "vu" par toutes les molécules  $m$  qu'il contient. La moyenne du champ lointain s'effectue sans difficulté, comme pour le calcul du champ microscopique. Elle donne une contribution que l'on appellera  $E_{loin}$ . On écrira donc:

$$\vec{E}_{loc}(r) = \vec{E}_{loin} + \langle \vec{e}_{voisins} \rangle \quad (V-100)$$

en définissant  $\langle \mathbf{e}_{\text{voisins}} \rangle$  par:

$$\langle \vec{e}_{\text{voisins}} \rangle = \frac{1}{N\mathcal{V}} \sum_{m \in \mathcal{V}(\vec{r})} \sum_{n \neq m} \vec{e}_{n \rightarrow m} \quad (\text{V-101})$$

expression où  $\mathbf{e}_{n \rightarrow m}$  représente le champ produit sur la molécule  $m$  par une autre molécule  $n$  appartenant au voisinage de  $\mathbf{r}$  (à une distance inférieure à  $\lambda$ ). (Nous considérons ici une fonction de lissage en "créneau" pour simplifier le raisonnement. Celui-ci serait inchangé si l'on prenait un lissage régulier du type de celui décrit au §V-1). Le nombre d'atomes  $N\mathcal{V}$  étant très grand, on peut utiliser des arguments statistiques pour évaluer la moyenne de (V-101). Appelons  $P_c(\mathbf{p})$  la probabilité <sup>par unité de volume</sup> de trouver une molécule à la distance vectorielle  $\mathbf{p}$  d'une molécule prise au hasard dans le milieu.  $P_c(\mathbf{p})$  est une probabilité conditionnelle: la présence d'une molécule en un point affecte la probabilité d'en trouver une autre dans son environnement. On peut alors écrire (V-101) sous la forme simple:

$$\vec{E}_{1 \rightarrow c}(\vec{r}) = \vec{E}_{1 \rightarrow 1} + \int P_c(\vec{\rho}) \vec{e}_0(-\vec{\rho}) d^3 \vec{\rho} \quad (\text{V-102})$$

ou  $\mathbf{e}_0(\mathbf{p})$  est le champ dipolaire électrostatique produit par une molécule à la distance vectorielle  $\mathbf{p}$ . Le signe - dans l'argument de  $\mathbf{e}_0$  exprime le fait qu'une molécule  $n$  à la distance  $\mathbf{p}$  de  $m$  "voit"  $m$  à la distance  $-\mathbf{p}$ . La loi de probabilité  $P_c(\mathbf{p})$  étant paire, on peut cependant oublier ce signe - dans la suite.

Si maintenant au lieu de calculer le champ moyen 'vu' par une molécule on cherche à déterminer simplement le champ moyen macroscopique au point  $\vec{r}$ , il est immédiat que l'on doit évaluer, au lieu de (V-102), la quantité:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_{1.o.1.n} + \int P(\vec{\rho}) \vec{e}_o(\vec{\rho}) d^3 \vec{\rho} \quad (V-103)$$

où  $P(\rho)$  représente la probabilité par unité de volume de trouver une molécule à la distance  $\rho$  d'un point quelconque du milieu, qu'il y ait ou non une molécule en ce point. Pour un milieu homogène, on a simplement  $P(\rho) = N$ . On a donc en comparant (V-102) et (V-103):

$$\vec{E}_{1.o.c}(\vec{r}) - \vec{E}(\vec{r}) = \int [P_c(\vec{\rho}) - P(\vec{\rho})] \vec{e}_o(\vec{\rho}) d^3 \vec{\rho} = \int [P_c(\vec{\rho}) - N] \vec{e}_o(\vec{\rho}) d^3 \vec{\rho} \quad (V-104)$$

La quantité  $P_c(\rho) - P(\rho)$  décrit les corrélations entre les positions des molécules dans le milieu. Du fait de ses interactions avec ses voisines, une molécule aura bien sur un environnement proche statistiquement différent d'un point quelconque du milieu et ceci explique bien la différence entre champ macroscopique et champ local.

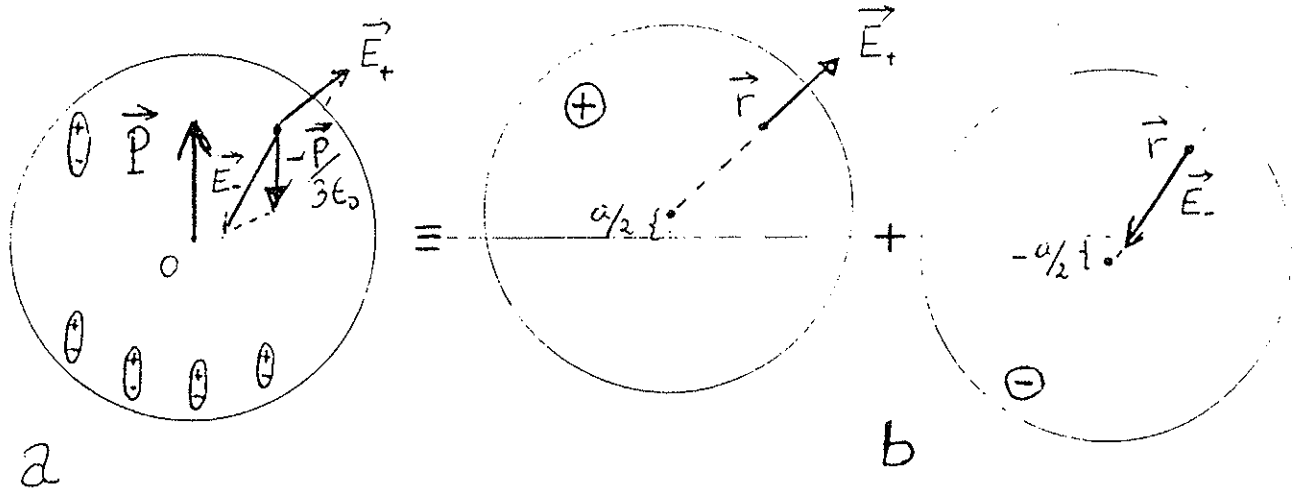


Fig. 12

L'intégrale intervenant dans le calcul du champ macroscopique est facile à évaluer: il s'agit de calculer le champ produit en son sein par une distribution homogène de dipôles "électrostatiques" parallèles: considérons pour cela (voir Fig 12a) une sphère de rayon  $R$  arbitraire de centre  $O$  uniformément polarisée (densité de dipôle  $P$ ). Une telle sphère est équivalente à deux distributions uniformes de charges décalées l'une par rapport à l'autre d'une petite distance  $a$ : l'une de densité  $+P/a$  est centrée au point  $a/2 - aP/2P$  et l'autre de densité de charge  $-P/a$  est centrée au point  $-a/2$  (voir Fig 12b) (Il faut bien sûr considérer ce modèle à la limite où  $a$  tend vers zéro). Le champ produit à la distance  $r$  du centre d'une distribution uniforme de charges de densité  $\rho$  est simplement donné par le théorème de Gauss. Il est égal à  $\rho r/3\epsilon_0$ . On en déduit immédiatement le champ au point  $r$  de la double distribution décrite plus haut:

$$\vec{E} = \frac{P}{3a\epsilon_0} \left[ \left( \vec{r} - \frac{\vec{a}}{2} \right) - \left( \vec{r} + \frac{\vec{a}}{2} \right) \right] = - \frac{P}{3\epsilon_0} \frac{\vec{a}}{a} = - \frac{\vec{P}}{3\epsilon_0} \quad (V-105)$$

Ainsi, le champ produit en son sein par une distribution homogène de dipôles  $\mathbf{P}$  est opposé à cette polarisation et vaut  $-\mathbf{P}/3\epsilon_0$ . Reportant ce résultat dans (V-104), on obtient:

$$\vec{E}_{i.o.c}(\vec{r}) = \vec{E} + \frac{\vec{P}}{3\epsilon_0} + \int P_c(\vec{\rho}) \vec{e}_0(\vec{\rho}) d^3\vec{\rho} \quad (\text{V-106})$$

Il nous reste à évaluer le champ moyen produit sur une molécule par ses voisines. Ce champ dépend de la statistique décrite par  $P_c(\rho)$ . On a évidemment  $P_c(\mathbf{0}) = 0$  et on s'attend à ce que  $P_c$  tende vers  $N$  lorsque  $|\rho|$  tend vers l'infini (perte de la corrélation à grande distance). Nous avons représenté sur les Fig (13 a et b) deux cas correspondant soit à un milieu désordonné (liquide ou gaz), soit à un milieu ordonné (cristal). Dans le premier cas  $P_c(\rho)$  atteint sa limite sur une distance  $r_0$  de quelques dimensions atomiques, alors que dans le second, les oscillations nombreuses de  $P_c$  autour de  $N$  décrivent la régularité de l'arrangement atomique.

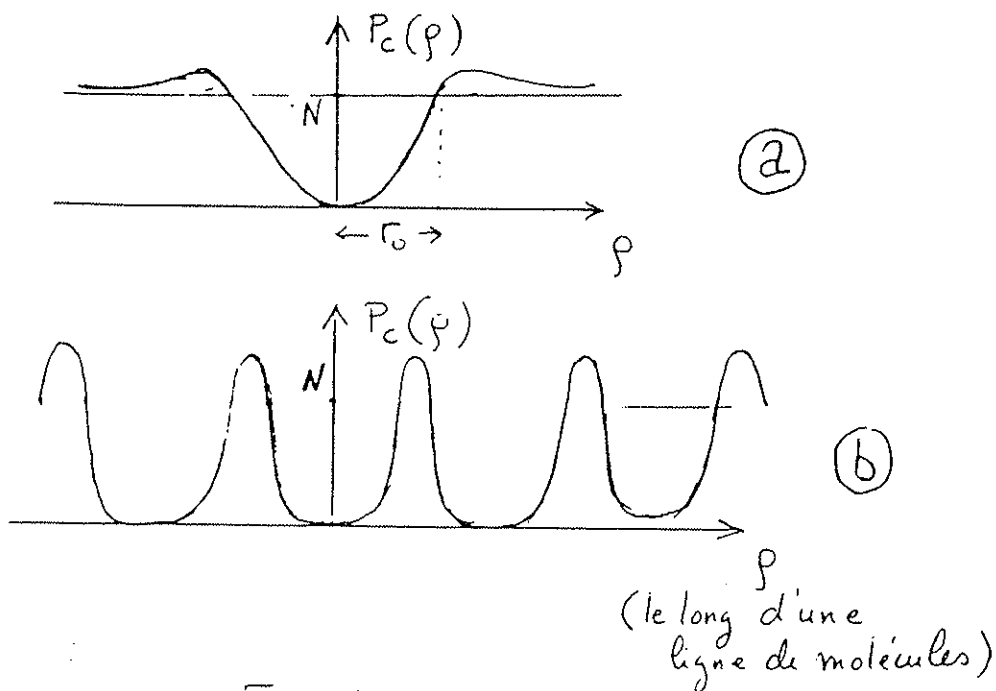


Fig. 13



Nous voyons que pour un milieu désordonné, il nous faut calculer le champ produit en son centre par une distribution à symétrie sphérique dans laquelle on a supprimé les dipôles voisins du centre, à l'intérieur d'une sphère de petit rayon  $r_0$ . Il est facile de voir que ce champ est nul: En effet le champ total, produit au centre de la sphère par une distribution homogène de dipôles s'étendant de  $r=0$  jusqu'à un rayon arbitraire  $R$  est indépendant de  $R$ . Il est donc aussi bien égal au champ produit au centre par une distribution de rayon  $r_0$ . La contribution des dipôles dans la couronne sphérique comprise entre  $r_0$  et  $R$  est donc nulle. Ainsi, en excluant d'autres molécules de son entourage immédiat, une molécule quelconque du milieu s'arrange pour annuler la contribution de toutes ces voisines au champ local qu'elle "voit". Pour un milieu ordonné, la situation est plus compliquée. On peut effectuer facilement le calcul explicite pour un cristal cubique. On montre encore que le champ produit en un point du réseau par les dipôles portés par les autres points est nul par symétrie. Nous admettrons que l'on a en général:

$$\int P_c(\vec{\rho}) \vec{e}_0(\vec{\rho}) d^3\rho \approx 0 \quad (\text{V-107})$$

et donc:

$$\vec{E}_{l.o.c}(\vec{r}) = \vec{E}(\vec{r}) + \frac{\vec{P}(\vec{r})}{3\epsilon_0} \quad (\text{V-108})$$

$\vec{P}$  étant parallèle à  $\vec{E}$ , nous voyons que le champ local est plus grand que le champ moyen.  $\vec{P}$  tendant manifestement vers zéro avec la densité du

milieu N, nous voyons aussi sur (V-108) que la différence entre champ local et champ macroscopique s'estompe lorsque le milieu est "dilué".

#### 10) Calcul de la susceptibilité d'un milieu diélectrique.

Nous pouvons à présent achever le calcul de la susceptibilité linéaire pour un milieu diélectrique. Appelant comme au chapitre III,  $\alpha(\omega)$  la polarisabilité atomique (classique ou quantique) de chaque atome, on aura:

$$\vec{P}_\omega(\vec{r}) = \epsilon_0 N(\vec{r}) \alpha(\omega) \vec{E}_{\omega, loc}(\vec{r}) \quad (V-109)$$

ou  $N(\vec{r})$  est la densité moyenne au point  $\vec{r}$ . En remplaçant  $\vec{E}_{loc}$  par son expression (V-108) et en résolvant l'équation linéaire en  $\vec{P}_\omega(\vec{r})$ , on obtient :

$$\vec{P}_\omega(\vec{r}) = \epsilon_0 \frac{N(\vec{r}) \alpha(\omega)}{1 - \frac{N(\vec{r}) \alpha(\omega)}{3}} \vec{E}_\omega(\vec{r}) \quad (V-110)$$

ce qui correspond à la susceptibilité linéaire:

$$\chi^e(\omega, \vec{r}) = \frac{N(\vec{r}) \alpha(\omega)}{1 - \frac{N(\vec{r}) \alpha(\omega)}{3}} \quad (V-111)$$

$\alpha$  étant un volume,  $\chi^e(\omega, \vec{r})$  est bien sans dimensions. Aux faibles densités ( $N \alpha \ll 1$ ) on écrira plus simplement (ce qui revient à confondre champ local et champ macroscopique):

$$\chi^e(\omega, \vec{r}) \simeq N(\vec{r}) \alpha(\omega) \quad (V-112)$$

*Remarques: Ordre de grandeur du champ local dans les milieux diélectriques, para- ou dia- magnétiques.*

*Notons que pour un milieu diélectrique  $\alpha$  peut être loin de résonance de l'ordre de quelques dizaines de  $a_0^3$  (cf equ V-72); si le milieu est dense,  $N$  peut être de l'ordre de  $1/200a_0^3$ . Ainsi  $N\alpha$  peut être de l'ordre de l'unité et la prise en compte du champ local devient très importante pour le calcul de  $\chi^e$ . Dans un milieu paramagnétique ou diamagnétique,  $N\alpha^m$  est toujours très petit devant 1 (voir les comparaisons d'ordres de grandeurs faites plus haut) et le champ magnétique local est dans ces milieux toujours identifiable au champ macroscopique pour le calcul de  $\chi^m$ .*

*Il peut également sembler, lorsqu'on considère la formule (V-111), que la susceptibilité diverge ou devient négative lorsque le milieu est dense et que la polarisabilité  $\alpha$  devient très grande, lorsqu'on s'approche d'une résonance moléculaire par exemple. En fait, il faut alors tenir compte du fait que la polarisabilité moléculaire elle même est alors en toute rigueur une fonction de la densité : les molécules voisines se perturbent mutuellement, ce qui affecte leur "réponse" intrinsèque au champ local. Le traitement simple développé ici ne s'applique plus alors et la relation (V-111) n'est alors plus valable. La susceptibilité induite reste cependant finie dans tous les cas. Nous ne traiterons pas ici la situation où  $N\alpha \gg 1$ .*

Explicitons maintenant  $\chi^e$  pour les différents modèles d'atomes que nous avons considérés au Chapitre III. Pour un ensemble classique d'électron élastiquement lié, à la limite des faibles densités, nous avons:

$$\chi_c^e(\omega) = \frac{Nq^2}{m\epsilon_0} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} \quad (\text{V-113})$$

On aura de même pour un milieu quantique:

$$\chi_0^e(\omega) = \frac{Nq^2}{m\epsilon_0} \sum_j f_{j,f} \frac{1}{\omega_{j,f}^2 - \omega^2 - i\gamma_{j,f}\omega} \quad (\text{V-114})$$

où  $f_{j,f}$  est donné par (V-68). On peut encore écrire de façon explicite:

$$\chi_0^e(\omega) = \frac{2Nq^2}{\hbar \epsilon_0} \sum_j \frac{\omega_{j,f} |\langle j|z|f \rangle|^2}{\omega_{j,f}^2 - \omega^2 - i\gamma_{j,f}\omega} \quad (\text{V-115})$$

Les formules correspondantes pour un milieu dense s'obtiennent sans difficulté (il suffit d'injecter l'expression de  $\alpha$  dans la formule (V-110)).

L'expression de la susceptibilité (V-115) illustre sur un cas particulier les considérations générales du §V-7: la susceptibilité est une fonction complexe de la fréquence, sa partie imaginaire étant liée aux phénomènes dissipatifs. Elle présente des résonances au voisinage de  $+\omega_{j,f}$  et  $-\omega_{j,f}$ . Le prolongement analytique  $\chi^e(z)$  de  $\chi^e(\omega)$  possède un pôle associé à chaque résonance. Il est facile de calculer ces pôles en résolvant l'équation du second degré:

$$\omega_{j,f}^2 - \omega^2 - i\gamma_{j,f}\omega = 0 \quad (\text{V-116})$$

Compte tenu de l'inégalité  $\gamma_{j,f} \ll \omega_{j,f}$  (amortissement très lent à l'échelle des périodes optiques), on peut donner l'expression approchée des pôles:

$$\omega \simeq \pm \omega_{j,f} - i\gamma_{j,f}/2 \quad (\text{V-117})$$

On constate bien que la partie réelle de ces pôles correspond aux fréquences propres du milieu, alors que leur partie imaginaire est le taux d'amortissement de la composante dipolaire correspondante. Ces pôles appartiennent tous au demi-plan  $\text{Im}(z) < 0$ , ce qui correspond à la condition de causalité et la susceptibilité (V-115) obéit donc bien à la relation de Kramers-Kronig. (Notons que la décroissance en  $1/\omega^2$  à l'infini de  $\chi^e(\omega)$  permet bien comme nous l'avons supposé au §V-7 de négliger la contribution du contour semicirculaire de l'intégrale de Cauchy).

Au voisinage de la résonance  $\omega = \omega_{j,f}$ , la susceptibilité peut s'écrire sous la forme approchée simple:

$$\chi_0^e(\omega \sim \omega_{j,f}) \simeq \frac{Nq^2}{\hbar\epsilon_0} \frac{|\langle j|z|f\rangle|^2}{\omega_{j,f} - \omega - i\gamma_{j,f}/2} \quad (\text{V-118})$$

avec les parties réelles et imaginaires se présentant comme des fonctions de Lorentz "en dispersion" et en "absorption":

$$\chi_0^{\cdot e}(\omega \sim \omega_{j,f}) \simeq \frac{Nq^2}{\hbar\epsilon_0} |\langle j|z|f\rangle|^2 \frac{\omega_{j,f} - \omega}{(\omega_{j,f} - \omega)^2 + \gamma_{j,f}^2/4} \quad (\text{V-119a})$$

$$\chi_0^{-e}(\omega \sim \omega_{j,f}) \simeq \frac{Nq^2}{\hbar\epsilon_0} |\langle j|z|f\rangle|^2 \frac{\gamma_{j,f}/2}{(\omega_{j,f} - \omega)^2 + \gamma_{j,f}^2/4} \quad (\text{V-119b})$$

On obtient alors immédiatement à partir de (V-47) l'expression de la puissance électromagnétique reçue par l'unité de volume du milieu (supposé dilué):

$$W \simeq \frac{Nq^2}{2\hbar} |\langle j|z|f\rangle|^2 \omega \frac{\gamma_{j,f}/2}{(\omega_{j,f} - \omega)^2 + \gamma_{j,f}^2/4} E_\omega^2 \quad (V-120)$$

On constate que cette puissance subit une variation résonnante, de largeur à mi-hauteur  $\gamma_{j,f}$  en unités de pulsation ( $\gamma_{j,f}/2\pi$  en unités de fréquence). L'interprétation en terme de photons de cet échange d'énergie résonnant est instructive: Supposons que le champ soit constitué de photons d'énergie  $\hbar\omega$ . La puissance (V-120) représente manifestement le nombre de photons absorbés par unité de volume et de temps multiplié par  $\hbar\omega$ . Appelant  $1/T_{abs}$  la probabilité d'absorption d'un photon par un atome et par unité de temps, cette puissance s'interprète comme étant égal à  $N\hbar\omega 1/T_{abs}$  et on a donc:

$$\frac{1}{T_{abs}} = \frac{q^2 |\langle j|z|f\rangle|^2}{4\hbar^2} \frac{\gamma_{j,f}}{(\omega_{j,f} - \omega)^2 + \gamma_{j,f}^2/4} E_\omega^2 \quad (V-121)$$

Ainsi, les atomes ont une probabilité par unité de temps d'absorber un photon incident qui est proportionnelle à l'intensité du champ et qui est résonnante pour  $\omega = \omega_{j,f}$ . On peut alors faire l'analyse microscopique suivante du mécanisme d'échange d'énergie entre les atomes et le champ: sous les effets compétitifs de leur interaction avec l'onde électromagnétique et des processus d'amortissement, les atomes du milieu sont en permanence maintenus dans une superposition linéaire de l'état de base  $f$  et de l'état excité  $j$ , correspondant à une probabilité stationnaire non nulle  $P_j$  de trouver un atome dans l'état  $j$ . Pour maintenir cet état stationnaire, il faut donc que le champ fournisse aux atomes un flux d'énergie que ceux-ci restituent au "réseau" responsable de leur amortissement. Chaque atome a une probabilité  $P_j$  d'être excité et, s'il l'est une probabilité par unité de temps  $1/T_j$  de retomber à l'état de base en restituant l'énergie  $\hbar\omega_{j,f}$  au

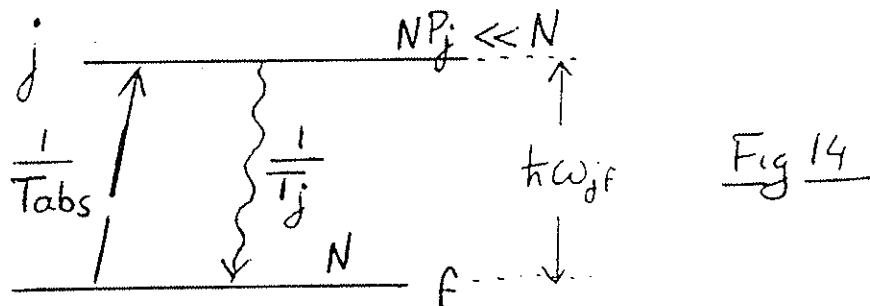
reseau.  $T_j$  s'appelle le temps de relaxation du niveau  $j$  ( la restitution d'energie des atomes au "reseau" s'effectue sous forme d'energie d'agitation thermique, de lumiere diffusée ...). Ainsi, la perte d'energie moyenne par unite de temps et par atome est  $\hbar\omega_{jf} P_j (1/T_j)$  et par unite de volume du milieu elle est  $N \hbar\omega_{jf} P_j(1/T_j)$ . L'energie cedee aux atomes par le champ est bien sùre egale (regime stationnaire). On a donc le bilan energetique:

$$(NP_j) \frac{1}{T_j} \hbar\omega_{jf} = N \left( \frac{1}{T_{abs}} \right) \hbar\omega \quad (V-122)$$

ou encore, compte tenu de (V-121):

$$P_j = \frac{\alpha^2 |\langle j|z|f \rangle|^2}{4\hbar^2} \cdot \frac{\tau_j \gamma_{jf}}{(\omega_{jf} - \omega)^2 + \gamma_{jf}^2/4} \cdot E_\omega^2 \quad (V-123)$$

L'equation(V-123) montre que la fraction d'atomes maintenus en regime permanent dans l'etat  $j$  est elle aussi une fonction resonnante de  $\omega$ , proportionnelle egalement a l'intensite du champ. Notons que a la limite de l'approximation lineaire ou nous sommes,  $P_j \ll 1$  et  $NP_j \ll N$ . Ainsi, le nombre d'atomes par unite de volume dans l'etat fondamental est en regime stationnaire tres voisin de  $N$  ( $(1-P_j) N$  en toute rigueur). Sous la forme (V-122), le bilan d'energie est particulierement clair:  $N$  atomes par unite de volume dans l'etat fondamental absorbent par unite de temps  $N/T_{abs}$  photons tandis que  $NP_j$  atomes par unite de volume dans l'etat excite restituent par unite de temps  $NP_j(1/T_j)$  quanta d'energie au reseau. L'equilibre energetique d'un tel milieu absorbant est illustre sur la Fig(14).



En d'autres termes, l'absorption résonnante d'énergie électromagnétique par un milieu diélectrique provient du fait que le champ maintient les atomes dans un état de déséquilibre relatif, une petite fraction des atomes qui en absence de champ seraient dans l'état de base étant maintenus dans un état excité d'énergie plus grande.

### 11) Notion d'inversion de population. Possibilité d'amplification du champ dans un diélectrique.

Supposons maintenant qu'au lieu d'envoyer le champ sur un milieu d'atomes initialement dans l'état de base  $f$ , on dispose d'atomes qui, en absence de champ sont tous dans l'état excité  $j$  et qui sous l'effet d'un mécanisme de "pompage" ont tendance à revenir dans cet état. Le calcul de la polarisabilité d'un tel milieu pour un champ de fréquence  $\omega = \omega_{jf}$  s'effectue de façon tout à fait identique à celui que nous avons fait au chapitre III, à ceci près qu'il suffit d'échanger les rôles de  $j$  et  $f$ . L'équation (V-115) est donc au voisinage de  $\omega = \omega_{jf}$  remplacée par:

$$\chi_0^e(\omega) = \frac{2Nq^2}{\hbar\epsilon_0} \omega_{fj} \frac{|\langle j|z|f\rangle|^2}{\omega_{jf}^2 - \omega^2 - i\gamma_{jf}\omega} \quad (\text{V-124})$$

(couple de niveaux  $jf$ )



qui s'écrit encore:

$$\chi_0^e(\omega \sim \omega_{j,f}) = - \frac{Nq^2}{\hbar\epsilon_0} \frac{|\langle j|z|f\rangle|^2}{\omega_{j,f} - \omega - i\gamma_{j,f}/2} \quad (\text{V-125})$$

soit, pour la partie imaginaire  $\chi''(\omega)$ :

$$\chi_0^{e''}(\omega \sim \omega_{j,f}) = - \frac{Nq^2}{\hbar\epsilon_0} |\langle j|z|f\rangle|^2 \frac{\gamma_{j,f}/2}{(\omega_{j,f} - \omega)^2 + \gamma_{j,f}^2/4} \quad (\text{V-126})$$

et pour la puissance échangée avec le champ:

$$W = - \frac{Nq^2}{2\hbar} |\langle j|z|f\rangle|^2 \omega \frac{\gamma_{j,f}/2}{(\omega_{j,f} - \omega)^2 + \gamma_{j,f}^2/4} E_\omega^2 \quad (\text{V-127})$$

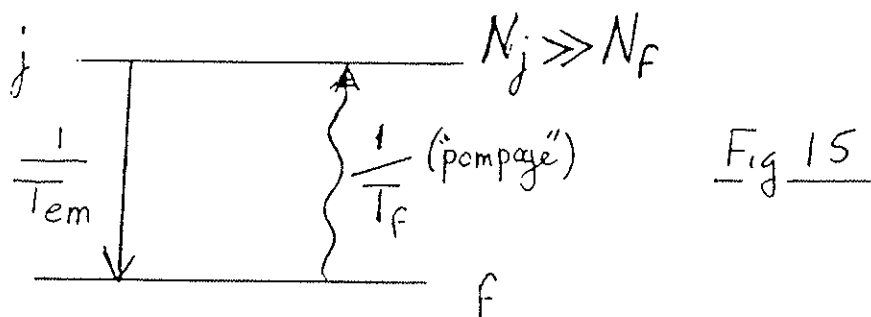
Cette puissance est maintenant négative ce qui veut dire que c'est le milieu qui fournit de l'énergie au champ! En d'autres termes, chaque atome a à présent une probabilité  $1/T_{em}$  par unité de temps d'émettre dans le mode du champ un photon d'énergie  $\hbar\omega$ :

$$\left(\frac{1}{T_{e.m.}}\right)_{\text{atome dans l'état } j} = \left(\frac{1}{T_{a.b.s.}}\right)_{\text{atome dans l'état } f} \quad (\text{V-128})$$

On appelle émission induite ou encore émission stimulée ce phénomène, puisque la probabilité d'émission d'un photon est proportionnelle à l'intensité du champ incident, c'est-à-dire en fin de compte, au nombre de photons déjà présents dans le mode. Il faut bien distinguer ce processus de l'émission spontanée, qui a lieu même en l'absence de champ dans le milieu. On notera que l'émission stimulée est un effet classique qui ne nécessite pas la quantification du champ pour être calculé, contrairement à l'émission

spontanée par un atome. Cet effet d'émission stimulée a pour conséquence une amplification du champ incident: le flux du champ sortant du milieu est alors globalement positif!

Pour que cette amplification ait lieu, il faut réaliser une situation dans laquelle les phénomènes dissipatifs tendent à inverser les populations des niveaux quantiques par rapport à la situation normale de l'équilibre thermodynamique (dans lequel on a bien sûr toujours plus d'atomes dans l'état  $f$  que dans l'état  $j$ ). On sait réaliser de telles situations artificielles d'inversion de populations dans les milieux atomiques en mettant en oeuvre des mécanismes de "pompage" ramenant les atomes du niveau  $f$  vers le niveau  $j$ . Nous décrirons certains types de pompage au chapitre suivant lorsque nous étudierons un modèle simple de laser. On appellera  $1/T_f$  le "taux de pompage" du niveau  $f$  vers le niveau  $j$  induit par ce mécanisme. C'est bien sûr ce pompage qui est la source d'énergie de l'amplificateur optique (tout comme c'est le mécanisme d'amortissement des atomes qui est le "réservoir" de l'énergie cédée par le champ dans les milieux absorbants habituels (voir Chapitre VI)). La figure (15) illustre l'équilibre énergétique d'un système atomique fortement inversé: l'émission de photons est compensée par la restitution d'énergie aux atomes sous l'effet du pompage.

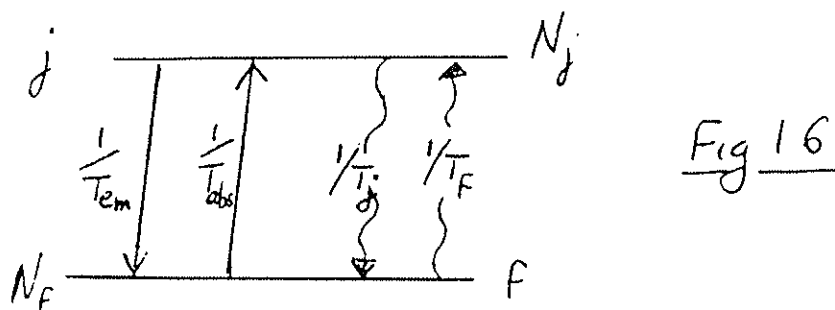


Insistons bien sur le fait que le processus d'émission stimulée est parfaitement symétrique du processus d'absorption correspondant. Le processus d'absorption par un atome dans l'état  $f$  a la même probabilité dans un champ extérieur donné que le processus d'émission stimulée par un atome dans l'état  $j$ . Ce n'est que l'état stationnaire des atomes qui détermine le sens des échanges, l'absorption étant proportionnelle au nombre d'atomes dans l'état inférieur de la transition et l'émission stimulée au nombre d'atomes dans l'état supérieur. Dans le milieu absorbant considéré plus haut, la densité d'atomes dans l'état  $f$ ,  $N_f \sim N$  est beaucoup plus grande que la densité des atomes dans l'état  $j$  et l'absorption est importante, l'émission stimulée négligeable. Dans un milieu amplificateur où  $N_j$  est beaucoup plus grand que la densité des atomes dans l'état d'énergie inférieure l'émission stimulée est le phénomène essentiel, l'absorption très faible. On montre de façon plus générale que dans un milieu où les populations prennent sous l'effet des mécanismes de relaxation des valeurs d'équilibre  $N_j$  et  $N_f$  quelconques la partie imaginaire de la susceptibilité s'écrit au voisinage de la résonance  $\omega = \omega_{jf}$

$$\chi_0''(\omega \sim \omega_{jf}) \simeq \frac{(N_f - N_j) q^2}{k \epsilon_0} |\langle j | z | f \rangle|^2 \frac{\gamma_{jf} / 2}{(\omega_{jf} - \omega)^2 + \gamma_{jf}^2 / 4} \quad (V-129)$$

et les échanges d'énergie entre la matière et le rayonnement résultent du bilan des processus d'absorption et d'émission stimulée dont les importances relatives peuvent être comparables. L'équilibre stationnaire d'un tel système est alors décrit sur la figure (16): C'est maintenant la

somme algébrique des énergies mises en jeu par les processus d'absorption et d'émission induite qui est compensée par les processus responsables de la relaxation ou du pompage.



Toute l'analyse développée ici sur les milieux diélectriques se généralise immédiatement aux milieux magnétiques. Il suffit de remplacer la polarisabilité dipolaire électrique  $\alpha$  par la polarisabilité magnétique. Là encore, la susceptibilité possède une partie imaginaire résonnante pour les fréquences de Bohr atomiques correspondant à des effets d'absorption ou d'amplification, le signe des échanges d'énergie dépendant de l'état stationnaire du système en l'absence de champ.

*Remarque: Nous venons de remarquer que l'émission induite est un phénomène de champ classique : il n'est pas besoin de quantifier le champ électromagnétique pour le comprendre. Il faut cependant traiter quantiquement le milieu atomique pour en rendre compte. Si l'on traite ce milieu comme une collection d'oscillateurs classiques, on obtient toujours un effet d'absorption. Un milieu amplificateur correspond formellement à l'existence d'une force d'oscillateur négative: le système est préparé dans un état excité  $j$  susceptible d'effectuer des transitions vers un niveau d'énergie inférieure  $f$ , correspondant à une fréquence de Bohr  $\omega_{jf}$  négative et donc à une force d'oscillateur négative. L'interprétation probabiliste de la*

*force d'oscillateur est alors perdue et il n'y a pas d'image classique satisfaisante pour le milieu atomique.*

## 12) Conductivité électrique d'un métal ou d'un plasma.

Comme autre exemple important de milieu matériel, considérons à présent un métal constitué d'un réseau régulier d'ions positifs dans lequel se déplacent des électrons. Il est habituel de considérer les électrons comme des particules sans interaction se déplaçant librement dans le réseau (modèle de Drude). Ici encore, la justification de ce modèle simple est donnée par la mécanique quantique qui explique comment les électrons peuvent se mouvoir comme s'ils étaient libres dans le potentiel périodique des noyaux. La théorie quantique permet de calculer la densité  $N$  des électrons "libres" dans le métal et leur "masse effective"  $m^*$  qui est différente de celle d'un électron dans le vide. Avec l'apport de la mécanique statistique, elle permet aussi de décrire comment ces électrons sont "amortis" par des collisions avec les imperfections ou les vibrations du réseau d'ions positifs, ces phénomènes dissipatifs étant décrits par la donnée d'une constante d'amortissement  $\gamma$ , que l'on peut en première approximation considérer comme étant indépendante de la fréquence. Nous supposerons donc connus ces paramètres phénoménologiques pour calculer la conductivité du métal, suivant ainsi une démarche analogue à celle qui nous a permis d'analyser la susceptibilité d'un diélectrique. Considérons donc un gaz d'électrons (charge  $q$ , masse  $m^*$ ) de densité moyenne  $N$ , sans interactions mutuelles. Supposons le mouvement des charges amorti avec une constante  $\gamma$ . Le mouvement de chaque électron en présence du champ  $E_\omega e^{-i\omega t}$  sera :

$$m^* \ddot{z} + m^* \gamma \dot{z} = q E_\omega e^{-i\omega t} \quad (\text{V-130})$$

Cette équation admet la solution stationnaire :

$$z = \frac{q E_\omega}{m^*} \frac{1}{-\omega^2 - i\gamma\omega} e^{-i\omega t} \quad (\text{V-131})$$

D'où la densité de courant

$$j_z = -i\omega Nqz = \frac{Nq^2}{m^*} \frac{1}{\gamma - i\omega} E_\omega e^{-i\omega t} \quad (\text{V-132})$$

et la conductivité

$$\sigma(\omega) = \frac{Nq^2}{m^*} \frac{1}{\gamma - i\omega} \quad (\text{V-133})$$

On trouve une conductivité dépendant de la fréquence, essentiellement réelle à basse fréquence ( $\omega \ll \gamma$ ), tendant à devenir imaginaire pure à haute fréquence. Les échanges d'énergie étant liés à la partie réelle de  $\sigma$ , on voit que l'effet Joule est important à basse fréquence et tend à diminuer lorsque la fréquence augmente. Ceci est vrai tout au moins dans le cadre de ce modèle simplifié, où l'amortissement des électrons est indépendant de la fréquence (dans une description plus réaliste du métal, il faudrait tenir compte du fait que  $\gamma$  dépend de  $\omega$ , surtout pour les hautes fréquences telles que  $\omega > \gamma$ ). Nous avons admis implicitement dans ce modèle que le champ macroscopique est égal au champ local. Ceci est cohérent pour un modèle d'électrons sans corrélations. Nous admettrons que c'est une bonne approximation et ne considérerons pas le problème des interactions

electroniques. Un ordre de grandeur réaliste des paramètres est  $N=5 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}$ ,  $m^*=10^{-30} \text{ kg}$ ,  $\gamma=5 \cdot 10^{13} \text{ s}^{-1}$  à la température ordinaire. On trouve alors à basse fréquence ( $\omega \ll \gamma$ ),  $\sigma=2.6 \cdot 10^7 \text{ ohm}^{-1} \text{ m}^{-1}$ , ce qui est un bon ordre de grandeur pour un métal typique. La conductivité décroît lorsque la température augmente, essentiellement parce que  $\gamma$  augmente avec l'agitation thermique du réseau.

Un métal possède, en plus de sa conductivité électrique une susceptibilité électrique provenant de la polarisabilité des ions du réseau. Nous verrons plus loin qu'il faut en tenir compte pour étudier la propagation du champ dans le métal.

Le modèle présenté ici s'applique aussi, moyennant de petites modifications à un gaz d'électrons et d'ions "sans interactions" (modèle simplifié de plasma). Il suffit de faire  $m^*=m$  dans (V-133) en prenant pour  $m$  la masse des électrons libres. Il faudrait aussi ajouter la contribution à  $\sigma$  provenant du mouvement des ions. Ceux-ci ont cependant une masse  $M \gg m$  et cette contribution peut en général être négligée.

### 13) Propagation du champ dans un milieu matériel isotrope et homogène à "réponse" linéaire.

Nous décrivons ici la propagation d'un champ électromagnétique dans un milieu isotrope à susceptibilité scalaire linéaire et indépendante du temps. Nous supposerons de plus le milieu électriquement neutre en tout point et négligerons toute distribution quadrupolaire électrique. Les

équations de Maxwell dans un tel milieu s'écrivent, pour une composante monochromatique du champ à la fréquence  $\omega$ :

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{B}_\omega(\vec{r}) = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E}_\omega(\vec{r}) = i\omega \vec{B}_\omega(\vec{r}) \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{D}_\omega(\vec{r}) = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{H}_\omega(\vec{r}) = \vec{j}_{\omega, \text{macro}} - i\omega \vec{D}_\omega(\vec{r}) \end{cases} \quad (\text{V-134})$$

avec:

$$\begin{cases} \vec{D}_\omega(\vec{r}) = \epsilon_0 [1 + \chi^{(e)}(\omega, \vec{r})] \vec{E}_\omega(\vec{r}) \\ \vec{H}_\omega(\vec{r}) = \epsilon_0 c^2 [1 + \chi^{(m)}(\omega, \vec{r})] \vec{B}_\omega(\vec{r}) \end{cases} \quad (\text{V-135})$$

et

$$\text{et} \quad \vec{j}_{\omega, \text{macro}} = \vec{\sigma}(\omega, \vec{r}) \vec{E}_\omega(\vec{r}) \quad (\text{V-136})$$

On définit alors traditionnellement les permittivités électrique et magnétique du milieu par les relations:

$$\begin{cases} \epsilon_r(\omega, \vec{r}) = 1 + \chi^{(e)}(\omega, \vec{r}) \\ \mu_r(\omega, \vec{r}) = 1 + \chi^{(m)}(\omega, \vec{r}) \end{cases} \quad (\text{V-137})$$

et les champs dérivés  $\vec{D}_\omega(\vec{r})$  et  $\vec{H}_\omega(\vec{r})$  s'écrivent:

$$\begin{cases} \vec{D}_\omega(\vec{r}) = \epsilon_0 \epsilon_r(\omega, \vec{r}) \vec{E}_\omega(\vec{r}) \\ \vec{H}_\omega(\vec{r}) = \frac{1}{\mu_0 \mu_r(\omega, \vec{r})} \vec{B}_\omega(\vec{r}) \end{cases} \quad (\text{V-138})$$

Les équations (V-134) et (V-138) décrivent la propagation dans un milieu isotrope linéaire quelconque, avec des susceptibilités complexes pouvant



varier dans l'espace. Par souci de simplicité, nous restreindrons le problème à un milieu homogène, dont les susceptibilités sont constantes, indépendantes de  $r$ . Les équations (V-134) ont alors la même invariance par translation que dans l'espace libre et elles admettent de même comme solutions particulières des ondes planes monochromatiques. Nous écrirons ces ondes planes sous la forme:

$$\begin{cases} \vec{E}_\omega(\vec{r}) = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} & \text{(V-139a)} \\ \vec{B}_\omega(\vec{r}) = \vec{B}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} & \text{(V-139b)} \end{cases}$$

où les vecteurs  $\vec{E}_0$  et  $\vec{B}_0$  satisfont les relations:

$$\vec{E}_0 \cdot \vec{k} = \vec{B}_0 \cdot \vec{k} = 0 \quad \text{(V-140)}$$

et

$$\vec{B}_0 = \frac{\vec{k}}{\omega} \times \vec{E}_0 \quad \text{(V-141)}$$

Les relations (V-140) expriment la transversalité du champ magnétique et du champ électrique dans le milieu (si  $\epsilon_r$  est constant,  $\vec{E}$  est proportionnel à  $\vec{D}$  dont la divergence est nulle d'après (V-134) et le champ électrique a donc aussi dans un milieu homogène une divergence nulle). La relation (V-141) est une conséquence de (V-134b). Ces solutions en ondes planes sont particulièrement simples et intéressantes dans la mesure où une solution quelconque peut être développée sous forme d'une somme de telles ondes. Notons tout de suite qu'en général la source du champ est extérieure au milieu et qu'un élément essentiel du problème de la propagation dans un milieu matériel consiste à raccorder les ondes planes dans le milieu aux

ondes se propageant dans le vide à l'extérieur. Nous reviendrons sur ce problème au § V-14. Nous traitons ici deux cas particuliers importants: celui d'un milieu isolant diélectrique et celui d'un milieu conducteur. Nous supposons ces milieux non magnétiques ( $\mu_r(\omega) = 1$ ).

a) Milieu diélectrique non conducteur.

On a  $\sigma(\omega) = 0$  et les équations (V-134) dans lesquelles,  $\epsilon_r(\omega) = 1 + \chi^e(\omega)$  est supposé indépendant de  $r$ , s'écrivent:

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{B}_\omega = \vec{\nabla} \cdot \vec{D}_\omega = \vec{\nabla} \cdot \vec{E}_\omega & (V-142a) \\ \vec{\nabla} \times \vec{E}_\omega = i\omega \vec{B}_\omega & (V-142b) \\ \vec{\nabla} \times \vec{B}_\omega = -\frac{i\omega}{c^2} \epsilon_r(\omega) \vec{E}_\omega & (V-142c) \end{cases}$$

On élimine alors le champ magnétique suivant la méthode habituelle en prenant le rotationnel de (V-142b) et en utilisant la relation  $\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \Delta \vec{E}$  (puisque  $\nabla \cdot \vec{E} = 0$ ). On obtient immédiatement:

$$\Delta \vec{E}_\omega + \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_r(\omega) \vec{E}_\omega = 0 \quad (V-143)$$

On remplace alors dans (V-143) le champ par son expression (V-139a) et on obtient la relation de dispersion:

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_r(\omega) \quad (V-144)$$

Distinguons maintenant le cas des milieux à susceptibilité essentiellement réelle à la fréquence  $\omega$  des milieux dissipatifs pour lesquels la susceptibilité a une composante imaginaire non négligeable:

(i) milieu non dissipatif ( $\epsilon_r$  réel):

Pour un tel milieu, on a simplement:

$$k = \pm \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_r(\omega)} \quad (\text{V-145})$$

et  $\mathbf{k}$  est un vecteur d'onde réel. L'onde plane a la même structure que dans le vide, avec un vecteur d'onde de module  $(\omega \sqrt{\epsilon_r(\omega)})/c$ . On appelle la quantité  $\sqrt{\epsilon_r(\omega)}$  l'indice  $n(\omega)$  du milieu à la fréquence  $\omega$ :

$$n(\omega) = \sqrt{\epsilon_r(\omega)} = \sqrt{1 + \chi^{(e)}(\omega)} \quad (\text{V-146})$$

Pour un milieu diélectrique constitué de molécules de polarisabilité réelle  $\alpha'$ , on obtient, compte tenu de (V-111) et (V-137):

$$n(\omega) = \sqrt{\frac{1 + 2N\alpha'(\omega)/3}{1 - (N\alpha'(\omega))/3}} \quad (\text{V-147})$$

Si le milieu est dilué ( $N\alpha' \ll 1$ ), (V-147) peut être approchée par:

$$n(\omega) \simeq 1 + \frac{N\alpha'(\omega)}{2} \quad (\text{V-148})$$

On retrouve bien dans ce cas la définition simple de l'indice telle que nous l'avons établie au Chapitre II et utilisée au Chapitre IV. L'indice est

evidemment relie a la vitesse de phase de l'onde dans le milieu. Pour un vecteur d'onde parallèle à l'axe Oz, l'onde plane s'écrit en effet:

$$\vec{E}_\omega(\vec{r}) = \vec{E}_0 e^{i \left[ \frac{\omega n(\omega)}{c} z - \omega t \right]} \quad (\text{V-149})$$

et sa phase se propage avec la vitesse  $v_\varphi$  dépendant de la fréquence:

$$v_\varphi = c/n(\omega) \quad (\text{V-150})$$

Donnons enfin les expressions du champ magnétique et du vecteur de Poynting de l'onde dans le diélectrique transparent. D'après (V-141), (V-145) et (V-146), on obtient tout de suite:

$$B_0 = \frac{n(\omega)}{c} E_0 \quad (\text{V-151})$$

et

$$|\vec{S}| = \epsilon_0 c^2 \frac{E_0 \cdot B_0}{2} = \epsilon_0 c n(\omega) \frac{E_0^2}{2} \quad (\text{V-152})$$

Le rapport entre l'amplitude du champ électrique et celle du champ magnétique n'est plus égal a c. mais à la vitesse de phase  $c/n$  de l'onde dans le milieu. Il en résulte que le vecteur de Poynting est proportionnel à  $nE^2$ . Il est enfin instructif d'évaluer l'ordre de grandeur de l'indice pour un milieu dense transparent aux fréquences optiques. La polarisabilité moléculaire est alors essentiellement de nature induite. Nous avons évalué l'ordre de grandeur de  $\alpha$  au § V- 8 et trouvé (équation V-72) une valeur de l'ordre de  $100 a_0^3$ . Une valeur approchée de la densité d'un solide ou

d'un liquide est  $N = 1 / (200 a_0^3)$  (distance intermoléculaire typique de 3 angstroms). On a alors  $N\alpha \approx 0,5$  et  $n \approx (1 + 0,5 / (1 - (0,5/3)))^{1/2} \approx 1,3$ , ce qui est bien un ordre de grandeur raisonnable de l'indice d'un verre ou d'un liquide transparent!

(ii) milieu dissipatif ( $\epsilon_r(\omega)$  complexe):

On écrira maintenant:

$$\epsilon_r(\omega) = \epsilon'(\omega) + i \epsilon''(\omega) = 1 + \chi^{e'}(\omega) + i \chi^{e''}(\omega) \quad (V-153)$$

L'équation (V-144) montre que  $k$  est alors lui même complexe. Nous choisirons pour fixer les idées une onde se propageant le long de Oz et nous écrirons  $\mathbf{k}$  sous la forme:

$$\mathbf{k} = \pm (k' + ik'') \vec{e}_z \quad (V-154)$$

où  $k'$  est supposé positif. (V-154) correspond aux solutions en ondes planes à vecteur d'onde complexe:

$$\vec{E}_\omega^+(\vec{r}) = \vec{E}_{0+} e^{i(k'z - \omega t)} e^{-k''z} \quad (V-155a)$$

$$\vec{E}_\omega^-(\vec{r}) = \vec{E}_{0-} e^{-i(k'z + \omega t)} e^{k''z} \quad (V-155b)$$

Considérons pour commencer le cas  $k'' > 0$ : L'équation (V-155a) décrit une onde se propageant de gauche à droite et s'atténuant exponentiellement dans le milieu. L'équation (V-155b) décrit une onde se propageant de droite à gauche en décroissant lorsque  $z$  décroît, c'est à dire en s'atténuant encore dans sa direction de propagation. L'onde est donc toujours exponentiellement atténuée pour  $k'' > 0$ . Ces conclusions sont inversées pour

$k'' < 0$  : l'onde est exponentiellement amplifiée dans sa direction de propagation. Nous nous limiterons dans la suite à la solution contenant le signe + dans (V-154) et décrirons des ondes se propageant de gauche à droite. La résolution de l'équation (V-144) est immédiate et donne:

$$n = \frac{k' + ik''}{k_0} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \left( \epsilon' + \sqrt{\epsilon'^2 + \epsilon''^2} \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{i \epsilon''}{\left( \epsilon' + \sqrt{\epsilon'^2 + \epsilon''^2} \right)^{\frac{1}{2}}} \right] \quad (\text{V-156})$$

avec  $k_0 = \omega/c$  (nombre d'onde du champ de même fréquence dans le vide). La quantité  $n = (k' + ik'')/k_0$  est ce qu'on appelle l'indice complexe du milieu: On constate que le signe de  $k''$  est celui de  $\epsilon''$ , donc celui de  $\chi^{e''}$ : l'atténuation exponentielle du champ pour  $\chi^{e''} > 0$  et son amplification exponentielle pour  $\chi^{e''} < 0$  traduisent la conservation de l'énergie du système champ matière. Dans le premier cas, le champ fournit de l'énergie au milieu: le flux algébrique du vecteur de Poynting "sortant" d'une tranche quelconque du milieu doit être négatif (voir équation V-41 ou V-47), ce qui est bien le cas si l'onde est atténuée le long de sa direction de propagation. Dans le deuxième cas, ce sont les atomes qui fournissent de l'énergie au champ et le vecteur de Poynting a un flux positif "sortant" d'une tranche du milieu. Nous avons vu au § V-10 et V-11 que ces phénomènes d'absorption ou d'amplification sont reliés au bilan de processus élémentaires d'absorption et d'émission stimulée de photons par les atomes. On pose souvent:

$$\frac{1}{2z_0} = k'' = \frac{k_0 \epsilon''}{\sqrt{2}} \frac{1}{\left( \epsilon' + \sqrt{\epsilon'^2 + \epsilon''^2} \right)^{\frac{1}{2}}} \quad (\text{V-157})$$

et on appelle  $z_0$  la longueur caractéristique d'absorption du champ dans le milieu. La variation en  $z$  de l'intensité est en effet en  $\exp(-z/z_0)$  et la

longueur  $z_0$  est celle pour laquelle l'intensité est divisée par  $e$  lorsque le milieu est absorbant. Un milieu amplificateur a avec ces conventions une longueur caractéristique d'absorption négative. La valeur de  $z_0$  dépend des caractéristiques du milieu (densité, polarisabilité complexe de ces atomes) et de la valeur de  $\omega$ , comparée aux fréquences d'absorption  $\omega_j$ . Un milieu "transparent" pourra avoir une longueur d'absorption de plusieurs km: c'est le cas de l'atmosphère aux fréquences visibles, de fibres optiques de bonne qualité dans le proche infrarouge. Un milieu très absorbant pourra atténuer le champ sur quelques longueurs d'onde... La même variation d'ordre de grandeur existe pour les milieux amplificateurs.

La quantité  $k'/k_0$  décrit quant à elle toujours la variation de phase du champ. La vitesse de phase du champ est donc:

$$v_{\varphi} = \frac{c k_0}{k'} = \frac{c \sqrt{2}}{\left(\epsilon' + \sqrt{\epsilon'^2 + \epsilon''^2}\right)^{1/2}} \quad (\text{V-158})$$

Les équations (V-156), (V-157) et (V-158) se simplifient pour un milieu dilué ( $|\chi^e| \ll 1$ ). On a alors:

$$n = \frac{k' + ik''}{k_0} \simeq 1 + \frac{\chi^{e'}(\omega)}{2} + i \frac{\chi^{e''}(\omega)}{2} \quad (\text{V-159})$$

On peut dans ce cas expliciter l'indice complexe:

$$n(\omega) \simeq 1 + \frac{N\alpha'(\omega)}{2} + i \frac{N\alpha''(\omega)}{2} \quad (\text{V-160})$$

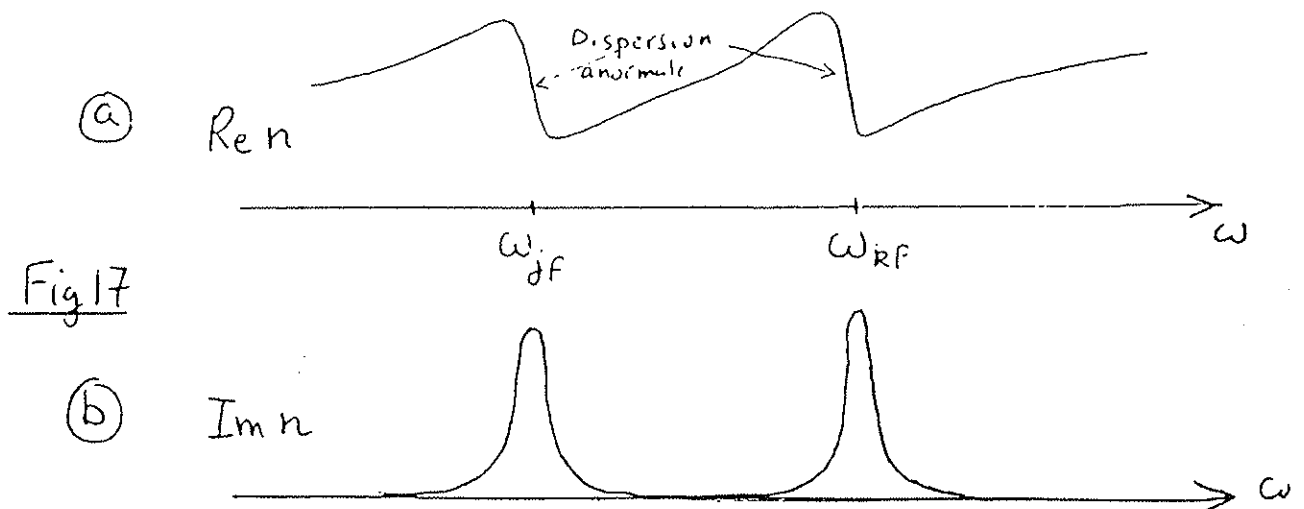
ainsi que le coefficient d'absorption:

$$\frac{1}{z_0} = 2k'' = k_0 \chi^{e''}(\omega) = Nk_0 \alpha''(\omega) = \frac{2\pi N}{\lambda_0} \alpha''(\omega) \quad (\text{V-161})$$

et la vitesse de phase de l'onde:

$$v_p = \frac{c k_0}{k'} \approx \frac{c}{1 + \frac{\chi''(\omega)}{2}} \approx \frac{c}{1 + \frac{N\alpha'(\omega)}{2}} \quad (\text{V-162})$$

Pour un milieu dont la polarisabilité est de nature induite, on peut à présent décrire qualitativement les variations avec la fréquence des parties réelles et imaginaires de l'indice. Il suffit pour cela de reporter dans l'expression (V-159) les expressions (V-119): la partie réelle de l'indice, qui détermine la vitesse de phase de l'onde, varie comme une somme de fonctions de Lorentz "en dispersion" ( Fig17a) alors que la partie imaginaire qui détermine le coefficient d'absorption du milieu, varie comme une somme de fonctions de Lorentz "en absorption"( Fig17b). La largeur des résonances est déterminée par les constantes d'amortissement des dipôles du milieu. Les parties réelles et imaginaires de l'indice sont reliées entre elles par les "relations de Kramers " (voir§7). Notons que le sens de variation de l'indice réel change de signe lorsque la fréquence de l'onde s'approche d'une fréquence d'absorption. La dispersion des vitesses de phase avec la fréquence est dite "anormale" lorsque l'on se trouve dans la région où la dispersion a un signe opposé à celui d'un milieu transparent loin d'une fréquence d'absorption.





b) milieu conducteur: cas d'un métal.

Considérons à présent un milieu métallique conducteur non magnétique ayant une conductivité  $\sigma(\omega)$  et une permittivité  $\epsilon_r(\omega)$  (la permittivité est liée à la susceptibilité électrique des ions du réseau cristallin).

Les équations de Maxwell s'écrivent alors:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \cdot \vec{B}_\omega = \vec{\nabla} \cdot \vec{E}_\omega = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E}_\omega = i\omega \vec{B}_\omega \\ \vec{\nabla} \times \vec{B}_\omega = \left( \frac{\sigma(\omega)}{\epsilon_0 c^2} - \frac{i\omega \epsilon_r(\omega)}{c^2} \right) \vec{E}_\omega \end{array} \right. \quad (\text{V-163})$$

et, après une manipulation analogue à celle faite plus haut, on trouve l'équation de propagation du champ électrique:

$$\Delta \vec{E}_\omega + \left( \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_r(\omega) + \frac{i\omega \sigma(\omega)}{\epsilon_0 c^2} \right) \vec{E}_\omega = 0 \quad (\text{V-164})$$

Cherchons une solution de cette équation en onde plane. On obtient la relation de dispersion:

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_r(\omega) + \frac{i\omega \sigma(\omega)}{\epsilon_0 c^2} \quad (\text{V-165})$$

Le nombre d'onde  $k$  est en général solution d'une équation complexe qui n'est pas essentiellement différente de (V-144). Il est clair que la séparation entre  $\sigma$  et  $\epsilon_r$  n'a rien de fondamental puisqu'elle provient en fin de compte de la séparation entre charges liées et délocalisées faite plus haut et il n'est donc pas étonnant que les relations de dispersion des ondes dans un métal et dans un diélectrique prennent des formes semblables. Quoiqu'il en soit et pour la simplicité de la discussion physique nous supposons  $\epsilon_r$  réel (de l'ordre de l'unité) et  $\sigma$  complexe, donné par la relation (V-133). Distinguons le régime basse fréquence pour lequel  $\omega \ll \gamma$  du régime haute fréquence  $\omega \gg \gamma$ .

(i) Champ basse fréquence ( $\omega \ll \gamma$ ).

Il s'agit typiquement de champs radiofréquence ou très infrarouges pour lesquels  $\omega \ll 10^{13} - 10^{14} \text{ s}^{-1}$ , suivant le métal. La conductivité est alors essentiellement réelle et peut s'écrire:

$$\sigma \simeq \frac{Nq^2}{m^* \gamma} \quad (\text{V-166})$$

La relation de dispersion se met alors sous la forme:

$$k^2 = \epsilon_r k_0^2 \left[ 1 + i \frac{Nq^2}{m^* \gamma \epsilon_0 \epsilon_r \omega} \right] \quad (\text{V-167})$$

On voit dans (V-167) apparaître la quantité sans dimension  $Nq^2/(m^* \epsilon_0 \epsilon_r \gamma \omega)$  que l'on peut mettre sous la forme  $\omega_p^2 / \gamma \omega$  en introduisant ce qu'on appelle la fréquence plasma du métal  $\omega_p$  définie par:

$$\omega_p^2 = \frac{Nq^2}{m^* \epsilon_0 \epsilon_r} \quad (V-168)$$

$\omega_p$  est un paramètre intrinsèque du métal, qui ne dépend que de sa densité électronique, de sa permittivité et de la masse "effective" de ses électrons de conduction. On réécrit alors (V-167) sous la forme:

$$k^2 = \epsilon_r k_0^2 \left[ 1 + i \frac{\omega_p^2}{\gamma \omega} \right] \quad (V-169)$$

Un calcul d'ordre de grandeur élémentaire montre que pour le métal typique considéré au §V-12, on a  $\omega_p \sim 10^{16} \text{ s}^{-1}$ , c'est à dire  $\omega_p \gg \gamma$ . Il s'agit là d'une inégalité généralement satisfaite dans un métal. On a donc a fortiori, pour le régime basse fréquence considéré ici:

$$\omega_p^2 \gg \gamma \omega \quad (V-170)$$

et la relation de dispersion s'écrit simplement:

$$k^2 \simeq i \epsilon_r k_0^2 \frac{\omega_p^2}{\gamma \omega} \quad (V-171)$$

Le carré du vecteur d'onde est imaginaire pur. La valeur de  $k$  s'obtient immédiatement:

$$k \simeq \pm k_0 (1+i) \sqrt{\frac{\epsilon_r \omega_p^2}{2\gamma \omega}} = \pm k_0 (1+i) \sqrt{\frac{Nq^2}{2m^* \gamma \epsilon_0 \omega}} \quad (V-172)$$

Le signe +/- correspond comme plus haut aux ondes se propageant de gauche à droite ou en sens contraire. Ne considérons que l'onde allant de gauche à droite ( signe +). Elle s'écrit:

(\*)  $\omega_p$  tel qu'il est défini par (V-168) dépend de  $\omega$  par l'intermédiaire de  $\epsilon_r$ .

On pourrait également adopter la définition légèrement différente  $\omega_p^2 = Nq^2 / m^* \epsilon_0$  qui rend  $\omega_p$  indépendant de  $\omega$ . Il faudrait alors modifier en conséquence toutes les formules qui suivent (voir V-181 que nous avons exprimée en fonction des deux définitions possibles de  $\omega_p$ ).

$$\vec{E}_\omega(\vec{r}) = \vec{E}_0^* \exp i \left[ k_0 (1+i) \sqrt{\frac{Nq^2}{2m^* \gamma \epsilon_0 \omega}} z - \omega t \right] \quad (\text{V-173})$$

et décrit une atténuation de l'amplitude du champ sur une longueur caractéristique  $\delta$  définie par:

$$\frac{1}{\delta} = \sqrt{\frac{Nq^2 \omega}{2m^* \gamma \epsilon_0 c^2}} = \sqrt{\frac{\sigma \omega}{2\epsilon_0 c^2}} = \sqrt{\frac{\sigma \pi}{\epsilon_0 c \lambda}} \quad (\text{V-174})$$

$\delta$  s'appelle l'épaisseur de peau du métal à la fréquence  $\omega$ . Une conductivité typique  $\sigma \approx 3 \cdot 10^7 \text{ ohm}^{-1} \text{ m}^{-1}$  correspond à une épaisseur de peau

$$\delta (\text{en mm}) \approx (2 \cdot 10^{-4}) (\lambda \text{ en mm})^{(1/2)}$$

(expression où  $\delta$  et  $\lambda$  sont tous deux exprimés en mm). Ainsi le champ ne pénètre que très superficiellement dans le métal aux basses fréquences (le régime basse fréquence s'étend jusqu'à  $\omega \approx 10^{13}$  à  $10^{14} \text{ s}^{-1}$ , c'est à dire pour  $\lambda = 2\pi c/\omega \approx 0.2$  à  $0.02 \text{ mm}$  suivant le métal). L'atténuation du champ sur l'épaisseur de peau est bien sûr liée à la dissipation par effet Joule, proportionnelle à la partie réelle de  $\sigma$  (voir équation V-47). Remarquons également que l'existence d'une épaisseur de peau très faible aux fréquences radioélectriques explique que dans les circuits électriques oscillants (et en particulier dans les antennes) les courants restent localisés à la surface des conducteurs.

(ii) Champs haute fréquence.

On considère à présent le cas où  $\omega \gg \gamma$  (lumière proche infrarouge, visible ou ultraviolette). La conductivité est alors essentiellement imaginaire pure:

$$\sigma \approx \frac{i Nq^2}{m^* \omega} \quad (\text{V-175})$$

et la relation de dispersion (V-164) s'écrit:

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_r - \frac{Nq^2}{m^* \epsilon_0 c^2} \quad (V-176)$$

$$= \frac{\epsilon_r}{c^2} (\omega^2 - \omega_p^2)$$

Le carre du nombre d'onde est maintenant réel. Deux cas sont à considérer suivant le signe de  $\omega - \omega_p$ .

( $\alpha$ ) A "moyennement" haute fréquence ( $\gamma \ll \omega \ll \omega_p$ ),  $k$  est imaginaire pur:

$$k \simeq \pm \frac{i}{c} \sqrt{\epsilon_r (\omega_p^2 - \omega^2)} \quad (V-177)$$

et l'onde s'écrit (pour un vecteur d'onde le long de Oz):

$$\vec{E}_{\omega}^{\pm}(\vec{r}) = \vec{E}_0_{\pm} \exp \left[ \mp \sqrt{\epsilon_r (\omega_p^2 - \omega^2)} \frac{z}{c} - i\omega t \right] \quad (V-178)$$

La structure de (V-178) est différente de l'équation d'une onde qui se propage avec atténuation, pour laquelle  $k$  a une partie imaginaire et une partie réelle (comparer avec V-165). Nous voyons qu'ici le champ oscille avec la même phase en tous les points quel que soit  $z$ . Il n'y a donc pas propagation. La différence de structure de la solution est manifeste lorsqu'on calcule le champ magnétique associé à  $\vec{E}_{\omega}$  (à l'aide de la relation (V-141)):  $k$  étant imaginaire pur, le champ magnétique est exactement en quadrature avec le champ électrique. En conséquence, le vecteur de Poynting moyenné sur une période optique  $\frac{\epsilon_0 c^2}{4} (\vec{E}_{\omega} \times \vec{B}_{\omega}^* + \vec{E}_{\omega}^* \times \vec{B}_{\omega})$  est nul partout. Il n'y a pas d'énergie électromagnétique entrant ou sortant d'une tranche du milieu, ce qui est bien en accord avec le fait qu'il n'y a aucune dissipation ( $\sigma$  imaginaire pur).

La solution (V-178) avec le signe - représente un champ qui s'atténue avec une phase constante lorsque  $z$  augmente. La solution (V-178) avec le signe + représente un champ d'amplitude exponentiellement croissante avec  $z$ . Pour comprendre le sens physique de tels champs, il ne faut pas oublier qu'en fait, la conductivité n'est jamais rigoureusement imaginaire pure: il existe même pour  $\omega$  grand un petit terme réel proportionnel à  $\gamma$  dans l'expression (V-133) de  $\sigma(\omega)$ . De plus la permittivité  $\epsilon_r(\omega)$  n'est pas rigoureusement réelle, et toute partie imaginaire décrivant les pertes diélectriques des ions du milieu peut être resommée avec la partie réelle de  $\sigma$  dans l'équation V-165. Si l'on rajoute ces petites contributions à l'équation de dispersion (V-176),  $k$  acquiert une petite partie réelle  $k_r$  et s'écrit approximativement:

$$k \simeq \pm \left( k_r + \frac{i}{c} \sqrt{\epsilon_r (\omega_p^2 - \omega^2)} \right) \quad (\text{V-179})$$

Les solutions décrivant l'onde dans le milieu sont donc en fait:

$$\vec{E}_{\omega}^{\pm}(\vec{r}) = \vec{E}_0^{\pm} \exp \left[ \pm i k_r z \mp \sqrt{\epsilon_r (\omega_p^2 - \omega^2)} \frac{z}{c} - i\omega t \right] \quad (\text{V-180})$$

et représentent une onde allant de gauche à droite ( avec un vecteur d'onde réel  $k_r$  très petit ) et s'atténuant dans son sens de propagation et une onde allant de droite à gauche ( avec un  $k_r$  très petit également ) et s'atténuant aussi le long de sa direction de propagation. Les solutions (V-178) correspondent aux limites de ces solutions physiques lorsque la dissipation du milieu tend vers zero. Pour donner un sens physique à ces solutions exponentiellement amorties, il faut bien sûr traiter un problème physique

complet, en tenant compte de l'entrée du champ dans le métal (voir plus bas).

(β) A "très haute" fréquence ( $\omega \gg \omega_p$ ),

$k$  est réel et l'onde se propage sans atténuation avec un nombre d'onde:

$$k = \frac{1}{c} \sqrt{\epsilon_r (\omega^2 - \omega_p^2)} = \frac{1}{c} \sqrt{\epsilon_r \omega^2 - \frac{Nq^2}{m^* \epsilon_0}} \quad (\text{V-181})$$

correspondant à un indice réel:

$$n(\omega) = \sqrt{\epsilon_r \left( 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right)} \quad (\text{V-182})$$

et à une vitesse de phase:

$$v_p = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r (1 - \omega_p^2 / \omega^2)}} \quad (\text{V-183})$$

La fréquence plasma du métal apparaît ainsi comme une "fréquence de coupure": le champ électromagnétique se propage dans le métal au dessus de cette fréquence, alors qu'il ne peut se propager à plus basse fréquence. Bien entendu les formules (V-181, V-182 et V-183) correspondent à un métal idéal sans aucune perte. Dans un milieu réel,  $k$  possède une petite partie imaginaire et l'onde est légèrement atténuée.

L'atténuation très rapide de l'onde dans un métal idéal sans pertes au-dessous de sa fréquence de coupure doit être discutée dans le contexte des relations de passage décrivant comment le champ "entre" dans le métal (voir § V-14). Nous pouvons en dire quelques mots ici. Nous avons vu qu'il

n'y a dans le cas idéal pas de pertes par effet Joule et, pour une tranche du milieu, pas de flux entrant à gauche ou sortant vers la droite du vecteur de Poynting. Cela signifie qu'à l'endroit où le milieu commence ( $z=0$ ) le flux d'énergie incident ne peut pénétrer dans le métal (qui s'étend en  $z > 0$ ) et se trouve totalement réfléchi vers les  $z$  négatifs. Nous verrons effectivement au §V14 que le champ est réfléchi avec un coefficient de réflexion dont le module vaut 1. En fait ce coefficient possède une phase non exactement égale à  $\pi$ , correspondant à un petit déphasage entre le champ incident  $E_i$  et le champ réfléchi  $E_r$ . Le champ transmis dans le métal immédiatement à la droite du plan  $z = 0$  est égal à  $E_i + E_r$  et n'est donc en général pas strictement nul (il correspond à l'amplitude  $E_0$  de l'équation (V-178)). Ce champ de phase indépendante de  $z$  (si on néglige les pertes) ne se propage pas, décroît très vite avec  $z$  dans le milieu, et il ne lui est associé aucun transport moyen d'énergie sur une période optique ( $E$  et  $B$  sont en quadrature). On dit qu'il s'agit d'un champ évanescent. L'origine physique de la réflexion totale du champ sur une surface métallique au dessous de la fréquence de coupure a déjà été entrevue au Chapitre II: nous y avons étudié un gaz d'électrons libres et montré qu'au dessus d'une certaine densité  $N$  (dans le langage du présent chapitre nous dirons: pour une fréquence de plasma assez élevée ou encore à fréquence de plasma donnée pour une fréquence  $\omega$  assez faible), le gaz ne transmet pas le champ, mais le réfléchit. Ceci

est dû au rayonnement vers l'arrière de la couche de charges excitées par le champ incident dans le plan d'entrée du métal.  $\sigma$  étant imaginaire pur, la densité de courant est sur la surface en quadrature avec le champ incident et rayonne un champ vers l'avant en opposition de phase exacte avec ce champ. Nous rediscuterons ce problème au paragraphe suivant.

Pour un métal typique,  $\omega_p$  est de l'ordre de  $10^{16}$  à  $10^{17} \text{ s}^{-1}$ . Ainsi, une feuille métallique réfléchira la lumière visible et transmettra l'ultraviolet plus ou moins lointain et les rayons X.

Remarquons qu'au dessus de sa fréquence de coupure, un métal idéal sans pertes propage le champ avec une vitesse de phase qui peut être



supérieure à  $c$  (équation V-183). Ceci ne contredit pas le postulat de relativité. Un signal électromagnétique transportant de l'information est en effet un paquet d'ondes de fréquences différentes:

$$\vec{E}(t) = \int \vec{E}(\omega) \exp[ik(\omega) z - \omega t] d\omega \quad (V-184)$$

Le maximum d'un tel paquet s'obtient à un instant  $t$  pour la valeur  $z_t$  de  $z$  qui rend la phase de l'exponentielle complexe stationnaire par rapport aux variations de  $\omega$ , soit:

$$\frac{dk}{d\omega} z_t - t = 0 \quad (V-185)$$

ce qui montre que le paquet d'onde se propage avec la vitesse de groupe:

$$v_g = z_t / t = \frac{d\omega}{dk} \quad (V-186)$$

La relation de dispersion (V-181) se dérive alors pour donner:

$$\frac{dk}{d\omega} = \frac{1}{c} \frac{\omega \sqrt{\epsilon_r}}{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}} \left( 1 + \frac{\omega d\epsilon_r}{2\epsilon_r d\omega} \right) \quad (V-187)$$

et la vitesse de groupe  $v_g$  du signal constitue par le paquet d'onde est donc bien toujours inférieure à  $c$ :

$$v_g = c \sqrt{1 - \omega_p^2 / \omega^2} \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r} \left( 1 + \frac{\omega d\epsilon_r}{2\epsilon_r d\omega} \right)} \quad (V-188)$$

L'étude présentée ici peut s'adapter sans grandes modifications à la propagation du champ dans un plasma. On y retrouve la même notion de

(\*) Dans (V-188), le facteur  $\sqrt{\epsilon_r} \left( 1 + \frac{\omega}{2\epsilon_r} \frac{d\epsilon_r}{d\omega} \right)$  est supérieur à 1 car  $d\epsilon_r/d\omega$  est positif: nous sommes loin d'une fréquence d'absorption du réseau ionique (constante diélectrique essentiellement réelle) et la dispersion est alors normale avec une dérivée de la susceptibilité par rapport à la fréquence positive (voir Fig 17a). Dans une région de dispersion anormale à variation rapide de  $\epsilon_r$  par rapport à  $\omega$ , la vitesse de groupe n'est plus un concept utile ( $k$  varie trop vite en fonction de  $\omega$ ).

fréquence de coupure. Une différence qui peut être importante est la possibilité de séparation physique des charges de signes contraires, avec apparition explicite de la densité de charges dans les équations de Maxwell. Une telle séparation des charges produit des forces de Coulomb importantes tendant à les rapprocher et induit des oscillations de la densité de charges. Nous n'étudierons pas ce problème ici et nous nous limiterons aux cas où l'on peut négliger l'apparition de termes de densité de charges libres non nulles dans les équation de propagation.

#### 14) Relations de continuité des champs à la séparation de deux milieux .Réflexion sur des surfaces diélectriques et métalliques.

Nous abordons maintenant l'étude des relations de passage du champ d'un milieu à un autre. En général, les sources du rayonnement sont situées à l'extérieur du milieu où l'on étudie la propagation. Il nous faut donc savoir comment les champs se raccordent entre le vide où ils se propagent depuis la source et le milieu matériel. De façon plus générale il est important de savoir décrire le passage du champ entre deux milieux différents. en d'autres termes connaître les coefficients de réflexion et de transmission sur une surface matérielle séparant deux milieux.

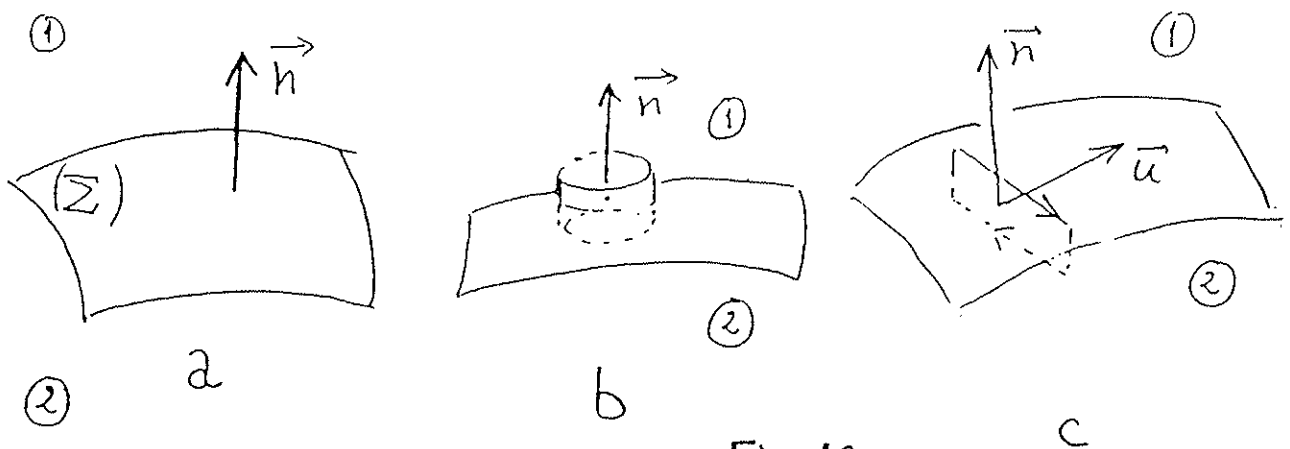


Fig 18

Appelons 1 et 2 les deux milieux séparés par une surface  $\Sigma$  sur laquelle on définit en chaque point une normale orientée  $\mathbf{n}$  de 2 vers 1 (voir figure 18a). Appelons  $\mathbf{E}_i, \mathbf{D}_i, \mathbf{B}_i$  et  $\mathbf{H}_i$  les champs dans les milieux  $i=1,2$  immédiatement de part et d'autre de  $\Sigma$ . Ces quantités sont reliées par les relations:

$$\begin{cases} \vec{D}_i = \epsilon_0 \epsilon_{r1} \vec{E}_i \\ \vec{H}_i = \frac{1}{\mu_0 \mu_{r1}} \vec{B}_i \end{cases} \quad (\text{V-189})$$

où les  $\epsilon_{r1}$  et  $\mu_{r1}$  sont les permittivités électriques et magnétiques des deux milieux.

Supposons que les paramètres (indice, conductivité) varient du milieu 1 au milieu 2 sur une épaisseur faible  $e$  qu'on appellera l'épaisseur de l'interface.

Il se peut que l'interface porte une densité de charges macroscopique et soit le siège d'un courant parallèle à celle-ci. On appellera densité surfacique de charges et courants macroscopiques les quantités :

$$\begin{aligned} \sigma &= e \rho_{\text{macro}} \\ \vec{K} &= e \vec{j}_{\text{macro}} \end{aligned} \quad (\text{V-190})$$

Utilisant les équations de Maxwell (V-33) mises sous forme intégrale, calculons les flux des vecteurs  $\mathbf{D}$  et  $\mathbf{B}$  à travers la surface latérale d'un petit cylindre de section unité, de hauteur  $e$  et d'axe parallèle à  $\mathbf{n}$  (Fig 18b). Ces flux sont respectivement égaux à  $(\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) \cdot \mathbf{n}$  et  $(\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) \cdot \mathbf{n}$ . Le théorème de Gauss donne alors:

$$(\vec{D}_1 - \vec{D}_2) \cdot \vec{n} = \sigma \quad (\text{V-191a})$$

$$(\vec{B}_1 - \vec{B}_2) \cdot \vec{n} = 0 \quad (\text{V-191b})$$

Ainsi la composante normale de  $\mathbf{B}$  est continue à l'interface et, s'il n'y a pas de charge macroscopique de surface, il en est de même de la composante normale de  $\mathbf{D}$ . Calculons maintenant la circulation de  $\mathbf{E}$  et celle de  $\mathbf{H}$  le long d'un petit rectangle à cheval sur la surface de longueur unité et de largeur  $e$  (Fig 18c). Appelons  $\mathbf{u}$  le vecteur unitaire tangent à la surface et normal au rectangle. Le côté du rectangle parallèle à la surface est défini par le vecteur  $\mathbf{u} \times \mathbf{n}$  et les circulations cherchées sont simplement  $(\mathbf{u} \times \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2)$  et  $(\mathbf{u} \times \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2)$  que l'on peut également écrire  $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2))$  et  $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2))$ . Le théorème de Stokes appliqué aux équations (V-33) donne alors:

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot (\vec{n} \times (\vec{E}_1 - \vec{E}_2)) &= 0 \\ \vec{u} \cdot (\vec{n} \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2)) &= \vec{u} \cdot \vec{K} \end{aligned} \quad (\text{V-192})$$

soit puisque le vecteur  $\mathbf{u}$  est arbitraire:

$$\begin{aligned} \vec{n} \times (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) &= 0 \\ \vec{n} \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) &= \vec{K} \end{aligned} \quad (\text{V-193})$$

Ainsi la composante tangentielle de  $\mathbf{E}$  est continue à l'interface et, si le courant de surface est nul, il en est de même de la composante tangentielle de  $\mathbf{H}$ .

Les formules (V-191) et (V-193) complétées par les relations (V-189) permettent de déterminer comment le champ se raccorde entre les deux milieux. Remarquons que l'expression de ces formules dépend de la façon

dont on décrit l'interface. Si la variation des susceptibilités est très rapide, on peut faire tendre  $e$  vers zéro et considérer deux points infiniment voisins de part et d'autre de la séparation. On a alors d'après (V-190)  $\sigma_{\text{macro}} = 0$  et  $\mathbf{K}_{\text{macro}} = 0$  et les composantes normales de  $\mathbf{D}$  et tangentielle de  $\mathbf{H}$  ne subissent pas de saut entre ces deux points. On peut également assigner à  $e$  une épaisseur finie non nulle (par exemple l'épaisseur de peau dans un métal séparé du vide extérieur). Il y a alors un courant de surface dans cette épaisseur et la composante tangentielle de  $\mathbf{H}$  subira des variations entre un point extérieur infiniment voisin de la surface et un point intérieur au métal, "sous" l'épaisseur de peau. Les deux points de vue sont bien sûr équivalents pour analyser le passage du champ d'un milieu à l'autre.

a) Cas de l'interface entre deux diélectriques non magnétiques sans pertes:

Appliquons les formules générales au problème du passage du champ entre un milieu parfaitement transparent 1 d'indice réel  $n_1 = \sqrt{\epsilon_{r1}}$  et un milieu 2 également transparent d'indice réel  $n_2 = \sqrt{\epsilon_{r2}}$ . On supposera pour simplifier les notations  $\mu_{r1} = \mu_{r2} = 1$ . L'interface est le plan  $z=0$  et le champ arrive dans le milieu incident avec le vecteur d'onde  $\mathbf{k}_i$  faisant l'angle  $\theta_i$  avec  $\mathbf{n}$  (voir Fig 19). Les champs électrique et magnétiques de l'onde incidente sont:

$$\begin{aligned} \vec{E}_i(\vec{r}) &= \vec{E}_i \exp i(\vec{k}_i \cdot \vec{r} - \omega t) \\ \vec{B}_i(\vec{r}) &= \left( \frac{\vec{k}_i}{\omega} \times \vec{E}_i \right) \exp i(\vec{k}_i \cdot \vec{r} - \omega t) \end{aligned} \quad (\text{V-194})$$

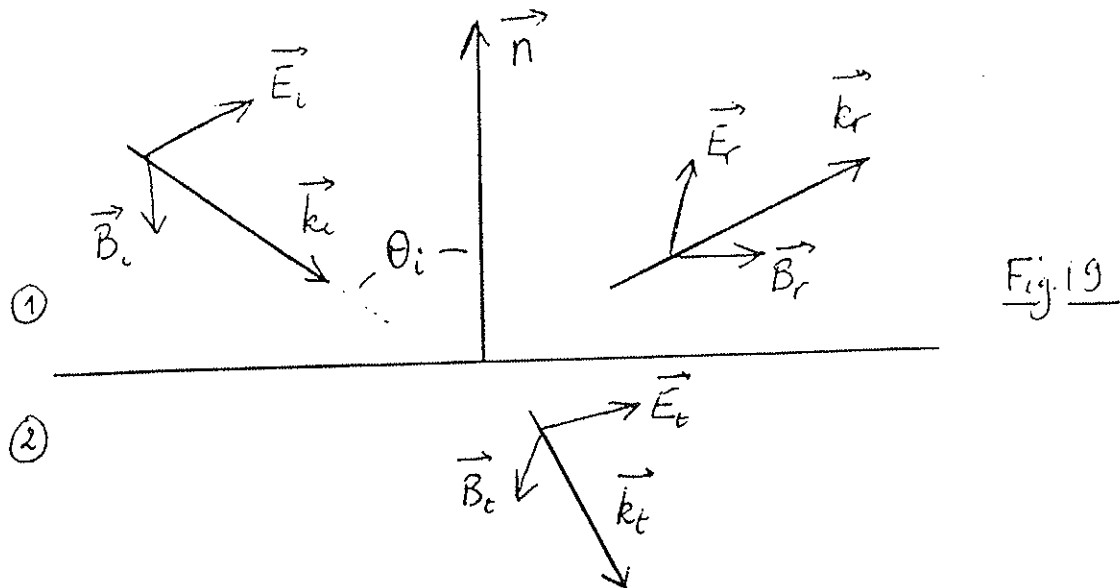


Fig. 19

Nous allons montrer qu'il existe une solution des équations de Maxwell associant à ce champ une onde plane réfléchie dans le milieu 1 de même fréquence, de vecteur d'onde  $\mathbf{k}_r$  faisant un angle  $\theta_r$  avec  $\mathbf{n}$ , de champs  $\mathbf{E}_r$  et  $\mathbf{B}_r$  et une onde transmise dans le milieu 2 de même fréquence et de vecteur d'onde  $\mathbf{k}_t$  faisant un angle  $\theta_t$  avec  $\mathbf{n}$ , de champs  $\mathbf{E}_t$  et  $\mathbf{B}_t$ ; nous donnerons les expressions de toutes ces quantités. Tout d'abord les relations de dispersion imposent les relations:

$$k_r = k_i = n_1 \frac{\omega}{c} \quad (\text{V-195a})$$

et

$$k_t = n_2 \frac{\omega}{c} \quad (\text{V-195b})$$

Exprimons maintenant la continuité de la composante tangentielle du champ électrique en un point  $\mathbf{r}$  du plan  $z=0$ :

$$\vec{n} \times \left[ \vec{E}_i e^{i\vec{k}_i \cdot \vec{r}} + \vec{E}_r e^{i\vec{k}_r \cdot \vec{r}} - \vec{E}_t e^{i\vec{k}_t \cdot \vec{r}} \right] = 0 \quad (\text{V-196})$$

Cette relation devant être satisfaite quel que soit  $\mathbf{r}$  du plan  $z=0$ , cela impose les identités:

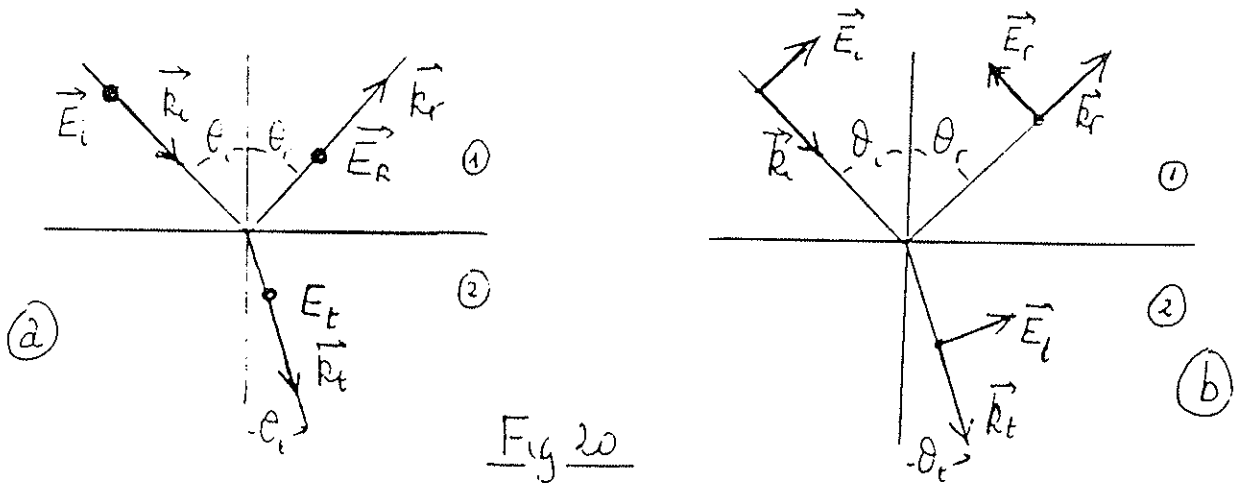
$$\vec{k}_i \cdot \vec{r} = \vec{k}_r \cdot \vec{r} = \vec{k}_t \cdot \vec{r} \quad (\text{V-197})$$

Les équations (V-197) montrent que  $\vec{k}_i - \vec{k}_r$  et  $\vec{k}_i - \vec{k}_t$  sont normaux à la surface  $z=0$ , donc colinéaires à  $\vec{n}$ :  $\vec{k}_r$  et  $\vec{k}_t$  sont ainsi contenus dans le plan d'incidence défini par  $\vec{k}_i$  et  $\vec{n}$ : c'est la première loi de Descartes. Choisissons maintenant  $\vec{r}$  dans le plan d'incidence. On a  $\vec{k}_i \cdot \vec{r} = k_i r \sin \theta_i$ ;  $\vec{k}_r \cdot \vec{r} = k_r r \sin \theta_r$ ;  $\vec{k}_t \cdot \vec{r} = k_t r \sin \theta_t$ . On déduit alors de (V-195) et (V-197) les lois de Descartes pour l'angle de réflexion et l'angle de transmission:

$$\theta_i = \theta_r \quad (\text{V-198a})$$

$$n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_t \quad (\text{V-198b})$$

Distinguons à présent deux cas de polarisation particuliers illustrés par les figures (20a) et (20b): (a) le champ électrique incident est perpendiculaire au plan d'incidence et (b) il est contenu dans ce plan. Il est facile de voir



que les champs électriques réfléchis et transmis ont les mêmes propriétés. Dans chacun de ces cas, on obtient en exprimant la continuité des champs électriques et magnétiques tangentiels deux équations qui permettent de

calculer les deux inconnues qui restent à déterminer: les amplitudes du champ électrique réfléchi et transmis. On trouve après un calcul simple:

(i) pour un champ électrique perpendiculaire au plan d'incidence:

$$\left\{ \begin{array}{l} E_r = \frac{n_1 \cos\theta_1 - n_2 \cos\theta_t}{n_1 \cos\theta_1 + n_2 \cos\theta_t} E_i \\ E_t = \frac{2n_1 \cos\theta_1}{n_1 \cos\theta_1 + n_2 \cos\theta_t} E_i \end{array} \right. \quad (\text{V-199})$$

(ii) pour un champ électrique dans le plan d'incidence:

$$\left\{ \begin{array}{l} E_r = \frac{n_2 \cos\theta_1 - n_1 \cos\theta_t}{n_2 \cos\theta_1 + n_1 \cos\theta_t} E_i \\ E_t = \frac{2n_1 \cos\theta_1}{n_2 \cos\theta_1 + n_1 \cos\theta_t} E_i \end{array} \right. \quad (\text{V-200})$$

Les relations (V-199) et (V-200) portent le nom de relations de Fresnel. Pour les rendre explicites, il faut bien sûr y remplacer  $\cos\theta_t$  par son expression en fonction de l'angle d'incidence, tirée de (V-198b):

$$\cos\theta_t = \sqrt{1 - \frac{n_1^2}{n_2^2} \sin^2\theta_1} \quad (\text{V-201})$$

Pour une incidence normale, les deux polarisations sont équivalentes et les relations de Fresnel se réduisent à:

$$\left\{ \begin{array}{l} E_r = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} E_i \\ E_t = \frac{2n_1}{n_1 + n_2} E_i \end{array} \right. \quad (\text{V-202})$$



Lorsque  $n_1 < n_2$ , l'angle de transmission  $\theta_t$  est toujours réel ainsi que le vecteur  $\mathbf{k}_t$ : le champ électromagnétique passe toujours effectivement du premier milieu au second.

Pour  $n_1 > n_2$ , il existe un angle d'incidence limite  $\theta_{i,\max}$  au delà duquel  $\theta_t$  et  $\mathbf{k}_{tz}$  deviennent imaginaire:

$$\theta_{i,\max} = \text{Arc sin} ( n_2/n_1 )$$

Il est facile de se convaincre que la solution des équations de Maxwell dans le milieu 2 est toujours donnée par les formules qui précèdent, dans lesquelles  $\cos\theta_t$  et  $\mathbf{k}_{tz}$  sont imaginaires purs. Le vecteur d'onde  $\mathbf{k}_t$  a une composante imaginaire le long de Oz et réelle le long de la surface, ce qui correspond à une onde évanescence dans le milieu 2, se propageant le long de la surface, mais s'atténuant exponentiellement pour  $z < 0$  dans le milieu 2 d'indice le plus faible. L'onde réfléchie est alors déphasée par rapport à l'onde incidente, mais de même amplitude (voir équations V-199 et V-200 dans lesquelles  $\cos\theta_t$  est imaginaire pur). C'est le phénomène de réflexion totale. Ce phénomène est analogue à celui que l'on observe pour un métal éclairé sous incidence normale par un champ de fréquence inférieure à la fréquence plasma ( voir page 398 et 411).

On peut à partir des relations de Fresnel calculer le coefficient de réflexion R et le coefficient de transmission T de l'intensité du champ. Limitons nous au cas où la réflexion n'est pas totale (onde plane transmise à vecteur d'onde réel). On remarque alors que le vecteur de Poynting de l'onde incidente est proportionnel à  $n_1 E_i^2$ , celui de l'onde réfléchi à  $n_1 E_r^2$  et celui de l'onde transmise à  $n_2 E_t^2$ . Le flux du vecteur d'onde incident à travers l'unité de surface de séparation est donc proportionnel à  $n_1 E_i^2 \cos\theta_i$ , celui du flux réfléchi à  $n_1 E_r^2 \cos\theta_r$  et celui du flux transmis à  $n_2 E_t^2 \cos\theta_t$ . On a donc:

$$\left\{ \begin{array}{l} R = \left| \frac{E_r}{E_1} \right|^2 \\ T = \frac{n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i} \left| \frac{E_t}{E_1} \right|^2 \end{array} \right. \quad (\text{V-203})$$

En particulier pour une incidence normale, on trouve:

$$\left\{ \begin{array}{l} R = \left( \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2 \\ T = \frac{4n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2} \end{array} \right. \quad (\text{V-204})$$

et on vérifie bien dans tous les cas la relation  $R+T=1$  (milieux sans perte).

Le lecteur déterminera en guise d'exercice ce qui arrive au vecteur de Poynting du champ transmis dans le cas d'un vecteur d'onde transmis complexe (réflexion totale).

*Remarque :* On note que le coefficient de réflexion du champ s'annule lorsque celui-ci est dans le plan d'incidence (Fig 20b) et lorsque l'angle d'incidence est tel que  $\cos \theta_i / \cos \theta_t = n_2/n_1$ . On montre alors sans peine que l'angle d'incidence est tel que:

$$\tan \theta_i = \frac{n_2}{n_1}$$

Il s'agit de ce qu'on appelle l'angle de Brewster. Si le faisceau incident n'est pas polarisé, ou polarisé dans une direction faisant un angle avec le plan d'incidence, seule la composante du champ perpendiculaire au plan d'incidence sera réfléchiée pour l'angle d'incidence de Brewster. On dispose

*ainsi d'un moyen simple de polariser totalement de la lumière (ou de supprimer la réflexion si on dispose de lumière incidente polarisée).*

### b) Réflexion sur une surface métallique

Sans chercher à résoudre complètement le problème de la réflexion sur une surface métallique, envisageons quelques situations simples, dans le cas d'un champ incident normal à la surface. Nous appellerons toujours  $E_i$ ,  $E_r$  et  $E_t$  les champs incident réfléchis et transmis. Commençons par considérer le cas basse fréquence où la conductivité est essentiellement réelle. Pour un métal parfait, de conductivité quasi infinie et lorsque la fréquence tend vers zéro, le champ doit être nul dans le conducteur, faute de quoi le courant y serait infini. On a donc dans le conducteur  $E_2 = 0$ , d'où  $n \times E_1 = 0$  et la composante tangentielle du champ électrique s'annule à la surface. On a donc nécessairement  $E_i + E_r = 0$  et le champ est totalement réfléchi. En fait,  $\sigma$  n'est pas infini et nous savons d'après l'étude du §V- 13 que le champ pénètre sur l'épaisseur de peau. En conséquence,  $E_r$  est légèrement inférieur à  $E_i$  et un coefficient de réflexion un peu inférieur à 1 est obtenu. La différence entre les puissances incidentes et réfléchies correspond évidemment aux pertes par effet Joule dans l'épaisseur de peau.

Une façon élégante de calculer le coefficient de réflexion explicitement consiste à remarquer que le métal a à basse fréquence un indice complexe donné par la relation tirée de (V-172):

$$n = (1+i) \sqrt{\frac{\epsilon_r \omega_p^2}{2\gamma\omega}} = (1+i)x \quad (\text{V-205})$$

dans laquelle on a défini le paramètre sans dimension  $x$  (grand devant 1) par:

$$x = \sqrt{\frac{\epsilon_r \omega_p^2}{2\gamma\omega}} = \sqrt{\frac{Nq^2}{2m^* \epsilon_0 \gamma\omega}} = \sqrt{\frac{\sigma}{2\epsilon_0 \omega}} \quad (\text{V-206})$$

En introduisant cette valeur de  $n_2$  dans la relation de Fresnel (V-202) avec  $n_1 = 1$ , on obtient pour une incidence normale:

$$E_r = \frac{1 - x(1+i)}{1 + x(1+i)} E_i \quad (\text{V-207})$$

La réflexion introduit ainsi un déphasage et une atténuation de l'onde à la réflexion. Le coefficient de réflexion est:

$$R = \frac{(1-x)^2 + x^2}{(1+x)^2 + x^2} \simeq 1 - 2/x \quad (\text{V-208})$$

soit:

$$R \simeq 1 - \sqrt{\frac{8\epsilon_0 \omega}{\sigma}} \quad (\text{V-209})$$

Ainsi, plus la conductivité est grande, plus le coefficient de réflexion est proche de l'unité.

Dans le cas d'une incidence oblique, le même type de calcul montre que la réflexion métallique transforme une onde polarisée linéairement en onde polarisée elliptiquement.

Considérons enfin le cas d'un métal éclairé avec un champ de fréquence beaucoup plus grande que  $\gamma$ , dans le cas où les pertes sont négligeables

(métal "idéal" à conductivité imaginaire pure). Au dessous de la fréquence de coupure  $\omega_p$ , le métal a un "indice" imaginaire pur (voir V-177). Introduisant cet indice dans (V-202), on trouve un coefficient de réflexion

dont le module est strictement égal à 1. C'est cependant en général un nombre complexe, correspondant à un déphasage du champ à la réflexion et à la pénétration d'un petit champ évanescent dans le métal ( voir page 398). La réflexion totale de l'énergie sur la face d'entrée du métal est bien sûr consistante avec le fait que le champ possède, à la même approximation où  $\sigma$  est imaginaire pur, un vecteur de Poynting moyen nul dans le métal. Bien entendu, on ne peut négliger tout à fait la petite partie réelle de  $\sigma$  et il y a de petites pertes. Surtout, le modèle de métal que nous avons choisi (électrons libres avec amortissement décrit par une constante  $\gamma$  et permittivité réelle ) n'est qu'une approximation de la réalité à haute fréquence. Les métaux réels polis sont en général de bons réflecteurs ( $R > 0,90$  à  $0,95$  ) mais certainement pas des réflecteurs parfaits. Au-dessus de la fréquence plasma, enfin, on trouve un indice réel, inférieur à l'unité. Le métal se comporte comme un milieu transparent qui réfléchit une partie du champ et en transmet une autre. On peut encore dans la limite de validité de notre modèle de conducteur utiliser, pour une incidence normale, la relation (V-202) avec l'indice donné par (V-181). Notons enfin que sous incidence oblique, on se retrouve dans le cas où la réflexion totale devient possible ( arrivée de l'onde sur un milieu d'indice inférieur à l'indice du milieu d'origine). Sous incidence assez grande, le métal réfléchit totalement les ondes qu'il transmettrait sous incidence normale. Un phénomène analogue s'observe dans les plasmas. Un exemple intéressant est celui de la réflexion des ondes courtes sur la ionosphère qui est un milieu ionisé conducteur: les ondes émises par des émetteurs radio sont transmises sous incidence normale vers l'espace. Sous incidence rasante, elles se réfléchissent sur la couche de plasma ionosphérique, puis sur la terre et sont ainsi guidées sur des distances très grandes autour de la terre.



*Remarques en guise de conclusion: lien avec les chapitres IV et VI.*

*Nous avons dans ce qui précède appliqué les équations générales de Maxwell dans la matière à l'étude de problèmes de propagation simples, dans un milieu isotrope et homogène, aux susceptibilités indépendantes du temps. Les équations (V-134) et (V-135) s'appliquent bien sûr de façon plus générale à un milieu linéaire quelconque, même s'il n'est pas homogène. On trouve alors que l'arrivée d'une onde plane sur le milieu donne lieu dans celui-ci à l'apparition d'ondes non planes, dont la distribution des vecteurs d'onde dépend de la dépendance spatiale de l'indice du milieu. On retrouve alors dans un point de vue différent le phénomène de diffusion décrit au chapitre IV: la diffusion du champ dans des directions différentes du champ incident ne se produit que si l'indice présente un caractère spatialement non uniforme. Nous avons également décrit au chapitre IV un phénomène de changement de fréquence au cours de la diffusion lié à l'existence de fluctuations temporelles de l'indice. Nous ne le trouvons pas ici car nous avons considéré un milieu dont la réponse est stationnaire, indépendante du temps.*

*Par souci de simplicité nous avons décrit ici la propagation de champs monochromatiques cohérents, dont l'amplitude et la phase sont fixées. Il est clair que l'analyse développée dans ce chapitre s'étend sans peine à la propagation de champs incohérents gaussiens. Il suffit par exemple de décrire un tel champ par son développement de Fourier et d'étudier la propagation de chacune des composantes de Fourier aléatoire du champ ( la propagation dans le milieu linéaire s'apparentant à une opération de filtrage linéaire).*

*Insistons bien également sur la limitation essentielle de ce chapitre: nous avons considéré des milieux répondant linéairement aux champs*

*incidents. Lorsque les champs sont suffisamment intenses, cette approximation n'est plus satisfaisante. Les dipôles induits dans le milieu ne sont plus proportionnels au champ local et des effets non linéaires importants se manifestent. Nous décrivons certains de ces effets au Chapitre VI.*





