

Théorie Classique des Champs

J.M. Raimond
Université Pierre et Marie Curie
Laboratoire Kastler Brossel
Département de Physique de l'Ecole Normale Supérieure
jmr@lkb.ens.fr

September 12, 2016

Table des Matières

1 Mécanique analytique: formulation Lagrangienne	11
1.1 Description du système: coordonnées généralisées	12
1.2 Principe de moindre action	13
1.2.1 Enoncé	13
1.2.2 Equations de Lagrange	14
1.3 Expressions de la fonction de Lagrange	16
1.3.1 Particule unique libre	16
1.3.2 Système fermé de particules interagissant par des forces dérivant d'un potentiel	17
1.3.3 Système de particules soumises à des forces extérieures	18
1.3.4 Lagrangien de particules chargées dans un champ	20
1.4 Lagrangien et lois de conservation	22
1.4.1 Invariance par translation dans le temps: énergie	23
1.4.2 Translation spatiale: conservation de l'impulsion	24
1.4.3 Invariance par rotation: moment cinétique	26
1.5 Action en fonction de la trajectoire	26
1.5.1 Dépendance en position	27
1.5.2 Dépendance en temps	28
2 Transformation de Lorentz	29
2.1 Rappels de relativité galiléenne	29
2.1.1 Transformation de Galilée	29
2.1.2 Les difficultés de la cinématique classique	31
2.2 Principe de relativité	32
2.2.1 Enoncé	32
2.2.2 Une expérience de pensée	33
2.2.3 Evénements	34
2.3 Transformation de Lorentz	36
2.3.1 Forme de la transformation	36
2.3.2 Intervalle et causalité relativiste	40
2.3.3 Temps propre, dilatation des temps	42
2.3.4 Contraction des longueurs	44
2.3.5 Composition des transformations	46
2.3.6 Vitesse, célérité et rapidité	48
3 Notations Quadridimensionnelles	51
3.1 4-vecteur position d'un événement.	51
3.1.1 Coordonnées contravariantes	51
3.1.2 Coordonnées covariantes	53
3.1.3 Coordonnées covariantes, contravariantes et dualité	54
3.1.4 Changement de référentiel, changement de base	55

3.2	Autres 4–vecteurs	58
3.2.1	Définition	58
3.2.2	4–vitesse, 4–impulsion, 4–accélération	59
3.2.3	Vecteur d’onde	60
3.2.4	Densité de courant	61
3.3	Tenseurs	62
3.3.1	Tenseurs contravariants	63
3.3.2	Tenseurs covariants, tenseurs mixtes	64
3.3.3	Vocabulaire et exemples	65
3.4	Dérivation et analyse vectorielle	66
3.4.1	Dérivation	66
3.4.2	Analyse vectorielle	66
3.4.3	Intégration	67
4	Dynamique relativiste	69
4.1	Particule Libre	69
4.2	Energie–impulsion	72
4.3	Particule soumise à une force	74
4.4	Conservation de l’énergie–impulsion. Application aux collisions	74
4.4.1	Seuil de réaction	75
4.4.2	Effet Compton	76
5	Electrodynamique des charges en mouvement	79
5.1	Particule libre dans un champ imposé	80
5.1.1	Equations de Lagrange	80
5.1.2	Tenseur champ électromagnétique	82
5.1.3	Force de Lorentz	84
5.1.4	Changements de référentiels pour le champ	86
5.1.5	Invariants du champ électromagnétique	87
5.1.6	Premier groupe d’équations de Maxwell	88
5.2	Champ en fonction des sources	89
5.2.1	Interaction champ–courant	89
5.2.2	Lagrangien du champ	90
5.2.3	Equations de Lagrange	91
5.2.4	Equations de Maxwell	92
5.3	Energie–impulsion du champ	93
5.3.1	Tenseur énergie–impulsion	93
5.3.2	Lois de conservation. Interprétation	94
5.3.3	Applications	96
6	Potentiels retardés	101
6.1	Fonction de Green	101
6.1.1	Position du problème	101
6.1.2	Définition de la fonction de Green	102
6.1.3	Approche qualitative	103
6.2	Solution rigoureuse	104
6.2.1	Fonction de Green	104
6.2.2	Forme covariante	107
6.2.3	Potentiels retardés	108
6.3	Potentiels de Liénard–Wiechert	108

6.3.1	Champs rayonnés	112
6.3.2	Réaction de rayonnement	118
6.3.3	Rayonnement du dipôle	122
7	Développement multipolaire du champ rayonné	131
7.1	Développement multipolaire du potentiel vecteur	131
7.1.1	Notations	131
7.1.2	Potentiel vecteur	133
7.2	Termes multipolaires	134
7.2.1	Ordre 0: Dipôle électrique	134
7.2.2	Ordre 1: Dipôle magnétique, Quadripôle électrique	135
7.3	Applications: quelques problèmes de rayonnement	142
7.3.1	Rayonnement d'une charge oscillante	142
7.3.2	Antennes	144
8	Diffusion	149
8.1	Modèle de Thomson	149
8.1.1	Modèle de l'électron élastiquement lié.	149
8.1.2	Emission spontanée	150
8.1.3	Diffusion du rayonnement.	152
8.2	Diffusion par un milieu dense	156
8.2.1	Notations. Champ diffusé.	157
8.2.2	Cas d'un milieu homogène	160
8.2.3	Diffusion par un cristal	160
8.2.4	Diffusion par un milieu désordonné	162
8.2.5	Influence de la dynamique du milieu	164

Introduction générale

Ce cours porte, comme son titre l'indique, sur la théorie classique des champs, c'est à dire essentiellement l'électromagnétisme, qui est la seule théorie de champs non triviale qu'on peut aborder sans recours à la physique quantique. Il n'est peut être pas utile de justifier longuement l'intérêt d'un cours d'électromagnétisme. C'est l'interaction qui est responsable de la stabilité de l'édifice atomique, de toutes les réactions chimiques. C'est souvent par l'intermédiaire d'interactions électromagnétiques que nous pouvons acquérir des informations sur le monde qui nous entoure. C'est dans le domaine de l'optique, visible, infrarouge ou micro-onde, que nous pouvons explorer la structure de l'Univers et remonter aux premiers stades de sa formation.

Il faut voir aussi, d'un point de vue plus historique, que l'électromagnétisme a joué un rôle essentiel, au début du 20^{ème} siècle, dans le développement de la physique moderne. C'est en fait par ses incompatibilités avec les théories antérieures que l'électromagnétisme a contribué à renouveler totalement notre vision du monde. La première de ces incompatibilités est celle de l'électromagnétisme avec la thermodynamique classique. Quand on a essayé, à la fin 19^{ème} siècle, de calculer à partir de la toute nouvelle théorie de Maxwell (1865) le spectre du rayonnement d'un corps noir (totalement absorbant) en équilibre thermodynamique, on s'est heurté à une difficulté en apparence insurmontable. Les lois classiques (loi de Rayleigh–Jeans), établies simplement à partir des équations de Maxwell et de considérations énergétiques, prévoient en effet un rayonnement de puissance infinie, avec un spectre divergeant aux hautes fréquences, ce qui n'est (heureusement) pas vérifié expérimentalement. Ce n'est qu'en 1900 que Planck résolut le problème en quantifiant (sans vraiment croire à une authentique nature quantique de la matière ou du rayonnement) les échanges d'énergie matière–rayonnement. En fait, la nature corpusculaire du rayonnement ne sera établie sur des arguments convaincants que par Einstein, qui analyse en 1905 l'entropie d'un rayonnement en équilibre thermodynamique et identifie un terme similaire à celui qu'on obtient pour un gaz de particules. Il découvre ainsi le photon (le nom n'apparaîtra que bien plus tard) et interprète en ces termes les propriétés de l'effet photoélectrique. Cette idée de quantifier les grandeurs classiques devait, bien sûr, conduire ensuite à la formulation moderne de la physique quantique.

L'incompatibilité de l'électromagnétisme de Maxwell avec la cinématique classique a joué, elle aussi, un rôle essentiel qui sera largement illustré dans ce cours. Les équations de Maxwell prédisent, comme chacun sait, une propagation d'ondes électromagnétiques avec une vitesse universelle, c . La cinématique classique impliquant la loi standard de composition des vitesses, l'opinion communément répandue à la fin du 19^{ème} siècle était que cette vitesse était relative à un milieu immatériel remplissant tout l'espace, l'éther. Ce milieu n'a pas tardé à poser quelques problèmes. Il fallait d'abord qu'il soit pratiquement immatériel, pour se laisser traverser sans friction apparente par les planètes. Il fallait en même temps qu'il soit extrêmement rigide pour transmettre des vibrations transverses à grande vitesse. Plus encore, cet éther posait des problèmes d'ordre plus philosophique, en réintroduisant un référentiel absolu. Enfin, l'hypothèse de l'éther s'effondra tout à fait quand les expériences de Michelson, justement célèbres, montrèrent que l'éther semblait immobile par rapport à la terre. A moins d'en revenir à un anthropocentrisme intolérable ou d'inventer des modifications ad hoc complètement artificielles de la théorie (entraînement de l'éther par les masses en mouvement, par exemple), il n'y avait plus comme issue que d'inventer la relativité restreinte (en 1905) en renouvelant complètement les bases

de la cinématique et de la dynamique, avec des conséquences philosophiques importantes (abandon de l'universalité du temps), puis la relativité générale, qui donne de la gravitation une interprétation complètement géométrique. Il est assez remarquable, d'ailleurs, que les deux incompatibilités que nous venons de discuter aient conduit à deux théories (relativité générale et mécanique quantique) parfaitement vérifiées dans la limite des expériences actuelles mais encore incompatibles, en dépit des efforts de générations de physiciens. Un cours d'électromagnétisme classique ne peut donc être qu'un cours de relativité restreinte!

Le premier point important dans ce cours sera donc l'établissement d'une nouvelle cinématique et d'une nouvelle dynamique qui prenne en compte le principe de relativité posé par Einstein en 1905 (postulant, essentiellement, l'invariance de la vitesse de la lumière dans un changement de référentiel). Nous pourrons alors voir comment l'électromagnétisme émerge naturellement comme la seule théorie de champ non triviale en relativité! Force de Lorentz, équations de Maxwell seront déduites logiquement de la structure relativiste, au prix de postulats simples sur la forme du champ et de son interaction avec les charges.

Pour faire ce passage remarquable de la relativité à l'électromagnétisme, nous nous appuyerons sur une approche variationnelle. Plutôt que de postuler des équations différentielles du mouvement pour les charges ou le champ, nous postulerons que la trajectoire effectivement suivie par le système minimise une 'action'. Ce principe de moindre action est d'un emploi extraordinairement fructueux dans tous les domaines de la physique. Il donne par exemple, sous la forme du principe de Fermat, toutes les propriétés de l'optique géométrique. Il est particulièrement utile en mécanique Newtonienne classique, où il permet une formulation très efficace et économique des problèmes.

Pour nous familiariser avec l'usage de ce principe de moindre action, nous commencerons donc, au Chapitre 1, par donner la formulation variationnelle de la dynamique classique, autrement dit l'approche Lagrangienne. Nous verrons qu'elle permet une mise en équations des problèmes de mécanique infiniment plus efficace que le principe fondamental de la dynamique et ses dérivés. Mais nous verrons aussi qu'elle permet d'établir un lien très fort entre les propriétés de symétrie et d'invariance du système et les quantités physiques conservées. Nous montrerons ainsi que l'invariance par translation dans le temps implique la conservation de l'énergie et que l'invariance par translation dans l'espace implique celle de la quantité de mouvement. Ce lien entre symétries et conservation, très général, sera fort utile dans la suite de cours et est au coeur de toutes les théories de champs, classiques ou quantiques.

La deuxième partie du cours sera consacrée à la relativité restreinte. Nous construirons d'abord, en nous fondant sur des hypothèses très simples et naturelles, une nouvelle cinématique, puis une nouvelle dynamique. Nous en profiterons pour introduire des notations tensorielles utiles dans ce contexte, mais aussi dans beaucoup d'autres. Nous chercherons alors à construire une théorie décrivant l'interaction de particules matérielles par l'intermédiaire d'un champ. Nous prendrons la forme la plus simple possible pour les fonctions de Lagrange décrivant ce champ et son interaction avec la matière. En utilisant les résultats de mécanique analytique, nous montrerons alors que la théorie ainsi construite n'est autre que l'électromagnétisme de Maxwell! Nous aurons ainsi montré que la formulation de Maxwell, arrivée 40 ans avant la relativité, est naturellement relativiste. Nous obtiendrons enfin, en utilisant cette approche relativiste, un certain nombre de résultats de pur électromagnétisme, en particulier sur les bilans d'énergie-impulsion du champ, particulièrement pénibles à obtenir par d'autres méthodes.

Nous donnerons ensuite explicitement la solution des équations de Maxwell en termes de potentiels retardés. Cette démonstration, outre son importance, fait intervenir la technique très puissante des fonctions de Green, qui est d'un usage courant dans de nombreux domaines de la physique et qui joue un rôle essentiel dans l'établissement de la théorie rigoureuse de la diffraction. Nous utiliserons cette solution pour déterminer le champ rayonné par une charge en mouvement (éventuellement relativiste) imposé. Nous pourrons ainsi nous pencher sur le problème du rayonnement de freinage et de la réaction de rayonnement essentiels dans la description des accélérateurs de particules et dans celle

de l'interaction de particules chargées énergétiques avec la matière. Nous pourrions aussi traiter le rayonnement du dipôle électromagnétique, constitué d'une simple charge oscillant de façon sinusoïdale au voisinage de l'origine. En raison de l'importance de ce cas, nous expliciterons le calcul du champ à des distances arbitraires. Nous examinerons enfin le rayonnement de répartitions de courants classiques oscillants (des antennes) que nous traiterons par la technique des développements multipolaires

Nous supposerons connues dans ce polycopié et dans le cours, un certain nombre de notions.

- **Mécanique du point:** notion de vitesse, accélération, référentiel, changement de référentiel galiléen, principe fondamental, énergies cinétiques et potentielles, moment cinétique.
- **Electrostatique:** champ, potentiel, théorème de Gauss, utilisation des propriétés de symétrie, énergie électrostatique. Notions d'électrostatique des conducteurs. Pour les étudiants suivant le cours en présentiel, nous supposerons aussi acquis le contenu du cours de mécanique Lagrangienne de la semaine de rentrée.
- **Magnétostatique:** champ, potentiel vecteur, théorème d'Ampère, utilisation des propriétés de symétrie, énergie magnétostatique.
- **Electrodynamique:** équations de Maxwell, conditions de Jauge, propagation, notion d'onde plane, polarisation, potentiels retardés, énergétique des champs électromagnétiques dans le vide (densité d'énergie et vecteur de Poynting). Quelques notions sur l'électrodynamique des milieux matériels
- **Optique:** quelques notions élémentaires d'optique géométrique, interférences et diffraction dans la limite de Fraunhofer.
- **Mathématiques:** calcul vectoriel, analyse vectorielle (gradient, divergence, rotationnel...), intégration, différents systèmes de coordonnées (cartésien, cylindrique, sphérique), bases d'algèbre linéaire, équations différentielles élémentaires. Séries de Fourier et transformées de Fourier

Pour approfondir le sujet, on pourra recourir à de nombreux manuels. Pour ce qui est de la mécanique analytique, nous recommandons le Landau (Mécanique), très sec mais très complet, et le Goldstein (Mécanique classique) que l'on peut trouver en versions anglaise et traduite. C'est un livre très (trop?) complet. Il est de loin préférable de lire une édition récente, les anciennes étant un peu poussiéreuses. Pour la relativité, il existe une infinité de manuels. On pourra se référer, là encore au Landau (théorie des champs) si on n'est pas rebuté par le style de cet ouvrage et les notations, un peu anciennes. Il n'est pas inutile non plus de regarder les articles originaux d'Einstein. Un article de revue de 1907, en particulier, que l'on trouvera traduit dans la récente édition d'une sélection d'articles (édition Einstein, Relativités I, Seuil CNRS), est un modèle de pédagogie et ferait un excellent manuel.

Pour tout ce qui concerne l'électromagnétisme et aussi pour la relativité il est indispensable d'avoir au moins parcouru le Jackson (Classical Electrodynamics). Ce très beau et très gros livre est la bible du domaine. Il est extrêmement exhaustif et d'une lecture suffisamment facile (surtout les éditions récentes). En fait, il pourrait à lui seul remplacer 80% de ce polycopié, dont certains chapitre sont fortement inspirés. Son seul défaut est l'utilisation exclusive, dans les éditions anglaises du système d'unités CGS/UES, ce qui fait que les équations ne sont que difficilement reconnaissables pour des européens habitués au système dit international. Fort heureusement, le traducteur de l'édition française a aussi effectué les changements d'unités.

Remerciements

Ce polycopié est dérivé d'un texte plus complet rédigé il ya quelques années pour un cours d'électromagnétisme en première année d'ENS (niveau L3). On pourra trouver ce texte sur le site www.cqed.org, en suivant les menus 'teaching', 'Jean-Michel Raimond', ou directement à l'adresse

<http://www.lkb.upmc.fr/cqed/teachingjmr/>. Il doit donc énormément à un ouvrage encore plus ancien de Serge Haroche et aux enseignants de l'ENS qui m'ont assisté à l'époque: M. Benamar, M.C. Angonin, J.M. Daul, C. Dupraz, L. Rezeau et J. Hare. Ce dernier, en particulier, a consacré beaucoup de temps à la relecture attentive du manuscrit et a suggéré de nombreuses améliorations. Je remercie également E. Reyssat J.J. Fleck, anciens élèves de l'ENS, et A. Delache (MITCC) qui ont relevé de nombreuses erreurs.

Chapitre 1

Mécanique analytique: formulation Lagrangienne

Introduction

La mécanique analytique n'apporte rien de conceptuellement nouveau par rapport aux formulations standard de la dynamique newtonienne (principe fondamental, théorème de l'énergie cinétique et autres points marquants de l'enseignement élémentaire de la mécanique), mais en constitue une formulation très élégante. Parfaitement adaptée à la description de systèmes où les mouvements sont sujets à des contraintes (un cauchemar avec les formulations "standard"), à l'utilisation de techniques de perturbations, ce qui explique son succès toujours certain auprès des astronomes, elle est souvent d'un usage infiniment plus pratique que les formulations plus élémentaires.

Il s'agit aussi d'un cas particulier d'une approche très fructueuse dans des domaines variés de la physique: une méthode variationnelle. En mécanique analytique, nous ne précisons pas les équations locales que doit vérifier à chaque instant le mouvement de la particule. Nous donnerons en fait une condition prescrivant à une intégrale portant sur l'ensemble du mouvement d'être extrémale. Parmi toutes les trajectoires permises par la cinématique, mais parfois absurdes pour la dynamique, il nous faudra choisir la bonne en respectant cette règle. En fait, la description du mouvement en mécanique analytique est très semblable à la description des rayons lumineux avec le principe de Fermat. Là aussi, on doit choisir parmi tous les trajets possibles celui qui rend extrémale une intégrale qui n'est autre que la durée du trajet.

Surtout, et bien qu'il s'agisse d'un formalisme datant, avec Lagrange et Hamilton, de la fin du XVIII^{ème} ou du XIX^{ème} siècle, elle est parfaitement adaptée aux approches modernes de la physique. Elle joue ainsi un rôle essentiel en mécanique statistique, elle est à l'origine de la quantification des dynamiques classiques, elle est fortement apparentée aux formulations modernes de la mécanique quantique en termes d'intégrales de chemin. Elle nous sera enfin d'une grande utilité pour reconstruire l'électromagnétisme à partir de la relativité.

Nous nous cantonnons ici à la formulation lagrangienne de la mécanique analytique, qui est celle que nous utiliserons dans la partie de relativité. Nous insisterons sur la notion de coordonnée généralisée, qui permet de traiter de façon naturelle les contraintes et nous examinerons comment on peut incorporer dans le formalisme un certain nombre d'interactions. Un point important dans ce domaine sera l'établissement de la fonction de Lagrange pour des particules chargées en interaction avec un champ, dont nous montrerons qu'elle redonne bien la force de Lorentz. Enfin, nous déduirons d'un certain nombre de symétries fondamentales de la nature (invariance dans le temps, dans l'espace, invariance par rotation) les lois de conservation essentielles (énergie, impulsion, moment cinétique). Cette approche qui lie les lois de conservation aux propriétés de symétrie est en fait très générale et très puissante.

Notons que les étudiants ayant suivi le cours de mécanique analytique de la semaine de rentrée peuvent passer directement au paragraphe 1.3.4, les premières sections n'étant qu'un redite du polycopié de ce cours.

1.1 Description du système: coordonnées généralisées

Nous considérerons donc un système composé de N particules matérielles repérées par un indice grec α , variant de 1 à N . Une telle description peut convenir à tout système discret de particules ponctuelles mais aussi à la description du mouvement d'un solide, après une discrétisation convenable en éléments infinitésimaux. Les masses, charges électriques, positions, vitesses et accélérations des particules seront dénotées respectivement m_α , q_α , \mathbf{r}_α , $\mathbf{v}_\alpha = \dot{\mathbf{r}}_\alpha$, $\mathbf{a}_\alpha = \dot{\mathbf{v}}_\alpha = \ddot{\mathbf{r}}_\alpha$ (nous désignerons souvent dans la suite les dérivées temporelles par des symboles pointés. Les caractères gras représentent des quantités vectorielles).

L'approche standard de la mécanique newtonienne est alors d'écrire le principe fondamental de la dynamique, reliant les accélérations des diverses particules constituant le système aux forces s'exerçant sur elles. L'expression de ces forces est donnée, en fonction de la configuration du système, soit par des lois fondamentales (force de Lorentz, par exemple), soit par des lois phénoménologiques (forces de frottement...). Par exemple, dans le cas de particules en interaction électromagnétique, on écrirait:

$$m_\alpha \mathbf{a}_\alpha = \mathbf{f}_\alpha = q_\alpha (\mathbf{E}(\mathbf{r}_\alpha) + \mathbf{v}_\alpha \times \mathbf{B}(\mathbf{r}_\alpha)), \quad (1.1)$$

où \mathbf{E} et \mathbf{B} sont les champs électrique et magnétique déterminés, en fonction des positions de particules et du temps, par la solution des équations de Maxwell.

Si l'écriture de toutes les équations dynamiques du système permet en principe, en y ajoutant les conditions initiales convenables, de déterminer complètement le mouvement, cette résolution peut être très délicate. C'est en particulier le cas quand il existe des contraintes: les positions (ou les vitesses) des particules doivent constamment obéir à un certain nombre de relations. Imaginons, par exemple, le cas de deux pendules accrochés l'un à l'extrémité de l'autre et contraints à se déplacer dans un plan (voir figure 1.1). Dans les formulations classiques, on doit associer à ces différentes liaisons des forces (force de tension des fils constituant les pendules, force de réaction du support commun...). Ces forces sont de nouvelles inconnues dans le problème qui doivent être déterminées en même temps que les variables dynamiques intéressantes. Bien entendu, elles compliquent beaucoup la résolution du problème.

L'idée de la mécanique analytique est de se débarrasser de ces forces inconnues en n'employant que des coordonnées indépendantes qui ne seront soumises à aucune contrainte. Nous les appellerons "coordonnées généralisées". Ces coordonnées sont de nature arbitraire (des positions, des angles...) mais doivent déterminer de façon univoque l'état mécanique du système si on prend en compte les contraintes. On pourra déterminer le mouvement en écrivant une équation différentielle pour chacune de ces coordonnées. Considérons, pour fixer les idées, le cas du double pendule. Il y a a priori six paramètres pour décrire le système (les positions des deux masses). En fait, les contraintes diminuent considérablement la dimensionnalité du problème. D'abord, les fils sont de longueur constante, soit deux relations. Ensuite, le mouvement s'effectue dans un plan, ce qui fournit encore deux relations (par exemple en écrivant que le produit scalaire de la position avec la normale au plan est nul). Il n'y a donc en fait que deux variables indépendantes qui décrivent le mouvement. Un choix tout à fait naturel de coordonnées généralisées dans ce cas est de prendre les deux angles θ_1 et θ_2 des pendules avec la verticale.

Plus généralement, nous supposerons que les liaisons entre les simples coordonnées cartésiennes des particules sont holonomes: il existe $3N - n$ relations du type $f_j(\mathbf{r}_\alpha) = 0$. De telles relations décrivent convenablement toutes les contraintes directes entre coordonnées, à condition qu'elles soient indépendantes du temps (comme celles que nous venons de voir, si la longueur des fils des pendules

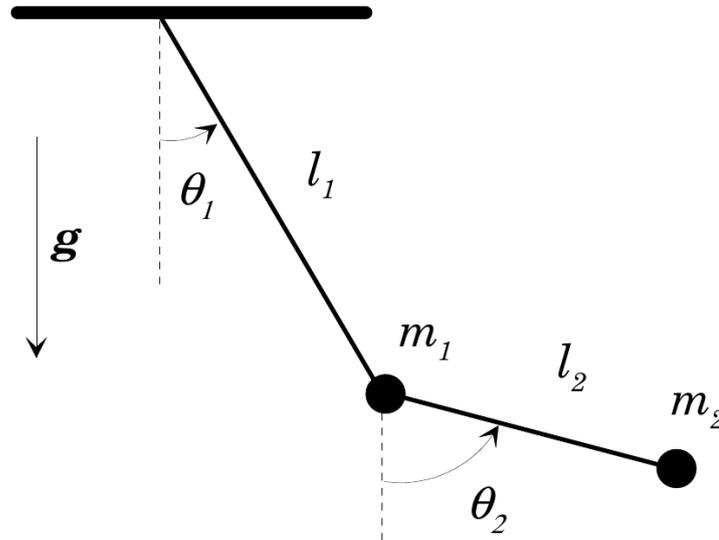


Figure 1.1: Un problème classique de mécanique: deux pendules liés, asservis à se déplacer dans un plan. Les angles θ_1 et θ_2 suffisent à décrire complètement l'état mécanique du système

est invariable)¹. Elles ne décrivent pas les contraintes entre vitesses (par exemple le roulement sans glissement), mais on peut en tenir compte aussi (voir à ce sujet le Goldstein). Il ne reste alors que n coordonnées généralisées indépendantes que nous noterons q_i , $i = 1 \dots n$. Soulignons une fois de plus que ces coordonnées ne sont pas nécessairement cartésiennes et n'ont même pas forcément la dimension d'une longueur. Avec des relations holonomes, les positions \mathbf{r}_α ne dépendent que des n coordonnées généralisées (à partir desquelles elles sont calculables de façon univoque) et ne dépendent ni des vitesses ni du temps explicitement. Il nous faut maintenant donner les lois permettant d'établir les n équations différentielles déterminant la dynamique des q_i .

1.2 Principe de moindre action

1.2.1 Énoncé

On postule qu'il existe une fonction $L(q_i, \dot{q}_i, t)$, dite fonction de Lagrange ou lagrangien, homogène à une énergie², qui est telle que l'action

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t) dt , \quad (1.2)$$

soit *extrémale* (minimale, maximale ou présentant un point col) pour la trajectoire effectivement suivie par le système de t_1 à t_2 entre $q_i(1)$ et $q_i(2)$, valeurs initiales et finales des coordonnées généralisées. Notons que l'action a la dimension d'une énergie multipliée par un temps, c'est à dire celle de la constante de Planck, ce qui n'est en rien un hasard.

¹En fait, la plupart des résultats que nous établirons dans ce chapitre seraient également valables si les relations faisaient intervenir une dépendance explicite en temps, sous la forme $f_j(\mathbf{r}_\alpha, t) = 0$. Les positions dépendraient alors des coordonnées généralisées, mais présenteraient aussi une dépendance explicite en temps. L'énergie cinétique, par exemple, qui est une forme quadratique des dérivées des coordonnées généralisées dans le cas habituel, ferait intervenir des termes linéaires dans ces dérivées, ou même des termes n'en dépendant pas. Nous précisons, si nécessaire, quels sont les résultats qui dépendent de façon critique de cette hypothèse.

²et que l'on saura écrire si on connaît la nature des forces qui s'exercent sur le système

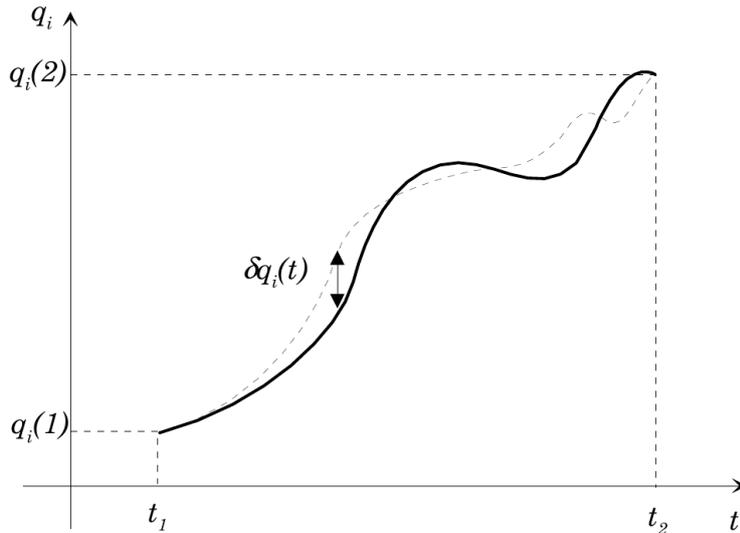


Figure 1.2: Trajectoire effectivement suivie (ligne continue) et trajectoire variée (pointillée). La trajectoire variée s'écarte infinitésimalement de la trajectoire effectivement suivie et coïncide avec celle-ci aux extrémités.

Ce que nous postulons ainsi n'est pas directement un ensemble d'équations différentielles pour les variables dynamiques (que nous pourrions déduire et dont nous montrerons qu'elles sont équivalentes aux formulations standard de la mécanique). Nous nous donnons plutôt un principe variationnel qui postule le caractère extrémal d'une certaine intégrale calculée sur la trajectoire en fonction de celle-ci. Il y a de nombreux autres exemples de principes variationnels en physique. Les lois de l'optique géométrique, par exemple, peuvent se déduire du principe de Fermat qui postule que le rayon lumineux effectivement suivi réalise un extremum (en général un minimum) du temps de parcours.

Le fait que nous prenions une fonction de Lagrange ne dépendant que des positions et des vitesses (mais pas de dérivées d'ordre supérieur) exprime, comme nous le verrons, que les équations fondamentales de la dynamique sont d'ordre deux par rapport au temps. D'autre part, nous spécifions les deux conditions "initiales" nécessaires pour chaque coordonnée en donnant les positions initiales et finales et non les positions et vitesses initiales. Si ces deux formulations sont bien sûr équivalentes, la première est plus avantageuse pour varier l'action sur toutes les trajectoires possibles entre deux points.

Bien sûr, un principe variationnel est d'emploi moins commode en pratique qu'un ensemble d'équations différentielles. Il faut, en principe, imaginer toutes les trajectoires possibles (continues et dérivables) entre les conditions initiales et finales, déterminer l'action sur chacune et déterminer celles qui rendent l'action extrémale. Nous verrons, dans le prochain paragraphe, comment en déduire un système d'équations différentielles beaucoup plus commodes.

1.2.2 Equations de Lagrange

Nous considérons donc deux trajectoires possibles entre $q(1)$ et $q(2)$. L'une, que nous noterons simplement $q_i(t)$, est la trajectoire effectivement suivie. L'autre que nous appellerons "trajectoire variée", infiniment proche, correspond à chaque instant aux positions $q_i(t) + \delta q_i(t)$, où $\delta q_i(t)$ est un accroissement infinitésimal de la position (voir figure 1.2). Ces deux trajectoires doivent obéir aux mêmes conditions initiales et finales. On a donc $\delta q(1) = \delta q(2) = 0$. Nous supposons que les q_i et δq_i sont deux fois différentiables. Le fait que les q_i donnent la trajectoire effectivement suivie a pour conséquence que l'action S est extrémale sur cette trajectoire et ne varie donc pas au premier ordre

dans les δq_i quand on passe à la trajectoire variée. Or la variation de l'action s'écrit simplement:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} (L(q_i + \delta q_i, \dot{q}_i + \delta \dot{q}_i, t) - L(q_i, \dot{q}_i, t)) dt. \quad (1.3)$$

En développant L au premier ordre dans les δq_i , avec $\delta \dot{q}_i = d\delta q_i/dt$, on a:

$$\delta S = \sum_i \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i dt + \sum_i \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d\delta q_i}{dt} dt. \quad (1.4)$$

Pour fixer la trajectoire, nous recherchons une condition sur les δq_i . Pour éliminer leurs dérivées temporelles dans l'expression précédente nous intégrons les termes de la seconde somme par parties. On obtient alors:

$$\delta S = \sum_i \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right] \delta q_i dt + \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right]_{t_1}^{t_2}. \quad (1.5)$$

Les accroissements infinitésimaux δq_i s'annulant aux extrémités de la trajectoire, le terme tout intégré est identiquement nul. La somme, elle, ne peut s'annuler pour des δq_i arbitraires (et indépendants, cette hypothèse étant ici essentielle) que si les n équations différentielles:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0 \quad (1 \leq i \leq n) \quad (1.6)$$

sont simultanément vérifiées (on notera que la dérivée temporelle est ici une dérivée totale). Ce système différentiel avec les conditions aux limites (fournissant $2n$ conditions indépendantes) détermine complètement les n coordonnées généralisées indépendantes. Ces équations différentielles sont du second ordre par rapport au temps puisque L dépend a priori des \dot{q}_i . Quelques remarques s'imposent à ce point.

- Les équations du mouvement ne changent pas quand L est multipliée par une constante. Cette liberté correspond seulement à un choix d'unités (L a, rappelons-le, la dimension d'une énergie).
- La structure de L doit obéir aux symétries du système physique (invariance par translation dans le temps, dans l'espace...). Nous verrons, dans les prochains paragraphes, que cela conduit à des conséquences importantes en termes de lois de conservation.
- Les équations du mouvement sont inchangées si on ajoute à L la dérivée totale par rapport au temps d'une fonction des coordonnées et du temps. Posons en effet $L' = L + df(q_i, t)/dt$ (la fonction f que nous dérivons ne doit dépendre que des q_i pour que le lagrangien modifié ne dépende que des q_i et \dot{q}_i). L'action S' , calculée avec la nouvelle fonction de Lagrange, ne diffère de S que par un terme de la forme $[f]_{t_1}^{t_2}$, qui ne dépend manifestement pas de la trajectoire suivie entre 1 et 2. On pourra vérifier par simple substitution que les équations de Lagrange ne changent pas quand on effectue cette modification du lagrangien.³ Cette liberté (qui n'est pas sans évoquer la liberté de jauge en électromagnétisme) est parfois fort utile pour simplifier la forme du lagrangien.

³ A titre d'exercice: soit $L' = L + df(q_i, t)/dt$ alors

$$\frac{\partial L'}{\partial q_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial^2 f}{\partial q_i \partial t} + \sum_j \dot{q}_j \frac{\partial^2 f}{\partial q_i \partial q_j}$$

et

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial q_i} + \sum_j \dot{q}_j \frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial q_i}$$

Les équations de Lagrange sont donc vérifiées pour L' si elles le sont pour L en raison de l'égalité des dérivées secondes croisées.

- La fonction de Lagrange est additive. Considérons en effet deux systèmes physiques indépendants et n'interagissant pas, décrits par les coordonnées généralisées q_1 et q_2 et par les fonctions de Lagrange L_1 et L_2 . Le système global est défini par la réunion des deux ensembles de coordonnées généralisées et il est évident que la fonction de Lagrange associée au système complet est $L = L_1 + L_2$.
- Notons enfin que, dans le cas très simple où les coordonnées généralisées coïncident avec les coordonnées cartésiennes des particules individuelles (ce qui est par exemple le cas quand il n'y a aucune contrainte sur le mouvement), les équations de Lagrange peuvent s'écrire:

$$\nabla_{\mathbf{r}_\alpha} L = \frac{d\nabla_{\mathbf{v}_\alpha} L}{dt}, \quad (1.7)$$

en faisant intervenir les opérateurs gradient par rapport aux positions et vitesses de chaque particule.

Il nous reste maintenant, pour que ce formalisme ait un sens, à donner la forme de la fonction de Lagrange en fonction des interactions que subissent les particules.

1.3 Expressions de la fonction de Lagrange

Cette section est essentielle dans ce chapitre, puisqu'elle nous permettra de traiter effectivement des problèmes de mécanique par le formalisme lagrangien. Nous nous pencherons d'abord sur le cas de la particule libre, puis sur le cas de particules interagissant par des forces conservatives (dérivant d'un potentiel), sur le cas de particules soumises à des forces extérieures au système (avec quelques applications au cas important du mouvement dans le champ de pesanteur) et enfin sur le cas de particules en interaction avec un champ électromagnétique.

1.3.1 Particule unique libre

Ce cas élémentaire n'a de mérite que pédagogique. Il est en effet évident dès l'abord que toute fonction de Lagrange conduisant à des équations s'écrivant $\dot{\mathbf{v}} = 0$ conviendra. Une simple fonction proportionnelle à v^2 vérifie (entre autres) cette propriété. La fonction de Lagrange d'une particule libre unique est donc, à un choix d'unités près, identique à l'énergie cinétique. Nous allons toutefois montrer comment on peut arriver à ce résultat en utilisant les propriétés d'invariance et de symétrie.

Les coordonnées généralisées coïncident dans ce cas avec les coordonnées cartésiennes standard. La particule étant libre, L ne peut explicitement dépendre du temps (invariance par translation dans le temps), ni de la position \mathbf{r} de la particule (invariance par translation spatiale), ni enfin de la direction de sa vitesse \mathbf{v} (invariance par rotation). L doit donc être une fonction du carré du module de la vitesse: $L = f(v^2)$.

Les équations de Lagrange se résument alors à:

$$\nabla_{\mathbf{r}} L = 0 = \frac{d}{dt} \left[\frac{df}{dv^2} \nabla_{\mathbf{v}} v^2 \right], \quad (1.8)$$

qui conduisent bien évidemment (en notant que $\nabla_{\mathbf{v}} v^2 = 2\mathbf{v}$), à moins que f ne soit une constante, à $\dot{\mathbf{v}} = 0$ et donc à un mouvement rectiligne uniforme.

Pour préciser davantage la forme de L et de f , il nous faut ajouter une condition supplémentaire: le résultat précédent doit être invariant dans un changement de référentiel galiléen. Considérons pour cela un référentiel \mathcal{R} , dans lequel la fonction de Lagrange est $L = f(v^2)$ et un référentiel \mathcal{R}' en translation uniforme par rapport à \mathcal{R} avec une vitesse infinitésimale $\boldsymbol{\varepsilon}$. La fonction de Lagrange L' dans \mathcal{R}' doit s'écrire $L' = f(v'^2) = f((\mathbf{v} - \boldsymbol{\varepsilon})^2)$ (la fonction f devant manifestement être la même pour tous les référentiels). En développant au premier ordre en $\boldsymbol{\varepsilon}$, on a: $L' = L - (df/dv^2)2\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}$. Les

équations du mouvement dans \mathcal{R} et \mathcal{R}' coïncideront si L et L' ne diffèrent que par une dérivée totale par rapport au temps. Le cas le plus simple où cela se vérifie est quand df/dv^2 est indépendant de v (la dérivée par rapport au temps étant alors simplement $d(2(df/dv^2)\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\varepsilon})/dt$). Le choix le plus simple est donc que f soit simplement proportionnelle à v^2 . Nous poserons donc:

$$L = \frac{1}{2}mv^2 \quad (1.9)$$

et appellerons évidemment “masse de la particule” le coefficient m . Ce coefficient doit être positif. En effet, l’extremum de l’action correspondant à la propagation en ligne droite à vitesse constante est alors un minimum.

Bien sûr, ce raisonnement n’est pas d’une grande rigueur et repose largement sur le critère de simplicité pour identifier complètement la forme du lagrangien. Il illustre en revanche le genre de démarche qu’on doit effectuer pour déterminer la forme du lagrangien correspondant à une nouvelle interaction: respecter d’abord les grandes propriétés de symétrie, respecter les règles de la relativité galiléenne et enfin chercher la forme la plus simple en cas d’ambiguïté. C’est, avec quelques adaptations, la démarche que nous utiliserons plus tard pour déterminer, en relativité, les lagrangiens correspondant à l’interaction électromagnétique.

1.3.2 Système fermé de particules interagissant par des forces dérivant d’un potentiel

Nous supposons d’abord, pour fixer les idées, que les coordonnées généralisées coïncident avec les coordonnées cartésiennes. Nous supposons que la force s’exerçant sur la particule α peut s’écrire $\mathbf{F}_\alpha = -\nabla_{\mathbf{r}_\alpha} U(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n, t)$, où la fonction U est une énergie potentielle dépendant a priori de la position de toutes les particules dans le système. Pour ne pas restreindre la généralité, nous permettrons au potentiel de dépendre explicitement du temps. Nous pourrions ainsi traiter, par exemple, le mouvement dans des champs extérieurs variables. Nous chercherons simplement la forme de la fonction de Lagrange qui redonne les équations dynamiques habituelles.

Si U est identiquement nulle, la fonction L se résume à l’énergie cinétique totale: $L = T$ avec $T = \sum_\alpha (1/2)m_\alpha v_\alpha^2$ (ce qui se déduit évidemment du paragraphe précédent et de l’additivité de la fonction de Lagrange pour des systèmes sans interaction mutuelle). Nous vérifierons maintenant que le choix $L = T - U$ donne, pour les équations de Lagrange, les équations de Newton standard. En effet, les équations de Lagrange s’écrivent:

$$\nabla_{\mathbf{r}_\alpha} L = \frac{d\nabla_{\mathbf{v}_\alpha} L}{dt}, \quad (1.10)$$

et on a

$$\nabla_{\mathbf{r}_\alpha} L = -\nabla_{\mathbf{r}_\alpha} U = \mathbf{F}_\alpha, \quad (1.11)$$

et

$$\frac{d\nabla_{\mathbf{v}_\alpha} L}{dt} = \frac{dm_\alpha \mathbf{v}_\alpha}{dt} = m_\alpha \mathbf{a}_\alpha = \mathbf{F}_\alpha. \quad (1.12)$$

Cette forme du lagrangien redonne donc bien le principe fondamental de la dynamique tel que nous le connaissons.

Considérons maintenant le cas où le système doit être décrit par des coordonnées généralisées qui ne coïncident pas avec les coordonnées cartésiennes. La fonction de Lagrange elle-même ne doit pas dépendre du choix particulier du système de coordonnées généralisées. Elle doit toujours coïncider avec la différence $T - U$ des énergies cinétiques et potentielles. Pour pouvoir écrire les équations de Lagrange, il faut exprimer ces quantités en fonction des coordonnées généralisées q_i et de leurs dérivées. C’est toujours possible, puisque les q_i doivent déterminer de façon univoque l’état mécanique du système – quand on prend en compte les contraintes. En inversant ces relations et en les reportant dans

les expressions de T et U en fonction des coordonnées cartésiennes on obtient facilement le résultat cherché.

Nous avons supposé que les positions \mathbf{r}_α ne dépendent que des q_i , mais pas de leurs dérivées ni du temps (ce ne serait pas le cas si les liaisons faisaient intervenir une dépendance explicite en temps). On peut donc écrire: $\mathbf{v}_\alpha = \sum_i \dot{q}_i \partial \mathbf{r}_\alpha / \partial q_i$. En substituant dans $T = \sum_\alpha m_\alpha \mathbf{v}_\alpha^2 / 2$, on trouve en général T comme une forme quadratique définie positive des \dot{q}_i , dont les coefficients peuvent dépendre des q_i : $T = \sum_{i,j} A_{i,j}(q_k) \dot{q}_i \dot{q}_j$. Par exemple, on a une expression de ce genre quand on utilise les coordonnées cylindriques pour décrire le mouvement d'une particule unique $T = m(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + \dot{z}^2) / 2$. Notons enfin que, dans les mêmes conditions, U s'exprime simplement comme une fonction des q_i .

1.3.3 Système de particules soumises à des forces extérieures

C'est un cas particulièrement important en mécanique, puisqu'il permet, entre autres, de traiter de mouvements dans le champ de gravitation terrestre. Nous considérons donc un système S dont la dynamique est décrite par n coordonnées généralisées q_i et dont nous cherchons le mouvement. Les particules de S interagissent entre elles par des forces dérivant d'une énergie potentielle et interagissent avec les particules d'un système extérieur \mathcal{S} , décrit par \mathcal{N} coordonnées généralisées Q_j . Nous supposons que les coordonnées généralisées sont bien séparées: l'état de S est complètement déterminé par les q_i seuls. Nous supposons le système \mathcal{S} suffisamment "gros" pour que l'interaction avec S ait une influence négligeable sur sa dynamique (c'est bien sûr le cas pour tout mouvement réaliste dans le champ de pesanteur terrestre). Nous pouvons alors considérer les Q_j comme des données du problème.

La fonction de Lagrange du système $S + \mathcal{S}$ s'écrit $L = T_S + T_{\mathcal{S}} - U(q_i; Q_j)$, où U est l'énergie potentielle dont dérivent toutes les forces du problème (y compris l'interaction entre S et \mathcal{S}), T_S et $T_{\mathcal{S}}$ les énergies cinétiques des deux systèmes. Comme nous avons supposé que les deux ensembles de coordonnées généralisées sont bien séparés, T_S n'est fonction que des q_i et de leurs dérivées et $T_{\mathcal{S}}$ n'est fonction que des seuls Q_j et de leurs dérivées. $T_{\mathcal{S}}$ peut donc être considérée comme une fonction donnée du temps. Une telle fonction étant aussi une dérivée totale par rapport au temps, elle ne joue aucun rôle dans les équations de Lagrange et peut être supprimée. De la même manière, U peut être écrite comme une fonction des q_i seuls et du temps (la dépendance en temps reflétant la dynamique des Q_j). On a finalement: $L = T_S(q_i, \dot{q}_i) - U(q_i, t)$, lagrangien décrivant la dynamique du système S seul.

Ce type de problème étant très fréquemment rencontré en mécanique, nous allons l'illustrer par deux exemples.

Premier exemple

Cet exemple, particulièrement trivial, ne présente guère que l'intérêt d'appliquer les notions introduites dans les paragraphes précédents dans une situation où la mise en équations et les calculs ne présentent aucune difficulté technique. Nous considérerons donc la "machine d'Atwood", pont aux ânes des classes élémentaires (voir figure 1.3). Deux masses m_1 et m_2 , astreintes à se déplacer verticalement dans le champ de pesanteur (accélération \mathbf{g}), pendent aux deux extrémités d'une ficelle passant sur une poulie (tout cela étant inextensible, sans frottements...). Une seule coordonnée généralisée suffit à décrire ce problème en tenant compte des liaisons (mouvement selon la verticale, longueur de ficelle constante). On prendra la position x de la masse m_1 le long d'un axe vertical descendant. La vitesse de m_1 est \dot{x} , celle de m_2 , $-\dot{x}$. On a alors $T = (m_1 + m_2)\dot{x}^2 / 2$ et $U = -m_1 g x - m_2 g(\ell - x)$, où ℓ est une constante. A une constante additive près on a donc $U = (m_2 - m_1)g x$ et

$$L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}^2 - (m_2 - m_1)g x . \quad (1.13)$$

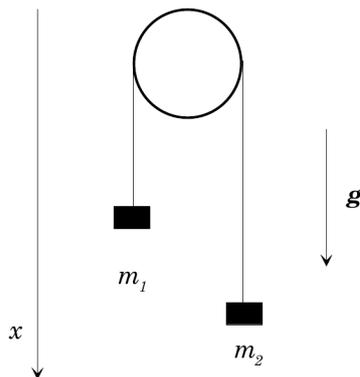


Figure 1.3: La “machine d’Atwood”, exemple élémentaire de mouvements avec liaisons dans un champ extérieur. Deux masses différentes sont reliées par une corde inextensible passant sur une poulie. Le mouvement des masses est uniformément accéléré.

L’unique équation de Lagrange s’écrit alors trivialement:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (m_1 + m_2)\ddot{x} = \frac{\partial L}{\partial x} = -(m_2 - m_1)g, \quad (1.14)$$

d’où on déduit bien évidemment un mouvement uniformément accéléré avec l’accélération $(m_1 - m_2)g/(m_1 + m_2)$

Pour un exemple aussi trivial, l’écriture du formalisme lagrangien n’apporte pas de simplification décisive. Il eut été aussi simple d’écrire, pour ce problème à un seul degré de liberté, le théorème de l’énergie cinétique. En revanche, l’écriture du principe fondamental de la dynamique nous aurait contraint à faire intervenir des inconnues supplémentaires: les tensions des fils. La puissance de l’écriture lagrangienne ne peut s’exprimer que sur des problèmes un peu plus complexes.

Deuxième exemple

Nous considérerons dans ce paragraphe l’exemple du double pendule (voir figure 1.1). Notons tout de suite que la mise en équations de ce problème est très pénible par les techniques standard de mécanique. Il faut en effet faire intervenir la tension des fils, dont on ne se débarrasse qu’au prix de manipulations fastidieuses. Notons aussi que, pour ce problème à deux degrés de liberté, le théorème de l’énergie cinétique ne nous est d’aucune utilité.

Nous allons écrire les équations de Lagrange. Les deux coordonnées généralisées q_1 et q_2 coïncident avec les angle θ_1 et θ_2 que les pendules font avec la verticale. L’écriture des positions et vitesses des deux masses en fonction des coordonnées généralisées et des longueurs l_1 et l_2 des deux pendules, ne présente aucune difficulté. On en déduit les expressions des énergies cinétiques et potentielles:

$$T = T_1 + T_2$$

$$T_1 = \frac{1}{2}m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 \quad (1.15)$$

$$T_2 = \frac{1}{2}m_2 \left[l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + 2l_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \right] \quad (1.16)$$

$$U = U_1 + U_2$$

$$U_1 = -m_1 g l_1 \cos(\theta_1) \quad (1.17)$$

$$U_2 = -m_2 g l_2 \cos(\theta_2) - m_2 g l_1 \cos(\theta_1), \quad (1.18)$$

d’où on tire l’expression de la fonction de Lagrange L . L’écriture des deux équations de Lagrange ne pose alors d’autre difficulté qu’algébrique. La mise en équations de ce problème, pratiquement

impossible en appliquant simplement le principe fondamental de la dynamique, ne présente aucune difficulté avec l'approche lagrangienne.

La résolution explicite du système différentiel obtenu est toutefois impossible. Il s'agit en effet d'équations non linéaires couplées (à cause des termes en $\cos\theta$). On ne peut obtenir de solutions explicites, comme dans tous les problèmes de pendules, que dans le cadre d'une approximation linéaire, valide dans le domaine des petites oscillations. Nous donnons ici seulement les étapes essentielles du calcul, dont les détails seront facilement retrouvés par le lecteur. Les équations de Lagrange pour θ_1 et θ_2 s'écrivent respectivement après linéarisation:

$$(m_1 + m_2)l_1\ddot{\theta}_1 + m_2l_2\ddot{\theta}_2 + (m_1 + m_2)g\theta_1 = 0 \quad (1.19)$$

$$l_2\ddot{\theta}_2 + l_1\ddot{\theta}_1 + g\theta_2 = 0. \quad (1.20)$$

Un tel système de deux équations linéaires à coefficients constants se résout par les méthodes standard. Les solutions sont des combinaisons linéaires de solutions en $\exp(-i\omega t)$. Les valeurs possibles de ω sont celles qui annulent le déterminant caractéristique:

$$\begin{vmatrix} (m_1 + m_2)(g - l_1\omega^2) & -m_2l_2\omega^2 \\ -l_1\omega^2 & g - l_2\omega^2 \end{vmatrix}. \quad (1.21)$$

On obtient alors une équation bicarrée en ω . Les solutions s'écrivent $\pm\omega_1$ et $\pm\omega_2$. La solution générale est alors une superposition de deux mouvements oscillatoires aux fréquences ω_1 et ω_2 , de phase et d'amplitudes arbitraires. L'écriture explicite de ces phases et amplitudes en fonction des conditions initiales est pénible, mais sans difficultés.

La recherche des deux fréquences ω_1 et ω_2 est un exemple particulièrement simple de recherches de "modes propres" dans des systèmes d'oscillateurs couplés. Très généralement, un système d'oscillateurs linéaires couplés possédant p degrés de liberté, admet p fréquences propres. Chacune de ces fréquences correspond à une configuration particulière des mouvements des degrés de liberté, conduisant à un mouvement purement harmonique (on pensera par exemple aux modes d'oscillations symétriques et antisymétriques de deux pendules couplés par un ressort). Dans le cas présent, il est instructif d'examiner les comportements asymptotiques des deux modes quand $m_1 \rightarrow \infty$ ou $m_2 \rightarrow 0$, ce que nous laissons au lecteur.

1.3.4 Lagrangien de particules chargées dans un champ

Nous abordons ici un exemple très important d'écriture de fonction de Lagrange, d'abord en raison de son utilité pratique, ensuite en raison de l'usage que nous en ferons dans la suite du cours d'électromagnétisme. Nous utiliserons une démarche très pragmatique, en cherchant la forme la plus simple de la fonction de Lagrange qui redonne la force de Lorentz.

Nous considérerons donc un ensemble de N particules, que nous supposerons décrites par leurs coordonnées cartésiennes standard (la généralisation à d'autres systèmes de coordonnées ne posant que des problèmes algébriques) \mathbf{r}_α . Ces particules, chargées, sont placées dans un champ électrique \mathbf{E} et un champ magnétique \mathbf{B} , imposés de l'extérieur. Pour alléger les notations, nous poserons $\mathbf{E}_\alpha = \mathbf{E}(\mathbf{r}_\alpha, t)$ et $\mathbf{B}_\alpha = \mathbf{B}(\mathbf{r}_\alpha, t)$. Nous introduirons enfin les potentiels vecteur $\mathbf{A}_\alpha = \mathbf{A}(\mathbf{r}_\alpha, t)$ et scalaire $V_\alpha = V(\mathbf{r}_\alpha, t)$ permettant de calculer les champs par les relations: $\mathbf{E}_\alpha = -\partial\mathbf{A}_\alpha/\partial t - \nabla V_\alpha$ et $\mathbf{B}_\alpha = \nabla \times \mathbf{A}_\alpha$, où les dérivées spatiales sont à prendre à la position de la particule α . Notons que la dérivée temporelle du potentiel vecteur est une dérivée partielle. Le champ électromoteur ne fait en effet intervenir que la dépendance explicite en temps du champ magnétique.

Le principe fondamental de la dynamique pour la particule α s'écrit alors:

$$m\ddot{\mathbf{r}}_\alpha = \mathbf{F}_\alpha = q_\alpha(\mathbf{E}_\alpha + \mathbf{v}_\alpha \times \mathbf{B}_\alpha). \quad (1.22)$$

Nous allons transformer cette équation pour la mettre sous une forme qui rappelle celle d'une équation de Lagrange, ce qui nous permettra d'intuiter une forme simple pour la fonction de Lagrange de ce problème.

En faisant intervenir l'expression des champs en fonction des potentiels, on peut écrire (tous les opérateurs différentiels s'entendant par rapport à \mathbf{r}_α):

$$\mathbf{F}_\alpha = q_\alpha \left(-\frac{\partial \mathbf{A}_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v}_\alpha \times (\nabla \times \mathbf{A}_\alpha) - \nabla V_\alpha \right). \quad (1.23)$$

En place de la dérivée partielle par rapport au temps de \mathbf{A}_α , on souhaite faire apparaître une dérivée totale par rapport au temps (rappelons que, dans les équations de Lagrange, les dérivées par rapport au temps sont totales). La variation de \mathbf{A}_α par rapport au temps provient de deux causes. D'abord, il peut exister une variation explicite du potentiel vecteur par rapport au temps (exprimée ci-dessus par la dérivée partielle par rapport au temps). Même en l'absence de cette dépendance explicite en temps, le potentiel vecteur "vu" par une particule α varie en raison du mouvement de la particule dans le champ inhomogène. La variation correspondante peut s'écrire simplement $(\mathbf{v}_\alpha \cdot \nabla) \mathbf{A}_\alpha$, terme parfois nommé "dérivée hydrodynamique". On a alors:

$$\frac{d\mathbf{A}_\alpha}{dt} = \frac{\partial \mathbf{A}_\alpha}{\partial t} + (\mathbf{v}_\alpha \cdot \nabla) \mathbf{A}_\alpha, \quad (1.24)$$

et donc

$$\mathbf{F}_\alpha = q_\alpha \left(-\frac{d\mathbf{A}_\alpha}{dt} + (\mathbf{v}_\alpha \cdot \nabla) \mathbf{A}_\alpha + \mathbf{v}_\alpha \times (\nabla \times \mathbf{A}_\alpha) - \nabla V_\alpha \right). \quad (1.25)$$

On reconnaît dans les deux termes centraux deux des termes du développement ⁴ de $\nabla_{\mathbf{r}_\alpha} (\mathbf{v}_\alpha \cdot \mathbf{A}_\alpha)$. Les deux autres termes de ce développement qui font intervenir des dérivées partielles de \mathbf{v}_α par rapport à la position de la particule α sont manifestement nuls. On obtient donc finalement:

$$\mathbf{F}_\alpha = q_\alpha \left(-\frac{d\mathbf{A}_\alpha}{dt} - \nabla [V_\alpha - \mathbf{A}_\alpha \cdot \mathbf{v}_\alpha] \right) = m \ddot{\mathbf{r}}_\alpha = \frac{d}{dt} \nabla_{\mathbf{v}_\alpha} \frac{1}{2} m_\alpha \mathbf{v}_\alpha^2. \quad (1.26)$$

En remarquant que

$$\frac{d\mathbf{A}_\alpha}{dt} = \frac{d}{dt} \nabla_{\mathbf{v}_\alpha} \mathbf{A}_\alpha \cdot \mathbf{v}_\alpha \quad (1.27)$$

on peut mettre le principe fondamental sous la forme:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \nabla_{\mathbf{v}_\alpha} \left[\frac{1}{2} m_\alpha \mathbf{v}_\alpha^2 + q_\alpha \mathbf{A}_\alpha \cdot \mathbf{v}_\alpha \right] &= -q_\alpha \nabla_{\mathbf{r}_\alpha} [V_\alpha - \mathbf{A}_\alpha \cdot \mathbf{v}_\alpha] \\ &= \nabla_{\mathbf{r}_\alpha} \left[\frac{1}{2} m_\alpha \mathbf{v}_\alpha^2 - q_\alpha (V_\alpha - \mathbf{A}_\alpha \cdot \mathbf{v}_\alpha) \right], \end{aligned} \quad (1.28)$$

le gradient par rapport à la position de l'énergie cinétique étant évidemment nul. De la même manière, on peut ajouter dans le gradient du membre de gauche un terme proportionnel au potentiel, $q_\alpha V_\alpha$, qui ne dépend manifestement pas des vitesses. On obtient alors la forme de l'équation de Lagrange en coordonnées cartésiennes, à condition de poser:

$$L = \sum_\alpha [T_\alpha - q_\alpha V_\alpha + q_\alpha \mathbf{v}_\alpha \cdot \mathbf{A}_\alpha]. \quad (1.29)$$

Nous admettons que cette forme du lagrangien est effectivement convenable. Quelques remarques s'imposent à ce point:

⁴On rappelle que $\nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{b} + (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{a} + \mathbf{a} \times (\nabla \times \mathbf{b}) + \mathbf{b} \times (\nabla \times \mathbf{a})$

- Le terme “d’énergie potentielle” que nous obtenons ici dépend explicitement de la vitesse des particules. Nous retrouvons ici, sous une autre forme, la non conservativité des forces électromagnétiques: l’énergie mécanique totale n’est pas constante dans le cas le plus général. Ce n’est que si le potentiel vecteur est indépendant du temps (au sens d’une dérivée partielle par rapport au temps) et de plus uniforme que le dernier terme du lagrangien se ramène à une dérivée totale (celle de $\mathbf{A}_\alpha \cdot \mathbf{r}_\alpha$), qui peut être oubliée. Le potentiel électrostatique joue alors le rôle d’une vraie énergie potentielle, ne dépendant que des positions des particules. Ce n’est donc que dans le cadre de l’électrostatique que les forces électromagnétiques sont conservatives, un résultat bien connu sur lequel nous jetons ici un éclairage nouveau. Notons que la non conservation de l’énergie mécanique ne signifie pas une violation de la conservation de l’énergie totale. Nous verrons en effet en relativité que l’énergie et l’impulsion totales sont toujours conservées, à condition de faire intervenir le champ dans le bilan.
- Encore une fois, les champs sont ici imposés de l’extérieur, et ne font pas partie des variables dynamiques du problème. Pour traiter le problème complet de particules en interaction avec leur propre champ, il faudrait adjoindre aux équations de Lagrange que nous venons d’écrire les équations de Maxwell permettant de calculer les champs en fonction des mouvements des particules. Ce n’est que dans la partie suivante que nous apprendrons à le faire de manière consistante dans un formalisme lagrangien englobant le champ.
- L’expression de notre lagrangien fait explicitement intervenir les potentiels. Il nous faut donc vérifier que les équations de Lagrange ne sont pas modifiées quand on effectue une transformation de jauge sur les potentiels. Rappelons en effet que les champs “physiques” ne sont pas modifiés si on effectue la transformation de “jauge”:

$$\mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\phi \quad (1.30)$$

$$V \longrightarrow V' = V - \frac{\partial\phi}{\partial t}, \quad (1.31)$$

où ϕ est une fonction arbitraire de l’espace et du temps. Le nouveau lagrangien L' s’exprime alors facilement en fonction de l’ancien, en notant $\phi_\alpha = \phi(\mathbf{r}_\alpha, t)$:

$$\begin{aligned} L' &= L + \sum_\alpha q_\alpha \left(\frac{\partial\phi_\alpha}{\partial t} + (\nabla\phi_\alpha) \cdot \mathbf{v}_\alpha \right) \\ &= L + \sum_\alpha q_\alpha \left(\frac{\partial\phi_\alpha}{\partial t} + (\mathbf{v}_\alpha \cdot \nabla)\phi_\alpha \right) \\ &= L + \sum_\alpha q_\alpha \frac{d\phi_\alpha}{dt}, \end{aligned} \quad (1.32)$$

en reconnaissant dans les deux derniers termes de l’équation centrale la dérivée totale par rapport au temps de ϕ_α , somme de la dérivée partielle et de la “dérivée hydrodynamique”. L' et L ne diffèrent donc que par une dérivée totale par rapport au temps qui ne modifie pas le contenu des équations de Lagrange, comme nous nous y attendions.

1.4 Lagrangien et lois de conservation

Dans tout phénomène physique il existe des quantités conservées au cours de l’évolution. Ces quantités, aussi appelées en mécanique “intégrales premières du mouvement”, jouent un rôle important en fournissant des renseignements sur la dynamique, même si la trajectoire n’est pas explicitement connue. Par exemple, on peut donner beaucoup de caractéristiques générales des collisions en écrivant

la conservation de l'impulsion ou de l'énergie, sans même connaître de façon détaillée la loi régissant l'interaction entre les particules⁵.

Parmi toutes les quantités conservées dans le mouvement, certaines sont triviales et d'autres sans interprétation physique directe. Certaines en revanche, comme l'énergie ou l'impulsion, sont directement reliées à des propriétés physiques très fondamentales. Comme nous le verrons, il existe en général une quantité conservée associée à chaque invariance du système dans une transformation (à chaque propriété de symétrie, au sens le plus large). Nous verrons par exemple que la conservation de l'impulsion découle directement de l'invariance par translation dans l'espace.

Avant d'entrer dans le détail de ces lois de conservation, prouvons d'abord l'existence de quantités conservées dans une évolution lagrangienne. Comme les équations de Lagrange du système pour les n coordonnées généralisées q_i sont du second ordre en temps, la solution explicite du problème fait intervenir $2n$ constantes représentant les conditions aux limites (valeurs des coordonnées aux deux extrémités de la trajectoire). L'une de ces constantes peut toujours être mise sous la forme d'une origine arbitraire t_0 sur le temps. La solution la plus générale peut donc s'écrire:

$$q_i(t + t_0, C_1, \dots, C_{2n-1}), \dot{q}_i(t + t_0, C_1, \dots, C_{2n-1}), \quad (1.33)$$

où t_0 et les C_k sont les $2n$ constantes. Le mouvement étant déterminé, on peut inverser ces relations entre les $2n$ constantes et les coordonnées, et écrire les constantes comme une fonction des coordonnées généralisées:

$$t_0(q_i, \dot{q}_i, t), C_k(q_i, \dot{q}_i, t). \quad (1.34)$$

L'origine du temps joue un rôle particulier, et n'est pas à proprement parler une intégrale première du mouvement. En revanche, les $2n - 1$ C_k sont bien des fonctions de l'état dynamique du système qui restent constantes au cours du mouvement. Il y a donc, de façon très générale, au moins $2n - 1$ intégrales premières indépendantes dans un mouvement à n degrés de liberté.

Le premier TD introduit le théorème de Noether qui permet de trouver de façon très générale les constantes de mouvement en considérant les symétries de lagrangien, c'est à dire les transformations qui laissent invariante la dynamique du système. Dans la suite de ce paragraphe, nous allons aborder de manière moins systématique mais plus intuitive trois d'entre elles: l'impulsion, l'énergie et le moment cinétique.

1.4.1 Invariance par translation dans le temps: énergie

Nous considérons ici un système isolé. La première conséquence est que la fonction de Lagrange ne peut dépendre explicitement du temps. Il n'y a rien en effet dans l'environnement du système pour fixer une origine de temps. On a donc $\partial L / \partial t = 0$. La dérivée totale de L par rapport au temps, somme de sa dérivée partielle et des variations temporelles provenant de la variation des coordonnées généralisées, peut donc s'écrire:

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i. \quad (1.35)$$

En utilisant les équations de Lagrange vérifiées par L et les q_i , on met cette dérivée sous la forme:

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i + \sum_i \dot{q}_i \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \\ &= \frac{d}{dt} \left[\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right]. \end{aligned} \quad (1.36)$$

On trouve ainsi que la quantité

$$\mathcal{E} = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L \quad (1.37)$$

⁵On consultera avec profit le Landau de Mécanique sur ce problème que nous n'aborderons pas du tout dans ce cours.

est une constante ou intégrale première du mouvement. Dans le cas où les coordonnées généralisées coïncident avec les coordonnées cartésiennes, $\mathcal{E} = \sum_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha} \cdot \nabla_{\mathbf{v}_{\alpha}} L - L$. Notons tout de suite qu'elle a la même dimension que L , c'est à dire celle d'une énergie. Pour préciser son interprétation physique, considérons le cas où les forces internes au système dérivent d'une énergie potentielle U ne dépendant que des q_i . On a alors $L = T(q_i, \dot{q}_i) - U$. T est très généralement une forme quadratique des dérivées temporelles des coordonnées généralisées⁶. T vérifie donc le théorème d'Euler:

$$2T = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} . \quad (1.38)$$

Comme U ne dépend que des q_i , $\partial L / \partial \dot{q}_i = \partial T / \partial \dot{q}_i$, et donc

$$\mathcal{E} = 2T - L = 2T - (T - U) = T + U . \quad (1.39)$$

La quantité \mathcal{E} coïncide donc dans ce cas simple avec l'énergie mécanique totale du système. Dans un cas plus complexe, nous admettrons donc que l'énergie mécanique du système est définie comme \mathcal{E} et est donc une intégrale première du mouvement. Cette loi de conservation apparaît ici très clairement comme une conséquence directe de l'invariance par translation dans le temps.

L'hypothèse du système isolé exclut bien sûr de traiter le cas d'un ensemble de particules en interaction avec un champ électromagnétique extérieur. Il existe cependant un cas où on peut définir une énergie mécanique conservée pour un tel système: celui d'un champ statique. Les équations de Lagrange s'écrivent en effet normalement avec le lagrangien

$$L = \sum_{\alpha} T_{\alpha} - q_{\alpha} V_{\alpha} + q_{\alpha} \mathbf{A}_{\alpha} \cdot \mathbf{v}_{\alpha} , \quad (1.40)$$

et les notations du paragraphe 1.3 (pour simplifier les écritures nous supposons ici que les coordonnées généralisées sont les coordonnées cartésiennes). \mathbf{A} ne dépendant que de la position des particules et L étant explicitement indépendant du temps, le raisonnement précédent s'applique en entier. L'énergie mécanique s'écrit simplement dans ce cas:

$$\mathcal{E} = \sum_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha} \cdot \nabla_{\mathbf{v}_{\alpha}} L - L . \quad (1.41)$$

Elle est conservée et on a:

$$\sum_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha} \cdot \nabla_{\mathbf{v}_{\alpha}} L = 2T + \sum_{\alpha} q_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha} \cdot \nabla_{\mathbf{v}_{\alpha}} (\mathbf{A}_{\alpha} \cdot \mathbf{v}_{\alpha}) = 2T + \sum_{\alpha} q_{\alpha} \mathbf{A}_{\alpha} \cdot \mathbf{v}_{\alpha} . \quad (1.42)$$

Et donc:

$$\mathcal{E} = T + \sum_{\alpha} q_{\alpha} V_{\alpha} , \quad (1.43)$$

résultat évident de statique.

1.4.2 Translation spatiale: conservation de l'impulsion

Nous considérons, comme dans le paragraphe précédent, un système isolé. La dynamique est visiblement invariante si on déplace globalement le système. Il n'existe rien dans l'environnement pour fixer une origine des coordonnées. Comme ce déplacement est une quantité vectorielle, on a en fait trois conditions d'invariance d'où on peut déduire la conservation de trois quantités.

Nous allons d'abord supposer que le système est décrit par ses coordonnées cartésiennes. Les coordonnées généralisées posent en effet problème, puisqu'une translation spatiale n'a pas forcément

⁶ Seulement dans le cas où les contraintes ne font pas explicitement intervenir de dépendance temporelle.

une expression simple en termes de ces coordonnées. Nous examinerons ce cas à la fin du paragraphe. Nous considérons une translation d'ensemble du système, qui s'écrit:

$$\mathbf{r}_\alpha \longrightarrow \mathbf{r}_\alpha + \boldsymbol{\varepsilon} . \quad (1.44)$$

La translation $\boldsymbol{\varepsilon}$ est supposée petite à l'échelle des longueurs caractéristiques du système. On peut aisément exprimer la variation de la fonction de Lagrange dans cette translation. Puisque les vitesses ne changent pas,

$$\delta L = \sum_{\alpha} \nabla_{\mathbf{r}_\alpha} L \cdot \boldsymbol{\varepsilon} . \quad (1.45)$$

Cette variation ne peut être nulle quel que soit $\boldsymbol{\varepsilon}$ que si

$$\sum_{\alpha} \nabla_{\mathbf{r}_\alpha} L = 0 . \quad (1.46)$$

En utilisant les équations de Lagrange en coordonnées cartésiennes, on met cette condition sous la forme:

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = 0 , \quad (1.47)$$

avec

$$\mathbf{P} = \sum_{\alpha} \nabla_{\mathbf{v}_\alpha} L . \quad (1.48)$$

Nous trouvons donc bien une intégrale première vectorielle pour le mouvement. Dans le cas où $L = T - U$, U ne dépendant que des \mathbf{r}_α , $\nabla_{\mathbf{v}_\alpha} L = \nabla_{\mathbf{v}_\alpha} T$ et

$$\mathbf{P} = \sum_{\alpha} m_\alpha \mathbf{v}_\alpha , \quad (1.49)$$

indiquant que cette intégrale première vectorielle n'est autre que l'impulsion ou quantité de mouvement totale.

Notons à ce point que l'impulsion totale est définie en terme du gradient par rapport aux vitesses et ne coïncide pas forcément avec l'expression habituelle $\sum_{\alpha} m_\alpha \mathbf{v}_\alpha$. Ce sera en particulier le cas en électromagnétisme où le potentiel vecteur entre dans la définition de l'impulsion. Comme seuls des potentiels vecteur et scalaire uniformes (c'est à dire des champs nuls) seraient compatibles avec les hypothèses actuelles, nous n'examinerons pas ce cas pour l'instant.

Etudions maintenant le cas où l'existence de contraintes impose le recours à des coordonnées généralisées. L'invariance de l'impulsion totale ne devrait pas dépendre de l'existence de contraintes internes au système. Toutefois, la conservation de \mathbf{P} ne peut plus être établie aussi simplement, puisqu'une translation n'a pas nécessairement une expression simple en termes de coordonnées généralisées. Définissons quand même, par analogie avec le cas précédent, une "impulsion généralisée" p_i associée à la coordonnée généralisée q_i par

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} . \quad (1.50)$$

Nous verrons que des impulsions généralisées jouent un rôle central dans le formalisme hamiltonien. En attendant, notons que l'énergie mécanique totale peut se réécrire simplement:

$$\mathcal{E} = \sum_i p_i \dot{q}_i - L . \quad (1.51)$$

Supposons maintenant que la fonction de Lagrange L ne fasse pas explicitement intervenir la coordonnée q_i :

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 . \quad (1.52)$$

Nous dirons alors que q_i est une coordonnée “cyclique”. La simple écriture de l'équation de Lagrange pour q_i donne alors:

$$\frac{dp_i}{dt} = 0 . \quad (1.53)$$

L'impulsion associée à une coordonnée cyclique est conservée.

Revenons maintenant à l'invariance par translation. Trois des coordonnées généralisées d'un système isolé peuvent et doivent être prises égales aux trois coordonnées cartésiennes du centre d'inertie. De manière évidente, par invariance par translation, ces trois coordonnées sont cycliques. Il en résulte que les trois impulsions associées sont des intégrales premières du mouvement, formant un vecteur qui n'est autre que l'impulsion totale.

1.4.3 Invariance par rotation: moment cinétique

Nous appliquerons ici une méthode très semblable à celle du paragraphe précédent au cas où le système et donc sa fonction de Lagrange sont invariants dans une rotation quelconque autour d'un axe défini par un vecteur unitaire \mathbf{u} . C'est en particulier le cas pour un système isolé. Nous examinerons ici uniquement le cas où le système est défini par les coordonnées cartésiennes des particules.

Nous considérons une rotation infinitésimale d'un angle $\delta\phi$ autour de l'axe. En posant $\delta\phi = \delta\phi\mathbf{u}$, nous pouvons écrire les variations des positions et vitesses dans cette transformation $\delta\mathbf{r} = \delta\phi \times \mathbf{r}$ et $\delta\mathbf{v} = \delta\phi \times \mathbf{v}$. L'invariance par rotation impose que la variation δL de la fonction de Lagrange soit nulle dans cette transformation. Or

$$\delta L = \sum_{\alpha} \nabla_{\mathbf{r}_{\alpha}} L \cdot \delta\mathbf{r}_{\alpha} + \nabla_{\mathbf{v}_{\alpha}} L \cdot \delta\mathbf{v}_{\alpha} . \quad (1.54)$$

En utilisant les équations de Lagrange, qui s'écrivent $\nabla_{\mathbf{r}_{\alpha}} L = \dot{\mathbf{p}}_{\alpha}$, où $\mathbf{p}_{\alpha} = \nabla_{\mathbf{v}_{\alpha}} L$ est l'impulsion de la particule α , on peut écrire:

$$\begin{aligned} \delta L &= \sum_{\alpha} [\dot{\mathbf{p}}_{\alpha} \cdot (\delta\phi \times \mathbf{r}_{\alpha}) + \mathbf{p}_{\alpha} \cdot (\delta\phi \times \mathbf{v}_{\alpha})] \\ &= \sum_{\alpha} [\delta\phi \cdot (\mathbf{r}_{\alpha} \times \dot{\mathbf{p}}_{\alpha}) + \delta\phi \cdot (\mathbf{v}_{\alpha} \times \mathbf{p}_{\alpha})] \\ &= \delta\phi \cdot \frac{d\mathbf{L}}{dt} , \end{aligned} \quad (1.55)$$

où nous avons posé

$$\mathbf{L} = \sum_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha} \times \mathbf{p}_{\alpha} . \quad (1.56)$$

La fonction de Lagrange ne peut être conservée pour une rotation arbitraire que si la composante du vecteur \mathbf{L} sur l'axe de rotation est une intégrale première du mouvement. Nous retrouvons ainsi la conservation du moment cinétique par rapport à un axe.

On peut voir aussi, plus simplement, dans ce cas, que le lagrangien est indépendant d'une coordonnée généralisée décrivant le mouvement de rotation autour de l'axe. Il est donc cyclique dans cette coordonnée. L'impulsion généralisée associée à cette coordonnée est constante. Il est facile de vérifier qu'il s'agit bien de la composante le long de cet axe du moment cinétique.

Dans le cas où le système est invariant dans une rotation arbitraire autour d'un axe quelconque, ce qui est le cas d'un système isolé, il en résulte que le moment cinétique \mathbf{L} est une constante du mouvement.

1.5 Action en fonction de la trajectoire

Nous allons utiliser les définitions du paragraphe précédent pour tenter d'exprimer simplement la dépendance de l'action S calculée sur la trajectoire effectivement suivie en fonction des coordonnées

spatiales et temporelles du point de départ et du point d'arrivée. En d'autres termes, l'objet de ce paragraphe est de donner les dérivées partielles de $S(q(1), t_1, q(2), t_2)$, action sur la trajectoire suivie considérée comme une fonction des conditions aux limites. Ces résultats nous seront fort utiles dans la suite du cours. Ils nous permettront aussi de jeter un regard nouveau sur les lois de conservation associées aux invariances.

1.5.1 Dépendance en position

Nous considérons ici la variation de S en fonction de la position du point d'arrivée. Nous en déduirons immédiatement la dépendance vis à vis du point de départ. Nous considérons donc ici deux trajectoires *effectivement suivies* entre les instants t_1 et t_2 . La première (trajectoire de référence) s'effectue entre les valeurs $q_i(1)$ et $q_i(2)$ des coordonnées généralisées. La seconde entre les valeurs $q_i(1)$ et $q_i(2) + \delta q_i(2)$, où $\delta q_i(2)$ est un accroissement infinitésimal de la position du point d'arrivée. Les trajectoires, par continuité, restent infiniment voisines pour tous les instants⁷ et on écrira $\delta q_i(t)$ l'écart entre elles.

La variation de l'action en passant d'une trajectoire à l'autre, δS , s'écrit simplement:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \delta L dt, \quad (1.57)$$

où δL est la variation de la fonction de Lagrange entre les deux points à l'instant t . On suit alors un raisonnement identique à celui utilisé pour établir les équations de Lagrange. On écrit d'abord:

$$\delta L = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i, \quad (1.58)$$

et on reporte cette expression dans celle de δS . Le terme faisant intervenir $\delta \dot{q}_i$ est alors intégré par parties. On obtient:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right] \delta q_i dt + \sum_i \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right]_1^2. \quad (1.59)$$

La trajectoire de référence que nous considérons ici est une solution des équations du mouvement. Les équations de Lagrange étant constamment vérifiées, l'intégrale dans l'expression ci-dessus s'annule identiquement. Il ne reste donc que le terme tout intégré, qui se réduit à:

$$\delta S = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i(2). \quad (1.60)$$

De manière évidente, si nous avons considéré deux trajectoires différant d'une quantité infinitésimale au point de départ, nous aurions obtenu:

$$\delta S = - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i(1). \quad (1.61)$$

Ces deux expressions nous donnent les dérivées partielles de l'action, considérée comme une fonction des coordonnées des points de départ et d'arrivée. En remarquant que $\partial L / \partial \dot{q}_i = p_i$ (impulsion généralisée), on écrira

$$\frac{\partial S}{\partial q_i(2)} = p_i(2) \quad (1.62)$$

$$\frac{\partial S}{\partial q_i(1)} = -p_i(1) \quad (1.63)$$

⁷ Si la dynamique du système était chaotique, deux trajectoires, très voisines aux points de départ et d'arrivée, peuvent s'écarter notablement l'une de l'autre. Comme nous manipulons des accroissements infinitésimaux, ce problème ne se pose pas.

On peut facilement retrouver, à partir de ce résultat, l'invariance de l'impulsion associée à une coordonnée cyclique. Si q_i est cyclique, la fonction de Lagrange ne dépend pas de q_i et le mouvement doit être invariant dans une translation de la coordonnée q_i . Considérons donc la translation infinitésimale $q_i \rightarrow q_i + \epsilon$. La variation de l'action dans cette transformation est:

$$\delta S = \frac{\partial S}{\partial q_i(2)}\epsilon + \frac{\partial S}{\partial q_i(1)}\epsilon = (p_i(2) - p_i(1))\epsilon, \quad (1.64)$$

d'où on tire immédiatement la conservation de p_i . Dans le cas où les coordonnées cycliques sont celles du centre d'inertie, on retrouve la conservation de l'impulsion au sens habituel.

1.5.2 Dépendance en temps

Nous considérons maintenant la dépendance de l'action dans le temps d'arrivée t_2 . Nous considérons donc deux trajectoires effectivement suivies par le système. L'une, entre $q(1), t_1$ et $q(2), t_2$ est la trajectoire de référence. L'autre coïncide avec la première jusqu'à l'instant t_2 et continue ensuite pendant un intervalle de temps infinitésimal jusqu'à $t_2 + \delta t_2$, les coordonnées étant alors $q_i(2) + \delta q_i(2)$. On peut écrire de manière évidente la variation de l'action entre ces deux trajectoires comme:

$$\delta S = L(t_2)\delta t_2, \quad (1.65)$$

mais aussi comme:

$$\delta S = \frac{\partial S}{\partial t_2}\delta t_2 + \sum_i \frac{\partial S}{\partial q_i(2)}\delta q_i(2). \quad (1.66)$$

En effet l'instant du point d'arrivée et ses coordonnées varient. En utilisant les résultats du paragraphe précédent et en remarquant que $\delta q_i(2) = \dot{q}_i(2)\delta t_2$, on peut écrire:

$$L(t_2) = \frac{\partial S}{\partial t_2} + \sum_i p_i(2)\dot{q}_i(2). \quad (1.67)$$

En nous souvenant de la définition de l'énergie mécanique totale \mathcal{E} ⁸, nous avons enfin:

$$\frac{\partial S}{\partial t_2} = -\mathcal{E}(2). \quad (1.68)$$

En reproduisant le même raisonnement pour une variation de l'instant de départ, on obtiendrait de même:

$$\frac{\partial S}{\partial t_1} = \mathcal{E}(1). \quad (1.69)$$

Avec ces deux expressions et les résultats du paragraphe précédent, nous connaissons toutes les dérivées partielles de l'action en fonction des conditions aux limites imposées à la trajectoire.

Notons également qu'on peut retrouver facilement à partir de ces expressions la conservation de l'énergie mécanique. Si la fonction de Lagrange ne dépend pas explicitement du temps, l'action doit être invariante dans une translation temporelle globale infinitésimale. La variation de l'action dans cette translation s'écrivant évidemment $\delta S = (\mathcal{E}(1) - \mathcal{E}(2))\delta t$, on retrouve l'invariance de l'énergie mécanique.

⁸Nous n'avons fait dans ce paragraphe aucune hypothèse sur la dépendance en temps de la fonction de Lagrange. \mathcal{E} n'est donc pas nécessairement une quantité conservée. En fait, plutôt que d'énergie totale, nous devrions parler de fonction de Hamilton.

Chapitre 2

Transformation de Lorentz

Introduction

Nous décrirons dans ce chapitre la théorie de la relativité restreinte, essentiellement telle qu'elle fut formulée par Einstein en 1905. C'est essentiellement sur l'application à l'électromagnétisme de la relativité restreinte que portera ce cours. La relativité restreinte s'applique cependant dans un beaucoup plus large domaine. Elle joue en particulier un rôle central pour la physique des particules et la physique des accélérateurs. Elle est aussi essentielle en astronomie, beaucoup de sources de rayonnement cosmiques impliquant des déplacements à des vitesses proches de celle de la lumière.

Ce chapitre comportera deux étapes essentielles. Après un bref rappel de la relativité galiléenne, nous constaterons les difficultés que pose l'immersion de l'électromagnétisme dans cette relativité et donc dans la cinématique classique. Nous montrerons en particulier l'incompatibilité grave de l'électromagnétisme avec la loi ordinaire de composition des vitesses. Nous postulerons donc un nouveau principe de relativité, imposant à toutes les lois de la physique, y compris l'électromagnétisme, d'être invariantes dans un changement de référentiel galiléen. La vitesse de la lumière devenant indépendante du référentiel, la loi de composition des vitesses et l'ensemble de la cinématique sont condamnées. Il nous faudra donc d'abord détruire la cinématique et la dynamique¹ newtoniennes telles que nous les connaissons maintenant.

Il nous faudra formuler une nouvelle transformation des coordonnées et du temps décrivant les changements de référentiels, la transformation de Lorentz. Nous verrons en effet, par quelques arguments très simples, qu'un des postulats de base de la mécanique classique, l'universalité du temps et de la simultanéité, doit être abandonné. On mesure peut être assez mal aujourd'hui à quel point la démarche d'Einstein fut audacieuse, remettant en cause les postulats les plus intuitifs de la mécanique. La phase conceptuellement la plus difficile de notre travail sera alors terminée.

2.1 Rappels de relativité galiléenne

2.1.1 Transformation de Galilée

Il est très intuitif que le mouvement d'un point dépende de l'observateur. Pour utiliser un vocabulaire ferroviaire², le passager de train a une vitesse faible ou nulle par rapport à celle du contrôleur, alors qu'il a une vitesse élevée par rapport au garde barrière.

¹Rappelons que la cinématique décrit les mouvements indépendamment de leurs causes et que la dynamique permet de prévoir le mouvement si on en connaît les causes.

²Les papiers originaux sur la relativité emploient souvent des expériences de pensée utilisant des trains et des gares, parfois même des tunnels. C'est sans doute lié au succès grandissant des transports ferroviaires au début du siècle dernier et à leur importance sociologique. Pour céder à la tradition, nous emploierons ce genre de vocabulaire dans ce cours, bien que les effets relativistes soient complètement négligeables, même avec les trains les plus modernes.

La notion centrale de la cinématique (classique ou relativiste) est celle de *référentiel*. Un référentiel, c'est un ensemble d'observateurs, immobiles les uns par rapport aux autres et occupant chaque point de l'espace. Ces observateurs peuvent constater le passage du mobile à leur position. La connaissance de la position des observateurs concernés permet alors de déterminer la trajectoire du mobile. On pourrait trouver de prime abord cette définition un peu complexe (pourquoi tant d'observateurs ?). Elle est néanmoins essentielle quand on prend en compte la vitesse finie de la propagation de l'information qu'impose la relativité. Il n'est alors pas évident de repérer le mouvement d'un mobile si on ne dispose pas d'un observateur en chaque point de l'espace.

On peut bien sûr convenir d'un repère (cartésien, orthonormal) pour repérer ces positions au moyen de trois coordonnées. Il est important de noter que le référentiel a une signification physique essentielle, alors que le repère n'est qu'une convention mathématique commode. Il est donc essentiel de bien distinguer ces deux notions.

Les observateurs sont de plus munis d'horloges qui leur permettent de noter l'instant auquel le mobile passe en face d'eux, le mouvement étant alors complètement déterminé par la trajectoire et la loi horaire. Ces horloges peuvent être constituées de n'importe quel phénomène physique périodique, suffisamment rapide à l'échelle du mouvement pour en donner une description temporelle convenable. Nous supposons que toutes les horloges de tous les observateurs d'un même référentiel sont synchronisées (indiquent la même valeur au même instant). Cette synchronisation ne pose aucune difficulté en cinématique classique, puisque temps et espace sont complètement découplés. Il suffit, par exemple, que tous les observateurs se retrouvent en un même point pour faire le zéro de leurs horloges à un moment commun. Certes, ces précautions pour la définition du temps paraissent superfétatoires en cinématique classique. Nous verrons, en revanche, qu'elles sont très importantes en cinématique relativiste.

Un mouvement dans un référentiel \mathcal{R} est alors défini par les trois fonctions $x(t), y(t), z(t)$ représentant la position du mobile en fonction du temps commun des observateurs. Le même mouvement serait décrit dans un autre référentiel \mathcal{R}' , en mouvement par rapport à \mathcal{R} , par trois autres fonctions du temps commun des observateurs de \mathcal{R}' : $x'(t'), y'(t'), z'(t')$. En mécanique classique, on admet sans restrictions l'identité des temps³ (à une synchronisation près) des observateurs de \mathcal{R} et de \mathcal{R}' . Il est possible alors de donner la transformation qui fait se correspondre les mouvement vus dans deux référentiels différents.

Dans le cas le plus simple, où les deux référentiels sont en translation uniforme l'un par rapport à l'autre, cette transformation est la transformation dite de Galilée. Sans restreindre du tout la généralité, on peut choisir les axes dans \mathcal{R} et \mathcal{R}' de telle manière que:

- Les axes Ox et $O'x'$ coïncident à tout instant et sont parallèles à la vitesse \mathbf{u} de \mathcal{R}' par rapport à \mathcal{R} .
- Les origines O et O' sont confondues à l'instant $t = 0$.
- Les axes Oy et $O'y'$, d'une part, et les axes Oz et $O'z'$, d'autre part, sont constamment parallèles et coïncident à $t = 0$.

La figure 2.1 présente la géométrie choisie. Nous l'exposons en détail parce que nous choisirons la même pour décrire les changements de référentiel en relativité restreinte.

La loi de transformation de Galilée s'écrit alors trivialement:

$$\left. \begin{aligned} x'(t) &= x(t) - ut \\ y'(t) &= y(t) \\ z'(t) &= z(t) \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

³Cette hypothèse était déjà faite explicitement par Newton dans ses *Principia*. S'il en avait tout à fait reconnu l'importance, il n'aurait guère de doutes sur sa validité.

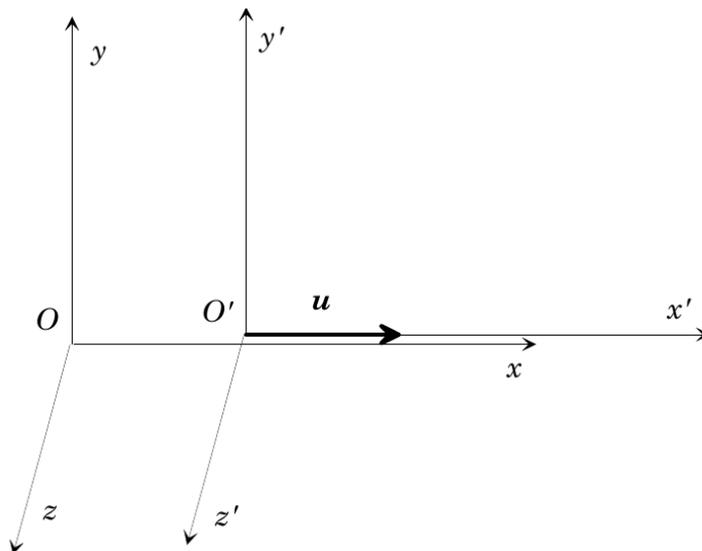


Figure 2.1: Choix des axes dans deux référentiels \mathcal{R} et \mathcal{R}' en mouvement relatif. Les axes des deux repères sont parallèles. Les axes Ox et $O'x'$, alignés avec la vitesse relative \mathbf{u} , coïncident à chaque instant.

C'est cette transformation, tellement triviale qu'elle est bien rarement écrite explicitement, qui sera remplacée par la transformation de Lorentz en relativité einsteinienne. Cette transformation de Galilée contient, par simple dérivation par rapport au temps, la loi de composition des vitesses:

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{u} \quad (2.2)$$

(vitesse absolue égale vitesse relative plus vitesse d'entraînement).

La dynamique newtonienne résulte alors du principe d'inertie de Galilée: **il existe une classe de référentiels privilégiés, les référentiels galiléens, en mouvement de translation uniforme les uns par rapport aux autres, tels que le mouvement d'une particule libre y soit rectiligne et uniforme.**

2.1.2 Les difficultés de la cinématique classique

La loi de composition des vitesses, telle que nous venons de la rappeler, est difficilement compatible avec l'électromagnétisme de Maxwell. La conséquence la plus importante et la plus nouvelle des équations de Maxwell est en effet la prédiction de l'existence d'ondes se propageant à la vitesse c . Le problème qui apparaît immédiatement est celui du référentiel dans lequel cette vitesse est définie, le seul donc dans lequel les équations de Maxwell seraient directement applicables.

Le sentiment le plus naturel, qui prédominait très largement à la fin du XIX^{ème} siècle, était que les ondes électromagnétiques se propageaient dans un milieu baignant l'univers entier: *l'éther*. L'analogie entre ondes électromagnétiques et ondes sonores était en effet présente à tous les esprits. Les difficultés apparaissent toutefois très vite dès qu'on examine les propriétés de cet hypothétique éther. Il doit en effet être omniprésent et infiniment rigide pour propager des ébranlement transverses à grande vitesse. Mais il doit, dans le même temps, être impondérable et infiniment perméable au mouvement des corps matériels (puisque, par exemple, l'étude sur quelques siècles de la rotation terrestre ne révèle aucun frottement). Ce "fluide" si particulier se trouvait ainsi doté de propriétés presque aussi extraordinaires que le calorique du siècle précédent ou, encore avant lui, le phlogistique.

Il existe aussi une difficulté philosophique grave avec l'introduction de l'éther. Les physiciens avaient mis plus de 20 siècles, entre Aristote et Copernic, pour comprendre que notre petite planète

n'est pas le centre de l'univers. Le principe de relativité selon Galilée avait le mérite d'indiquer qu'aucun référentiel galiléen n'est particulièrement privilégié. L'introduction de l'éther devait briser cette "démocratie" des référentiels en introduisant un référentiel très particulier, celui de l'éther, le seul dans lequel les équations de Maxwell devaient s'appliquer. Ce genre d'argument a certainement joué un rôle essentiel pour Einstein.

Les dernières difficultés, les plus graves en pratique, mais qui n'ont pas forcément joué le rôle majeur qu'on leur attribue généralement dans la genèse de la relativité, sont d'ordre expérimental. Si la vitesse de la lumière est définie dans le référentiel de l'éther et si elle obéit à la loi de composition des vitesses, on doit pouvoir mesurer une variation de cette vitesse pour des mouvements assez rapides par rapport à l'éther. Le mouvement de la terre sur son orbite autour du soleil est suffisamment rapide (30 km/s) pour que la variation soit mesurable dans une expérience d'interférométrie optique sensible. La célèbre expérience de Michelson fut conçue dans ce but. D'une sensibilité tout à fait remarquable pour l'époque, encore honorable aujourd'hui, elle aurait dû mettre clairement en évidence le mouvement de la terre par rapport à l'éther⁴. Or cette expérience fut tout à fait négative (ou plutôt très positive): la vitesse de la lumière semblait indépendante du mouvement de la terre par rapport au soleil.

On pouvait, devant ce résultat négatif, adopter deux points de vue. Le premier était de tenter de "réparer" la théorie de l'éther. Si on ne pouvait décemment supposer que le référentiel absolu était celui de la terre (la révolution copernicienne était passée par là), on pouvait supposer que l'éther était entraîné au voisinage des corps massifs, une analogie évidente avec l'entraînement de la couche limite en hydrodynamique. On pouvait aussi supposer, avec Lorentz, une "contraction" de la longueur des objets matériels dans la direction du mouvement, fondée sur une théorie électrostatique des interactions entre particules dans la matière. On pouvait supposer aussi un lien entre la vitesse de la lumière et celle de sa source (les sources utilisées par Michelson étant liées à son appareil). Si de telles modifications "ad hoc" de l'électromagnétisme permettaient d'expliquer le résultat négatif de l'expérience de Michelson, ils ne constituaient pas un corps théorique cohérent. Il était à craindre que de nouvelles modifications tout aussi arbitraires ne doivent être apportées au gré des résultats expérimentaux et que l'électrodynamique ne finisse, comme la théorie astronomique des cycloïdes, en un corps raffiné de règles arbitraires qui décrivent correctement mais ne prédisent rien.

L'autre attitude, beaucoup plus courageuse puisqu'elle conduit, comme nous le verrons, à mettre en cause des notions très fondamentales, était d'admettre que la vitesse de la lumière n'obéissait pas à la loi de composition des vitesses. Cela impliquait bien sûr que la cinématique galiléenne était erronée (ou, du moins, n'était qu'une approximation valide pour des vitesses petites devant celle de la lumière) et donc que toute la physique était à reconstruire (sauf, peut être, l'électrodynamique). C'est la voie que suivit Einstein avec le succès que l'on connaît et qu'il ouvrit par son célèbre article de 1905: "Sur l'électrodynamique des corps en mouvement"⁵. Le principe fondamental de cette nouvelle physique, le "principe de relativité" est exposé dans le prochain paragraphe.

2.2 Principe de relativité

2.2.1 Enoncé

Il existe une classe de référentiels privilégiés, en translation uniforme les uns par rapport aux autres (que nous continuerons à appeler "référentiels galiléens"), dans lesquels toutes les lois de la physique prennent la même forme.

⁴Nous ne détaillerons pas ici le principe de cette expérience: cette description n'est pas indispensable pour la suite de l'exposé. Le lecteur intéressé pourra trouver une description détaillée dans pratiquement tous les manuels de relativité.

⁵Nous ne saurions trop recommander la lecture de cet article, ainsi que celle d'un article de revue rédigé dès 1907, qui constitue un exposé très pédagogique de la relativité (Edition de œuvres essentielles d'Einstein, Relativités I—éditions Seuil-CNRS).

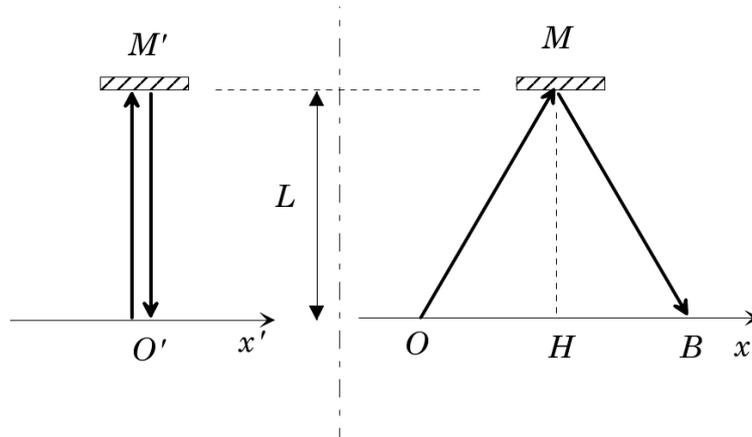


Figure 2.2: Une expérience de pensée établissant le caractère relatif du temps. Un signal lumineux est émis depuis l'observateur O' , le long de l'axe $O'z'$, vers un miroir M . Après réflexion sur ce miroir, le signal revient à l'observateur O' . La même expérience est vue, à gauche, dans le référentiel du train et, à droite, dans un référentiel immobile. Pendant l'expérience, l'observateur O' est passé de O à B .

Si toutes les lois de la physique prennent la même forme, les équations de Maxwell sont valides dans tous les référentiels et la vitesse de la lumière, c , est la même dans tous les référentiels. Nous centrerons cet exposé sur l'invariance de la vitesse de la lumière. Il serait tout aussi possible de ne pas faire jouer un rôle aussi central à l'électromagnétisme. On pourrait simplement postuler qu'il existe une vitesse limite de propagation de toutes les interactions et effectuer tous les raisonnements qui vont suivre sur cette vitesse. Il suffirait, enfin, de constater qu'expérimentalement la vitesse de la lumière dans le vide est identique à la vitesse limite, à la précision des mesures. Il n'est pas absolument exclu, en effet, bien que cela soit très peu vraisemblable, que le photon possède une très petite masse, rendant la vitesse de la lumière très légèrement inférieure à la vitesse limite qui apparaît en relativité.

Ce principe de relativité, de prime abord, semble ne rien remettre en cause d'essentiel et semble très voisin du principe de relativité de la physique classique. Il n'en est rien, comme nous allons le voir en considérant une expérience de pensée. Nous allons montrer en effet que le principe de relativité a comme conséquence immédiate que le temps ne s'écoule pas de la même façon dans deux référentiels galiléens en mouvement relatif (deux horloges en mouvement relatif bâties sur le même modèle ne battent pas au même rythme). Remettre en cause des propriétés aussi intuitives de l'espace et du temps ne sera pas sans conséquences. Il est clair, en particulier, que la transformation appelée à remplacer la transformation de Galilée devra renoncer au caractère absolu du temps et mélanger les coordonnées spatiales et temporelles.

2.2.2 Une expérience de pensée

Nous considérons donc deux référentiels en mouvement relatif, avec la géométrie décrite dans la figure 2.1. Le référentiel \mathcal{R}' sera celui du contrôleur, ou du train, pour reprendre nos analogies ferroviaires, le référentiel \mathcal{R} celui du chef de gare. Le contrôleur, situé en O' , envoie à $t' = 0$ (nous ne confondons pas les temps dans les deux référentiels) une impulsion lumineuse de durée négligeable dans la direction y' vers un miroir situé en $y' = L$ (voir figure 2.2). L'impulsion, réfléchiée par le miroir, revient vers le contrôleur et l'atteint au bout d'un temps $T' = 2L/c$ (en dynamique classique, la vitesse de la lumière le long de l'axe Oy n'est pas modifiée par un entraînement le long de Ox). Notons que le contrôleur pourrait ainsi construire une horloge. Renvoyant une deuxième impulsion à l'instant précis où il reçoit la première, il établirait un phénomène périodique et donc une horloge.

Regardons maintenant cette même expérience avec l'oeil du chef de gare (partie droite de la figure

2.2). A $t' = 0$, le contrôleur est en O' et donc aussi en O . De son côté, le miroir s'est déplacé avant que l'impulsion ne l'atteigne. Il occupe donc une position M , à une certaine distance de O sur l'axe Ox . Enfin, le train continue à se déplacer pendant le retour de l'impulsion et le contrôleur occupe la position B au moment du retour. La trajectoire de l'impulsion dans \mathcal{R} est triangulaire.

Imaginons d'abord que le chef de gare ait été nommé avant 1905 et soit donc un adepte de la cinématique classique. Pour lui, la vitesse de la lumière obéit à la loi de composition. La vitesse de l'impulsion a donc une composante $\pm c$ sur Oy et une composante u sur Ox (u étant la vitesse du train). Son module est donc $\sqrt{c^2 + u^2}$. La durée du parcours OM ⁶ étant L/c , on a $OH = uL/c$ et la longueur OM vaut $L\sqrt{c^2 + u^2}/c$. Elle est parcourue à la vitesse $\sqrt{c^2 + u^2}$ et la durée totale de l'expérience est donc bien $T = 2L/c$, identique à celle vue par le contrôleur (la distance parcourue dans \mathcal{R} est plus grande, mais le module de la vitesse est augmenté dans la même proportion). On retrouve bien, naturellement, le postulat d'universalité du temps.

Considérons maintenant un chef de gare ayant admis la validité du postulat de relativité. Pour lui, la vitesse de l'impulsion est c . Le temps de parcours OM est donc OM/c . Il en déduit $OH = uOM/c$. Comme $OM^2 = L^2 + OH^2$, on a $OM = L/\sqrt{1 - u^2/c^2}$. Il obtient donc finalement:

$$T = \gamma T' , \quad (2.3)$$

avec

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} . \quad (2.4)$$

Le facteur γ (que nous aurons de nombreuses occasions de retrouver) est toujours supérieur à un. La durée de l'expérience mesurée par le chef de gare est plus longue que celle mesurée par le contrôleur. Si chacun construisait une horloge avec le même dispositif, celle du chef de gare battrait plus vite et avancerait par rapport à celle du contrôleur (un cauchemar pour le respect des horaires; heureusement, l'effet est petit comme on pourra le vérifier). Le postulat de relativité a pour conséquence immédiate que le temps n'est pas une notion universelle.

Cette expérience de pensée nous fournit une autre indication sur ce que sera la cinématique relativiste. Le facteur γ n'existe que si la vitesse relative des deux référentiels est plus petite que c . Si ce n'était pas le cas, l'impulsion lumineuse qui se réfléchit normalement sur le miroir dans \mathcal{R}' n'arriverait jamais à rattraper ce miroir dans \mathcal{R} , puisque sa vitesse n'est "que" c . Un événement (la réflexion) se produirait dans un référentiel et pas dans un autre, ce qui est bien sûr absurde. Deux référentiels galiléens ne peuvent donc être animés l'un par rapport à l'autre d'une vitesse supérieure (ou même égale) à c . Comme on peut attacher un référentiel galiléen à tout objet en translation uniforme, c apparaît aussi comme une vitesse limite pour tous les objets matériels.

2.2.3 Evénements

Comme nous venons de le voir, le temps n'est plus universel et n'est plus séparable des coordonnées spatiales. Il faudra décrire les expériences en termes d'événements (très littéralement: il s'est passé quelque chose quelque part). Un événement, c'est par exemple l'émission d'une impulsion lumineuse par une source ou la réflexion de la lumière sur le miroir dans notre première expérience de pensée. Un événement existe indépendamment du choix du référentiel. On peut caractériser un événement, dans un référentiel donné, par l'observateur qui était sur place et par l'instant, mesuré sur l'horloge de cet observateur, où l'événement s'est produit⁷. On pourra donc complètement caractériser l'événement par quatre nombres: les trois coordonnées spatiales de l'observateur (on se munit d'un repère convenable)

⁶On admettra dans toute la suite que la position du miroir selon y n'est pas affectée par le changement de référentiel; nous en donnerons plus tard une justification détaillée

⁷On supposera encore que tous les observateurs d'un même référentiel peuvent synchroniser leurs horloges. Il leur est interdit de se déplacer, mais on peut procéder de façon plus subtile. On peut, par exemple, déterminer par des moyens

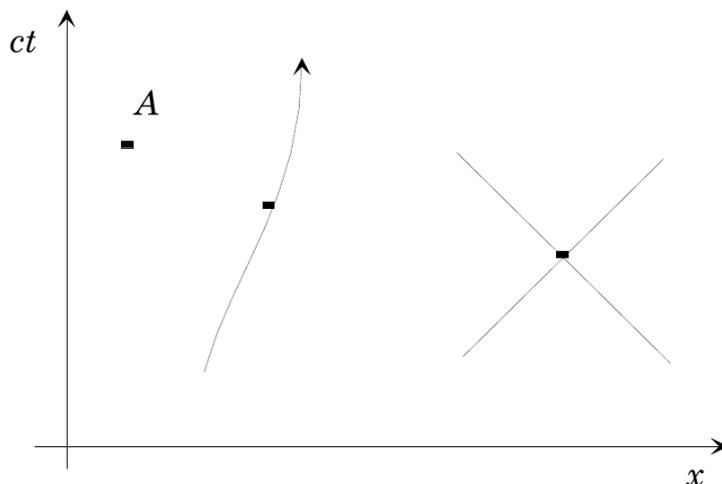


Figure 2.3: Un événement, une ligne d’univers et un cône de lumière. Un événement est représenté par un point dans un espace x, ct . Une ligne d’univers est l’ensemble des événements correspondant aux positions successives d’une particule. Le cône de lumière d’un événement est constitué des lignes d’univers d’un signal lumineux passant par cet événement.

et le temps. On décrira donc un événement par la donnée d’un référentiel et d’un quadruplet de nombres (ct, x, y, z) (nous développerons au chapitre suivant des notations tensorielles puissantes pour traiter ces quadruplets). Bien sûr, les coordonnées spatio-temporelles du même événement dans un autre référentiel sont différentes et l’essentiel de notre tâche sera de donner la loi de transformation qui remplace et étend la transformation de Galilée. Il y a un parallèle très fort entre la différence entre événement (indépendant du référentiel) et coordonnées spatio-temporelles et celle qui existe entre un vecteur (indépendant du repère) et ses composantes sur une base donnée.

Nous utiliserons souvent des représentations géométriques des événements. On peut en effet les représenter comme un point dans un espace à quatre dimensions. Cette représentation posant quelques problèmes techniques, on se cantonne souvent à une dimension d’espace. On représente alors un événement comme sur la figure 2.3. Pour des raisons de commodité, on porte sur l’axe vertical le produit ct . Les deux coordonnées dans cet espace ont ainsi la même dimension⁸.

On peut considérer le mouvement d’un point dans un référentiel comme une suite d’événements (la suite des observateurs devant lesquels la particule est passée associée aux instants correspondants). Une telle suite continue d’événements forme dans l’espace-temps une ligne, que nous nommerons “ligne d’univers” de la particule. Une telle ligne est représentée sur la figure 2.3.

La ligne d’univers d’une particule qui se déplacerait à la vitesse de la lumière serait parallèle, dans notre représentation graphique, à la première ou à la deuxième bissectrice. Dans l’espace à quatre dimensions, l’ensemble des lignes d’univers partant d’un point et correspondant à un mouvement à c forme le “cône de lumière” de cet événement (figure 2.3). A l’intérieur du cône de lumière, les événements antérieurs à l’événement de référence forment le passé, les autres le futur. Comme c est une vitesse limite, toutes les lignes d’univers passant par un événement donné doivent être à l’intérieur du cône de lumière. Deux événements ne pourront être reliés par un signal ou une relation causale, que s’ils sont dans le cône de lumière l’un de l’autre. Il est évident géométriquement que cette relation est symétrique: si A est dans le cône de lumière de B , alors B est dans le cône de lumière de A .

géométriques le milieu du segment AB joignant deux observateurs. On peut placer en ce point une source lumineuse qui s’allume à un certain instant. Si les observateurs A et B font le zéro de leurs horloges au moment où ils voient cette source s’allumer, ils auront établi leur synchronisme.

⁸Les professionnels de la relativité prennent souvent $c = 1$, ce qui simplifie énormément les écritures. A notre niveau, il est peut être imprudent de se priver d’un moyen de vérifier l’homogénéité de nos formules

En revanche, cette relation n'est pas transitive dans le cas général, comme on pourra s'en persuader aisément. Si C est dans le passé du cône de lumière de B , lui-même dans le futur du cône de lumière de A , alors C n'est pas nécessairement dans le cône de lumière de A . En un mot, si A et C peuvent tous deux être la cause de B , il n'y a aucun lien de causalité a priori entre eux. En revanche, si C est dans le futur de B , il est nécessairement dans le cône de lumière de A : si A est la cause de B qui est lui-même la cause de C , alors A peut être la cause de C .

En ces termes, la version relativiste de la causalité apparaît très clairement. Si la physique classique admet qu'un événement puisse être la cause d'un autre s'il lui est antérieur (admettant ainsi implicitement les actions instantanées à distance), la relativité exige que l'un des événements soit effectivement antérieur à l'autre mais aussi que les deux événements puissent être reliés par un signal, c'est à dire soient dans le cône de lumière l'un de l'autre.

2.3 Transformation de Lorentz

Il nous reste à donner la forme explicite de la transformation de Lorentz, décrivant un changement de référentiel. Nous allons, en fait essayer de construire toutes les transformations obéissant à un certain nombre de symétries fondamentales, telles que l'isotropie de l'espace ou l'invariance par translation dans le temps. Nous verrons qu'il n'y a en fait que quatre formes possibles pour une telle transformation. Deux d'entre elles sont inacceptables parce qu'elles conduiraient à abandonner le principe de causalité. Les deux dernières sont la transformation de Galilée, que nous rejetterons également car elle n'obéit pas au principe de relativité, et enfin la transformation de Lorentz. Au cours de cette recherche, nous verrons apparaître certaines propriétés essentielles de la transformation de Lorentz que nous discuterons dans le dernier paragraphe de cette section.

2.3.1 Forme de la transformation

Le choix d'axes pour les deux repères est, encore une fois, celui illustré par la figure 2.1. Nous cherchons donc une transformation $\mathcal{L}(u)$ permettant d'exprimer les coordonnées (ct', x', y', z') d'un événement dans \mathcal{R}' en fonction de celles dans \mathcal{R} , (ct, x, y, z) . Rappelons que u est la projection algébrique de la vitesse de \mathcal{R}' par rapport à \mathcal{R} sur l'axe du mouvement. Notons tout de suite qu'avec nos conventions l'événement $(0, 0, 0, 0)$ dans \mathcal{R} se transforme en l'événement origine $(0, 0, 0, 0)$ dans \mathcal{R}' . Nous obtiendrons avec ce choix d'axes la transformation de Lorentz spéciale. Une simple combinaison avec les rotations et symétries nous permettra ensuite d'obtenir le groupe de Lorentz complet, décrivant des changements de référentiels tout à fait quelconques, dont le groupe spécial est un sous-groupe.

Nous imposerons d'abord à \mathcal{L} d'être une transformation linéaire, homogène. L'invariance de la physique dans une translation arbitraire de l'espace ou du temps impose cette linéarité.

L'ensemble des transformations de Lorentz, paramétrées par la vitesse relative u , doit former un groupe. Considérons en effet trois référentiels: \mathcal{R} , \mathcal{R}' , en mouvement à la vitesse u par rapport à \mathcal{R} , et \mathcal{R}'' , en mouvement à la vitesse v par rapport à \mathcal{R}' et w par rapport à \mathcal{R} (comme nous avons abandonné le cadre de la relativité galiléenne, w n'est pas égal à $u + v$). La transformation de \mathcal{R} vers \mathcal{R}'' peut s'écrire $\mathcal{L}(w)$ ou $\mathcal{L}(v)\mathcal{L}(u)$ (ce produit étant à comprendre comme la composition de deux applications linéaires et donc étant lu de droite à gauche). Le produit de deux transformations de Lorentz définit donc une application de composition interne qui possède évidemment toutes les propriétés d'une loi de groupe. Il existe un élément neutre, l'identité, correspondant au passage d'un référentiel à lui-même et donc à la vitesse nulle. Chaque élément possède un inverse. Il doit en être ainsi, pour qu'à tout événement dans \mathcal{R} corresponde un seul jeu de coordonnées dans \mathcal{R}' . La transformation inverse est celle qui donne les coordonnées dans \mathcal{R} en fonction de celles dans \mathcal{R}' . La vitesse de l'origine O dans \mathcal{R}' doit bien sûr être $-u$. Si la vitesse de O par rapport à O' n'était pas opposée à la vitesse de O' par rapport à O , nous aurions certainement brisé le principe de relativité. La transformation inverse

de $\mathcal{L}(u)$ doit donc être la transformation de Lorentz correspondant à la vitesse $-u$, qui est celle de \mathcal{R} mesurée dans \mathcal{R}' : on doit avoir $\mathcal{L}(u)^{-1} = \mathcal{L}(-u)$.

Il n'est pas évident a priori que ce groupe, que nous appellerons "groupe de Lorentz", soit commutatif. En fait, il est possible de montrer que tout groupe paramétré par un paramètre unique, à condition que ce paramétrage soit "suffisamment" continu et dérivable, est isomorphe au groupe additif des réels⁹. Il en résulte immédiatement que tous ces groupes sont abéliens (ou commutatifs). Notons que cet isomorphisme indique qu'on peut, par un changement de variable adéquat, paramétrer le groupe par un paramètre additif, déterminé de façon univoque à un facteur près (à un choix d'unités près). On pourrait ainsi trouver un paramètre $\phi(u)$ tel que la composition de deux transformations de Lorentz s'écrive $\mathcal{L}(\phi(u) + \phi(v)) = \mathcal{L}(\phi(v))\mathcal{L}(\phi(u))$. Nous verrons par la suite que ce paramétrage additif a une signification physique très claire.

Penchons nous d'abord sur les lois de transformation des coordonnées y et z . Comme les axes Ox et $O'x'$ coïncident à tout instant, le fait que $y = z = 0$ implique que $y' = z' = 0$ pour toutes les valeurs de x et t . Ces deux dernières coordonnées ne peuvent donc intervenir dans les lois de transformation de y et z , qui se résument donc à :

$$y' = ay + bz \quad (2.5)$$

$$z' = b'y + a'z . \quad (2.6)$$

Les axes Oy et $O'y'$ doivent coïncider à $t = 0$. Si b et b' n'étaient pas nuls, l'axe $O'y'$ correspondrait à des valeurs simultanément non nulles de y et z et ne pourrait donc coïncider avec Oy . La transformation se réduit donc à un simple facteur d'échelle sur y et z . L'isotropie de l'espace impose de plus que les facteurs affectant y et z soient identiques. On a donc simplement:

$$y' = ay \quad z' = az . \quad (2.7)$$

Montrons maintenant que ce facteur a vaut nécessairement 1. Nous avons montré effectivement que $\mathcal{L}(u)^{-1} = \mathcal{L}(-u)$. La transformation inverse est donc décrite par le facteur $a(-u)$, mais aussi par le facteur $1/a(u)$. L'isotropie de l'espace impose de plus que le facteur a ne dépende pas de l'orientation de la vitesse par rapport à l'axe Oy . On a donc $a = 1/a$ et $a = \pm 1$. Si le choix des orientations des axes dans les deux référentiels est cohérent, on a donc finalement $a = 1$. Nous avons montré que la transformation de Lorentz laisse invariantes les coordonnées perpendiculaires à la vitesse relative.

Intéressons nous maintenant à la transformation de x et ct . La transformation la plus générale ferait intervenir les coordonnées y et z . L'invariance par translation perpendiculaire à l'axe des x impose évidemment que y et z n'interviennent pas dans la loi de transformation de x . De même, à x et ct donnés, le temps ct' ne doit pas dépendre de y ou z . Finalement, on peut exprimer la loi de transformation la plus générale par une relation matricielle 2×2 :

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(u) & b(u) \\ e(u) & f(u) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} . \quad (2.8)$$

On peut préciser considérablement la forme de cette transformation par un simple argument de symétrie. Considérons en effet dans le référentiel \mathcal{R}' un axe $O'X'$ confondu avec, mais d'orientation contraire à, $O'x'$. En un mot, $X' = -x'$. Considérons de même l'axe OX opposé avec l'axe Ox , avec $X = -x$. On peut considérer la transformation donnant ct et X en fonction de ct' et X' . Elle correspond au même changement de référentiel que celui que nous étudions. En effet, dans les deux

⁹ Nous ne démontrerons pas ici cette propriété. On en trouvera une démonstration très élémentaire dans J.M. Lévy-Leblond et al., Am. Journal of Physics, **47**, 1045 (1980). On peut donner des exemples simples de cette propriété. Le groupe multiplicatif des réels (paramétré par la valeur de l'élément) admet une représentation additive évidente qui n'est autre que le logarithme Népérien. Le groupe des rotations autour d'un point, paramétré par l'angle de rotation, est directement paramétré sous forme additive.

cas, la vitesse du nouveau référentiel selon l'axe des x ou X est u . La vitesse de O est en effet $-u$ sur $O'x'$ et donc u sur $O'X'$. On en déduit que:

$$\begin{pmatrix} ct \\ X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ X' \end{pmatrix}, \quad (2.9)$$

qu'on peut mettre sous la forme:

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ -e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix}. \quad (2.10)$$

Mais cette dernière relation est aussi la transformée inverse de la transformation cherchée:

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} = \frac{1}{af - be} \begin{pmatrix} f & -b \\ -e & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix}. \quad (2.11)$$

De la comparaison de ces deux formules, on tire immédiatement que le déterminant de la transformation doit être égal à un:

$$af - be = 1 \quad (2.12)$$

et que

$$a = f = \gamma \quad (2.13)$$

(nous changeons un peu les notations pour évoluer vers la forme standard de la transformation de Lorentz).

Nous pouvons préciser encore la forme de la transformation en utilisant le caractère abélien du groupe de Lorentz spécial. En écrivant simplement que $\mathcal{L}(w) = \mathcal{L}(u)\mathcal{L}(v) = \mathcal{L}(v)\mathcal{L}(u)$, on trouve que:

$$\begin{aligned} \gamma(w) &= \gamma(u)\gamma(v) + e(u)b(v) \\ &= \gamma(v)\gamma(u) + e(v)b(u), \end{aligned} \quad (2.14)$$

ce qui ne peut être vérifié pour deux vitesses arbitraires que si $e(u)/b(u)$ est une constante, à moins qu'une de ces fonctions ne s'annule identiquement. Si ce rapport est une constante, un choix convenable d'unités d'espace et de temps permet d'amener sa valeur à ± 1 . Nous aurons donc à distinguer 4 cas:

- $e(u) = -b(u)$. La matrice est donc antisymétrique et ses deux coefficients vérifient $\gamma^2 + b^2 = 1$. On peut donc poser $\gamma = \cos \theta$ et $b = \sin \theta$. La matrice de transformation s'écrit donc:

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (2.15)$$

C'est une simple rotation autour de l'origine dans l'espace-temps. La représentation additive de ce groupe est l'angle de rotation θ .

- $e(u) = 0$. Là encore, on doit avoir $\gamma = 1$ et la matrice s'écrit:

$$\begin{pmatrix} 1 & b(u) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.16)$$

Ce groupe, qui diffère du groupe de Galilée en ce qu'il transforme le temps et non l'espace, est le groupe de Carroll.

- $b(u) = 0$. La valeur du déterminant impose alors $\gamma = 1$ et la matrice de la transformation s'écrit:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ e(u) & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.17)$$

Écrire ensuite que le mouvement de O s'effectue à la vitesse $-u$ dans \mathcal{R}' , c'est à dire que $x = 0$ implique $x' = -ut'$, fixe $e(u) = -\beta = -u/c$. Ce groupe est simplement celui de Galilée dont le paramètre additif est la vitesse u ou la vitesse réduite $\beta = u/c$.

- $e(u) = b(u)$. On a alors $\gamma^2 - b^2 = 1$ et on peut poser: $\gamma = \cosh \phi(u)$ et $b(u) = -\sinh \phi(u)$ (la raison de ce choix de signe apparaîtra clairement plus tard). La matrice de transformation:

$$\begin{pmatrix} \cosh \phi & -\sinh \phi \\ -\sinh \phi & \cosh \phi \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

est alors simplement celle d'une rotation hyperbolique (rotation autour de l'origine d'un angle imaginaire pur). La représentation additive de ce groupe (que nous appellerons "groupe de Lorentz", en faisant fi du suspense) est simplement l'angle de rotation ϕ , dont nous donnerons dans un moment l'interprétation physique.

Nous n'avons utilisé jusque là que des arguments très généraux de symétrie et de réciprocity. Il est déjà très remarquable que nous n'ayons plus le choix qu'entre quatre groupes, chacun paramétré par un seul paramètre additif. Pour choisir la forme correcte, nous pouvons employer deux arguments supplémentaires¹⁰.

Si nous voulons que la causalité soit une notion indépendante du référentiel, il faut au moins exiger de la transformation qu'elle préserve l'ordre temporel des événements (au moins, dans le cas relativiste, pour certains couples d'événements, ceux qui sont dans le cône de lumière l'un de l'autre). Il doit donc exister des classes d'événements pour lesquelles le signe de t ne doit changer dans aucune transformation. Il est facile de voir que le groupe des rotations spatio-temporelles et le groupe de Carroll contiennent des transformations changeant le signe de t pour tout événement. Ils sont donc exclus par de simples exigences de causalité.

Il ne nous reste que le groupe de Galilée et le groupe de Lorentz. Le premier, qui conduit à la composition des vitesses au sens ordinaire, n'est pas acceptable. La transformation cherchée doit appartenir donc au groupe de Lorentz (à celui des rotations hyperboliques). Il ne nous reste plus qu'à préciser la valeur du paramètre additif $\phi(u)$. Nous appellerons $c\phi(u)$ la "rapidité", homogène à une vitesse. Il suffit pour cela d'écrire que O est animé, dans \mathcal{R}' , d'un mouvement uniforme à la vitesse $-u$ ($x' = -ut'$). On déduit immédiatement de la transformation que

$$x' = -\sinh \phi(u)ct, \quad ct' = \cosh \phi(u)ct \quad (2.19)$$

et

$$\tanh \phi(u) = \frac{u}{c} = \beta. \quad (2.20)$$

soit encore

$$\sinh \phi(u) = \gamma\beta, \quad \gamma = \cosh \phi(u) = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (2.21)$$

Notons que le facteur γ peut prendre des valeurs arbitrairement grandes. La rapidité peut donc aussi être arbitrairement grande. Si la vitesse u est limitée par la vitesse de la lumière, il n'en est pas de même pour le paramètre "naturel" du groupe de Lorentz.

Avec ces valeurs, nous avons complètement déterminé la transformation de Lorentz, qui peut s'écrire:

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \phi & -\sinh \phi \\ -\sinh \phi & \cosh \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta \\ -\gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}, \quad (2.22)$$

la transformation inverse étant évidemment donnée par

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \phi & \sinh \phi \\ \sinh \phi & \cosh \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta \\ \gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix}, \quad (2.23)$$

¹⁰A ce point, imposer la constance de la vitesse de la lumière ou l'invariance de l'intervalle suffirait à choisir le dernier groupe. Nous allons suivre une démarche un peu plus détaillée pour montrer que la sélection peut aller encore plus loin sans le postulat de relativité.

(il suffit de changer le signe de la vitesse relative et donc de ϕ). En termes de coordonnées et de temps, on peut aussi écrire la transformation directe sous la forme:

$$x' = \gamma(x - ut) \quad (2.24)$$

$$t' = \gamma\left(t - \frac{ux}{c^2}\right) \quad (2.25)$$

et la transformation inverse sous la forme:

$$x = \gamma(x' + ut') \quad (2.26)$$

$$t = \gamma\left(t' + \frac{ux'}{c^2}\right) \quad (2.27)$$

A toutes les relations précédentes, il convient bien sûr d'ajouter l'invariance des coordonnées transverses y et z . Notons immédiatement que, si on ne retient dans la transformation de Lorentz que les termes du premier ordre en u/c , on retrouve la transformation de Galilée. La cinématique classique apparaît donc bien comme une limite de la cinématique relativiste pour des vitesses d'entraînement faibles devant celle de la lumière.

Notons que nous avons fait, dans tout ce paragraphe, un choix d'axes bien particulier. Comme il nous a conduit à une forme univoque de la transformation de Lorentz, nous n'avons pas restreint la généralité. On peut avoir cependant à composer des transformations de Lorentz correspondant à des directions de vitesses différentes. La transformation de Lorentz s'écrira alors $\mathcal{L}(\mathbf{u})$, où \mathbf{u} est le vecteur vitesse de \mathcal{R}' par rapport à \mathcal{R} , de direction arbitraire. Pour écrire ce genre de changement de référentiel, il convient de composer la transformation que nous venons d'écrire avec les rotations arbitraires d'espace, avec les réflexions d'espace et même, éventuellement, avec les réflexions du temps. On obtient ainsi le "groupe de Lorentz complet", qui décrit tous les changements de référentiels. On distingue parfois, à l'intérieur du groupe complet, plusieurs sous-groupes:

- Le groupe de Lorentz "propre" comprenant la transformation de Lorentz combinée avec les rotations spatiales. Sauf cas spécial, il suffit à décrire un changement de référentiel avec une direction de vitesse arbitraire. Le déterminant de la matrice correspondante est 1.
- Le groupe de Lorentz "orthochrone" contient le groupe de Lorentz combiné éventuellement avec des réflexions d'espace (nous avons exclu explicitement ces transformations dans notre discussion en imposant aux directions des axes d'être consistantes). Le déterminant de la matrice peut alors être ± 1 .

2.3.2 Intervalle et causalité relativiste

Considérons deux événements repérés, dans un référentiel donné, par (ct_1, x_1, y_1, z_1) et (ct_2, x_2, y_2, z_2) . Si ces deux événements sont sur le cône de lumière l'un de l'autre, ils peuvent être reliés par un signal lumineux se propageant à la vitesse c . On a donc dans ce cas:

$$c^2(t_1 - t_2)^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2. \quad (2.28)$$

L'écriture de cette relation suggère d'introduire l'intervalle entre deux événements quelconques par:

$$s_{1,2}^2 = c^2(t_1 - t_2)^2 - (x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2)^2 - (z_1 - z_2)^2. \quad (2.29)$$

Notons que le choix du signe + pour la composante temporelle de l'intervalle est tout à fait arbitraire. C'est cependant le plus répandu aujourd'hui. L'intervalle joue le rôle d'une distance dans notre espace-temps à quatre dimensions. En effet une simple application de la transformation de Lorentz (sous la forme d'une rotation hyperbolique) montre immédiatement que l'intervalle est un invariant relativiste.

Dans la géométrie la plus générale, la transformation de Lorentz est combinée avec des rotations ou réflexions d'axes qui conservent la distance spatiale. L'intervalle est donc toujours bien conservé. Il est inchangé dans une transformation de Lorentz, comme la distance ordinaire dans l'espace euclidien est inchangée dans une isométrie.

Si l'intervalle est un invariant relativiste, son signe l'est aussi, bien sûr. Nous distinguerons donc deux types d'intervalles:

- Si $s_{1,2}^2 > 0$, nous dirons que nous avons à faire à un intervalle du genre *temps*. La différence entre les temps des deux événements est supérieure à la distance (en unités convenables). Cela signifie que les deux événements peuvent être reliés par un signal se propageant moins vite que la lumière et qu'il peut donc y avoir un lien de causalité entre eux. En d'autres termes, les deux événements sont dans le cône de lumière l'un de l'autre. Notons que tous les intervalles pris sur la ligne d'univers d'une particule matérielle (et se propageant donc moins vite que la lumière) sont du genre temps.
- Si $s_{1,2}^2 < 0$, la distance spatiale entre les deux événements est plus grande que la distance temporelle. Aucun signal ne peut donc avoir relié les deux événements, ce qui exclut tout lien de causalité (souvenons nous qu'aucune interaction ne peut se propager plus rapidement que la vitesse limite c). Nous dirons alors que nous avons à faire à un intervalle de genre "espace".
- Si $s_{1,2}^2 = 0$, les deux événements peuvent avoir été reliés par un signal se propageant à la vitesse de la lumière. Nous dirons alors que l'intervalle est du genre "lumière".

L'intervalle, ou du moins son signe, est très fortement relié à la notion de causalité. La causalité, qui, en relativité galiléenne n'exigeait que des relations d'antériorité entre la cause et la conséquence, exige maintenant deux conditions. D'abord, la cause et la conséquence doivent être dans le cône de lumière l'une de l'autre pour qu'une interaction ait eu le temps de se propager entre elles. D'autre part, il faut encore que la cause précède la conséquence. Il est donc important que les notions de passé et de futur, à l'intérieur du cône de lumière, soient elles aussi des invariants relativistes.

Pour établir cette invariance sans recourir directement à la transformation de Lorentz (il est facile de montrer que le signe de t est un invariant), considérons le cône de lumière de l'événement O et un événement M dans ce cône de lumière. Nous avons défini le futur de O comme l'ensemble des événements du cône de lumière de O de coordonnée temporelle supérieure à celle de O et nous supposons M situé dans cette partie du cône de lumière. Si, dans un changement de référentiel, M passait dans le passé de O , cela impliquerait qu'il existe un changement de référentiel pour lequel M et O soient confondus. En effet, quel que soit le changement de référentiel, M reste dans le cône de lumière de O . Par continuité, passer du futur au passé de O impose qu'il existe un changement de référentiel amenant M et O à coïncidence. Mais ceci est contraire à l'invariance de l'intervalle, qui deviendrait nul dans ce changement de référentiel, alors qu'il ne l'est pas initialement. Nous en déduisons donc que les notions de passé et de futur sont des invariants relativistes, ce qui est d'une importance cruciale pour que la causalité garde un sens en relativité. Notons que cette invariance ne tient que pour deux événements situés dans le cône de lumière l'un de l'autre. Si ce n'est pas le cas et si les deux événements ne peuvent être reliés par aucun lien de causalité, l'ordre des temps peut être modifié par un changement de référentiel. Bien sûr, on peut aussi démontrer ces propriétés par application directe de la transformation de Lorentz.

Nous allons établir maintenant deux propriétés importantes:

Si deux événements sont séparés par un intervalle de genre temps, il existe un référentiel dans lequel ils se produisent au même endroit.

Considérons donc deux événements dans un référentiel quelconque \mathcal{R} . On peut toujours choisir l'un comme origine et faire en sorte, par un choix d'axes, que l'autre se produise sur l'axe Ox . Leurs coordonnées sont alors $(0, 0)$ et (ct, x) . On a $|ct| > |x|$ puisque leur intervalle est du genre temps. Prenons un nouveau référentiel \mathcal{R}' . Dans ce référentiel, les deux événements se produisent au même

endroit si $x' = \gamma(x - ut) = 0$. Il suffit pour cela que $u = x/t$, qui est bien inférieur à c . Notons que le carré de l'intervalle définit le carré du temps propre, le temps qui s'écoule entre les deux événements dans le référentiel où ils se produisent au même point. Ce temps propre va jouer un rôle essentiel dans la formulation de la dynamique relativiste.

Si les deux événements se produisent au même endroit dans ce référentiel, il peuvent être liés par un lien de causalité. Une autre manière de voir cette propriété est d'imaginer un signal se propageant d'un événement à l'autre. Comme l'intervalle est du genre temps, ce signal se propage moins vite que la lumière. On peut donc lui associer un référentiel qui n'est, d'ailleurs, autre que \mathcal{R}' .

Si deux événements sont séparés par un intervalle du genre espace, il existe un référentiel où ils se produisent simultanément.

Nous emploierons les mêmes notations. Cette fois, $|ct| < |x|$. Dans \mathcal{R}' les deux événements se produisent au même instant si $t' = \gamma(t - ux/c^2) = 0$, c'est à dire si $u = c^2 t/x$, qui est, là encore, plus petit que c . Le fait que les événements se produisent au même instant à des endroits différents prouve qu'ils ne peuvent être liés par un lien de causalité, la relativité n'admettant pas d'action instantanée à distance. On peut voir rapidement que, dans ce cas, le signe de t dépend de la transformation. Comme il n'y a pas de relation de causalité relativiste entre ces événements, leur ordre temporel peut dépendre du référentiel. Notons enfin que le carré de l'intervalle est dans ce cas l'opposé de la distance entre les deux événements dans le référentiel où ils se produisent au même instant. Il s'agit d'une longueur propre, telle que nous la définirons plus précisément dans un instant.

2.3.3 Temps propre, dilatation des temps

Nous pouvons appliquer l'invariance de l'intervalle au problème des horloges en mouvement que nous avons déjà abordé dans notre première expérience de pensée. Nous y avons vu que la période d'une horloge (l'aller et retour d'un signal lumineux) n'était pas la même pour le contrôleur et le chef de gare. Nous allons établir ce résultat de manière plus générale en utilisant l'invariance de l'intervalle.

Considérons donc une particule, ou une horloge, en mouvement arbitraire par rapport à un référentiel \mathcal{R} . Si ce mouvement est accéléré, il n'existe pas de référentiel galiléen dans lequel la particule soit au repos à tout instant. En revanche, on peut considérer à chaque instant le référentiel galiléen dont la vitesse \mathbf{v} coïncide avec celle de la particule. Nous appellerons ce référentiel, \mathcal{R}' , le référentiel tangent au mouvement. A l'instant considéré, on peut faire en sorte que la particule soit située à l'origine O' de \mathcal{R}' , avec une vitesse nulle.

Considérons maintenant un intervalle de temps infinitésimal dt dans \mathcal{R} . Pendant ce temps, la particule se déplace de $d\mathbf{l} = \mathbf{v}dt$. Les deux événements correspondant aux deux extrémités de ce mouvement infinitésimal sont donc séparés par un intervalle

$$ds^2 = c^2 dt^2 - d\mathbf{l}^2 = c^2 dt^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right). \quad (2.30)$$

Considérons maintenant les deux mêmes événements dans \mathcal{R}' , le référentiel tangent. Dans ce référentiel, la vitesse de la particule est nulle. Son déplacement est donc nul au premier ordre en dt' . L'intervalle s'écrit donc aussi:

$$ds^2 = c^2 dt'^2. \quad (2.31)$$

Nous appellerons donc "temps propre" l'intervalle de temps s'écoulant dans \mathcal{R}' et nous le noterons $d\tau = dt'$. En rapprochant les deux expressions précédentes de l'intervalle, nous pouvons écrire

$$dt = \gamma d\tau \quad (2.32)$$

avec

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (2.33)$$

Nous retrouvons, de façon plus générale, que l'intervalle de temps mesuré dans le référentiel tangent ou le référentiel propre dans le cas d'un mouvement uniforme, est plus court que l'intervalle mesuré dans un autre référentiel. Le facteur de "dilatation" du temps est γ , toujours supérieur à un. Il est important de constater à ce point que $d\tau$ est une quantité indépendante de l'observateur. Tout observateur, indépendamment de son état de mouvement par rapport à la particule, peut calculer un intervalle de temps propre à partir d'un intervalle de temps dans son référentiel, et en déduire, par intégration, le temps propre de la particule entre deux événements servant de référence. Le résultat obtenu sera le même pour tous les observateurs (si ils choisissent les mêmes événements de référence). Le temps propre est donc une propriété intrinsèque de la particule. Nous nommerons une telle quantité un 4-scalaire dans le chapitre suivant.

Le raisonnement est fait ici pour des intervalles de temps infinitésimaux. On peut le généraliser à des intervalles arbitraires. A chaque instant, on peut définir un référentiel tangent pour la particule. On peut alors déterminer le "temps propre" de la particule, τ , en intégrant les intervalles de temps propre infinitésimaux. En intégrant aussi la relation entre temps propre et intervalle de temps dans \mathcal{R} , on montrera que la durée propre est toujours inférieure à la durée mesurée dans \mathcal{R} .

Cette "dilatation des temps" a plusieurs conséquences pratiques mesurables qui ont apporté des confirmations éclatantes au principe de relativité.

Considérons d'abord une particule instable de durée de vie (moyenne) T . Dans quel référentiel doit-on utiliser cette durée de vie? Elle n'a bien sûr de signification que dans le référentiel de la particule. C'est en effet une "horloge" interne à la particule qui déclenche sa désintégration. Dans le référentiel du laboratoire, \mathcal{R} , la durée de vie moyenne de la particule sera alors γT (nous supposons, pour fixer les idées, que la particule est en mouvement rectiligne uniforme – γ est donc une constante). Si la vitesse de la particule est très proche de celle de la lumière, le facteur de dilatation temporelle γ est très grand devant un et la durée de vie "vue" dans le référentiel du laboratoire est très grande par rapport à la durée de vie intrinsèque. C'est cet effet qui permet d'observer, dans les chambres à bulles ou à fils, les traces de particules à durée de vie très courte.

La dilatation des temps se manifeste aussi à une échelle de vitesses plus accessible, à condition de disposer d'horloges de haute précision. Le réseau d'horloges atomiques qui fixent le temps international doit périodiquement être recalé. Pour cela, on a transporté physiquement d'un site à l'autre des horloges portables de haute précision. A l'arrivée du voyage, il faut corriger l'horloge mobile de la dilatation relativiste des temps¹¹ que l'on pourra estimer numériquement à titre d'exercice.

Citons également le célèbre "paradoxe des jumeaux", dû à Langevin. De deux frères jumeaux, l'un reste sur terre et l'autre vole vers Proxima du centaure, dont on sait maintenant qu'elle abrite une planète tellurique, à une distance de 4 années lumière, avec une vitesse constante, proche de celle de la lumière. A peine arrivé, le jumeau voyageur fait demi-tour et revient sur Terre à la même vitesse. A l'arrivée, le temps écoulé pour le jumeau terrestre est de huit ans (4 ans pour l'aller, autant pour le retour). En revanche, pour le voyageur, le temps écoulé n'est que de $8/\gamma$ ans, beaucoup plus court. Le jumeau voyageur voit l'étoile de destination s'approcher de lui à une vitesse proche de celle de la lumière. En revanche, elle est initialement beaucoup plus proche de lui que 4 années-lumière. Le jumeau voyageur revient donc sur terre plus jeune que son frère! Le paradoxe apparent est qu'il semble y avoir une parfaite symétrie entre les deux jumeaux, incompatible avec cette différence d'âge: dans le référentiel du voyageur, le jumeau terrestre s'éloigne et se rapproche à grande vitesse.

La "solution" de ce paradoxe apparent est que le référentiel du jumeau voyageur n'est pas un référentiel galiléen. Le temps propre tel que nous l'avons défini n'est pas le temps mesuré dans un référentiel donné. C'est une accumulation de temps infinitésimaux tous calculés dans des référentiels galiléens différents, les référentiels tangents au mouvement accéléré du mobile. Considérer la situation du point de vue du jumeau voyageur reviendrait à définir un temps pour un référentiel bien défini (celui du jumeau voyageur), accéléré. Ceci n'est pas possible dans le cadre de la relativité restreinte. En

¹¹Il faut aussi corriger un effet de "red shift" gravitationnel qui n'est descriptible que dans le cadre de la relativité générale. La fréquence de l'horloge est affectée en effet par le champ de pesanteur terrestre, légèrement diminué en vol.

relativité générale, le temps est affecté par la gravitation ou de manière équivalente par l'accélération. On peut alors effectivement définir un temps pour le jumeau voyageur et retrouver rigoureusement la dissymétrie entre les deux jumeaux.

Cette brève étude du paradoxe des jumeaux introduit naturellement la notion de célérité. Si on désire voyager loin, ce qui importe c'est le temps propre utilisé (celui dans lequel on vieillit) et la distance parcourue dans le référentiel immobile. On peut définir alors une vitesse, que nous nommerons célérité, en termes du temps estimé dans un référentiel et de l'espace estimé dans un autre. De façon évidente, la célérité est le produit de la vitesse ordinaire par le facteur γ de dilatation du temps. Elle peut donc être très supérieure à la vitesse de la lumière, sans que la causalité relativiste ne soit violée puisque la célérité n'est pas une vitesse à proprement parler.

Nous concluons ce paragraphe par une remarque importante pour la dynamique. Si une horloge est immobile dans \mathcal{R} , le temps propre mesuré entre deux événements coïncide avec celui du référentiel. En revanche, si elle est en mouvement, le temps propre entre les deux mêmes événements est toujours inférieur au temps du référentiel (et ce quelle que soit la forme ou la loi horaire de la trajectoire). On en déduit donc que l'intégrale du temps propre entre deux événements est maximale pour une horloge immobile, une propriété qui nous sera fort utile pour formuler un principe variationnel pour la dynamique relativiste.

2.3.4 Contraction des longueurs

Dans cette nouvelle conséquence immédiate de la transformation de Lorentz, nous allons retrouver l'hypothèse heuristique que Lorentz avait introduite pour expliquer le résultat négatif de l'expérience de Michelson.

Le problème que nous abordons ici est celui de la définition de la longueur d'un objet en mouvement. Pour fixer les idées, nous considérons une règle rigide, de longueur L' , immobile dans le référentiel mobile \mathcal{R}' , confondue avec l'axe $O'x'$ (et ayant une extrémité en O'). Comment des observateurs de \mathcal{R} peuvent-ils déterminer la longueur de cette règle? Il y a deux stratégies.

L'observateur O peut d'abord déterminer la vitesse u de la règle, par exemple par vélocimétrie Doppler. Il peut alors mesurer la durée Δt pendant laquelle la règle défile devant lui. Il en déduira alors sa longueur $L = u\Delta t$. On peut aussi prendre une "photographie instantanée" de la règle. En pratique, on repère, à un instant t donné, les observateurs de \mathcal{R} qui sont en face des extrémités de la règle et mesurer leur distance. A titre d'exercice, nous allons examiner ces deux procédures et montrer qu'elles fournissent la même longueur.

Dans la première méthode, les deux événements A et B à considérer sont le passage en O des deux extrémités de la règle. Les coordonnées de ces deux événements dans \mathcal{R}' sont

$$x'_A = t'_A = 0 \quad (2.34)$$

$$x'_B = -L' \quad t'_B = L'/u \quad (2.35)$$

(par convention, l'extrémité O' de la règle passe d'abord devant O). Leurs coordonnées dans \mathcal{R} sont alors:

$$x_A = t_A = 0 \quad (2.36)$$

$$x_B = 0 \quad t_B = \gamma \frac{L'}{u} \left(1 - \frac{u^2}{c^2} \right) = \frac{L'}{\gamma u} . \quad (2.37)$$

On retrouve évidemment que ces deux événements se produisent en O . La durée de passage Δt est égale à t_B , et la longueur L de la règle ainsi mesurée est:

$$L = \frac{L'}{\gamma} . \quad (2.38)$$

Pour la deuxième méthode, on considère les deux événements A et B représentant les extrémités de la règle à un instant donné dans \mathcal{R} . Pour simplifier, nous prendrons l'instant origine. Les coordonnées dans \mathcal{R} de ces événements sont donc:

$$x_A = t_A = 0 \quad (2.39)$$

$$x_B = -L \quad t_B = 0 . \quad (2.40)$$

Leurs coordonnées dans \mathcal{R}' sont donc:

$$x'_A = t'_A = 0 \quad (2.41)$$

$$x'_B = -\gamma L \quad t'_B = \gamma u L / c^2 . \quad (2.42)$$

Comme on doit aussi avoir $x'_B = -L'$, on en déduit encore

$$L = \frac{L'}{\gamma} . \quad (2.43)$$

Les deux procédures conduisent donc, heureusement, à la même longueur. Une règle en mouvement dans la direction de sa longueur “apparaît” donc plus courte que dans un référentiel où elle est au repos (rappelons que la longueur de la règle n’apparaît pas modifiée quand elle est perpendiculaire à Ox). Cette contraction des longueurs est, dans la première méthode, une conséquence directe de la dilatation des temps. Dans la deuxième approche, elle est une conséquence de la non invariance de la simultanéité. Si on regarde les extrémités à un même instant dans \mathcal{R} , on les voit à deux instants différents dans \mathcal{R}' . Qui dit différence sur les temps, dit différence sur les positions.

Notons, pour éclaircir une confusion fréquente¹², que cette contraction des longueurs est spécifique aux protocoles de mesure que nous avons énoncé. La photographie d’un objet en mouvement relativiste, ou la vision qu’a des objets un voyageur relativiste ne donne pas des résultats aussi simples, la propagation de l’objet s’effectuant alors à une vitesse comparable à celle de la lumière qui véhicule l’information entre l’objet et le capteur photographique. Une sphère en mouvement, par exemple, apparaît toujours sous la forme d’une sphère. On trouve facilement sur le net des films présentant en synthèse d’image¹³ des paysages dans lesquels on se déplace à vitesse relativiste. Les déformations sont non triviales et non intuitives, surtout si on y ajoute les modifications de couleur dues à l’effet Doppler.

Une application immédiate de la contraction des longueurs est la définition de la célérité. Reprenons le jumeau voyageur du paradoxe de Langevin. Dans le référentiel fixe, il met 4 ans à atteindre l’étoile la plus proche, à une vitesse proche de celle de la lumière. Dans son référentiel propre, il ne met que $4/\gamma$ ans. Sa vitesse perçue, que nous appellerons célérité, rapport de la distance parcourue dans le référentiel de la terre au temps propre du cosmonaute est donc $\gamma u \approx \gamma c$, bien plus grande que c ¹⁴. Cependant, la vitesse de l’étoile par rapport à lui est égale (en module) à sa vitesse par rapport à la terre et donc proche de c . Si la célérité est plus grande que c , c’est parce que la distance de l’étoile n’est que de $4/\gamma$ années lumière. On pourra, à titre d’exercice, écrire complètement le paradoxe des jumeaux en termes d’événements.

Pour illustrer la notion de contraction des longueurs, considérons un nouveau problème de trains. Un train de longueur L (référentiel propre \mathcal{R}') entre dans un tunnel (immobile) de longueur L exactement égale. \mathcal{R} est le référentiel du tunnel. Train et tunnel sont alignés avec Ox et $O'x'$. A $t = t' = 0$, l’arrière du train passe juste dans l’entrée du tunnel, située en O (ou O'). Que voient le contrôleur et le chef de gare (en mission d’inspection dans le tunnel)? Pour le chef de gare, la longueur du train

¹²Présente y compris dans l’excellent livre de vulgarisation de Gamow, “Mr Tompkins”.

¹³On pourra chercher en particulier “Optical Effects of Special Relativity” sur youtube qui présente en particulier l’ennui mortel qui guette le voyageur relativiste amateur de beaux paysages.

¹⁴Il n’y a là aucun paradoxe puisqu’on forme une vitesse très arbitraire avec le temps d’un référentiel et l’espace d’un autre.

en mouvement est inférieure à celle du tunnel et la locomotive sort du tunnel un peu après que le dernier wagon n'y ait pénétré. Pour le contrôleur, en revanche, c'est le tunnel qui est un peu plus court que le train et la locomotive sort du tunnel avant que le dernier wagon n'y entre. La solution de ce paradoxe apparent est bien sûr dans la non universalité de la simultanéité. Avant et après ne sont pas des absolus pour des points situés à des endroits différents (et qui ne sont pas dans le cône de lumière l'un de l'autre).

Pour nous en convaincre, nous écrirons, dans les deux référentiels, les coordonnées des deux événements importants. L'un représente l'entrée du dernier wagon dans le tunnel et coïncide avec l'événement origine dans les deux référentiels. L'autre événement est la sortie de la locomotive, dont les coordonnées dans \mathcal{R} sont:

$$x_2 = L \quad t_2 = \frac{L}{u} \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) . \quad (2.44)$$

On peut obtenir simplement t_2 en disant que la longueur du train dans \mathcal{R} est L/γ . A l'instant 0, la locomotive est donc à une distance $L(1 - 1/\gamma)$ de la sortie et elle parcourt cette distance à la vitesse u . La sortie de la locomotive dans \mathcal{R} se produit donc bien après l'entrée du dernier wagon. On peut vérifier, par un calcul élémentaire, que le carré de l'intervalle entre les événements 1 et 2 est $c^2(1 - \gamma)/u^2\gamma^2$, négatif. L'intervalle entre les événements est toujours du genre espace. La notion de passé et de futur pour ces deux événements n'est donc pas nécessairement invariante.

On peut alors écrire les coordonnées correspondantes dans \mathcal{R}' . Après un calcul sans difficulté, on trouve:

$$x'_2 = L , \quad (2.45)$$

ce qui ne fait guère que vérifier la cohérence du calcul et

$$t'_2 = -\frac{L}{u} \frac{\gamma - 1}{\gamma} . \quad (2.46)$$

L'événement 2 (sortie de la locomotive) s'est donc produit, dans \mathcal{R}' , avant que l'arrière du train n'entre dans le tunnel, comme nous nous y attendions. Si il y a dans ce problème un paradoxe, il ne concerne pas la validité et la cohérence de la transformation de Lorentz. Ce n'est que la différence entre les prédictions de la relativité sur le temps et notre sens commun qui crée l'apparence paradoxale de ces situations. Ce n'est qu'avec une fréquentation assidue de ce genre de problèmes que peut se développer une intuition relativiste. Le problème est similaire, bien que moins ardu, à celui qu'on rencontre pour se forger une intuition en mécanique quantique.

2.3.5 Composition des transformations

Revenons à la situation déjà évoquée de trois référentiels en mouvement relatif. La loi de composition des rapidités nous permet d'écrire de manière évidente:

$$\phi(w) = \phi(u) + \phi(v) . \quad (2.47)$$

Nous pouvons en tirer facilement la loi de composition des vitesses relativistes, sous une forme simplifiée correspondant à des vitesses qui sont toutes colinéaires, en écrivant w en fonction de u et v . Il suffit pour cela de prendre le cosh et le sinh de l'équation précédente. On obtient alors:

$$\sinh \phi(w) = \beta(w)\gamma(w) = \gamma(u)\gamma(v)(\beta(u) + \beta(v)) \quad (2.48)$$

$$\cosh \phi(w) = \gamma(w) = \gamma(u)\gamma(v)(1 + \beta(u)\beta(v)) , \quad (2.49)$$

d'où on tire immédiatement:

$$\beta(w) = \frac{\beta(u) + \beta(v)}{1 + \beta(u)\beta(v)} , \quad (2.50)$$

qu'on aurait pu déduire aussi de la loi d'addition des tangentes hyperboliques, ou encore

$$w = \frac{u + v}{1 + uv/c^2}, \quad (2.51)$$

Cette loi remplace la simple addition des vitesses de la relativité galiléenne. Notons là encore qu'on retrouve la loi galiléenne d'addition des vitesses pour la composition de vitesses toutes deux petites devant celle de la lumière. Remarquons également que cette loi prédit correctement l'invariance de la vitesse de la lumière: si $\beta(u) = 1$ ou si $\beta(v) = 1$, on trouve immédiatement $\beta(w) = 1$. Cela montre aussi qu'on ne peut dépasser la vitesse de la lumière en courant dans le couloir d'un train se déplaçant à une vitesse proche de c . Encore une fois, si l'accumulation de vitesses ne peut conduire à une vitesse supérieure à celle de la lumière, les rapidités s'accumulent sans limite.

Nous pouvons généraliser cette loi à une situation physique légèrement différente. Un mobile est en mouvement avec une vitesse \mathbf{v}' dans le référentiel \mathcal{R}' , entraîné à une vitesse u (selon Ox) par rapport au référentiel \mathcal{R} . En écrivant les accroissements infinitésimaux dx', dy', dz' et dt' dans \mathcal{R}' et en utilisant la transformation de Lorentz, on en déduit les accroissements correspondants dans \mathcal{R} :

$$dx = \gamma(dx' + udt') \quad (2.52)$$

$$dt = \gamma(dt' + udx'/c^2) \quad (2.53)$$

$$dy = dy' \quad (2.54)$$

$$dz = dz' . \quad (2.55)$$

On peut alors calculer sans difficultés les vitesses dans \mathcal{R} . On obtient:

$$v_x = \frac{v'_x + u}{1 + uv'_x/c^2} \quad (2.56)$$

$$v_y = \frac{v'_y}{\gamma(1 + uv'_x/c^2)}, \quad (2.57)$$

la transformation inverse s'obtenant trivialement en changeant le signe de u dans les expressions précédentes. On vérifiera, à titre d'exercice, que la vitesse de la lumière est bien invariante dans cette transformation.

Nous étudierons ici une application immédiate de la loi de composition des vitesses. La lumière provenant d'une étoile apparaît déviée par la composition de sa vitesse avec celle du référentiel terrestre par rapport au système solaire. La position apparente d'une étoile dans le ciel dépend donc dans une petite mesure de la position de la terre sur son orbite (chaque étoile semble décrire une petite ellipse annuelle autour de sa position moyenne). Pour simplifier la géométrie, nous considérerons le référentiel \mathcal{R} comme celui lié au système solaire. La lumière de l'étoile arrive parallèlement à l'axe Oy . La vitesse de cette lumière est donc $v_y = -c$.

Le référentiel \mathcal{R}' est celui de la terre, entraîné à la vitesse u selon Ox . De la loi de composition des vitesses, on déduit les composantes de la vitesse de la lumière de cette étoile dans le référentiel \mathcal{R}' :

$$v'_x = -u \quad (2.58)$$

$$v'_y = -\frac{c}{\gamma} \quad (2.59)$$

On "voit" donc dans \mathcal{R}' la lumière de l'étoile provenir d'une direction inclinée par rapport à l'axe $O'y'$, d'un angle $\theta = \arctan \beta\gamma$. L'application de la cinématique galiléenne prévoit aussi une déviation apparente mais elle n'est, comme on le vérifiera aisément, que $\theta = \arctan \beta$. La différence entre ces deux quantités est mesurable et son observation fut une belle confirmation de la relativité restreinte.

Dans le même genre de situation, nous aurions pu nous intéresser aussi à la fréquence de la lumière reçue. Nous l'aurions trouvée modifiée, d'une quantité différente de l'effet Doppler classique (il existe en particulier un effet Doppler du second ordre pour une vitesse d'entraînement perpendiculaire à la propagation). Nous pourrions traiter ce problème plus efficacement quand nous aurons introduit, au chapitre suivant, les notations tensorielles.

2.3.6 Vitesse, célérité et rapidité

Nous sommes maintenant en possession de trois quantités différentes décrivant le mouvement d'un référentiel par rapport à un autre. Il n'est que temps d'examiner les différences entre ces quantités et de préciser leur sens physique.

La première définition de la vitesse relative de \mathcal{R}' (le référentiel du contrôleur, pour reprendre le vocabulaire ferroviaire) par rapport à \mathcal{R} (le chef de gare) est la vitesse u , vitesse de l'origine O' dans \mathcal{R} . Imaginons, pour bien insister sur le sens physique de ces quantités, que le contrôleur désire déterminer sa vitesse. La première méthode est de repérer, sur les horloges de deux gares successives, ses temps de passage. La liste des tarifs, imprimée dans \mathcal{R} , lui donnant la distance (mesurée dans \mathcal{R}) entre ces gares, il en déduira sa vitesse. Cette vitesse, mesurée dans l'espace de \mathcal{R} avec le temps de \mathcal{R} , ou dans l'espace de \mathcal{R}' avec le temps de \mathcal{R}' , est bien entendu la vitesse u .

L'autre définition que nous avons déjà rencontrée est celle de la célérité, γu ou $\gamma\beta = \sinh \phi$ en unités réduites. Rappelons que c'est la définition qui intéresse le voyageur interstellaire, puisqu'elle mesure la distance parcourue dans le référentiel fixe par unité de temps du mobile. Cette vitesse est celle que déterminerait le contrôleur en mesurant la durée qui s'écoule entre les deux gares avec sa propre montre. Notons enfin que célérité et vitesse sont identiques en relativité galiléenne, en raison de l'universalité du temps.

Nous sommes maintenant en possession d'une troisième "définition" de la vitesse en termes de la rapidité, $c\phi(u)$. Si nous savons déjà que son intérêt réside dans son caractère additif, à quelle expérience correspondrait-elle?

Le contrôleur dispose d'une troisième méthode pour déterminer sa vitesse, même si les vitres sont occultées. Supposons qu'il soit initialement immobile dans la première gare mais qu'il dispose d'un accéléromètre (un simple fil à plomb lui suffirait). Cet accéléromètre mesure la variation de la vitesse du train par unité de temps du train (ce temps est un temps propre). En intégrant les indications de l'accéléromètre sur toute la phase d'accélération, le contrôleur pourra déterminer sa vitesse finale.

On peut traiter ce cas très simple de cinématique d'un mouvement accéléré sans recourir à la relativité générale. Le référentiel du train n'est plus galiléen. Nous considérerons en revanche comme référentiel \mathcal{R}' le référentiel tangent au mouvement pour une valeur du temps propre τ (obtenu, rappelons-le, par intégration des temps propres dans les référentiels tangents successifs). A un instant donné, la vitesse de ce référentiel par rapport à \mathcal{R} est v , qui passe de 0 à u pendant la phase d'accélération. Pendant un intervalle de temps infinitésimal $d\tau$, la vitesse du train dans le référentiel tangent passe de 0 à dv' . L'accélération mesurée dans le train (ou plutôt dans le référentiel tangent) vaut donc $a' = dv'/d\tau$. Pendant l'intervalle de temps correspondant, la vitesse dans \mathcal{R} passe de v à $v + dv$. En utilisant la loi de composition des vitesses du paragraphe précédent, nous pouvons écrire l'accroissement de vitesse dv' dans \mathcal{R}' en fonction de la nouvelle vitesse dans \mathcal{R} ($v + dv$) et de la vitesse v de \mathcal{R}' par rapport à \mathcal{R} :

$$dv' = \frac{v + dv - v}{1 - v(v + dv)/c^2}, \quad (2.60)$$

soit encore

$$dv' = \frac{dv}{1 - v^2/c^2}. \quad (2.61)$$

La vitesse finale mesurée par cette méthode sera donc:

$$\int a' d\tau = \int \frac{dv}{1 - v^2/c^2} = c \operatorname{arctanh} \frac{u}{c}. \quad (2.62)$$

Elle coïncide donc avec la définition de la rapidité, qui prend ainsi un sens physique très fort. Cette définition en termes d'accélération accumulée nous fait comprendre pourquoi la rapidité n'est pas bornée. On peut en effet avoir un mouvement indéfiniment accéléré en relativité restreinte (nous écrirons ce mouvement pour décrire celui de particules chargées soumises à une force constante dans

un champ électrique uniforme). La vitesse tend asymptotiquement vers c , l'accélération habituelle (mesurée dans le référentiel fixe) tend vers zéro mais l'accélération mesurée comme ci-dessus demeure constante et la rapidité s'accumule. Notons pour finir qu'en relativité galiléenne la rapidité et la vitesse coïncident aussi.

Chapitre 3

Notations Quadridimensionnelles

Nous allons introduire dans ce chapitre des notions mathématiques permettant de traiter la relativité restreinte d'une façon particulièrement aisée. En nous plaçant dans un espace-temps à quatre dimensions, en le munissant d'une structure d'espace vectoriel, d'un produit scalaire, d'une norme et d'un espace dual, nous pourrons réinterpréter d'une façon très efficace les notions introduites dans le chapitre précédent. Les objets physiques, indépendants du choix du référentiel, seront alors décrits comme des vecteurs, ou, plus généralement des tenseurs (matrices) dans cet espace. La transformation de Lorentz apparaîtra alors comme un simple changement de base. Les lois de transformation de toutes les quantités physiques se déduiront alors simplement des règles de changement de base. Pour manipuler commodément ces vecteurs et ces tenseurs, nous introduirons également des notations très puissantes dues à Einstein. Nous allons commencer par introduire la notion d'espace temps à partir de l'événement.

3.1 4-vecteur position d'un événement.

3.1.1 Coordonnées contravariantes

Un événement, le phénomène le plus élémentaire de la relativité, existe indépendamment de tout référentiel. Dans un référentiel \mathcal{R} donné, on peut le caractériser complètement par les quatre nombres (ct, x, y, z) . Dans un autre référentiel, nous aurions un autre quadruplet de composantes, la transformation de Lorentz décrivant le passage d'un quadruplet à l'autre. Nous considérerons donc l'événement comme un vecteur dans un espace de dimension 4 (espace de Minkowski, M) dont les différents jeux de composantes correspondent à des décompositions sur des bases différentes. Le changement de référentiel apparaît dans ce vocabulaire comme un simple changement de base.

Dans l'espace vectoriel M à quatre dimensions, muni d'une base \mathbf{e}_μ (l'indice μ variant entre 0 et 3), le "4-vecteur" associé à l'événement peut s'écrire:

$$\mathbf{R} = \sum_{\mu} x^{\mu} \mathbf{e}_{\mu} , \quad (3.1)$$

en posant

$$x^0 = ct, \quad x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z . \quad (3.2)$$

Nous appellerons les x^{μ} les composantes contravariantes du 4-vecteur événement \mathbf{R} (nous utiliserons de manière systématique des lettres majuscules pour les objets de l'espace M). Par convention, dans toute la suite, on utilisera des indices supérieurs pour représenter ces composantes (le risque de confusion avec des exposants est pratiquement nul). Par convention aussi, nous ne préciserons pas le domaine sur lequel s'effectuent les sommations. Un indice représenté par une lettre grecque variera toujours entre 0 et 3 (0 représentant la coordonnée temporelle). Quand nous aurons besoin d'un

indice ne parcourant que les valeurs 1 à 3 (et donc associé à de simples composantes spatiales), nous utiliserons un indice romain¹:

$$x^i = x^{1,2,3} . \quad (3.3)$$

L'écriture systématique des signes somme serait extrêmement fastidieuse, surtout quand nous manipulerons, avec les tenseurs, des sommes multiples. Nous adopterons donc la convention d'Einstein de *sommation sur les indices répétés*. Quand, dans une expression, un même indice apparaît en haut et en bas, on doit sommer l'expression sur toutes les valeurs possibles de cet indice (0 à 3 pour un indice grec, 1 à 3 pour un indice romain). On écrira donc simplement:

$$\mathbf{R} = \sum_{\mu} x^{\mu} \mathbf{e}_{\mu} = x^{\mu} \mathbf{e}_{\mu} . \quad (3.4)$$

Insistons sur le fait, dont la raison apparaîtra plus clairement plus tard, que l'on ne somme implicitement sur un indice que s'il apparaît *une fois en haut et une fois en bas*. Le même indice apparaissant deux fois en bas ne doit pas être sommé. Une écriture comme $T_{\mu\mu}$, par exemple, représentera un élément diagonal d'un tenseur (disons à ce stade d'une matrice) et pas une somme. La trace de cette matrice s'écrirait T_{μ}^{μ} , la convention de somme s'appliquant alors à l'indice répété. Nous verrons dans la suite de cet exposé à quel point cette simple convention de sommation implicite améliore les écritures.

Nous appellerons indice "libre" un indice sur lequel la règle de sommation ne s'applique pas (qui donc reste en tant qu'indice dans l'expression finale) et "muet" un indice faisant l'objet d'une sommation implicite (et n'apparaissant pas en tant que tel dans l'expression finale²). Nous respecterons, pour les indices libres, la règle de "balancement". Dans une équation, les indices libres apparaissant dans les deux membres doivent se correspondre un à un et apparaître en même position (haut ou bas). Nous comprendrons plus tard que, si ce n'était pas le cas, les objets décrits par les deux membres de l'équation ne seraient pas de même nature.

Ces règles de sommation et de balancement, qui portent sur la typographie des équations, constituent en fait, en plus d'une simplification notable, un système de garde-fous rendant impossible l'écriture d'expressions absurdes. Elles jouent en relativité le rôle des notations de Dirac de la mécanique quantique qui relie de façon univoque la nature de l'objet (fonction d'onde, objet du dual, produit scalaire, opérateur) à son écriture (ket, bra, bra ket, ket bra).

Nous pouvons munir notre espace-temps d'un produit scalaire, bien sûr commutatif. Considérant deux 4-vecteurs associés à deux événements, $\mathbf{R} = x^{\mu} \mathbf{e}_{\mu}$ et $\mathbf{S} = y^{\nu} \mathbf{e}_{\nu}$, nous pouvons écrire le produit scalaire comme

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{S} = x^{\mu} y^{\nu} \mathbf{e}_{\mu} \cdot \mathbf{e}_{\nu} . \quad (3.5)$$

En posant un tableau de nombres à deux indices:

$$g_{\mu\nu} = \mathbf{e}_{\mu} \cdot \mathbf{e}_{\nu} = g_{\nu\mu} , \quad (3.6)$$

le produit scalaire s'écrit:

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{S} = g_{\mu\nu} x^{\mu} y^{\nu} \quad (3.7)$$

(où l'on voit bien la simplification apportée par la convention de sommation implicite).

Nous souhaiterions bien sûr que notre produit scalaire ait une expression compatible avec celle de l'intervalle. Il faut pour cela que $\mathbf{R} \cdot \mathbf{R} = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2$. Nous aurons un produit scalaire

¹Cette convention est très largement répandue dans les manuels récents. Signalons cependant que le Landau de théorie des champs, dont nous recommandons la lecture, utilise une convention strictement inverse.

²Remarquons à ce propos que le nom d'un indice muet n'a aucune importance dans l'écriture et que ce nom peut être changé librement (sous réserve d'éviter les ambiguïtés).

convenable si $g_{\mu\nu}$ (que nous ne pouvons encore considérer comme un opérateur ou un tenseur – et que nous nommerons néanmoins le “tenseur métrique”) s’écrit:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

Dans ce tableau, μ est l’indice ligne et ν l’indice colonne. Cette convention sur le tenseur métrique peut aussi être vue comme une condition d’orthonormalité pour la base \mathbf{e}_μ . Nous ne considérerons dans la suite que des bases “orthonormées” dans ce sens. Notons également que le carré scalaire ne conduit pas à une norme définie positive (nous savons bien que le carré d’un intervalle de genre espace est négatif). Le tenseur métrique, qui n’apparaît ici que comme une notation commode dans l’écriture du produit scalaire de deux événements, est une des notions centrales en relativité générale, puisqu’il constitue la variable dynamique du champ de gravitation.

Cette écriture du produit scalaire peut être rendue plus compacte encore en introduisant la notion de coordonnée covariante.

3.1.2 Coordonnées covariantes

Posons:

$$y_\mu = g_{\mu\nu} y^\nu . \quad (3.9)$$

Avant d’aller plus avant, commentons le fonctionnement des règles de sommation sur cette expression. L’indice répété (haut et bas) dans le membre de droite est ν . On doit donc sommer sur toutes les valeurs de cet indice. L’indice μ est un indice libre, qui apparaît sous le même nom et dans la même position (basse) dans les deux membres de l’équation. Nous appellerons “coordonnées covariantes de l’événement” les composantes y_μ .

En pratique, les règles de correspondance entre composantes contravariantes et composantes covariantes sont très simples: $y_0 = y^0$, $y_i = -y^i$. Le tenseur métrique nous permet d’abaisser (ou d’élever pour la transformation inverse) les indices. Les écritures précédentes révèlent une règle très générale: l’abaissement ou l’élévation d’un indice spatial change le signe, alors que l’élévation ou l’abaissement d’un indice temporel ne s’accompagne pas d’un changement de signe.

Avec ces notations, le produit scalaire de deux 4-vecteurs s’écrit simplement:

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{S} = x^\mu y_\mu \quad (3.10)$$

mais aussi

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{S} = x_\mu y^\mu \quad \text{avec} \quad x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu , \quad (3.11)$$

et

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{e}_\mu = x^\nu \mathbf{e}_\nu \cdot \mathbf{e}_\mu = g_{\nu\mu} x^\nu = x_\mu . \quad (3.12)$$

Le mérite de ces notations est donc de dissimuler les conventions de signes du tenseur métrique dans la définition des coordonnées covariantes et d’obtenir un produit scalaire s’écrivant “normalement”. On peut bien sûr écrire la transformation inverse, donnant les coordonnées contravariantes en fonction des coordonnées covariantes. En définissant un nouveau “tableau de nombres” $g^{\nu\mu}$ par:

$$y^\nu = g^{\nu\mu} y_\mu , \quad (3.13)$$

on peut écrire:

$$y^\nu = g^{\nu\mu} y_\mu = g^{\nu\mu} g_{\mu\sigma} y^\sigma . \quad (3.14)$$

Les $g^{\mu\nu}$ sont donc tels que:

$$g^{\nu\mu} g_{\mu\sigma} = \delta_\sigma^\nu , \quad (3.15)$$

où les symboles δ_σ^ν sont de simples symboles de Kronecker (1 si les deux indices sont égaux, 0 sinon). En termes de matrices, la matrice des $g^{\mu\nu}$ est donc l'inverse de la matrice $g_{\mu\nu}$. Elle lui est donc manifestement égale:

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (3.16)$$

A titre d'exercice, montrons que les deux écritures du produit scalaire de l'équation (3.11) sont bien équivalentes:

$$x^\mu y_\mu = g^{\mu\nu} x_\nu g_{\mu\rho} y^\rho = g^{\mu\nu} g_{\mu\rho} x_\nu y^\rho = g^{\nu\mu} g_{\mu\rho} x_\nu y^\rho = \delta_\rho^\nu x_\nu y^\rho = x_\nu y^\nu, \quad (3.17)$$

la première et la dernière expression étant bien sûr équivalentes, puisque le nom d'un indice muet n'a aucune importance. Nous avons utilisé ici explicitement la symétrie du tenseur métrique par une permutation des indices.

3.1.3 Coordonnées covariantes, contravariantes et dualité

Nous avons introduit dans le paragraphe précédent les coordonnées covariantes comme une simple commodité de notation. En fait, elles ont une signification mathématique beaucoup plus profonde et plus fructueuse en terme de dualité. Nous allons donc rappeler quelques propriétés essentielles de la dualité (une notion d'algèbre linéaire qui joue aussi un rôle central en mécanique quantique, puisqu'elle fonde la correspondance entre les kets de l'espace de Hilbert et les bras de son dual).

Sur un espace vectoriel M , nous pouvons définir des *formes linéaires*. Une forme linéaire associe à tout vecteur un nombre réel (complexe dans le cas des espaces de Hilbert). On notera \tilde{R} une forme linéaire et $\tilde{R}(\mathbf{S})$ le nombre réel associé au vecteur \mathbf{S} . Une forme linéaire est, comme son nom l'indique, une fonction linéaire de son argument vectoriel. On a donc des relations telles que: $\tilde{R}(\mathbf{S} + \mathbf{T}) = \tilde{R}(\mathbf{S}) + \tilde{R}(\mathbf{T})$ (le lecteur rétablira aisément l'ensemble des règles convenables).

On peut définir sur l'ensemble des formes linéaires une addition (simple addition des images) et la multiplication par un scalaire réel. Ces deux opérations confèrent à l'ensemble des formes linéaires une structure d'espace vectoriel. Nous l'appellerons l'espace *dual* de notre espace vectoriel initial (nous noterons M^* le dual de l'espace M).

On montre que, si M est de dimension finie, le dual est de même dimension, 4 ici. On peut de plus, si M est muni d'un produit scalaire, définir une bijection entre l'espace et le dual. On associe à chaque vecteur \mathbf{R} la forme linéaire \tilde{R} définie par $\tilde{R}(\mathbf{S}) = \mathbf{R} \cdot \mathbf{S}$. A chaque vecteur est associée une forme linéaire et chaque forme linéaire peut s'écrire comme un produit scalaire avec un vecteur fixe. Les propriétés de linéarité du produit scalaire assurent que cette bijection est un isomorphisme entre l'espace et son dual. Cette relation très forte fait que l'on peut considérer un même objet soit comme un vecteur, soit comme une forme linéaire. En particulier, nous pourrions, dans l'espace temps à quatre dimensions, considérer au choix un événement comme un vecteur ou comme une forme linéaire. En fait, nous confondrons souvent les deux représentations en un seul objet.

Dans l'espace dual, nous pouvons choisir une base. Nous choisirons la base $\tilde{\epsilon}^\mu$ définie par:

$$\tilde{\epsilon}^\mu(\mathbf{e}_\nu) = \delta_\nu^\mu. \quad (3.18)$$

Cette expression ne fait intervenir aucune sommation implicite. Notons que les $\tilde{\epsilon}^\mu$ diffèrent des formes associées aux vecteurs de base par le signe, quand l'indice μ est spatial. En effet

$$\mathbf{e}_\nu \cdot \mathbf{R} = \mathbf{e}_\nu \cdot \mathbf{e}_\mu x^\mu = g_{\nu\mu} x^\mu = x_\nu, \quad (3.19)$$

et

$$\tilde{\epsilon}^\nu(\mathbf{R}) = \tilde{\epsilon}^\nu(x^\mu \mathbf{e}_\mu) = x^\mu \tilde{\epsilon}^\nu(\mathbf{e}_\mu) = x^\mu \delta_\mu^\nu = x^\nu \neq x_\nu. \quad (3.20)$$

On a donc:

$$\tilde{\epsilon}^\nu(\mathbf{R}) = x^\nu \quad \text{et} \quad \mathbf{R} \cdot \mathbf{e}_\mu = x_\mu . \quad (3.21)$$

Nous pouvons alors former, à partir d'un 4-vecteur événement $\mathbf{R} = x^\mu \mathbf{e}_\mu$, la forme linéaire $x_\mu \tilde{\epsilon}^\mu$. L'action de cette forme sur le 4-vecteur $\mathbf{S} = y^\mu \mathbf{e}_\mu$ s'écrit alors $x_\mu \tilde{\epsilon}^\mu(y^\nu \mathbf{e}_\nu) = x_\mu y^\mu = \mathbf{R} \cdot \mathbf{S}$. La forme ainsi construite coïncide donc avec la forme linéaire \tilde{R} associée au vecteur \mathbf{R} . Si les composantes contravariantes sont les composantes du 4-vecteur, les composantes covariantes sont les composantes de la forme linéaire associée à ce vecteur sur la base duale. Ceci donne à ces composantes une signification mathématique beaucoup plus forte qu'une simple convention de signe. Comme nous pouvons confondre vecteur et forme linéaire en un seul objet physique, les composantes contravariantes et covariantes ne sont que deux écritures différentes d'une même quantité.

D'un point de vue "typographique", notons que les indices sont en bas pour les bases dans l'espace d'origine, en haut pour les bases dans l'espace dual, alors que les composantes dans l'espace d'origine (contravariantes) ont des indices en haut et les composantes dans l'espace dual (covariantes) des indices en bas. On comprend bien ici l'origine mathématique des règles de sommation sur les indices. N'écrire de sommations implicites que si l'un des indices est en haut et l'autre en bas, c'est reconnaître que la seule opération légitime est l'action d'une forme linéaire sur un vecteur (ou, autrement dit, le produit scalaire).

3.1.4 Changement de référentiel, changement de base

Un changement de référentiel transforme, comme nous l'avons vu au chapitre précédent, les coordonnées contravariantes d'un événement par la transformation de Lorentz. Nous allons d'abord exprimer cette transformation pour les coordonnées contravariantes et en déduire les transformations des coordonnées covariantes. Nous profiterons, pour ces écritures, de nos nouvelles notations. Nous reviendrons ensuite sur les transformations des vecteurs de base pour notre espace-temps et nous verrons que la transformation de Lorentz est bien un simple changement de base orthonormée.

Les transformations que nous considérerons dans ce chapitre sont tout à fait générales. Elles englobent la forme spéciale de la transformation de Lorentz mais elles contiennent aussi les rotations, réflexions d'espace etc. constituant le groupe de Lorentz complet. Toutefois, quand nous expliciterons la forme des transformations, nous nous limiterons à la forme spéciale. Le passage au cas général ne pose que des problèmes d'écriture.

On peut écrire la transformation de Lorentz pour les coordonnées contravariantes comme:

$$x'^\mu = \mathcal{L}^\mu{}_\nu x^\nu , \quad (3.22)$$

où les x^ν sont les composantes contravariantes de l'événement dans le référentiel \mathcal{R} et les x'^μ les composantes contravariantes dans le nouveau référentiel \mathcal{R}' . Dans l'expression ci-dessus, il convient donc d'associer l'indice ligne, μ , au nouveau référentiel et l'indice colonne, ν à l'ancien. En considérant, dans le tableau de nombres $\mathcal{L}^\mu{}_\nu$, l'indice μ (relatif donc au nouveau référentiel) comme un indice ligne et l'indice ν (relatif à l'ancien référentiel) comme un indice colonne, l'expression (3.22) apparaît comme un simple produit matriciel. Dans le cas de la forme spéciale de la transformation, on a simplement:

$$\mathcal{L}^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} , \quad (3.23)$$

qu'on pourrait encore écrire en termes de la rapidité ϕ , paramètre additif du groupe de Lorentz. La transformation inverse peut a priori s'écrire

$$x^\mu = (\mathcal{L}^{-1})^\mu{}_\nu x'^\nu , \quad (3.24)$$

La matrice inverse \mathcal{L}^{-1} s'obtenant simplement en changeant le signe de β dans les expressions précédentes.

Examinons maintenant la loi de transformation des coordonnées covariantes (dans l'espace dual). Définissons un nouveau "tableau de nombres" \mathcal{L}_μ^ν par:

$$x'_\mu = \mathcal{L}_\mu^\nu x_\nu . \quad (3.25)$$

Notons tout de suite que \mathcal{L}_μ^ν est forcément différent de \mathcal{L}^μ_ν . L'ordre et la position (haute ou basse) des indices sont donc tous deux essentiels pour définir les quantités que nous manipulons. On peut déduire le lien entre \mathcal{L}_μ^ν et \mathcal{L}^μ_ν de l'invariance du produit scalaire (qui découle de l'invariance de l'intervalle). On a en effet:

$$x'^\mu y'_\mu = x^\nu y_\nu \quad \text{avec} \quad x'^\mu = \mathcal{L}^\mu_\rho x^\rho \quad \text{et} \quad y'_\mu = \mathcal{L}_\mu^\sigma y_\sigma . \quad (3.26)$$

On en déduit donc:

$$\mathcal{L}^\mu_\rho x^\rho \mathcal{L}_\mu^\sigma y_\sigma = x^\mu y_\mu = x^\rho y_\rho = x^\rho y_\sigma \delta_\rho^\sigma . \quad (3.27)$$

Cette relation devant être vérifiée pour tout couple de vecteurs, on a:

$$\mathcal{L}^\mu_\rho \mathcal{L}_\mu^\sigma = \delta_\rho^\sigma . \quad (3.28)$$

Notons que le membre de gauche de cette équation ne décrit pas un produit de matrices. En toute rigueur, on effectue la sommation sur deux indices lignes. Dans le cas de la forme spéciale de la transformation de Lorentz, les matrices sont symétriques et la matrice de transformation des coordonnées covariantes est simplement l'inverse de la matrice de transformation des coordonnées contravariantes, inverse que l'on obtient en changeant le signe de la vitesse relative. On aurait pu établir ce résultat en remarquant simplement que le passage des coordonnées contravariantes aux coordonnées covariantes est un simple changement de signe pour les composantes spatiales. On change donc, dans la matrice de transformation, le signe des éléments spatio-temporels. Dans la forme spéciale de la transformation de Lorentz, cela revient à changer le signe de β .

On peut préciser encore le lien entre ces deux transformations en faisant intervenir le tenseur métrique dans l'expression du produit scalaire:

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{S} = x^\rho g_{\rho\sigma} y^\sigma = x'^\mu g_{\mu\nu} y'^\nu . \quad (3.29)$$

Le tenseur métrique qui exprime l'orthogonalité de la base est en effet évidemment le même dans toutes les bases et donc invariant dans une transformation de Lorentz. En exprimant les nouvelles coordonnées en fonction des anciennes, on a:

$$x^\rho g_{\rho\sigma} y^\sigma = \mathcal{L}^\mu_\rho x^\rho g_{\mu\nu} \mathcal{L}^\nu_\sigma y^\sigma . \quad (3.30)$$

Cette relation étant vérifiée quels que soient \mathbf{R} et \mathbf{S} , on en déduit:

$$g_{\rho\sigma} = \mathcal{L}^\mu_\rho g_{\mu\nu} \mathcal{L}^\nu_\sigma . \quad (3.31)$$

Le déterminant de la matrice représentant le tenseur métrique étant -1 , on retrouve à partir de cette expression que le déterminant de la matrice représentant la transformation de Lorentz est ± 1 (rappelons qu'il n'est négatif que si la transformation fait intervenir une réflexion d'espace ou de temps). On peut mettre la dernière relation sous une forme plus parlante en multipliant les deux membres par $g^{\tau\rho}$ et en effectuant les sommations:

$$g^{\tau\rho} g_{\rho\sigma} = \delta_\sigma^\tau = g^{\tau\rho} \mathcal{L}^\mu_\rho g_{\mu\nu} \mathcal{L}^\nu_\sigma , \quad (3.32)$$

et donc:

$$(g^{\tau\rho} g_{\mu\nu} \mathcal{L}^\mu_\rho) \mathcal{L}^\nu_\sigma = \delta_\sigma^\tau . \quad (3.33)$$

En rapprochant cette équation de (3.28) en utilisant la symétrie de g , on voit que:

$$\mathcal{L}_\nu^\tau = g_{\nu\mu} g^{\tau\rho} \mathcal{L}^\mu_\rho . \quad (3.34)$$

D'un point de vue purement typographique, l'interprétation de cette relation est transparente. Nous savons, pour les coordonnées simples, que l'application d'un tenseur métrique avec les indices hauts transforme une coordonnée covariante (indice bas) en une coordonnée contravariante (indice haut). Elever les indices nécessite l'action d'un tenseur métrique à indices hauts (nous dirons complètement contravariant). De même un tenseur métrique complètement covariant (indices bas) abaisse l'indice, transformant une coordonnée contravariante en une coordonnée covariante. La relation que nous venons d'établir pour les changements de base généralise ce principe. Pour passer de \mathcal{L}^μ_ρ , avec le premier indice en haut et le second en bas, à \mathcal{L}_ν^τ , il faut appliquer deux tenseurs métriques, l'un complètement contravariant qui élève l'indice colonne, l'autre complètement covariant qui abaisse l'indice ligne. Si on fait confiance à ces règles typographiques, l'établissement détaillé de (3.34) est inutile et on peut écrire cette transformation a priori. On écrira ainsi la relation inverse:

$$\mathcal{L}^\nu_\tau = g_{\tau\rho} g^{\rho\mu} \mathcal{L}^\mu_\sigma . \quad (3.35)$$

Remarquons que la forme très simple du tenseur métrique rend triviales les modifications dans un abaissement ou une élévation d'indice. Comme pour les coordonnées, le changement de position d'un indice spatial change le signe alors qu'un indice temporel ne change pas le signe. Dans le passage d'une transformation à l'autre, seuls changent de signe les coefficients spatio-temporels. Les coefficients spatiaux et temporels sont inchangés. C'est bien ce qu'on observe sur la forme spéciale de la transformation de Lorentz.

On pourrait penser alors ne faire agir sur les transformations de Lorentz qu'un tenseur métrique et à définir deux nouvelles quantités:

$$\mathcal{L}^{\mu\tau} = g^{\tau\rho} \mathcal{L}^\mu_\rho \quad (3.36)$$

$$\mathcal{L}_{\mu\sigma} = g_{\mu\nu} \mathcal{L}^\nu_\sigma . \quad (3.37)$$

En fait ces nouvelles quantités décrivent, comme nous allons le voir, le passage simultanément d'un référentiel à l'autre et d'un type de coordonnées à l'autre. On a en effet:

$$x'^\mu = \mathcal{L}^\mu_\rho x^\rho = \mathcal{L}^\mu_\rho g^{\rho\nu} x_\nu = \mathcal{L}^{\mu\nu} x_\nu , \quad (3.38)$$

où l'indice ligne est toujours relatif au nouveau référentiel et l'indice colonne à l'ancien. De même:

$$x'_\mu = \mathcal{L}_{\mu\nu} x^\nu . \quad (3.39)$$

On peut enfin utiliser la relation (3.28) pour exprimer le changement de référentiel inverse sans faire intervenir la transformation \mathcal{L}^{-1} . On a en effet:

$$\mathcal{L}^\mu_\rho x'_\mu = \mathcal{L}^\mu_\rho \mathcal{L}_{\mu\nu} x^\nu = \delta^\nu_\rho x_\nu = x_\rho \quad (3.40)$$

et donc

$$x_\rho = \mathcal{L}^\mu_\rho x'_\mu . \quad (3.41)$$

Cette transformation est bien entendu différente de la transformation directe:

$$x'_\mu = \mathcal{L}_\mu^\rho x_\rho , \quad (3.42)$$

l'indice relatif au nouveau référentiel, μ , et celui relatif à l'ancien, ρ , changeant de position (haut/bas) entre les deux expressions. En termes de matrice dans la cas de la transformation spéciale, cela

correspond à un changement de signe pour les composantes spatio-temporelles et, donc, à la prise de la matrice inverse.

On peut bien sûr écrire des transformations similaires pour les coordonnées contravariantes ou toute combinaison de composantes mixtes et résumer en:

$$x'_{\mu} = \mathcal{L}_{\mu}^{\rho} x_{\rho} \quad (3.43)$$

$$x'^{\mu} = \mathcal{L}^{\mu}_{\rho} x^{\rho} \quad (3.44)$$

$$x_{\rho} = \mathcal{L}^{\mu}_{\rho} x'_{\mu} \quad (3.45)$$

$$x^{\rho} = \mathcal{L}_{\mu}^{\rho} x'^{\mu}, \quad (3.46)$$

les différentes expressions de la transformation se déduisant de la forme originale par les règles d'élévation et d'abaissement des indices. Ces différentes combinaisons s'obtiennent automatiquement (ou plutôt typographiquement) en respectant les règles de balancement des indices, en attribuant le premier indice (ligne) au nouveau référentiel, le second à l'ancien et en sommant sur l'indice correspondant au référentiel de la coordonnée à transformer. L'ensemble de ces règles très strictes, que nous avons justifiées en détail, minimise le risque d'erreurs dans ces écritures, beaucoup plus efficacement qu'avec les notations standard de l'algèbre linéaire.

Nous terminerons ce paragraphe en examinant les lois de transformation des vecteurs de base de notre espace-temps. De manière évidente, la transformation de Lorentz correspond à un simple changement de base dans l'espace temps. Le même événement, le même vecteur, s'exprime par deux jeux de composantes différentes quand on le représente dans deux référentiels ou deux bases différentes. En remarquant que $x_{\nu} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{e}_{\nu} = \tilde{R}(\mathbf{e}_{\nu})$ et que $x'_{\mu} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{e}'_{\mu}$, où les \mathbf{e}'_{μ} sont les transformés des vecteurs de base, on peut écrire $\mathbf{R} \cdot \mathbf{e}'_{\mu} = \mathcal{L}_{\mu}^{\nu} \mathbf{R} \cdot \mathbf{e}_{\nu}$, relation qui doit être vérifiée pour tout vecteur \mathbf{R} . On en déduit donc que:

$$\mathbf{e}'_{\mu} = \mathcal{L}_{\mu}^{\nu} \mathbf{e}_{\nu}. \quad (3.47)$$

En d'autres termes, la loi de transformation des vecteurs de base est celle des composantes covariantes, inverse (au sens précisé plus haut) de la transformation des composantes contravariantes. Les appellations covariantes et contravariantes proviennent précisément de ces comportements.

On peut aussi exprimer la loi de transformation de la base duale. En écrivant $x'^{\mu} = \tilde{\epsilon}'^{\mu}(\mathbf{R})$, $x^{\mu} = \tilde{\epsilon}^{\mu}(\mathbf{R})$, on en déduit:

$$\tilde{\epsilon}'^{\mu} = \mathcal{L}^{\mu}_{\nu} \tilde{\epsilon}^{\nu}. \quad (3.48)$$

Les vecteurs de la base duale se transforment donc comme les composantes contravariantes.

3.2 Autres 4-vecteurs

3.2.1 Définition

Nous n'avons considéré jusque là que le 4-vecteur associé à la position d'un événement dans l'espace-temps. Nous allons maintenant généraliser la notion à d'autres quantités physiques. Nous appellerons 4-vecteur toute quantité physique s'exprimant par 4 coordonnées (covariantes ou contravariantes) se transformant comme le 4-vecteur position dans un changement de référentiel (c'est à dire par une transformation de Lorentz). De manière évidente, toute collection de quatre quantités physiques arbitraires ne constitue pas un 4-vecteur. Nous verrons dans les prochains paragraphes quelques exemples de 4-vecteurs.

Les composantes contravariantes de tout 4-vecteur \mathbf{A} peuvent s'écrire sous la forme de trois composantes spatiales qui forment un vecteur (ce qui résulte des lois de transformation dans le sous-groupe du groupe de Lorentz qui décrit les changements de repère sans changement de référentiel) et d'une coordonnée temporelle. Nous noterons, avec un abus manifeste de notations, $\mathbf{A} = (a^0, \mathbf{a})$, où a^0 est sa composante temporelle et \mathbf{a} le vecteur tridimensionnel. Les composantes covariantes pourraient alors

se mettre sous la forme ($a_0 = a^0, -\mathbf{a}$). A priori, ces composantes ont une dimension qui peut être différente de celles des composantes du 4-vecteur position. Chaque espèce de 4-vecteur devrait donc, en toute rigueur, exister dans un espace-temps propre. En fait, comme en dynamique classique, nous ferons évoluer tous nos 4-vecteurs, positions, vitesses et accélérations dans le même espace. Nous prendrons simplement garde à ne pas additionner des objets de natures différentes.

Les notions de produit scalaire, de composantes covariantes et contravariantes, les règles de changement de base ou de référentiel s'appliquent bien sûr aux 4-vecteurs quelle que soit leur nature.

Nous profiterons aussi de ce paragraphe pour introduire la notion de 4-scalaire. Il s'agit simplement d'une quantité physique indépendante du référentiel, telle que la vitesse limite, la constante de structure fine, la masse d'une particule ou, plus simplement, le produit scalaire de deux 4-vecteurs (le produit scalaire de vecteurs ayant des dimensions ou unités différentes n'étant pas exclu). Le produit d'un 4-vecteur par un 4-scalaire donne bien sûr un autre 4-vecteur.

3.2.2 4-vitesse, 4-impulsion, 4-accélération

Nous chercherons ici à définir la vitesse d'une particule relativiste. Il nous faut pour cela paramétrer la ligne d'univers de la particule par un paramètre temporel. Ce paramètre doit être un 4-scalaire. Nous pourrions ainsi définir simplement la vitesse comme étant le rapport de l'accroissement du 4-vecteur position pendant un petit intervalle de temps à l'accroissement de ce paramètre temporel. Le résultat sera alors évidemment un 4-vecteur. Le temps d'un référentiel quelconque, qui n'est pas un invariant, ne convient pas pour paramétrer la trajectoire. Nous avons vu, en revanche, que le temps propre τ de la particule en mouvement est indépendant du choix de référentiel. Ce temps propre permet donc de définir un 4-vecteur vitesse par:

$$\mathbf{U} = \frac{d\mathbf{R}}{d\tau} . \quad (3.49)$$

Ecrivons cette quantité en fonction de la vitesse spatiale ordinaire \mathbf{v} de la particule dans un référentiel \mathcal{R} donné. Si le temps propre varie de $d\tau$, le temps dans \mathcal{R} varie de $dt = \gamma d\tau$ (dilatation des temps) et donc $dt/d\tau = \gamma$. La position de la particule variant de $d\mathbf{r} = \mathbf{v}dt$, on a immédiatement $d\mathbf{R}/dt = (c, \mathbf{v})$ et

$$\mathbf{U}^\mu = (c\gamma, \gamma\mathbf{v}) . \quad (3.50)$$

Remarquons que la partie spatiale de la 4-vitesse n'est autre que la célérité (vitesse calculée dans l'espace du référentiel et dans le temps propre de la particule). Le carré de la norme de \mathbf{U} , $U^\mu U_\mu = c^2\gamma^2 - \gamma^2v^2 = c^2$ est une constante, égale au carré de la vitesse de la lumière, un invariant relativiste manifeste.

Le 4-vecteur \mathbf{U} se transforme par la transformation de Lorentz dans un changement de référentiel. On a donc $\mathbf{U}' = \mathcal{L}\mathbf{U}$, ce qui s'écrit sous forme matricielle comme:

$$\begin{pmatrix} c\gamma' \\ \gamma'v'_x \\ \gamma'v'_y \\ \gamma'v'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_u & -\beta_u\gamma_u & 0 & 0 \\ -\beta_u\gamma_u & \gamma_u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c\gamma \\ \gamma v_x \\ \gamma v_y \\ \gamma v_z \end{pmatrix} , \quad (3.51)$$

où on a pris grand soin de distinguer le facteur γ_u de la transformation de Lorentz de ceux de la particule dans les deux référentiels, γ et γ' . De la première ligne de cette équation matricielle, on tire:

$$\gamma' = \gamma\gamma_u(1 - \beta_u v_x/c) , \quad (3.52)$$

et de la deuxième

$$\gamma'v'_x = \gamma\gamma_u(v_x - c\beta_u) . \quad (3.53)$$

En éliminant γ' , on obtient finalement:

$$v'_x = \frac{v_x - u}{1 - uv_x/c^2} , \quad (3.54)$$

qui coïncide évidemment avec la loi de composition des vitesses que nous avons trouvée plus haut. Nous laissons le lecteur écrire les lois de transformations des deux autres composantes.

En multipliant la 4-vitesse par la masse de la particule, qui est évidemment un 4-scalaire, on obtient encore un 4-vecteur, l'impulsion de la particule:

$$\mathbf{P} = m\mathbf{U} \quad (3.55)$$

avec

$$P^\mu = (p^0, \mathbf{p}) = (m\gamma c, m\gamma \mathbf{v}) . \quad (3.56)$$

Cette quantité jouera un rôle essentiel dans notre nouvelle dynamique.

La 4-vitesse \mathbf{U} est en général une fonction du temps propre τ de la particule. Nous pouvons donc la dériver encore par rapport à ce temps, pour aboutir à une définition de la 4-accélération

$$\mathbf{\Gamma} = \frac{d\mathbf{U}}{d\tau} = \gamma \frac{d\mathbf{U}}{dt} \quad (3.57)$$

avec

$$\mathbf{\Gamma}^\mu = (c\gamma\gamma', \gamma\gamma'\mathbf{v} + \gamma^2\mathbf{a}) , \quad (3.58)$$

où $\gamma' = d\gamma/dt$ est la dérivée temporelle ordinaire du facteur γ et \mathbf{a} est l'accélération tridimensionnelle de la particule. On remarque que la 4-accélération est perpendiculaire à la 4-vitesse: $\mathbf{\Gamma}^\mu U_\mu = 0$. Si on peut établir cette relation à partir des expressions précédentes de ces 4-vecteurs, elle découle beaucoup plus simplement du fait que le module de \mathbf{U} est une constante.

3.2.3 Vecteur d'onde

Considérons, dans le référentiel \mathcal{R} , une onde plane monochromatique de fréquence ω et de vecteur d'onde \mathbf{k} . Les différents champs et potentiels de cette onde sont tous proportionnels à $\exp(-i\phi)$ avec:

$$\phi = \omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} . \quad (3.59)$$

La phase ϕ de l'onde plane se doit d'être un 4-scalaire. Sa valeur pour un événement donné représente en effet la valeur relative commune des champs et potentiels par rapport à leur maximum. Les transformations de Lorentz de ces quantités, dont nous ne préjugerons pas encore, étant sûrement linéaires, le même facteur $\exp(-i\phi)$ décrit, dans un autre référentiel \mathcal{R}' , la valeur des quantités transformées par rapport à leurs nouvelles amplitudes.

En posant

$$K^\mu = (\omega/c, \mathbf{k}) \quad K_\mu = (\omega/c, -\mathbf{k}) , \quad (3.60)$$

on peut, au moins formellement, écrire:

$$\phi = \mathbf{K} \cdot \mathbf{R} = K_\mu x^\mu , \quad (3.61)$$

où les x^μ sont les composantes contravariantes de l'événement considéré. ϕ étant un 4-scalaire et \mathbf{R} un 4-vecteur, il est évident que \mathbf{K} est, lui aussi, un 4-vecteur généralisant le vecteur d'onde dans l'espace-temps. On notera que sa norme est nulle:

$$K_\mu K^\mu = 0 \quad (3.62)$$

puisque $\omega^2 - c^2 k^2 = 0$ pour une onde plane dans le vide. Le vecteur d'onde se transforme donc simplement par une transformation de Lorentz quand on passe d'un référentiel à un autre:

$$K'^\mu = \mathcal{L}^\mu_\nu K^\nu . \quad (3.63)$$

En explicitant cette transformation pour les coordonnées spatiales et temporelle, on obtient:

$$\omega' = \gamma(\omega - uk_x) \quad (3.64)$$

$$k'_x = \gamma(k_x - \beta\omega/c) \quad (3.65)$$

$$k'_y = k_y \quad (3.66)$$

$$k'_z = k_z \quad (3.67)$$

Dans la première équation, on reconnaît le changement de fréquence d'une onde dans un changement de référentiel, c'est à dire l'effet Doppler. L'expression que nous trouvons ici ne diffère de l'expression habituelle en relativité galiléenne ($\omega' = \omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{u}$) que par le facteur de dilatation des temps γ (il est bien naturel que ce facteur intervienne dans la modification de la fréquence). Pour des mobiles qui ne sont pas trop rapides (ce qui est presque toujours le cas, par exemple, pour des sources atomiques), l'effet Doppler reste dominé par l'effet classique. Il est un cas cependant où l'effet relativiste domine, celui où la vitesse \mathbf{u} est strictement perpendiculaire au vecteur d'onde. En cinématique classique, la fréquence n'est pas affectée. En relativité einsteinienne, en revanche, la fréquence est multipliée par le facteur γ de dilatation des temps. La modification relative de la fréquence est donc du second ordre en β (d'où le nom d'effet Doppler du second ordre), alors que l'effet Doppler classique est du premier ordre. C'est donc un effet faible pour des vitesses ordinaires (de l'ordre de 10^{-12} pour un déplacement à la vitesse du son) qui est cependant à prendre en compte dans des expériences de haute précision.

Les équations portant sur la partie spatiale décrivent le changement de direction de propagation. Les composantes transverses ne sont pas modifiées. La composante longitudinale change de telle manière que la relation de dispersion des ondes planes dans le vide $k' = \omega'/c$ reste vérifiée, comme on pourra s'en convaincre aisément. Notons qu'on peut ainsi retrouver de manière très rapide l'aberration relativiste des étoiles. La situation que nous considérons au chapitre précédent était en effet une onde se propageant vers l'origine le long de l'axe Oy : k_y est donc la seule composante non nulle dans le référentiel \mathcal{R} . En appliquant la transformation précédente, on trouve immédiatement:

$$k'_y = k_y = -\omega/c \quad (3.68)$$

$$k'_x = -\beta\gamma\omega/c \quad (3.69)$$

La direction de propagation fait donc, dans le référentiel \mathcal{R}' un angle $\theta = \arctan \beta\gamma$ avec l'axe Oy' . Nous retrouvons bien le résultat du chapitre précédent.

3.2.4 Densité de courant

Nous allons maintenant former un 4-vecteur à partir de la densité de charges ρ et de la densité de courant \mathbf{j} . Il est clair en effet que ces deux quantités se transforment de manières profondément reliées dans un changement de référentiel. Pour comprendre comment former ce 4-vecteur, nous allons considérer le cas d'une charge q "ponctuelle", que nous modéliserons comme une densité de charge constante contenue dans un petit élément de volume dV (défini dans un référentiel \mathcal{R}). Nous écrirons donc $q = \rho dV$. La particule se déplace à la vitesse \mathbf{v} dans \mathcal{R} . La densité de courant est donc $\mathbf{j} = \rho\mathbf{v}$ en tous points de dV (elle est nulle en dehors).

Dans un autre référentiel \mathcal{R}' , toutes ces quantités sont a priori modifiées. La "particule" occupe, à un instant donné dans \mathcal{R}' , un élément de volume dV' . Seule la charge totale q , qui est une propriété intrinsèque de la particule, est un 4-scalaire. On a donc $\rho dV = \rho' dV'$. En d'autres termes, ρdV est un 4-scalaire (notons que le lien entre dV et dV' n'est pas évident, puisqu'il faut faire la transformation de Lorentz sur tous les "coins" de l'élément de volume. Nous reviendrons bientôt sur ce point). Considérons maintenant un intervalle de temps dt dans \mathcal{R} . Pendant ce temps, la particule se déplace de $dx^\mu = (cdt, d\mathbf{r})$ qui est évidemment un 4-vecteur. La quantité $\rho dV dx^\mu = \rho dt dV (dx^\mu/dt) = \rho (d\Omega/c) dx^\mu/dt$ est donc, elle aussi un 4-vecteur, si $d\Omega = c dt dV$ représente

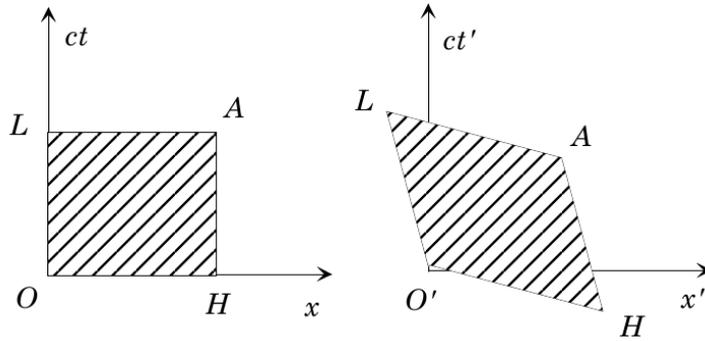


Figure 3.1: Un même élément de volume de l'espace-temps vu dans deux référentiels. La forme change, mais la surface (ou l'hypervolume dans l'espace quadridimensionnel) est constante.

un élément d'intégration dans l'espace-temps (en revanche, dx^μ/dt n'est pas un 4-vecteur, de même que dt ou dV pris séparément ne sont pas des 4-scalaires).

Nous montrerons maintenant que $d\Omega = cdt dV$ est un 4-scalaire. D'un point de vue physique, $d\Omega$ représente un petit domaine de l'espace-temps considéré entre deux instants infiniment voisins et a la dimension de la puissance quatrième d'une longueur. Modélisons la partie spatiale de ce petit domaine par un cube élémentaire de dimensions dx, dy et dz (voir Fig. 3.1). Si nous choisissons les axes convenablement, nous n'aurons à considérer que la forme spéciale de la transformation de Lorentz. Les coordonnées y et z étant inchangées, nous nous ramenons à démontrer l'invariance de l'élément de surface dans le plan (x, t) . L'étendue de notre élément est la surface rectangulaire de côtés dx et dt dans le référentiel \mathcal{R} . Sa mesure est bien $dxdt$. Remarquons tout de suite que $dxdt$ n'est pas un invariant de Lorentz, comme on peut s'en convaincre aisément. Vu dans le référentiel \mathcal{R}' , le petit élément de surface prend l'aspect représenté sur la partie droite de la figure 3.1. Il s'agit d'un petit losange. La surface de ce losange peut s'exprimer facilement en écrivant les transformés de Lorentz de trois des sommets. En fait, on trouve que cette mesure, qui est manifestement différente de $dx'dt'$ est égale à $dxdt$ (ce résultat découle directement du fait que le déterminant de la transformation de Lorentz est un, ce qui confirme sa généralité). L'étendue totale dans l'espace-temps d'un petit élément d'intégration est donc un 4-scalaire (résultat qui nous permettra plus tard de définir convenablement des intégrales de volume dans l'espace-temps).

On déduit de tout ce qui précède que les

$$\mathbf{J}^\mu = \rho \frac{dx^\mu}{dt} \quad (3.70)$$

sont les composantes contravariantes d'un 4-vecteur réunissant les densités de charge et de courant créés par une charge ponctuelle. On peut aussi écrire

$$\mathbf{J}^\mu = (c\rho, \mathbf{j}) , \quad (3.71)$$

en faisant intervenir la densité de courant tridimensionnelle. Pour une répartition quelconque de charges et de courants, résultant de la superposition des mouvements d'un grand nombre de particules ponctuelles, la quantité écrite en termes des densités totales de charges et de courants est bien sûr encore un 4-vecteur.

3.3 Tenseurs

Nous aurons à manipuler des quantités plus complexes que les 4-vecteurs. Dans un espace vectoriel, on peut bien sûr définir des opérateurs linéaires, représentés par des matrices dans une base convenable.

En fait, nous considérerons des objets plus généraux pouvant dépendre de plus de deux indices. De tels objets décrivent des lois de composition multilinéaires entre vecteurs ou opérateurs. Les tenseurs se retrouvent en fait dans de nombreux domaines de la physique. En élasticité, par exemple, la déformation d'un solide dans une direction peut dépendre d'une contrainte appliquée dans une autre direction. La relation linéaire correspondante est décrite par un tenseur de rang 2. En optique non linéaire, un ensemble de trois champs électriques peut créer une polarisation dans le milieu. Il faudra donc écrire une application linéaire donnant un vecteur à partir de trois autres, ce qui doit être décrit par un tenseur à quatre indices. Notons tout de suite que n'importe quel tableau de nombres n'est pas un tenseur, comme toute collection de nombres ne représente pas forcément un vecteur. Il faut, de plus, que ces quantités se transforment "bien" dans un changement de base.

3.3.1 Tenseurs contravariants

L'opération de produit tensoriel permet d'associer à l'espace vectoriel M un espace $M \otimes M$, plus grand. A tout couple de vecteurs \mathbf{R} et \mathbf{S} de M , on associe un vecteur $\mathbf{R} \otimes \mathbf{S}$ de $M \otimes M$. Une base de $M \otimes M$ est formée des 16 produits tensoriels possibles formés avec les 4 vecteurs de base de M : $\mathbf{e}_\mu \otimes \mathbf{e}_\nu$. Les composantes de $\mathbf{R} \otimes \mathbf{S}$ sur cette base sont les produits des composantes de \mathbf{R} et \mathbf{S} :

$$\mathbf{R} \otimes \mathbf{S} = x^\mu y^\nu \mathbf{e}_\mu \otimes \mathbf{e}_\nu . \quad (3.72)$$

La dimension de l'espace produit tensoriel est 16. Un produit tensoriel de deux vecteurs ne dépend que de 8 paramètres libres. Nous pouvons donc définir des objets plus généraux que les produits tensoriels de vecteurs: les tenseurs de rang 2 complètement contravariants, éléments de l'espace $M \otimes M$. Nous noterons $T^{\mu\nu}$ les composantes d'un tel tenseur sur la base $\mathbf{e}_\mu \otimes \mathbf{e}_\nu$. En fait, nous avons déjà rencontré de tels objets, par exemple avec le tenseur métrique complètement contravariant.

On peut déduire la règle de transformation d'un tenseur dans un changement de base (c'est à dire une transformation de Lorentz) de celle d'un produit tensoriel de vecteurs: $T^{\mu\nu}$ se transforme comme un produit de composantes contravariantes:

$$T'^{\mu\nu} = \mathcal{L}^\mu_\rho \mathcal{L}^\nu_\sigma T^{\rho\sigma} . \quad (3.73)$$

En appliquant les règles du paragraphe précédent, nous aurons aussi la transformation inverse:

$$T^{\mu\nu} = \mathcal{L}^\mu_\rho \mathcal{L}^\nu_\sigma T'^{\rho\sigma} . \quad (3.74)$$

Notons que ces expressions ne décrivent pas des produits de trois matrices au sens ordinaires. Dans la première, par exemple, la sommation sur σ est une sommation sur un indice colonne dans les deux termes où il apparaît. Il faut donc prendre garde, dans les calculs pratiques, d'effectuer les transpositions nécessaires si on veut utiliser les règles standard du produit matriciel.

Ces définitions des tenseurs peut paraître abstraites. On peut aussi voir les tenseurs contravariants de rang deux comme des applications linéaires de l'espace dual M^* dans M . L'image W d'un vecteur V s'écrit alors:

$$W^\mu = T^{\mu\nu} U_\nu . \quad (3.75)$$

Elle se transforme bien comme un 4-vecteur covariant. Pour le vérifier, écrivons:

$$W'^{\rho} = \mathcal{L}^\rho_\mu W^\mu = \mathcal{L}^\rho_\mu T^{\mu\nu} U_\nu , \quad (3.76)$$

mais

$$U_\nu = \mathcal{L}^\sigma_\nu U'_\sigma , \quad (3.77)$$

et donc:

$$W'^{\rho} = \mathcal{L}^\rho_\mu \mathcal{L}^\sigma_\nu T^{\mu\nu} U'_\sigma = T'^{\rho\sigma} U'_\sigma . \quad (3.78)$$

L'opération de produit tensoriel peut être généralisée aisément à un nombre arbitraires de termes. On peut définir l'espace $M^{\otimes k}$, produit tensoriel de M k fois avec lui même. Les éléments de cet espace, de dimension 4^k , sont les tenseurs complètement contravariants de rang k et leurs composantes s'écriront $T^{\mu\nu\rho\dots\tau}$. Ces composantes se transforment par un "produit" de k transformations de Lorentz. Nous laissons au lecteur le soin de l'écrire. Un tenseur de rang n décrit une transformation multilinéaire qui, à $n - 1$ vecteurs associe un vecteur.

3.3.2 Tenseurs covariants, tenseurs mixtes

Ce que nous avons fait pour l'espace M peut être repris pour son dual M^* . On peut définir ainsi des tenseurs de rang deux, complètement covariants, dont les composantes sur la base produit tensoriel $\tilde{\epsilon}^\mu \otimes \tilde{\epsilon}^\nu$ s'écriront $T_{\mu\nu}$. La transformation de Lorentz de ces quantités s'écrit simplement:

$$T'_{\mu\nu} = \mathcal{L}_\mu{}^\rho \mathcal{L}_\nu{}^\sigma T_{\rho\sigma} . \quad (3.79)$$

On peut faire le produit tensoriel d'un nombre arbitraires d'espaces duaux. On peut aussi définir des objets appartenant au produit tensoriel de l'espace M par son dual M^* . On obtient alors des tenseurs mixtes de rang deux (ou plus si on utilise plusieurs M et M^*) dont les composantes s'écriront $T^\mu{}_\nu$ (pour $M \otimes M^*$) ou $T_\mu{}^\nu$ (pour $M^* \otimes M$). Notons que ces deux écritures recouvrent a priori des objets différents. La règle de transformation d'un tel tenseur mixte est simplement:

$$T'^\mu{}_\nu = \mathcal{L}^\mu{}_\rho \mathcal{L}_\nu{}^\sigma T^\rho{}_\sigma , \quad (3.80)$$

et se généralise aisément à tout tenseur mixte de n'importe quel rang.

En fait, nous savons bien que les composantes contravariantes et les composantes covariantes recouvrent le même objet physique. Il en est de même pour les tenseurs: une quantité physique s'exprimant comme un tenseur peut être écrite à volonté comme un tenseur complètement contravariant, complètement covariant, ou mixte de façon arbitraire. Comme pour les composantes des 4-vecteurs (et cela résulte du lien entre tenseur et produits de ces composantes), le tenseur métrique $g^{\mu\nu}$ ou $g_{\mu\nu}$ peut être utilisé pour élever ou abaisser les indices. Nous pourrions écrire par exemple:

$$T^{\mu\nu} = g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} T_{\rho\sigma} \quad (3.81)$$

$$T^\mu{}_\nu = g^{\mu\rho} g_{\nu\sigma} T_\rho{}^\sigma \quad (3.82)$$

$$T_\mu{}^\nu = g_{\nu\rho} T^{\mu\rho} . \quad (3.83)$$

Le tenseur métrique se réduisant en relativité restreinte, à un tableau diagonal de signes, ces règles de transformation prennent une forme très simple: l'abaissement ou l'élévation d'un indice spatial change le signe de la quantité, alors que l'élévation ou l'abaissement d'un indice temporel ne change rien. On trouve ainsi, par exemple, que seuls les indices spatio-temporels changent de signe dans le passage d'un tenseur de rang 2 de la forme complètement contravariante à la forme complètement covariante.

En termes d'applications linéaires, ces différentes formes correspondent à différentes manières d'écrire l'image, \mathbf{S} , du 4-vecteur \mathbf{R} :

$$S^\nu = T^{\nu\mu} R_\mu = T^\nu{}_\mu R^\mu , \quad (3.84)$$

et

$$S_\nu = T_{\nu\mu} R^\mu = T_\nu{}^\mu R_\mu , \quad (3.85)$$

3.3.3 Vocabulaire et exemples

Un tenseur de rang 2 est dit symétrique si :

$$T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu} \quad (3.86)$$

On en déduit immédiatement $T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu}$ et $T^\mu{}_\nu = T_\nu{}^\mu$. On pourra donc écrire la forme mixte comme $T^\mu{}_\nu$ sans préciser l'ordre des indices. Notons que la symétrie du tenseur n'implique *pas* l'égalité de $T^\mu{}_\nu$ et de $T^\nu{}_\mu$ (il n'est que d'examiner le cas des indices spatio-temporels pour s'en convaincre).

Un tenseur de rang 2 est dit antisymétrique si :

$$T^{\mu\nu} = -T^{\nu\mu} . \quad (3.87)$$

Les termes diagonaux de ce tenseur $T^{\mu\mu}$ sont évidemment nuls. On montre qu'un tenseur antisymétrique peut se mettre sous la forme :

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & a_x & a_y & a_z \\ -a_x & 0 & -b_z & b_y \\ -a_y & b_z & 0 & -b_x \\ -a_z & -b_y & b_x & 0 \end{pmatrix} = (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \quad (3.88)$$

où \mathbf{a} est un vecteur spatial et \mathbf{b} un pseudo-vecteur (qui se transforme en l'opposé de son symétrique dans un changement de base comprenant une réflexion d'espace). Le couple champ électrique/champ magnétique obéissant à ces conditions, nous ne nous étonnerons pas que le champ électromagnétique s'exprime comme un tenseur antisymétrique de rang 2.

Nous appellerons "trace" d'un tenseur de rang 2 la quantité $T^\mu{}_\mu = T_\mu{}^\mu$. Plus généralement, nous appellerons "contraction" d'un tenseur sur un indice une expression comme $T^\mu{}_\mu{}^\rho$. La contraction d'un tenseur de rang k sur un indice est un tenseur de rang $k - 2$ (la trace étant une contraction d'un tenseur de rang 2, elle donne un tenseur de rang 0, c'est à dire un 4-scalaire). La contraction d'un tenseur de rang trois donne, pour sa part, un tenseur de rang 1, c'est à dire un 4-vecteur.

Montrons, à titre d'exercice, que la contraction sur un indice d'un tenseur de rang trois se transforme bien comme un vecteur :

$$\begin{aligned} T'^{\mu}{}_{\mu}{}^{\rho} &= \mathcal{L}^{\mu}{}_{\sigma} \mathcal{L}_{\mu}{}^{\nu} \mathcal{L}^{\rho}{}_{\tau} T^{\sigma}{}_{\nu}{}^{\tau} \\ &= \delta_{\sigma}^{\nu} \mathcal{L}^{\rho}{}_{\tau} T^{\sigma}{}_{\nu}{}^{\tau} \\ &= \mathcal{L}^{\rho}{}_{\tau} T^{\sigma}{}_{\sigma}{}^{\tau} , \end{aligned} \quad (3.89)$$

ce qui établit bien la propriété cherchée.

Comme tenseurs, nous connaissons déjà le tenseur métrique. On pourra vérifier directement qu'il est bien invariant dans une transformation de Lorentz. Il s'agit d'un tenseur symétrique. Sa forme mixte est évidemment : $g^\mu{}_\nu = g^{\mu\rho} g_{\nu\rho} = \delta_\nu^\mu$. Le symbole de Kronecker n'est donc que la forme mixte du tenseur métrique ! La relation entre les formes contravariantes et covariantes $g^{\mu\nu} g_{\nu\rho} = \delta_\rho^\mu$ peut donc s'interpréter comme un simple abaissement d'indice.

Notons à ce point que les opérateurs \mathcal{L} de changement de base ont toutes les caractéristiques de tenseurs et se comportent normalement vis à vis de l'élévation ou de l'abaissement des indices. En toute rigueur, nous ne devons pas les considérer comme des tenseurs. On sait bien, en algèbre linéaire, que les matrices de changement de base ne sont pas à proprement parler des opérateurs. On peut aussi s'en convaincre en s'interrogeant sur le sens physique d'un changement de base pour une transformation de Lorentz.

Nous définirons finalement le tenseur de rang 4 complètement antisymétrique (ou tenseur de Levi-Civita) $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$. Parmi les 256 éléments de ce tenseur, seuls sont non nuls ceux dont les indices correspondent à une permutation de (0, 1, 2, 3). Si la permutation est paire, l'élément correspondant vaut

+1. Il vaut -1 si la permutation est impaire. Il n'y a donc que 24 éléments non nuls dans ϵ , 12 valant +1 et 12 -1. On a $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = -\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$, puisqu'on abaisse toujours trois indices spatiaux dans cette opération. On a enfin $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = -24$ (une somme de 256 termes qui nous fait apprécier à sa juste valeur l'élégance des notations d'Einstein).

3.4 Dérivation et analyse vectorielle

La dernière étape à franchir est de refonder, dans notre formalisme quadridimensionnel, l'analyse vectorielle. Nous commencerons par redéfinir le gradient, pour généraliser ensuite aux autres opérateurs différentiels. Nous verrons que des lois bien connues de l'électromagnétisme prennent une forme très simple en termes de ces opérateurs. Nous définirons enfin une intégration dans l'espace-temps et généraliserons les théorèmes de Stokes/Ostrogradski.

3.4.1 Dérivation

Nous pouvons définir, pour une fonction du 4-vecteur position d'un événement, la dérivation par rapport aux coordonnées contravariantes de l'événement:

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} . \quad (3.90)$$

Il est évident que les 4 quantités ∂_μ forment les quatre composantes covariantes d'un opérateur différentiel vectoriel qui généralise la notion de "nabla" à notre espace à quatre dimensions. Leur covariance est manifeste si nous examinons l'accroissement infinitésimal d'une fonction scalaire des x^μ pour un accroissement dx^μ :

$$df = \partial_\mu f(x^\nu) dx^\mu . \quad (3.91)$$

df étant un scalaire et dx^μ un vecteur contravariant, ∂_μ est un "vecteur" covariant. Il se transforme donc comme tel dans une transformation de Lorentz:

$$\partial'_\mu = \mathcal{L}_\mu{}^\nu \partial_\nu , \quad (3.92)$$

où les ∂' représentent les dérivées par rapport aux nouvelles coordonnées contravariantes. Cette loi de transformation peut aussi s'établir péniblement à partir des lois de transformation des composantes.

On peut aussi définir la dérivation par rapport aux coordonnées covariantes:

$$\partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} . \quad (3.93)$$

Ces opérateurs différentiels forment évidemment les composantes contravariantes d'un vecteur (comme on peut s'en convaincre en écrivant l'accroissement d'une fonction scalaire des coordonnées covariantes). On a de plus

$$\partial^\mu = g^{\mu\nu} \partial_\nu , \quad (3.94)$$

généralisation aux opérateurs différentiels des lois d'élévation ou d'abaissement des indices.

3.4.2 Analyse vectorielle

On peut définir à partir des ∂_μ des analogues des opérateurs de l'analyse vectorielle à trois dimensions. Si f est une fonction scalaire, $\partial_\mu f$, généralisant le gradient, peut s'écrire

$$\partial_\mu f = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t}, \nabla f \right) \quad (3.95)$$

et

$$\partial^\mu f = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t}, -\nabla f \right) \quad (3.96)$$

Si on considère un champ de 4-vecteurs $A^\mu(x^\nu) = (a^0, \mathbf{a})$, on peut définir sa divergence comme:

$$\partial^\mu A_\mu = \partial_\mu A^\mu = \frac{1}{c} \frac{\partial a^0}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{a}, \quad (3.97)$$

qui n'est pas sans nous rappeler l'équation de conservation de la charge ou la jauge de Lorentz. L'analogie du rotationnel sera le tenseur de rang 2 complètement antisymétrique:

$$\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu. \quad (3.98)$$

On pourra aussi écrire le rotationnel sous sa forme complètement covariante:

$$\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (3.99)$$

Le "laplacien" de l'espace temps est la norme du vecteur ∂^μ :

$$\partial_\mu \partial^\mu = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta = \square \quad (3.100)$$

et n'est pas autre chose que le d'Alembertien \square .

Nous pouvons ainsi réécrire de façon extrêmement simple quelques lois de l'électromagnétisme classique. L'équation de conservation de la charge s'écrit simplement $\partial_\mu J^\mu = 0$, en utilisant le 4-vecteur courant.

Les équations de Poisson pour les potentiels peuvent se regrouper en $\partial_\mu \partial^\mu \mathcal{A}^\nu = \mu_0 J^\nu$, à condition de regrouper les potentiels scalaire et vecteur en un 4-vecteur $\mathcal{A}^\mu = (V/c, \mathbf{A})$. L'équation de Poisson prouve immédiatement que cette quantité est un 4-vecteur. On pourrait alors en déduire les lois relativistes de transformation des potentiels dans un changement de référentiel et, par dérivation, les lois de transformation des champs. Nous établirons plus simplement ces résultats dans les prochains chapitres.

La condition de jauge de Lorentz s'écrit tout simplement $\partial_\mu \mathcal{A}^\mu = 0$. L'ensemble de ces relations prouve que l'électromagnétisme se coule de manière très naturelle dans le cadre mathématique de la cinématique relativiste.

3.4.3 Intégration

On peut définir une intégrale de volume dans l'espace-temps pour n'importe quel type de quantité par

$$\int d\Omega, \quad (3.101)$$

où $d\Omega = c dt dx dy dz$ est l'élément d'intégration dans l'espace temps dont nous avons déjà démontré le caractère scalaire.

Une surface dans l'espace à trois dimensions est une variété à trois dimensions. On peut définir une intégrale sur ces surfaces (un flux) à condition de définir un 4-vecteur élément de surface dS^μ .

Un élément de surface est un petit objet à trois dimensions. On peut le considérer comme sous-tendu par trois 4-vecteurs dx^μ , dy^μ et dz^μ (comme un petit élément de surface à deux dimensions est sous-tendu par deux vecteurs infinitésimaux). dS^μ doit être orthogonal à tout vecteur de l'élément et sa longueur doit être une mesure du "volume" de l'élément de surface. On peut obtenir dS^μ par une procédure d'orthogonalisation standard. On forme d'abord le tenseur de rang 3 $dS^{\mu\nu\rho}$ tel que:

$$dS^{\mu\nu\rho} = \begin{vmatrix} dx^\mu & dy^\mu & dz^\mu \\ dx^\nu & dy^\nu & dz^\nu \\ dx^\rho & dy^\rho & dz^\rho \end{vmatrix} \quad (3.102)$$

L'élément de surface cherché s'obtient alors en contractant ce tenseur avec le tenseur de rang 4 complètement antisymétrique:

$$dS^\sigma = -\frac{1}{6}\epsilon^{\sigma\mu\nu\rho}dS_{\mu\nu\rho}, \quad (3.103)$$

dont on montre qu'il a toutes les propriétés requises. Le lecteur sceptique aura avantage à écrire explicitement le vecteur élément de surface pour un petit élément de volume purement spatial (qui est bien un élément de surface dans l'espace-temps). Il trouvera un 4-vecteur dont seule la composante temporelle est non nulle. Sa mesure est précisément le volume spatial de l'élément considéré.

On peut établir pour les intégrales de surface un théorème généralisant le théorème de Gauss:

$$\int_S A^\mu dS_\mu = \int_V \partial_\mu A^\mu d\Omega, \quad (3.104)$$

où V est un volume dans l'espace-temps et S sa surface frontière. L'intégrale de la divergence étendue à tout l'espace est donc égale au flux sur la "sphère de l'infini"³. Celui-ci est en général nul pour des champs physiques.

On peut aussi définir une intégration sur des variétés à deux dimensions (que nous n'appellerons pas surfaces). L'élément d'intégration est un tenseur antisymétrique de rang 2 formé sur les vecteurs dx^μ et dy^ν sous-tendant l'élément d'intégration:

$$df^{\mu\nu} = dx^\mu dy^\nu - dx^\nu dy^\mu. \quad (3.105)$$

On peut enfin définir une intégrale curviligne sur une ligne d'univers. Le théorème de Stokes⁴ relie l'intégrale sur une variété à deux dimensions à l'intégrale sur son contour:

$$\int A_\mu dx^\mu = \int df^{\mu\nu}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu). \quad (3.106)$$

³Cette sphère de l'infini est assez peu intuitive. Elle est formée de tous les points de l'espace à $t = -\infty$ et de tout l'espace à nouveau à $t = \infty$. Entre les deux, elle est formée à tout instant de tous les points à l'infini dans l'espace (la "sphère de l'infini" habituelle de l'analyse vectorielle). Notons qu'en pratique nous n'utiliserons ce théorème intégral que sous cette forme, avec intégration sur la sphère de l'infini. Il n'est donc pas nécessaire de posséder parfaitement la construction des éléments de surface.

⁴Que nous n'aurons pas l'occasion d'utiliser dans le reste du cours.

Chapitre 4

Dynamique relativiste

Après avoir jeté les bases d'une nouvelle cinématique, il nous faut bien sûr établir la nouvelle dynamique. Nous commencerons par postuler une forme très simple pour l'action d'une particule libre, dont nous déduirons les équations de Lagrange (qui donnent trivialement un mouvement rectiligne uniforme). Nous en déduirons, de manière plus intéressante, l'expression relativiste de l'impulsion de la particule. Nous définirons alors la notion de force pour une particule en interaction. Nous n'irons pas beaucoup plus loin dans ce chapitre. Pour utiliser la notion de force, il faut en effet la relier aux causes du mouvement. C'est ce que nous ferons au prochain chapitre dans le cas de l'électromagnétisme, en "redécouvrant" l'expression de la force de Lorentz. Notons à ce point que toutes les forces phénoménologiques utilisées en mécanique classique (frottements, tensions..) n'ont aucun sens en relativité (elles ne peuvent se transformer correctement dans un changement de référentiel). Notons également que la force de gravitation ne peut être traitée correctement que dans le cadre de la relativité générale. Nous concluons ce chapitre par quelques brèves remarques sur le vaste problème des collisions de particules relativistes, qui sera beaucoup plus largement discuté dans l'option de physique des particules du second semestre.

4.1 Particule Libre

Nous essayons ici de définir une action ou un lagrangien pour une particule relativiste libre. La condition d'extrémalité de l'action devrait alors nous donner la ligne d'univers suivie par cette particule.

Pour que toutes les quantités que nous manipulons se comportent bien dans un changement de référentiel (on dit souvent qu'elles sont manifestement covariantes), il faut que l'action et le lagrangien soient tous les deux des 4-scalaires. Le temps sur lequel on intègre le lagrangien doit donc être lui aussi un 4-scalaire. De manière évidente, seul le temps propre τ de la particule convient. Enfin, les bornes de l'intégration doivent être deux événements bornant la portion de ligne d'univers cherchée (et jouant le rôle de conditions aux limites dans les équations de Lagrange). On écrira donc:

$$S = \int_a^b L d\tau , \quad (4.1)$$

ou encore:

$$S = \frac{1}{c} \int_a^b L ds , \quad (4.2)$$

où ds est un intervalle infinitésimal sur la ligne d'univers: $ds = cd\tau$.

Pour L , le choix le plus simple est une constante $L = -\alpha$, relative à la particule. Nous choisissons un signe moins et une constante positive. Ce choix conduira à un minimum pour l'action¹. On peut

¹On peut rendre l'intégrale du temps propre aussi petite que l'on veut en imaginant des mouvements à de très grandes vitesses entre a et b . En revanche, l'intégrale du temps propre est maximale si la particule se déplace à vitesse constante entre a et b . L'action, pour avoir un minimum, doit donc être opposée à l'intégrale du temps propre.

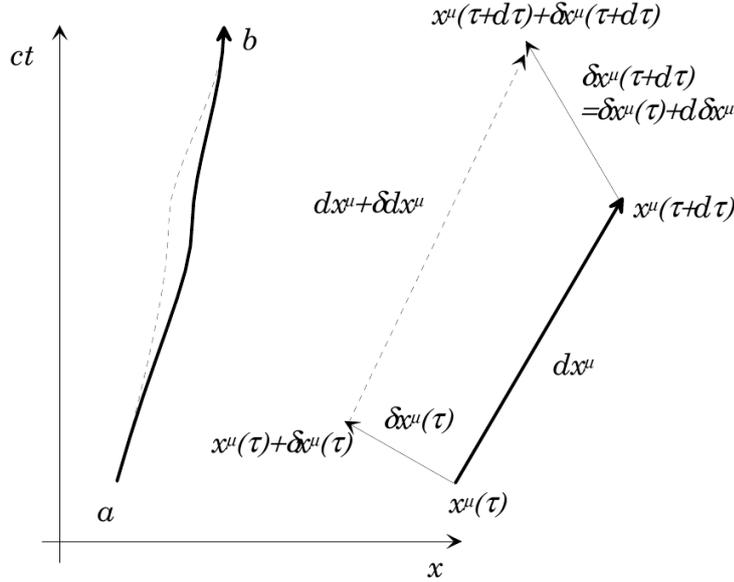


Figure 4.1: Deux lignes d'univers joignant deux événements. L'une est la trajectoire de référence (en traits pleins), l'autre une trajectoire infiniment proche (en pointillés). Les deux trajectoires coïncident pour les événements initial et final. La partie de droite schématise des éléments infinitésimaux correspondants des deux trajectoires.

identifier aisément cette constante en imposant à notre action de coïncider avec l'action classique si la vitesse de la particule est petite devant c . En remarquant que $d\tau = dt/\gamma$, on écrira:

$$S = -\alpha \int d\tau = -\alpha \int \frac{dt}{\gamma} = -\alpha \int \sqrt{1 - v^2/c^2} dt = \int (-\alpha + \alpha v^2/2c^2) dt . \quad (4.3)$$

Le terme constant ne joue aucun rôle dans l'action classique. Pour que le terme en v^2 coïncide avec l'énergie cinétique, il faut que $\alpha = mc^2$. Le lagrangien d'une particule libre est donc une simple constante:

$$L = -mc^2 \quad (4.4)$$

et l'action s'écrit simplement:

$$S = -mc^2 \int d\tau = -mc \int ds . \quad (4.5)$$

Nous allons maintenant établir, à partir de cette expression de l'action, les équations de Lagrange. Ce raisonnement est très proche de celui utilisé dans la première partie de ce cours pour établir les équations de Lagrange d'un système quelconque. Nous considérerons donc deux lignes d'univers légèrement différentes entre les événements a et b qui nous serviront de "conditions aux limites" (voir figure 4.1). Nous ne pouvons plus en effet spécifier, sans perdre l'invariance relativiste, de positions à un instant initial et à un instant final. L'une de ces trajectoires sera la trajectoire effectivement suivie, qui réalise un extremum pour l'action. Elle est paramétrée par le temps propre τ de la particule. Les événements de cette ligne d'univers peuvent donc s'écrire $x^\mu(\tau)$.

L'autre ligne d'univers s'écarte de la trajectoire de référence par des quantités infinitésimales. Les coordonnées spatio-temporelles de chaque événement sur cette ligne d'univers pourront s'écrire $x^\mu(\tau) + \delta x^\mu(\tau)$, où $\delta x^\mu(\tau)$ est une quantité infinitésimale. Notons qu'avec ce choix d'écriture, la trajectoire variée et la trajectoire de référence sont paramétrées par le même temps propre τ , calculé le long de la trajectoire de référence. C'est en effet une condition importante pour pouvoir écrire les intégrales d'action avec le même élément différentiel. Notons que le temps propre est utilisé comme

un simple paramètre. τ n'est pas le temps propre sur la trajectoire variée (c'est précisément à la détermination de celui-ci que nous allons nous consacrer).

Considérons un intervalle infinitésimal de temps propre $d\tau$ (voir partie droite de la figure 4.1). Sur la trajectoire de référence, on passe de l'événement x^μ à $x^\mu + dx^\mu$ avec $dx^\mu = (dx^\mu/d\tau)d\tau$. Sur la ligne d'univers variée, en revanche, on passe de l'événement $x^\mu + \delta x^\mu$ à $x^\mu + \delta x^\mu + dx^\mu + d\delta x^\mu$ avec $d\delta x^\mu = (d\delta x^\mu/d\tau)d\tau = \delta(dx^\mu/d\tau)d\tau = \delta dx^\mu$, l'accroissement de la vitesse étant manifestement la dérivée temporelle de l'accroissement. Dans toute la suite du raisonnement, nous traiterons² les accroissements δ comme des infiniments petits d'ordre supérieur par rapport aux éléments d de trajectoire. L'action sur la trajectoire de référence est donc

$$S = -mc \int_a^b ds = -mc \int_a^b \sqrt{dx_\mu dx^\mu} . \quad (4.6)$$

L'action sur la trajectoire variée s'écrit:

$$S + \delta S = -mc \int_a^b \sqrt{(dx_\mu + \delta dx_\mu)(dx^\mu + \delta dx^\mu)} . \quad (4.7)$$

En développant cette dernière expression au premier ordre non nul dans les petits accroissements, on obtient l'accroissement de l'action

$$\begin{aligned} S + \delta S &= -mc \int_a^b \left[1 + \frac{dx_\mu \delta dx^\mu}{ds^2} \right] ds \\ \delta S &= -mc \int_a^b \frac{dx_\mu}{ds} \delta dx^\mu \\ &= -m \int_a^b U_\mu \delta dx^\mu \\ &= -m \int_a^b U_\mu \frac{d\delta x^\mu}{d\tau} d\tau \end{aligned} \quad (4.8)$$

où nous faisons intervenir la 4-vitesse $U_\mu = cd x_\mu/ds$ de la particule.

Pour obtenir les équations de Lagrange, nous pouvons transformer cette expression par une intégration par parties:

$$\delta S = -m \int_a^b U_\mu \delta dx^\mu = -m [U_\mu \delta x^\mu]_a^b + m \int_a^b \frac{dU_\mu}{d\tau} \delta x^\mu d\tau . \quad (4.9)$$

Le terme tout intégré est manifestement nul puisque les deux lignes d'univers coïncident sur les événements limites. La nullité de δS ne peut être assurée pour tous les accroissements que si:

$$\frac{dU^\mu}{d\tau} = 0 , \quad (4.10)$$

ce qui constitue l'équation de Lagrange, nécessairement triviale, du mouvement de la particule libre.

En fait, le principal intérêt de ce calcul ne réside pas dans cette équation que nous aurions pu obtenir en invoquant l'invariance galiléenne. Nous avons d'abord pris la mesure des difficultés mises en jeu dans un calcul variationnel en relativité (en particulier, nous avons dû prendre garde de ne manipuler que des quantités 4-vectorielles ou scalaires). Ensuite, nous avons établi, en passant, l'équation (4.9) qui va nous permettre de déterminer les variations de l'action dans une variation du point d'arrivée, et donc d'établir la forme relativiste de l'impulsion.

²De façon mathématiquement mal définie.

4.2 Energie–impulsion

Nous avons introduit naturellement l'énergie et l'impulsion en dynamique classique comme les dérivées temporelles et spatiales de l'action par rapport au point d'arrivée. La contrepartie relativiste en est manifestement le 4–gradient de l'action par rapport à l'événement b . Nous poserons donc :

$$P_\mu = -\partial_\mu S , \quad (4.11)$$

les dérivées s'entendant par rapport à la position de b .

Pour estimer P_μ , nous considérerons deux lignes d'univers effectivement suivies par la particule, l'une (ligne d'univers de référence) connectant a et b , l'autre (variée) a et $b+db$. Le calcul de la variation de l'action suit alors celui effectué au paragraphe précédent. Les deux trajectoires sont paramétrées par le temps propre de la trajectoire de référence. La seule différence est que l'accroissement ne s'annule pas pour l'événement b : $\delta x^\mu(b) = db$. L'équation (4.9) est donc encore correcte. Comme les deux trajectoires sont des trajectoires effectivement suivies, elles correspondent à des vitesses constantes et le terme intégral est identiquement nul. En revanche, le terme tout intégré est non nul et vaut $U_\mu \delta x^\mu(b)$. On en déduit que $\delta S = -mU_\mu(b)\delta x^\mu(b)$ et, par simple comparaison, que :

$$P_\mu = mU_\mu \quad P^\mu = mU^\mu , \quad (4.12)$$

un résultat pour le moins attendu.

Penchons nous maintenant sur la signification physique des composantes de P^μ . On a bien sûr $P^\mu = -(1/c)dS/dt, \nabla S$. Une simple comparaison avec la mécanique classique nous indique que la composante temporelle de P^μ est l'énergie mécanique \mathcal{E} de la particule (à un facteur c près), alors que les composantes spatiales représentent la quantité de mouvement :

$$P^\mu = (\mathcal{E}/c, \mathbf{p}) . \quad (4.13)$$

L'énergie et la quantité de mouvement apparaissent donc comme les composantes temporelles et spatiales d'un 4–vecteur. Elles doivent donc se transformer ensemble dans un changement de référentiel. Nous pouvons de plus identifier ces quantités à partir de l'expression de la 4–vitesse :

$$\mathcal{E} = m\gamma c^2 \quad (4.14)$$

$$\mathbf{p} = m\gamma \mathbf{v} \quad (4.15)$$

Commentons tout d'abord l'expression de l'énergie mécanique. Pour des mouvements à vitesse faible devant c , on peut développer le facteur γ . On obtient alors :

$$\mathcal{E} = mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 . \quad (4.16)$$

À une constante près, nous retrouvons donc bien l'énergie cinétique galiléenne.

Si les énergies sont toujours définies à une constante additive près en mécanique classique, il n'en est pas de même en relativité. On ne saurait en effet ajouter une constante arbitraire à la composante temporelle d'un 4–vecteur en conservant une forme correcte pour les lois de changement de référentiel. La constante additive qui, ci-dessus, représente l'énergie mécanique d'une particule au repos :

$$\mathcal{E}_0 = mc^2 , \quad (4.17)$$

doit donc avoir une signification physique³.

Si une masse au repos possède de l'énergie, cela indique qu'on peut, au moins sur un plan de pur bilan d'énergie, transformer une certaine quantité de masse en énergie ou une certaine quantité

³Remarquons que nous venons d'établir ce qui est sans doute la formule de physique la plus célèbre.

d'énergie en masse. Les applications les plus spectaculaires de ces conversions sont les créations et annihilations de particules élémentaires. Quand deux antiparticules s'annihilent en émettant de l'énergie sous forme de rayonnement électromagnétique, on a une conversion totale d'une certaine quantité de masse en énergie. Le phénomène réciproque, la création d'une paire particule/antiparticule à partir d'un rayonnement suffisamment énergétique, correspond à la conversion d'énergie en masse. Pour créer, par exemple, une paire électron/positron, il faudra au moins fournir une énergie $2mc^2$, soit 2 fois 511 keV. Cette notion de seuil de réaction joue un rôle essentiel pour l'analyse des collisions de particules. Notons à ce point que, si nous avons montré que de tels processus sont envisageables du point de vue du simple bilan énergétique, nous n'avons pas montré qu'ils pouvaient se produire. Il faut ajouter à ces conditions de bilan les règles de sélection qui indiquent quelles particules on peut effectivement créer dans une situation donnée. Ces règles ne peuvent s'obtenir que par une approche quantique qui est hors de propos ici. En dépit des conséquences très importantes de cette énergie de repos pour la physique des particules, nous n'évoquerons pas ce problème beaucoup plus avant ici, et nous renverrons le lecteur intéressé aux nombreux manuels qui couvrent ce sujet.

La quantité de mouvement, de son côté, s'écrit donc $m\gamma\mathbf{v}$. Au premier ordre en v/c , elle coïncide donc bien avec la quantité de mouvement galiléenne ordinaire. En revanche, pour des vitesses proches de celles de la lumière, la quantité de mouvement croît beaucoup plus vite que la vitesse (elle est en fait simplement proportionnelle à la célérité). Comme l'accroissement de la quantité de mouvement est manifestement relié à la force qui s'exerce sur la particule (nous anticipons quelque peu sur la suite de cet exposé), on retrouve qu'il est impossible d'accélérer une particule matérielle jusqu'à la vitesse de la lumière, puisqu'il faudrait lui communiquer une quantité de mouvement infinie. Notons enfin que, du point de vue de la quantité de mouvement, et dans une large mesure du point de vue de l'ensemble de la dynamique, "tout se passe comme si" la masse de la particule dépendait de la vitesse comme le facteur γ . Cette approche, largement développée dans des ouvrages de vulgarisation, n'est bien sûr pas correcte. L'invariance relativiste impose que la masse de la particule soit un 4-scalaire, indépendant du référentiel et il est gravement inexact d'utiliser le terme de masse pour le facteur $m\gamma$.

Notons, pour terminer ce paragraphe, un lien utile entre énergie et quantité de mouvement. Nous savons en effet que le module de la 4-vitesse est égal à c . On en déduit $P_\mu P^\mu = m^2 c^2$ et donc

$$p^2 c^2 + m^2 c^4 = \mathcal{E}^2 . \quad (4.18)$$

Examinons le cas d'une particule ultra-relativiste, dont la vitesse est proche de celle de la lumière. L'énergie \mathcal{E} est alors très supérieure à l'énergie de repos \mathcal{E}_0 , et on peut négliger le terme $m^2 c^4$ dans l'expression précédente. On a alors simplement $\mathcal{E} = pc$ et on peut pratiquement, à une constante dimensionnelle près, confondre l'énergie et l'impulsion de la particule.

Un exemple extrême de particule ultra-relativiste est une particule de masse nulle, comme le photon (seule particule très certainement de masse nulle)⁴. Si la vitesse de propagation de cette particule était inférieure à c , le facteur γ étant fini, l'énergie du photon serait nulle. Pour que de telles particules aient une énergie non nulle, il faut que leur vitesse de propagation soit la vitesse limite de la relativité (qu'on peut donc confondre à ce point seulement, en toute rigueur, avec la vitesse de la lumière). Par un simple passage à la limite, on voit donc que l'énergie et l'impulsion du photon sont liées par $\mathcal{E} = pc$. Si on y ajoute la loi de Planck, l'énergie d'un photon de fréquence ν est $\mathcal{E} = h\nu$, où h est la constante de Planck et l'impulsion est donc, en module, $h\nu/c$. Si on y ajoute que l'impulsion doit avoir la direction du vecteur d'onde \mathbf{k} (nous verrons pourquoi à la fin de cette partie), on en déduit que l'impulsion spatiale du photon peut s'écrire $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$.

⁴Pour les neutrinos, on sait que les différences de masse entre les trois types sont non nulles. Reste à savoir si l'un d'eux est de masse nulle.

4.3 Particule soumise à une force

Cette section ne peut être à ce niveau qu’embryonnaire. Si la particule est soumise à des interactions qui modifient son mouvement, on pourra écrire l’équation du mouvement sous la forme d’une équation de Lagrange à condition de connaître le lagrangien décrivant l’interaction. Le seul cas où nous pourrions effectuer cette démarche est celui de l’électromagnétisme que nous traiterons dans le prochain chapitre. En fait, aucune autre interaction ne peut être incluse correctement dans le cadre de la relativité restreinte à notre niveau. Tout d’abord, toutes les interactions phénoménologiques (contacts, ressorts..) n’ont plus de sens en relativité, ainsi que la notion de solide. Elles contiennent en effet toutes plus ou moins la notion d’interaction instantanée. Il est possible de formuler une hydrodynamique relativiste, par exemple, mais au prix de grands efforts. Même la gravitation ne peut être en toute rigueur coulée dans ce cadre. Elle n’est décrite convenablement que dans celui de la relativité générale.

En fait, nous ne pouvons ici qu’intuiter que la dérivée par rapport au temps propre de l’impulsion, $G^\mu = dP^\mu/d\tau$, jouera le rôle d’une force, qu’on pourra exprimer simplement, dans le cas de l’électromagnétisme, en fonction de la vitesse de la particule et des champs (cette force ne sera autre que la force de Lorentz). Le module de l’impulsion étant constant, la force est nécessairement perpendiculaire à l’impulsion: $G_\mu P^\mu = 0$. En termes de l’énergie et de la quantité de mouvement spatiale, on pourra écrire:

$$G^\mu = \frac{dP^\mu}{d\tau} = \left(\frac{\gamma}{c} \frac{d\mathcal{E}}{dt}, \gamma \frac{d\mathbf{p}}{dt} \right). \quad (4.19)$$

On pourra poser $\mathbf{f} = d\mathbf{p}/dt$ et définir ainsi la force spatiale, dérivée par rapport au temps ordinaire de la quantité de mouvement. L’orthogonalité de G_μ et de P^μ est simplement équivalente, comme on s’en convaincra aisément, au fait que $\mathcal{E}^2 - c^2 p^2$ est une constante.

4.4 Conservation de l’énergie–impulsion. Application aux collisions

On peut montrer, comme en mécanique classique, que l’invariance dans une translation globale dans l’espace–temps implique que tout système isolé possède un 4–vecteur énergie impulsion qui est conservé. Pour un ensemble de particules matérielles sans interaction, l’impulsion globale du système est simplement la somme des impulsions individuelles. Pour des particules en interaction (en particulier électromagnétique), la situation est moins simple. L’interaction, qui ne peut être instantanée, doit en effet être véhiculée par un champ. Ce champ, possédant une énergie, doit aussi posséder une quantité de mouvement et entrer dans le bilan de l’impulsion globale. L’analyse détaillée de la conservation de l’impulsion dans une telle situation est alors difficile.

La conservation de l’impulsion permet néanmoins d’obtenir des renseignements précis sur les collisions de particules relativistes. Dans une telle collision, on considère en effet un état initial où les deux particules sont très éloignées et n’interagissent pratiquement pas. Après avoir interagi, les deux particules s’éloignent à nouveau l’une de l’autre et on considère un état final où, à nouveau, l’interaction est négligeable. Même si on renonce à examiner ce qui se passe pendant l’interaction, on pourra écrire que l’impulsion globale initiale, qui est la somme des impulsions de particules incidentes, est égale à la somme des impulsions finales. On regroupe ainsi dans une même équation liant deux 4–vecteurs les lois de conservation de l’énergie et de l’impulsion qu’on écrit séparément dans une analyse classique de la collision⁵.

⁵Si les particules sont chargées, un champ électromagnétique est associé à chaque particule avant et après la collision. Ce champ doit entrer en toute rigueur dans le bilan d’impulsion. En fait, quand on mesure la masse ou l’impulsion d’une particule chargée, on ne le fait jamais indépendamment du champ qui accompagne cette particule. La masse que nous mettons dans l’impulsion est donc une masse “habillée”, qui englobe effectivement la contribution du champ à l’inertie de la particule. Nous n’aurons donc effectivement pas à tenir compte des champs des particules libres dans notre bilan d’impulsion. Notons qu’avec une particule chargée ponctuelle, la différence entre la masse “nue” et la masse “habillée” de la particule est évidemment infinie. Ce n’est qu’au prix d’un calcul complètement quantique mené avec les techniques

Pour illustrer très brièvement l'étude des collisions relativistes, nous traiterons deux exemples: le calcul d'un seuil de réaction et le cas de l'effet Compton. Ces deux exemples à eux seuls sont loin de couvrir toutes les applications de la conservation de la 4-impulsion à la physique des particules, mais ils permettent d'illustrer de façon simple des techniques et des concepts importants. Une approche beaucoup plus détaillée sera donnée dans l'option de physique des particules, au second semestre.

4.4.1 Seuil de réaction

La plupart des collisions réalisées dans les accélérateurs visent à produire de nouvelles particules. Il est clair que l'énergie cinétique incidente doit être suffisante pour que la réaction soit énergétiquement possible. Le seuil de réaction est précisément l'énergie cinétique à fournir aux particules en collision pour que la réaction soit énergétiquement possible. Ceci ne signifie pas nécessairement que la réaction se produise effectivement. Des règles de sélection quantiques ou une section efficace insuffisante peuvent faire que les produits ne soient jamais observés.

Le calcul du seuil est complexe pour les réactions complexes. Nous ne considérerons donc que l'une des plus simples des réactions de création de particules: la création d'une paire proton/antiproton par collision de deux protons. L'équation de la réaction s'écrit:

$$p + p \longrightarrow p + p + p + \bar{p} . \quad (4.20)$$

L'énergie minimale pour que cette réaction puisse se produire correspond à une situation où toutes les particules finales seraient au repos. Elle est donc définie dans un référentiel où la quantité de mouvement totale est nulle. Pour tout système de particules matérielles, il existe un tel référentiel, appelé "référentiel du centre de masse" \mathcal{R}_{CM} . Il est l'analogie du référentiel barycentrique en mécanique classique. Dans \mathcal{R}_{CM} , l'énergie minimale est donc $4mc^2$ (les particules et les antiparticules ont même masse m). Dans ce référentiel, les deux protons incidents ont initialement des énergies égales et des quantités de mouvement opposées. L'énergie de chacun doit donc être $2mc^2$ et son énergie cinétique mc^2 . Le seuil de réaction, dans le référentiel barycentrique, est donc de mc^2 pour chaque particule, un résultat assez intuitif.

Le problème est que l'énergie à fournir effectivement est celle définie dans le référentiel du laboratoire, qui ne coïncide pas nécessairement avec le référentiel du centre de masse. Ce n'est que dans le cas des anneaux de collision (LEP pour les collisions électron/anti-électron, ou LHC, plus récemment, pour les collisions proton/antiproton), que les deux projectiles sont de quantités de mouvement opposées et que le référentiel du laboratoire est aussi celui du centre de masse.

Dans beaucoup d'expériences, plus anciennes, un seul des protons est en mouvement (le projectile) et l'autre (la cible) est immobile. On peut estimer le seuil de réaction dans ce cas. La première chose à faire est de déterminer les éléments de \mathcal{R}_{CM} par rapport au référentiel du laboratoire \mathcal{R} . Nous noterons \mathcal{E} et p l'énergie et la quantité de mouvement du projectile. Tous les mouvements s'effectuant sur l'axe projectile/cible, nous n'écrirons que des quantités en projection sur cet axe. Il est clair aussi que la vitesse de \mathcal{R}_{CM} par rapport à \mathcal{R} est selon cet axe. Le 4-vecteur énergie-impulsion total avant la collision s'écrit donc $(\mathcal{E}/c + mc, p)$. De manière évidente la quantité de mouvement totale n'est pas nulle.

Nous cherchons donc une transformation de Lorentz (paramètres β et γ) telle que la nouvelle impulsion p' soit nulle. Il faut donc choisir:

$$\beta = \frac{pc}{\mathcal{E} + mc^2} , \quad (4.21)$$

ce qui définit le mouvement du référentiel du centre de masse. On peut alors écrire l'énergie totale disponible dans \mathcal{R}_{CM} en utilisant la même transformation de Lorentz:

$$\mathcal{E}' = \gamma(\mathcal{E} + mc^2 - \beta pc) . \quad (4.22)$$

de renormalisation qu'on peut définir proprement la masse "habillée" de la particule.

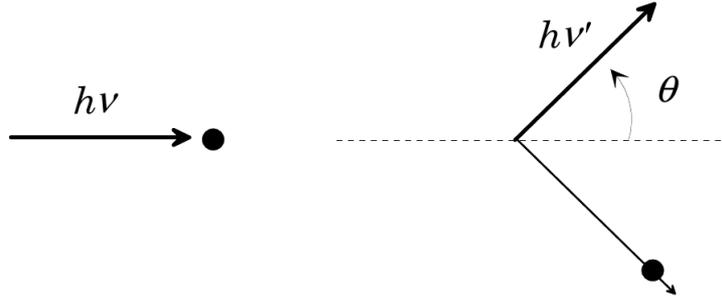


Figure 4.2: Diffusion d'un photon par un électron initialement au repos. Partie gauche: état initial. Partie droite: état final. Le photon est diffusé avec une fréquence modifiée et l'électron est éjecté.

En y portant l'expression de β et en notant que $\mathcal{E}^2 - p^2c^2 = m^2c^4$, on a simplement:

$$\mathcal{E}' = 2\gamma mc^2 . \quad (4.23)$$

On peut enfin exprimer γ en fonction de β puis de \mathcal{E} et p :

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{\sqrt{\mathcal{E} + mc^2}}{\sqrt{2}\sqrt{mc^2}} . \quad (4.24)$$

L'énergie disponible dans \mathcal{R}_{CM} est donc simplement:

$$\mathcal{E}' = \sqrt{2mc^2(\mathcal{E} + mc^2)} . \quad (4.25)$$

Le seuil de réaction s'obtient alors en écrivant que \mathcal{E}' doit être plus grand que $4mc^2$. Après quelques manipulations, on voit que le seuil s'écrit:

$$\mathcal{E} > 7mc^2 , \quad (4.26)$$

l'énergie cinétique du projectile devant être d'au moins $6mc^2$. On doit comparer ce résultat à celui obtenu quand le référentiel du laboratoire est aussi celui du centre de masse. Au lieu d'une énergie cinétique par particule de mc^2 , on a besoin d'une énergie 6 fois plus grande. Avec une puissance donnée d'accélérateur, il est donc, de beaucoup, préférable de travailler avec des collisions entre deux particules en mouvement. Ceci explique que pratiquement toutes les grandes machines sont maintenant des anneaux de collision. Le prix à payer est bien sûr que la densité du faisceau est très petite devant celle d'une cible solide: le taux de collisions est beaucoup moins grand que ce qu'on obtient en envoyant un faisceau unique sur une cible fixe.

4.4.2 Effet Compton

Notre second exemple sera l'effet Compton, la diffusion d'un photon de haute énergie par un électron initialement immobile (ou lié à un atome: les énergie mises en jeu dans les expériences sont telles, comme nous le verrons, que l'énergie de liaison d'un électron dans un atome est négligeable par rapport à l'énergie finale de l'électron diffusé). Les paramètres importants du problème sont représentés sur la figure 4.2.

Sans restreindre la généralité, le photon de fréquence ν et d'énergie $h\nu$ est incident dans la direction de l'axe Ox . Après la collision, l'électron et le photon sont diffusés dans des directions qui dépendent des détails de l'interaction. Toujours sans restreindre la généralité, nous pouvons supposer que les trajectoires finales de l'électron et du photon sont dans le plan Oxy . L'électron emportant de l'énergie

cinétique, le photon perd nécessairement de l'énergie. Sa nouvelle fréquence sera notée ν' . Nous chercherons seulement ici à calculer la nouvelle fréquence du photon en fonction de son angle de diffusion θ . C'est en effet la seule quantité accessible dans les expériences: l'électron est rapidement diffusé et son énergie amortie par le milieu où se produit la diffusion. De façon très remarquable, la simple application de la conservation de l'impulsion relativiste permet d'explicitier ce calcul⁶ et l'utilisation raisonnée des 4-vecteurs permet de le faire de manière particulièrement élégante.

Les 4-impulsions du photon avant et après la collision seront notées \mathbf{P} et \mathbf{P}' . On notera de même \mathbf{Q} et \mathbf{Q}' les impulsions initiale et finale de l'électron. En nous souvenant que la quantité de mouvement spatiale du photon est $h\nu/c$, nous pourrions écrire:

$$\mathbf{P} = (h\nu/c, h\nu/c, 0) , \quad (4.27)$$

$$\mathbf{P}' = (h\nu'/c, h\nu'/c \cos\theta, h\nu'/c \sin\theta) \quad (4.28)$$

$$\mathbf{Q} = (mc, 0, 0) \quad (4.29)$$

$$\mathbf{Q}' = (\mathcal{E}/c, q_x, q_y) . \quad (4.30)$$

Dans les équations précédentes, nous n'avons écrit que les composantes spatiales dans le plan Oxy . \mathcal{E} et q_x, q_y représentent l'énergie et la quantité de mouvement de l'électron diffusé. Pour calculer ν' en fonction de θ , nous allons chercher à éliminer ces inconnues. La loi de conservation de l'énergie-impulsion s'écrit:

$$\mathbf{P} + \mathbf{Q} = \mathbf{P}' + \mathbf{Q}' , \quad (4.31)$$

où les carrés (notation un peu abusive) représentent bien sûr les normes des 4-vecteurs. On en déduit immédiatement:

$$(\mathbf{P} + \mathbf{Q} - \mathbf{P}')^2 = \mathbf{Q}'^2 . \quad (4.32)$$

Le photon étant une particule de masse nulle, $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}'^2 = 0$. De plus $\mathbf{Q}^2 = \mathbf{Q}'^2 = m^2c^2$ où m est la masse de l'électron. En développant le membre de gauche de cette équation on obtient donc

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{P}' \cdot \mathbf{Q} + \mathbf{P}' \cdot \mathbf{P} . \quad (4.33)$$

Dans les produits scalaires $\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}$ et $\mathbf{P}' \cdot \mathbf{Q}$, le produit des composantes spatiales est nul et il ne reste que le produit des composantes temporelles. On en déduit:

$$\nu - \nu' = \frac{h}{mc^2} \nu \nu' (1 - \cos\theta) \quad (4.34)$$

On appréciera ici la puissance du formalisme quadridimensionnel qui permet de résoudre un problème a priori complexe de collision en une ligne seulement⁷. En écrivant cette équation en termes des longueurs d'onde $\lambda = c/\nu$ et $\lambda' = c/\nu'$ associées au photon avant et après la collision, on obtient finalement la relation de Compton sous sa forme la plus répandue:

$$\lambda' - \lambda = \lambda_c (1 - \cos\theta) . \quad (4.35)$$

La longueur λ_c , appelée longueur d'onde de Compton de l'électron, vaut:

$$\lambda_c = \frac{h}{mc} = 2.10^{-11} \text{ m} . \quad (4.36)$$

La très petite valeur numérique de cette quantité fait que l'effet n'est notable que pour des photons incidents de courte longueur d'onde, c'est à dire de très haute énergie. Pour des photons visibles, par exemple, la modification de fréquence due au "recul" de l'électron est tout à fait négligeable. Quand nous étudierons la diffusion de rayonnement par un atome nous négligerons complètement cet effet.

⁶Notons que la mise en évidence de l'effet Compton et l'accord quantitatif avec la loi que nous allons démontrer a constitué, sans doute, une des premières preuves indiscutables de l'existence du photon. L'effet photoélectrique, s'il est parfaitement explicable en termes de photons, peut en effet être décrit dans une théorie semi-classique couplant un champ électromagnétique classique à un détecteur quantifié.

⁷Merci à A. Perret qui m'a fait prendre conscience de cette astuce redoutable.

Chapitre 5

Electrodynamique des charges en mouvement

Nous désirons traiter maintenant de façon relativiste l'interaction entre particules chargées par l'intermédiaire d'un champ électromagnétique¹. Nous pourrions bien sûr supposer connues les équations de Maxwell et montrer directement qu'elles s'insèrent sans difficultés dans un cadre relativiste. Nous allons en fait procéder d'une façon beaucoup moins directe, mais plus profonde. Nous allons chercher à écrire l'interaction relativiste non triviale entre des particules par l'intermédiaire d'un champ de vecteurs. En d'autres termes, nous allons tenter de construire, dans le cadre de la relativité, la théorie de champ la plus simple qui ne soit pas triviale. Nous postulons pour cela la forme des actions associées aux particules et au champ. Nous verrons que ces formes sont tout à fait naturelles. Nous déduirons alors de ces actions des équations de Lagrange qui décrivent la dynamique des particules couplées au champ et la dynamique du champ couplé aux particules. Nous constaterons enfin que ces équations ont la forme des équations de Maxwell. Nous aurons donc pu déduire les équations de Maxwell d'une approche lagrangienne très générale et nous aurons montré que l'électromagnétisme est la plus simple des théories de champ vectorielles dans le cadre de la relativité. Ce type d'approche est très répandu en théorie des champs classiques ou quantiques. On essaie d'imaginer un Lagrangien qui respecte toutes les grandes propriétés de symétrie, et on en déduit la dynamique.

Bien sûr, nous ne nous contenterons pas dans ce chapitre de réécrire des équations bien connues. L'écriture en termes de quantités explicitement covariantes nous fournira des résultats nouveaux, difficiles ou impossibles à établir dans le cadre de l'électromagnétisme classique. Nous établirons ainsi la transformation des champs électromagnétiques dans un changement de référentiel, nous isolerons des invariants scalaires formés à partir des champs, dont nous montrerons qu'ils ont une signification physique importante. Nous pourrions enfin établir des bilans d'énergie-impulsion pour le champ qui nous permettront de jeter une lumière nouvelle sur des phénomènes bien connus, comme la pression de radiation ou même la force de Coulomb électrostatique.

Notre système sera donc constitué d'un ensemble de particules en interaction avec un champ représenté par un champ de 4-vecteurs. L'action totale pour ce système peut a priori se décomposer sous la forme:

$$S = S_{\text{Particules Libres}} + S_{\text{Champ Libre}} + S_{\text{Interaction}} , \quad (5.1)$$

où $S_{\text{Particules Libres}}$ représente l'action des particules en l'absence de champ (une simple collection de particules libres si on néglige toute autre forme d'interaction), $S_{\text{Champ Libre}}$ représente l'action décrivant le champ seul, en l'absence de toutes particules. Enfin, $S_{\text{Interaction}}$ représente l'interaction entre particules et champ: d'une part les particules sont la source du champ, d'autre part la présence du champ modifie la trajectoire des particules.

¹Je me permets d'emprunter pour le titre de ce paragraphe celui du premier article d'Einstein sur la relativité

Pour aborder ce problème, nous allons procéder en deux temps, comme on le fait souvent dans les exposés élémentaires d'électromagnétisme. Nous allons d'abord considérer une particule unique en présence d'un champ imposé. Nous supposons donc qu'un grand ensemble de particules crée un champ qui agit sur une particule test. Si cette particule "test" est suffisamment petite, elle ne modifie pas notablement le champ ni la dynamique des particules "sources". Les seules variables dynamiques dans ce cas sont donc celles de la particule libre, les valeurs du champ étant des quantités imposées. Nous pourrions alors écrire aisément les équations de Lagrange, dont nous verrons qu'elles redonnent l'expression attendue pour la force de Lorentz. Nous verrons en effet que le seul champ de vecteurs introduit (qui n'est autre que la version relativiste du potentiel vecteur) intervient dans la force sous la forme de son rotationnel, c'est à dire d'un tenseur de rang deux antisymétrique. Ce tenseur pouvant être exprimé à partir de deux champs de vecteurs, nous retrouverons que l'électromagnétisme est une théorie à deux champs. En écrivant les propriétés du rotationnel relativiste, nous obtiendrons des relations entre ces deux champs qui se trouveront coïncider avec le groupe des équations de Maxwell homogènes. Notons enfin que nous pourrions dès ce point établir la forme des changements de référentiels pour les champs.

Dans un deuxième temps, nous considérerons un champ en interaction avec des particules dont la dynamique est imposée. Nous représenterons les mouvements de ces particules par des densités de charges et de courants et nous postulerons une forme simple pour $S_{\text{Champ Libre}}$. Nous obtiendrons alors, comme équations de Lagrange, les équations de Maxwell faisant intervenir les sources. Nous aurons alors terminé notre programme: en combinant les équations décrivant la dynamique des particules dans un champ imposé et les équations décrivant la dynamique du champ sous l'action de courants imposés, on peut, au moins en principe, résoudre tout problème d'électromagnétisme. La dernière partie de ce chapitre sera alors consacrée à l'exploitation de ces résultats. Nous y établirons en particulier les bilans d'énergie-impulsion pour le champ.

5.1 Particule libre dans un champ imposé

5.1.1 Equations de Lagrange

Nous considérons donc ici une particule de masse m plongée dans un champ imposé. L'action décrivant la particule libre s'écrit simplement

$$S_{\text{Particules Libres}} = -mc \int_a^b ds, \quad (5.2)$$

où a et b sont deux événements décrivant les conditions aux limites imposées à la particule. En l'absence de champ, la ligne d'univers de la particule serait simplement la droite joignant a et b .

Nous postulerons que le champ peut être représenté par un champ unique de 4-vecteurs que nous noterons $\mathcal{A}^\mu(x^\nu) = (V/c, \mathbf{A})$. Pour des raisons qui apparaîtront évidentes plus tard, nous nommerons le champ \mathcal{A} "potentiel". L'interaction entre le champ et la particule doit être représentée par l'intégrale d'une quantité scalaire sur la ligne d'univers entre les événements limites a et b . La quantité la plus simple non triviale que nous puissions former est donc:

$$S_{\text{Interaction}} = -q \int_a^b \mathcal{A}_\mu dx^\mu, \quad (5.3)$$

où q est une quantité scalaire représentant l'intensité du couplage de la particule au champ que nous nommerons simplement "charge". Dans l'expression de l'action d'interaction, il faut comprendre, comme au chapitre précédent, que la ligne d'univers de la particule est paramétrée par son temps propre τ et que dx^μ est en fait égal à $(dx^\mu/d\tau)d\tau$.

Nous pouvons tout de suite nous rassurer sur la pertinence de ce lagrangien d'interaction. En écrivant que $(dx^\mu/d\tau)d\tau = U^\mu d\tau = U^\mu dt/\gamma$, en particulierisant pour un instant un référentiel \mathcal{R} et en

développant le produit scalaire $\mathcal{A}_\mu U^\mu = \gamma V - \gamma \mathbf{A} \cdot \mathbf{v}$, on met l'action d'interaction sous la forme:

$$S_{\text{Interaction}} = -q \int_a^b (V - \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) dt, \quad (5.4)$$

où \mathbf{v} est la vitesse tridimensionnelle de la particule dans \mathcal{R} . On retrouve bien là la forme du lagrangien d'interaction avec une particule chargée obtenu dans le premier chapitre de ce cours, à condition bien sûr d'assimiler la composante temporelle du potentiel au potentiel scalaire de l'électromagnétisme et ses composantes spatiales au potentiel vecteur. C'est à la justification détaillée de cette assimilation que nous allons procéder maintenant.

Comme dans le chapitre précédent (on se reportera en particulier à la figure 4.1), on considère entre a et b la trajectoire effectivement suivie (trajectoire de référence) et une trajectoire variée de façon infinitésimale. Les deux trajectoires sont paramétrées par le temps propre de la trajectoire de référence et on se reportera au chapitre précédent pour une description des éléments différentiels importants.

En écrivant la variation de l'intervalle élémentaire et en se livrant à la traditionnelle intégration par parties, on trouve:

$$\delta S_{\text{Particule Libre}} = \int_a^b \frac{dP^\mu}{d\tau} \delta x^\mu d\tau. \quad (5.5)$$

Calculons maintenant la variation de l'action d'interaction:

$$\begin{aligned} \delta S_{\text{Interaction}} &= -q \delta \int_a^b \mathcal{A}_\mu dx^\mu \\ &= -q \int_a^b [\delta \mathcal{A}_\mu] dx^\mu - q \int_a^b \mathcal{A}_\mu \delta dx^\mu, \end{aligned} \quad (5.6)$$

où le premier terme représente la variation due au fait que la trajectoire variée n'échantillonne pas le potentiel aux mêmes points que la trajectoire de référence. Le deuxième terme représente pour sa part la variation de l'action due à la modification de géométrie de la trajectoire à potentiel constant.

Traitons d'abord le deuxième terme. On a en fait

$$\begin{aligned} -q \int_a^b \mathcal{A}_\mu \delta dx^\mu &= -q \int_a^b \mathcal{A}_\mu d\delta x^\mu = -q \int_a^b \mathcal{A}_\mu \frac{d\delta x^\mu}{d\tau} d\tau \\ &= [-q \mathcal{A}_\mu \delta x^\mu]_a^b + q \int_a^b \left(\frac{d\mathcal{A}_\mu}{d\tau} d\tau \right) \delta x^\mu. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Le terme tout intégré de l'intégration par parties est identiquement nul, puisque les trajectoires coïncident aux extrémités. La parenthèse dans l'intégrale restante représente l'accroissement $d\mathcal{A}_\mu$ du potentiel quand on passe d'une extrémité à l'autre d'un élément différentiel de la trajectoire de référence. Le potentiel étant une fonction de l'événement auquel il est estimé, nous pourrions écrire:

$$d\mathcal{A}_\mu = \partial_\nu \mathcal{A}_\mu dx^\nu. \quad (5.8)$$

Le deuxième terme s'écrit donc:

$$q \int_a^b \partial_\nu \mathcal{A}_\mu dx^\nu \delta x^\mu. \quad (5.9)$$

Revenons maintenant au premier terme. La variation $\delta \mathcal{A}_\mu$ du potentiel quand on passe de la trajectoire de référence à la trajectoire variée s'écrit $\delta \mathcal{A}_\mu = \partial_\nu \mathcal{A}_\mu \delta x^\nu$. Le terme à intégrer, après une permutation sans conséquences des indices muets, s'écrit donc $\partial_\mu \mathcal{A}_\nu \delta x^\mu dx^\nu$. La variation de l'action d'interaction peut donc finalement s'écrire:

$$\delta S_{\text{Interaction}} = q \int_a^b [\partial_\nu \mathcal{A}_\mu - \partial_\mu \mathcal{A}_\nu] \delta x^\mu dx^\nu. \quad (5.10)$$

En remarquant finalement que, sur la trajectoire de référence, $dx^\nu = (dx^\nu/d\tau)d\tau = U^\nu d\tau$, où U^ν est la 4-vitesse, on peut écrire la variation totale de l'action sous la forme:

$$\delta S = \int_a^b \left[\frac{dP_\mu}{d\tau} - G_\mu \right] \delta x^\mu d\tau , \quad (5.11)$$

avec

$$G_\mu = q [\partial_\mu \mathcal{A}_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu] U^\nu . \quad (5.12)$$

Les équations de Lagrange s'obtiennent alors immédiatement. La variation de l'action ne peut s'annuler au premier ordre dans les écarts entre les trajectoires que si tous les coefficients des δx^μ sont identiquement nuls. Les équations de mouvement s'écrivent donc:

$$\frac{dP_\mu}{d\tau} = G_\mu , \quad (5.13)$$

la quantité G_μ n'étant autre que la 4-force que nous avons pressentie au chapitre précédent. Notons que cette équation 4-vectorielle contient aussi bien la variation de l'énergie de la particule que celle de sa quantité de mouvement.

La force s'exprime en fonction du rotationnel du potentiel, qui est un tenseur de rang deux, antisymétrique, écrit ici sous sa forme complètement covariante. Nous appellerons tenseur champ ce rotationnel et nous poserons:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathcal{A}_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu . \quad (5.14)$$

La force à laquelle est soumise la particule s'écrit alors simplement:

$$G_\mu = q F_{\mu\nu} U^\nu \quad (5.15)$$

et n'est pas autre chose que la contraction du tenseur champ avec la vitesse de la particule.

5.1.2 Tenseur champ électromagnétique

$F_{\mu\nu}$ est par définition un tenseur antisymétrique de rang 2, le 4-rotationnel du potentiel ($V/c, \mathbf{A}$). Il ne dépend donc que de six coordonnées indépendantes. Les trois coordonnées spatio-temporelles forment les composantes d'un vecteur spatial, alors que les trois coordonnées purement spatiales forment les composantes d'un pseudo-vecteur.

On peut écrire les composantes spatio-temporelles sous la forme:

$$\begin{aligned} F_{0i} &= \partial_0 \mathcal{A}_i - \partial_i \mathcal{A}_0 \\ &= \frac{1}{c} \left(-\frac{\partial \mathcal{A}_i}{\partial t} - \partial_i V \right) \\ &= \frac{E_i}{c} , \end{aligned} \quad (5.16)$$

en posant

$$\mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} . \quad (5.17)$$

Nous nommerons bien sûr "champ électrique" le vrai vecteur spatial ainsi défini.

Nous pouvons de même mettre les composantes purement spatiales du tenseur champ sous la forme:

$$F_{12} = -B_z \quad (5.18)$$

$$F_{13} = B_y \quad (5.19)$$

$$F_{23} = -B_x , \quad (5.20)$$

en introduisant le pseudo-vecteur “champ magnétique”

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (5.21)$$

De manière toute naturelle, notre théorie de champ décrite par un 4-vecteur potentiel s'exprime en fonction de deux champs et ressemble de plus en plus à l'électromagnétisme de Maxwell.

On peut écrire F sous forme matricielle:

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ -E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.22)$$

ou encore, sous forme complètement contravariante:

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.23)$$

L'invariance de jauge est contenue dans la définition même du tenseur champ électromagnétique en fonction du potentiel. L'équation du mouvement de la particule (qui a seule un sens physique non ambigu) est inchangée si nous ajoutons au 4-potential un 4-gradient arbitraire. Posons en effet

$$\mathcal{A}'_\mu = \mathcal{A}_\mu + \partial_\mu \Phi, \quad (5.24)$$

où Φ est un champ de 4-scalaires arbitraire. Le ‘nouveau’ tenseur champ est alors

$$F'_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathcal{A}'_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}'_\mu = \partial_\mu \mathcal{A}'_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}'_\mu + \partial_\mu \partial_\nu \Phi - \partial_\nu \partial_\mu \Phi, \quad (5.25)$$

les deux derniers termes s'annulant évidemment. Le tenseur champ est donc inchangé. En exprimant cette transformation en termes des composantes spatiales et temporelles du potentiel, nous retrouvons la forme standard de la transformation de jauge:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &\longrightarrow \mathbf{A} - \nabla \Phi \\ V &\longrightarrow V + \frac{\partial \Phi}{\partial t}. \end{aligned} \quad (5.26)$$

Pour lever l'ambiguïté sur le potentiel, nous pouvons imposer une condition de jauge supplémentaire. Pour respecter l'invariance relativiste, cette condition de jauge se doit d'être manifestement covariante. La plus naturelle, la “jauge de Lorentz”, est d'imposer la nullité de la 4-divergence du potentiel:

$$\partial_\mu \mathcal{A}^\mu = 0, \quad (5.27)$$

qui s'écrit en termes des composantes spatiales et temporelles:

$$\frac{1}{c^2} \frac{dV}{dt} + \nabla \cdot \mathbf{A} = 0. \quad (5.28)$$

Notons que la jauge de l'électrostatique, ou jauge de Coulomb, $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, brise la covariance. Si elle peut être employée sans restriction dans un référentiel donné (elle est très largement utilisée en particulier en physique atomique pour traiter de l'interaction d'un atome avec le champ), elle est à proscrire quand s'imposent des changements de référentiel.

5.1.3 Force de Lorentz

Pour nous rapprocher encore de l'électromagnétisme sous sa forme classique, nous allons exprimer la force tridimensionnelle subie par la particule chargée dans un référentiel donné en fonction des champs électriques et magnétiques. En fonction du temps t dans le référentiel \mathcal{R} , l'équation de la dynamique s'écrit:

$$\gamma \frac{dP_\mu}{dt} = \gamma \left(\frac{d\mathcal{E}/c}{dt}, -\frac{d\mathbf{p}}{dt} \right) = qF_{\mu\nu}U^\nu, \quad (5.29)$$

où \mathcal{E} est l'énergie totale de la particule et \mathbf{p} sa quantité de mouvement tridimensionnelle. En développant le dernier terme (qui peut s'écrire simplement comme un produit matriciel) et en isolant les composantes temporelles et spatiales, on trouve:

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = q\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}, \quad (5.30)$$

où \mathbf{v} est la vitesse de la particule dans \mathcal{R} et

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (5.31)$$

On retrouve ainsi, dans un référentiel donné, la forme standard de la force de Lorentz. On trouve aussi que la variation d'énergie est entièrement due au champ électrique. Bien sûr, dans ces équations, \mathcal{E} et \mathbf{p} sont des quantités relativistes ($\mathcal{E} = m\gamma c^2$ et $\mathbf{p} = m\gamma\mathbf{v}$). La dynamique de la particule est donc en général différente de la dynamique classique.

Comme la force de Lorentz est la première force que nous ayons explicitée dans le cadre relativiste, nous allons, à titre d'application et d'exemple, étudier en détail le mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique ou électrique uniforme, statique. Nous verrons ainsi comment la nature relativiste du mouvement modifie la dynamique et nous pourrons jeter un regard nouveau sur la notion de vitesse limite.

Champ magnétique uniforme

Nous nous placerons, dans ce paragraphe et le suivant, dans un référentiel particulier \mathcal{R} et nous abandonnerons donc la covariance manifeste. Nous considérerons le mouvement d'une particule dans un champ magnétique \mathbf{B} uniforme et constant.

Le champ magnétique ne modifiant pas l'énergie totale de la particule, le facteur γ est une constante et l'équation du mouvement s'écrit simplement:

$$\gamma m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}. \quad (5.32)$$

Elle est donc la même que dans le cas non relativiste, avec la simple substitution de la masse m par γm . En particulier, la trajectoire est une hélice admettant le champ magnétique pour axe, avec un rayon

$$R = \gamma \frac{mv}{qB}, \quad (5.33)$$

où v est le module de la vitesse perpendiculaire au champ magnétique. la pulsation du mouvement circulaire uniforme dans le plan perpendiculaire à \mathbf{B} (pulsation cyclotron) étant:

$$\omega_c = \frac{qB}{m\gamma}. \quad (5.34)$$

S'il n'y a pas de différence qualitative entre le mouvement relativiste et le mouvement classique, le facteur γ induit néanmoins des complications techniques dans les applications. Dans de nombreux types d'accélérateurs, un champ magnétique est utilisé pour confiner les particules au voisinage d'une

trajectoire circulaire. Le facteur γ fait que le rayon de ces trajectoires est, pour des particules ultra-relativistes, beaucoup plus grand que ce que prédit la mécanique classique. L'encombrement de ce type de dispositif est en partie dû à cet effet². De plus, la fréquence des champs accélérateurs, qui doit être adaptée à la fréquence cyclotron, doit être ajustée pendant toute la phase d'accélération pour tenir compte de la variation de ce facteur relativiste.

Notons que cette "contraction" relativiste de la fréquence cyclotron peut être mise en évidence même pour des électrons de très basse énergie. Dans une très spectaculaire série d'expériences, Hans Dehmelt et ses collaborateurs (Université de Seattle) ont étudié, dans les années 1980, des électrons confinés dans un piège constitué d'un champ magnétique et d'un champ quadripolaire électrique (piège de Penning). Ils ont ainsi mesuré avec une précision remarquable, sur un électron unique, le célèbre "facteur gyromagnétique anormal", qui constitue un test sévère de l'électrodynamique quantique. Une des étapes de l'expérience est d'exciter, par un champ radiofréquence convenable, le mouvement cyclotron de l'électron. Dehmelt a pu observer³ que la fréquence de résonance cyclotron se déplace avec l'énergie de l'électron, conformément à la loi relativiste. Les énergies mises en jeu n'étant que d'une fraction d'électron-volt, on pourra juger de la sensibilité de l'expérience.

Champ électrique uniforme

Nous considérerons maintenant le mouvement d'une particule dans un champ électrique uniforme et constant. Pour simplifier l'algèbre, sans trop restreindre la physique, nous prendrons comme condition initiale une particule au repos. Le champ électrique étant par convention orienté le long de l'axe Ox , il est évident que le mouvement s'effectue le long de cet axe. L'équation de la dynamique, projetée sur Ox , s'écrit alors:

$$m \frac{d\gamma \dot{x}}{dt} = qE . \quad (5.35)$$

Dans ce cas, bien sûr, l'énergie de la particule et donc le facteur γ ne sont pas des constantes. On tire de cette équation immédiatement:

$$\gamma \dot{x} = \frac{\dot{x}}{\sqrt{1 - \dot{x}^2/c^2}} = \frac{qEt}{m} = V , \quad (5.36)$$

où nous posons, pour alléger les notations, $V = qEt/m$ (notons que V serait la vitesse de la particule si nous ne tenions pas compte des corrections relativistes au mouvement), la valeur initiale de cette quantité étant nulle par convention.

On déduit alors de ce qui précède:

$$\dot{x} = \frac{V}{\sqrt{1 + V^2/c^2}} , \quad (5.37)$$

qui s'intègre aisément en

$$x = \frac{mc^2}{qE} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{qEt}{mc} \right)^2} - 1 \right] , \quad (5.38)$$

à condition de prendre $x = 0$ comme condition initiale.

Pour des temps suffisamment petits, la vitesse de la particule est faible et on peut développer l'expression précédente au premier ordre en qEt/mc . On trouve alors

$$x = \frac{1}{2m} qEt^2 , \quad (5.39)$$

²Un autre effet important limite la compacité des accélérateurs: plus une particule est accélérée, plus elle perd d'énergie par rayonnement. Nous discuterons de ce "rayonnement de freinage" dans un prochain chapitre. Pour des particules légères (électrons), cet effet est la principale limitation au rayon des accélérateurs. Notons aussi que les accélérateurs linéaires échappent largement à ces deux types de limitations.

³G. Gabrielse *et al.* Phys. Rev. Lett. **54**, 537 (1985).

mouvement uniformément accéléré de la dynamique classique. Aux temps longs, en revanche, x tend simplement vers ct : la vitesse de la particule tend vers la vitesse de la lumière, comme nous pouvions nous y attendre. On pourra montrer, à titre d'exercice, que la rapidité de la particule continue, pour sa part, à croître indéfiniment. La généralisation de ce calcul à trois dimensions ne pose aucune autre difficulté qu'algébrique.

5.1.4 Changements de référentiels pour le champ

La formulation explicitement relativiste du tenseur champ électromagnétique nous permet d'écrire sans difficultés la loi de transformation des champs dans un changement de référentiel. Nous aurons en effet:

$$F'^{\mu\nu}(x'^{\alpha} = \mathcal{L}^{\alpha}_{\beta}x^{\beta}) = \mathcal{L}^{\mu}_{\rho}\mathcal{L}^{\nu}_{\sigma}F^{\rho\sigma}(x^{\beta}), \quad (5.40)$$

où les quantités primées sont relatives au nouveau référentiel. Le champ étant un champ de tenseur, il est une fonction de l'événement auquel il est estimé. Il faut bien sûr estimer le champ dans les deux référentiels pris au même événement et donc à des coordonnées spatio-temporelles qui se déduisent les unes des autres dans une transformation de Lorentz. Dans l'expression précédente, \mathcal{L} peut décrire n'importe quel élément du groupe de Lorentz le plus général.

Nous préciserons maintenant les nouvelles valeurs du champ pour une transformation spéciale de Lorentz avec les conventions habituelles pour l'orientation des axes. Le calcul ne présente aucune difficulté de principe. Il faut toutefois prendre garde que le produit de "tenseurs" au second membre ne peut être calculé directement comme un produit de leurs trois représentations matricielles. Les deux derniers termes correspondent en effet à une sommation sur deux indices colonne. On peut mettre le calcul sous la forme de produits matriciels standard en effectuant les transpositions nécessaires. Après quelques lignes d'algèbre, on arrive aux lois suivantes pour les transformations des composantes des champs électriques et magnétiques ⁴ :

$$E'_x = E_x \quad (5.41)$$

$$E'_y = \gamma(E_y - c\beta B_z) \quad (5.42)$$

$$E'_z = \gamma(E_z + c\beta B_y) \quad (5.43)$$

$$B'_x = B_x \quad (5.44)$$

$$B'_y = \gamma(B_y + \beta \frac{E_z}{c}) \quad (5.45)$$

$$B'_z = \gamma(B_z - \beta \frac{E_y}{c}). \quad (5.46)$$

La transformation inverse s'obtient trivialement en changeant le signe de β . Si, jusqu'alors, nous n'avions fait que retrouver les caractéristiques essentielles de l'électromagnétisme (il n'est peut-être plus utile de cacher que notre théorie de champ est bien l'électromagnétisme), nous obtenons ici, grâce à la formulation manifestement covariante, un résultat nouveau et fort important.

On peut obtenir une approximation galiléenne à la loi de transformation des champs en ne gardant que l'ordre le plus bas en u/c dans les équations précédentes. On obtient alors, sous forme vectorielle:

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} - \mathbf{B} \times \mathbf{u} \quad (5.47)$$

$$\mathbf{B}' = \mathbf{B} + \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{u}}{c^2}. \quad (5.48)$$

⁴On notera que ces expressions ne sont pas invariantes par échange de y et z . Ceci n'est en rien contradictoire avec la symétrie du problème. Echanger ces axes revient à changer l'orientation de l'espace et donc le signe de \mathbf{B} qui est un pseudo-vecteur.

5.1.5 Invariants du champ électromagnétique

On peut se poser le problème de former des quantités 4-scalaires à partir du tenseur champ. De telles quantités seront en effet conservées dans un changement de référentiel et constitueront des invariants du champ électromagnétique, fort utiles. Là encore, nous allons ajouter des résultats nouveaux à l'électromagnétisme standard. Nous ne chercherons pas systématiquement tous les invariants possibles. En fait, il n'en existe que deux qui présentent un intérêt physique⁵.

Formons d'abord la quantité:

$$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} . \quad (5.49)$$

Cette quantité est manifestement un 4-scalaire et donc un invariant du champ. Ecrivons-la en termes des champs électriques et magnétiques pour en comprendre la signification physique. Interviennent des composantes spatio-temporelles et des composantes spatiales. La contribution des composantes spatio-temporelles est manifestement $2F_{0i}F^{0i}$ (en effet les deux termes se déduisant l'un de l'autre par permutation des indices sont manifestement égaux en raison de l'antisymétrie de F) ou encore $-2E^2/c^2$. De même, les composantes spatiales font intervenir le carré scalaire du champ magnétique et on a enfin:

$$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = \frac{2}{c^2}(c^2B^2 - E^2) . \quad (5.50)$$

La quantité $c^2B^2 - E^2$ est donc un invariant du champ.

Donnons dès maintenant une application de cet invariant. Dans un référentiel \mathcal{R} , considérons une onde électromagnétique plane. Les modules du champ électrique et du champ magnétique sont reliés par $E = cB$. L'invariant du champ considéré est donc nul. Dans un autre référentiel, sans préjuger de la structure du champ⁶, on aura aussi $E' = cB'$.

Le deuxième invariant que nous allons former s'écrit:

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma} , \quad (5.51)$$

où ϵ est le tenseur complètement antisymétrique de rang 4. Rappelons rapidement que les éléments de ce tenseur valent +1 si les quatre indices sont une permutation paire de (0, 1, 2, 3), -1 si ils constituent une permutation impaire, 0 dans tous les autres cas.

Il n'y a donc dans cet invariant que 24 termes non nuls. En fait, ces termes sont égaux 8 à 8. Si nous considérons une permutation μ, ν, ρ, σ donnée, nous obtenons en effet un terme identique en échangeant μ et ν et/ou ρ et σ (le tenseur antisymétrique et le tenseur champ concernés changent tous les deux de signe). Il y a donc au total quatre permutations de ce type et 4 termes identiques dans le développement de notre invariant. De plus, nous obtenons un terme identique en échangeant la première paire (μ, ν) et la seconde (ρ, σ). En effet les termes en tenseur champ ne changent pas. Cette permutation des deux paires peut s'effectuer avec quatre permutations des indices. Elle ne change pas non plus la valeur du tenseur antisymétrique. Ensuite, les opérations de permutations à l'intérieur des paires ainsi permutées peuvent être effectuées sans changer la valeur. Nous introduisons ainsi quatre nouvelles permutations des indices donnant la même valeur. Au total, il y a donc 8 termes identiques. Comme nous n'avons manifestement que 24 termes non nuls, il n'y a que trois termes différents, correspondant à un ensemble d'indices (par exemple 0,1,2,3) et aux deux manières d'échanger un terme de la première paire et un terme de la deuxième (dans ce cas 2,1,0,3 et 3,1,2,0). Le calcul de ces trois termes est alors trivial à partir de l'expression de F (ϵ valant +1 pour la première permutation et -1 pour les deux autres). On trouve finalement:

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma} = -8(F_{01}F_{23} - F_{21}F_{03} - F_{31}F_{20}) = -8\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}/c , \quad (5.52)$$

un résultat particulièrement simple.

⁵On montrera en particulier que le déterminant de $F^{\mu\nu}$ est proportionnel au carré de notre second invariant

⁶Qui se trouve être également une onde plane dont le vecteur d'onde et le transformé de Lorentz du vecteur d'onde dans \mathcal{R} .

Le produit scalaire des champs électriques et magnétiques est donc invariant dans un changement de référentiel (bien sûr, cette invariance pourrait être établie, de manière assez pénible, directement à partir des lois de transformation). Donnons tout de suite une application de cette propriété. Dans un référentiel, considérons une onde plane. \mathbf{E} et \mathbf{B} sont alors perpendiculaires et leurs modules sont dans un rapport c . Dans un autre référentiel, ils sont donc encore perpendiculaires avec des modules dans un rapport c . Encore une fois, une onde plane se transforme en onde plane.

5.1.6 Premier groupe d'équations de Maxwell

Il nous reste à tirer parti du fait que le tenseur champ est le rotationnel du potentiel. A trois dimensions, cette propriété impliquerait la nullité de sa divergence. Nous allons maintenant établir la propriété correspondante à quatre dimensions. En écrivant cette propriété en termes des champs électriques et magnétiques, nous établirons des relations différentielles entre eux qui ne seront autres que les deux équations de Maxwell homogènes. Nous avons donc

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathcal{A}_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu . \quad (5.53)$$

On en déduit immédiatement:

$$\begin{aligned} \partial_\rho F_{\mu\nu} &= \partial_\rho \partial_\mu \mathcal{A}_\nu - \partial_\rho \partial_\nu \mathcal{A}_\mu \\ \partial_\nu F_{\rho\mu} &= \partial_\nu \partial_\rho \mathcal{A}_\mu - \partial_\nu \partial_\mu \mathcal{A}_\rho \\ \partial_\mu F_{\nu\rho} &= \partial_\mu \partial_\nu \mathcal{A}_\rho - \partial_\mu \partial_\rho \mathcal{A}_\nu \end{aligned} \quad (5.54)$$

En remarquant que les dérivées secondes croisées du potentiel sont égales, et en faisant la somme de ces trois équations, on obtient immédiatement:

$$\partial_\rho F_{\mu\nu} + \partial_\nu F_{\rho\mu} + \partial_\mu F_{\nu\rho} = 0 . \quad (5.55)$$

Cette équation est une conséquence directe du fait que le champ dérive d'un potentiel (c'est d'ailleurs une condition nécessaire et suffisante).

Pour en comprendre la signification physique, écrivons cette équation en termes des champs électriques et magnétiques. Remarquons d'abord que, s'il y a a priori 64 équations possibles, seules 4 ne sont pas triviales. Si les trois indices sont identiques, tous les F sont nuls et l'équation est un truisme. Si deux indices sont égaux (par exemple $\rho = \mu$), l'équation se réduit à $\partial_\mu (F_{\mu\nu} + F_{\nu\mu}) = 0$, une tautologie en raison de l'antisymétrie de F . L'équation n'est non triviale que si les trois indices sont différents et il ne reste donc que quatre équations indépendantes.

La première correspond aux indices 1,2,3. Elle s'écrit:

$$\partial_1 F_{23} + \partial_3 F_{12} + \partial_2 F_{31} = 0 , \quad (5.56)$$

soit encore

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 . \quad (5.57)$$

On montrera de même que les trois autres équations peuvent se résumer, sous forme vectorielle, par:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} . \quad (5.58)$$

Nous retrouvons donc ainsi les équations de Maxwell homogènes, qui sont équivalentes à l'existence d'un potentiel scalaire et d'un potentiel vecteur.

5.2 Champ en fonction des sources

Nous allons maintenant établir les équations qui relient le tenseur champ à ses sources, c'est à dire au mouvement des particules chargées. Dans le paragraphe précédent, nous nous intéressions au mouvement d'une particule unique. Les variables dynamiques du problème étaient donc la position et l'impulsion de la particule, situation habituelle en mécanique analytique. Dans tout ce chapitre, conformément à notre programme initial, nous supposerons imposées les dynamiques des particules (c'est à dire le courant) et nous ne nous intéresserons qu'à la dynamique du champ. Les variables dynamiques sont donc les valeurs du potentiel ou des champs en tous points de l'espace et à chaque instant. Il nous faudra donc adapter nos techniques variationnelles pour des variables dynamiques continues. En particulier, nous n'écrirons plus l'action en termes de lagrangien mais d'une densité de lagrangien que nous intégrerons sur tout l'espace et sur le temps pour obtenir l'action. Il nous faudra aussi réécrire l'action d'interaction comme l'intégrale sur tout l'espace d'une densité de lagrangien qui devra faire intervenir le 4-vecteur courant au lieu des positions et vitesses individuelles des particules.

Le fait que nous traitons de plusieurs particules pose une difficulté technique immédiate. Pour obtenir les équations du mouvement d'une particule unique, nous avons intégré le lagrangien entre deux événements limites relatifs à cette particule. Nous ne pouvons définir de façon aussi simple les bornes d'intégration si nous considérons plusieurs particules qui ne partagent pas le même temps propre. Pour éviter toute difficulté ou le recours à un formalisme complexe nous éluderons le problème en nous plaçant, pour un temps, **dans un référentiel donné \mathcal{R}** . Dans ce référentiel, le temps est bien défini, et nous pourrons intégrer la densité de lagrangien entre deux instants de référence. Nous n'aurons à manipuler que des intégrales d'espace et de temps sous forme habituelle. En abandonnant ainsi la covariance manifeste, nous risquons bien sûr d'obtenir des équations de Lagrange qui ne seraient pas des invariants relativistes. Nous verrons qu'il n'en sera heureusement rien: les équations que nous obtiendrons dans un référentiel donné s'écriront en termes de quantités explicitement covariantes, et seront donc valables dans n'importe quel référentiel.

5.2.1 Interaction champ-courant

Nous allons, dans ce premier paragraphe, réécrire l'action d'interaction en termes du courant macroscopique. Nous considérons un ensemble de particules chargées ponctuelles, dont le mouvement est imposé, que nous indiquerons par un indice α entre parenthèses, pour éviter toute confusion entre cet indice qui numérote simplement les particules et un indice relativiste en position covariante.

Le 4-vecteur courant J^μ peut donc s'écrire: $J^\mu = (c\rho, \mathbf{j})$ avec:

$$\rho = \sum_{\alpha} q_{(\alpha)} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{(\alpha)}) \quad (5.59)$$

$$\mathbf{j} = \sum_{\alpha} q_{(\alpha)} \mathbf{v}_{(\alpha)} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{(\alpha)}) , \quad (5.60)$$

où $q_{(\alpha)}$, $\mathbf{r}_{(\alpha)}$ et $\mathbf{v}_{(\alpha)}$ sont respectivement la charge, la position et la vitesse de la particule α . En généralisant l'action d'interaction introduite au paragraphe précédent, on écrira:

$$\begin{aligned} S_{\text{Interaction}} &= - \sum_{\alpha} q_{(\alpha)} \int_{t_a}^{t_b} \mathcal{A}_{\mu}(x^{\nu}_{(\alpha)}) U^{\mu}_{(\alpha)} d\tau_{(\alpha)} \\ &= - \sum_{\alpha} q_{(\alpha)} \int_{t_a}^{t_b} \mathcal{A}_{\mu}(x^{\nu}_{(\alpha)}) \frac{U^{\mu}_{(\alpha)}}{\gamma_{(\alpha)}} dt , \end{aligned} \quad (5.61)$$

où $x^{\nu}_{(\alpha)}$ et $U^{\mu}_{(\alpha)}$ sont la position et la 4-vitesse de la particule α . Les temps t_a et t_b sont les instants dans \mathcal{R} où nous spécifierons les conditions initiales imposées au champ. $\tau_{(\alpha)}$ est le temps propre de la particule α , qui peut être paramétré lui même par le temps t du référentiel \mathcal{R} dans lequel nous

nous sommes placés. En raison de la “dilatation des temps”, $d\tau_{(\alpha)} = dt/\gamma_{(\alpha)}$ où $\gamma_{(\alpha)}$ est le facteur de dilatation relativiste calculé à chaque instant avec la vitesse de la particule α . On a donc

$$\frac{U^\mu}{\gamma_{(\alpha)}} = (q_{(\alpha)}c, q_{(\alpha)}\mathbf{v}_{(\alpha)}) , \quad (5.62)$$

en séparant les parties spatiales et temporelles.

Pour mettre l’expression précédente sous la forme de l’intégrale d’une densité de lagrangien, on peut écrire:

$$\mathcal{A}_\mu(x_{(\alpha)}^\nu) = \int dV \mathcal{A}_\mu(ct, \mathbf{r})\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{(\alpha)}(t)) , \quad (5.63)$$

l’intégrale portant sur tout l’espace.

En substituant ces expressions dans l’expression de l’action, on trouve finalement :

$$S_{\text{Interaction}} = - \int_{t_a}^{t_b} dt \int dV \left[\sum_{\alpha} q_{(\alpha)} \frac{U^\mu}{\gamma_{(\alpha)}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{(\alpha)}(t)) \right] \mathcal{A}_\mu(ct, \mathbf{r}) \quad (5.64)$$

Le 4-vecteur entre crochets a pour composantes spatiales et temporelles

$$\sum_{\alpha} (q_{(\alpha)}c, q_{(\alpha)}\mathbf{v}_{(\alpha)})\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{(\alpha)}(t)) , \quad (5.65)$$

et il s’agit donc simplement du vecteur courant J^μ .

On a donc finalement:

$$S_{\text{Interaction}} = \int_{t_a}^{t_b} dt \int dV \mathcal{L}_{\text{Interaction}} \quad (5.66)$$

où la densité de lagrangien d’interaction s’exprime par:

$$\mathcal{L}_{\text{Interaction}} = -\mathcal{A}_\mu J^\mu . \quad (5.67)$$

Bien que nous ayons établi cette expression dans un référentiel donné, elle est manifestement un 4-scalaire et est donc correcte dans tous les référentiels.

5.2.2 Lagrangien du champ

Il nous faut maintenant postuler l’expression de la densité de lagrangien pour le champ libre. Nous allons choisir bien sûr une quantité qui soit manifestement un 4-scalaire. Il faudra de plus qu’elle soit invariante de jauge et donc qu’elle ne s’exprime en définitive qu’en fonction du tenseur champ et non du potentiel. Enfin, il faudra que ce soit une quantité quadratique dans le champ. Une densité de lagrangien est en effet homogène à une densité d’énergie qui doit être une fonction quadratique des variables dynamiques. Les deux invariants scalaires du champ que nous avons construits au paragraphe précédent remplissent tous deux ces conditions. Le second, équivalent au produit scalaire des champs électriques et magnétiques, ne semble pas convenir. On ne voit pas, en particulier, comment il pourrait décrire de façon convenable une situation purement électrostatique. Seule l’autre invariant est convenable et nous postulerons que la densité de lagrangien pour le champ libre peut s’écrire:

$$\mathcal{L}_{\text{Champ Libre}} = -\frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = -\frac{\epsilon_0}{2} (c^2 B^2 - E^2) \quad (5.68)$$

où μ_0 est a priori une constante dimensionnelle telle que la densité de lagrangien ait la dimension d’une densité d’énergie. L’action totale intégrée entre les instants t_a et t_b s’écrit donc:

$$S = S_{\text{Particules Libres}} + \int_{t_a}^{t_b} dt \int dV \left[-\mathcal{A}_\mu J^\mu - \frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right] . \quad (5.69)$$

Dans cette expression, l’action des particules libres est une simple constante, puisque leur dynamique est imposée.

5.2.3 Equations de Lagrange

Pour établir les équations de Lagrange, nous allons considérer, entre les deux instants de référence t_a et t_b , deux histoires possibles du champ. L'une, qui sera la "trajectoire effectivement suivie", autrement dit la solution des équations de Lagrange, correspondra, à chaque instant, au potentiel \mathcal{A}_μ . L'autre, infinitésimalement différente, correspondra au potentiel $\mathcal{A}_\mu + \delta\mathcal{A}_\mu$. Pour assurer que le champ vrai et le champ varié obéissent aux mêmes conditions aux limites, nous imposerons à l'accroissement infinitésimal $\delta\mathcal{A}$ de s'annuler, en tous points de l'espace, en t_a et en t_b . Nous allons ensuite exprimer la variation de l'action due à cette variation du potentiel en tous points de l'espace à chaque instant. En exprimant que cette variation est nulle au premier ordre dans l'accroissement, quel que soit celui-ci, nous obtiendrons une relation qui devra être vérifiée par le champ en tous points, à tout instant. Ce raisonnement généralise de façon évidente à un ensemble continu de variables dynamiques celui que nous avons déjà utilisé fréquemment pour un nombre fini de degrés de liberté.

La trajectoire des particules étant imposée, le courant ne doit pas être varié et la variation de l'action totale, s'écrit donc:

$$\delta S = - \int_{t_a}^{t_b} dt \int dV \left[\delta(\mathcal{A}_\mu) J^\mu + \frac{1}{4\mu_0} \delta(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) \right]. \quad (5.70)$$

On a de manière évidente:

$$\delta(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) = 2F^{\mu\nu} (\delta F_{\mu\nu}). \quad (5.71)$$

En exprimant ensuite $\delta F_{\mu\nu}$ en termes du potentiel, on a:

$$\delta S = - \int_{t_a}^{t_b} dt \int dV \left[\delta(\mathcal{A}_\mu) J^\mu + \frac{1}{2\mu_0} F^{\mu\nu} \partial_\mu \delta\mathcal{A}_\nu - \frac{1}{2\mu_0} F^{\mu\nu} \partial_\nu \delta\mathcal{A}_\mu \right]. \quad (5.72)$$

En permutant les deux indices muets du terme central, et en utilisant l'antisymétrie de F , on constate que les deux derniers termes dans l'intégrale sont égaux, et que donc:

$$\delta S = - \int_{t_a}^{t_b} dt \int dV \left[\delta(\mathcal{A}_\mu) J^\mu - \frac{1}{\mu_0} F^{\mu\nu} \partial_\nu \delta\mathcal{A}_\mu \right]. \quad (5.73)$$

Considérons le deuxième terme dans l'intégrale. A un facteur $1/c$ près, il s'agit de l'intégrale d'espace temps d'une quantité scalaire. Le volume d'intégration \mathcal{V} est l'ensemble de l'espace à trois dimensions pris entre les instants t_a et t_b . En utilisant le théorème d'Ostrogradski pour les intégrales quadridimensionnelles, on peut réaliser sur ce terme une intégration par parties. En posant $d\Omega = c dt dV$ on a en effet:

$$\int_{\mathcal{V}} d\Omega F^{\mu\nu} \partial_\nu \delta\mathcal{A}_\mu = \int_{\mathcal{S}} F^{\mu\nu} \delta\mathcal{A}_\mu dS_\nu - \int_{\mathcal{V}} d\Omega (\partial_\nu F^{\mu\nu}) \delta\mathcal{A}_\mu, \quad (5.74)$$

la surface \mathcal{S} , à trois dimensions, étant la frontière du volume \mathcal{V} et dS_ν l'élément différentiel de cette surface. Cette surface est constituée de l'ensemble de l'espace pris à l'instant initial t_a , de la sphère de l'infini (une sphère de rayon R , dont on prend la limite pour $R \rightarrow \infty$) à tous les instants entre t_a et t_b et à nouveau de tout l'espace à l'instant final t_b . L'accroissement du potentiel est nul aux instants limites en tous points de l'espace. Il est nul aussi, ainsi que tous les champs physiques, en tous points de la sphère de l'infini à chaque instant. L'intégrale de surface dans l'expression précédente est donc identiquement nulle. Notons que nous retrouvons ici, sous une forme un peu plus complexe, l'intégration par parties à laquelle nous devons toujours procéder pour établir les équations de Lagrange.

L'accroissement de l'action s'écrit donc finalement:

$$\delta S = - \int_{t_a}^{t_b} dt \int dV \left[J^\mu + \frac{1}{\mu_0} \partial_\nu F^{\mu\nu} \right] \delta\mathcal{A}_\mu. \quad (5.75)$$

Elle ne peut être nulle quel que soit l'accroissement du potentiel que si le champ entre crochets est identiquement nul. Les équations de Lagrange déterminant le champ en fonction des sources s'écrivent donc simplement (au prix d'un échange des indices muets et en utilisant l'antisymétrie de F):

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 J^\nu . \quad (5.76)$$

Dans tout ce raisonnement, nous avons abandonné la covariance manifeste en nous plaçant dans un référentiel donné. En revanche, les équations obtenues ne font intervenir que des quantités covariantes. Elles sont donc très générales, et valables dans tout référentiel galiléen.

Nous pouvons maintenant écrire simplement ces équations en termes du potentiel. En reportant l'expression de F , nous avons:

$$\partial_\mu \partial^\mu \mathcal{A}^\nu - \partial^\nu \partial_\mu \mathcal{A}^\mu = \mu_0 J^\nu , \quad (5.77)$$

ou a a échangé sans conséquences deux opérateurs dérivation dans le dernier terme. Si nous imposons au potentiel vecteur d'obéir à la condition de Jauge de Lorentz $\partial_\mu \mathcal{A}^\mu = 0$, le deuxième terme s'annule (on permutera les dérivées partielles pour le constater). L'équation aux potentiels s'écrit alors:

$$\partial_\mu \partial^\mu \mathcal{A}^\nu = \mu_0 J^\nu . \quad (5.78)$$

L'opérateur différentiel n'est autre que le carré de la norme du gradient: c'est le 4-laplacien ou encore le d'alembertien.

5.2.4 Equations de Maxwell

Pour mettre ces équations sous une forme plus familière, nous allons les exprimer en termes des champs électriques et magnétiques. La partie temporelle de cette équation vectorielle s'écrit en effet:

$$\partial_\nu F^{0\nu} = -\mu_0 c \rho , \quad (5.79)$$

ou encore

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \mu_0 c^2 \rho = \rho / \epsilon_0 , \quad (5.80)$$

en posant évidemment $\epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$.

Les trois composantes spatiales se mettent de leur côté évidemment sous la forme:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \left[\mathbf{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right] . \quad (5.81)$$

Les équations aux potentiels, pourvu que ceux-ci obéissent à la Jauge de Lorentz, se mettent sous la forme:

$$\square \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{j} \quad (5.82)$$

$$\square V = \rho / \epsilon_0 , \quad (5.83)$$

où \square est l'opérateur d'alembertien $(1/c^2)\partial^2/\partial t^2 - \Delta$, Δ étant le laplacien.

Les équations de Lagrange décrivant le champ en fonction des charges sont donc bien les équations de Maxwell faisant intervenir les courants. Si on y ajoute les équations de Maxwell homogènes et les équations de Lagrange pour la dynamique des particules qui sont équivalentes à la force de Lorentz on peut déterminer complètement, au moins en principe, la dynamique couplée des particules et du champ. L'électromagnétisme de Maxwell, formulé en termes explicitement covariants, n'est donc que la théorie de champ la plus simple qui soit décrite par un champ de vecteurs. La structure à deux champs de la théorie de Maxwell est une conséquence immédiate de la nature antisymétrique du tenseur exprimant le rotationnel du potentiel. En fait, l'électromagnétisme de Maxwell, sous sa forme standard, est déjà écrit en termes explicitement relativistes ce qui le rend bien sûr incompatible avec la cinématique classique. La découverte des équations de Maxwell aurait été une conséquence immédiate de celle de la relativité. Mais il fallait bien les difficultés soulevées par l'électromagnétisme de Maxwell pour qu'on songe à mettre en doute la mécanique Newtonienne, parfaitement vérifiée par ailleurs.

5.3 Energie–impulsion du champ

Le champ électromagnétique doit posséder une densité d'énergie. Energie et quantité de mouvement n'étant que deux aspects du même 4–vecteur impulsion, il doit aussi exister une densité de quantité de mouvement pour le champ électromagnétique. Enfin, le champ électromagnétique obéissant, comme les particules matérielles, aux grandes propriétés de symétrie par translation dans l'espace ou dans le temps, ces densités d'énergie et d'impulsion, associées à celles des particules, doivent obéir à des lois de conservation. Nous allons, dans ce paragraphe, définir les densités d'énergie et d'impulsion et établir leurs équations bilan, c'est-à-dire étudier leur propagation. Nous pourrions partir de la formulation lagrangienne de l'électromagnétisme et appliquer les grandes lois de symétrie pour établir la forme de ces densités, comme nous l'avons fait pour une particule libre. Nous nous contenterons en fait de postuler la forme d'un tenseur rassemblant ces quantités, d'établir ses propriétés et d'identifier les différents termes. Cette approche est beaucoup moins satisfaisante qu'une approche à partir des premiers principes, mais elle est beaucoup plus compacte.

Pour ce qui est du bilan d'énergie du champ électromagnétique, nous allons bien sûr retrouver des résultats bien connus sur la densité d'énergie du champ électromagnétique et sa propagation décrite par le vecteur de Poynting, dont le flux décrit le transport d'énergie à travers une surface. Nous ne ferons que rappeler très brièvement les propriétés essentielles de ces quantités. Pour la quantité de mouvement, nous obtiendrons en revanche des résultats nouveaux. Nous établirons la forme d'une densité (bien sûr vectorielle) de quantité de mouvement à trois dimensions. Le transfert d'impulsion à travers une surface s'écrira comme le flux d'une quantité tensorielle de rang 2.

5.3.1 Tenseur énergie–impulsion

Posons

$$\theta^{\alpha\beta} = \frac{1}{\mu_0} \left[g^{\alpha\mu} F_{\mu\lambda} F^{\lambda\beta} + \frac{1}{4} g^{\alpha\beta} F_{\mu\lambda} F^{\mu\lambda} \right]. \quad (5.84)$$

Nous nommerons, pour des raisons qui apparaîtront dans un instant, ce tenseur de rang 2, écrit ici sous sa forme doublement contravariante, le tenseur d'énergie impulsion du champ (“stress tensor” dans la littérature anglo-saxonne). Il s'agit d'un tenseur symétrique. La symétrie du deuxième terme du crochet est manifeste. Pour vérifier celle du premier terme, nous écrirons:

$$\begin{aligned} g^{\beta\mu} F_{\mu\lambda} F^{\lambda\alpha} &= F^{\lambda\alpha} F^{\beta}_{\lambda} = F_{\lambda}^{\alpha} F^{\beta\lambda} \\ &= F^{\alpha}_{\lambda} F^{\lambda\beta} = g^{\alpha\mu} F_{\mu\lambda} F^{\lambda\beta}. \end{aligned} \quad (5.85)$$

On a donc bien $\theta^{\alpha\beta} = \theta^{\beta\alpha}$.

Pour nous convaincre de la possible utilité de ce tenseur, nous allons l'écrire en fonction des champs électrique et magnétique. Le deuxième terme est à un facteur près le produit du tenseur métrique, diagonal, par l'invariant $2(B^2 - E^2/c^2)$, densité de lagrangien du champ électromagnétique. Le premier terme fait intervenir $F_{\mu\lambda} F^{\lambda\beta}$ qui se calcule comme un produit matriciel ordinaire. L'action du tenseur métrique est de changer le signe de toutes les lignes ayant un indice spatial dans la représentation matricielle obtenue. En regroupant avec le second terme et après quelques manipulations élémentaires, on peut écrire le tenseur énergie–impulsion sous la forme:

$$\theta^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} u & \Pi_x/c & \Pi_y/c & \Pi_z/c \\ \Pi_x/c & & & \\ \Pi_y/c & & (\mathcal{T}) & \\ \Pi_z/c & & & \end{pmatrix}, \quad (5.86)$$

où

$$u = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} \quad (5.87)$$

et

$$\mathbf{\Pi} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{\mu_0} . \quad (5.88)$$

On reconnaîtra bien sûr ici la densité d'énergie électromagnétique et le vecteur de Poynting.

\mathcal{T} est un tenseur purement spatial de rang 2, que nous nommerons “tenseur de Maxwell”. L'expression de ses composantes est:

$$\mathcal{T}_{ij} = \epsilon_0 \left[\frac{E^2}{2} \delta_{ij} - E_i E_j \right] + \frac{1}{\mu_0} \left[\frac{B^2}{2} \delta_{ij} - B_i B_j \right] , \quad (5.89)$$

où les δ_{ij} sont simplement les symboles de Kronecker. Notons ici que nous faisons une entorse sérieuse à nos conventions de notations. Quand il nous arrivera de manipuler une quantité, vectorielle ou tensorielle qui soit uniquement relative à l'espace ordinaire à trois dimensions, nous placerons tous les indices en position basse, en appliquant donc avec précautions la règle de sommation sur les indices répétés. Notons enfin que pour un tenseur spatial les composantes complètement contravariantes et complètement covariantes coïncident. Nous allons interpréter plus tard la signification physique de ce tenseur.

5.3.2 Lois de conservation. Interprétation

Si θ est associé à la propagation de l'énergie et de la quantité de mouvement, il doit vérifier des équations locales de conservation qui font intervenir sa divergence (on se souviendra de l'équation locale de bilan d'énergie qui fait intervenir la dérivée temporelle de u et la divergence de $\mathbf{\Pi}$, qui sont rassemblées dans la 4-divergence de la première ligne de θ). Nous allons donc calculer le 4-vecteur

$$\partial_\alpha \theta^{\alpha\beta} \quad (5.90)$$

En remarquant que les tenseurs métriques ne se dérivent pas, et que leur seule action est d'élever l'indice des dérivations, on met ce terme sous la forme:

$$\partial_\alpha \theta^{\alpha\beta} = \frac{1}{\mu_0} \left[\partial^\mu (F_{\mu\lambda} F^{\lambda\beta}) + \frac{1}{4} \partial^\beta (F_{\mu\lambda} F^{\mu\lambda}) \right] . \quad (5.91)$$

Le dernier terme peut s'écrire:

$$(\partial^\beta F_{\mu\lambda}) F^{\mu\lambda} + F_{\mu\lambda} \partial^\beta F^{\mu\lambda} . \quad (5.92)$$

Ces deux termes sont manifestement égaux (il suffit d'élever et d'abaisser les mêmes indices pour passer de l'un à l'autre). En développant également le premier terme de la divergence, on a donc:

$$\partial_\alpha \theta^{\alpha\beta} = \frac{1}{\mu_0} \left[(\partial^\mu F_{\mu\lambda}) F^{\lambda\beta} + F_{\mu\lambda} (\partial^\mu F^{\lambda\beta}) + \frac{1}{2} F_{\mu\lambda} (\partial^\beta F^{\mu\lambda}) \right] . \quad (5.93)$$

Le premier terme dans le crochet peut se transformer en utilisant les équations de Maxwell $\partial^\mu F_{\mu\lambda} = \mu_0 J_\lambda$. Après une transformation triviale, on a donc:

$$\partial_\alpha \theta^{\alpha\beta} - J_\lambda F^{\lambda\beta} = \frac{1}{2\mu_0} F_{\mu\lambda} \left[\partial^\mu F^{\lambda\beta} + \partial^\mu F^{\lambda\beta} + \partial^\beta F^{\mu\lambda} \right] , \quad (5.94)$$

où nous avons artificiellement séparé un terme en deux. Les deux derniers termes du crochet peuvent s'écrire $-\partial^\lambda F^{\beta\mu} = \partial^\lambda F^{\mu\beta}$ en utilisant les équations de Maxwell homogènes. On a finalement:

$$\partial_\alpha \theta^{\alpha\beta} - J_\lambda F^{\lambda\beta} = \frac{1}{2\mu_0} F_{\mu\lambda} \left[\partial^\mu F^{\lambda\beta} + \partial^\lambda F^{\mu\beta} \right] . \quad (5.95)$$

Le second membre de cette équation est la contraction d'un tenseur antisymétrique en μ, λ avec un tenseur de rang 3, symétrique en μ, λ . Cette contraction est manifestement nulle. En écrivant le

tenseur de rang 3 $K^{\mu\lambda\beta}$, on a en effet $F_{\mu\lambda}K^{\mu\lambda\beta} = F_{\lambda\mu}K^{\lambda\mu\beta}$, puisque les noms des indices muets sont indifférents. De plus, en raison des propriétés de symétrie des tenseurs, ces deux termes égaux sont opposés. Ils sont donc bien nuls. Finalement, on a

$$\partial_\alpha \theta^{\alpha\beta} = -F^{\beta\lambda} J_\lambda, \quad (5.96)$$

une équation 4-vectorielle. Pour en interpréter la signification physique, nous allons en écrire séparément la composante temporelle et les composantes spatiales et exprimer ces quantités en fonction des densité d'énergie, vecteur de Poynting et tenseur de Maxwell.

Composante temporelle: conservation de l'énergie

La composante temporelle $\beta = 0$ s'écrit simplement:

$$\partial_\alpha \theta^{\alpha 0} = -F^{0\lambda} J_\lambda. \quad (5.97)$$

Il est facile de vérifier que $F^{0\lambda} J_\lambda = -\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}/c$. En regroupant les termes, on trouve l'équation scalaire:

$$\mathbf{j} \cdot \mathbf{E} + \frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{\Pi} = 0. \quad (5.98)$$

Nous retrouvons ici l'équation de conservation de l'énergie électromagnétique que l'on établit dans les cours élémentaires à partir des équations de Maxwell. Rappelons que $\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}$ est la densité de puissance cédée par le champ à la matière⁷. On peut écrire une équation bilan globale en intégrant l'équation précédente sur un volume \mathcal{V} bordé par une surface fermée \mathcal{S} . On a alors:

$$\int_{\mathcal{V}} \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} d\tau + \frac{dU}{dt} + \int_{\mathcal{S}} \mathbf{\Pi} \cdot d\mathbf{S} = 0, \quad (5.99)$$

où $U = \int_{\mathcal{V}} u$ est l'énergie électromagnétique totale dans le volume \mathcal{V} . On trouve donc que la dérivée de l'énergie électromagnétique par rapport au temps est égale à l'opposé de la puissance totale cédée à la matière plus le flux entrant du vecteur de Poynting à travers \mathcal{S} . Le vecteur de Poynting décrit donc bien le transport d'énergie électromagnétique.

Composantes spatiales: conservation de la quantité de mouvement

En remarquant que $F^{i\lambda} J_\lambda = [\rho \mathbf{E}_i + (\mathbf{j} \times \mathbf{B})_i] = \mathbf{f}_i$ n'est autre que la composante i de la densité de force de Lorentz \mathbf{f} , on met les composantes spatiales de notre équation de conservation sous la forme:

$$\frac{d\mathbf{g}}{dt} + \mathbf{f} + \nabla \cdot \mathcal{T} = 0, \quad (5.100)$$

où la notation $\nabla \cdot \mathcal{T}$ désigne le champ de vecteurs $\partial_i \mathcal{T}_{ij}$. Nous avons posé ici

$$\mathbf{g} = \frac{\mathbf{\Pi}}{c^2}. \quad (5.101)$$

Pour dégager plus précisément le sens physique de cette équation, nous l'intégrerons, comme dans le cas de l'énergie, sur un volume \mathcal{V} bordé par une surface fermée \mathcal{S} . On obtient alors:

$$\frac{d\mathbf{P}_m}{dt} + \frac{d\mathbf{G}}{dt} + \int_{\mathcal{S}} \mathcal{T} \cdot d\mathbf{S} = 0, \quad (5.102)$$

où la notation "produit scalaire" $\mathcal{T} \cdot d\mathbf{S}$ désigne la contraction du tenseur \mathcal{T} avec le vecteur élément de surface. Nous avons posé:

$$\frac{d\mathbf{P}_m}{dt} = \int_{\mathcal{V}} \mathbf{f}. \quad (5.103)$$

⁷Cette expression est, comme nous l'avons vu plus haut, correcte même si le mouvement des particules est relativiste.

Ce terme représente donc la variation temporelle de la quantité de mouvement de toutes les particules matérielles contenues dans \mathcal{V} . Il est alors facile d'interpréter le terme $d\mathbf{G}/dt$ avec

$$\mathbf{G} = \int_{\mathcal{V}} \mathbf{g} \quad (5.104)$$

comme la variation dans le temps de la quantité de mouvement totale du rayonnement électromagnétique. Le champ \mathbf{g} représente alors simplement la densité locale de quantité de mouvement du champ. Le bilan de quantité de mouvement apparaît alors de manière transparente si nous interprétons le dernier terme de l'équation (5.102) comme la quantité de mouvement sortant par unité de temps du volume \mathcal{V} . Cette quantité de mouvement, vectorielle, apparaît bien comme le flux à travers \mathcal{S} d'une quantité tensorielle.

Nous venons bien d'établir ici le bilan de quantité de mouvement pour l'ensemble du champ et des particules chargées. Notons que, comme dans le cas du bilan d'énergie, on peut établir cette équation bilan à partir des équations de Maxwell et de la force de Lorentz. On pourra s'en convaincre aisément à titre d'exercice. Il suffit d'écrire la densité de force de Lorentz \mathbf{f} en remplaçant ρ et \mathbf{j} par leurs expressions en termes de \mathbf{E} et \mathbf{B} extraites des équations de Maxwell. Des manipulations algébriques peu agréables permettent alors de mettre le résultat sous la forme de la somme d'une dérivée partielle par rapport au temps et d'une divergence de quantité tensorielle. Une simple identification redonne alors les équations précédentes.

Notons également qu'à la densité d'impulsion du champ correspond aussi une densité de moment cinétique par rapport à un point quelconque, l'origine par exemple. Un champ électromagnétique possède donc un moment cinétique

$$\mathbf{M} = \int \mathbf{r} \times \mathbf{g} . \quad (5.105)$$

Ce moment cinétique permet de résoudre le paradoxe amusant de la "toupie de Feynman". On imagine un disque, tournant autour de l'axe Oz et portant en périphérie une densité linéique de charges, disons positives. Le disque emporte aussi une petite bobine, aussi d'axe Oz , alimentée par une pile. Tout cela est bien sur idéalement sans frottement et de masse arbitrairement faible.

Initialement, le disque est au repos et la pile chargée, avec un moment cinétique matériel nul. La pile se décharge. Le champ magnétique et, donc, le potentiel vecteur changent, créant comme il se doit un champ électrique d'induction. On se convaincra par un argument de symétrie que ce champ est tangentiel au bord du disque. Il crée donc une force sur la répartition de charges et un couple, qui met le disque en rotation. A la fin de la décharge, le disque tourne : il a un moment cinétique non nul.

La conservation du moment cinétique est-elle violée? Non. Le moment cinétique initial est non nul à cause de la densité de moment cinétique du champ électromagnétique (champ électrique des charges et champ magnétique de la bobine). C'est ce moment électromagnétique qui se transforme en moment mécanique dans l'opération. On pourra s'amuser à considérer une géométrie cylindrique plus simple où le calcul est facilement faisable pour le vérifier en détail.

5.3.3 Applications

Un problème d'électrostatique

Nous allons appliquer les bilans d'énergie–quantité de mouvement à quelques situations simples. Nous allons d'abord montrer que l'équation bilan de quantité de mouvement contient simplement la force de Coulomb. Ce calcul montre que ces équations bilans peuvent présenter un intérêt en dehors des phénomènes purement propagatifs. La figure 5.1 illustre notre problème. Deux charges q et $-q$ sont situées sur l'axe Ox en $-a$ et a respectivement. Il n'échappera à personne que le calcul direct de la force de Coulomb entre ces particules ne présente aucune difficulté. Nous allons aborder ce problème par une voie un peu plus difficile. Ecrivons l'équation bilan de quantité de mouvement pour le volume

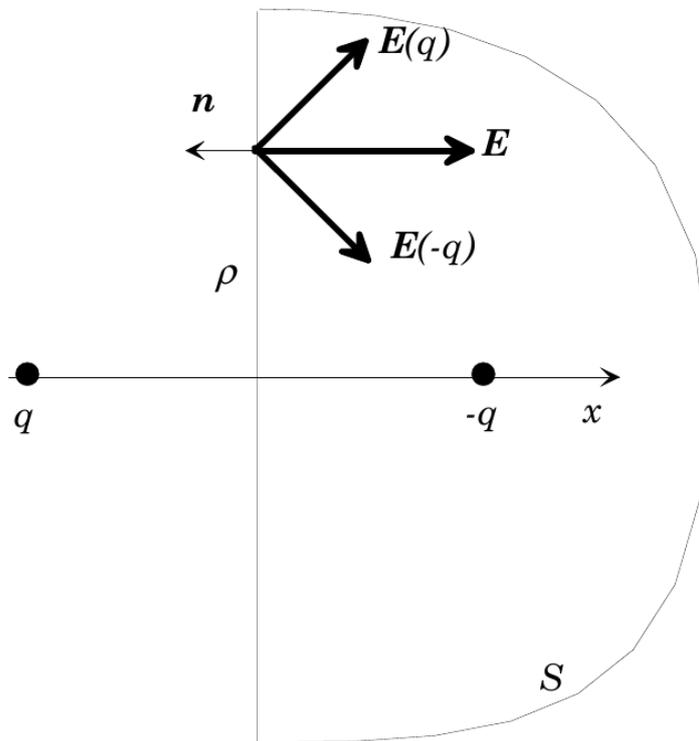


Figure 5.1: La force de Coulomb entre deux charges ponctuelles par le bilan de quantité de mouvement. Deux charges opposées sont disposées symétriquement par rapport au plan zOy . Le champ résultant est, sur ce plan, parallèle à Ox . On établit le bilan d'impulsion dans le demi-espace $x > 0$, limité par la surface S .

\mathcal{V} correspondant au demi-espace $x > 0$. Dans tout ce volume, le champ magnétique est nul. La densité de quantité de mouvement du champ est donc nulle. La variation de la quantité de mouvement de la matière, $d\mathbf{P}_m/dt$, est simplement celle de la charge $-q$ et coïncide avec la force de Coulomb \mathbf{F} subie par cette charge. Notons que le système de charges en l'absence d'autres forces n'est manifestement pas en équilibre. On peut donc écrire la force de Coulomb sous la forme:

$$\mathbf{F} = - \int_{\mathcal{S}} \mathcal{T} \cdot d\mathbf{S} . \quad (5.106)$$

La surface \mathcal{S} bordant le volume \mathcal{V} est simplement constituée du plan $x = 0$ et d'une demi sphère à l'infini. Le champ total étant à grande distance celui d'un dipôle, il décroît avec la distance R comme $1/R^3$. Le tenseur de Maxwell, proportionnel au carré du champ, décroît comme $1/R^6$. L'intégrale sur la demi sphère de l'infini est donc nulle. Sur le plan médiateur, le champ électrique est dirigé selon \mathbf{u}_x : $\mathbf{E} = E(\rho)\mathbf{u}_x$. Son module à une distance ρ de l'axe vaut

$$E(\rho) = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \frac{a}{(a^2 + \rho^2)^{3/2}} . \quad (5.107)$$

Il est facile alors de montrer que, $d\mathbf{S}$ étant orienté selon x , la seule composante du tenseur de Maxwell qui joue un rôle est $\mathcal{T}_{xx} = -\epsilon_0 E(\rho)^2/2$. Le flux de \mathcal{T} sur \mathcal{S} se calcule alors par une intégration triviale en coordonnées polaires:

$$F_x = -\frac{\epsilon_0}{2} \int E^2 dS = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\infty \rho d\rho \frac{a^2}{(a^2 + \rho^2)^3} = -\frac{q^2 a^2}{8\pi\epsilon_0} \int_0^\infty \frac{du}{(u + a^2)^3} , \quad (5.108)$$

où on a posé $u = \rho^2$. L'intégrale de la fraction rationnelle est élémentaire et vaut simplement $1/2a^4$. On trouve donc finalement

$$F_x = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{4a^2} , \quad (5.109)$$

ce qui est bien le résultat attendu, avec une séparation des charges égale à $2a$. Cet exercice facile d'électrostatique nous fait comprendre l'intérêt des équations bilans d'impulsion, même dans un cas où il n'y a pas d'effets propagatifs.

Cas de l'onde plane monochromatique

Nous allons maintenant écrire les bilans d'énergie et de quantité de mouvement dans le cas beaucoup plus important de l'onde plane. Nous allons en particulier pouvoir préciser nos interprétations en termes de photons.

Nous considérons donc une onde plane monochromatique, polarisée linéairement. Elle se propage selon Oz , le champ électrique est aligné selon Ox . La pulsation de l'onde est ω . Les champs électriques et magnétiques s'écrivent donc:

$$\mathbf{E} = E_0 \mathbf{u}_x \cos(kz - \omega t) \quad (5.110)$$

$$\mathbf{B} = \frac{E_0}{c} \mathbf{u}_y \cos(kz - \omega t) \quad (5.111)$$

avec $\omega = ck$ Le vecteur de Poynting est alors dirigé selon u_z (l'énergie se propage manifestement dans cette direction) et vaut:

$$\mathbf{\Pi} = \epsilon_0 c E_0^2 \cos^2(kz - \omega t) \mathbf{u}_z . \quad (5.112)$$

On ne s'intéresse souvent qu'à la moyenne temporelle de ce vecteur (les oscillations à la fréquence 2ω n'étant pas détectables, le plus souvent, dans des mesures énergétiques). On a bien sûr:

$$\overline{\mathbf{\Pi}} = \frac{\epsilon_0 E_0^2 c}{2} \mathbf{u}_z . \quad (5.113)$$

La valeur moyenne de la densité d'impulsion est donc:

$$\bar{\mathbf{g}} = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2c} \mathbf{u}_z = \frac{\bar{\Pi}}{c^2} . \quad (5.114)$$

La densité d'énergie électrique est égale à la densité d'énergie magnétique. La densité d'énergie électromagnétique instantanée s'écrit donc:

$$u = \epsilon_0 E_0^2 \cos^2(kz - \omega t) , \quad (5.115)$$

et sa valeur moyenne vaut:

$$\bar{u} = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2} . \quad (5.116)$$

On remarque immédiatement que

$$\bar{u} = \frac{\bar{\Pi}}{c} \quad (5.117)$$

$$\bar{\mathbf{g}} = \frac{\bar{u}}{c} . \quad (5.118)$$

Nous pouvons comprendre quantitativement ces relations importantes en termes de densité numérique de photons. Si nous avons N photons par unité de volume, la quantité moyenne d'énergie traversant par unité de temps une surface d'aire S perpendiculaire à l'axe de propagation sera égale d'une part à $\bar{\Pi}S$ et d'autre part à $\bar{u}cS$ (en un laps de temps dt un "volume" d'onde égal à $c dt S$ "traverse" la surface). On obtient ainsi la première relation: $\bar{u} = \bar{\Pi}/c$. La densité numérique N de photons est $N = \bar{u}/\hbar\omega$. La densité d'impulsion $N\hbar\omega/c$ est donc bien \bar{u}/c .

Exprimons enfin le tenseur de Maxwell. Les écritures ne présentent aucune difficulté. On trouve que seule la composante \mathcal{T}_{zz} est non nulle et vaut précisément u (en valeur instantanée et donc aussi en valeur moyenne). L'onde transmet donc dans la direction z une quantité de mouvement elle aussi alignée dans la direction z . Précisons ce bilan d'impulsion en considérant le cas d'un diaphragme parfaitement absorbant d'aire S perpendiculaire à l'axe Oz . Le seul effet de ce diaphragme est d'annuler l'onde incidente immédiatement derrière lui (à plus grande distance, la diffraction par les bords du cylindre jouera un rôle et le champ électromagnétique ne sera pas exactement nul dans l'ombre géométrique du disque).

Considérons donc un volume \mathcal{V} limité par une surface \mathcal{S} entourant immédiatement le diaphragme. En première approximation, on pourra considérer que le champ est nul sur la "face arrière" de \mathcal{S} et que le champ sur la face "avant" est celui de l'onde plane non perturbée (c'est sans doute une approximation correcte si le diaphragme est parfaitement absorbant. C'est grossièrement faux s'il est réfléchissant. Nous laissons au lecteur le soin d'examiner ce dernier cas).

Ecrivons le bilan de quantité de mouvement pour le volume \mathcal{V} . Comme le volume de \mathcal{V} , qui entoure exactement le diaphragme est négligeable, la variation de la quantité de mouvement du champ est nulle. La variation de la quantité de mouvement de la matière doit être égale à la force \mathbf{F} subie par le diaphragme. Cette force est donc égale à l'opposé du flux sortant du tenseur de Maxwell. Le flux est nul partout sauf sur la surface avant du diaphragme. Il vaut alors simplement $-uS$. La force subie par le diaphragme est donc finalement

$$\mathbf{F} = uS\mathbf{u}_z . \quad (5.119)$$

L'onde électromagnétique exerce donc sur le diaphragme une pression p (la force est proportionnelle à la surface). Cette pression p est égale à la densité d'énergie du champ:

$$p = u \quad (5.120)$$

(cette relation tient entre valeurs instantanées, mais n'a d'intérêt qu'entre valeurs moyennes). En quelque sorte, nous écrivons là une équation d'état pour le rayonnement électromagnétique. On

pourra se convaincre, là encore, que cette pression s'interprète en termes de collisions inélastiques des photons incidents avec le diaphragme.

Cette pression de radiation a de nombreuses manifestations⁸. Notons tout d'abord qu'elle est en général assez faible. Si nous considérons, par exemple, un faisceau laser transportant 1W sur une surface de 1 mm², le vecteur de Poynting moyen vaut évidemment 10⁶ W/mm², la densité d'énergie et donc la pression valent 3.10⁻³ Pa. Même si la puissance est importante, la densité d'énergie est petite, parce que la vitesse de propagation est grande.

Si faible soit elle, la pression de radiation permet de faire léviter des particules suffisamment petites dans un faisceau laser. Le poids d'une particule de rayon r est en effet proportionnel à r^3 alors que la force de pression de radiation varie comme r^2 . Pour r suffisamment petit, la pression de radiation l'emporte. En appliquant ce raisonnement à la pression de radiation du rayonnement solaire, on trouve que des particules suffisamment petites doivent être éjectées du système solaire. La taille limite se trouve être indépendante de la distance R au soleil. Pression de radiation et force de gravitation varient en effet toutes deux comme $1/R^2$. Avec l'ordre de grandeur de la puissance du rayonnement solaire (1.5 kW/m²) et de l'accélération de pesanteur solaire au niveau de la terre (10⁻² g), on trouve que des particules de rayon inférieur à 0.1 μm sont éjectées. Notons que, dans un modèle réaliste, il faudrait tenir compte aussi des collisions avec les particules chargées constituant le "vent solaire".

⁸Les gadgets appelés "radiomètres" et consistant en un petit tourniquet avec des pales réfléchissantes d'un côté et absorbantes de l'autre tournant dans une ampoule sous l'effet de la lumière, ne fonctionnent pas, comme on le croit souvent, sur la pression de radiation (on se convaincra en les observant qu'ils tournent dans le mauvais sens). Ils reposent sur un effet, beaucoup plus grand, de cinétique des gas dû à la différence de température entre les deux côtés des plaques.

Chapitre 6

Potentiels retardés

Nous allons, dans ce chapitre, établir rigoureusement la solution des équations de Maxwell en termes de potentiels retardés. Nous introduirons pour cela la fonction de Green du champ électromagnétique, l'un des nombreux domaines où cette notion rend les plus grands services. Nous établirons l'expression de la fonction de Green dans un référentiel donné, renonçant, pour un temps, à la covariance manifeste. Nous montrerons rapidement, à la fin de ce chapitre, que la forme ainsi obtenue peut très simplement être mise sous une forme covariante, adaptée au changement de référentiel. Nous appliquerons ensuite ces potentiels aux champs créés par une charge en mouvement arbitraire (potentiels de Liénard-Wiechert), ce qui nous permettra de nous pencher sur le problème de la réaction de rayonnement et de retrouver les caractéristiques du rayonnement dipolaire électrique.

6.1 Fonction de Green

6.1.1 Position du problème

Notre problème est donc de résoudre les équations aux potentiels. En choisissant la jauge de Lorentz:

$$\partial_\mu A^\mu = 0 = \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{A} , \quad (6.1)$$

les équations reliant les potentiels aux sources s'écrivent simplement en termes des potentiels scalaire et vecteur:

$$\square \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{j} \quad (6.2)$$

$$\square V = \rho / \epsilon_0 . \quad (6.3)$$

\square est ici l'opérateur d'Alembertien:

$$\square = \partial_\mu \partial^\mu = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta , \quad (6.4)$$

où Δ est le laplacien.

La forme de l'équation à résoudre est donc la même pour les trois composantes du potentiel vecteur et le potentiel scalaire. Nous résoudrons donc en fait dans ce paragraphe l'équation scalaire générique:

$$\square \phi(\mathbf{r}, t) = \mathcal{S}(\mathbf{r}, t) , \quad (6.5)$$

où ϕ représente une des composantes du potentiel et \mathcal{S} la source associée. Notons bien sûr que cette séparation n'a de sens qu'en jauge de Lorentz. La jauge de Coulomb, par exemple, $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, est beaucoup plus ennuyeuse puisque les équations définissant \mathbf{A} et V sont couplées.

6.1.2 Définition de la fonction de Green

Il est bien connu, dans la théorie de la réponse linéaire, que la réponse d'un système linéaire à une source quelconque est connue si on connaît la réponse percussionnelle. Dans le domaine du filtrage, par exemple, si on note $g(t)$ la réponse percussionnelle du filtre, ou d'un circuit électronique quelconque (la réponse quand il est sollicité par une fonction de Dirac à l'origine des temps), la réponse $\phi(t)$ à un signal d'entrée $s(t)$ (nous utilisons ici des notations rappelant celles du paragraphe précédent) est simplement la convolution du signal d'entrée par la réponse percussionnelle. On peut en effet écrire le signal d'entrée sous la forme d'une décomposition sur les fonctions de Dirac

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau)\delta(t - \tau) d\tau . \quad (6.6)$$

La linéarité de la correspondance entrée-sortie impose alors

$$\phi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t - \tau)s(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)s(t - \tau) d\tau , \quad (6.7)$$

(l'intégrale s'étend de $-\infty$ à ∞ à condition d'admettre que la réponse percussionnelle $g(t)$ est nulle pour $t < 0$, une simple conséquence de la causalité).

Ces résultats sont largement utilisés, en électronique ou en acoustique par exemple. Une détermination de la réponse percussionnelle permet de caractériser complètement un amplificateur ou une salle de concert. Notons d'ailleurs que, par une transformée de Fourier élémentaire, on trouve que la composante de Fourier à la fréquence ω du signal de sortie est proportionnelle à la composante de Fourier à la même fréquence du signal d'entrée. Le coefficient de proportionnalité, appelé susceptibilité du système à cette fréquence, n'est autre que la composante de Fourier à ω de la réponse percussionnelle. Susceptibilité et réponse percussionnelle sont donc reliées simplement par une transformation de Fourier.

Plutôt que de résoudre directement l'équation (6.5), cherchons donc une fonction de la position et du temps, $G(\mathbf{r}, t)$ telle que:

$$\square G(\mathbf{r}, t) = \delta(\mathbf{r})\delta(t) . \quad (6.8)$$

De manière évidente, G est le potentiel rayonné par une source parfaitement localisée à l'origine de l'espace et du temps. C'est en quelque sorte la réponse percussionnelle de l'espace. Nous appellerons G la fonction de Green du potentiel.

La fonction de Green nous donne simplement la solution générale de l'équation aux potentiels. En effet, si G obéit à l'équation (6.8), on a aussi:

$$\square_{\mathbf{r},t} G(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1, t - t_1) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)\delta(t - t_1) . \quad (6.9)$$

Les indices portant sur le d'alembertien précisent sur quelles variables portent les dérivations. On en déduit immédiatement:

$$\square_{\mathbf{r},t} G(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1, t - t_1) \mathcal{S}(\mathbf{r}_1, t_1) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)\delta(t - t_1) \mathcal{S}(\mathbf{r}_1, t_1) , \quad (6.10)$$

les termes en \mathcal{S} étant des constantes vis à vis des dérivations dans le d'alembertien. En intégrant alors les deux membres de cette équation sur toutes les valeurs d'espace et de temps de \mathbf{r}_1 et t_1 et en remarquant que l'intégration sur le second membre donne trivialement $\mathcal{S}(\mathbf{r}, t)$ en raison de la présence des Dirac, on obtient:

$$\mathcal{S}(\mathbf{r}, t) = \int d^3\mathbf{r}_1 dt_1 \square_{\mathbf{r},t} [G(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1, t - t_1) \mathcal{S}(\mathbf{r}_1, t_1)] . \quad (6.11)$$

En remarquant finalement que l'opérateur d'alembertien du membre de gauche commute avec l'intégration, on constate que le potentiel:

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \int d^3\mathbf{r}_1 dt_1 G(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1, t - t_1) \mathcal{S}(\mathbf{r}_1, t_1) \quad (6.12)$$

est effectivement une solution de l'équation (6.5).

Comme pour la théorie du signal élémentaire, la solution de l'équation aux potentiels est la convolution des termes sources avec la réponse percussive du système. Résoudre l'équation aux potentiels est donc équivalent à trouver l'expression de la fonction de Green. Deux approches sont possibles à ce stade. Dans la première, comme nous le verrons dans le paragraphe suivant, on peut, en se fondant sur des arguments très généraux, écrire à priori la forme de la fonction de Green. Il ne reste alors qu'un coefficient arbitraire, qu'on peut identifier en essayant cette solution dans l'équation (6.8). Dans la deuxième approche, plus satisfaisante intellectuellement et à peine plus difficile, on résoudra directement cette équation en utilisant les propriétés de la transformation de Fourier.

6.1.3 Approche qualitative

Nous cherchons ici à donner, par des arguments très simples, la forme de la fonction de Green. Rappelons qu'il s'agit du potentiel scalaire (ou une seule composante du potentiel vecteur) rayonné par une source qui est localisée à l'origine et qui n'existe qu'à l'instant origine. En raison de l'invariance de l'espace par rotation, la fonction G doit être, comme sa source, à symétrie sphérique. Elle ne peut donc dépendre que de la distance r à l'origine. Notons que tout ce raisonnement ne porte que sur le potentiel scalaire, ou sur une unique composante du potentiel vecteur. La symétrie sphérique de la fonction de Green n'implique en rien une symétrie sphérique pour le champ rayonné (on verra cela, par exemple pour le rayonnement du dipôle).

Nous "savons bien" (ce sera l'objet du prochain paragraphe de le montrer rigoureusement) que les solutions à l'équation des potentiels décrivent des ondes se propageant à la vitesse c . La source étant nulle en tout instant sauf 0, la fonction G doit décrire une onde sphérique très localisée divergeant de l'origine à la vitesse c à partir de $t = 0$. Elle n'est donc non nulle que pour des distances telles que $t = r/c$. G est "donc" proportionnelle à $\delta(r - ct)$.

L'énergie doit se conserver. Les champs sont linéaires dans la fonction de Green. Le vecteur de Poynting est donc quadratique dans la fonction de Green. Pour que l'énergie totale transportée par cette onde soit indépendante du temps, il faut que le vecteur de Poynting soit en $1/r^2$ au niveau du "front d'onde". La fonction de Green doit donc être proportionnelle à $1/r$:

$$G(r, t) \simeq \frac{1}{r} \delta(r - ct) . \quad (6.13)$$

Il nous faut enfin tenir compte de la causalité. La fonction de Green doit être nulle en tous les instants précédant l'instant origine. On peut en tenir compte en ajoutant une fonction de Heaviside du temps $\theta(t)$. On a alors tenu compte de toutes les propriétés essentielles de la fonction de Green, qui doit pouvoir s'écrire:

$$G(r, t) = A c \frac{1}{r} \theta(t) \delta(r - ct) . \quad (6.14)$$

La constante A est a priori arbitraire.

Avant d'identifier cette constante, nous allons mettre la fonction de Green sous une forme légèrement différente, mieux adaptée à ce calculs (et que nous utiliserons aussi pour établir la forme des potentiels retardés). On peut en effet aussi écrire:

$$G(\mathbf{r}, t) = A \frac{1}{r} \theta(t) \delta(t - r/c) . \quad (6.15)$$

Pour établir très simplement ce résultat, il suffit de remarquer que:

$$\delta(r - ct) = \delta(c(t - r/c)) = \frac{1}{c} \delta(t - r/c) . \quad (6.16)$$

Ecrivons maintenant $\square G$ en coordonnées sphériques. L'expression du laplacien est très simple pour une fonction à symétrie sphérique et nous avons:

$$\begin{aligned} \square \frac{\delta(t-r/c)\theta(r)}{r} &= \frac{\theta(r)}{rc^2} \delta''(t-r/c) - \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} [\theta(r)\delta(t-r/c)] \\ &= \frac{2}{rc} \delta'(t-r/c)\delta(r) - \frac{1}{r} \delta(t-r/c)\delta'(r), \end{aligned} \quad (6.17)$$

où on a utilisé bien sur le fait que la dérivée de θ est δ . Faisons agir la distribution résultant de ce calcul sur une fonction régulière $f(r, \Theta, \phi, t)$ (on prendra garde de ne pas confondre fonction de Heaviside θ et angle polaire Θ). On obtient alors, en faisant les intégrales sur le temps qui sont triviales:

$$- \int \frac{2}{c} r \delta(r) \frac{\partial f}{\partial t}(r, \Theta, \phi, r/c) dr d\Omega + \int \frac{\partial}{\partial r} [rf(r, \Theta, \phi, r/c)] dr d\Omega,$$

où $d\Omega$ est l'élément d'angle solide. Le premier terme fait intervenir une intégrale de la forme $r\delta(r)$ qui est manifestement nulle (f est régulière à l'origine). Le second est trivialement le produit de 4π , intégrale de l'angle solide, par la valeur de $(\partial/\partial r)rf$ en zéro, qui est manifestement $f(0)$. La distribution considérée est donc $4\pi\delta(\mathbf{r})$ et

$$\square G = A4\pi\delta(\mathbf{r}), \quad (6.18)$$

ce qui impose de choisir $A = 1/4\pi$ et donc:

$$G(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi r} \theta(r)\delta(t-r/c), \quad (6.19)$$

ou encore

$$G(r, t) = \frac{c}{4\pi r} \theta(t)\delta(r-ct). \quad (6.20)$$

Bien sûr, ce raisonnement qualitatif, bien qu'il donne le résultat exact, est insatisfaisant. Ce n'est que par substitution dans l'équation initiale qu'on peut vérifier que la solution est effectivement convenable. Nous allons consacrer le prochain paragraphe à une solution plus rigoureuse. En particulier, nous n'aurons pas à admettre la propagation des solutions à la vitesse c qui est sans doute l'hypothèse la moins justifiée a priori dans le raisonnement précédent.

6.2 Solution rigoureuse

6.2.1 Fonction de Green

Pour résoudre (6.8), nous allons passer dans l'espace réciproque¹. Nous introduisons donc la transformée de Fourier quadridimensionnelle de G définie par:

$$\tilde{G}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int G(\mathbf{r}, t) e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} d^3\mathbf{r} dt, \quad (6.21)$$

où l'intégration doit s'effectuer sur tout l'espace-temps. La relation réciproque s'écrit simplement:

$$G(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \tilde{G}(\mathbf{k}, \omega) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} d^3\mathbf{k} d\omega. \quad (6.22)$$

L'avantage de la transformation de Fourier est de rendre triviaux les opérateurs différentiels sur l'espace ou le temps. En prenant la transformée de Fourier du premier membre de (6.8), on obtient simplement

¹On pourra se dispenser de ce paragraphe en première lecture.

$(k^2 - \omega^2/c^2)\tilde{G}$. La transformée de Fourier des fonctions de Dirac est une constante ($1/4\pi^2$) et l'équation (6.8) se met finalement dans l'espace réciproque sous la forme:

$$(k^2 - \omega^2/c^2)\tilde{G}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{1}{4\pi^2} . \quad (6.23)$$

La solution de cette équation algébrique est élémentaire:

$$\tilde{G}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{c^2}{4\pi^2} \frac{1}{c^2 k^2 - \omega^2} . \quad (6.24)$$

Le problème est donc immédiatement résolu. Pour pouvoir utiliser cette solution, il faut toutefois repasser dans l'espace réel par une opération de transformation de Fourier inverse qui, comme nous allons le voir, est un peu plus complexe.

La fonction de Green dans l'espace réel s'écrit donc:

$$G(\mathbf{r}, t) = \frac{c^2}{16\pi^4} \int \frac{e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)}}{c^2 k^2 - \omega^2} d^3\mathbf{k} d\omega . \quad (6.25)$$

Il est clair que cette intégration n'est pas élémentaire, puisque l'intégrande présente des pôles en $\omega = \pm ck$. On pourra d'ailleurs constater tout de suite que ces pôles coïncident avec la relation de dispersion pour des ondes planes dans le vide, ce qui n'est pas tout à fait un hasard. Pour régler ce problème, nous procéderons en deux temps, d'abord à l'intégration sur les fréquences puis à l'intégration sur les vecteurs d'onde.

Nous avons donc à calculer:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} -\frac{e^{-i\omega t}}{(\omega - ck)(\omega + ck)} d\omega , \quad (6.26)$$

l'intégration s'effectuant sur tout l'axe réel. La fonction à intégrer étant définie et analytique sur l'ensemble du plan complexe, nous allons procéder, comme il est d'usage en pareil cas, à une déformation du contour d'intégration. Au lieu d'intégrer sur l'axe réel, nous choisirons d'intégrer sur une droite parallèle, correspondant à des valeurs de ω de partie imaginaire constante égale à ϵ . Si tout se passe bien, nous pourrons prendre à la fin des calculs la limite pour $\epsilon \rightarrow 0$ et obtenir un résultat physique². Nous choisirons $\epsilon > 0$.

Pour appliquer le théorème des résidus, il nous faut fermer le contour d'intégration par un "demi-cercle à l'infini" situé soit dans le demi-plan supérieur, soit dans le demi-plan inférieur. Cette fermeture est possible à condition que cette nouvelle partie du contour ne contribue pas à l'intégrale. Si t est positif, $e^{-i\omega t}$ tend vers 0 pour des points à distance infinie dans le demi plan inférieur, correspondant à des parties imaginaires négatives pour ω . Pour $t > 0$, nous intégrerons donc sur le contour $\mathcal{C}_<$ représenté à droite sur la figure 6.1. En revanche, pour $t < 0$, nous intégrerons sur le contour $\mathcal{C}_>$ qui se referme par un demi-cercle dans le demi plan supérieur. Les pôles de la fonction à intégrer étant tous deux sur l'axe réel, nous trouvons donc immédiatement que l'intégrale et, donc, la fonction de Green sont nulles pour les instants négatifs. G est donc proportionnelle à la fonction de Heaviside $\theta(t)$. C'est une simple expression de la causalité, la source de ce potentiel n'existant qu'à l'instant origine.

Si nous avons choisi initialement une partie imaginaire ϵ négative pour notre contour d'intégration, les choix de demi-cercles pour fermer le contour d'intégration en eussent été inchangés. En revanche, comme on s'en persuadera aisément, on aurait trouvé une fonction de Green non nulle pour $t < 0$, nulle pour $t > 0$: un potentiel qui précède la source. Une telle situation viole manifestement la causalité relativiste et ne peut convenir. Le choix d'une partie imaginaire positive pour ω n'est donc pas du tout arbitraire³. On pourra, à titre d'exercice, poursuivre le calcul avec $\epsilon < 0$. Sans surprise, on trouvera,

²Nous verrons en fait que le résultat final est indépendant de ϵ , rendant trivial le passage à la limite.

³Nous rencontrerons le même genre d'arguments dans la partie sur l'électromagnétisme dans la matière quand nous établirons les relations de Kramers-Kronig.

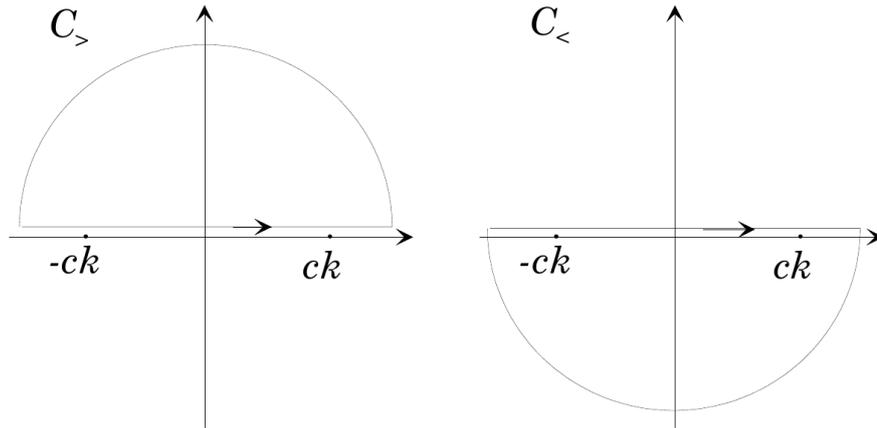


Figure 6.1: Contours d'intégration dans le plan complexe des fréquences pour le calcul de l'intégrale sur la fréquence ω intervenant dans la fonction de Green. Pour des temps négatifs, le contour de gauche convient. Pour des temps positifs, on choisira le contour de droite. Les pôles de la fonction à intégrer sont situés en $\pm ck$ sur l'axe réel.

au lieu des potentiels retardés en $r - ct$, la solution non physique en potentiels “avancés” en $r + ct$. La présence de ces solutions parasites est clairement due au fait que l'équation de propagation est du second ordre en t et se trouve donc invariante dans un renversement du sens du temps.

Nous n'avons donc plus à calculer I que pour $t > 0$. Les résidus de la fonction sont:

$$-\frac{e^{-ickt}}{2ck} \quad \text{en} \quad \omega = ck \quad (6.27)$$

$$\frac{e^{ickt}}{2ck} \quad \text{en} \quad \omega = -ck . \quad (6.28)$$

$$(6.29)$$

Compte tenu du sens dans lequel est parcouru $C_<$, I est égale à $-2i\pi$ fois la somme des résidus. On trouve donc immédiatement, en regroupant les termes:

$$I = \frac{2\pi}{ck} \sin ckt . \quad (6.30)$$

Nous ne devons pas oublier à ce stade que le calcul n'a été effectué que pour $t > 0$ et que la fonction de Green est en fait proportionnelle à $\theta(t)$. En reportant l'expression ci dessus dans celle de la fonction de Green, on obtient donc:

$$G(\mathbf{r}, t) = \frac{c}{8\pi^3} \theta(t) \int e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \frac{\sin ckt}{k} d^3\mathbf{k} . \quad (6.31)$$

Pour procéder à cette dernière intégration spatiale, nous utiliserons les coordonnées sphériques (k, θ, ϕ) pour \mathbf{k} (l'intégrande est évidemment à symétrie sphérique, ce qui reflète l'invariance par rotation). L'axe vertical de ce repère sera choisi aligné avec \mathbf{r} . Dans ce calcul, \mathbf{r} apparaît comme une constante et ce choix est possible pour chaque position. L'intégrale sur ϕ est triviale et donne un simple facteur 2π . En remarquant que $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = kr \cos \theta$, l'intégrale sur θ s'écrit simplement:

$$\int_0^\pi \sin \theta e^{ikr \cos \theta} d\theta = \frac{2}{kr} \sin kr . \quad (6.32)$$

Il ne nous reste finalement que l'intégrale sur r à calculer:

$$G(\mathbf{r}, t) = \frac{c}{2\pi^2} \theta(t) \frac{1}{r} \int_0^\infty \sin ckt \sin kr dk . \quad (6.33)$$

En transformant le produit de sinus en une somme de cosinus et en passant aux exponentielles complexes, on a :

$$\begin{aligned} G(\mathbf{r}, t) &= \frac{c}{8\pi^2 r} \theta(t) \int_0^\infty \left[e^{ik(r-ct)} + e^{-ik(r-ct)} - e^{ik(r+ct)} - e^{-ik(r+ct)} \right] dk \\ &= \frac{c}{8\pi^2 r} \theta(t) \int_{-\infty}^\infty \left[e^{ik(r-ct)} - e^{ik(r+ct)} \right] dk . \end{aligned} \quad (6.34)$$

Pour passer à la seconde ligne, on a remarqué que les exponentielles complexes de la première peuvent être regroupées deux par deux en procédant au changement de variable $k \rightarrow -k$ et en étendant donc l'intégration à tout l'axe réel. Les intégrales d'exponentielles complexes sur tout l'axe donnent simplement, à un facteur près, des fonctions de Dirac

$$\int e^{iku} du = 2\pi \delta(k) . \quad (6.35)$$

On a donc :

$$G(\mathbf{r}, t) = \frac{c}{4\pi r} \theta(t) (\delta(r-ct) - \delta(r+ct)) . \quad (6.36)$$

Pour des valeurs positives de t , la seconde fonction de Dirac dans l'expression précédente ne joue aucun rôle et nous pouvons finalement écrire :

$$G(\mathbf{r}, t) = \frac{c}{4\pi r} \theta(t) \delta(r-ct) . \quad (6.37)$$

ou encore, comme ci-dessus :

$$G(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi r} \theta(r) \delta(t-r/c) . \quad (6.38)$$

6.2.2 Forme covariante

Nous avons établi les formes précédentes de la fonction de Green en distinguant bien espace et temps. Nous avons donc a priori perdu la covariance manifeste des équations de Maxwell. Il n'en est heureusement rien en fait et on peut, par de simples manipulations algébriques, mettre la fonction de Green sous une forme manifestement covariante.

Nous pouvons en effet écrire :

$$\theta(t) \delta(r-ct) = \theta(t) [\delta(r-ct) - \delta(r+ct)] . \quad (6.39)$$

Nous avons en effet déjà utilisé cette propriété (la fonction de Heaviside annule l'action de la seconde fonction de Dirac) dans l'établissement de la forme finale de la fonction de Green. La somme de fonctions de Dirac peut être réécrite :

$$\delta(r-ct) - \delta(r+ct) = 2r \delta((ct-r)(ct+r)) . \quad (6.40)$$

Pour nous en convaincre, nous pouvons considérer l'action de $\delta((ct-r)(ct+r))$ sur une fonction régulière $f(r, t)$. Deux points contribuent à l'intégrale sur r : $\pm ct$. Au voisinage du point $r = ct$, la fonction de Dirac, considérée comme distribution sur t , est équivalente à $\delta(2r(ct-r)) = \delta(ct-r)/2r$. Cette équivalence, ajoutée à la contribution de $r = -ct$, établit finalement cette propriété utile.

En remarquant que $c^2 t^2 - r^2 = x_\mu x^\mu$, où les x^μ sont les coordonnées contravariantes du point où est calculée la fonction de Green, cette dernière peut s'écrire :

$$G(x^\mu) = \frac{c}{2\pi} \theta(x^0) \delta(x_\mu x^\mu) . \quad (6.41)$$

La fonction de Dirac au second membre est manifestement covariante. La fonction de Heaviside l'est aussi en dépit des apparences. Nous avons vu en effet que les transformations de Lorentz n'affectaient pas l'ordre temporel de deux événements situés dans ou sur le cône de lumière l'un de l'autre : passé, futur et causalité sont des invariants relativistes. Le signe de x^0 est donc un invariant relativiste. Nous avons donc obtenu, avec (6.41), une forme manifestement covariante de la fonction de Green.

6.2.3 Potentiels retardés

La dernière étape à franchir est élémentaire. Il ne nous reste qu'à reporter la fonction de Green dans l'expression (6.12). Nous utiliserons pour cela la deuxième forme de la fonction de Green $G = (1/4\pi r)\theta(r)\delta(t - r/c)$. On a alors la solution de l'équation aux potentiels sous la forme:

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \int \theta(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|) \frac{\delta(t - t_1 - |\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} \mathcal{S}(\mathbf{r}_1, t_1) d^3\mathbf{r}_1 dt_1 . \quad (6.42)$$

Nous pouvons à ce point oublier la fonction θ . Elle ne joue de rôle que pour des points sources \mathbf{r}_1 infiniment proches du point d'observation \mathbf{r} . Si la source est une répartition continue de charges, la contribution correspondante est infinitésimale. L'intégration sur le temps est alors triviale. Le seul instant t_1 qui contribue est tel que la source et le point d'observation soient sur le cône de lumière l'un de l'autre (nous reverrons plus tard ce raisonnement sous une forme un peu différente en examinant le rayonnement des charges en mouvement). On a donc:

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\mathcal{S}(\mathbf{r}_1, t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} d^3\mathbf{r}_1 , \quad (6.43)$$

forme standard de la solution en termes de potentiels retardés. En ajoutant les facteurs dimensionnels, on retrouve en effet les formes habituelles pour les expressions des potentiels scalaire et vecteur:

$$V(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}_1, t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} d^3\mathbf{r}_1 \quad (6.44)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}_1, t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} d^3\mathbf{r}_1 . \quad (6.45)$$

L'interprétation physique de ces expressions est si transparente que nous n'y reviendrons pas.

6.3 Potentiels de Liénard–Wiechert

Nous nous pencherons dans ce paragraphe sur le problème du rayonnement d'une charge ponctuelle unique en mouvement arbitraire, éventuellement relativiste. Le problème général du mouvement d'une charge est extrêmement complexe. Il résulte en effet à la fois des forces imposées à la charge et du champ produit par la charge elle-même. Comme nous le verrons, une charge en mouvement rayonne. Ce rayonnement conduit à une perte d'énergie mécanique que l'on peut interpréter comme résultant d'une force produite sur la charge par son propre champ, la force de réaction de rayonnement. D'une part, la modélisation de cette force n'est pas sans poser des difficultés mathématiques (dans le cas d'une charge ponctuelle, on peut s'attendre à des problèmes de divergence — nous aborderons ce problème à la fin de ce chapitre). D'autre part, la résolution des équations est très difficile dans le cas général.

Nous nous cantonnerons donc à étudier le rayonnement d'une particule dont le mouvement est imposé. Nous négligerons l'action des forces de réaction de rayonnement par rapport aux forces qui fixent la trajectoire de la particule. Nous verrons, en discutant de situations physiques concrètes, que cette approximation est souvent excellente. Comme nous envisagerons le cas de particules relativistes, il serait tout naturel de nous placer dans le formalisme de l'électrodynamique relativiste et de n'écrire que des quantités explicitement covariantes, indépendantes du référentiel. Si cette approche est la plus élégante et, du point de vue des calculs, la plus compacte (on consultera à ce sujet le Jackson), elle ne révèle pas les interprétations physiques les plus transparentes des résultats obtenus. Nous verrons en particulier que le renforcement considérable du rayonnement dans la direction de la vitesse a une interprétation cinématique très simple. Nous nous placerons donc dans un référentiel \mathcal{R} particulier et manipulerons l'espace et le temps dans ce référentiel uniquement. Bien sûr, les résultats finaux seront

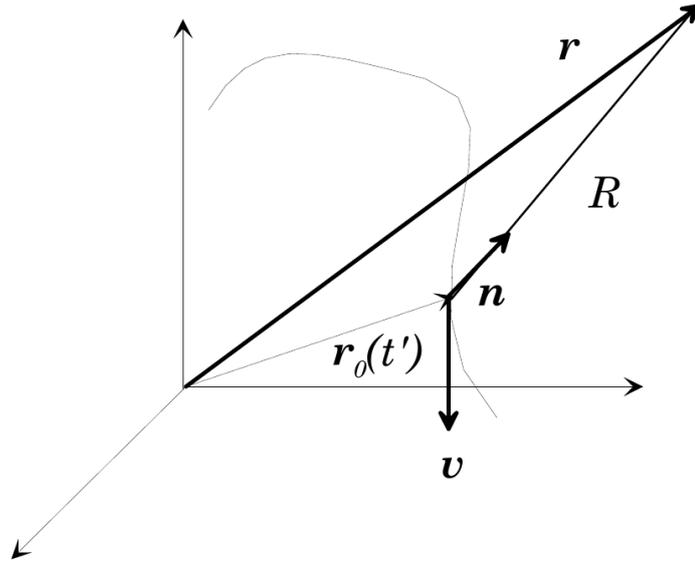


Figure 6.2: Rayonnement d'un charge en mouvement: notations.

rigoureux. On pourra trouver les champs dans un référentiel quelconque par une simple transformation de Lorentz. Nous donnerons également pour mémoire les solutions explicitement covariantes.

Nous considérons donc une particule de charge q dont le mouvement, imposé, est décrit par la trajectoire $\mathbf{r}_0(t')$ (voir figure 6.2). Nous cherchons le champ observé au point \mathbf{r} à l'instant t . Pour cela, nous déterminerons d'abord les potentiels scalaires et vecteurs que nous dériverons ensuite pour obtenir les champs. Avant cette dérivation, dans tout le calcul des potentiels, la position "d'observation" \mathbf{r} et l'instant t sont donc fixés. Nous noterons $\mathbf{n}(t')$ le vecteur unitaire de la particule, prise à l'instant t' , vers le point d'observation. Nous noterons enfin $R(t') = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t')|$ la distance entre la particule et le point d'observation.

La densité de charge et de courant représentant la charge ponctuelle peuvent s'écrire:

$$\rho(\mathbf{r}', t') = q\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0(t')) \quad (6.46)$$

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}', t') = q\mathbf{v}(t')\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0(t')) , \quad (6.47)$$

où $\mathbf{v} = d\mathbf{r}_0/dt'$ est la vitesse de la particule à l'instant t' . En nous plaçant en jauge de Lorentz, nous pouvons écrire les potentiels en fonction de ces densités de charge et de courant au moyen de la solution en potentiels retardés. Comme les calculs sont identiques pour le potentiel scalaire et chaque composante du potentiel vecteur, nous ne traiterons explicitement que le premier. Le potentiel peut donc s'écrire, en appliquant directement (6.42):

$$V(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d\mathbf{r}' dt' \frac{\rho(\mathbf{r}', t')\delta(t' - t + |\mathbf{r} - \mathbf{r}'(t')|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'(t')|} , \quad (6.48)$$

Où l'on notera que nous avons changé le signe de l'argument de la fonction δ spatio-temporelle par rapport aux conventions utilisées dans la partie précédente. Ce changement de signe, effectué pour des raisons de commodité, n'a bien sûr aucune conséquence sur le résultat final. On a donc encore:

$$V(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int d\mathbf{r}' dt' \frac{\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0(t'))\delta(t' - t + |\mathbf{r} - \mathbf{r}'(t')|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'(t')|} . \quad (6.49)$$

Sous cette forme, l'intégrale sur \mathbf{r}' est triviale: seul contribue le point $\mathbf{r}' = \mathbf{r}_0(t')$. En posant alors:

$$g(t') = t' - t + \frac{R(t')}{c} , \quad (6.50)$$

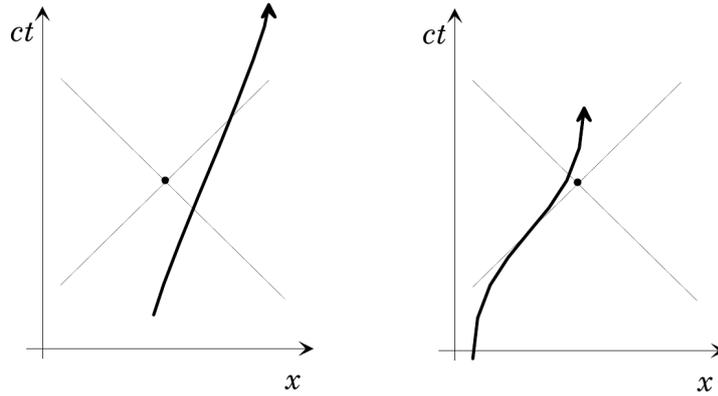


Figure 6.3: Intersection du cône de lumière de l'observateur et de la ligne d'univers de la particule. A gauche: particule s'éloignant de l'observateur. A droite: particule relativiste venant vers l'observateur. Seule compte pour le calcul des champs l'intersection située dans le passé. Le champ reçu est d'autant plus grand que la particule reste plus longtemps au voisinage du cône de lumière.

on met V sous la forme:

$$V(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\delta(g(t'))}{R(t')} dt' . \quad (6.51)$$

Seul contribuera à l'intégrale sur le temps l'instant t_0 tel que $g(t_0)$ s'annule (en supposant, ce que nous allons montrer, que cet instant existe et est unique).

On peut facilement comprendre la signification physique de l'instant t_0 . Il est tel que:

$$t_0 = t - \frac{R(t_0)}{c} \quad (6.52)$$

c'est à dire tel qu'un signal lumineux émis par la particule à l'instant t_0 arrive, après s'être propagé à la vitesse c , au point d'observation précisément à l'instant t . Bien sûr, la forme même de l'équation impose à t_0 d'être plus petit que t . En fait, t_0 est la coordonnée temporelle de l'intersection de la ligne d'univers de la particule avec le cône de lumière de l'événement d'observation (voir figure 6.3). Comme la pente de la ligne d'univers dans un diagramme d'espace-temps est toujours plus petite que celle du cône (la vitesse de toute particule chargée, donc massive, est toujours plus petite que c), il y a deux intersections et deux seulement entre la ligne d'univers et le cône de lumière. L'une est située dans le passé et sa coordonnée temporelle correspond à l'instant t_0 que nous cherchons. L'autre est située dans le futur de l'observateur et ne peut correspondre à une solution de l'équation donnant t_0 . En fait, ce point dans le futur serait le seul à contribuer au potentiel si nous avions, en dépit de la causalité, choisi la solution en termes de potentiels avancés. Nous avons donc bien montré que l'instant t_0 , qui va jouer un rôle central dans toute la suite de la discussion, existe et est unique.

L'équation (6.51) fait intervenir la distribution $\delta(g(t'))$. Pour l'identifier, faisons-la agir sur une fonction régulière arbitraire $f(t')$. En posant $u = g(t')$ (ce changement de variable est régulier puisque seuls les points voisins de t_0 contribuent à l'intégrale), nous pouvons écrire:

$$\int \delta(g(t')) f(t') dt' = \int \frac{\delta(u) f(g^{-1}(u))}{|g'(g^{-1}(u))|} du = \frac{f(t_0)}{|g'(t_0)|} , \quad (6.53)$$

en désignant par g' la dérivée de g par rapport à son argument. La valeur absolue de la dérivée au dénominateur est obtenue en ordonnant les bornes de l'intégration quand la fonction g est décroissante au voisinage de t_0 . En termes de distributions, on a donc:

$$\delta(g(t')) = \frac{\delta(t' - t_0)}{|g'(t_0)|} . \quad (6.54)$$

Dans toute la suite, nous ne considérerons que des fonctions g qui sont croissantes au voisinage de leur zéro. Nous pourrions donc omettre à partir de maintenant les valeurs absolues au dénominateur. L'intégrale sur t' dans l'expression du potentiel V est donc triviale et on trouve:

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{g'(t_0)} \frac{1}{R(t_0)}. \quad (6.55)$$

Pour obtenir une forme plus explicite du potentiel, il nous reste à exprimer $g'(t_0)$ en fonction des paramètres cinématiques de la particule. A partir de (6.50), nous trouvons par simple dérivation:

$$g'(t') = 1 + \frac{1}{c} \frac{\partial R(t')}{\partial t'} = 1 + \frac{\mathbf{R}}{cR} \cdot \frac{d\mathbf{R}}{dt'} = 1 - \frac{\mathbf{n}(t') \cdot \mathbf{v}(t')}{c}, \quad (6.56)$$

où nous avons posé $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$, dont la dérivée par rapport au temps t' est l'opposé de la vitesse de la particule en t' . On a donc $g'(t_0) = 1 - \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}/c$. Nous conviendrons dans toute la suite de prendre les fonctions de t' à l'instant t_0 quand leur argument est omis. On a donc finalement:

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{1 - \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}/c} \frac{1}{R(t_0)} \quad (6.57)$$

et, par un raisonnement analogue,

$$\mathbf{A} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{1}{1 - \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}/c} \frac{\mathbf{v}}{R(t_0)}. \quad (6.58)$$

Ces expressions constituent les potentiels de Liénard–Wiechert. Ils ne diffèrent des potentiels de l'électrostatique ou de la magnétostatique que par le terme cinématique $1/g'$. Pour une particule immobile, on retrouve bien les expressions statiques. Pour une particule en mouvement, en revanche, les potentiels de Liénard peuvent être très différents des potentiels statiques. Pour une particule relativiste en particulier ($v \simeq c$), le facteur g' s'annule pratiquement quand \mathbf{n} et \mathbf{v} sont de même direction. Le potentiel est donc beaucoup plus grand dans la direction du mouvement de la particule que dans la direction opposée (le facteur g' étant alors voisin de 2). Le champ d'une particule relativiste est donc concentré vers l'avant. Nous verrons dans le prochain paragraphe les importantes conséquences de cette concentration.

On peut comprendre le renforcement des potentiels vers l'avant en termes purement cinématiques. Considérons les deux lignes d'univers illustrées sur la figure 6.3. A gauche, la particule relativiste traverse le cône de lumière de l'événement d'observation pratiquement perpendiculairement. A droite, la particule se dirige vers l'observateur et sa ligne d'univers est pratiquement tangente au cône de lumière. Dans le second cas, la particule reste beaucoup plus longtemps "en vue" de l'observateur que dans le premier. En d'autres termes, un intervalle de temps dt pour l'observateur correspond à un intervalle de temps retardé dt' pour la particule d'autant plus long qu'elle se dirige vers lui avec une plus grande vitesse. En quelque sorte, c'est un effet de sillage. Quand un bateau se déplace à une vitesse proche de celle des ondes capillaires à la surface de l'eau, les ondes émises à des instants différents s'accumulent et se renforcent à l'avant. En revanche, les ondes s'espacent vers l'arrière d'avantage que si le bateau restait immobile. Le même genre de phénomène, purement cinématique, est à l'origine du phénomène qui nous intéresse ici.

L'analogie en termes de sillage nous permet d'ailleurs de discuter qualitativement d'un autre phénomène intéressant. Si le bateau se déplace à une vitesse inférieure à celle des ondes qu'il génère à la surface de l'eau, il n'y a pas de sillage à proprement parler. Le sillage "en V" correspond au cas où la vitesse du bateau est supérieure à celle de ces ondes. Les ondes rayonnées par le bateau à des instants différents s'additionnent alors le long d'un cône (deux lignes dans cet espace à deux dimensions) dont l'ouverture dépend du rapport de la vitesse des ondes et du bateau. Ces lignes constituent en fait une onde de choc et sont très analogues aux caustiques de l'optique. A trois dimensions, le

même phénomène s’observe pour un avion en vol supersonique. Le passage de l’onde de choc sur un observateur est responsable du célèbre “bang”. En l’absence de dissipation et de toute non linéarité, pour un “bateau” ponctuel, l’amplitude des ondes capillaires devrait diverger sur cette ligne. Nous ne pouvons bien sûr obtenir le même phénomène ici puisque la particule se déplace nécessairement moins vite que la lumière. Ce ne serait pas le cas si nous considérons une particule relativiste en mouvement dans un milieu matériel présentant un indice de réfraction élevé. Rien n’empêche alors la particule de se déplacer plus vite que la lumière dans le milieu. Il se forme alors un véritable “sillage”, un cône le long duquel le champ électromagnétique est considérablement renforcé. Ce phénomène est responsable de la célèbre “radiation Cherenkov”. Une lumière bleue relativement intense est émise par des particules en mouvement relativiste dans un milieu matériel. Ce rayonnement se manifeste par exemple autour des réacteurs immergés dans des piscines d’eau lourde. Il est également utilisé pour réaliser des détecteurs de particules, l’énergie de ce rayonnement donnant une indication de l’énergie de la particule. Même si ce phénomène n’existe pas dans le vide, nous allons montrer que le renforcement du champ “vers l’avant” a des conséquences importantes.

Notons pour finir que nous avons établi ici les potentiels de Liénard par un raisonnement non explicitement covariant, dans un référentiel donné. On peut établir une version purement relativiste de ces potentiels en écrivant une version complètement covariante des potentiels retardés. Le lecteur intéressé trouvera la dérivation explicite dans le Jackson. Nous ne donnerons ici que la forme finale du 4-potential :

$$\mathcal{A}^\mu = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{U^\mu(\tau_0)}{U^\nu(R_\nu - R_{0\nu}(\tau_0))} , \quad (6.59)$$

où les R_ν sont les coordonnées covariantes de l’événement d’observation, les $R_{0\nu}$ celles de la particule et τ_0 le temps propre de la particule à l’événement où elle croise le cône de lumière de l’événement d’observation. Notons que ce que nous gagnons en généralité et en covariance est largement perdu en clarté de l’interprétation physique. L’aspect purement cinématique du renforcement vers l’avant est loin d’être apparent sur ce genre d’expression.

6.3.1 Champs rayonnés

Nous calculerons dans ce paragraphe les champs rayonnés par la particule⁴. Il nous suffit pour cela, au moins formellement, de dériver les expressions des potentiels de Liénard–Wiechert. En fait, nous aurons à faire face à deux difficultés. La première est que, sans préciser d’avantage le mouvement de la particule, nous ne connaissons le temps “retardé” t_0 que comme solution d’une équation implicite. Il nous faudra donc procéder avec soin pour obtenir quand même des expressions explicites pour les champs. L’autre point est qu’en procédant aux dérivations des potentiels en $1/R$, nous allons obtenir les champs comme une somme de termes faisant intervenir $1/R$ et ses dérivées successives $1/R^2$ et $1/R^3$. Si les calculs ne présentent aucune difficulté de principe, ils sont assez lourds. De plus il n’est généralement pas indispensable de garder ces termes.

On s’intéresse en effet surtout en pratique au champ produit par la particule à une grande distance. On peut donc ne garder, dans ce développement, que le terme en $1/R$, qui domine tous les autres. Une autre manière de le voir est de considérer le vecteur de Poynting. Les termes en $1/R$ dans \mathbf{E} et \mathbf{B} donnent un flux d’énergie en $1/R^2$. La quantité d’énergie traversant une sphère de rayon R est donc finie. Ces termes correspondent bien à un transport d’énergie vers l’infini, à un rayonnement. En revanche, la combinaison de termes d’ordre supérieur dans \mathbf{E} et \mathbf{B} donne des contributions au vecteur de Poynting décroissant plus vite que $1/R^2$. La quantité d’énergie traversant la sphère de rayon R décroît donc avec R , au moins comme $1/R$. Ces termes ne correspondent qu’à des “champs proches” (comprenant, au moins, les champs statiques en $1/R^2$), en général sans importance. Nous ne garderons donc, au cours de nos dérivations, que les termes dominants dans les développements en

⁴Là encore, on pourra réduire la première lecture de ce paragraphe à la partie finale sur les résultats.

puissances de $1/R$. Nous verrons, dans le dernier paragraphe de ce chapitre, ce que sont les résultats quand on conserve tous les termes dans le cas particulièrement simple du dipôle oscillant.

Notons également qu'on peut s'attendre à ce que le champ rayonné présente une structure d'onde plane. Si la source est harmonique, les potentiels doivent avoir une structure d'onde sphérique. Suf­f­isamment loin de l'origine et dans un volume suffisamment local, le vecteur d'onde (radial) est pratiquement uniforme et l'onde sphérique a pratiquement une structure d'onde plane. \mathbf{E} et \mathbf{B} doivent donc être orthogonaux entre eux et à \mathbf{n} et leurs modules doivent être dans un rapport c . Pour une source quelconque, la linéarité de l'électromagnétisme et les propriétés de la transformée de Fourier assurent que cette géométrie se conserve. Nous pourrions nous contenter de ne calculer que le champ électrique et en déduire le champ magnétique par ce genre d'arguments. Nous ferons cependant les deux calculs pour conforter notre confiance dans ces arguments qualitatifs.

Avant d'entreprendre le calcul des champs rayonnés, nous allons établir un certain nombre de formules utiles.

Dérivées utiles

Nous aurons besoin de dériver la fonction implicite t_0 par rapport aux coordonnées et à l'instant d'observation. En effet t_0 dépend de t mais aussi de \mathbf{r} par l'intermédiaire de (6.52). A partir de cette équation, on trouve en effet à partir de $t_0 = t - R/c$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial t_0}{\partial t} &= 1 - \frac{1}{c} \frac{\partial R(t_0)}{\partial t} \\ &= 1 - \frac{1}{c} \frac{\partial R}{\partial t_0} \frac{\partial t_0}{\partial t}.\end{aligned}\quad (6.60)$$

Nous avons déjà montré que $\partial R/\partial t_0 = -\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}$ pour trouver l'expression de g' . On a donc:

$$\frac{\partial t_0}{\partial t} = 1 + \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}}{c} \frac{\partial t_0}{\partial t}, \quad (6.61)$$

ce qui nous donne immédiatement:

$$\frac{\partial t_0}{\partial t} = \frac{1}{g'(t_0)} = \frac{1}{1 - \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}/c}. \quad (6.62)$$

Nous trouvons ainsi une justification à nos raisonnements qualitatifs sur le renforcement cinématique des potentiels vers l'avant. Plus g' est petit, plus à un intervalle de temps donné pour l'observateur correspond un grand intervalle de temps retardé pour la particule. A la limite d'un mouvement ultra-relativiste, l'observateur "accumule" dans un intervalle de temps extrêmement court tous les champs produits par la particule.

On peut utiliser la même démarche pour exprimer ∇t_0 (la dérivée s'entendant par rapport à \mathbf{r}). On a

$$\nabla t_0 = -\frac{1}{c} \nabla R. \quad (6.63)$$

Dans le gradient de R , nous devons distinguer deux termes. Le premier provient de la dépendance explicite de $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|$ en \mathbf{r} . Le gradient associé est évidemment radial. Le deuxième provient de la dépendance implicite de R par l'intermédiaire de \mathbf{r}_0 , qui est lui même une fonction de t_0 et donc de \mathbf{r} . De manière évidente, ces deux termes s'ajoutent et on a:

$$\nabla t_0 = -\mathbf{n} \frac{\partial |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}{c \partial r} - \frac{1}{c} \frac{\partial R}{\partial t_0} \nabla t_0. \quad (6.64)$$

La première dérivée partielle s'entend à \mathbf{r}_0 constant. Elle est évidemment égale à 1. La deuxième vient d'être rappelée. On trouve donc:

$$\nabla t_0 = -\frac{\mathbf{n}}{c} + \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}}{c} \nabla t_0 \quad (6.65)$$

et finalement:

$$\nabla t_0 = -\frac{1}{g'(t_0)} \frac{\mathbf{n}}{c} = -\frac{\mathbf{n}/c}{1 - \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}/c} . \quad (6.66)$$

Nous avons pu mettre les dérivées utiles sous une forme particulièrement simple, toujours en termes du facteur cinématique $1/g'$.

Champ électrique

Le champ électrique s'écrit bien sûr

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla V . \quad (6.67)$$

La dérivée partielle de \mathbf{A} par rapport au temps s'écrit:

$$-\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t_0} \frac{\partial t_0}{\partial t} = -\frac{1}{g'(t_0)} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\partial}{\partial t_0} \left[\frac{\mathbf{v}}{g'(t_0)R(t_0)} \right] . \quad (6.68)$$

Dans la dérivée du crochet par rapport au temps retardé t_0 , il apparaît des termes en $1/R$ correspondant à la dérivée de \mathbf{v}/g' . La dérivée de $1/R$, pour sa part, donne des termes en $1/R^2$ que nous devons négliger. A cet ordre d'approximation, nous avons donc:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} &= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{1}{g'(t_0)} \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial t_0} \frac{\mathbf{v}}{g'(t_0)} \\ &= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{1}{g'^3(t_0)} \frac{1}{R} [\mathbf{a}g' - \mathbf{v}g''] , \end{aligned} \quad (6.69)$$

l'accélération \mathbf{a} étant elle aussi évaluée au temps retardé t_0 .

Le gradient du potentiel scalaire fait intervenir la dérivée partielle par rapport au temps retardé multipliée par le gradient du temps retardé par rapport au point d'observation. En toute rigueur, il fait aussi intervenir le gradient de la dépendance explicite du potentiel retardé par rapport au point d'observation. Ce gradient est toutefois en $1/R^2$, tant pour la dérivée de la partie électrostatique en $1/R$ que pour la dérivée du facteur cinématique. Celle-ci fait en effet intervenir le gradient de \mathbf{n} , qui est en $1/R$, facteur qui est à multiplier par la dépendance électrostatique en $1/R$. A l'ordre d'approximation où nous nous sommes placés, ces termes sont négligeables et nous ne conserverons que le premier terme. On a donc:

$$-\nabla V = -\frac{\partial V}{\partial t_0} \nabla t_0 = \frac{\mathbf{n}}{cg'} \frac{\partial V}{\partial t_0} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{n}}{cg'} \frac{\partial}{\partial t_0} \left[\frac{1}{g' R} \right] . \quad (6.70)$$

Comme précédemment, nous ne garderons pas les termes faisant intervenir la dérivée de $1/R$ et nous avons:

$$-\nabla V = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{n}g''}{cg'^3} \frac{1}{R} . \quad (6.71)$$

En regroupant avec les termes provenant du potentiel vecteur, nous trouvons finalement l'expression complète du champ électrique:

$$\mathbf{E} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{1}{R} \frac{1}{g'^3} [(c\mathbf{n} - \mathbf{v})g'' + \mathbf{a}g'] . \quad (6.72)$$

Il ne nous reste plus à exprimer que g'' . Partant de $g' = 1 - \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}/c$, nous obtenons

$$g'' = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial t_0} \cdot \mathbf{v} - \frac{1}{c} \mathbf{n} \cdot \mathbf{a} . \quad (6.73)$$

La dérivée de \mathbf{n} par rapport à t_0 est évidemment d'ordre $1/R$. Ce terme donnerait une contribution au champ en $1/R^2$ et doit être écarté. A l'ordre où nous nous plaçons, $g'' = -\mathbf{n} \cdot \mathbf{a}/c$. Notons

finalement qu'on peut regrouper les termes entre crochets dans l'expression du champ en un double produit vectoriel et écrire enfin:

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{1}{R} \frac{1}{(1 - \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}/c)^3} \mathbf{n} \times [(\mathbf{n} - \mathbf{v}/c) \times \mathbf{a}] . \quad (6.74)$$

Nous discuterons du contenu physique de cette équation après avoir calculé le champ magnétique.

Champ magnétique

Nous calculerons bien sûr le champ magnétique par $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$. On a donc:

$$\mathbf{B} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \nabla \times \frac{\mathbf{v}}{g'R} . \quad (6.75)$$

Dans cette expression, les trois termes dans le rotationnel dépendent de la position, soit directement, soit par l'intermédiaire du temps retardé. Notons d'abord que dériver le terme en $1/R$ ferait apparaître des termes en $1/R^2$ que nous devons écarter. Nous pouvons donc écrire:

$$\mathbf{B} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{1}{R} \nabla \times \frac{\mathbf{v}}{g'} . \quad (6.76)$$

Dans cette expression, en posant $\mathbf{u} = \mathbf{v}/g'$,

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{u} &= e_{ijk} \partial_j u_k = e_{ijk} \partial_j t_0 \frac{\partial u_k}{\partial t_0} \\ &= \nabla t_0 \times \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t_0} = \nabla t_0 \times \left(\frac{\mathbf{a}}{g'} - \frac{\mathbf{v}g''}{g'^2} \right) \\ &= -\frac{1}{g'^2} \frac{\mathbf{n}}{c} \times \mathbf{a} + \frac{g''}{g'^3} \frac{\mathbf{n}}{c} \times \mathbf{v} . \end{aligned} \quad (6.77)$$

Nous avons utilisé les conventions d'Einstein⁵ et le tenseur complètement antisymétrique de rang 3, e_{ijk} .

Le champ magnétique s'écrit donc finalement:

$$\mathbf{B} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{1}{R} \frac{1}{g'^3} \frac{1}{c} \mathbf{n} \times [\mathbf{v}g'' - \mathbf{a}g'] . \quad (6.78)$$

En comparant cette expression à (6.72), nous remarquons immédiatement que

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c} \mathbf{n} \times \mathbf{E} . \quad (6.79)$$

Discussion physique

L'équation précédente indique, comme nous nous y attendions, que l'onde émise présente localement la structure d'une onde plane. Le champ se propage selon la direction radiale \mathbf{n} , les champs électrique et magnétique étant perpendiculaires et dans un rapport c . Ces champs ne sont non nuls que si la particule est accélérée. Une particule animée d'un mouvement de translation uniforme ne rayonne pas. C'est une simple conséquence de l'invariance relativiste. Si la particule rayonne, elle doit emprunter l'énergie émise à son énergie cinétique. Une particule qui rayonne doit voir sa vitesse se modifier. En se plaçant dans le référentiel initial de la particule, cela indiquerait qu'une charge au repos pourrait acquérir

⁵Encore une fois, dans l'espace à trois dimensions, il n'y a pas lieu alors d'établir de différence entre les coordonnées covariantes et contravariantes. Nous écrivons en conséquence tous les indices en position basse. Nous adopterons systématiquement cette convention dans la suite de ce chapitre.

spontanément une vitesse, ce qui est absurde. Notons enfin que le renforcement cinématique dans la direction du mouvement est considérablement accru pour les champs. Le facteur $1/g'$ apparaissant dans les potentiels est en effet remplacé par un facteur $1/g'^3$. Ce renforcement est simplement du au fait que les potentiels, tout en étant plus grands dans la direction du mouvement, ont aussi une dépendance spatiale plus rapide. Notons toutefois que les champs sont considérablement réduits dans la direction même du mouvement pour une particule ultra relativiste (dépendance en $\mathbf{n} - \mathbf{v}/c$ de l'équation (6.74)). Pour une particule animée d'une vitesse faible devant c , le champ est réparti dans tout l'espace et peut même être maximum dans une direction orthogonale à la vitesse (on le verra dans le cas du dipôle).

Il est facile de calculer, à partir des champs, le vecteur de Poynting décrivant l'énergie rayonnée. Notons d'abord qu'il est colinéaire à \mathbf{n} , dirigé vers l'extérieur. Son module s'écrit:

$$\Pi = \frac{q^2}{16\pi^2\epsilon_0 c^3} \frac{|\mathbf{n} \times [(\mathbf{n} - \mathbf{v}/c) \times \mathbf{a}]|^2}{R^2(1 - \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}/c)^6}. \quad (6.80)$$

Le facteur cinématique est ici élevé à la puissance 6. Le rayonnement d'une particule ultra-relativiste s'effectue essentiellement vers l'avant en termes énergétiques. Cette expression doit être utilisée avec prudence si on désire déterminer la perte d'énergie de la particule à partir de l'énergie du champ rayonné. Nous avons calculé ici le flux d'énergie par unité de temps au point d'observation. Par intégration spatiale sur une sphère de rayon R centrée sur la particule, on en déduira l'énergie rayonnée par unité de temps dans le référentiel du laboratoire. Pour estimer l'effet du rayonnement sur le mouvement de la particule, il nous faudra estimer la quantité d'énergie émise par unité du temps retardé t_0 . On prendra garde au facteur cinématique $1/g'$ entre ces deux unités de temps.

Pour des particules ultra-relativistes, l'énergie rayonnée peut être très importante. Ce rayonnement peut avoir des conséquences utiles ou néfastes. Il est d'abord utile comme source intense de rayonnement électromagnétique de haute fréquence. Le cône de rayonnement est en effet si étroit qu'il ne passe sur l'observateur, au cours du mouvement de la particule, que pendant un très bref instant. Les fréquences caractéristiques associées à une impulsion brève étant élevées, le rayonnement d'une particule relativiste peut atteindre le domaine des rayons X ou γ . Les tubes standard à rayons X, utilisés en radiographie, utilisent une forme "désordonnée" de ce rayonnement. Des électrons d'énergie modérée (50 keV) frappent une anode (appelée "anticathode" dans ce cas) constituée d'un métal lourd, souvent du tungstène. Passant au voisinage de noyaux fortement chargés, les électrons sont fortement accélérés. Ils rayonnent alors leur énergie sous forme de lumière. En fait, ils perdent une fraction notable de leur énergie à chaque déflexion, sous forme de photons X dont l'énergie est voisine de l'énergie initiale de l'électron (notons que nos approximations ne sont guère valables dans ce cas). C'est en raison de ce mécanisme de perte d'énergie dans la matière que le rayonnement des particules accélérées est souvent appelé Bremsstrahlung, ou rayonnement de freinage. On comprend ainsi aussi pourquoi les électrons pénètrent beaucoup moins dans la matière que des particules plus lourdes (protons, par exemple). Etant beaucoup plus légers, ils sont plus fortement accélérés par les champs nucléaires et perdent leur énergie plus rapidement. En pratique, des électrons d'énergie modérée ne pénètrent que de quelques microns au plus dans de la matière dense, alors que des protons d'énergie comparable sont capables de l'irradier beaucoup plus profondément.

Le rayonnement de freinage dans les anticathodes des tubes à rayons X n'est pas du tout contrôlé. Le rayonnement émis est essentiellement isotrope et présente un très large spectre. Comme il est très difficile de réaliser des composants optiques dans le domaine des rayons X, il n'est guère possible de récupérer et de refocaliser ce rayonnement pour des applications fines. On doit souvent se contenter des "ombres chinoises" de la radiographie classique. On peut contrôler beaucoup mieux le rayonnement en organisant l'accélération. C'est par exemple ce qu'on réalise dans les sources de "rayonnement synchrotron" (nous verrons plus loin l'origine de ce nom) à "onduleur". On fait passer un faisceau d'électrons énergétiques dans un champ magnétique intense spatialement modulé (produit, par exemple, par une chaîne d'aimants permanents montés en quinconce). La trajectoire de l'électron est alors

ondulée, avec une forte accélération au voisinage des extrema de l'élongation transversale. Un rayonnement intense est alors émis dans la direction de propagation, avec un spectre relativement étroit. On peut ainsi réaliser des sources intenses et directives de rayonnement X. Leur seul inconvénient est de nécessiter un anneau de stockage pour les électrons! Pour des intensités de faisceau suffisantes et dans le domaine micro-onde ou optique, le milieu électronique peut présenter un gain suffisant par émission stimulée pour le fonctionnement d'un laser. La fréquence peut en principe être accordée dans une très large gamme en modifiant l'énergie des électrons. Très utilisés dans le domaine infrarouge proche ou lointain, ces lasers n'ont été utilisés dans le domaine visible qu'à l'état de démonstrations de principe. Les lasers à colorant ou, surtout depuis les 20 dernières années à sources solides (diodes laser par exemple), beaucoup plus simples et moins coûteux, ont en effet des performances supérieures.

Le rayonnement de freinage peut avoir des conséquences aussi pour des énergies beaucoup plus faibles. Dans le premier modèle quantique de Bohr Sommerfeld, les électrons orbitent autour du noyau sur des orbites elliptiques classiques. Certains paramètres de l'orbite sont quantifiés, c'est à dire déterminés par un nombre entier: l'énergie par le nombre quantique principal, le moment cinétique et l'orientation de l'orbite par les nombres quantiques orbitaux et magnétiques. Pour les orbites les plus elliptiques, l'électron est très fortement accéléré quand il passe près du noyau. Il doit donc rayonner une quantité d'énergie importante et on peut s'attendre à ce que la durée de vie de ces niveaux soit assez brève. Les orbites de moment angulaire maximum, au contraire, correspondent à une trajectoire électronique circulaire. L'accélération est minimale et on peut s'attendre à ce que la durée de vie de ces niveaux soit beaucoup plus importante. Ce raisonnement semi-classique ne peut pas rendre correctement compte des propriétés des niveaux profonds. En revanche, en vertu du principe de correspondance, il doit décrire convenablement les niveaux de grands nombres quantiques principaux, les "états de Rydberg". On constate en effet que les états de Rydberg "circulaires", de moment orbital maximum, ont une durée de vie plus de 100 fois plus longue que des états de même énergie, mais de faible moment angulaire. Nous donnerons les bases du calcul de ces durées de vie dans les paragraphes suivants.

Si le rayonnement de freinage a des effets bénéfiques, il est aussi une limitation importante aux performances des accélérateurs de particules. Dans les accélérateurs les plus répandus, descendants du "synchrotron", on courbe avec un champ magnétique la trajectoire des particules en forme de cercle. On peut ainsi accélérer les particules à chaque tour en les faisant passer dans une cavité contenant un champ radiofréquence. La fréquence est ajustée de telle manière que les particules rencontrent toujours dans la cavité un champ de même direction. Entre les zones de champ électrique, l'accélération des particules sur leur trajectoire circulaire fait qu'elles perdent de l'énergie par rayonnement. C'est là une limite sérieuse à l'efficacité de ces accélérateurs. Là encore, l'effet est beaucoup plus marqué pour des électrons ou des positrons que pour des particules lourdes. On peut le réduire en augmentant le rayon du cercle. C'est ainsi qu'on ne put atteindre, dans l'ancien accélérateur LEP (large electron-positron collider) au CERN, des énergies électroniques de 50 ou 100 GeV qu'au prix d'un anneau de 27 km de périmètre. La perte d'énergie par rayonnement, qui devait être compensée par les cavités accélératrices, était de quelques dizaines de MW, correspondant à quelques kW par mètre linéaire de faisceau. Ce rayonnement étant essentiellement émis dans le domaine des X durs, on comprend qu'il soit nécessaire d'enterrer profondément l'anneau! Le champ magnétique nécessaire pour obtenir un tel rayon est relativement modéré, de l'ordre de 1000 gauss (0.1T). Ce n'est pas du tout un facteur limitatif.

Pour des accélérateurs à protons, en revanche, comme le LHC (Large Hadron Collider – tout est "large" au CERN) la limitation à l'énergie vient plus du champ magnétique nécessaire à la courbure des trajectoires (quelques Tesla) que du rayonnement de freinage. Notons enfin que le rayonnement de freinage est beaucoup moins important dans les accélérateurs linéaires (parce que vitesse et accélération sont colinéaires). L'énergie est alors limitée par le champ électrique maximum (10MV/m) et la longueur du dispositif (1 km environ).

6.3.2 Réaction de rayonnement

Nous avons fait l'approximation, dans tout ce chapitre, que le rayonnement ne modifiait pas le mouvement de la charge. Il est bien évident que la puissance rayonnée doit être prise sur l'énergie mécanique de la particule et qu'on ne peut négliger cette réaction du rayonnement sur la trajectoire qu'en première approximation. Nous allons tenter dans ce paragraphe de décrire la perturbation au mouvement due au rayonnement. Pour simplifier la discussion, nous choisirons de ne travailler qu'avec un électron. Nous confirmerons en effet que la réaction de rayonnement a des conséquences sur le mouvement d'autant plus importantes que la masse de la particule est petite. L'adaptation de ces discussions à d'autres particules ne présenterait aucune difficulté. Nous ne nous placerons que dans un cadre non relativiste. Nous allons commencer, dans une discussion qualitative, par donner quelques ordres de grandeur. Nous pourrions ainsi dégager une échelle naturelle de temps pour ces phénomènes. Nous montrerons que la perturbation est en effet petite tant que les constantes caractéristiques du mouvement sont longues à cette échelle. Nous montrerons ensuite que l'action du rayonnement sur l'énergie de la particule peut se décrire comme le travail d'une force, la "force de réaction de rayonnement". Nous donnerons alors quelques applications de la force de réaction de rayonnement. Nous montrerons en particulier comment elle donne une durée de vie finie (et très brève) aux atomes dans un modèle planétaire classique.

Approche qualitative

Pour un mouvement non relativiste, on peut, dans l'expression (6.80) du vecteur de Poynting des champs de Liénart-Wiechert, négliger les termes en \mathbf{v}/c . On a alors:

$$\mathbf{\Pi} = \frac{q^2}{16\pi^2\epsilon_0 c^3} \frac{|\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{a})|^2}{R^2} \mathbf{n} . \quad (6.81)$$

En prenant l'axe Oz dans la direction de \mathbf{a} , on voit que $\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{a}) = a \sin\theta \mathbf{u}_\theta$ (avec les notations standard des coordonnées sphériques). L'intégration du vecteur de Poynting sur une sphère de rayon R ne pose alors aucune difficulté (tous les points de cette sphère "voient" manifestement la particule au même instant retardé et donc avec la même accélération). On a donc

$$\begin{aligned} \int \mathbf{\Pi} \cdot d\mathbf{S} = \mathcal{P} &= \frac{q^2 a^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} \int \sin^2 \theta \sin \theta \, d\theta d\phi \\ &= \frac{q^2 a^2}{8\pi \epsilon_0 c^3} \int_{-1}^1 (1 - x^2) \, dx , \end{aligned} \quad (6.82)$$

où on a posé $x = \cos \theta$.

On obtient finalement la puissance totale rayonnée par la charge sous la forme (formule de Larmor):

$$\mathcal{P} = \frac{q^2 a^2}{6\pi \epsilon_0 c^3} = m\tau a^2 , \quad (6.83)$$

avec

$$\tau = \frac{1}{6\pi \epsilon_0} \frac{q^2}{mc^3} , \quad (6.84)$$

Le temps caractéristique τ est la seule quantité temporelle que l'on peut former avec les grandeurs fondamentales de l'électrodynamique classique. Il va jouer un rôle essentiel dans la suite de cette discussion, est maximal pour l'électron, la plus légère des particules chargées. Sa valeur numérique est de $6.32 \cdot 10^{-24}$ s. Il est intéressant de rapprocher τ du "rayon classique" $r_e = 3 \cdot 10^{-15}$ m de l'électron, défini par

$$r_e = \frac{q^2}{4\pi \epsilon_0 mc^2} , \quad (6.85)$$

la longueur fondamentale de l'électrodynamique classique. Notons qu'on peut retrouver qualitativement r_e en imaginant une distribution de charge totale q , sphérique et de rayon r_e et en assimilant son énergie électrostatique à l'énergie de masse de l'électron, mc^2 . Avec ces définitions:

$$r_e = \frac{3}{2}c\tau \quad (6.86)$$

et τ apparaît comme le temps que la lumière met à traverser un électron (une image à considérer avec précaution bien sûr).

Estimons maintenant l'effet de cette puissance sur le mouvement. Considérons pour cela d'abord une particule initialement au repos accélérée uniformément pendant une période T . L'énergie totale rayonnée pendant l'accélération s'écrit alors $\mathcal{P}T$. L'énergie mécanique finale de la charge est, pour sa part, égale à $ma^2T^2/2$. Le rayonnement aura une influence faible sur le mouvement si $\mathcal{P}T \ll ma^2T^2/2$. On peut aussi écrire cette condition sous la forme:

$$T \gg \tau, \quad (6.87)$$

La très faible valeur de τ indique que l'effet du rayonnement est tout à fait négligeable, sauf si on s'intéresse à des périodes d'accélération infiniment courtes.

On peut préciser encore cette approche qualitative en considérant une particule chargée animée d'un mouvement sinusoïdal de fréquence ω_0 . L'accélération est alors de l'ordre de $\omega_0^2 d$ où d est l'extension du mouvement. L'énergie mécanique est pour sa part de l'ordre de $m\omega_0^2 d^2$. La puissance rayonnée pendant une période, \mathcal{P}/ω_0 , sera petite par rapport à l'énergie mécanique et donc le rayonnement sera une petite perturbation au mouvement, si:

$$\frac{1}{6\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{c^3\omega_0} (\omega_0^2 d)^2 \ll m\omega_0^2 d^2, \quad (6.88)$$

c'est à dire si:

$$\eta = \omega_0\tau \ll 1. \quad (6.89)$$

Là encore, cette condition est très bien vérifiée pour tout mouvement à une fréquence raisonnable. L'effet du rayonnement sur le mouvement est donc une faible perturbation et il est bien justifié de considérer, au moins sur un intervalle de temps assez bref, que le mouvement de la particule est imposé.

Si le rayonnement ne modifie pas dramatiquement le mouvement, il n'en reste pas moins que, sur des temps longs, l'effet cumulatif de la puissance rayonnée finira par amortir le mouvement dont l'énergie mécanique sera lentement décroissante. Pour tenir compte plus commodément de cet effet, nous allons montrer que la puissance rayonnée peut être modélisée par le travail d'une force.

Force de réaction de rayonnement

Considérons donc une particule en mouvement imposé entre les instants t_1 et t_2 . En exprimant la puissance rayonnée en fonction de la vitesse de la particule, on peut écrire la variation de l'énergie de la particule due au rayonnement pendant cette période, $\Delta\mathcal{E}$, sous la forme:

$$\Delta\mathcal{E} = -m\tau \int_{t_1}^{t_2} \dot{\mathbf{v}}^2 dt. \quad (6.90)$$

L'intégrale peut aisément être transformée par une intégration par parties. On a:

$$\int_{t_1}^{t_2} \dot{\mathbf{v}}^2 dt = - \int \ddot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v} dt + [\dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v}]_{t_1}^{t_2}. \quad (6.91)$$

Si la période considérée est suffisamment longue et si les vitesses et accélérations sont bornées, l'intégrale dans le second membre domine le terme tout intégré (à condition bien sûr qu'elle soit

non nulle - nous excluons donc de fait le cas du mouvement uniformément accéléré). On peut donc écrire l'énergie $\Delta\mathcal{E}$ sous la forme du travail d'une force:

$$\mathcal{E} = \int \mathbf{F}_r \cdot \mathbf{v} dt , \quad (6.92)$$

où la "force de réaction de rayonnement" \mathbf{F}_r est définie par:

$$\mathbf{F}_r = m\tau\dot{\mathbf{a}} . \quad (6.93)$$

Cette force, proportionnelle à la dérivée temporelle de l'accélération, est tout à fait particulière et doit être utilisée avec beaucoup de précautions. Elle conduit tout d'abord, évidemment, à des équations du mouvement qui sont du troisième ordre par rapport au temps. Il faut donc, pour spécifier complètement le mouvement, donner non seulement la position et la vitesse, mais aussi l'accélération initiale de la particule. Un tel comportement est étranger à tous les principes de la mécanique Newtonienne!

Un autre problème grave relatif à cette force est la présence, parmi les solutions aux équations du mouvement, de solutions divergentes, même pour une particule libre. Considérons en effet une particule initialement au repos. L'équation du mouvement s'écrit:

$$m\dot{\mathbf{v}} = m\tau\ddot{\mathbf{v}} , \quad (6.94)$$

dont la solution générique s'écrit:

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{a}_0 e^{t/\tau} . \quad (6.95)$$

Si on ne spécifie pas que l'accélération de la particule est initialement nulle, l'accélération et la vitesse, croissent exponentiellement avec une constante de temps, τ , extrêmement brève. Ces solutions sont complètement non physiques.

Il faut donc retenir de cette discussion que la force de réaction de rayonnement est un intermédiaire commode pour estimer l'influence du rayonnement sur le mouvement, mais qu'elle doit être utilisée avec précaution, et toujours dans une approche perturbative.

Application

Nous allons utiliser, avec précautions, la force de réaction de rayonnement pour estimer la durée de vie des atomes dans le modèle de Rutherford⁶ (nous discuterons à nouveau ce problème en détail dans le chapitre sur le rayonnement des sources atomiques). La réaction de rayonnement, en réduisant graduellement l'énergie de l'électron en orbite autour du noyau, doit le conduire à tomber sur le noyau. Pour simplifier les calculs, nous considérerons un atome d'hydrogène et nous supposerons que les orbites sont circulaires, comparables à celles du modèle de Bohr. Nous nous servirons d'ailleurs des prédictions de ce modèle pour fixer les ordres de grandeur relatifs à nos orbites (en particulier celui de leur rayon).

Nous supposerons que l'énergie mécanique \mathcal{E} évolue lentement par rapport au mouvement orbital (nous faisons ici une approximation séculaire comparable à celles qui sont utilisées en astronomie). Nous noterons $U(\mathbf{r}) = U(r)$ le potentiel Coulombien à symétrie sphérique, avec

$$U(r) = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} . \quad (6.96)$$

La dérivée temporelle de l'énergie mécanique est donnée par le travail de la force de réaction de rayonnement, ou, plus simplement encore, par la formule de Larmor (on peut remarquer que, pour un mouvement périodique, le terme tout intégré dans le raisonnement conduisant à \mathbf{F}_r est identiquement

⁶Ce paragraphe n'est pas indispensable en première lecture.

nul à condition d'intégrer sur une période; la formule de Larmor est donc strictement équivalente au travail de \mathbf{F}_r). On a alors:

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -m\tau\overline{\mathbf{a}^2}, \quad (6.97)$$

où la barre désigne une moyenne temporelle sur une période. En remarquant que l'accélération est largement dominée par la force coulombienne et peut donc s'écrire:

$$\mathbf{a} = -\frac{1}{m} \frac{dU}{dr} \mathbf{u}_r, \quad (6.98)$$

on obtient finalement:

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -\frac{\tau}{m} \overline{\left(\frac{dU}{dr}\right)^2} = -\frac{\tau}{m} \frac{q^4}{(4\pi\epsilon_0)^2 r^4}. \quad (6.99)$$

On notera qu'on pourrait écrire une équation similaire pour le moment cinétique. On peut montrer rigoureusement, grâce à ces deux équations, que l'orbite de l'électron reste circulaire pendant sa chute sur le noyau. Cette propriété est relativement évidente, puisque la force de réaction de rayonnement est opposée à la vitesse et de module constant.

Pour le mouvement Coulombien, on a, en utilisant le théorème du viriel:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}\overline{U} = -\frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \quad (6.100)$$

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 r^2} \frac{dr}{dt}, \quad (6.101)$$

pour une orbite circulaire. On en déduit immédiatement que le rayon r de l'orbite doit décroître en étant régi par l'équation:

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{\tau}{m} \frac{q^2}{2\pi\epsilon_0 r^2} = -3c^3\tau^3 \frac{1}{\tau} \frac{1}{r^2}. \quad (6.102)$$

La résolution de cette équation est immédiate:

$$r^3(t) - r_0^3 = -9(c\tau)^3 \frac{t}{\tau}. \quad (6.103)$$

Le cube du rayon de l'orbite décroît donc linéairement avec le temps. De manière évidente, le rayon s'annule en un temps fini: la chute de l'électron sur le noyau prend un temps fini. Au cours de cette chute, la fréquence orbitale et donc la fréquence du rayonnement émis croissent indéfiniment. Il est évident que nos approximations (faible rayonnement, mouvement non relativiste, approximation séculaire) tomberont avant la fin du mouvement. On peut cependant estimer l'ordre de grandeur de la durée de vie de l'atome d'hydrogène dans son état fondamental en prenant pour rayon initial le rayon de Bohr a_0 . On trouve alors une durée de vie:

$$T = \frac{1}{9}\tau \left(\frac{a_0}{c\tau}\right)^3 = \frac{3\tau}{8} \left(\frac{a_0}{r_e}\right)^3, \quad (6.104)$$

qui est de l'ordre de τ multiplié par le cube du rapport du rayon de Bohr au rayon classique de l'électron. Numériquement, T vaut environ 14 ps. Un ordre de grandeur aussi faible montre bien les limites d'une approche classique à la structure atomique: au bout de quelques picosecondes tous les atomes auraient du disparaître dans un flash de rayonnement ultraviolet...

Notons que l'on peut, de manière plus utile, estimer à partir de ce calcul la durée de vie de l'orbite de Bohr de nombre quantique principal n . L'émission fait passer l'atome du niveau n au niveau $n-1$. Le rayon de l'orbite n étant $n^2 a_0$, la variation du cube du rayon dans cette transition est $6a_0^3 n^5$ (on suppose que n est grand et on remplace la différence finie par une dérivée). La durée de vie de l'état n doit alors être de l'ordre de:

$$\tau \frac{2}{3} \left(\frac{a_0}{c\tau}\right)^3 n^5 \simeq 6n^5 T. \quad (6.105)$$

Elle croît très rapidement avec n . Pour $n = 50$, par exemple, on trouve 26 ms. Ce résultat est extrêmement proche de la durée de vie du niveau de Rydberg circulaire $n = 50$. Ce niveau, de nombres quantiques orbital et magnétique maximums, correspond en effet de la manière la plus proche possible à l'orbite circulaire de Bohr. Comme tous les nombres quantiques mis en jeu sont élevés, le principe de correspondance nous indique en effet que le calcul classique et le calcul quantique doivent être en très bon accord.

6.3.3 Rayonnement du dipôle

Nous allons consacrer cette section à l'étude, au moyen des potentiels de Liénard–Wiechert, d'un cas particulier important: le rayonnement d'une charge oscillant de manière harmonique au voisinage de l'origine. Au prix d'une approximation simple, valable quand l'extension du mouvement est très petite par rapport à la longueur d'onde rayonnée, nous verrons qu'il est possible de calculer explicitement les champs. Ce rayonnement dipolaire se retrouve dans de nombreux domaines. Tous les problèmes d'émission ou de diffusion de rayonnement par des atomes ou des assemblées d'atomes se ramènent à un problème de rayonnement dipolaire. De plus, comme nous le verrons dans le prochain chapitre, ce rayonnement est le premier terme d'un développement (dit "multipolaire") valable pour une répartition quelconque de courants. Nous consacrerons la première partie de ce paragraphe à adapter simplement les résultats des paragraphes précédents à ce cas simple: calculs des potentiels, des champs rayonnés, du diagramme de rayonnement et de la puissance totale rayonnée. Dans la deuxième partie, nous exploiterons la très grande simplicité de cette source pour calculer les champs exacts. Nous conserverons donc tous les termes en $1/R^n$ et montrerons comment on passe des champs statiques aux champs rayonnés quand on s'éloigne de la source.

Champs rayonnés

Nous considérons donc une charge ponctuelle animée d'un mouvement harmonique *non relativiste* autour de l'origine O . Nous choisirons un mouvement linéaire le long de l'axe Oz . Un mouvement harmonique plus complexe peut en effet toujours être décrit comme la superposition de trois mouvements harmoniques selon les trois directions de l'espace. Dans le cadre des approximations que nous ferons, le champ correspondant est simplement la somme des champs créés indépendamment par ces trois mouvements.

La position de la particule à l'instant t' est donc:

$$\mathbf{r}_0(t') = z_0 \mathbf{u}_z e^{-i\omega t'} \quad (6.106)$$

et sa vitesse

$$\mathbf{v}(t') = -iz_0\omega \mathbf{u}_z e^{-i\omega t'} . \quad (6.107)$$

Nous supposons la vitesse très petite devant c et ne garderons que les termes dominants dans un développement en puissances de \mathbf{v}/c . On peut s'interroger sur l'appellation dipôle pour une charge oscillante unique. Un vrai dipôle oscillant serait constitué de cette charge oscillante et d'une charge opposée fixe à l'origine. La charge fixe ne crée qu'un champ électrostatique. Comme nous ne nous intéressons qu'au champ rayonné à grande distance à la fréquence ω , cette contribution électrostatique ne joue aucun rôle. Seule la charge mobile importe pour le rayonnement. Notons également que nous devons, en toute rigueur, appeler cette source un dipôle électrique. Nous verrons en effet dans le prochain chapitre qu'il existe un autre type de source dipolaire, le dipôle magnétique, essentiellement équivalent à une petite boucle de courant oscillant.

L'approximation essentielle que nous ferons (approximation dipolaire) consiste à négliger l'extension spatiale du mouvement de la particule, z_0 , par rapport à toutes les grandeurs caractéristiques du problème. Elle est tout d'abord négligeable par rapport à la distance d'observation et on écrira simplement $1/R = 1/r$ (r est le module de \mathbf{r} , distance de l'origine au point d'observation). Nous

supposerons aussi que le temps retardé varie peu devant la période d'oscillation d'une extrémité de la trajectoire à l'autre. En d'autres termes, nous supposerons

$$\frac{z_0}{c} \ll \frac{1}{\omega} \quad (6.108)$$

ou encore

$$z_0 \ll \lambda, \quad (6.109)$$

où $\lambda = 2\pi c/\omega$ est la longueur d'onde, dans le vide, d'une onde plane de fréquence ω . Notons que cette condition s'écrit aussi $v_0 \ll c$. Nous pourrions alors écrire simplement:

$$t_0 = t - \frac{r}{c}. \quad (6.110)$$

t_0 est alors simplement retardé d'une quantité constante par rapport à l'instant d'observation. Nous écrivons ainsi le premier terme d'un développement de t_0 en puissances de r_0/λ . Notons que cette approximation dipolaire est, par exemple, tout à fait légitime pour le rayonnement atomique. Les longueurs d'onde caractéristiques sont en effet de l'ordre du micron alors que l'extension des mouvements électroniques, comparable au rayon de Bohr, est plutôt de l'ordre de l'Ångström.

Potentiers

Avec ces approximations, l'écriture des potentiels de Liénard ne pose aucune difficulté. Pour le potentiel vecteur, on a, en utilisant directement l'expression des potentiels de Liénard:

$$\mathbf{A} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\mathbf{v}(t_0)}{1 - \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}(t_0)/c} \frac{1}{r}. \quad (6.111)$$

La vitesse à l'instant retardé est simplement:

$$\mathbf{v}(t_0) = \mathbf{v}(t - r/c) = -iz_0\omega e^{-i\omega t} e^{ikr} \mathbf{u}_z. \quad (6.112)$$

En introduisant l'amplitude du courant:

$$j = -iqz_0\omega, \quad (6.113)$$

on peut donc écrire finalement

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 j}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} e^{-i\omega t} \frac{1}{1 - \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}/c} \mathbf{u}_z. \quad (6.114)$$

Pour le potentiel scalaire:

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \frac{1}{1 - \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}/c}. \quad (6.115)$$

Nous allons effectuer un développement de ces potentiels au premier ordre non trivial et non nul en v/c , en utilisant pour toutes les quantités retardées le seul instant t_0 . On peut donc écrire:

$$\frac{1}{1 - \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}/c} \simeq 1 + \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}/c. \quad (6.116)$$

Le premier ordre non nul pour le potentiel scalaire correspond au potentiel électrostatique $q/4\pi\epsilon_0 r$. Comme nous n'avons considéré qu'une charge ponctuelle, il est normal qu'on trouve effectivement à l'ordre le plus bas un potentiel électrostatique. Toutefois, il ne contribue pas à la propagation et au rayonnement et nous pouvons l'oublier (on pourrait aussi ajouter une charge $-q$ immobile à l'origine, ce qui constituerait une description plus réaliste d'un dipôle).

En remarquant que

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}(t_0)/c = -i \frac{z_0 \omega}{c} e^{i(kr - \omega t)} \mathbf{u}_z \cdot \mathbf{u}_r, \quad (6.117)$$

et que $\mathbf{u}_z \cdot \mathbf{u}_r = \cos \theta$ en coordonnées sphériques, on peut écrire les potentiels au premier ordre significatif:

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 j}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} e^{-i\omega t} \mathbf{u}_z \quad (6.118)$$

$$V = -i \frac{d}{4\pi\epsilon_0} \frac{\omega}{c} \frac{e^{i(kr - \omega t)}}{r} \cos \theta. \quad (6.119)$$

Dans l'expression de V , nous avons fait intervenir l'amplitude du dipôle associé à la charge:

$$d = ij/\omega = qz_0. \quad (6.120)$$

On peut vérifier par un calcul élémentaire que V et \mathbf{A} vérifient bien la jauge de Lorentz (les potentiels de Liénard-Wiechert complets y obéissent. Ce doit donc être vrai à tous les ordres dans le développement en v/c).

Notons que nous aurions pu pousser le développement un terme plus loin en puissances de v/c . En fait, sauf pour vérifier la consistance de la jauge, il n'est pas nécessaire de calculer le potentiel scalaire au second ordre. Comme nous le verrons dans un moment, le champ magnétique se calcule directement à partir du potentiel vecteur et le champ électrique s'en déduit en utilisant les équations de Maxwell ou, plus simplement, la structure locale d'onde plane à très grande distance. Le terme d'ordre 2 dans le potentiel vecteur s'écrit, après quelques transformations:

$$\mathbf{A}^{(2)} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{qz_0^2}{2} \frac{4\omega^2}{2c} \frac{e^{2i(kr - \omega t)}}{r} \cos \theta \mathbf{u}_z. \quad (6.121)$$

Il s'agit d'un terme oscillant à la fréquence 2ω (c'est un terme en v^2), possédant une structure géométrique plus complexe que le potentiel vecteur du dipôle. Nous examinerons plus tard, par la technique systématique des développements multipolaires, le champ créé par une charge oscillante à cet ordre. Nous verrons qu'il existe effectivement un champ quadripolaire électrique à cette fréquence et nous retrouverons, par une autre méthode plus physique, l'expression ci-dessus.

Champs rayonnés

Les champs rayonnés s'expriment également sans difficultés. On pourrait calculer le champ électrique à partir de \mathbf{A} et de V . Le calcul ne présente aucune difficulté. Toutefois, si ne nous intéressons qu'aux champs rayonnés à grande distance, il est beaucoup plus économique de revenir directement aux champ de Liénard. A l'ordre d'approximation où nous travaillons:

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{1}{r} \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{a}), \quad (6.122)$$

où l'accélération \mathbf{a} à l'instant retardé t_0 s'écrit simplement:

$$\mathbf{a} = -z_0 \omega^2 e^{i(kr - \omega t)} \mathbf{u}_z. \quad (6.123)$$

Le champ électrique s'exprime plus naturellement en termes du dipôle électrique. On a

$$\mathbf{E} = -\frac{d}{4\pi\epsilon_0} k^2 \frac{e^{ikr}}{r} e^{-i\omega t} \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{u}_z) \quad (6.124)$$

En utilisant les vecteurs unitaires du trièdre local en coordonnées sphériques, on trouve rapidement que:

$$\mathbf{n} \times \mathbf{u}_z = -\sin \theta \mathbf{u}_\phi \quad (6.125)$$

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{u}_z) = \sin \theta \mathbf{u}_\theta, \quad (6.126)$$

et finalement

$$\mathbf{E} = -\frac{d}{4\pi\epsilon_0} \frac{\omega^2}{c^2} \frac{e^{ikr}}{r} e^{-i\omega t} \sin \theta \mathbf{u}_\theta. \quad (6.127)$$

L'onde rayonnée ayant toujours localement la structure d'une onde plane de vecteur d'onde $\mathbf{k} = k\mathbf{n}$, on en déduit

$$\mathbf{B} = -\frac{d}{4\pi\epsilon_0} \frac{\omega^2}{c^3} \frac{e^{ikr}}{r} e^{-i\omega t} \sin \theta \mathbf{u}_\phi. \quad (6.128)$$

La géométrie des champs est relativement intuitive. La répartition de courant produite par la charge est en effet à symétrie cylindrique autour de l'axe Oz . Le champ magnétique respecte cette symétrie (les lignes de champ sont des cercles d'axe Oz). Quand au champ électrique, il est dans le plan défini par le dipôle et le point d'observation. Notons enfin que les champs sont nuls dans la direction du dipôle, Oz . Nous discuterons dans un moment quelques conséquences physiques de cet effet non-relativiste (le rayonnement n'est pas du tout concentré dans la direction de la vitesse de la particule).

Vecteur de Poynting

A partir des champs, nous pouvons facilement calculer le vecteur de Poynting:

$$\mathbf{\Pi} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{\mu_0}. \quad (6.129)$$

Il faut prendre garde aux notations complexes quand on manipule des quantités énergétiques, quadratiques dans les champs. Une substitution directe et maladroite des expressions précédentes pourrait faire croire que $\mathbf{\Pi}$ est une fonction purement oscillante à 2ω . Il faut, en fait, soit revenir aux parties réelles des champs pour exprimer la valeur instantanée de $\mathbf{\Pi}$, soit ne s'intéresser qu'à la moyenne temporelle $\overline{\mathbf{\Pi}}$ de $\mathbf{\Pi}$ sur une période optique (ou sur un intervalle de temps long par rapport à cette période). En effet, cette moyenne temporelle s'écrit simplement en termes des amplitudes complexes des champs. En posant:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t} \quad (6.130)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 e^{-i\omega t}, \quad (6.131)$$

les champs réels s'écrivent

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{E}_0 e^{-i\omega t} + \mathbf{E}_0^* e^{i\omega t}) \quad (6.132)$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{2}(\mathbf{B}_0 e^{-i\omega t} + \mathbf{B}_0^* e^{i\omega t}). \quad (6.133)$$

(\mathbf{E}_0^* désignant le complexe conjugué de \mathbf{E}_0). Le vecteur de Poynting contient alors des termes oscillants à 2ω dont la moyenne temporelle est évidemment nulle et des termes constants, qui contribuent seuls à cette moyenne. On a finalement:

$$\overline{\mathbf{\Pi}} = \frac{1}{4\mu_0} [\mathbf{E}_0 \times \mathbf{B}_0^* + \mathbf{E}_0^* \times \mathbf{B}_0] = \frac{1}{2\mu_0} \text{Re} (\mathbf{E}_0 \times \mathbf{B}_0^*). \quad (6.134)$$

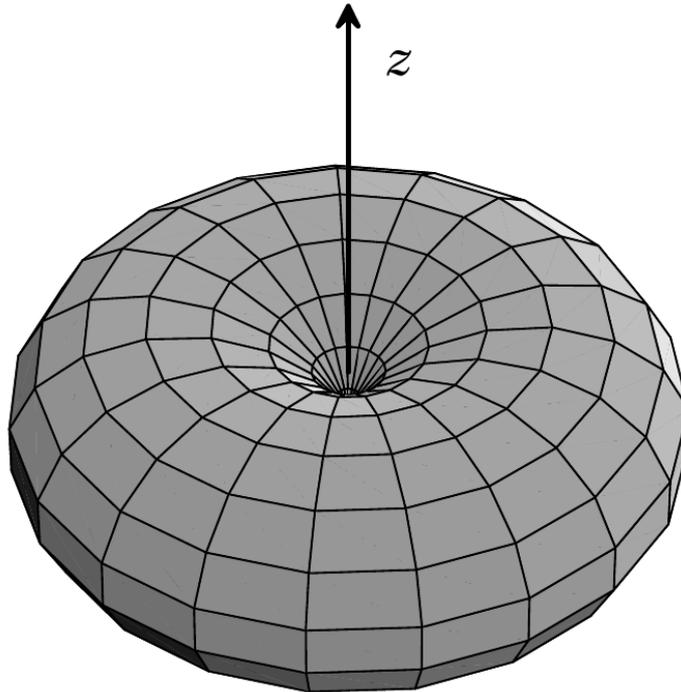


Figure 6.4: Diagramme de rayonnement d'un dipôle électrique aligné avec l'axe Oz . On note que le rayonnement est nul sur l'axe du dipôle.

On notera que ce type d'expression peut être utilisé pour toute quantité quadratique (densités d'énergie...).

En appliquant cette formule nous trouvons donc:

$$\bar{\Pi} = \frac{d^2}{32\pi^2\epsilon_0} \frac{\omega^4 \sin^2\theta}{c^3 r^2} \mathbf{u}_r . \quad (6.135)$$

Comme prévu, $\bar{\Pi}$ est colinéaire à \mathbf{u}_r et de même sens. Il décrit bien un flux d'énergie du dipôle vers l'infini. On peut visualiser la répartition spatiale du flux énergétique en traçant le diagramme de rayonnement. Dans la direction définie par les angles θ et ϕ des coordonnées sphériques, on porte une longueur proportionnelle à $\bar{\Pi}$. Le diagramme ainsi obtenu est de révolution autour de Oz . Il est représenté sur la figure 6.4. La section de cette surface par un plan passant par Oz est constituée de deux lobes symétriques d'équation polaire $\rho = K \sin^2\theta$. La propriété essentielle de ce diagramme est que la puissance rayonnée est nulle dans la direction du mouvement, maximale dans une direction perpendiculaire.

De nombreux phénomènes physiques sont associés à ce diagramme de rayonnement. Une antenne dipolaire électrique (un fil rectiligne parcouru par un courant oscillant — nous montrerons dans le prochain chapitre l'équivalence avec le système traité ici) ne rayonne que dans un plan perpendiculaire à son axe. Elle doit donc être orientée verticalement pour une communication terrestre. De manière réciproque, une antenne linéaire ne capte correctement le rayonnement que si elle est perpendiculaire à la direction de propagation et parallèle à la polarisation (une expérience quotidienne avec les antennes de télévision, réseau d'antennes linéaires). Nous verrons qu'une petite particule ou un atome éclairé par une onde plane possède un dipôle induit parallèle à la direction de polarisation. Il diffuse donc préférentiellement le rayonnement dans une direction perpendiculaire à sa polarisation. Ce phénomène est à l'origine de la polarisation de la lumière diffusée par l'atmosphère. Les ondes incidentes de polarisation perpendiculaire au plan défini par la direction d'observation et la direction du soleil

contribuent principalement à la lumière diffusée. La lumière observée dans une direction est donc partiellement polarisée. Quand la lumière subit des diffusion multiples (par temps de brouillard par exemple), cet effet de polarisation est brouillé et la lumière diffusée a une polarisation naturelle. On peut observer facilement la direction préférentielle de diffusion, dans une expérience de cours, en observant la diffusion d'une lumière polarisée par une solution saturée de glucose. Comme elle possède un important pouvoir rotatoire, la polarisation linéaire de l'onde incidente tourne, avec une période spatiale de quelques centimètres. On observe alors, à angle droit avec la direction incidente, que la diffusion est pratiquement nulle quand la polarisation pointe vers l'observateur, maximale dans le cas contraire.

Puissance totale rayonnée

On obtient la moyenne temporelle de la puissance rayonnée par le dipôle, \mathcal{P} , en intégrant le vecteur de Poynting moyen sur une sphère de rayon r . $\bar{\mathbf{\Pi}}$ étant en $1/r^2$, la dépendance en r disparaît et la puissance rayonnée est indépendante du rayon de cette sphère. L'intégrale sur l'angle ϕ est triviale et on obtient immédiatement:

$$\mathcal{P} = \frac{d^2}{32\pi^2\epsilon_0} \frac{\omega^4}{c^3} 2\pi \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta \quad (6.136)$$

On vérifiera que

$$\int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \frac{4}{3}. \quad (6.137)$$

On a donc enfin:

$$\mathcal{P} = \frac{d^2}{12\pi\epsilon_0} \frac{\omega^4}{c^3}. \quad (6.138)$$

Cette formule nous sera très utile dans la suite de ce cours. De manière naturelle, la puissance rayonnée est proportionnelle au carré de l'amplitude du dipôle. Elle est également proportionnelle à la quatrième puissance de la fréquence. A dipôle égal, les hautes fréquences sont rayonnées de façon beaucoup plus efficace que les basses. On connaît bien ce phénomène en acoustique: les hauts-parleurs sont d'autant plus petits, pour une puissance restituée égale, que leur fréquence optimale d'utilisation est élevée. Dans le domaine optique, ce comportement est responsable de la couleur bleue de la lumière diffusée si la lumière incidente est blanche. C'est par exemple ce qui explique le bleu du ciel. Les molécules d'air ont des fréquences de résonance très hautes par rapport aux fréquences visibles. Elles répondent donc de la même manière à toutes les fréquences visibles, par des dipôles comparables. En revanche, les fréquences les plus élevées dominent largement dans le spectre de la lumière diffusée. Par un simple effet de complémentarité, le rouge domine dans le spectre de la lumière transmise. Voici pourquoi le ciel est bleu ⁷ et les couchers de soleil rouges.

La puissance rayonnée doit provenir d'une source d'énergie. On pourrait envisager que la particule soit mise en mouvement par des sources externes, éventuellement non électromagnétiques. L'énergie rayonnée peut aussi provenir de l'énergie mécanique de la particule (élastiquement liée à un centre de force). Dans ce cas, cette énergie mécanique décroît au cours du temps sous l'action de la force de réaction de rayonnement. Cette force, proportionnelle à la dérivée troisième de la position est, pour un mouvement pratiquement sinusoïdal, proportionnelle au cube de la fréquence. La puissance de cette force varie donc comme la quatrième puissance de la fréquence, ce qui est bien ce que nous venons de déterminer par un autre moyen.

⁷L'explication complète du bleu du ciel est un peu plus complexe. Si l'atmosphère était parfaitement homogène, elle se comporterait comme un milieu d'indice constant et il n'y aurait pas de diffusion. Le ciel serait noir (et triste). Les fluctuations thermodynamiques de densité sont responsables d'inhomogénéités d'indice à l'échelle de la longueur d'onde incidente et de l'existence d'une diffusion. Nous reviendrons sur ce point dans le dernier chapitre.

Champs à une distance arbitraire

Le problème que nous nous sommes posé ici est suffisamment simple pour que nous puissions entreprendre de calculer exactement le champ produit à une distance arbitraire⁸. Nous pourrions ainsi calculer le champ proche du dipôle et montrer comment on passe d'une solution essentiellement électrostatique à courte distance aux champs rayonnés du paragraphe précédent. Nous partirons du potentiel vecteur décrit par l'équation (6.118). La seule approximation effectuée à ce niveau est en effet l'approximation dipolaire négligeant l'extension du mouvement par rapport à la longueur d'onde rayonnée. En revanche, les champs des équations (6.127, 6.128) ne sont que les premiers termes d'un développement en puissances de $1/r$ des vrais champs. Nous allons rétablir intégralement ce développement. Nous commencerons par établir l'expression du champ magnétique, rotationnel du potentiel vecteur. Nous en déduirons ensuite le champ électrique, directement à partir de l'équation de Maxwell–Ampère. Nous éviterons ainsi d'avoir à expliciter le potentiel scalaire, qui est important dans la zone des champs proches.

Champ Magnétique

Nous partons de

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \frac{\mu_0 j}{4\pi} e^{-i\omega t} \nabla \times \frac{e^{ikr}}{r} \mathbf{u}_z . \quad (6.139)$$

Une formule standard d'analyse vectorielle donne:

$$\nabla \times \frac{e^{ikr}}{r} \mathbf{u}_z = \nabla \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) \times \mathbf{u}_z , \quad (6.140)$$

le rotationnel de \mathbf{u}_z étant manifestement nul. Le gradient étant celui d'une fonction à symétrie sphérique, il s'exprime simplement:

$$\nabla \frac{e^{ikr}}{r} = \mathbf{u}_r e^{ikr} \left[\frac{ik}{r} - \frac{1}{r^2} \right] . \quad (6.141)$$

En remarquant que $\mathbf{u}_r \times \mathbf{u}_z = -\sin\theta \mathbf{u}_\phi$, on a finalement le champ magnétique sous la forme:

$$\mathbf{B} = -\frac{\mu_0 j}{4\pi} e^{-i\omega t} e^{ikr} \left[\frac{ik}{r} - \frac{1}{r^2} \right] \sin\theta \mathbf{u}_\phi . \quad (6.142)$$

Notons que la partie en $1/r$ de ce champ, dominante à grande distance, coïncide, à des réécritures près, avec (6.128). Notons également que le terme de champ proche, en $1/r^2$ ici, n'affecte pas les propriétés de symétrie du champ dont les lignes restent des cercles d'axe Oz .

Champ Electrique

Plutôt que d'écrire l'expression du potentiel scalaire, par exemple par la jauge de Lorentz, pour la dériver ensuite, nous allons utiliser l'équation de Maxwell–Ampère qui s'écrit, pour des champs harmoniques:

$$\mathbf{E} = \frac{ic^2}{\omega} \nabla \times \mathbf{B} . \quad (6.143)$$

Il est plus naturel d'exprimer le champ électrique en termes de l'amplitude du dipôle $d = qz_0$. Après une simple réécriture, on a:

$$\mathbf{E} = \frac{d}{4\pi\epsilon_0} e^{-i\omega t} \nabla \times \nabla \times \left(\frac{e^{ikr}}{r} \mathbf{u}_z \right) . \quad (6.144)$$

⁸On peut omettre ce paragraphe en première lecture.

Le double rotationnel se développe en:

$$\nabla \times \nabla \times \frac{e^{ikr}}{r} \mathbf{u}_z = \nabla \left(\nabla \cdot \frac{e^{ikr}}{r} \mathbf{u}_z \right) - \Delta \frac{e^{ikr}}{r} \mathbf{u}_z . \quad (6.145)$$

Le laplacien du second membre est particulièrement simple. \mathbf{u}_z étant constant, il se ramène à:

$$\Delta \frac{e^{ikr}}{r} \mathbf{u}_z = \mathbf{u}_z \Delta \frac{e^{ikr}}{r} = \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} r \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) \mathbf{u}_z = -\frac{k^2}{r} e^{ikr} \mathbf{u}_z . \quad (6.146)$$

En utilisant enfin la décomposition de \mathbf{u}_z sur le trièdre local ($\mathbf{u}_z = -\sin \theta \mathbf{u}_\theta + \cos \theta \mathbf{u}_r$), on a:

$$\Delta \frac{e^{ikr}}{r} \mathbf{u}_z = +\sin \theta \frac{k^2}{r} e^{ikr} \mathbf{u}_\theta - \cos \theta \frac{k^2}{r} e^{ikr} \mathbf{u}_r \quad (6.147)$$

Revenons maintenant au premier terme du membre de gauche de (6.145). \mathbf{u}_z étant constant, il sort de la divergence et nous pouvons écrire:

$$\nabla \left(\nabla \cdot \frac{e^{ikr}}{r} \mathbf{u}_z \right) = \nabla \left(\nabla \frac{e^{ikr}}{r} \cdot \mathbf{u}_z \right) . \quad (6.148)$$

Le gradient d'un produit scalaire peut aussi se développer par une formule d'analyse vectorielle standard. En utilisant encore une fois le fait que \mathbf{u}_z est une constante, et que ses dérivées sont nulles, ainsi que le fait que le rotationnel d'un gradient est identiquement nul, on a:

$$\nabla \left(\nabla \cdot \frac{e^{ikr}}{r} \mathbf{u}_z \right) = (\mathbf{u}_z \cdot \nabla) \nabla \frac{e^{ikr}}{r} . \quad (6.149)$$

avec $(\mathbf{u}_z \cdot \nabla) = \cos \theta \partial / \partial r - (\sin \theta / r) \partial / \partial \theta$, et en exprimant le gradient on obtient enfin:

$$\nabla \left(\nabla \cdot \frac{e^{ikr}}{r} \mathbf{u}_z \right) = \cos \theta \mathbf{u}_r e^{ikr} \left[-\frac{k^2}{r} - 2\frac{ik}{r^2} + \frac{2}{r^3} \right] - \sin \theta \mathbf{u}_\theta e^{ikr} \left[\frac{ik}{r^2} - \frac{1}{r^3} \right] . \quad (6.150)$$

En regroupant finalement ce terme avec celui provenant du laplacien on a le champ à toute distance sous la forme:

$$\mathbf{E} = \frac{d}{4\pi\epsilon_0} e^{-i\omega t} e^{ikr} \left\{ -2\mathbf{u}_r \cos \theta \left[\frac{ik}{r^2} - \frac{1}{r^3} \right] - \mathbf{u}_\theta \sin \theta \left[\frac{k^2}{r} + \frac{ik}{r^2} - \frac{1}{r^3} \right] \right\} . \quad (6.151)$$

Nous avons donc bien exprimé le champ électrique comme un développement en puissances successives de kr ou de r/λ . Le terme en $1/r$ dominant à grande distance coïncide, là encore, avec le champ rayonné donné par (6.127). La symétrie du champ électrique n'est pas modifiée par les termes de champ proche et \mathbf{E} reste dans le plan défini par la direction du dipôle et la direction d'observation. Notons enfin que la partie du champ en $1/r^2$, importante dans la région intermédiaire, est en quadrature avec les champs en $1/r$ et $1/r^3$. Cette propriété a une certaine importance dans les raisonnements énergétiques.

L'expression de \mathbf{E} en termes des vecteurs de base du trièdre local est sans doute la plus commode. Notons pour mémoire qu'on peut donner une expression complètement vectorielle de \mathbf{E} sous la forme:

$$\mathbf{E} = \frac{d}{4\pi\epsilon_0} e^{-i\omega t} e^{ikr} \left\{ \frac{k^2}{r} (\mathbf{u}_r \times \mathbf{u}_z) \times \mathbf{u}_r - \left(\frac{ik}{r^2} - \frac{1}{r^3} \right) (3\mathbf{u}_r \times (\mathbf{u}_r \times \mathbf{u}_z) + 2\mathbf{u}_z) \right\} . \quad (6.152)$$

Cette forme a le mérite essentiel de bien faire ressortir la contribution rayonnée, mise ici sous la forme entièrement vectorielle résultant directement des champs de Liénard.

Discussion

Trois régions importantes de l'espace apparaissent dans l'équation (6.151). La région des champ rayonnés correspond à $kr \gg 1$ et nous l'avons déjà étudiée en détails. La région $kr \ll 1$ est dite région du champ proche. Le champ électrique y est dominé par des termes en $1/r^3$. Il peut s'écrire:

$$\mathbf{E} = \frac{d}{4\pi\epsilon_0} e^{-i\omega t} \left[\frac{2 \cos \theta}{r^3} \mathbf{u}_r + \frac{\sin \theta}{r^3} \mathbf{u}_\theta \right]. \quad (6.153)$$

On reconnaît, à un facteur oscillant $e^{-i\omega t}$ près, l'expression du champ électrique du dipôle électrostatique. Nous sommes effectivement à une distance courte devant la longueur d'onde rayonnée: la propagation ne joue pas de rôle et le champ électrique suit immédiatement sa source.

Ce champ "électrostatique" proche joue un rôle important dans de nombreux domaines. Il est par exemple responsable des forces de "van der Waals" entre molécules d'un gaz, responsables en partie des écarts à la loi des gaz parfaits. Les molécules sont en effet de petits dipôles électrostatiques fluctuant à des fréquences optiques. Les distances moyennes entre particules dans un gaz de densité normale étant très inférieures aux longueurs d'onde optiques, l'interaction entre ces petits dipôles peut se calculer en utilisant ces formules de champ proche. Il serait hors de propos de donner ici une interprétation plus détaillée des forces de van der Waals, qui ne peuvent se comprendre correctement que dans un cadre quantique (on notera par exemple que l'image d'un dipôle fluctuant ne peut tenir pour une molécule dans son état fondamental: ce dipôle devrait rayonner, ce qui rendrait l'état fondamental instable).

La troisième région de l'espace est celle des champs "intermédiaires", $kr \simeq 1$. Tous les termes du champ électrique sont alors d'importance comparable. La complexité du champ est telle que nous ne décrirons pas plus en détail ses propriétés.

Chapitre 7

Développement multipolaire du champ rayonné

Nous nous intéresserons dans ce chapitre à un type de sources qui généralise le dipôle introduit au chapitre précédent. Nous considérerons une répartition de courants quelconques, oscillant de façon harmonique, localisés au voisinage de l'origine. Les courants seront imposés, comme le mouvement des charges dans le chapitre précédent. Le problème ainsi posé est bien sûr trop général. Nous chercherons donc seulement à déterminer les champs rayonnés à une distance très grande par rapport à la longueur d'onde et à l'extension spatiale de la répartition de courants. Nous ne nous restreindrons pas en revanche à des répartitions de courant localisées sur une étendue faible par rapport à la longueur d'onde. Nous procéderons à un développement en puissances de l'extension de la source par rapport à λ (longueur d'onde rayonnée). Nous identifierons physiquement les différents termes de ce développement et constaterons que le terme dominant n'est autre que le champ du dipôle électrique. Nous préciserons à chaque fois les caractéristiques du rayonnement et, en particulier, le diagramme d'émission. Nous conclurons ce chapitre en présentant quelques applications de ces développements multipolaires. Nous reviendrons en particulier sur le rayonnement d'une charge animée d'un mouvement sinusoïdal non relativiste. Nous pourrions calculer les corrections au rayonnement dipolaire dues à l'extension finie de la trajectoire. Nous nous pencherons ensuite sur le problème, plus important en pratique, des antennes. Nous discuterons deux types d'antennes couramment répandues. Nous dégagerons en particulier la notion importante d'impédance de rayonnement.

7.1 Développement multipolaire du potentiel vecteur

7.1.1 Notations

La position du problème et les notations sont résumées sur la figure 7.1. Nous cherchons le champ rayonné en un point \mathbf{r} à l'instant t par une répartition de courants située au voisinage de l'origine, dans une région d'extension caractéristique r_0 (on prendra garde à quelques changements de notation par rapport au paragraphe précédent). Le courant au point source \mathbf{r}' à l'instant t' est $\mathbf{j}(\mathbf{r}', t') = \mathbf{j}_0(\mathbf{r}') \exp(-i\omega t')$. \mathbf{j}_0 désigne donc l'amplitude complexe de la densité de courant. Notons encore une fois que, si nous nous limitons ici à des courants harmoniques, le cas général peut être traité en utilisant transformation de Fourier et principe de superposition.

La répartition de courants est nécessairement, par la conservation de la charge, accompagnée d'une densité de charges, elle aussi oscillante à la fréquence ω : $\rho(\mathbf{r}', t') = \rho_0(\mathbf{r}') \exp(-i\omega t')$. En écrivant l'équation de continuité:

$$\nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t'} = 0 \quad (7.1)$$

où les dérivations spatiales s'entendent par rapport à \mathbf{r}' et en y portant la dépendance harmonique en

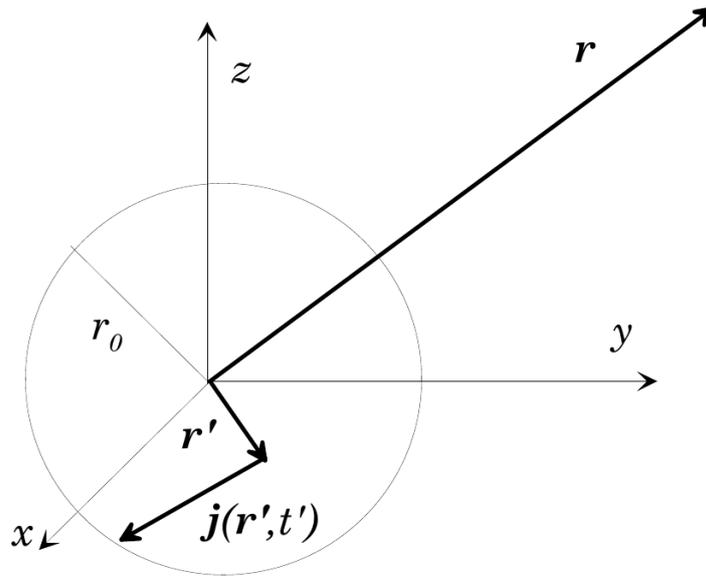


Figure 7.1: Rayonnement multipolaire: notations

temps, on trouve:

$$i\omega\rho_0 = \nabla \cdot \mathbf{j}_0 . \quad (7.2)$$

Nous utiliserons donc indifféremment la densité de courant et la densité de charge pour caractériser la source.

Il y a dans ce problème trois échelles naturelles de longueur:

- La distance r entre la répartition de courant et le point d'observation.
- La longueur d'onde $\lambda = 2\pi c/\omega$ du rayonnement
- L'extension spatiale r_0 de la répartition de courant.

Nous nous placerons uniquement dans le cas où la distance d'observation est très grande, à la fois par rapport à la longueur d'onde et par rapport à l'extension de la source:

$$r \gg \lambda, r_0 . \quad (7.3)$$

En fait, nous calculerons le potentiel comme un développement limité en puissances de r/λ et nous ne garderons que les termes dominants, en $1/r$. Nous suivons en cela la démarche du chapitre précédent. Nous ne supposerons pas en revanche, comme pour le dipôle, que $r_0 \ll \lambda$. Nous effectuerons plutôt un développement limité en puissances de r_0/λ , dont nous garderons tous les ordres ¹ (le développement multipolaire proprement dit). Nous identifierons ensuite les contenus physiques de ces différents ordres. Pour des raisons évidentes, nous nous cantonnerons aux termes des premier et second ordres pour cette analyse détaillée.

Notons que nous nous livrerons ici à un calcul relativement élémentaire, qui ne se prête guère à discuter des termes d'ordre supérieur à un dans le développement. On pourra consulter le Jackson pour des techniques qui permettent de traiter de façon très systématique le développement à tous les ordres. La méthode que nous présentons ici est beaucoup plus simple mathématiquement et contient l'essentiel de idées physiques.

¹Le problème du rayon de convergence d'un tel développement en série se pose bien sûr. En fait, ce développement est toujours convergent puisqu'il s'agit, comme nous le verrons, du simple développement d'une exponentielle

7.1.2 Potentiel vecteur

L'expression du potentiel vecteur s'obtient tout naturellement à partir de la solution en termes de potentiels retardés:

$$\begin{aligned}\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}_0(\mathbf{r}') e^{-i\omega(t-|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/c)}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} e^{-i\omega t} \int \frac{\mathbf{j}_0(\mathbf{r}') e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}' ,\end{aligned}\quad (7.4)$$

en posant encore $k = \omega/c$. Cette expression est, jusqu'ici, exacte pour une répartition de courant harmonique (rappelons que cette expression était, pour une dépendance temporelle quelconque, notre point de départ pour l'établissement des potentiels de Liénard-Wiechert).

Suivant notre programme, nous commençons par un développement limité en puissances de $1/r$ dont nous ne garderons que les termes dominants. La dépendance en $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$ intervient dans le facteur d'amplitude (en $1/r$) et dans la phase due au temps retardé. Clairement, la dépendance en phase est beaucoup plus critique: il suffit que $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$ varie de λ pour que le terme de phase change beaucoup. Si nous nous contentons de garder l'ordre 1 en r'/r dans la phase, il est cohérent de ne garder que l'ordre 0 pour l'amplitude et d'écrire $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| = r$ (Nous laisserons le soin au lecteur, à titre d'exercice, de vérifier la cohérence de ce développement). Le terme de phase peut s'écrire au premier ordre:

$$ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| = ikr \sqrt{1 + \frac{r'^2}{r^2} - 2\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}'}{r^2}} = ikr - ik\mathbf{u}_r \cdot \mathbf{r}' , \quad (7.5)$$

où \mathbf{u}_r est le vecteur unitaire de la direction d'observation. En reportant ces deux développements dans l'expression du potentiel vecteur, on trouve:

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r} \int \mathbf{j}_0(\mathbf{r}') e^{-ik\mathbf{u}_r \cdot \mathbf{r}'} d^3\mathbf{r}' . \quad (7.6)$$

Comme nous pouvions nous y attendre, la dépendance en \mathbf{r} du potentiel vecteur est essentiellement celle d'une onde sphérique. La complexité de la source est complètement contenue dans l'intégrale. Si cette intégrale ne porte que sur le point source \mathbf{r}' , le point d'observation y intervient par le vecteur \mathbf{u}_r .

Nous allons maintenant développer cette intégrale en puissances de l'extension de la source r_0 comparée à la longueur d'onde rayonnée λ . En raison de la densité de courant, l'intégrale ne porte que sur une région de l'espace d'extension r_0 . Dans cette région finie, on peut développer l'exponentielle en:

$$e^{-ik\mathbf{u}_r \cdot \mathbf{r}'} = 1 - ik\mathbf{u}_r \cdot \mathbf{r}' + \frac{(-ik\mathbf{u}_r \cdot \mathbf{r}')^2}{2!} + \dots . \quad (7.7)$$

Notons que ce développement en série a un rayon de convergence infini. L'écrire ne présuppose en rien que l'extension de la source soit petite devant λ . En revanche, la convergence ne sera suffisamment rapide pour que le développement soit utile que si cette extension n'est pas trop grande. Nous écrirons donc enfin:

$$\mathbf{A} = \sum_{p=0}^{\infty} \mathbf{A}_p , \quad (7.8)$$

avec

$$\mathbf{A}_p = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r} \frac{(-ik)^p}{p!} \int \mathbf{j}_0(\mathbf{r}') (\mathbf{u}_r \cdot \mathbf{r}')^p d^3\mathbf{r}' . \quad (7.9)$$

Nous appellerons développement multipolaire du potentiel vecteur cette expression. Nous allons en effet voir dans les paragraphes suivants, en examinant les termes successifs, qu'ils correspondent à des géométries de sources dipolaires, quadripolaires etc..

7.2 Termes multipolaires

Nous allons maintenant examiner les termes d'ordres successifs dans le développement (7.9). Si l'extension de la source n'est pas très grande devant λ , les premiers termes doivent dominer le potentiel. Pour des raisons évidentes de taille des calculs, nous nous limiterons en fait aux termes d'ordre zéro et un. Pour chaque terme, nous calculerons séparément les champs électrique et magnétique rayonnés. Les théorèmes de superposition nous permettront de trouver les champs rayonnés par des sources quelconques. En revanche, les considérations énergétiques que nous pourrions faire pour des termes séparés, y compris l'établissement du diagramme de rayonnement, ne tiendront que si ces termes sont dominants (il n'y a pas de principe de superposition pour ces quantités quadratiques). Comme nous nous sommes placés dès l'abord dans le domaine des champs rayonnés, nous pourrions obtenir les champs à partir des potentiels en utilisant la structure locale d'onde plane de l'onde rayonnée. En fait, nous raisonnerons aussi souvent par analogie en montrant qu'il existe des liens très forts entre la géométrie des champs correspondant à différents termes.

7.2.1 Ordre 0: Dipôle électrique

Le terme d'ordre zéro du développement s'écrit simplement:

$$\mathbf{A}_0 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r} \int \mathbf{j}_0(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}' . \quad (7.10)$$

A cet ordre d'approximation, tout se passe comme si on avait un courant oscillant complètement localisé à l'origine, ayant comme valeur l'intégrale de volume du courant de la répartition initiale. Nous allons montrer, par quelques transformations algébriques simples de l'intégrale, qu'on retrouve en fait le potentiel vecteur produit par un dipôle électrique oscillant, modélisé, comme au chapitre précédent, par une charge oscillante.

Considérons donc la composante selon \mathbf{u}_x de l'intégrale. Elle peut s'écrire:

$$I_x = \int \mathbf{u}_x \cdot \mathbf{j}_0(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}' = \int \nabla x' \cdot \mathbf{j}_0(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}' \quad (7.11)$$

où le gradient s'entend par rapport à \mathbf{r}' . Une intégration par parties donne alors:

$$I_x = - \int x' (\nabla \cdot \mathbf{j}_0) d^3\mathbf{r}' = - \int x' (i\omega\rho_0) d^3\mathbf{r}' \quad (7.12)$$

où nous avons cette fois utilisé l'équation de conservation de la charge pour faire intervenir la densité de charge. I_x apparaît donc comme la composante selon \mathbf{u}_x d'un vecteur $-i\omega\mathbf{d}_0$ avec:

$$\mathbf{d}_0 = \int \mathbf{r}' \rho_0(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}' . \quad (7.13)$$

Pour une densité de charges statique, nous reconnâtrions ici l'expression du moment dipolaire électrique. Pour notre répartition oscillant de façon harmonique, \mathbf{d}_0 est évidemment l'amplitude complexe du moment dipolaire électrique.

On a donc:

$$\mathbf{A}_0 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r} (-i\omega)\mathbf{d}_0 \quad (7.14)$$

On reconnaît ici l'expression du potentiel de la charge oscillante 6.118 (on prendra garde de remplacer dans l'expression présente le dipôle \mathbf{d}_0 par celui de la charge oscillante $q\mathbf{a}\mathbf{u}_z$ pour comparer ces deux expressions).

Le terme d'ordre zéro du développement multipolaire correspond donc au dipôle électrique, pour lequel nous avons déjà calculé en détails les champs² et la puissance rayonnés. Nous ne discuterons pas

²On prendra garde que l'expression des champs à courte distance, que nous avons établie dans le chapitre précédent, n'est pas nécessairement valable dans le cas présent, l'extension de la source pouvant ne pas être négligeable devant λ .

à nouveau de ces termes. En général, une source possède un dipôle électrique non nul. Si l'extension est petite devant λ , ou même de l'ordre de λ comme nous le verrons dans les paragraphes suivants, ce terme domine. La grande majorité des sources se comportent comme des dipôles, ce qui justifie largement la place que nous avons accordée au traitement de ce problème. Ce n'est que pour des sources de grande extension ou pour celles qui, souvent pour des raisons de symétrie, ont un dipôle électrique strictement nul que les termes suivants, que nous allons discuter maintenant, jouent un rôle.

7.2.2 Ordre 1: Dipôle magnétique, Quadripôle électrique

Quand le dipôle électrique d'une distribution est nul, le terme d'ordre 1 domine. Le potentiel vecteur correspondant s'écrit:

$$\mathbf{A}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r} (-ik) \int (\mathbf{u}_r \cdot \mathbf{r}') \mathbf{j}_0(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}' . \quad (7.15)$$

La transformation de cette intégrale en quelque chose de manipulable n'est pas aisée sous cette forme. Dans le produit d'un vecteur par un produit scalaire, on reconnaît un des termes du développement d'un double produit vectoriel. Nous pouvons effectivement transformer l'intégrande pour faire apparaître ce produit vectoriel, au prix de termes soustractifs supplémentaires. Nous écrirons pour cela (de façon très artificielle):

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}_r \cdot \mathbf{r}') \mathbf{j}_0 &= \frac{1}{2} [(\mathbf{u}_r \cdot \mathbf{r}') \mathbf{j}_0 - (\mathbf{u}_r \cdot \mathbf{j}_0) \mathbf{r}'] \\ &\quad + \frac{1}{2} [(\mathbf{u}_r \cdot \mathbf{r}') \mathbf{j}_0 + (\mathbf{u}_r \cdot \mathbf{j}_0) \mathbf{r}'] . \end{aligned} \quad (7.16)$$

La première ligne de ce développement, a priori très artificiel, est alors un double produit vectoriel, $\frac{1}{2} \mathbf{u}_r \times (\mathbf{j}_0 \times \mathbf{r}')$. Nous allons voir, en discutant chacun des termes associés à chacune des lignes de (7.16), que cette séparation correspond à deux types de sources de propriétés physiques différentes, intervenant au même ordre dans le développement multipolaire: le dipôle magnétique et le quadripôle électrique. Nous écrirons donc le potentiel vecteur à l'ordre 1 comme:

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_1^{dm} + \mathbf{A}_1^{qe} , \quad (7.17)$$

où \mathbf{A}_1^{dm} correspond à la première ligne de (7.16) alors que \mathbf{A}_1^{qe} correspond à la deuxième.

Dipôle magnétique

On a donc:

$$\mathbf{A}_1^{dm} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r} (-ik) \int \frac{1}{2} \mathbf{u}_r \times (\mathbf{j}_0 \times \mathbf{r}') d^3\mathbf{r}' . \quad (7.18)$$

Nous poserons donc (en remarquant que \mathbf{u}_r sort de l'intégrale sur \mathbf{r}'):

$$\mathcal{M}_0 = \frac{1}{2} \int \mathbf{r}' \times \mathbf{j}_0(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}' . \quad (7.19)$$

Pour une répartition de courants statiques, \mathcal{M}_0 représenterait le dipôle magnétique de la répartition³. L'expression ci-dessus généralise simplement cette définition à l'amplitude complexe d'un dipôle magnétique oscillant. Si une charge oscillant le long de l'axe Oz modélise un dipôle électrique, une répartition dipolaire magnétique correspondrait plutôt à une petite boucle de courant oscillant (perpendiculaire à l'axe portant \mathcal{M}_0). Cette identification donne un sens physique à notre séparation a priori artificielle du potentiel vecteur à l'ordre 1.

³Cette définition généralise, en magnétostatique élémentaire, la définition du moment magnétique pour un circuit filiforme $\mathcal{M} = I\mathbf{S}$. On remarquera en effet que l'intégrale de contour de $\mathbf{r} \times d\mathbf{r}/2$ n'est autre que le vecteur surface défini par ce contour.

On peut écrire avec ces définitions:

$$\mathbf{A}_1^{dm} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r} ik\mathbf{u}_r \times \mathcal{M}_0 . \quad (7.20)$$

Pour simplifier les écritures, et sans restreindre la généralité du raisonnement, nous pouvons supposer \mathcal{M}_0 aligné avec Oz . Nous aurons alors simplement:

$$\mathbf{A}_1^{dm} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r} ik\mathcal{M}_0(\mathbf{u}_r \times \mathbf{u}_z) . \quad (7.21)$$

Nous pouvons établir directement les champs rayonnés à partir de cette expression et de la structure locale d'onde plane. Le champ magnétique s'écrit en effet:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^{dm} &= \nabla \times \mathbf{A} \\ &= ik\mathbf{u}_r \times \mathbf{A} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \mathcal{M}_0 \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r} k^2 (-\sin\theta \mathbf{u}_\theta) . \end{aligned} \quad (7.22)$$

La structure locale d'onde plane nous donne alors aussi l'expression du champ électrique du dipôle magnétique:

$$\mathbf{E}^{dm} = \frac{\mu_0}{4\pi} \mathcal{M}_0 \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r} ck^2 (\sin\theta \mathbf{u}_\phi) \quad (7.23)$$

Cette fois, ce sont les lignes de champ électrique qui sont des cercles d'axe Oz .

On peut aussi procéder par analogie avec le dipôle électrique, ce qui soulignera les similitudes entre les rayonnements de ces deux distributions de charges. Le champ magnétique du dipôle électrique (que nous supposons également aligné selon Oz) s'écrit en effet:

$$\mathbf{B}^{de} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{\omega d_0}{i} \right) \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r} ik(\mathbf{u}_r \times \mathbf{u}_z) . \quad (7.24)$$

Il est donc, à quelques substitutions de symboles près, identique au potentiel vecteur du dipôle magnétique.

Le champ électrique du dipôle électrique s'obtient en écrivant:

$$\mathbf{E}^{de} = \frac{ic^2}{\omega} \nabla \times \mathbf{B}^{de} \quad (7.25)$$

et le champ magnétique du dipôle magnétique par:

$$\mathbf{B}^{dm} = \nabla \times \mathbf{A}_1^{dm} . \quad (7.26)$$

En comparant ces deux expressions, nous voyons que \mathbf{B}^{dm} s'obtient simplement en substituant d_0c^2 par \mathcal{M}_0 dans \mathbf{E}^{de} . La structure du champ magnétique du dipôle magnétique est donc identique (à ce changement de notation près) à la structure du champ électrique du dipôle électrique. Si ces deux types de sources n'apparaissent pas au même ordre du développement, elles sont tout à fait similaires. En utilisant l'expression (6.127) du champ électrique du dipôle, nous obtenons immédiatement:

$$\mathbf{B}^{dm} = \frac{\mu_0}{4\pi} \mathcal{M}_0 \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r} k^2 (-\sin\theta \mathbf{u}_\theta) . \quad (7.27)$$

Si le terme dipolaire magnétique est le seul à contribuer au rayonnement, nous pouvons estimer le flux d'énergie. Rappelons que si plusieurs termes contribuent, ce calcul ne sera pas complet. Il faudrait aussi tenir compte des termes croisés entre champs à différents ordres du développement multipolaire. Nous ne considérerons donc ici que le cas d'une source dont le dipôle électrique est

nul. Nous supposons aussi que la contribution des termes quadripolaires électriques (la seconde ligne de (7.16)) est négligeable. Le vecteur de Poynting décrivant le flux d'énergie, en valeur moyenne temporelle, s'écrit alors, après quelques transformations élémentaires pour faire apparaître ϵ_0 :

$$\overline{\mathbf{\Pi}} = \frac{\mathcal{M}_0^2}{32\pi^2\epsilon_0c^5} \frac{\omega^4}{r^2} \sin^2\theta \mathbf{u}_r . \quad (7.28)$$

Le diagramme de rayonnement du dipôle magnétique est donc identique à celui du dipôle électrique (on se reportera à la figure correspondante). En particulier, le rayonnement est nul dans la direction du moment dipolaire magnétique, maximal dans le plan perpendiculaire (le plan du circuit si on imagine le dipôle sous la forme d'une petite boucle de courant).

La puissance totale s'obtient en intégrant le flux d'énergie sur une sphère de rayon r arbitraire. Le calcul est exactement analogue à celui du dipôle électrique et nous ne le détaillerons pas. La puissance moyenne rayonnée est alors:

$$\mathcal{P}^{dm} = \frac{\mathcal{M}_0^2}{12\pi\epsilon_0c^5} \omega^4 . \quad (7.29)$$

On remarque encore la très rapide dépendance en fréquence de cette puissance. Il est instructif à ce point de tenter de comparer, en ordres de grandeur, la puissance rayonnée par un dipôle électrique et un dipôle magnétique. On peut se poser bien sûr la question du sens de ce problème. Nous avons supposé, pour établir cette expression de la puissance, que le dipôle électrique était strictement nul. On peut cependant imaginer deux répartitions de courant, ayant la même extension spatiale et les mêmes courants caractéristiques, mais des propriétés de symétrie telles que l'une ait un dipôle électrique et l'autre seulement un dipôle magnétique. Si cette démarche peut paraître un peu artificielle pour des répartitions de courant macroscopiques, elle est bien justifiée pour le rayonnement d'atomes. Certaines transitions partagent en effet des fréquences et des "courants" équivalents mais correspondent à des symétries des orbitales mises en jeu telles que l'une se comporte comme un dipôle électrique et l'autre comme un dipôle magnétique. La puissance moyenne dipolaire électrique s'écrit:

$$\mathcal{P}^{de} = \frac{d_0^2}{12\pi\epsilon_0c^3} \omega^4 . \quad (7.30)$$

On en déduit alors

$$\frac{\mathcal{P}^{de}}{\mathcal{P}^{dm}} = \frac{c^2 d_0^2}{\mathcal{M}_0^2} . \quad (7.31)$$

Pour aller plus loin, il nous faut "comparer" l'amplitude des dipôles électriques et magnétiques, ce qui n'a de sens qu'en termes d'ordre de grandeur. Nous ne ferons donc qu'un raisonnement très qualitatif. On peut écrire symboliquement:

$$\mathbf{d}_0 = \int \mathbf{r}' \rho_0 d^3\mathbf{r}' \quad (7.32)$$

$$\mathcal{M}_0 = \int \mathbf{r}' \mathbf{j}_0 d^3\mathbf{r}' . \quad (7.33)$$

Mais \mathbf{j}_0 est de l'ordre de $\rho_0 \mathbf{v}$ où \mathbf{v} est la vitesse de déplacement des charges au point \mathbf{r}' . On voit bien tout le caractère qualitatif de ce raisonnement, qui ne tiendrait que si les deux dipôles étaient décrits précisément par la même distribution de courant, ce qui ne peut être le cas. En ordre de grandeur, néanmoins, on en déduit:

$$\mathcal{M}_0 \approx d_0 v \quad (7.34)$$

où v est un ordre de grandeur de la vitesse maximale des charges. On en déduit donc finalement:

$$\frac{\mathcal{P}^{de}}{\mathcal{P}^{dm}} \approx \left(\frac{c}{v}\right)^2 . \quad (7.35)$$

Notons que ce résultat découle simplement de notre développement en puissances de r_0/λ . Cette quantité est en effet égale à $r_0\omega/c$, de l'ordre de v/c . Le terme dipolaire magnétique est donc, pour ce qui est des champs, v/c fois plus petit que le terme dipolaire électrique, d'où l'ordre de grandeur ci-dessus pour les puissances rayonnées.

Si les charges sont en mouvement à une vitesse faible par rapport à celle de la lumière, le rayonnement dipolaire magnétique est donc beaucoup moins efficace que le rayonnement dipolaire électrique. Si nous considérons par exemple les deux transitions atomiques évoquées plus haut, le rapport des puissances émises est de l'ordre de $(1/\alpha)^2$ où $\alpha = e^2/(4\pi\epsilon_0\hbar c) \approx 1/137$ est la constante de structure fine. Comme nous le verrons dans le chapitre suivant, l'énergie rayonnée doit être empruntée à l'énergie initiale de l'atome et la puissance rayonnée détermine la durée de vie d'un niveau radiatif. Nous voyons donc ainsi que la durée de vie d'un niveau ne pouvant rayonner que comme un dipôle magnétique est environ $1/\alpha^2$ fois plus grande que la durée de vie d'un niveau "dipolaire électrique". Celle-ci étant de quelques nanosecondes (voir chapitre suivant), la durée de vie d'un niveau "dipolaire magnétique", toutes choses égales par ailleurs, est plutôt de l'ordre de la dizaine de microsecondes. Nous verrons à nouveau une illustration de cette différence entre dipôles électriques et magnétiques quand nous considérerons des rayonnements d'antennes. Notons pour finir que ce raisonnement prouve, s'il en était besoin, que le terme dipolaire électrique domine le terme dipolaire magnétique s'ils sont simultanément présents pour une même distribution de courants.

Quadripôle électrique.

Nous allons maintenant traiter le terme \mathbf{A}_1^{qe} correspondant à la seconde ligne de l'équation (7.16). Il s'écrit donc

$$\mathbf{A}_1^{qe} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r} (-ik) \int \frac{1}{2} [(\mathbf{u}_r \cdot \mathbf{r}')\mathbf{j}_0 + \mathbf{r}'(\mathbf{u}_r \cdot \mathbf{j}_0)] d^3\mathbf{r}' \quad (7.36)$$

Nous allons essayer de transformer l'intégrande pour le mettre sous une forme plus agréable. En particulier, nous allons tenter de faire apparaître la densité de charge (nous verrons que le moment quadripolaire électrique est au moment dipolaire ce que le tenseur d'inertie est au centre de gravité). Pour effectuer ce calcul sans trop de peine, nous abandonnerons un temps les notations de l'analyse vectorielle standard. Nous aurons en effet à manipuler des quantités dyadiques (tensorielles de rang deux, en d'autres termes). Nous expliciterons donc les dérivées, en utilisant les conventions d'Einstein pour alléger les calculs.

L'intégrande apparaissant dans le potentiel vecteur s'écrit avec ces conventions:

$$\frac{1}{2} [u_j r'_j j_i + r'_i u_j j_j] . \quad (7.37)$$

L'intégration se faisant uniquement sur \mathbf{r}' , on peut donc écrire:

$$\int \frac{1}{2} [(\mathbf{u}_r \cdot \mathbf{r}')\mathbf{j}_0 + \mathbf{r}'(\mathbf{u}_r \cdot \mathbf{j}_0)] d^3\mathbf{r}' \Big|_i = \frac{1}{2} (-i\omega) \mathcal{Q}_{ij} u_j , \quad (7.38)$$

avec

$$-i\omega \mathcal{Q}_{ij} = \int [j_i r'_j + j_j r'_i] d^3\mathbf{r}' . \quad (7.39)$$

Le facteur $-i\omega$ a été introduit ici pour simplifier les calculs suivants. Pour expliciter le tenseur \mathcal{Q} , remarquons que:

$$\partial'_k (r'_i r'_j j_k) = \delta_{ki} r'_j j_k + \delta_{kj} r'_i j_k + r'_i r'_j (i\omega\rho) , \quad (7.40)$$

où toutes les dérivées spatiales s'entendent par rapport à \mathbf{r}' . Nous avons utilisé l'équation de conservation de la charge, qui s'écrit ici $\partial'_k j_k = i\omega\rho_0$. Le terme de gauche de cette équation est manifestement une divergence dont l'intégrale sur tout l'espace s'annule. On en tire immédiatement:

$$\int (j_i r'_j + j_j r'_i) d^3\mathbf{r}' = -i\omega \int (r'_i r'_j \rho_0) d^3\mathbf{r}' \quad (7.41)$$

puisque l'intégrale de $\partial'_k(r'_i r'_j j_k)$, intégrale d'une divergence sur tout l'espace, est manifestement nulle. Finalement, on a :

$$\mathcal{Q}_{ij} = \int r'_i r'_j \rho_0(\mathbf{r}') d^3 \mathbf{r}' , \quad (7.42)$$

que nous appellerons tenseur quadripolaire électrique (ce tenseur est évidemment symétrique). Nous noterons en effet que cette définition coïncide avec celle du quadripôle dans le cadre de l'électrostatique et soulignerons l'analogie avec le tenseur d'inertie en mécanique du solide.

Avec cette définition, les composantes du potentiel vecteur s'écrivent :

$$A_{1i}^{qe} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\omega^2}{2c} \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r} \mathcal{Q}_{ij} u_{rj} . \quad (7.43)$$

Plutôt que de conserver des expressions faisant intervenir les composantes, nous pouvons définir le vecteur $\mathcal{Q} \cdot \mathbf{u}_r$ comme le vecteur de composantes $u_{rj} \mathcal{Q}_{ji}$. Le potentiel vecteur s'écrivant alors :

$$\mathbf{A}_1^{qe} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\omega^2}{2c} \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r} \mathcal{Q} \cdot \mathbf{u}_r . \quad (7.44)$$

Avant de discuter les propriétés des champs rayonnés, quelques remarques s'imposent. D'abord, nous avons ici introduit le quadripôle électrique de la manière la plus simple mais pas de la manière la plus commode pour les développements mathématiques. Il est fructueux de définir le quadripôle comme un tenseur symétrique de trace nulle (on consultera à ce sujet le Jackson). La définition "standard" du tenseur est en fait :

$$\mathcal{Q}'_{ij} = 3\mathcal{Q}_{ij} - \delta_{ij} \int r'^2 \rho_0 d^3 \mathbf{r}' \quad (7.45)$$

dont la trace est évidemment nulle. A part un facteur trois, qui n'introduit que des différences algébriques mineures dans les expressions, ces deux définitions diffèrent par un terme diagonal dont les trois éléments sont égaux. Le potentiel vecteur correspondant à ce terme diagonal est manifestement colinéaire à \mathbf{u}_r . Son rotationnel est nul et les deux définitions conduisent aux mêmes champs rayonnés. Nous n'adopterons pas la convention la plus générale. En effet, nous ne traiterons guère en détails le rayonnement du quadripôle : il ne sera donc pas très gênant de travailler avec un tenseur de trace non nulle. Nous aurons en revanche intérêt à travailler avec la forme la plus simple possible.

Essayons d'imaginer maintenant des distributions de charge qui ne possèdent pas de dipôles électriques mais un quadripôle électrique. La plus simple, comme en électrostatique, est constituée de deux dipôles électriques oscillant en opposition de phase (amplitudes opposées) et placés à petite distance l'un de l'autre. Les deux contributions dipolaires s'annulent et il ne reste qu'une contribution quadripolaire que l'on pourra calculer à titre d'exercice. Une autre distribution quadripolaire est constituée d'une répartition de charge uniforme dont la forme évolue entre un ellipsoïde allongé selon Oz et un ellipsoïde aplati dans la même direction, en passant par la forme sphérique à mi-période. Pour des raisons de symétrie évidentes (symétrie par rapport au plan xOy), cette distribution ne possède de moment dipolaire ni électrique ni magnétique. En raisonnant par analogie avec le moment d'inertie, on voit bien que cette distribution possède en revanche une composante oscillante non nulle du quadripôle électrique. Notons enfin, comme nous le verrons dans un prochain paragraphe, qu'une charge ponctuelle oscillant le long de Oz possède, en plus de son moment dipolaire électrique, un moment quadripolaire si l'extension du mouvement n'est pas négligeable.

Nous pouvons maintenant calculer les champs rayonnés. Nous utiliserons pour cela la structure locale d'onde plane. On trouve ainsi immédiatement :

$$\mathbf{B}^{qe} = -\frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{\omega^3}{2c^2} \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r} \mathbf{u}_r \times (\mathcal{Q} \cdot \mathbf{u}_r) \quad (7.46)$$

Le champ électrique s'en déduisant sans difficultés.

Avec les mêmes restrictions que pour le dipôle magnétique, nous pouvons, dans le cas où le rayonnement est purement quadripolaire électrique, écrire enfin le vecteur de Poynting en valeur moyenne temporelle:

$$\overline{\Pi}^{qe} = \frac{1}{128\pi^2\epsilon_0c^5}\omega^6\frac{|\mathbf{u}_r \times (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{u}_r)|^2}{r^2} \quad (7.47)$$

Nous noterons que la dépendance en ω est encore plus rapide que pour les rayonnements dipolaires.

Il est bien difficile de préciser davantage la structure de ces champs sans faire quelques hypothèses sur la structure du quadripôle électrique. Nous supposons donc que le seul élément non nul est $Q_{zz} = Q_0$. C'est le cas de la composante quadripolaire pour la charge oscillante. Pour la répartition ellipsoïdale, la symétrie impose seulement que les termes non diagonaux soient nuls. Elle impose aussi $Q_{xx} = Q_{yy}$. On peut alors retirer au quadripôle un terme diagonal ayant trois valeurs propres égales à Q_{xx} . Nous savons que cela ne change pas les champs rayonnés. En revanche, nous pouvons ainsi annuler tous les termes de la diagonale sauf Q_{zz} . La situation que nous décrivons maintenant, sans être tout à fait générale, n'en est pas moins importante.

Dans ce cas, nous avons simplement $\mathbf{u}_r \cdot \mathbf{Q} = Q_0 \cos \theta \mathbf{u}_z$. Nous pouvons alors réécrire sans difficultés (en utilisant $\mathbf{u}_r \times \mathbf{u}_z = -\sin \theta \mathbf{u}_\phi$) potentiel vecteur, champ magnétique et vecteur de Poynting moyens comme:

$$\mathbf{A}_1^{qe} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\omega^2}{2c} \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r} Q_0 \cos \theta \mathbf{u}_z \quad (7.48)$$

$$\mathbf{B}_1^{qe} = i \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\omega^3}{2c^2} \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r} Q_0 \cos \theta \sin \theta \mathbf{u}_\phi \quad (7.49)$$

$$\overline{\Pi}^{qe} = \frac{1}{128\pi^2\epsilon_0c^5}\omega^6 Q_0^2 \frac{\cos^2 \theta \sin^2 \theta}{r^2} \mathbf{u}_r \quad (7.50)$$

Comme pour le dipôle électrique, le champ magnétique est selon \mathbf{u}_ϕ et ses lignes sont des cercles d'axe Oz . Le champ électrique est dans le plan défini par l'axe du quadripôle et la direction d'observation. Le diagramme de rayonnement du quadripôle est substantiellement différent de celui du dipôle. La puissance rayonnée s'annule aussi bien dans la direction Oz que sur le plan xOy . Le diagramme de rayonnement, en coupe dans un plan passant par Oz , se présente donc comme quatre lobes symétriques autour de l'origine⁴. Ce diagramme de rayonnement est représenté sur la figure 7.2.

Finalement, on peut obtenir la puissance totale rayonnée en intégrant le vecteur de Poynting sur une sphère de rayon r arbitraire (la dépendance en r disparaissant évidemment). L'intégration sur ϕ est triviale et donne un simple facteur 2π . On trouve donc:

$$\mathcal{P}^{qe} = \frac{1}{64\pi\epsilon_0c^5}\omega^6 Q_0^2 \int_0^\pi \sin^3 \theta \cos^2 \theta d\theta . \quad (7.51)$$

L'intégrale sur θ est facilement évaluée et vaut $4/15$. On a donc finalement:

$$\mathcal{P}^{qe} = \frac{\omega^6 Q_0^2}{240\pi\epsilon_0c^5} \quad (7.52)$$

Nous noterons encore une fois la dépendance en ω^6 de la puissance émise. On peut comprendre qualitativement cette dépendance de plus en plus rapide. Plus nous progressons dans les ordres multipolaires, plus nous considérons des modulations subtiles de la répartition de charges. Toutes choses égales par ailleurs, plus la longueur d'onde rayonnée sera courte, plus les champs seront sensibles à ces très faibles dissymétries de la répartition de charges.

⁴En termes d'harmoniques sphériques, le dipôle est associé à celle de moment cinétique total $1 Y^1$, qui présente deux lobes symétriques par rapport à l'origine, le quadripôle à l'harmonique sphérique de moment $2 Y^2$

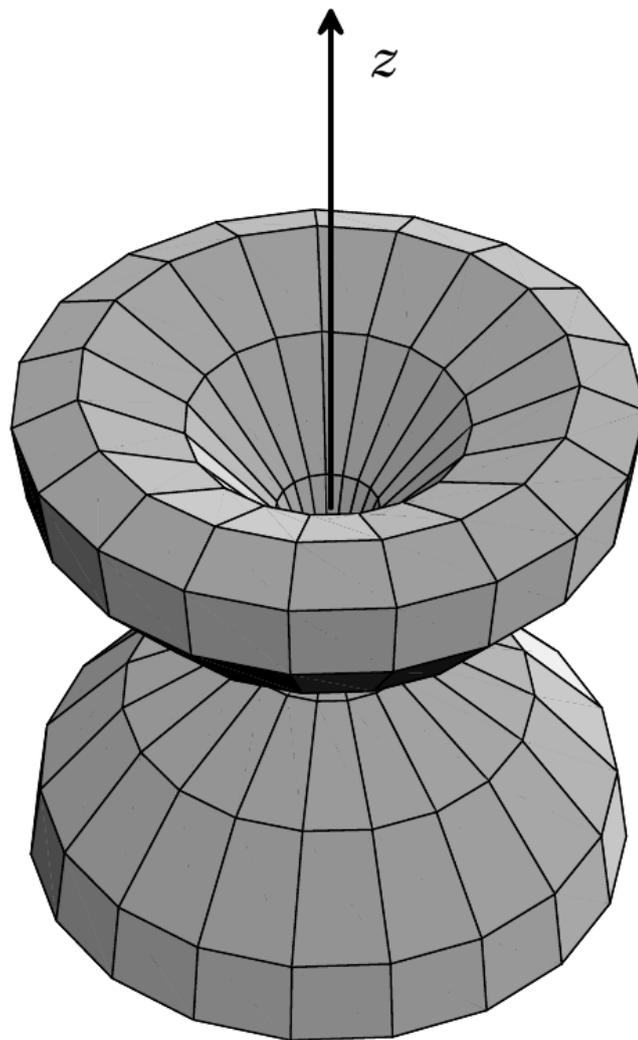


Figure 7.2: Diagramme du rayonnement d'un quadripôle n'ayant comme seul élément non nul que Q_{zz} . On note que le rayonnement est nul sur l'axe et dans un plan perpendiculaire à l'axe.

Comme nous l'avons fait pour le dipôle magnétique, et avec les mêmes restrictions sur la validité du calcul, nous pouvons maintenant comparer, toutes choses égales par ailleurs, les puissances dipolaires et quadripolaires électriques. On trouve immédiatement:

$$\frac{\mathcal{P}^{qe}}{\mathcal{P}^{de}} = \frac{\omega^2 Q_0^2}{d_0^2} \frac{1}{20c^2}. \quad (7.53)$$

Dans un raisonnement en termes d'ordres de grandeur, on peut approcher d_0 par le produit qr_0 de la charge totale par l'extension spatiale des courants. Dans ce cas, Q_0 est de l'ordre de qr_0^2 . On a donc finalement:

$$\frac{\mathcal{P}^{qe}}{\mathcal{P}^{de}} = \frac{k^2 r_0^2}{20}. \quad (7.54)$$

A part le facteur numérique $1/20$, cette expression était tout à fait prévisible. N'oublions pas que les termes dipolaires électriques et quadripolaires électriques apparaissent comme deux termes successifs dans un développement en puissances de l'extension de la source rapportée à λ . Les champs sont, à chaque ordre, multipliés par un facteur kr_0 et les puissances par un facteur $k^2 r_0^2$. Le rayonnement quadripolaire est donc beaucoup moins efficace que le rayonnement dipolaire si l'extension de la source est très petite devant λ . Si nous considérons encore deux niveaux atomiques se désexcitant par des transitions en tous points comparables, l'une dipolaire et l'autre quadripolaire, le rapport des puissances émises et donc des durées de vie sera de l'ordre de $(a_0/\lambda)^2$, où a_0 est le rayon de Bohr. Ce rapport est numériquement de l'ordre de 10^{-8} . Les niveaux quadripolaires électriques ont une durée de vie 10^7 à 10^9 fois plus grande que ceux qui se désexcitent comme un dipôle électrique. Les durées de vie de ces niveaux "métastables" peuvent atteindre la fraction de seconde. La raie associée à ces transitions est alors très fine, fort intéressante pour la métrologie de fréquence dans le domaine optique.

Nous pourrions poursuivre encore plus loin le développement multipolaire. À l'ordre suivant, nous pourrions distinguer deux contributions: le quadripôle magnétique (modélisé par exemple par deux spires parcourues par des courants oscillants en opposition de phase) dont le rayonnement est très similaire à celui du quadripôle électrique et l'octupôle électrique (deux quadripôles voisins en opposition de phase).

7.3 Applications: quelques problèmes de rayonnement

Nous allons dans ce paragraphe appliquer les développements multipolaires à l'étude du rayonnement de quelques sources simples. Nous commencerons par étudier le rayonnement d'une charge oscillante en ne faisant plus l'hypothèse, comme au chapitre précédent, que l'amplitude du mouvement est négligeable. Nous pourrions ainsi préciser la validité des hypothèses utilisées pour le rayonnement du dipôle et voir quelles corrections il y a lieu d'apporter quand ces hypothèses ne sont plus valables. Nous aborderons très brièvement ensuite le très riche problème des antennes. Il est si vaste — des manuels entiers lui sont consacrés — que nous ne pourrions traiter très brièvement que deux exemples: l'antenne dipolaire électrique et l'antenne dipolaire magnétique.

7.3.1 Rayonnement d'une charge oscillante

Les notations et le problème sont ceux du dernier paragraphe du chapitre précédent. Une charge q est animée d'un mouvement harmonique d'amplitude a et de fréquence ω le long de l'axe Oz . Nous ne nous préoccupons que du champ rayonné. Tous les résultats précédents étant acquis, le seul problème est de déterminer les différents éléments de la source: dipôles électrique et magnétique, quadripôle électrique.

De façon rigoureuse, le courant associé à la particule peut s'écrire:

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}') = -q a \omega \sin \omega t \delta(x') \delta(y') \delta(z' - a \cos \omega t) \mathbf{u}_z. \quad (7.55)$$

C'est simplement le produit de la charge par la vitesse de la particule, localisé à la position de la particule. Notons que nous utilisons ici, pour un temps, des notations réelles pour les quantités oscillantes et que nous nous intéressons au courant complet, pas seulement à une amplitude d'oscillation. Dans le chapitre précédent, nous avons supposé le courant localisé à l'origine et remplacé donc la dernière fonction δ par $\delta(z')$. Pour aller plus loin, nous pouvons réaliser un développement de Taylor de cette dernière fonction δ dont les deux premiers termes nous donneront l'essentiel de la physique si l'étendue du mouvement n'est pas trop grande. Nous écrivons donc:

$$\delta(z' - a \cos \omega t) = \delta(z') - a \cos \omega t \delta'(z') + \dots \quad (7.56)$$

Un tel développement de Taylor d'une "fonction" aussi singulière peut paraître hasardeux. On peut se rassurer un peu en montrant l'identité de l'action de la distribution initiale et du développement sur une fonction régulière $f(z')$. Avec les notations de la théorie des distributions, nous avons en effet:

$$\langle \delta(z' - a \cos \omega t) | f \rangle = f(a \cos \omega t) = f(0) + f'(0) a \cos \omega t + \dots \quad (7.57)$$

puisque f , régulière en zéro, peut être développée en série de Taylor. Sachant que $\langle \delta' | f \rangle = -f'(0)$, on reconnaît sans difficulté dans le second membre l'action de la distribution "développée". En nous limitant aux deux premiers termes, nous écrivons donc

$$\mathbf{j} = -qa\omega \sin \omega t \delta(\mathbf{r}') \mathbf{u}_z + qa^2\omega \sin \omega t \cos \omega t \delta(x') \delta(y') \delta'(z') \mathbf{u}_z \quad (7.58)$$

Dans le premier terme du second membre, nous reconnaissons bien sûr le courant localisé à l'origine que nous avons utilisé en première approximation. Le second terme, lui, est clairement un courant oscillant à la fréquence 2ω . Contrairement à ce qu'on aurait pu penser de prime abord, les termes correctifs ne sont pas à la fréquence fondamentale, mais à ses harmoniques.

Nous écrivons donc finalement:

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_1 e^{-i\omega t} + \mathbf{j}_2 e^{-2i\omega t} \quad (7.59)$$

avec

$$\mathbf{j}_1 = -iqa\omega \delta(\mathbf{r}') \mathbf{u}_z \quad (7.60)$$

$$\mathbf{j}_2 = i \frac{qa^2\omega}{2} \delta(x') \delta(y') \delta'(z') \mathbf{u}_z \quad (7.61)$$

et nous examinerons brièvement ces deux termes.

\mathbf{j}_1 est le courant du dipôle. Le moment dipolaire magnétique ferait intervenir des intégrales de $x\delta(x)$ (ou de cette forme) qui sont identiquement nulles. Pour estimer le dipôle et le quadripôle électriques, il nous faut la densité de charges. A partir de l'équation de continuité, $i\omega\rho = \nabla \cdot \mathbf{j}$, nous trouvons:

$$\rho_1(\mathbf{r}') = -qa\delta(x') \delta(y') \delta'(z') \quad (7.62)$$

Cette répartition de charge est, si on se représente les distributions de Dirac comme des pics très étroits, très voisine de ce qu'on attend effectivement pour un dipôle. Les composantes x et y du dipôle électrique font intervenir aussi des intégrales de type $x\delta(x)$ qui sont nulles. Seule la composante selon z est non nulle et le dipôle s'écrit (en notant que $\int z\delta'(z) dz = -1$):

$$\mathbf{d}_1 = qa\mathbf{u}_z \quad (7.63)$$

un résultat que nous aurions certainement pu prédire directement. Toutes les composantes du tenseur quadripôle électrique qui font intervenir une composante x ou y sont nulles. Elles contiennent en effet des intégrales de $x\delta(x)$ ou $x^2\delta(x)$ qui sont nulles. La composante Q_{zz} est proportionnelle à $\int z'^2 \delta'(z') dz'$. Elle est également nulle. Ce courant est donc un pur dipôle électrique (le même genre

d'arguments peut être utilisé pour montrer que tous les autres termes du développement multipolaire sont nuls).

\mathbf{j}_2 ne peut, lui non plus, correspondre à un dipôle magnétique. Les moments dipolaire et quadripolaire s'obtiennent à partir de la densité de charges qui s'écrit:

$$\rho_2 = -\frac{i}{2\omega} \nabla \cdot \mathbf{j}_2 = \frac{qa^2}{4} \delta(x') \delta(y') \delta''(z'). \quad (7.64)$$

Comme pour ρ_1 , les composantes x et y du dipôle sont manifestement nulles. La composante z fait intervenir l'intégrale $\int z' \delta''(z')$ qui est nulle, comme on pourra s'en convaincre par une intégration par parties. Pour le quadripôle, toutes les composantes faisant intervenir x ou y sont identiquement nulles. Seule la composante Q_{2zz} peut être non nulle. On a effectivement:

$$Q_{2zz} = \frac{qa^2}{4} \int z'^2 \delta''(z') dz'. \quad (7.65)$$

Une double intégration par parties prouve que $\int z'^2 \delta''(z') dz' = 2$. On a donc finalement:

$$Q_{2zz} = \frac{qa^2}{2}. \quad (7.66)$$

Le courant \mathbf{j}_2 correspond donc à un pur quadripôle électrique (on pourrait montrer qualitativement que tous les termes d'ordre supérieur sont identiquement nuls).

Les champs dipolaires électriques et quadripolaires électriques étant à des fréquences différentes, il n'y a pas, dans le calcul de la puissance totale rayonnée en valeur moyenne temporelle, de termes croisés et on peut écrire $\mathcal{P} = \mathcal{P}^{de} + \mathcal{P}^{qe}$. On peut remarquer que, conformément aux ordres de grandeur qualitatifs des paragraphes précédents,

$$\frac{\mathcal{P}^{qe}}{\mathcal{P}^{de}} = \frac{k^2 a^2}{80} \quad (7.67)$$

On vérifie ainsi que notre première approximation, consistant à négliger la composante quadripolaire électrique à 2ω est largement justifiée, même pour des extensions du mouvement voisines de λ .

7.3.2 Antennes

Le problème des antennes est d'une importance technologique majeure. Il s'agit en effet, pour optimiser les communications, de rayonner la plus grande puissance possible, avec le meilleur rendement vis à vis de la puissance fournie par les générateurs. On cherche souvent aussi à optimiser les propriétés de polarisation de la lumière émise. Pour une propagation au voisinage de la surface terrestre, conductrice, une polarisation verticale est indispensable. On peut enfin chercher à optimiser le diagramme de rayonnement, avec des réseaux d'antennes par exemple, pour que toute la puissance émise le soit dans la direction utile. Le problème est si vaste qu'il est hors de question de le traiter ici de manière complète. De plus, la caractérisation complète d'une antenne de géométrie donnée est un problème formidablement complexe. Déterminer le rayonnement, c'est d'abord déterminer les courants dans l'antenne. Ces courants dépendent des générateurs mais aussi des champs produits par l'antenne elle-même. Le courant doit donc a priori être déterminé de façon "self consistante" en tenant compte de cette réaction de rayonnement. On peut utiliser pour cela une résolution explicite des équations de Maxwell (éventuellement numérique) ou des méthodes de perturbations. Nous nous contenterons ici de la première étape de ces calculs en postulant une forme simple pour les courants dans l'antenne.

Antenne dipolaire électrique

La première antenne que nous considérerons est constituée d'un simple fil rectiligne, de longueur ℓ , aligné avec l'axe Oz , symétrique par rapport à O . Ce genre d'antenne est effectivement très largement

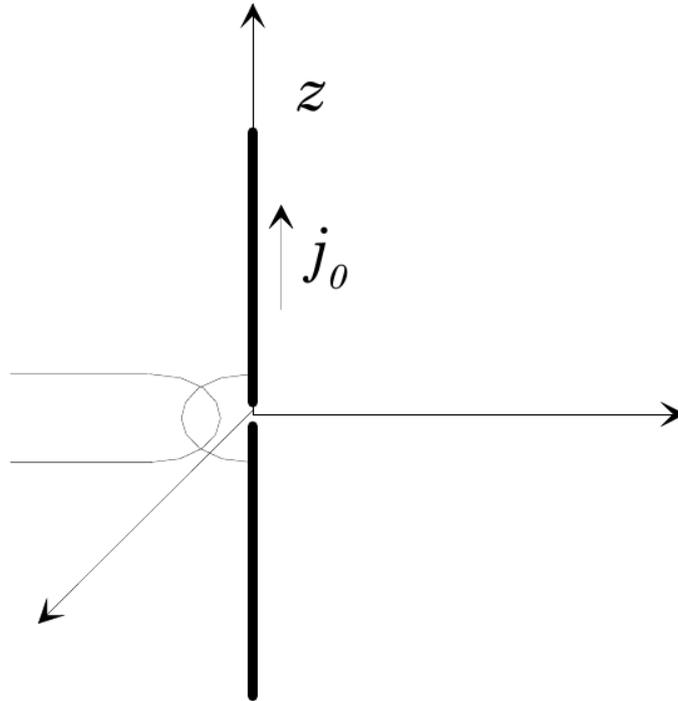


Figure 7.3: Antenne dipolaire électrique

utilisé, tant en réception qu'en émission. Dans la pratique, ce genre d'antennes est attaqué par un secondaire de transformateur haute fréquence situé en série avec l'antenne au voisinage de O . Le courant circule donc alternativement dans les directions positives et négatives de l'axe. De manière évidente, le courant s'annule aux extrémités de l'antenne. Il est assez naturel et sans doute assez réaliste de postuler une répartition de courant sinusoïdale le long de l'antenne et d'écrire l'amplitude complexe du courant:

$$\mathbf{j}_0(\mathbf{r}') = I_0 \cos \frac{\pi z'}{\ell} \delta(x') \delta(y') \mathbf{u}_z, \quad (7.68)$$

pour $-\ell/2 \leq z' \leq \ell/2$, le courant étant nul ailleurs. Les deux fonctions δ servant à localiser le courant sur l'axe. Il est évident dès l'abord qu'une telle distribution de courant ne possède pas de moment dipolaire magnétique (ce que l'on pourra vérifier par un calcul explicite). Si le moment dipolaire est non nul, c'est lui qui dominera le rayonnement. Pour l'estimer, nous allons calculer la densité de charges:

$$\rho_0 = -\frac{i}{\omega} \nabla \cdot \mathbf{j}_0 = \frac{i I_0 \pi}{\omega \ell} \sin \frac{\pi z'}{\ell} \delta(x') \delta(y'). \quad (7.69)$$

Les composantes selon x et y du moment dipolaire sont nulles, puisqu'elles font intervenir des intégrales du type $x' \delta(x')$. Le dipôle est aligné selon Oz , comme l'indique la symétrie de l'antenne. Il vaut:

$$\mathbf{d}_0 = d_0 \mathbf{u}_z, \quad (7.70)$$

avec

$$\begin{aligned} d_0 &= \frac{i I_0 \pi}{\omega \ell} \int_{-\ell/2}^{\ell/2} z' \sin \frac{\pi z'}{\ell} dz' \\ &= \frac{2i I_0 \ell}{\omega \pi} \end{aligned} \quad (7.71)$$

A moins que l'antenne ne soit très longue par rapport à λ , le rayonnement dipolaire domine et la puissance moyenne rayonnée vaut:

$$\mathcal{P} = \frac{1}{12\pi\epsilon_0 c^3} \omega^4 \left(\frac{2I_0 \ell}{\pi\omega} \right)^2 = \frac{I_0^2 \omega^2 \ell^2}{3\pi^3 \epsilon_0 c^3}. \quad (7.72)$$

Cette puissance est directement proportionnelle au carré de l'amplitude du courant qui passe dans l'antenne. Il est donc naturel de comparer cette puissance rayonnée à la puissance qui serait dissipée, en valeur moyenne, par le même courant circulant dans une résistance. La résistance équivalente à l'antenne, encore appelée résistance de rayonnement, R_{rad} , est finalement définie par:

$$\mathcal{P} = \frac{I_0^2}{2} R_{\text{rad}}. \quad (7.73)$$

Après quelques manipulations, on trouve:

$$R_{\text{rad}} = \frac{8}{3\pi\epsilon_0 c} \left(\frac{\ell}{\lambda} \right)^2 \quad (7.74)$$

$$= 319 \left(\frac{\ell}{\lambda} \right)^2 \Omega. \quad (7.75)$$

La résistance de rayonnement est une quantité très importante pour caractériser une antenne. Si on désire assurer la meilleure utilisation de la puissance fournie par les générateurs, il faut en effet réaliser une *adaptation d'impédance* entre le générateur et l'antenne: le rapport de la puissance dissipée dans l'antenne à la puissance dissipée dans la résistance interne du générateur est maximum quand la résistance équivalente de l'antenne est égale à la résistance interne, ou plutôt à l'impédance de sortie, du générateur. Pour une antenne dite "demi-onde", par exemple, telle que $\ell = \lambda/2$, la résistance de rayonnement vaut $319/4 = 79 \Omega$. On comprend ainsi pourquoi les impédances de sortie des amplificateurs et les impédances itératives des câbles coaxiaux utilisés pour le branchement des antennes sont de 75Ω . Notons que l'antenne demi-onde est très favorable, la longueur du fil étant alors parfaitement adaptée à une structure d'onde stationnaire du courant sur l'antenne. En fait, l'antenne toute entière est une structure résonnante, au voisinage d'une fréquence correspondant à $\ell = \lambda/2$, avec des nœuds de courant aux deux extrémités et un ventre au centre. Une antenne quart d'onde, elle, serait résonnante à condition d'être attaquée par le transformateur à une extrémité (on aurait alors un ventre de courant à cette extrémité et un nœud à l'autre). On mesure là l'efficacité des antennes dipolaires électriques: un courant de $0.15A$ suffit à rayonner une puissance de l'ordre du Watt. Le calcul que nous avons fait ici est bien sûr fondé sur un modèle particulier de la répartition de courant dans l'antenne qui pourrait s'avérer inexact. On pourra, à titre d'exercice, faire le calcul pour d'autres répartitions, par exemple pour un courant variant linéairement le long de l'antenne. On s'apercevra alors que seul change le facteur numérique devant la résistance de rayonnement, l'ordre de grandeur restant le même.

Antenne dipolaire magnétique

La deuxième antenne que nous considérerons est représentée sur la figure 7.4. Il s'agit d'une simple spire de courant circulaire, de rayon r_0 , située dans le plan xOy . Le courant, amené par deux fils parallèles (que l'on pourra supposer confondus et qui ne jouent donc aucun rôle dans le rayonnement), sera supposé constant sur toute la spire et égal à $I_0 \exp(-i\omega t)$ (c'est une hypothèse vraisemblable si la longueur de la spire est petite devant la longueur d'onde). En coordonnées sphériques, la densité de courant pourra s'écrire:

$$\mathbf{j}_0 = (I_0/r_0) \delta(r' - r_0) \delta(\theta - \pi/2) \mathbf{u}_\phi. \quad (7.76)$$

Les fonctions δ localisent bien le courant sur le cercle. Le facteur r_0 est introduit pour donner à j_0 la dimension d'un courant par unité de surface (rappelons que la fonction $\delta(r' - r_0)$ à la dimension

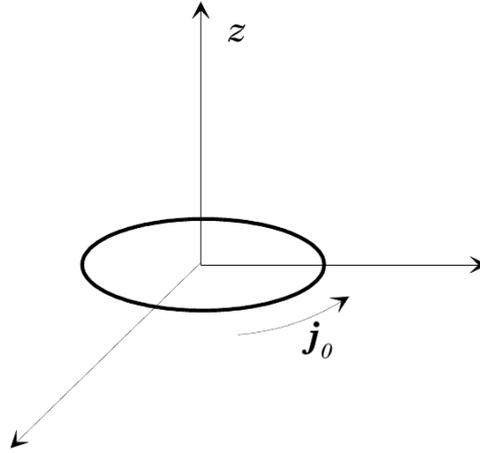


Figure 7.4: Antenne dipolaire magnétique

de l'inverse d'une longueur, alors que la fonction de dirac de l'angle est sans dimension). Finalement, comme on pourra s'en convaincre aisément, ce facteur r_0 assure bien que l'intensité totale circulant dans le circuit ait une amplitude I_0 .

Pour estimer les moments dipolaires et quadripolaires électriques, il nous faut la densité de charges. Il est évident que la divergence du courant est nulle: il est orienté selon \mathbf{u}_ϕ et ne dépend pas de ϕ . Il n'y a donc aucun moment multipolaire de nature électrique à aucun ordre. S'il n'est pas nul, le moment dipolaire magnétique dominera le rayonnement. On peut l'écrire facilement:

$$\mathcal{M}_0 = \frac{1}{2} \int \mathbf{r}' \times \mathbf{j}_0 d^3\mathbf{r}' . \quad (7.77)$$

En remarquant que $\mathbf{r}' \times \mathbf{j}_0$ est toujours orienté selon \mathbf{u}_z , on voit qu'il en est de même pour le moment magnétique. On peut donc écrire la composante z du moment sous la forme:

$$\mathcal{M}_0 = \frac{1}{2} \int r^3 dr \sin \theta d\theta d\phi \frac{I_0}{r_0} \delta(r' - r_0) \delta(\theta - \pi/2) . \quad (7.78)$$

L'intégrale sur ϕ donne un facteur 2π , l'intégrale sur r_0 revient simplement à faire $r' = r_0$. Finalement, l'intégrale sur θ donne 1. On a donc, sans surprises:

$$\mathcal{M}_0 = \pi r_0^2 I_0 \mathbf{u}_z . \quad (7.79)$$

Il est facile à partir de là de calculer la puissance rayonnée et la résistance de rayonnement, définie comme au paragraphe précédent. On trouve:

$$\mathcal{P} = \frac{\pi r_0^4 I_0^2 \omega^4}{12 \epsilon_0 c^5} \quad (7.80)$$

$$R_{\text{rad}} = \frac{8\pi^5}{2\epsilon_0 c} \left(\frac{r_0}{\lambda} \right)^4 \quad (7.81)$$

$$= 160 \left(\frac{r_0}{\lambda} \right)^4 \text{ k}\Omega . \quad (7.82)$$

La résistance de rayonnement croît beaucoup plus vite avec la taille que pour l'antenne dipolaire électrique. A taille égale, l'antenne magnétique est beaucoup plus résistive. Elle est donc plus difficile à exciter, ce qui explique son faible emploi sauf pour des communications à très basses fréquences. On peut comprendre qualitativement cette forte résistance. Si l'antenne dipolaire était équivalente à une très faible inductance (celle du fil) en série avec une très faible capacité (encore celle du fil), l'antenne magnétique présente une inductance élevée, la rendant très résistive à haute fréquence.

Chapitre 8

Diffusion

Nous allons dans ce chapitre appliquer les résultats précédents au rayonnement des sources fondamentales que sont les atomes. En fait, nous nous poserons essentiellement deux problèmes. Le premier est celui de l'émission spontanée. Un atome excité, par absorption d'un photon ou collision électronique dans une décharge, passe dans un niveau d'énergie excité. Un simple examen d'une lampe au sodium nous apprend qu'il réémet cette énergie sous forme lumineuse. Est-il possible de préciser les constantes de temps de ce phénomène, c'est à dire la durée de vie des niveaux atomiques excités? L'autre problème, d'une importance pratique aussi considérable, est celui de la diffusion de lumière par les atomes. Quand un atome est placé dans une onde incidente, il acquiert un dipôle à la même fréquence et rayonne. C'est ce phénomène de diffusion qui est, comme nous l'avons déjà mentionné plus haut, à l'origine du bleu du ciel. Peut-on comprendre cette diffusion atomique?

Nous essaierons de comprendre émission spontanée et diffusion dans un modèle complètement classique de l'atome, le modèle de Thomson de l'électron élastiquement lié, inspiré de modèles précédents de Lorentz et Helmholtz pour expliquer la dispersion anormale de la lumière dans les milieux. Chaque atome est alors assimilé à un oscillateur harmonique chargé ne possédant qu'une fréquence de résonance. C'est bien sûr un modèle très naïf comparé à ce que nous savons de la structure atomique. En revanche, sa simplicité nous permettra de calculer explicitement une durée de vie radiative et de traiter complètement le problème de la diffusion. Nous verrons en particulier comment l'efficacité de diffusion varie quand l'onde excitatrice passe à résonance avec la fréquence propre de l'oscillateur. De manière surprenante, nous verrons que les ordres de grandeur déduits de ce modèle paraissent tout à fait convenables.

Nous appliquerons enfin ces résultats au problème de la diffusion par un milieu comprenant un grand nombre d'atomes. Ces atomes étant décrits à ce stade par leur seule polarisabilité, les résultats de ce paragraphe s'appliqueront en fait à n'importe quel modèle de centres diffuseurs (atome classique, atome semi-classique, électrons libres...). Nous tenterons en particulier de comprendre pourquoi les solides transparents diffusent beaucoup moins que les gaz, alors qu'ils sont notablement plus denses. Nous montrerons que le champ diffusé est simplement relié à la transformée de Fourier des variations de densité du milieu. Nous pourrions ainsi examiner la diffusion par un milieu homogène dense, par un cristal avec une séparation entre atomes de l'ordre de la longueur d'onde, et enfin la diffusion par un milieu désordonné comme un gaz.

8.1 Modèle de Thomson

8.1.1 Modèle de l'électron élastiquement lié.

Nous considérerons donc un modèle extrêmement simpliste d'atome: un seul électron, lié par une force harmonique isotrope. Ce modèle a connu une certaine faveur au tournant du siècle (on consultera pour une approche historique plus détaillée l'appendice sur le modèle de Bohr dans la première partie de ce

cours). Il était assez naturel d’essayer de comprendre les fréquences discrètes rayonnées ou absorbées par les atomes en termes de résonances d’oscillateurs harmoniques. Les expériences Geiger et Marsden (souvent appelées à tort expériences de Rutherford) n’existaient pas encore. Il n’y avait donc aucune raison de postuler une structure planétaire pour l’atome (nous avons montré de plus qu’un modèle planétaire serait nécessairement instable).

Le modèle de Thomson¹ (dit encore modèle du “plum–pudding”), dont l’objet était de construire une classification périodique des éléments, s’appuyait sur cette interprétation. On considère l’atome comme constitué d’une “gelée” positive, uniformément chargée, portant une charge totale unité. Dans cette “gelée”, un électron unique se déplace librement. Le champ électrique créé par une sphère uniformément chargée étant, à l’intérieur de la sphère, linéaire en fonction de la distance au centre, l’électron se trouve lié par une force harmonique (force centrale proportionnelle à la distance). Nous laisserons au lecteur le soin de calculer la constante de force et la fréquence d’oscillation en fonction du rayon de la sphère. En prenant un rayon de la sphère de l’ordre de l’Ångström, on trouve effectivement une fréquence de résonance dans le domaine optique. On peut montrer aussi que l’ordre de grandeur de l’énergie nécessaire pour arracher l’électron est de l’ordre des énergies d’ionisation typiques. Enfin, on peut utiliser ce modèle pour calculer les indices de réfraction ou susceptibilités diélectriques typiques. Nous verrons que, là encore, au moins en ordres de grandeur, ce modèle était raisonnable. Il a en fait tenu jusqu’à la révélation d’un noyau pratiquement ponctuel dans la structure atomique. Le modèle de la gelée positive devenait alors intenable. Le modèle planétaire était le seul possible. Sa stabilité ne pouvant être comprise dans le cadre de la mécanique classique, il a suscité alors une crise scientifique majeure qui ne fut totalement résolue qu’en 1926 avec la découverte de la mécanique ondulatoire par Schrödinger et de la mécanique des matrices par Heisenberg.

Nous ne nous occuperons pas des détails du modèle de Thomson dans ce cours. Nous considérerons seulement un électron de masse m et de charge $q = -e$ ($e > 0$) harmoniquement lié à un centre fixe avec une fréquence propre d’oscillation ω_0 . Avec ces conditions, l’équation de mouvement de l’électron s’écrit alors:

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} + \omega_0^2\mathbf{r} = 0, \quad (8.1)$$

\mathbf{r} étant la position de l’électron par rapport au centre de forces. A cette équation, il conviendra d’ajouter la contribution de la force de réaction de rayonnement. En première approximation, la solution de cette équation est bien sûr une évolution harmonique de \mathbf{r} selon les trois axes. La trajectoire de l’électron est dans le cas le plus général une ellipse centrée à l’origine. “L’état fondamental” de ce système correspond bien sûr à un électron immobile à l’origine.

8.1.2 Emission spontanée

Nous tenterons dans ce paragraphe de modéliser l’émission spontanée. Nous supposerons que, à l’instant origine, l’électron initialement au repos est mis en mouvement. Dans une lampe à décharge, ce mouvement serait dû à une collision avec un des électrons libres de la décharge. Nous supposerons, pour simplifier les calculs sans beaucoup restreindre la généralité, que le mouvement de l’électron est ensuite linéaire, orienté de long de l’axe Oz^2 . Cet électron oscillant se comporte comme un dipôle. Les ordres de grandeur du modèle montrent en effet que l’extension du mouvement (au plus de l’ordre du diamètre de la sphère chargée, c’est à dire de l’ordre de l’Ångström) est très petite devant la longueur d’onde rayonnée (de l’ordre du micron). Il est alors aisé de calculer, en utilisant les résultats du premier chapitre, la puissance rayonnée par l’électron:

$$\mathcal{P} = \frac{q^2 z_0^2 \omega_0^4}{12\pi\epsilon_0 c^3}, \quad (8.2)$$

¹Thomson est connu comme découvreur de l’électron, en 1897. En fait, Wiechert (celui des potentiels de Liénard), a joué un rôle au moins aussi important dans la découverte de la nature corpusculaire des rayons cathodiques.

²On pourra, à titre d’exercice, considérer le cas général en superposant des mouvements d’amplitudes et de phases arbitraires le long des trois axes.

où z_0 est l'amplitude du mouvement. Dans notre modèle, l'énergie rayonnée ne peut provenir que de l'énergie mécanique de l'électron. Cette énergie est donc une fonction décroissante du temps: le mouvement de l'électron doit s'amortir.

L'amortissement du mouvement de l'électron, lent devant la période, peut être décrit au moyen de la force de réaction de rayonnement $f = m\tau\dot{a}$. En incluant cette force, l'équation du mouvement de l'électron s'écrit:

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} - \tau \frac{d^3\mathbf{r}}{dt^3} + \omega_0^2\mathbf{r} = 0, \quad (8.3)$$

où τ est le temps caractéristique de la réaction de rayonnement défini plus haut. On peut aisément trouver les fréquences propres de cette équation, sous forme d'un développement en termes de $\eta = \omega_0\tau$. Ce paramètre est effectivement, pour une transition optique ordinaire, de l'ordre de 10^{-10} (on rappelle que l'ordre de grandeur de τ est 10^{-24} s). On peut donc considérer la réaction de rayonnement comme une faible perturbation du mouvement harmonique et on a donc

$$\tau \frac{d^3\mathbf{r}}{dt^3} \approx -\gamma \frac{d\mathbf{r}}{dt}, \quad (8.4)$$

avec

$$\gamma = \omega_0^2\tau = \omega_0\eta = \frac{q^2\omega_0^2}{6\pi\epsilon_0 cmc^2}. \quad (8.5)$$

Avec une très bonne approximation, la force de réaction de rayonnement peut donc être considérée comme proportionnelle à la vitesse. On écrira donc l'équation du mouvement tenant compte de la réaction de rayonnement sous la forme:

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} + \gamma \frac{d\mathbf{r}}{dt} + \omega_0^2\mathbf{r} = 0. \quad (8.6)$$

qui décrit manifestement un amortissement exponentiel du mouvement oscillant avec un taux γ . Notons que le taux d'amortissement de l'énergie du mouvement est alors $\Gamma = 2\gamma$.

Une manifestation expérimentale de cette décroissance exponentielle est que le spectre de fluorescence d'un ensemble d'atomes ait une forme lorentzienne. Le spectre étant relié à la transformée de Fourier de la réponse temporelle³, celle-ci, transformée de Fourier d'une Lorentzienne, est une exponentielle. On peut bien sûr maintenant accéder aussi, directement, à la réponse temporelle avec une électronique modérément rapide. Un des grands mérites de ce modèle très simplifié est donc de prédire correctement l'émission de lumière par des atomes excités ou émission spontanée.

Estimons l'ordre de grandeur de la durée de vie radiative T et du taux d'émission spontanée γ (notons que nous avons déjà effectué un calcul semblable dans les paragraphes sur la réaction de rayonnement avec un modèle différent d'orbites circulaire. Sans surprises, les ordres de grandeur relatifs aux deux modèles sont similaires). Pour cela, nous calculerons le rapport γ/ω_0 , l'inverse du "facteur de qualité" de l'oscillateur harmonique. Ce rapport est proportionnel à la fréquence du rayonnement ω_0 . Pour un ordre de grandeur, nous allons utiliser les fréquences prédites par le modèle de Bohr. Assez bizarrement, nous mêlons ainsi des arguments du modèle planétaire de la "première théorie quantique" de 1913 avec le modèle, incompatible, de l'électron élastiquement lié. Rien, a priori, ne fixant la fréquence de résonance dans le modèle de Thomson, il nous faut bien utiliser les valeurs expérimentales, qui sont correctement prédites par le modèle de Bohr. La fréquence est donc de l'ordre de la constante de Rydberg divisée par la constante de Planck, R/\hbar . La constante de Rydberg, elle même, est de l'ordre de:

$$R = \frac{1}{2}mc^2\alpha^2, \quad (8.7)$$

³En fait le spectre est la transformée de Fourier de la fonction de corrélation du champ émis, qui se rapporte à la réponse temporelle pour une excitation impulsionnelle.

produit, à un facteur deux près (dont l'origine peut être reliée au théorème du viriel), de l'énergie de masse de l'électron par le carré de la "constante de structure fine" α définie par:

$$\alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{\hbar c}. \quad (8.8)$$

En portant cette expression de l'ordre de grandeur de la fréquence atomique dans le facteur de qualité et en utilisant $\tau = q^2/6\pi\epsilon_0 mc^3$, nous trouvons:

$$\frac{\gamma}{\omega_0} = \omega_0 \tau = \frac{R\tau}{\hbar} = \frac{q^2 mc^2 \alpha^2}{12\pi\epsilon_0 c \hbar mc^2} = \frac{\alpha^3}{3}. \quad (8.9)$$

Nous trouvons ainsi un résultat très simple (mais certainement pas inattendu): le facteur de qualité typique d'un oscillateur atomique est de l'ordre de l'inverse du cube de la constante de structure fine. Numériquement, il est donc de l'ordre de 10^7 . La fréquence d'une transition atomique étant, dans le domaine visible, de l'ordre de 10^{15} Hz, le taux d'émission spontanée est de l'ordre de 10^8 s⁻¹. La durée de vie radiative d'un atome excité est donc de l'ordre de la dizaine de nanosecondes. La valeur expérimentale pour la fameuse raie jaune du sodium (en fait un doublet de structure fine à 589 et 589.6 nm) est de 16 ns, correspondant à une largeur de la raie de l'ordre de 10 MHz. Notre modèle, de façon un peu surprenante, est plus que raisonnable⁴.

8.1.3 Diffusion du rayonnement.

Nous étudierons dans ce paragraphe le rayonnement d'un atome classique, excité de façon permanente par une onde plane monochromatique. Sous l'influence de cette onde, l'atome acquiert un dipôle induit qui rayonne. A la différence du paragraphe précédent, il s'agit alors d'un rayonnement en régime stationnaire. De plus, l'onde incidente n'est pas nécessairement résonnante à la fréquence propre de l'atome.

Dipôle induit. Polarisabilité.

Nous supposons l'onde incidente polarisée linéairement selon Oz (la généralisation ne présente aucune difficulté). Nous ne considérerons pas le cas d'une onde de très haute fréquence, pour lequel la taille de l'atome pourrait être comparable à la longueur d'onde. Nous pourrions donc supposer l'atome ponctuel et ignorer la structure spatiale de l'onde. Nous écrirons donc simplement le champ électrique incident sous la forme $E_0 \mathbf{u}_z \exp(-i\omega t)$. La fréquence ω est arbitraire, la phase de l'onde choisie de telle manière que E_0 soit réel (ce qui ne restreint en rien la généralité). L'équation du mouvement de l'électron en présence de cette onde s'écrit, avec le terme de réaction de rayonnement:

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} + \gamma \frac{d\mathbf{r}}{dt} + \omega_0^2 \mathbf{r} = \frac{qE_0}{m} \mathbf{u}_z e^{-i\omega t}. \quad (8.10)$$

La solution contient un terme transitoire, dépendant de la condition initiale pour l'atome, qui s'amortit en un temps de l'ordre de τ . On peut en général ignorer ce terme transitoire et ne considérer que la solution en régime permanent. Elle s'écrit évidemment sous la forme $\mathbf{r}_0 \exp(-i\omega t)$ avec:

$$\mathbf{r}_0 = \frac{qE_0/m}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} \mathbf{u}_z. \quad (8.11)$$

⁴Il ne permet cependant pas de comprendre pourquoi il existe des raies atomiques beaucoup plus fines, correspondant à des durées de vie infiniment plus longues que ce que nous venons de calculer. La raie de 1S vers 2S de l'hydrogène, par exemple, aurait dans notre modèle une durée de vie de l'ordre de la nanoseconde (c'est une raie dans l'ultraviolet lointain). Sa durée de vie est, en fait, de 1/7 de seconde!

L'amplitude complexe du dipôle électrique acquis par l'atome à la fréquence ω s'écrit donc:

$$\mathbf{d}_0 = \frac{q^2/m}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} \mathbf{E}_0 . \quad (8.12)$$

Elle est proportionnelle à l'amplitude du champ incident. On peut donc définir la polarisabilité **classique** de l'atome à la fréquence ω , $\alpha_c(\omega)$, par:

$$\mathbf{d}_0 = \epsilon_0 \alpha_c(\omega) \mathbf{E}_0 . \quad (8.13)$$

Cette polarisabilité est simplement donnée par:

$$\alpha_c(\omega) = \frac{q^2}{m\epsilon_0} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} . \quad (8.14)$$

On notera qu'avec cette définition, la polarisabilité est homogène à un volume (nous verrons dans la partie sur l'électromagnétisme dans les milieux matériels l'intérêt de ce choix). A fréquence nulle, on a simplement $\alpha_c(0) = q^2/m\epsilon_0\omega_0^2$. On vérifiera par un calcul évident d'électrostatique que la polarisabilité à fréquence nulle coïncide à un facteur près avec le volume de la sphère contenant la "gelée" positive. On remarquera aussi que, en faisant $\omega_0 = 0$, on trouve bien la polarisabilité d'un électron libre. Ce modèle nous permet aussi de traiter la diffusion de rayonnement par un plasma dont les charges peuvent, en première approximation, être considérées comme libres. Notons finalement que l'expression de la polarisabilité peut se simplifier, au voisinage de la résonance, quand l'amortissement γ est très petit par rapport à la fréquence propre. On a alors:

$$\alpha_c(\omega) \simeq \frac{q^2}{m\epsilon_0\omega_0} \frac{1}{2(\omega_0 - \omega) - i\gamma} . \quad (8.15)$$

Le module au carré de la polarisabilité est alors une simple lorentzienne, de centre ω_0 et de largeur γ . Le facteur de qualité des résonances atomiques étant toujours excellent, cette approximation est très légitime et toujours utilisée.

A partir de l'expression du dipôle induit, nous pouvons aisément estimer la puissance rayonnée. Elle fera intervenir le carré du module de la polarisabilité, sous la forme:

$$\mathcal{P} = \frac{\epsilon_0}{12\pi c^3} |\alpha_c|^2 \omega^4 E_0^2 . \quad (8.16)$$

Cette puissance est évidemment proportionnelle au carré de l'amplitude du champ incident. Pour obtenir un résultat indépendant de l'intensité de l'onde incidente, nous allons rapporter la puissance diffusée à la puissance incidente par unité de surface, $\epsilon_0 c E_0^2 / 2$. Le rapport d'une puissance à une puissance par unité de surface est une surface. Nous caractérisons ainsi l'efficacité de diffusion de l'atome par une section efficace σ . La puissance diffusée est simplement la puissance incidente sur une surface σ (normale à la direction de propagation). En un mot, tous les photons qui "tombent" dans une surface σ centrée sur l'atome sont diffusés. On a:

$$\sigma = \frac{1}{6\pi} \left(\frac{\omega}{c} \right)^4 |\alpha_c|^2 . \quad (8.17)$$

On peut encore écrire, en explicitant la polarisabilité:

$$\sigma = \frac{1}{6\pi c^4} \frac{q^4}{m^2 \epsilon_0^2} \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} . \quad (8.18)$$

Pour simplifier quelque peu le préfacteur, nous allons faire intervenir une dimension caractéristique de l'électron, le "rayon classique de l'électron" r_e que nous avons déjà rencontré à propos de la réaction

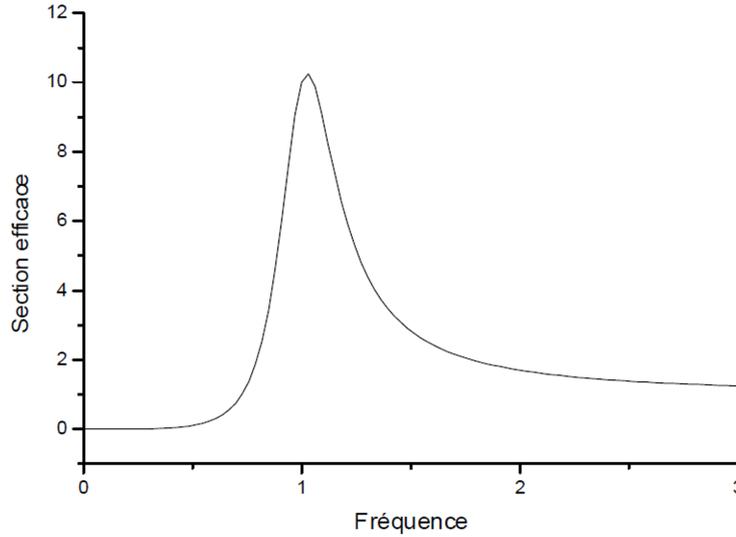


Figure 8.1: Section efficace de diffusion en fonction de la fréquence, exprimée en unités de ω_0 . Le facteur de qualité à été limité à 3.3 pour rendre la figure lisible.

de rayonnement. Un simple argument d'analyse dimensionnelle montre que la seule longueur qu'on peut former à partir des caractéristiques de l'électron est:

$$r_e = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2} = \frac{3}{2}c\tau, \quad (8.19)$$

qui est de l'ordre de 3 fm. On peut donc écrire enfin:

$$\sigma = \frac{8\pi}{3}r_e^2 \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}. \quad (8.20)$$

La figure 8.1 présente la section efficace de diffusion en fonction de la fréquence.

Pour des fréquences proches de résonance, nous pouvons écrire, comme pour la polarisabilité:

$$\sigma = \frac{8\pi}{3}r_e^2 \frac{\omega_0^2}{4(\omega_0 - \omega)^2 + \gamma^2}. \quad (8.21)$$

La section efficace est le produit de la "surface de l'électron" par un facteur présentant une résonance Lorentzienne en ω_0 . La section efficace sera donc qualitativement très différente selon que la fréquence incidente est très grande, très petite ou voisine de la fréquence propre. Nous allons examiner séparément ces différents cas.

Diffusion Rayleigh

Nous considérerons d'abord le cas de la diffusion très basse fréquence: $\omega \ll \omega_0$. C'est par exemple pratiquement toujours le cas pour la diffusion radiofréquence ou infrarouge lointain. C'est aussi le cas de la diffusion de la lumière visible par l'air. Les premières fréquences de résonance optique de l'oxygène ou de l'azote sont en effet situées dans le domaine ultraviolet. En tenant compte de cette condition, la section efficace s'écrit simplement:

$$\sigma = \frac{8\pi}{3}r_e^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4. \quad (8.22)$$

Cette expression appelle plusieurs commentaires. D'abord, la valeur de la section efficace est extrêmement faible. Même si ω est de l'ordre de ω_0 , la section efficace n'est que de l'ordre de la "surface classique" de l'électron, 10^{-30} m². Pour mieux comprendre la faiblesse de cette valeur, calculons la longueur L de propagation nécessaire pour que la lumière incidente soit notablement atténuée par la diffusion. Avec un faisceau de section S , l'atténuation sera complète si $S = \mathcal{N}\sigma$ où $\mathcal{N} = NSL$ est le nombre total de molécules dans le faisceau sur une longueur L (N est la densité numérique). On trouve donc simplement:

$$L = \frac{1}{\sigma N} . \quad (8.23)$$

Pour un gaz à la pression atmosphérique, la densité typique est de $3 \cdot 10^{25}$ m⁻³. En prenant une valeur très surévaluée de 10^{-30} m² pour σ , on trouve une longueur d'atténuation L de 30 km. On comprend donc pourquoi, dans la journée, la lumière solaire, qui ne traverse que quelques kilomètres d'atmosphère dense, n'est pas très atténuée par diffusion (la lumière directe est très intense par rapport au "bleu" du ciel). En revanche, au lever ou au coucher du soleil, la lumière, sous incidence rasante, traverse une épaisseur de gaz beaucoup plus considérable, pouvant dépasser la centaine de kilomètres. Dans ce cas la lumière est fortement atténuée.

Remarquons aussi la très rapide dépendance de la section efficace en fonction de la fréquence incidente. Les courtes longueurs d'onde, plus proches de la résonance, sont diffusées beaucoup plus efficacement que les plus longues. Voici une explication simple de la couleur bleue de la lumière diffusée par les gaz ou les fumées. La lumière transmise, elle, apparaît plus rouge, les fréquences les plus élevées étant aussi les plus atténuées.

Notons que ces raisonnements nous donnent quelques indications sur l'efficacité de la diffusion ou la nature du spectre diffusé par un gaz. Ils ne nous prouvent pas, en revanche, qu'un échantillon macroscopique de gaz diffuse. La manière dont s'additionnent les rayonnements produits par les différentes molécules du gaz n'est pas du tout prise en compte dans ce raisonnement simpliste qui ne considère qu'une molécule unique. On pourrait se demander en particulier pourquoi un gaz diffuse alors qu'un verre, pourtant beaucoup plus dense, ne diffuse pratiquement pas s'il est pur. Ainsi, la longueur d'atténuation dans les fibres optiques est de l'ordre de la dizaine de kilomètre aussi, alors que la densité numérique est trois ordres de grandeur plus élevée que celle de l'air. Pour bien comprendre cet effet, il faut analyser en détails le processus de diffusion macroscopique. On montre alors que les fluctuations thermodynamiques de densité jouent un rôle essentiel dans la diffusion. Pour un milieu statique, comme un verre, les amplitudes diffusées interfèrent destructivement et il ne reste que la lumière transmise vers l'avant. Pour un gaz, le nombre de particules dans un volume de l'ordre de λ^3 est fluctuant. Ces fluctuations sont responsables de la présence de lumière diffusée. Il faut donc prendre avec précautions les ordres de grandeur que nous venons de donner.

Diffusion Thomson

Nous considérerons maintenant le domaine des hautes fréquences $\omega \gg \omega_0$. C'est, par exemple, celui de la diffusion des rayonnements X dans les matériaux non absorbants. On trouve alors simplement:

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} r_e^2 . \quad (8.24)$$

La section efficace est constante, indépendante de la fréquence incidente, simplement égale à la surface classique de l'électron. En fait, pour de hautes fréquences incidentes, le fait que l'électron soit lié par une force harmonique n'a pratiquement aucune influence sur la diffusion. On trouve ici simplement la section efficace de diffusion par un électron libre. Les ordres de grandeur de la section efficace et des longueurs d'atténuation sont essentiellement les mêmes que dans le paragraphe précédent.

Diffusion résonnante

Le régime le plus intéressant est celui où la fréquence incidente est proche de la résonance atomique $\omega \simeq \omega_0$. La section efficace présente alors un comportement quasi Lorentzien autour de ω_0 décrit par l'équation (8.21).

Pour étudier les ordres de grandeur, nous nous focaliserons sur le cas où le rayonnement incident est strictement résonant: $\omega = \omega_0$. Dans ce cas,

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} r_e^2 \left(\frac{\omega_0}{\gamma} \right)^2. \quad (8.25)$$

La section efficace est beaucoup plus grande que la surface classique de l'électron. Nous avons vu en effet que le facteur de qualité de la transition atomique est de l'ordre de 10^7 . La section efficace résonnante est donc 14 ordres de grandeur plus élevée que les sections Thomson ou Rayleigh. Plus précisément:

$$r_e \frac{\omega_0}{\gamma} = \frac{r_e}{\omega_0 \tau} = \frac{3}{2} \frac{c}{\omega_0}. \quad (8.26)$$

On en déduit finalement

$$\sigma = \frac{3}{2\pi} \lambda_0^2, \quad (8.27)$$

où λ_0 est la longueur d'onde de la lumière résonnante. La section efficace de diffusion résonnante est donc de l'ordre du carré de la longueur d'onde, 1 micron carré environ. En considérant par exemple une vapeur de sodium sous une pression de 10^{-5} torr (ce qu'on obtient dans une ampoule chauffée à une centaine de degrés) soit une densité numérique de 10^{17} m^{-3} , on trouverait une longueur d'absorption (le raisonnement des paragraphes précédents reste correct) de $100 \mu\text{m}$. Il s'agit bien sûr d'une valeur trop faible. On constate expérimentalement que le rayonnement est atténué sur une longueur courte, mais notablement plus longue que ce que nous venons de calculer, surtout quand le rayonnement incident est intense.

L'origine de ce désaccord vient du fait que nous travaillons avec un modèle linéaire qui ignore toute saturation du système atomique. Aussi intense et aussi résonnante que soit l'onde incidente, l'atome répond toujours linéairement, avec une section efficace indépendante de l'intensité incidente. Si on quantifie correctement la dynamique atomique, on s'aperçoit que ce comportement n'est valable que pour des diffusions non résonnantes. Pour la diffusion résonnante, l'atome ne peut diffuser plus d'un photon dans un intervalle de temps γ^{-1} . Il peut osciller rapidement entre les deux niveaux d'énergie bordant la transition résonnante mais ces cycles correspondent à des cycles absorption/émission induite qui ne changent pas le nombre de photons de l'onde incidente. Les seuls événements qui correspondent à une diffusion sont ceux se produisant par émission spontanée, tous les γ^{-1} . L'ordre de grandeur de la section efficace que nous donnons ici ne sera correct que si l'atome diffuse beaucoup moins d'un photon dans une durée de vie radiative. Il faut donc que la puissance incidente soit petite devant un photon (avec une énergie d'environ un eV) par 10 ns et par micron carré. L'ordre de grandeur de la "puissance de saturation" est donc de 10 W/m^2 ou encore de 1 mW/cm^2 . Une approche quantique rigoureuse donne exactement cet ordre de grandeur. Le modèle de Thomson fait encore la preuve de son efficacité.

8.2 Diffusion par un milieu dense

Nous nous attacherons dans ce paragraphe au calcul du champ et de l'intensité diffusés par une assemblée d'atomes, ou plus généralement de centres diffuseurs. Chacun de ces centres sera, dans ce problème, entièrement défini par sa polarisabilité. Nos calculs pourront donc s'appliquer à une très grande variété de centres diffuseurs et, en particulier, aux atomes classiques ou semi-classiques traités dans les paragraphes précédents.

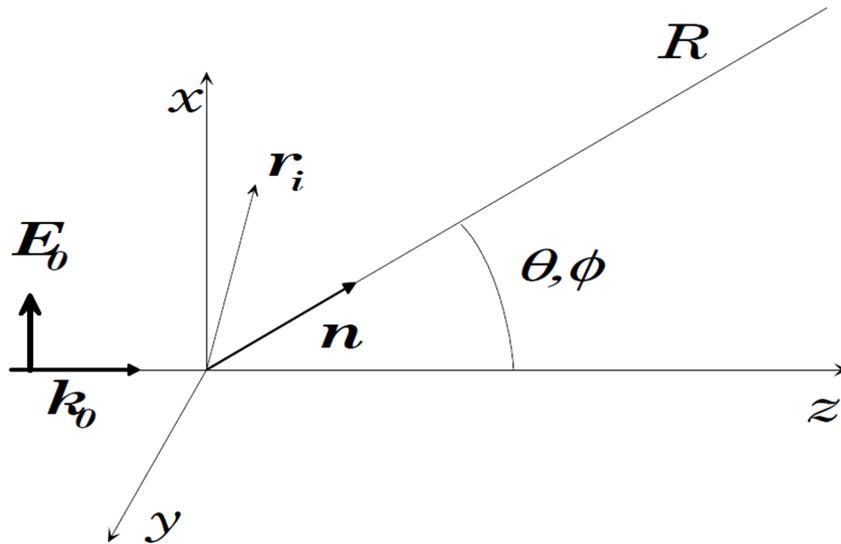


Figure 8.2: Notations pour la diffusion par un milieu matériel

Nous essaierons en particulier de comprendre un apparent paradoxe. Nous avons vu en effet, dans le paragraphe sur la diffusion Rayleigh, que les atomes devaient efficacement diffuser un rayonnement incident, d'autant plus efficacement que la fréquence est élevée. Nous avons expliqué ainsi la diffusion du rayonnement bleu par le ciel. On peut cependant a priori s'étonner de ce que la diffusion par ce milieu, relativement peu dense, soit beaucoup plus efficace que la diffusion par un milieu transparent solide, contenant un nombre beaucoup plus grand de centres diffuseurs. Nous avons en effet montré que la longueur d'extinction typique (la longueur sur laquelle le rayonnement incident est notablement affaibli) est de quelques dizaines de kilomètres pour l'atmosphère. Pour des fibres optiques de haute qualité, la longueur d'atténuation est sensiblement plus grande, alors que la densité du milieu est au moins mille fois plus élevée. Il semble donc qu'un milieu dense à l'échelle de λ diffuse de manière particulièrement peu efficace. Nous essaierons aussi de comprendre pourquoi les cristaux, éclairés par une longueur d'onde de l'ordre de la maille cristalline, ne diffusent que dans des directions privilégiées et comment ces directions sont reliées aux paramètres du réseau cristallin.

Pour obtenir ces résultats nous ferons dans ce chapitre un certain nombre d'approximations. Elles seront détaillées dans le prochain paragraphe. Notons dès maintenant que nous ne traiterons que de la diffusion par un milieu statique. Un milieu où les centres diffuseurs se déplacent, même éclairé par une onde monochromatique, ne diffuse pas uniquement à la fréquence incidente en raison de l'effet Doppler. Pour traiter ce cas en détails, il nous faudrait des outils d'analyse d'un champ non monochromatique (fonctions de corrélation en particulier) qui ne seront pas introduits dans ce cours. Nous indiquerons brièvement à la fin du chapitre comment nos résultats seraient qualitativement modifiés dans ce cas. Nous donnerons une application importante à la diffusion par un milieu dépendant du temps avec la diffusion Brillouin (diffusion d'une onde électromagnétique par une onde sonore).

8.2.1 Notations. Champ diffusé.

Nous considérons donc un milieu comprenant des centres diffuseurs, que nous appellerons "atomes", localisés au voisinage de l'origine (voir figure 8.2). Les diffuseurs, en nombre total \mathcal{N} , indicés par l'indice i , sont situés en \mathbf{r}_i . La polarisabilité de chaque diffuseur sera notée $\alpha_i(\omega)$. Elle peut en effet dépendre de la fréquence du rayonnement incident. Dans presque tous les calculs, par la suite, on n'explicitera pas sa dépendance en ω . On observe le rayonnement dans la direction \mathbf{n} , définie par les angles d'Euler θ et ϕ . L'observateur est à une distance R , très grande par rapport à la taille du milieu

et par rapport à toutes les autres dimensions caractéristiques du problème.

Le milieu est éclairé par une onde plane monochromatique, de fréquence ω , se propageant selon Oz , polarisée selon Ox et d'amplitude E_0 . On pourrait traiter le cas d'une polarisation incidente arbitraire en utilisant le principe de superposition. On pourrait traiter également le cas d'une onde de comportement temporel quelconque en la décomposant en composantes de Fourier. On posera $\mathbf{k}_0 = k\mathbf{u}_z$, avec $k = \omega/c$ et $\mathbf{E}_0 = E_0\mathbf{u}_x$. On supposera que tous les centres diffuseurs sont soumis à l'onde incidente non modifiée. On suppose donc que la diffusion n'atténue pas l'onde incidente, c'est à dire que le milieu diffuseur n'est pas trop dense (c'est bien sûr une densité de polarisabilité qui importe ici). Nous supposons également que la diffusion multiple est négligeable. Nous ne tiendrons donc pas compte, dans le calcul des dipôles induits, des champs rayonnés par les autres dipôles. Là encore, il s'agit d'une approximation de faible densité. L'onde incidente "vue" par l'atome i peut donc s'écrire:

$$\mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}_i - \omega t)} . \quad (8.28)$$

L'atome i prend donc un dipôle électrique égal à:

$$\mathbf{d}_i = \epsilon_0 \alpha_i \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}_i - \omega t)} . \quad (8.29)$$

En utilisant les résultats sur le champ du dipôle, on peut écrire le champ rayonné par l'atome i au niveau de l'observateur (le vecteur joignant l'atome à l'observateur est évidemment $R\mathbf{n} - \mathbf{r}_i$) comme:

$$\mathbf{E}_i = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik|R\mathbf{n} - \mathbf{r}_i|} \omega^2}{|R\mathbf{n} - \mathbf{r}_i| c^2} \alpha_i e^{i(\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}_i - \omega t)} (\mathbf{n} \times \mathbf{E}_0) \times \mathbf{n} . \quad (8.30)$$

Pour aller plus loin, nous allons utiliser le fait que la distance d'observation est très grande: $R \gg |\mathbf{r}_i|$. Nous allons donc, comme nous l'avons déjà fait souvent, traiter, dans le terme d'onde sphérique, le dénominateur d'amplitude à l'ordre zéro en $|\mathbf{r}_i|/R$ et le terme de phase à l'ordre 1. On a:

$$|R\mathbf{n} - \mathbf{r}_i| \simeq R - \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_i , \quad (8.31)$$

et donc:

$$\mathbf{E}_i = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ikR} \omega^2}{R c^2} \alpha_i e^{i((\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{r}_i)} e^{-i\omega t} (\mathbf{n} \times \mathbf{E}_0) \times \mathbf{n} , \quad (8.32)$$

où l'on a posé:

$$\mathbf{k} = k\mathbf{n} . \quad (8.33)$$

On peut finalement mettre ce résultat sous la forme:

$$\mathbf{E}_i = \mathbf{e}_d \alpha_i e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}_i} , \quad (8.34)$$

avec

$$\mathbf{q} = \mathbf{k} - \mathbf{k}_0 . \quad (8.35)$$

\mathbf{q} apparaît donc comme la variation de vecteur d'onde entre l'onde incidente et l'onde diffusée. Il définit bien sûr complètement la direction d'observation. A un facteur \hbar près, \mathbf{q} est aussi la différence de quantité de mouvement entre les photons incidents et les photons diffusés. Notons que dans beaucoup d'autres cas (collisions de particules...), les amplitudes de diffusion s'expriment simplement à partir de ce transfert d'impulsion. On a aussi posé

$$\mathbf{e}_d = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ikR} \omega^2}{R c^2} e^{-i\omega t} (\mathbf{n} \times \mathbf{E}_0) \times \mathbf{n} . \quad (8.36)$$

Notons à ce point que \mathbf{e}_d (qui n'est pas homogène à un champ électrique) est indépendant du diffuseur et de sa position. Il s'agit donc d'une donnée simple de la géométrie de la diffusion. Elle contient toute la dépendance angulaire du diagramme de rayonnement du dipôle. Elle s'annule en particulier

pour une direction d'observation selon Ox . Tous les dipôles sont polarisés selon Ox et ne sauraient donc rayonner dans cette direction. \mathbf{e}_d peut s'exprimer simplement en fonction des angles d'Euler de la direction d'observation:

$$\mathbf{e}_d = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ikR}}{R} \frac{\omega^2}{c^2} e^{-i\omega t} E_0 (1 - \sin^2 \theta \cos^2 \phi) . \quad (8.37)$$

Pour comparer ce résultat avec celui que nous avons établi dans le paragraphe sur le rayonnement du dipôle, on prendra garde que le dipôle est ici aligné avec l'axe Ox , alors que les angles d'Euler sont relatifs à l'axe Oz , direction de propagation de l'onde incidente.

Le champ total rayonné par le milieu résulte de l'addition cohérente des champs diffusés par tous les centres

$$\mathbf{E} = \sum_i \mathbf{E}_i . \quad (8.38)$$

On peut passer facilement de cette somme discrète à une intégrale continue sur le volume V du milieu en introduisant une densité de polarisation. En fait, nous poserons:

$$\delta n(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \sum_i \alpha_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) . \quad (8.39)$$

L'indice de réfraction d'un milieu suffisamment peu dense (au sens de la polarisation) est en effet l'unité plus le demi produit de la polarisabilité atomique par la densité numérique du milieu (le résultat est évidemment sans dimension). Comme notre milieu est supposé faiblement diffusant, δn apparaît clairement relié à l'écart à un de l'indice de réfraction. Notons toutefois que l'indice habituel n'a de sens que si on moyenne les densités de polarisation atomique à une échelle grande par rapport à la distance moyenne entre atomes et petite devant λ . Nous n'avons pas réalisé ce moyennage ici, et δn est une quantité tenant compte de la position individuelle de tous les atomes.

Avec ces notations, nous obtenons le résultat central de ce chapitre: le champ total diffusé dans la direction définie par \mathbf{q} , se met sous la forme:

$$\mathbf{E}(\mathbf{q}) = 2\mathbf{e}_d \int \delta n(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{r} . \quad (8.40)$$

Nous n'indiquons pas les bornes de l'intégrale, δn étant nul en dehors du volume V du milieu. Les propriétés de la diffusion sont donc décrites par la transformée de Fourier de la distribution d'indice du milieu. Ce résultat n'est pas sans évoquer la diffraction de Fraunhofer.

Dans la suite, nous utiliserons surtout cette expression du champ diffusé. On peut noter toutefois qu'il est possible d'exprimer simplement l'intensité totale diffusée dans la direction \mathbf{q} . La structure de l'onde à grande distance étant très voisine de celle d'une onde plane, on peut écrire en effet:

$$I = \frac{\epsilon_0 c}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* = 2\epsilon_0 c |\mathbf{e}_d|^2 \int \delta n(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{r} \int \delta n^*(\mathbf{r}') e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}'} d\mathbf{r}' . \quad (8.41)$$

En posant $\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}$, le produit de transformées de Fourier peut se mettre sous la forme d'un produit de convolution:

$$I = 2\epsilon_0 c |\mathbf{e}_d|^2 \int \delta n(\mathbf{r}) \delta n^*(\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}) e^{-i\mathbf{q}\cdot\boldsymbol{\rho}} d\mathbf{r} d\boldsymbol{\rho} . \quad (8.42)$$

On peut donc mettre finalement l'intensité diffusée sous la forme d'une transformée de Fourier inverse en $\boldsymbol{\rho}$:

$$I = 2\epsilon_0 c |\mathbf{e}_d|^2 \int \Gamma(\boldsymbol{\rho}) e^{-i\mathbf{q}\cdot\boldsymbol{\rho}} d\boldsymbol{\rho} , \quad (8.43)$$

où la fonction $\Gamma(\boldsymbol{\rho})$, définie par:

$$\Gamma(\boldsymbol{\rho}) = \int \delta n(\mathbf{r}) \delta n^*(\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}) d\mathbf{r} \quad (8.44)$$

est la fonction d'autocorrélation spatiale de la répartition d'indice du milieu. L'intensité diffusée est donc la transformée de Fourier spatiale de la fonction d'autocorrélation de l'indice. Ce résultat se généralise aux milieux diffuseurs dépendant du temps. C'est alors la densité spectrale d'énergie diffusée qui est égale à la transformée de Fourier spatio-temporelle de la fonction de corrélation spatio-temporelle de l'indice.

8.2.2 Cas d'un milieu homogène

Considérons d'abord la diffusion par un milieu dense homogène, comme par exemple un verre transparent. Les distances moyennes entre centres diffuseurs, de l'ordre de l'Ångström, sont alors beaucoup plus petites que la longueur d'onde. On peut donc remplacer, dans la transformée de Fourier donnant le champ diffusé, le terme $\delta n(\mathbf{r})$ par une constante à l'intérieur du volume V . Nous poserons $n = 1 + \delta n$. Pour un milieu dense et homogène, n est effectivement l'indice de réfraction ordinaire⁵.

Le champ diffusé s'écrit alors:

$$\mathbf{E} = 2\mathbf{e}_d(n-1) \int_V e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{r} \quad (8.45)$$

Dans la limite d'un volume infini, l'intégrale serait, à un facteur près, une fonction de Dirac $\delta(\mathbf{q})$. L'intégrale, ne portant que sur un volume fini, reste finie. Elle n'est toutefois non négligeable que dans un domaine étroit autour de $\mathbf{q} = 0$ (dont l'extension en termes de vecteurs d'onde est de l'ordre de l'inverse des dimensions transverses du milieu – un résultat élémentaire de théorie de la diffraction). Pour $\mathbf{q} = 0$, la valeur de l'intégrale est V . On peut donc écrire:

$$\int_V e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{r} = V\delta_V(\mathbf{q}), \quad (8.46)$$

où δ_V est une fonction très piquée au voisinage de l'origine, de valeur maximale 1.

Le milieu homogène diffuse donc un champ proportionnel au volume, ou encore au nombre d'atomes \mathcal{N} , seulement dans la direction initiale de l'onde incidente. Il n'y a donc pas, dans les milieux denses et homogènes, de diffusion dans des directions latérales. On comprend ainsi la très faible atténuation par diffusion dans les fibres optiques. La diffusion vers l'avant, cohérente avec l'onde incidente, interfère avec celle-ci. C'est de cette interférence que résulte l'onde se propageant finalement dans le milieu. Le calcul complet des caractéristiques de cette onde à partir de l'expression du champ diffusé est complexe, mais l'indice de réfraction du milieu peut être compris comme résultant de la diffusion cohérente vers l'avant de tous les atomes du milieu.

8.2.3 Diffusion par un cristal

Considérons maintenant plus complètement le problème de la diffusion par une assemblée dense d'atomes immobiles. Nous allons supposer que ces atomes sont aux nœuds d'un réseau cristallin. Pour simplifier les calculs, nous prendrons un réseau cubique simple, les directions principales du cristal correspondant aux axes. La généralisation à d'autres orientations cristallines ou à d'autres types de réseaux cristallins ou quasi-cristallins ne pose que des problèmes algébriques. La position des atomes, supposés tous identiques, est donc définie par trois entiers, n_x , n_y et n_z , avec:

$$\mathbf{r}_i = a(n_x\mathbf{u}_x + n_y\mathbf{u}_y + n_z\mathbf{u}_z), \quad (8.47)$$

où a est la maille cristalline. Nous noterons N_x , N_y et N_z les nombres d'atomes dans les trois directions de l'espace (nous supposons donc que la forme globale du cristal est aussi un cube). On a évidemment

⁵La valeur constante de δn étant bien sûr invariante dans les procédures de moyennage qui nous seront nécessaires pour définir l'indice de réfraction.

$\mathcal{N} = N_x N_y N_z$. Pour ce problème, il est bien sûr avantageux d'utiliser l'expression du champ diffusé comme une somme discrète sur la position des atomes individuels:

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_d \alpha \sum_{n_x, n_y, n_z} e^{-i\mathbf{a}\mathbf{q} \cdot (n_x \mathbf{u}_x + n_y \mathbf{u}_y + n_z \mathbf{u}_z)} . \quad (8.48)$$

Ce champ peut encore s'écrire en termes des composantes q_x , q_y et q_z du transfert de vecteur d'onde:

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_d \alpha \left(\sum_{n_x=1}^{N_x} e^{-iq_x n_x a} \right) \left(\sum_{n_y=1}^{N_y} e^{-iq_y n_y a} \right) \left(\sum_{n_z=1}^{N_z} e^{-iq_z n_z a} \right) . \quad (8.49)$$

Les sommes de séries géométriques s'évaluent sans difficulté. A un facteur de phase sans intérêt près,

$$\sum_{n_x=1}^{N_x} e^{iq_x n_x a} = \frac{\sin \frac{q_x N_x a}{2}}{\sin \frac{q_x a}{2}} . \quad (8.50)$$

Le champ diffusé est donc le produit de trois fonctions de diffraction simples portant sur les composantes de \mathbf{q} . Les directions où l'intensité diffusée est maximale sont telles que, simultanément:

$$q_x = \frac{2\pi}{a} p_x, \quad q_y = \frac{2\pi}{a} p_y, \quad q_z = \frac{2\pi}{a} p_z , \quad (8.51)$$

où p_x, p_y, p_z sont trois entiers. Le champ diffusé n'est donc maximal que dans des directions discrètes pour lesquelles le vecteur d'onde \mathbf{q} est sur un point d'un réseau cubique de maille $2\pi/a$. Ce réseau, qui est essentiellement le réseau obtenu par transformée de Fourier spatiale du réseau initial, est appelé réseau réciproque. Pour tout réseau cristallin, il existe un réseau réciproque. Ce n'est toutefois que dans le cas du réseau cubique simple que le réseau réciproque est géométriquement identique au réseau initial. Notons à ce point que l'amplitude du champ diffusé dans un de ces maximums est proportionnelle à $N_x N_y N_z = \mathcal{N}$. Il s'agit donc bien, comme dans le cas du milieu homogène, d'une diffusion cohérente où le champ est proportionnel au nombre d'atomes et l'intensité au carré de ce nombre.

La géométrie de la diffusion est représentée sur la figure 8.3. Le vecteur \mathbf{q} appartient au réseau réciproque. Les vecteurs d'onde incident et émergent, \mathbf{k}_0 et \mathbf{k} sont donc tels que leur différence est un point du réseau réciproque. Une solution est $\mathbf{q} = 0$ correspondant à la diffusion vers l'avant. Elle est bien sûr toujours possible (quelle que soit la nature du réseau cristallin, évidemment). Les normes des vecteurs \mathbf{k}_0 et \mathbf{k} étant identiques (ω/c), il n'existe pas nécessairement d'autre solution. Notons en effet Θ l'angle entre \mathbf{k}_0 et \mathbf{k} (angle de diffusion). On a évidemment en module:

$$q = 2k \sin \frac{\Theta}{2} . \quad (8.52)$$

Il n'existe de solution en termes de Θ que si:

$$q < 2k . \quad (8.53)$$

La plus petite distance non nulle possible sur le réseau réciproque est sa maille, $2\pi/a$. On n'aura donc de solution dans une direction différente de la direction incidente que si $2\pi/a < 2k$, ce qu'on peut encore écrire:

$$a > \lambda/2 . \quad (8.54)$$

Si la longueur d'onde incidente est plus grande que $2a$, il n'y a que la diffusion vers l'avant. Nous étendons donc la validité des résultats du paragraphe précédent, établis a priori pour une distance moyenne entre atomes très petite devant λ . Pour $\lambda < 2a$, il y a au moins une direction de diffusion

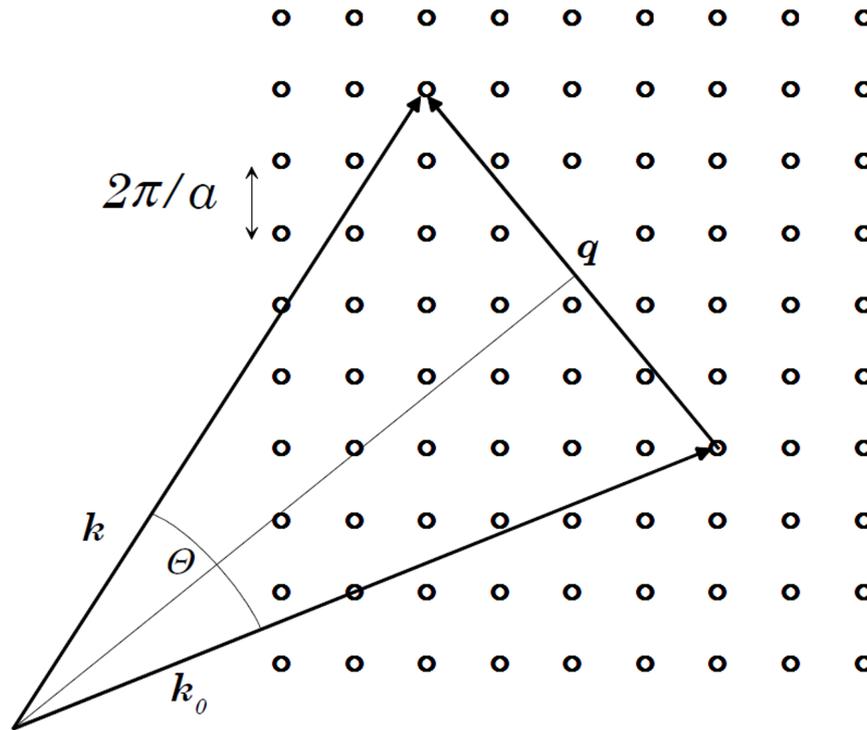


Figure 8.3: Géométrie de la diffusion par un cristal.

efficace. Pour une longueur d'onde incidente suffisamment petite, on doit voir plusieurs directions correspondant à plusieurs points du réseau réciproque.

Cette diffusion cohérente dans des directions privilégiées est appelée diffusion de Bragg. Elle a en effet été largement utilisée par Bragg pour les premières déterminations de structures cristallines par diffusion de rayonnement X. C'est encore une méthode d'étude précieuse des matériaux. En enregistrant la lumière diffusée par un cristal, on enregistre les points du réseau réciproque. Il est alors facile de remonter, par transformation de Fourier, au réseau cristallin original. Nous avons considéré uniquement le cas d'atomes identiques. Dans un cristal plus complexe, on observe la superposition des figures de diffusion dues aux différentes espèces cristallines. Les différences d'amplitude de diffusion individuelles (dans le terme $e_{d\alpha}$) permettent de remonter à l'arrangement tridimensionnel des atomes. L'ensemble de ces techniques peut être transposé à la diffusion d'autres types de rayonnement. Le fonctionnement ultime des microscopes électroniques correspond à une diffusion de Bragg des ondes électroniques sur le réseau cristallin. Les neutrons sont aussi largement utilisés. Ils interagissent en effet beaucoup mieux que les rayons X avec certains atomes légers.

8.2.4 Diffusion par un milieu désordonné

Considérons maintenant la diffusion par un milieu désordonné. Nous supposons que les positions des centres diffuseurs sont aléatoires et que la densité n'est pas trop grande. Le nombre de centres diffuseurs dans un élément de volume de l'ordre de λ^3 est donc aléatoire. Nous pouvons comprendre à partir de cela les propriétés qualitatives du rayonnement diffusé.

$\mathbf{E}(\mathbf{q})$ est en effet la transformée de Fourier en \mathbf{q} de δn . Si q est très voisin de zéro (diffusion vers l'avant), \mathbf{E} est déterminé par une moyenne à grande échelle (extension spatiale de l'ordre de $1/q$) de la fluctuation d'indice. Même si le nombre de particules varie à l'échelle de λ , l'indice moyenné sur une échelle beaucoup plus grande est constant. On retrouve donc, vers l'avant, une diffusion cohérente

de tous les atomes, comme dans le cas du milieu dense. Là encore, la notion d'indice de réfraction ordinaire prend tout son sens.

En revanche, si on s'intéresse au rayonnement diffusé dans une direction quelconque, on échantillonne dans δn les variations spatiales à une échelle de l'ordre de λ , qui sont importantes par hypothèse. Il y aura donc de la lumière diffusée. De plus, si δn est réellement aléatoire, il se comporte comme un bruit blanc dont la transformée de Fourier est pratiquement indépendante de \mathbf{q} . On peut donc s'attendre à une transformée de Fourier isotrope et à un diagramme de diffusion dominé par le terme \mathbf{e}_d (il ne saurait y avoir de diffusion selon Ox quelle que soit la géométrie du milieu).

Précisons un peu ce raisonnement très qualitatif en nous intéressant à l'intensité diffusée dans une direction \mathbf{k} très différente de la direction initiale. Cette intensité est proportionnelle à la composante de Fourier de la fonction d'autocorrélation de l'indice à une fréquence spatiale de l'ordre de λ . Pour estimer cette fonction d'autocorrélation, divisons le milieu en petits éléments de volume ΔV de taille de l'ordre de λ^3 . Nous supposons que le nombre d'atomes p dans chaque élément de volume est une fonction aléatoire et que les nombres de particules dans des volumes adjacents sont des fonctions aléatoires indépendantes (nous prenons ici une image statique du gaz, un instantané de la position de toutes les molécules dans un gaz réel. Cette approximation est donc raisonnable).

La fonction d'autocorrélation d'indice peut s'écrire, à un facteur $|\alpha|^2/4$ près, comme la fonction d'autocorrélation de la densité numérique $N(\mathbf{r})$ des particules:

$$\Gamma(\boldsymbol{\rho}) = \frac{|\alpha|^2}{4} \int N(\mathbf{r})N(\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}) d\mathbf{r} . \quad (8.55)$$

La densité numérique comporte un terme moyen, N_0 , auquel s'ajoutent les fluctuations N_f : $N = N_0 + N_f$. La valeur moyenne spatiale de ces fluctuations est évidemment nulle. Si on reporte dans l'expression ci-dessus cette décomposition de N , on voit donc apparaître seulement deux termes. L'un est l'intégrale de N_0^2 et ne contribue qu'à la diffusion vers l'avant. C'est le seul terme qui intervient dans le cas du milieu homogène. On peut donc, pour la diffusion latérale, l'oublier. L'autre terme est l'autocorrélation de la fluctuation de densité. On peut donc écrire:

$$\Gamma(\boldsymbol{\rho}) = \frac{|\alpha|^2}{4} \int_V N_f(\mathbf{r})N_f(\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}) d\mathbf{r} . \quad (8.56)$$

Avec nos hypothèses, les fluctuations de densité de deux cellules adjacentes ne sont pas corrélées. Γ sera donc nulle dès que $\boldsymbol{\rho}$ est plus grand que la taille caractéristique d'une cellule, c'est à dire λ . Essentiellement, à l'échelle du volume total du milieu, Γ n'est non nulle que dans un voisinage de l'origine d'extension ΔV . Estimons maintenant l'ordre de grandeur de Γ dans ce voisinage, c'est à dire l'ordre de grandeur de $\Gamma(0)$. En supposant le milieu invariant par translation,

$$\Gamma(0) = \frac{|\alpha|^2}{4} V N_f^2 \quad (8.57)$$

Soit p le nombre de particules dans une cellule donnée. Il doit obéir à une loi de Poisson avec une valeur moyenne $N\Delta V$. L'écart quadratique moyen de p , Δp^2 doit donc être égal à cette valeur moyenne. La densité numérique dans cette cellule est $p/\Delta V$. N_f^2 est l'écart quadratique moyen de la densité numérique dans les cellules. On a donc

$$N_f^2 \simeq \frac{\Delta p^2}{\Delta V^2} \simeq \frac{p}{\Delta V^2} = \frac{N}{\Delta V} . \quad (8.58)$$

L'ordre de grandeur de la fonction d'autocorrélation est donc:

$$\Gamma(0) = \frac{|\alpha|^2}{4} N \frac{V}{\Delta V} \quad (8.59)$$

Un modèle simple de Γ est donc de prendre une valeur constante égale à $\Gamma(0)$ dans le volume ΔV autour de l'origine et zéro partout ailleurs. La transformation de Fourier, en ordres de grandeur, se ramène alors à une multiplication par ΔV et l'intensité diffusée dans une direction loin de l'incidence est donc finalement proportionnelle à :

$$I \simeq |\mathbf{e}_d|^2 |\alpha|^2 NV \simeq |\mathbf{e}_d|^2 |\alpha|^2 \mathcal{N} . \quad (8.60)$$

L'intensité est ici seulement proportionnelle au nombre d'atomes, alors qu'elle était proportionnelle à son carré pour la diffusion par un milieu dense. C'est là un comportement caractéristique de l'émission incohérente. En fait, le rayonnement diffusé est simplement \mathcal{N} fois le rayonnement diffusé par un atome unique (le diagramme de rayonnement étant donc essentiellement celui d'un dipôle unique). Ce résultat légitime les calculs de longueur d'extinction que nous avons faits pour la diffusion par l'atmosphère.

8.2.5 Influence de la dynamique du milieu

Dans beaucoup de cas, on ne peut pas considérer les atomes ou les centres diffuseurs comme immobiles. Si nos approximations sont réalistes pour un milieu dense ou un cristal (jusqu'à un certain point), elles tombent sûrement pour un gaz. Le rayonnement diffusé n'est plus monochromatique. On peut le comprendre qualitativement simplement en introduisant l'effet Doppler sur l'onde diffusée par une particule mobile. Pour décrire un tel champ et son spectre, on définit une densité spectrale d'énergie rayonnée, $J(\nu)$, telle que l'intensité dans une bande de fréquence $d\nu$ (on prendra garde que ν est en fait ici une pulsation) autour de ν soit $J(\nu)d\nu$. On peut alors définir la diffusion par la fonction $J(\mathbf{q}, \nu)$ qui donne la densité spectrale du rayonnement diffusé dans la direction définie par \mathbf{q} . On montre, par des arguments très similaires à ceux que nous avons utilisés, que cette fonction est la transformée de Fourier spatio-temporelle de la fonction d'autocorrélation spatio-temporelle des fluctuations d'indice (définies à partir de la polarisabilité) et qui dépendent cette fois de la position et du temps :

$$J(\mathbf{q}, \nu) = \frac{2}{\pi} |\mathbf{e}_d|^2 \int d\tau d\boldsymbol{\rho} e^{-i\mathbf{q}\cdot\boldsymbol{\rho}} e^{i(\nu-\omega)\tau} \Gamma(\boldsymbol{\rho}, \tau) , \quad (8.61)$$

avec

$$\Gamma(\boldsymbol{\rho}, \tau) = \int d\mathbf{r} \overline{\delta n(\mathbf{r}, t_0) \delta n^*(\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}, t_0 - \tau)} . \quad (8.62)$$

Dans la dernière expression, $\overline{\delta n}$ représente une moyenne temporelle sur t_0 à une échelle de temps longue par rapport aux temps du problème.

Pour un milieu statique, toutes les fonctions de ν se ramènent à un Dirac centré à la fréquence incidente ω et toutes les discussions précédentes restent valables. Pour un milieu quelconque, la fréquence est modifiée. Il est facile de voir que, pour un gaz, par exemple, la diffusion reste isotrope, mais que le spectre du rayonnement diffusé est essentiellement le spectre Doppler du milieu. Plus généralement, l'étendue spectrale du rayonnement doit être l'inverse du temps caractéristique de la fonction de corrélation (qui est presque toujours maximale à temps nul et décroissante ensuite). Pour l'effet Doppler, le temps caractéristique est le temps nécessaire pour que les molécules se déplacent de λ , soit $\lambda/v = 2\pi c/\omega v$ où v est la vitesse caractéristique des molécules. On retrouve bien une largeur Doppler relative égale à v/c . Le calcul précis des fonctions de corrélation est souvent assez délicat et nous ne l'aborderons pas d'avantage ici.

Nous allons en revanche appliquer la formule précédente à un cas simple et intéressant technologiquement, la diffusion Brillouin, ou diffusion d'une onde lumineuse par une onde sonore. C'est, comme nous le verrons, un phénomène important pour comprendre les bruits dans les fibres optiques. C'est aussi le phénomène qui constitue les modulateurs acousto-optiques, très utilisés en physique des lasers.

Nous considérons donc un milieu parcouru par une onde acoustique sinusoïdale de fréquence ω_s . Cette onde correspond à une modulation de la densité du milieu et donc à une modulation de l'indice de réfraction. On peut donc écrire l'indice au point \mathbf{r} et à l'instant t sous la forme:

$$n(\mathbf{r}, t) = n_0 + n_1 \cos(\mathbf{k}_s \cdot \mathbf{r} - \omega_s t) . \quad (8.63)$$

Dans cette expression, n_0 est l'indice moyen du milieu. Comme dans le paragraphe précédent, cet indice uniforme et statique ne contribue qu'à la propagation dans la direction initiale. Tous les phénomènes non triviaux sont contenus dans le second terme, dont les moyennes spatiales et temporelles sont nulles. Nous n'utiliserons donc, dans le calcul des fonctions de corrélation, que ce second terme.

Le vecteur d'onde \mathbf{k}_s a pour module ω_s/v_s , où v_s est la vitesse du son dans le milieu. Pour fixer les ordres de grandeur, nous considérerons un milieu cristallin, où la vitesse du son est de quelques kilomètres par seconde: $v_s \simeq 10^3$ m/s. Nous considérerons une fréquence résolument ultrasonore, $\omega_s \simeq 6.10^8$ (soit 100 MHz en unités de fréquence). k_s est alors de l'ordre de 6.10^5 /m, soit une longueur d'onde de l'ordre de $2\pi/k_s = 10$ μ m. De manière évidente, il n'y aura d'effet sensible de l'onde sonore que si elle n'est pas trop grande par rapport à la longueur d'onde optique dans le matériau, c'est à dire si la fréquence acoustique est au moins de cet ordre. Pour des fréquences d'onde sonore très basses, on a simplement une propagation vers l'avant avec une petite modulation de phase.

Il est facile alors d'écrire la fonction de corrélation, en prenant, comme l'indique sa définition, l'onde acoustique sous forme complexe $n_1 \exp(i(\mathbf{k}_s \cdot \mathbf{r} - \omega_s t))$:

$$\Gamma(\boldsymbol{\rho}, \tau) = n_1^2 \int d\mathbf{r} e^{i(\mathbf{k}_s \cdot \mathbf{r} - \omega_s t_0)} e^{-i(\mathbf{k}_s \cdot (\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}) - \omega_s(t_0 - \tau))} . \quad (8.64)$$

Le temps t_0 s'élimine naturellement et il ne reste qu'une quantité invariante dans le processus de moyennage temporel. La dépendance en \mathbf{r} s'annulant aussi, l'intégrale de volume se ramène à une simple multiplication par V et on trouve finalement:

$$\Gamma(\boldsymbol{\rho}, \tau) = n_1^2 V e^{i(\mathbf{k}_s \cdot \boldsymbol{\rho} - \omega_s \tau)} . \quad (8.65)$$

La densité spectrale de rayonnement diffusé s'exprime alors simplement. La transformée de Fourier spatiale de l'exponentielle complexe dans Γ se ramène, pour un milieu de grande extension, à une fonction de Dirac. La transformée de Fourier temporelle donne exactement une fonction de Dirac. On trouve donc finalement, à des coefficients numériques près qui contiennent diagramme de rayonnement des dipôles et des termes en n_1^2 proportionnels à l'intensité de l'onde sonore:

$$J(\mathbf{q}, \nu) \propto \delta(\mathbf{q} + \mathbf{k}_s) \delta(\nu - \omega_s - \omega) \mathcal{N}^2 . \quad (8.66)$$

Il ne sort donc du milieu, en plus de l'onde dans la direction initiale, qu'un seul faisceau diffusé, dans la direction définie par $\mathbf{k}_0 + \mathbf{k}_s$. La fréquence de ce faisceau est décalée par rapport à la fréquence de l'onde incidente de ω_s . On peut comprendre assez facilement ce résultat en faisant appel à la notion de phonon. La propagation d'ondes acoustiques dans un réseau cristallin peut en effet se comprendre comme la propagation de quasi-particules, très analogues au photon, que l'on nomme phonons. Ces particules, d'énergie $\hbar\omega_s$, ont une quantité de mouvement $\hbar\mathbf{k}_s$. Les photons incidents ont une impulsion $\hbar\mathbf{k}$ et une énergie $\hbar\omega$. La collision entre un photon et un phonon, si elle respecte la conservation de l'impulsion et de l'énergie, doit donc produire un photon d'impulsion $\hbar(\mathbf{k} + \mathbf{k}_s)$ et d'énergie $\hbar(\omega + \omega_s)$. Si ces arguments très simples ne permettent pas de donner la probabilité que l'événement se produise (c'est à dire de calculer l'intensité de l'onde diffusée), ils permettent néanmoins de comprendre les caractéristiques essentielles de l'onde produite.

Cette diffusion cohérente d'une onde lumineuse sur une onde sonore joue un grand rôle en optique. Un rôle néfaste, d'abord, pour les transmissions par fibre optique. Les collisions des photons avec les ondes sonores thermiquement excitées dans la fibre sont une cause importante de bruit de phase et de perte de signal optique. Il est très difficile de s'en affranchir. Les vibrations couplées efficacement aux

ondes lumineuses ont une énergie de quelques centaines de MHz et sont donc largement peuplées par le bruit thermique de phonons.

En revanche, la diffusion Brillouin peut être mise à profit pour dévier et transposer en fréquence un faisceau laser. C'est le principe du modulateur acousto-optique, très utilisé maintenant. L'intérêt en est essentiellement la transposition de fréquence. A partir d'un seul faisceau laser, on peut disposer d'autres faisceaux de fréquences différentes mais ayant une relation de phase parfaitement bien définie avec le faisceau initial. L'exploration de fréquence que l'on peut atteindre dépend essentiellement de la bande passante des transducteurs électromécaniques créant l'onde. On peut maintenant couvrir une gamme de quelques centaines de MégaHertz. En optimisant le fonctionnement, l'efficacité de conversion entre la puissance incidente et la puissance transposée peut avoisiner 90%. On peut donc envisager de cascader ces modulateurs pour étendre l'excursion en fréquence. Enfin, en modulant temporellement l'intensité de l'onde sonore, on peut moduler l'intensité de l'onde diffusée sans changer sa direction ni sa fréquence. On peut ainsi réaliser des obturateurs très rapides, avec des temps de réponse très inférieurs à la microseconde. La déflexion du faisceau, enfin, peut être utilisée pour réaliser des balayages rapides. Les premières imprimantes laser fonctionnaient sur ce principe. Les modulateurs acousto-optiques, très coûteux, ont depuis été remplacés par des miroirs holographiques rotatifs.