Stephan Fauve, Aurélie Fargette & Arnaud Raoux

# Examen de mécanique analytique (L4)

Les deux parties contribueront de manière équivalente à la note finale. **Merci de les traiter sur des copies séparées.** Les copies présentant des sous-parties traitées en profondeur à l'inverse du « grapillage » seront valorisées.

Les vecteurs seront notés en gras. On rappelle que : $\text{argth}'x = -\frac{1}{x^2-1}$.

## 1 Dissipation en mécanique analytique

On s'intéresse à la prise en compte de la dissipation dans le cadre du formalisme de la mécanique analytique. On traite tout d'abord le cas d'un oscillateur harmonique amorti

$$m\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + kx = 0. \tag{1}$$

### 1.1 Principe variationnel et lagrangien pour un système dissipatif

1. Montrer que l'on peut obtenir l'équation (1) à partir du principe variationnel suivant.

$$\delta\left[\int_{t_1}^{t_2} y(m\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + kx)dt\right] = 0, \tag{2}$$

   où $x(t)$ et $y(t)$ sont indépendants avec $\delta x = \delta y = 0$ pour $t = t_1$ et $t = t_2$.
2. Quelle équation obtient-on pour $y(t)$ ? Quelle transformation simple permet de passer de l'équation pour $x(t)$ à celle pour $y(t)$ ?
3. Expliquer pourquoi (le calcul complet n'est pas nécessaire) les équations pour $x(t)$ et $y(t)$ peuvent être obtenues à partir du principe variationnel suivant :

$$\delta\left[\int_{t_1}^{t_2} L(x, y, \dot{x}, \dot{y})dt\right] = 0, \tag{3}$$

   avec $L(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = m\dot{x}\dot{y} + \lambda(x\dot{y} - \dot{x}y) - kxy$.
4. Utiliser ce lagrangien pour trouver une quantité conservée.
5. Soit $x(t)$ une solution de l'équation (1). Montrer qu'une solution de l'équation différentielle pour $y$ est $y(t) = x(t)\exp\frac{2\lambda}{m}t$.
6. En déduire que l'équation (1) peut être obtenue à partir du lagrangien suivant :

$$L(x, \dot{x}, t) = \frac{1}{2}(m\dot{x}^2 - kx^2)\exp\frac{2\lambda}{m}t. \tag{4}$$

   Vérifiez-le ensuite en écrivant l'équation d'Euler-Lagrange correspondante.

### 1.2 Dissipation ou masse variable ?

1. Donner l'expression de l'hamiltonien $H$ relatif au lagrangien (4).
2. On se donne les conditions initiales $x(0) = a$ et $\dot{x}(0) = -\alpha a$ avec $\lambda = m\alpha$. On note aussi $k = m\omega_0^2$. Donner l'expression de la solution $x(t)$ pour $\alpha < \omega_0$.
3. Reporter l'expression de $x(t)$ dans $H$ et calculer la valeur moyenne $< H >$ de l'hamiltonien sur une période d'oscillation.

4. Le résultat obtenu pour $< H >$ vous semble-t-il en accord avec ce qui pouvait être attendu ? Le lagrangien (4) est-il conforme à la définition usuelle du lagrangien ? L'oscillateur harmonique amorti est-il décrit par ce lagrangien ? Discuter.
5. Montrer que le lagrangien (4) est celui d'un oscillateur harmonique de masse $m(t)$ variable et donner l'expression de $m(t)$.
6. On considère un pendule de longueur $\ell$ et de masse variable $m(t)$ quelconque. On note $x(t)$ l'angle par rapport à la verticale. Écrire l'équation du mouvement. Est-elle invariante par la transformation $t \to -t$ ?
7. Le résultat obtenu pour $< H >$ est-il plus facile à interpréter dans le contexte du système à masse variable ?
8. Montrer que cette équation peut se mettre sous la forme $\ddot{x} + \dot{s}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ à la limite $x$ petit. Écrire cette équation sous la forme d'un système d'équations du premier ordre en temps puis donner l'expression de l'équation de Liouville. Quel est le terme non conservatif ?

### 1.3 Rayonnement et dissipation

On considère à présent l'oscillateur harmonique représenté sur la figure ci-dessous, de raideur $k$ et de masse $m$, oscillant selon l'axe $0y$. Cet oscillateur peut exciter des ondes sur une corde accrochée à la masse $m$, dont le module de la tension en tout point vaut $T$ et dont la masse par unité de longueur est $\rho$. On rappelle l'équation d'ondes

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \tag{5}$$

avec $c^2 = T/\rho$.

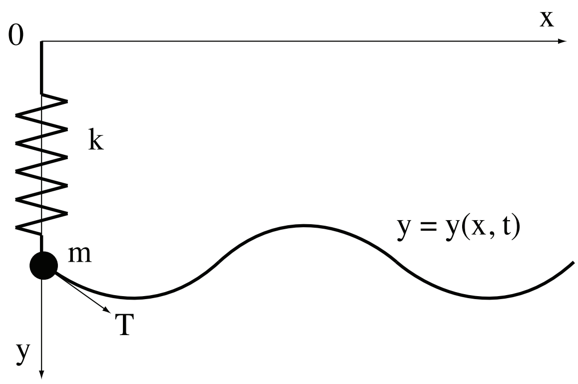



FIGURE 1 – Oscillateur harmonique couplé à une corde vibrante.

1. Exprimer la composante verticale de la force exercée par la corde sur la masse $m$ en fonction de $T$ et de $y(x)$ dans le cas où les ondulations de la corde sont de faibles amplitudes.
2. On rappelle que les solutions générales de l'équation d'onde sont de la forme $y(x,t) = f(t - x/c) + g(t + x/c)$. Montrer que l'équation qui gouverne l'amplitude d'oscillation $y(0,t)$ de la masse $m$ peut se mettre sous la forme d'une équation pour un oscillateur harmonique amorti avec un terme de forçage.
3. Pouvez-vous justifier l'expression du coefficient $\lambda$ du terme d'amortissement (à une constante multiplicative près) sans faire le calcul précédent ?
4. Dans quel cas ce terme de forçage est-il nul ? Interpréter ce résultat.

## 2 Dynamique d'une corde inextensible : modélisation de l'enroulement des protéines et de l'ADN

On considère une corde inextensible libre de se déplacer dans l'espace. Celle-ci pouvant se courber et se tordre, on introduit le repère de Frenet pour suivre son mouvement. L'objet de ce problème est de déterminer l'énergie de la corde, et de trouver ses solutions en solitons. Ceux-ci donnent une signature d'un changement dans la structure secondaire d'enroulement d'une protéine.

1. **Repère de Frenet**
   Soit une courbe dans l'espace, dont on repère la position par $\boldsymbol{X}(t,s)$ où $s$ est une abscisse curviligne. On définit le vecteur tangent $\boldsymbol{t}(t,s)$ comme $\partial_s \boldsymbol{X}(t,s)$ qui est un vecteur unitaire ; le vecteur normal $\boldsymbol{n}(t,s)$ comme le vecteur normalisé dans la direction et le sens de $\partial_s \boldsymbol{t}(t,s)$. Enfin, le vecteur binormal $\boldsymbol{b}(t,s)$ par $\boldsymbol{b}(t,s) = \boldsymbol{t}(t,s) \wedge \boldsymbol{n}(t,s)$. Ceci est synthétisé sur le schéma ci-dessous.

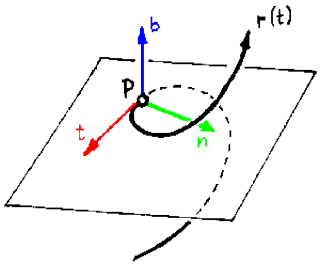



FIGURE 2 – Schéma d'une corde avec le repère de Frenet ($\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{b}$).

   (a) Expliciter les vecteurs $\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{n}$ et $\boldsymbol{b}$ en fonction de $\boldsymbol{X}$.

   (b) Montrer qu'on peut écrire

$$\frac{\partial}{\partial s}\begin{pmatrix}\boldsymbol{t}\\ \boldsymbol{n}\\ \boldsymbol{b}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & \kappa & 0\\ -\kappa & 0 & \tau\\ 0 & -\tau & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{t}\\ \boldsymbol{n}\\ \boldsymbol{b}\end{pmatrix} \tag{6}$$

   avec $\kappa(t,s)$ et $\tau(t,s)$ des fonctions respectivement appelées la *courbure* et la *torsion* de la corde, à expliciter.

   (c) En déduire qu'il existe un vecteur $\boldsymbol{\Omega}$ tel que $\partial_s \boldsymbol{t} = \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{t}$, et de même pour $\boldsymbol{n}$ et $\boldsymbol{b}$. Expliciter ce vecteur. On l'appelle *vecteur de Darboux*. $\Omega_1$, $\Omega_2$ et $\Omega_3$ correspondent respectivement aux mouvements de roulement, inclinaison et torsion.

2. **Approximation harmonique**
   On souhaite une première description simple, qui pourrait convenir à l'énergie d'un brin d'ADN. À cause de sa structure primaire, l'ADN a une torsion naturelle, ce qui donne à l'équilibre un vecteur de Darboux $\boldsymbol{\Omega}_0 = (0,0,\omega)$. On s'intéresse à une situation telle que $\boldsymbol{\Omega}$ est proche de $\boldsymbol{\Omega}_0$.

   (a) Dans cette situation, la corde accumule de l'énergie élastique. L'équivalent de la constante de raideur d'un ressort sera ici la matrice élastique supposée diagonale d'éléments $A_1$, $A_2$, et $A_3$. Proposer une expression approchée de l'énergie de la corde faisant intervenir les constantes élastiques, et les déviations $(\boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\Omega}_0)_i$, $i \in \{1,2,3\}$. On mettra l'accent sur la justification de cette expression.

   (b) En réalité, l'inclinaison de l'ADN $\Omega_2$ est couplée à sa torsion $\Omega_3$. Proposer alors une expression modifiée de son énergie, toujours quadratique.

3. **Approche lagrangienne**
   On s'intéresse à une approche lagrangienne du problème général. On pose pour cela

$$\psi(t,s) = \kappa(t,s) e^{i\int_0^s \tau(t,s')\,\mathrm{d}s'} \tag{7}$$

et on considère la densité de langrangien suivante dépendant des deux champs $\psi(s,t)$ et $\overline{\psi}(s,t)$ considérés comme indépendants :

$$\mathscr{L} = i\overline{\psi}\partial_t\psi - (\partial_s\psi)(\partial_s\overline{\psi}) + \frac{1}{2}(\psi\overline{\psi})^2. \tag{8}$$

(a) Trouver l'équation du mouvement.

(b) Donner les impulsions conjuguées du problème, et en déduire l'hamiltonien. Commentaire ?

(c) Quelles sont les symétries vérifiées par ce lagrangien ?

(d) Dans certaines théories, on souhaite imposer que $\int \psi\overline{\psi}\,\mathrm{d}s = 1$. Donner la nouvelle fonctionnelle à extrémiser, et les équations du mouvement à résoudre dans ce cas.

4. **Solutions en soliton**

Il est possible de résoudre séparemment les équations du mouvement pour la courbure et la torsion. Dans ce cas, on se ramène au lagragien effectif suivant :

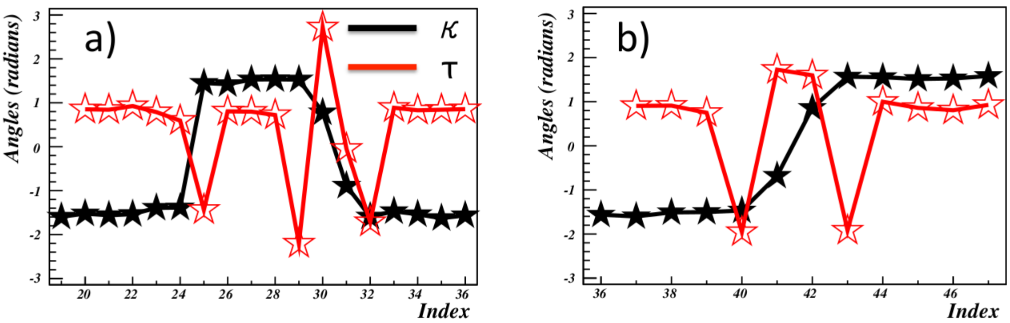
$$L = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[(\partial_s\kappa)^2 + \lambda(\kappa^2 - m^2)^2\right] \,\mathrm{d}s. \tag{9}$$

(a) Trouver l'équation du mouvement correspondante.

(b) Intégrer l'équation une première fois, avec la condition aux limites $\kappa(s) \overset{s\to\infty}{\longrightarrow} m$.

(c) Intégrer une seconde fois l'équation, et trouver l'expression en soliton de la courbure $\kappa(s)$.

(d) La figure ci-dessous montre la courbure et la torsion d'une protéine sur une suite de sites adjacents. Interpréter alors les données expérimentales relatives à la courbure $\kappa$ sur les deux graphes, en terme de solution en solitons pour la courbure.




5. **Développement perturbatif**

L'équation étudiée dans les parties précédentes est une équation qui revient fréquemment en physique non-linéaire. En particulier, elle peut être vue comme l'équation de propagation d'un paquet d'ondes dans un milieu non-linéaire, dont l'amplitude $A$ dépend de la position $x$ dans le milieu et du temps $t$. La fonction $A$ vérifie l'équation suivante

$$\frac{\partial A}{\partial t} = i\alpha\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} - i\beta|A|^2 A \tag{10}$$

avec $\alpha$ et $\beta$ des constantes réelles. Cette équation admet des solutions homogènes $A = Qe^{i\omega t}$ avec la relation $\omega = -\beta Q^2$, et on s'intéresse à des solutions légèrement inhomogènes, dont l'amplitude peut s'écrire :

$$A(x,t) = (Q + r(x,t))e^{i(\omega t + \phi(x,t))}. \tag{11}$$

(a) Déterminer les dérivées $\frac{\partial r}{\partial t}$ et $\frac{\partial \phi}{\partial t}$.

On cherche à faire un développement en échelles multiples pour $r$ et $\phi$. On définit les nouvelles variables $\xi = \varepsilon(x - ct)$ et $\tau = \varepsilon^3 t$, où $\varepsilon \ll 1$, on définit les fonctions $\tilde{r}(\xi, \tau) = r(x, t)$ avec ces nouvelles variables, et on cherche un développement de $\tilde{r}$ et $\tilde{\phi}$ sous la forme :

$$\begin{aligned} \tilde{r}(\xi,\tau) &= \varepsilon^2 \left( r_0(\xi,\tau) + \varepsilon^2 r_1(\xi,\tau) + \ldots \right) \\ \tilde{\phi}(\xi,\tau) &= \varepsilon \left( \phi_0(\xi,\tau) + \varepsilon^2 \phi_1(\xi,\tau) + \ldots \right). \end{aligned} \tag{12}$$

(b) *Ordre 1* : Montrer que

$$c = Q\sqrt{2\alpha\beta} \qquad \text{et} \qquad r_0 = \sqrt{\frac{\alpha}{2\beta}} \frac{\partial \phi_0}{\partial \xi}. \tag{13}$$

(c) *Ordre 2* : Montrer que $r_0$ vérifie l'équation d'évolution suivante :

$$\frac{\partial r_0}{\partial \tau} + \mu r_0 \frac{\partial r_0}{\partial \xi} - \nu \frac{\partial^3 r_0}{\partial \xi^3} = 0 \tag{14}$$

où $\mu$ et $\nu$ sont des constantes à déterminer. Quelle est cette équation ?