Mécanique analytique

18 novembre 2013

De nombreuses questions peuvent être traitées indépendamment.

Prière de rédiger les réponses aux différents problèmes (I, II et III) sur des feuilles séparées.

I. PENDULE PARAMÉTRIQUE

On s'intéresse à quelques propriétés d'un pendule dont la pulsation propre dépend du temps. Celle-ci étant telle que $\omega^2 = g/l$, où g est l'accélération de la pesanteur et l la longueur du pendule, on considère les deux configurations schématisées ci-dessous (voir figure 1).

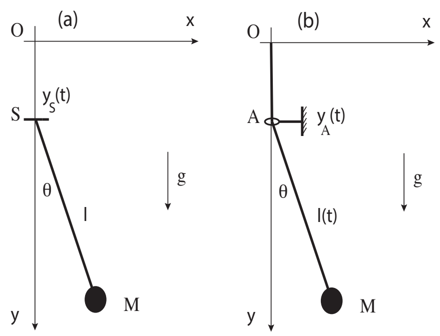

FIGURE 1: (a) Pendule dont le point de suspension S se déplace selon la verticale. (b) Le pendule est de longueur variable $l(t)$, l'anneau A est fixe (sauf au paragraphe D).

A. Equations du mouvement

Dans la configuration de la figure 1a, le point de suspension du pendule de masse m se déplace selon la verticale en fonction du temps, $y = y_s(t)$.

1) Donner l'expression des coordonnées du point M en fonction de $y_s(t)$, l et l'angle θ du pendule par rapport à la verticale, puis calculer le Lagrangien.

2) Montrer à partir de l'expression obtenue que l'on peut aussi prendre pour Lagrangien du pendule

$$L = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - lm\ddot{y}_s\cos\theta + mgl\cos\theta. \tag{1}$$

3) Est-il possible de justifier ce résultat sans calcul ?

4) Donner l'équation du mouvement.

Dans la configuration de la figure 1b, le fil, que l'on peut déplacer selon la verticale, passe à travers l'anneau A qui est fixe (sauf dans le paragraphe D). On a donc un pendule de longueur variable $l(t)$.

5) Donner l'expression du Lagrangien du pendule.

6) Montrer que l'équation du mouvement est

$$\ddot{\theta} + 2\frac{\dot{l}}{l}\dot{\theta} + \frac{g}{l(t)}\sin\theta = 0. \tag{2}$$

7) Comment se fait-il que l'on obtienne un terme du type frottement fluide, i.e. proportionnel à $\dot{\theta}$, alors que l'on n'a pas pris en compte a priori de processus dissipatif ?

B. Invariant adiabatique

On considère dans un premier temps la configuration de la figure 1a, soit une équation de la forme

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2(t)\theta = 0, \tag{3}$$

dans la limite où l'angle θ est petit. On suppose aussi que $\omega^2(t)$ varie lentement en fonction du temps.

De façon surprenante, il est plus simple de traiter le problème dans le cas d'un oscillateur harmonique à deux dimensions d'espace. On considère donc une masse m pouvant se déplacer dans le plan x, y sous l'action d'un potentiel $V = \frac{1}{2}m\omega^2(t)r^2$ où les coordonnées polaires sont notés (r, ϕ).

1) Montrer que les équations du mouvement pour $x(t)$ et $y(t)$ sont indépendantes et similaires à l'équation 3.

2) Ecrire à présent les équations de Lagrange du problème en coordonnées polaires et en déduire que $mr^2\dot{\phi} = h =$ constante.

3) Dans le cas d'un potentiel lentement variable en fonction de t, montrer que l'on peut choisir des solutions de la forme $x(t) \simeq a\cos(\omega t + \alpha)$, $y(t) \simeq a\sin(\omega t + \alpha)$, où a et α sont lentement variables en fonction du temps.

4) Donner l'expression de l'énergie E pour l'oscillateur harmonique $x(t)$.

5) En déduire que dans le cas d'un potentiel lentement variable en fonction de t, on a l'invariant adiabatique

$$\frac{E}{\omega} = \text{constante}. \tag{4}$$

C. Calcul perturbatif de l'invariant adiabatique

1) On veut exprimer le fait que $\omega^2(t)$ varie lentement en fonction du temps. On pose pour cela $\omega^2(t) = \Omega^2(\epsilon t)$ avec ϵ petit. Pouvez-vous justifier cela ?

2) On pose $\tau = \epsilon t$ et $\theta(t) = u(\tau)$. Quelle forme prend l'équation (3) pour u ?

3) On cherche des solutions approchées de l'équation différentielle obtenue sous la forme

$$u(\tau) = A(\tau) \sin \left[\frac{1}{\epsilon} \int^{\tau} S(\tau')d\tau' \right]. \tag{5}$$

Dans quels autres cas rencontre-t-on ce type d'approximation ?

4) Montrer que l'on obtient

$$\epsilon^2 A'' - AS^2 + \Omega^2 A \ = 0 \tag{6}$$

$$2A'S + AS' \ = 0. \tag{7}$$

5) En déduire que $A^2 S = a =$ constante.

6) On cherche des solutions pour A et S sous la forme d'un développement en puissances de ϵ. Que vaut S à l'ordre le plus bas ?

7) En exprimant que l'énergie totale de l'oscillateur est égale à son énergie cinétique lorsque $u = 0$, retrouver l'invariant adiabatique (4).

D. Calcul direct dans le cas de la configuration de la figure 1b

On considère à présent la configuration de la figure 1b. On va retrouver l'invariant adiabatique à partir d'un calcul direct basé sur des considérations énergétiques.

1) Le point du fil au contact de l'anneau A est soumis à deux forces d'amplitude notée T. Représenter les sur un dessin. Pourquoi sont-elles de même amplitude ? Donner l'expression

des composantes selon x et y de la force exercée par le fil sur l'anneau en fonction de T et de θ.

2) Calculer ces composantes à l'ordre le plus bas à la limite d'oscillations de petite amplitude maximale θ_m en fonction de m, g et θ_m.

3) Calculer le travail de la force moyenne (pendant une oscillation) sur l'anneau lorsque celui-ci se déplace de dy_s.

4) Donner l'expression de l'énergie totale E du pendule en fonction de m, g, y_s et θ_m dans la limite des petites oscillations.

5) En supposant que la variation de $l(t)$ en fonction du temps est lente, en déduire l'invariant adiabatique (4).

II. CHAÎNE D'OSCILLATEURS FAIBLEMENT NON-LINÉAIRES

On considère une chaîne d'oscillateurs obtenue à partir d'un ensemble de masses identiques, m, reliées entre elles par des ressorts de raideur k. On se propose d'étudier le cas où les ressorts sont faiblement non-harmoniques. Si u_n désigne le déplacement de la n-ième masse par rapport à sa position d'équilibre, l'énergie potentielle d'interaction entre les n-ième et $(n+1)$-ième masses est

$$\frac{1}{2}k(u_{n+1}-u_n)^2+\frac{1}{3}\alpha k(u_{n+1}-u_n)^3.$$

A. Equation de Korteweg–de Vries

a) Donner le lagrangien, les impulsions et le hamiltonien du système.

b) Donner l'équation du mouvement d'une masse n.

c) En développant l'équation du mouvement jusqu'à l'ordre 4 en a, montrer que sa limite continue est

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\epsilon\left(\delta^2\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right),$$

où c, δ et ϵ sont trois constantes que l'on déterminera.

d) Pour résoudre cette équation de manière perturbative, on cherche des solutions sous la forme $u(x,t)=f(s=x-ct,\tau)$ avec $\tau=\epsilon t$. On a alors notamment $\partial_x u=\partial_s f$ et

$$\frac{\partial u}{\partial t}=-c\frac{\partial f}{\partial s}+\epsilon\frac{\partial f}{\partial \tau}.$$

Montrer qu'à l'ordre 1 en ϵ, on obtient l'équation de Korteweg–de Vries pour $v = \frac{\partial f}{\partial s}$:

$$\frac{2}{c}\frac{\partial v}{\partial \tau} + v\frac{\partial v}{\partial s} + \delta^2 \frac{\partial^3 v}{\partial s^3} = 0.$$

Dans la suite, on utilisera la version adimensionnée de l'équation de Korteweg–de Vries,

$$\frac{\partial v}{\partial T} + v\frac{\partial v}{\partial X} + \frac{\partial^3 v}{\partial X^3} = 0.$$

B. Ondes solitaires

a) On cherche des solutions de l'équation de Korteweg-de Vries localisées (telles que v et ses dérivées s'annulent à l'infini) sous la forme d'ondes solitaires $v(X,T) = v(\Xi)$ avec $\Xi = X - CT$.

Intégrer cette équation et obtenir une équation analogue à l'équation du mouvement d'une particule dans un potentiel que l'on indiquera et que l'on représentera.

b) Intégrer à nouveau cette équation. Pour que v soit localisé, quelle doit être « l'énergie mécanique » du système ? Tracer l'allure du portrait de phase du « mouvement » dans l'espace $(v, \partial_\Xi v)$.

c) Calculer $v(\Xi)$. On pourra utiliser la primitive $\displaystyle\int -\frac{dy}{y\sqrt{1-y^2}} = \operatorname{argsech} y$.

III. DEUX EXERCICES INDÉPENDANTS

A. Aux sports d'hiver

Lors d'une course de ski, l'objectif est de minimiser le temps de descente en suivant un parcours imposé, matérialisé par des piquets ou des portes autour desquelles le skieur doit tourner. Ici on s'intéresse à une course très simple : on souhaite déterminer la trajectoire la plus rapide entre 2 points imposés sur la piste.

On considère un skieur, de masse m, qui descend sur une pente enneigée plane, faisant un angle α constant par rapport à l'horizontale. Il est soumis au champ de pesanteur constant vertical d'accélération g. Il part avec une vitesse nulle d'un point O et veut atteindre le plus rapidement possible un point A en contrebas (voir figure 2).

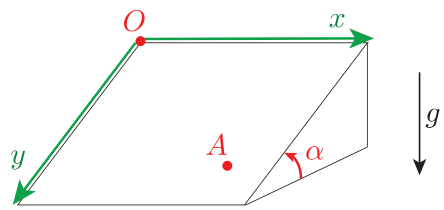

FIGURE 2: Schéma décrivant les positions des points O et A

1) La trajectoire optimale (la plus rapide) n'est pas forcément la ligne droite OA. Expliquer pourquoi en ne supposant aucune dissipation (pas de frottement avec la neige et l'air). Dans toute la suite on considèrera qu'il n'y a pas de dissipation, et on négligera les efforts du skieur.

On se place dans le référentiel d'origine O, d'axe Ox horizontal et d'axe Oy la ligne de plus grande pente orientée vers le bas. L'origine de l'énergie potentielle de pesanteur sera choisie en O : l'énergie totale initiale du skieur est nulle $E = 0$.

2) Exprimer l'énergie potentielle de pesanteur E_p du skieur en un point de coordonnées (x,y).

3) Exprimer l'énergie totale du skieur $E(t)$ à un instant donné. On notera $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ et $\dot{y} = \frac{dy}{dt}$. Étant donné qu'il n'y a pas de dissipation, que dire de $E(t)$?

4) Exprimer l'intervalle de temps dt entre deux positions (x, y) et $(x + dx, y + dy)$ du skieur.

5) En déduire le temps mis par le skieur pour se rendre de O en A si il suit une trajectoire définie par la fonction $x(y)$ (on considère la trajectoire $x(y)$ du skieur plutôt que la trajectoire $y(x)$). On notera $x' = \frac{dx}{dy}$.

6) Montrer que le long de la trajectoire idéale la quantité $C = \frac{x'}{\sqrt{y(1+(x')^2)}}$ est intégrale première.

7) Vérifier que la forme paramétrique

$$x(\theta) = \frac{2\theta - \sin(2\theta)}{2C^2} \quad y(\theta) = \frac{1 - \cos(2\theta)}{2C^2}$$

est solution du problème.

8) Quelle est cette courbe ? Dessiner qualitativement la trajectoire dans le cas $x'(A) >> 1$. Commenter.

B. Mouvement à force centrale

On considère le mouvement d'un objet ponctuel de masse m dans un espace à 3 dimensions (x_1, x_2, x_3), dans un potentiel $V(\vec{r}) = -\frac{k}{r}$ où r est le module du vecteur position $\vec{r}$.

1) Quel est le hamiltonien $H(p_i, q_i, t)$ du système ?

2) Ecrire les équations de Hamilton. En déduire l'équation du mouvement.

3) Soit $H(p_i, q_i, t)$ le hamiltonien d'un système et $F(p_i, q_i, t)$ une variable dynamique quelconque. Montrer que

$$\frac{dF}{dt} = \{F, H\} + \frac{\partial F}{\partial t}$$

4) En déduire que le moment cinétique $\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p}$ est conservé, où $\vec{p}$ a pour composantes les p_i. Commenter.

5) Donner sans faire de calculs une autre constante du mouvement. Proposer une étude graphique montrant l'existence de différents types de mouvements suivant la valeur de cette constante.

6) On définit le vecteur de Runge-Lenz comme

$$\vec{R} = \frac{\vec{p} \wedge \vec{L}}{m} - k\frac{\vec{r}}{r}$$

A l'aide des crochets de Poisson, vérifier que ce vecteur est aussi une quantité conservée.

7) Montrer que le vecteur $\vec{R}$ est situé dans un plan du mouvement, que l'on peut paramétrer par des coordonnées polaires r, ϕ. On choisira l'origine des ϕ telle que $\vec{R}$ et $\vec{r}$ soient parallèles pour $\phi = 0$. Exprimer $\vec{R} \cdot \vec{r}$ en fonction de L^2 et r.

8) Quelle est la forme géométrique de la trajectoire suivant les valeurs de R et k ?